

23 Frattali

Mappe non Hamiltoniane	23.1, p. 97
Il concetto di frattale	23.2, p. 98
Algoritmo di Box Counting per stimare la dimensione frattale	23.3, p. 99
Mappa di Henon come meccanismo di Folding e Stretching	23.4, p. 100

23.1 Mappe non Hamiltoniane

Esempio 23.1.1 (Henon Map). Prendiamo l'ennesimo sistema che porta il nome di Henon:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases}.$$

Nello specifico Henon studiò questa mappa con i parametri: $a = 1.4$, $b = 0.3$.

La mappa tangente può essere ricavata dalle derivate:

$$\begin{pmatrix} \delta x_{n+1} \\ \delta y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2ax_n & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_n \\ \delta y_n \end{pmatrix}.$$

$$M = \begin{pmatrix} -2ax_n & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

Visto che il determinante di M è diverso da zero abbiamo una mappa non Hamiltoniana. Il determinante ci dice anche come la mappa trasforma lo spazio delle fasi:

$$\det(M) = -b \implies |\det(M)| < 1.$$

Essendo b minore di 1 in modulo la mappa dovrebbe contrarre lo spazio delle fasi $dx dy$. Provando a simulare la mappa invece si ottengono oggetti di questo tipo:

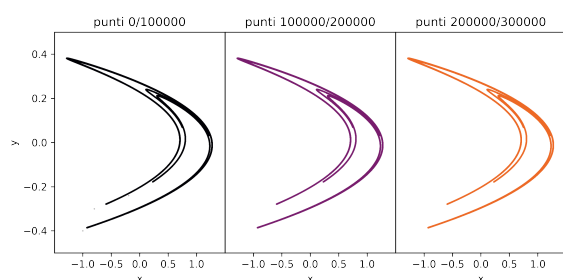


Figura 2.40: Mappa di Henon integrata per valori iniziali $(-1, 0.4)$. Si riportano le prime $3 \cdot 10^5$ iterazioni in 3 blocchi: non cambia nulla dalle prime alle ultime iterazioni. La mappa non doveva contrarre lo spazio delle fasi (che occupa)?

Prima di procedere diamo una importante definizione:

Attrattore

Un attrattore è un insieme (set) di punti che attrae la dinamica di un determinato sistema.

Esempio 23.1.2 (Attrattore di Lorenz). Prendiamo la seguente mappa:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = -xz + rx - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}.$$

I parametri di questo modello sono quantità fisiche, il sistema infatti venne sfruttato per descrivere la fluidodinamica del moto atmosferico da Lorenz. Quest'ultimo voleva dimostrare che nella fluidodinamica atmosferica c'è una forte dipendenza dalle condizioni iniziali.

$$\sigma = \frac{\mu c_p}{k}$$

$r = \text{num. di Raileigh}$

$b = \text{fattore geometrico.}$

In cui μ è la viscosità dell'aria, c_p il suo calore specifico mentre k è la conducibilità. Fisicamente σ descrive il meccanismo con cui il sistema può scambiare calore. Il numero di Rayleigh invece è $> 1 (< 1)$ se il sistema presenta convezione (conduzione).

Per ultimo b è legato al fatto che le ipotesi per questo moto prevedono delle particolari geometrie.

Anche questa mappa assume una forma molto particolare e suggestiva nello spazio delle fasi (Si mostra l'evolvere di una sola condizione iniziale):

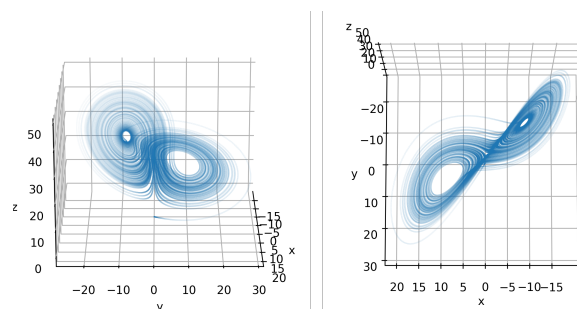


Figura 2.41: Attrattore di Lorenz.

Le tre variabili del sistema rappresentano:

- x la convezione del sistema.
- y La variazione di temperatura.
- La distorsione di y rispetto ad un gradiente lineare di temperatura.

Quello che fa il modello di Lorenz è descrivere il moto dei fluidi all'interno dei Rolls atmosferici: zone in cui nella parte bassa il fluido è caldo mentre in quella alta il fluido è freddo.

Calcoliamo la "divergenza" della mappa $\nabla \mathbf{v}$:

$$\nabla \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial}{\partial z} \dot{z} = -(b + \sigma + 1).$$

Quindi visto che b, σ sono solitamente maggiori di zero anche questa mappa dovrebbe tendere a collassare nello spazio delle fasi.

Possiamo cercare i punti critici della mappa imponendo che le tre equazioni siano nulle, risolvendo il sistema emergono i seguenti punti:

- 1) $x = y = 0$
- 2) $y = \pm \sqrt{b(r-1)} \quad z = r-1 \quad \text{con } r > 1.$

Possiamo adesso linearizzare le equazioni per valutare la stabilità dei punti fissi, la mappa tangente valutata nel punto $(0, 0, 0)$ ha la struttura:

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{x} \\ \delta \dot{y} \\ \delta \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma & -\sigma \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori della mappa sono:

$$\lambda_1 = -b$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4r\sigma}}{2}.$$

Il primo autovalore segnala una contrazione poiché $b > 0$ quindi $\lambda_1 < 0$. Per quanto riguarda la coppia $\lambda_{2,3}$ si ha che sicuramente λ_2 (quello con il $+$) è positivo (se $4r\sigma > 0$), quindi l'origine potrebbe essere un punto iperbolico.

Per quanto riguarda il secondo punto fisso invece tralasciamo il conto, il risultato che si ottiene è:

$$\lambda_1 < 0$$

$$\lambda_{2,3} = \alpha \pm i\beta.$$

Gli autovalori complessi coniugati hanno la particolarità che α cambia di segno per il seguente valore di r :

$$\bar{r} = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}.$$

Quando α assume valori negativi ($r < \bar{r}$) l'oggetto rilassa nel punto fisso, viceversa abbiamo un punto fisso di tipo spirale instabile.

Il problema che non riusciamo al momento a spiegarci non è il fatto che questi oggetti continuino nel loro moto nello spazio delle fasi, quello che non si riesce a spiegare è il fatto che gli oggetti sembrano continuare a muoversi senza un vincolo.

Se pensiamo al pendolo forzato con una forzante periodica abbiamo che la forzante vincolerà il pendolo a fare un moto completamente determinato, quindi di fatto è come se il sistema avesse perso un grado di libertà.

Con l'attrattore di Lorenz non si riesce a fare il medesimo ragionamento perché il moto sembra continuare a vivere in tutte e tre le dimensioni dello spazio delle fasi.

Per spiegare questi fenomeni dobbiamo introdurre dei nuovi concetti:

23.2 Il concetto di frattale

La regola che ne emerge è che data una misura di una quantità m in una determinata scala l , una nuova

misura m' effettuata con scala l' che sia N volte più piccola di l è legata alla dimensionalità D del sistema nel seguente modo:

$$m' = m \cdot N^D.$$

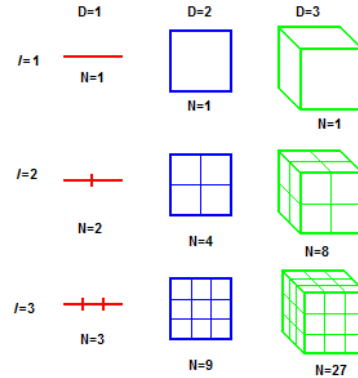


Figura 2.42: Concetto di misura e dimensionalità (wikipedia)

Quindi il rapporto tra due scale differenti va come:

$$\frac{m'}{m} = N^D.$$

Chiamando p il rapporto tra le due misure possiamo invertire quest'ultima relazione per ottenere una buona definizione della dimensionalità del sistema D :

Dimensione frattale

$$D = \frac{\ln p}{\ln N} \quad (23.1)$$

La cosa importante da notare è la generalità della definizione, così generale che appare una cosa controverosa: nessuno ci garantisce che D sia intero in quella formula!

Esempio 23.2.1 (Fiocco di Koch). Noto questo concetto prendiamo un esempio "pratico". Muniamoci di uno strumento di misura che ha una scala l , cerchiamo di adoperarlo per misurare il perimetro di un oggetto che, su questa scala, appare triangolare.

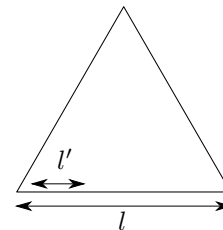


Figura 2.43: triangolo del quale vogliamo misurare il perimetro con la scala più grande.

Il perimetro misura con questa prima scala $3l$. Adesso proviamo a misurarlo con uno strumento avente scala $l/3$, scopriamo che l'oggetto aveva in realtà una forma leggermente diversa:

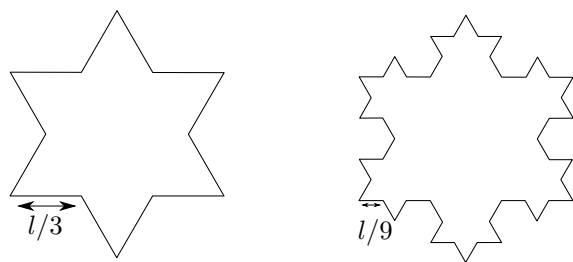


Figura 2.44: La struttura si presenta in modo sempre più complicato al rimpicciolire della scala di osservazione.

Allora la misura del perimetro diventa (figura 2.44 a sinistra) $3 \cdot 4 \cdot l$, diverso dal valore che ci saremmo aspettati per il triangolo "smooth": $3 \cdot 3 \cdot l$.

Iterando ancora il ragionamento la struttura successiva è quella di figura 2.44 a sinistra: abbiamo un perimetro di $3 \cdot 4 \cdot 4l$.

Diventa subito evidente che, se il sistema continua a fare questo scherzetto su tutte le scale, la misura di D per questo esempio ci porta a concludere qualcosa di strano:

$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3}.$$

Otteniamo una dimensionalità che sta a metà tra una superficie ed una linea!

Questo sistema è un famosissimo sistema frattale chiamato fiocco di Koch, la struttura "finale" ricorda appunto un fiocco di neve.

Di insiemi frattali ne esistono tantissimi, solitamente producono tutti effetti grafici mozzafiato ed hanno spesso utilità nel campo dell'"image recognition".

Citiamo alcuni esempi di insiemi famosi:

- Set di Cantor.
- Mandelbrot.
- Triangolo di Sierpinski.
- Julia.

Tornando ai nostri attrattori e le mappe non Hamiltoniane, possiamo definire:

Attrattore frattale

Quando la contrazione di un sistema nello spazio delle fasi incontra strutture sempre più complesse durante la contrazione allora il sistema non si arresta ma continua nel moto.

Nei due esempi esaminati sopra (Henon, Lorenz) succede esattamente questo. Questo è il motivo per cui la dinamica non si arresta.

23.3 Algoritmo di Box Counting per stimare la dimensione frattale

Prendiamo un esempio che abbiamo già esaminato ma del quale non conosciamo la dimensione frattale: la mappa di Henon.

L'idea è quella di suddividere lo spazio delle fasi in quadranti in modo ricorsivo. Per ognuno di questi quadranti si cerca di verificare se sono presenti punti della mappa all'interno.

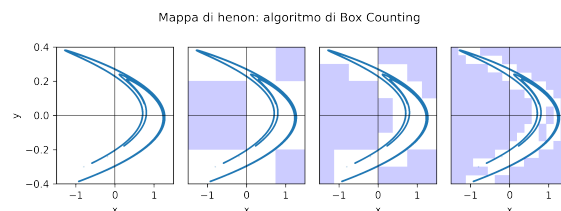


Figura 2.45: Quadranti sempre più piccoli occupati dai punti della mappa.

In conclusione si valuta quanti quadrati sono occupati rispetto alla suddivisione scelta (una potenza di $(1/2)$).

- $1/2 \rightarrow 4$.
- $1/4 \rightarrow 10$.
- $1/8 \rightarrow 27$.

Procedendo in questo modo e continuando a dividere lo spazio in quadrati sempre più piccoli possiamo trovare la dimensione del sistema con la formula 23.1.

In questo caso N è proprio il numero che sta al denominatore per l'elenco sopra (2, 4, 8...).

Effettuando varie misure di p (il numero di quadrati occupati) al variare di N ed effettuando un fit lineare in $\ln(N)$, $\ln(p)$ si ottiene:

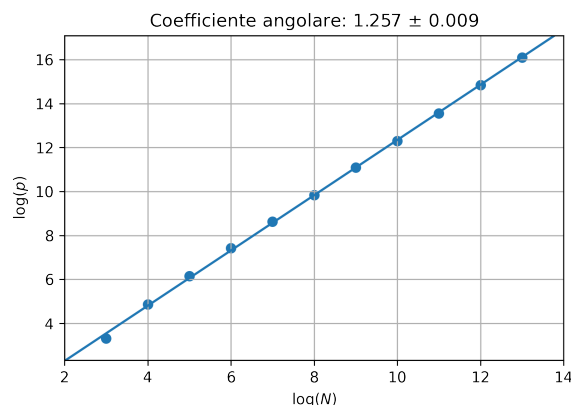


Figura 2.46: Fit lineare: la conclusione del metodo di Box counting.

Il coefficiente angolare rappresenta la dimensionalità del sistema ed il logaritmo è in base 2.

I numeri sugli assi non ci permettono di apprezzare il costo computazionale di questa operazione...

Si ottiene una dimensione frattale compatibile con quella scritta da Wikipedia per il sistema: 1.25 ± 0.02 . Lo stesso metodo può essere applicato all'attrattore di Lorenz, semplicemente in tal caso è necessario usare come scala un cubo (la mappa è 3D). Nel caso di Lorenz emerge anche un altro problema: la dimensionalità costa computazionalmente.

Il metodo di ricerca da me implementato si basa sul

metodo della "rubrica telefonica" ed è scritto in python: in due dimensioni inizia già ad accusare (3 secondi per il grafico sopra). Per fare una cosa tridimensionale forse è giusto lasciare il posto a linguaggi più performanti (quando si tratta di loop) come fortran.

Consiglio di dare un occhio tra i codici poiché l'algoritmo che ho pensato per implementare la ricerca elude il problema del dover creare una matrice enorme per avere una "buona risoluzione" dello spazio delle fasi...

Perché è così importante studiare la dimensione frattale? Perché c'è un teorema che afferma una cosa sconvolgente:

Accenno a teorema Caos-frattale

Se un sistema presenta una dimensione frattale non intera allora il sistema è caotico.

Quindi semplicemente applicando un box counting potremmo dimostrare che il sistema è caotico, senza dover passare dagli altri metodi visti nelle precedenti lezioni.

23.4 Mappa di Henon come meccanismo di Folding e Stretching

La mappa di Henon può esser vista anche come la composizione di 3 mappe distinte, queste tre mappe vengono applicate in successione ad ogni step:

$$\begin{cases} \bar{x} = x \\ \bar{y} = y + 1 - a\bar{x}^2 \end{cases}$$

Questa prima mappa trasporta i punti verso una parabola.

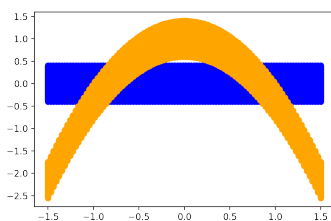


Figura 2.47: Prima mappa

La seconda mappa invece comprime i punti sull'asse x:

$$\begin{cases} \bar{\bar{x}} = b\bar{x} \\ \bar{\bar{y}} = \bar{y} \end{cases}$$

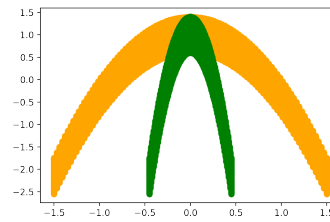


Figura 2.48: seconda mappa

In conclusione abbiamo una riflessione sulla bisettrice del primo quadrante.

$$\begin{cases} \bar{\bar{x}} = \bar{\bar{y}} \\ \bar{\bar{y}} = \bar{\bar{x}} \end{cases}$$

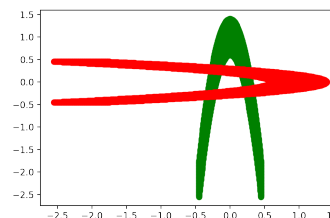


Figura 2.49: Terza mappa