

## 10 Distrib. limite del RW di Wiestrass

Random Walk di Weierstrass nel dettaglio . . . . .	10.1, p. 35
Serie di Weierstrass e distribuzione stabile per il RW . . . . .	10.2, p. 35

### 10.1 Random Walk di Weierstrass nel dettaglio

Abbiamo visto che per un camminatore di Weierstrass la forma della distribuzione poteva non essere Gaussiana al variare del parametro  $N^2/b$  (Vedi sezione 6.2). Rispetto alla lezione 6 adesso si cambia la notazione:

$$b \rightarrow M \quad N \rightarrow b.$$

Quindi adesso  $b$  è il parametro dell'ampiezza di salto mentre  $M$  è il fattore che smorza il rate. La condizione di rottura del teorema del limite centrale diventa:

$$\frac{b^2}{M} > 1.$$

Cerchiamo la distribuzione invariante per il camminatore di Weierstrass proprio in questo caso. La probabilità di fare un salto  $l$  può essere scritta come:

$$P(l) = \frac{M-1}{2M} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{M^j} [\delta(l - b^j a) + \delta(l + b^j a)].$$

Per capire se è invariante è necessario considerare  $n$  salti, farlo nello spazio reale può essere complicato. Ricordiamo le proprietà generali di questo moto random:

- Occorrono  $\sim M$  salti di  $\pm a$  prima di saltare  $ba$ .
- Occorrono  $\sim M$  salti di  $\pm ba$  ( $M^2$  salti lunghi  $a$ ) prima di saltare  $b^2 a$ .
- etc ...

Queste caratteristiche fanno sì che il sistema esibisca dei cluster di camminatori attorno alle posizioni dei salti più lunghi (sulla scala temporale di osservazione).

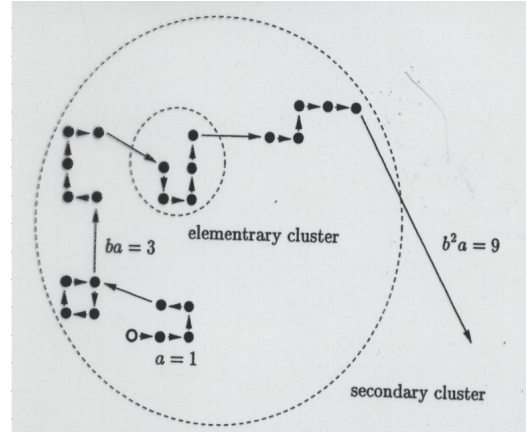


Figura 1.10: Random Walk di Weierstrass ( $b = 3$ ,  $M = 4$ ): formazione dei Cluster (Paul and Baschangel: Stochastic Process, Springer).

Proprio per la formazione di questi cluster su scale spaziali diverse il sistema può presentare un comportamento auto-similare.

Possiamo notare anche come cambiano i risultati al variare dei parametri  $M$  e  $b$ :

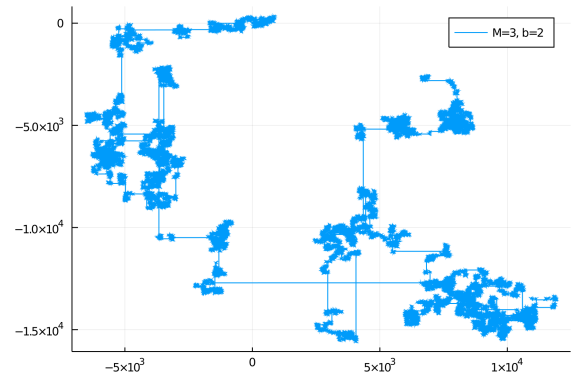


Figura 1.11: Rapporto  $b^2/M = 4/3$  (Link al codice).

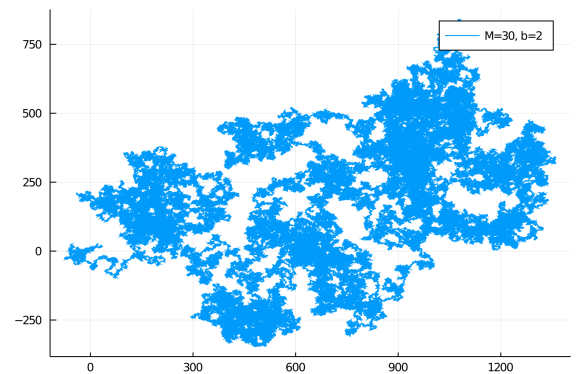


Figura 1.12: Rapporto  $b^2/M = 4/30$ , notiamo come i cluster che si formano siano diversi nei due casi: in questo caso il moto diventa quasi irriconoscibile rispetto ad un RW "normale". (Link al codice).

Mettiamoci nel caso in cui la distribuzione non può essere una Gaussiana e risolviamo per  $\langle l^2 \rangle \rightarrow \infty$ :

$$\langle l^2 \rangle = \frac{(M-1)a^2}{M} \sum \left( \frac{b^2}{M} \right)^j \rightarrow \infty \quad \text{se} \quad \frac{b^2}{M} > 1.$$

Per capire se  $P(l)$  può essere stabile andiamo in trasformata:

## 10.2 Serie di Weierstrass e distribuzione stabile per il RW

Ricordando che:

$$P(k) = \langle e^{ikl} \rangle.$$

Si ottiene:

$$P(k) = \int dl P(l) e^{ikl} = \frac{M-1}{M} \sum_J \frac{\cos(kb^J a)}{M^J}.$$

Questa serie è continua ovunque ma non differenziabile rispetto a  $k$  se  $b > M$ .

Per dimostrare che  $P(l)$  è stabile dobbiamo dimostrare che  $P(k)$  è invariante sotto convoluzione. Partiamo osservando come scala  $P(k)$  se mandiamo  $k \rightarrow bk$ , questo cambio di scala è interessante perché  $b$  è l'unica grandezza fisica che descrive la scala sulla quale avviene il moto del camminatore.

$$\begin{aligned} P(bk) &= \frac{M-1}{M} \sum_{J=0}^{\infty} \frac{1}{M^J} \cos(kb^{J+1}a) = \dots = \\ &= MP(k) - \frac{M-1}{M} \cos(ka). \end{aligned}$$

Per arrivare a questa conclusione si è esplicitata la sommatoria di  $P(bk)$ , moltiplicato e diviso per  $M$  e isolato il primo termine della sommatoria.

### Equazione per la $P(k)$

$$P(k) = \frac{1}{M} P(bk) + \frac{M-1}{M} \cos(ka).$$

Per soddisfare l'invarianza di scala la  $P(k)$  deve soddisfare questa equazione. Dividiamo la soluzione in una parte omogenea ed una particolare.

$$P(k) = \frac{1}{M} P_0(k) + P_p(k).$$

Possiamo sviluppare in serie il coseno per trovare la forma della soluzione particolare:

$$P_p(k) = \frac{M-1}{M} \sum_{J=1}^{\infty} \frac{(-1)^J}{(2J)!} \frac{(ka)^{2J}}{1 - b^{2J}/M} + 1.$$

Notiamo subito che la soluzione particolare non è responsabile della divergenza di  $\langle l^2 \rangle$ , infatti possiamo calcolare il momento secondo come:

$$\langle l^2 \rangle = - \frac{d^2}{dk^2} P_0(k) \Big|_0 - \frac{d^2}{dk^2} P_p(k) \Big|_0.$$

La derivata seconda di  $P_p$  non diverge:

$$\langle l^2 \rangle_p = \frac{M-1}{M} \frac{a^2}{b^2/M - 1} < \infty \quad \text{con } b^2/M > 1.$$

Quindi è il termine omogeneo di pura scala ad essere responsabile della divergenza.

### Scaling discreto della soluzione omogenea

$$P_0(k) = \frac{1}{M} P_0(bk).$$

Possiamo esprimere la soluzione di questa equazione in funzione di una qualunque  $Q(k)$  tale che:

- $Q(k) = Q(bk)$
- $Q(k)$  periodica in  $\ln(k)$  con periodo  $T = \ln(b)$ .

Senza riportare i passaggi la soluzione della omogenea è:

$$P_0(k) = |ka|^\alpha Q(k).$$

con:

$$\alpha = \frac{\ln(M)}{\ln(b)} \quad 0 < \alpha < 2.$$

Che deve essere rispettata per imporre la self-similarità.

Valutando i termini della soluzione,  $P_p$  e  $P_0$ , quando  $k \rightarrow 0$  si nota che sopravvivono solo:

- Il termine unitario nella  $P_p$  (il termine più rilevante nella sommatoria va a zero come  $k^2$ ).
- L'intera soluzione omogenea ( $\alpha < 2$ )

Per  $k \rightarrow 0$  si ha quindi che:

$$P(k) \sim 1 - c(\alpha) |ka|^\alpha.$$

Per ricondurci ad una forma del tipo Levy dobbiamo trovare il modo di esprimere il  $\log P(k)$ , approssimiamo allora la  $P(k)$  ottenuta per  $k \rightarrow 0$  come esponenziale (visto che corrisponde ai primi due termini dello sviluppo di quest'ultimo).

$$P(k) \sim \exp(-c(\alpha) |ka|^\alpha).$$

Quindi:

$$\ln(P(k)) = -c(\alpha) |ka|^\alpha.$$

Che è effettivamente una distribuzione di Levy con  $\alpha = \ln M / \ln b$ . Quindi la distribuzione  $P(l)$  è stabile per tutti i valori di  $b^2/M$ .