8 SDE e Fokker-Plank

8.1 Legame tra SDE e Fokker-Plank

Prendiamo una equazione differenziale sticastica del tipo:

$$dx = adt + bd\omega.$$

Possiamo immaginare che questa SDE dia luogo ad una distribuzione di probabilità Markoviana, quindi che soddisfi l'equazione di Chapman-Kolmogorov (4.1).
Il problema è che la forma differenziale di CK è molto generale, cerchiamo di capire quale forma assume per soddisfare la SDE sopra.
Prendiamo una generica funzione $f(x(t))$, il suo differenziale è dato dalla formula di $\hat{I}$to:

$$df = \left(a\partial_x f + \frac{1}{2}b^2\partial_{x^2}^2 f\right)dt + b\partial_x f d\omega.$$

Consideriamo la derivata di f rispetto al tempo mediata sulle realizzazioni di ω:

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \right\rangle_\omega = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle f(x(t))\rangle .$$

Essendo $\langle d\omega\rangle_\omega = 0$ si ha che:

$$\frac{\mathrm{d}\langle f\rangle}{\mathrm{d}t} = \left\langle a\partial_x f + \frac{1}{2}b^2\partial_{x^2}^2 f\right\rangle \tag{8.1}$$

Si assume che l'oggetto sia partito da (x_0, t_0), l'equazione di CK ci permette di esprimere $\langle f(x(t))\rangle$ in termini del propagatore $P(x, t|x_0, t_0)$:

$$\langle f(x(t))\rangle = \int dx f(x) P(x, t|x_0, t_0).$$

In tale espressione la dipendenza temporale entra soltanto all'interno del propagatore. Di conseguenza quando la si deriva rispetto a t la derivata agisce solo su $P \equiv P(x, t|x_0, t_0)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle f(x(t))\rangle = \int dx f(x)\frac{\partial}{\partial t}P(x, t|x_0, t_0).$$

A sinistra si sostituisce la 8.1:

$$\int dx \left[a\partial_x f + \frac{1}{2}b^2\partial_{x^2}^2 f\right] P = \int dx f(x)\partial_t P.$$

Integrando per parti a destra dell'uguale e supponendo che la $P(x, t|x_0, t_0)$ non diverga al bordo:

$$\int dx f(x)\partial_t P = \int dx f(x)\left[-\partial_x(aP) + \partial_{x^2}^2\left(\frac{1}{2}b^2 P\right)\right].$$

Visto che la funzione $f(x)$ è arbitraria si ottiene ha la forma di una CK come anticipato:

Legame tra SDE e C-K

La forma differenziale stocastica:

$$dx = adt + bd\omega.$$

Conduce alla equazione di Fokker-Plank (o forma differenziale di CK):

$$\partial_t P(x, t) = \left(-\partial_x a + \frac{1}{2}\partial_{x^2}^2 b^2\right) P(x, t) \tag{8.2}$$

Esempio 8.1.1. Prendiamo i seguenti valori per i parametri della SDE:

- $a(x, t) = a(t)$
- $b(x, t) = b(t)$

$$dx = a(t)dt + b(t)d\omega.$$

Integrando si ha:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)d\omega_s.$$

Mediando sulle realizzazioni di ω l'ultimo termine va via:

$$\langle x(t)\rangle_\omega = \langle x_0\rangle + \int_0^t a(s)ds.$$

Calcoliamo anche la varianza:

$$\begin{aligned}\langle x(t)x(s)\rangle &= \langle (x(t) - \langle x(t)\rangle)(x(s) - \langle x(s)\rangle)\rangle = \\ &= \left\langle \int_0^t b(t')d\omega(t') \int_0^s b(s')d\omega(s')\right\rangle .\end{aligned}$$

Sfruttando le proprietà della varianza per un processo di Wiener:

$$\langle x(t)x(s)\rangle = \int^{\min(t,s)} b^2(t')dt'.$$

Nel caso più semplice in cui a, b costanti:

- $\langle x(t)\rangle = x_0 + at$
- $\langle x(t)x(s)\rangle = b^2\min(t, s)$

Che sono gli stessi risultati ottenuti nel caso del moto Browniano.

Esempio 8.1.2.

$$dx = cxd\omega(t).$$

Potremmo procedere con l'approccio di Stratonovich:

$$\frac{dx}{x} = dy = cd\omega(t).$$

Il problema è che non è detto che l'oggetto a sinistra sia morbido (che sia un processo che si può risolvere

con l'integrale di Stratonovich), quindi questo approccio in generale potrebbe non essere corretto.
Nel caso in cui il processo segua una dinamica "alla Îto" (ad esempio un processo a salti) è necessario utilizzare la formula di Îto per effettuare il cambio di variabili. Prendiamo il seguente:

$$f = y = \ln x.$$

La formula ci dice che:

$$df = \left(af' + \frac{1}{2} b^2 f'' \right) dt + bf' d\omega.$$

Nel nostro caso:

- $a = 0$
- $b = cx$
- $f' = 1/x$
- $f'' = -1/x^2$

Quindi in conclusione si ha una equazione differenziale per y che non è quella che ci saremmo aspettati:

$$dy = -\frac{c^2}{2} dt + c d\omega.$$

Abbiamo in più il primo termine. Integrando:

$$y(t) = y_0 + c\omega(t) - \frac{c^2}{2} t.$$

A questo punto il problema è risolto per x:

$$x(t) = \exp(y) = x_0 \exp\left(c\omega(t) - \frac{c^2}{2} t \right).$$

In cui si evidenzia ancora una volta il fatto che $\omega(t)$ è un processo di Wiener, quindi è interessante capire cosa avviene quando effettuiamo la media su diversi processi (quindi su diverse realizzazioni di ω).
Possiamo calcolare $\langle x \rangle_\omega$ sfruttando il fatto che il valor medio di un processo gaussiano è nullo.

$$z \in G(0, 1) \implies \langle z \rangle = 0.$$

Nella nostra equazione abbiamo una espressione del tipo $\langle \exp(z) \rangle$, sfruttando le proprietà dei momenti di un processo Gaussiano si ha che:

$$\langle \exp(z) \rangle = \exp\left(\frac{\langle z^2 \rangle}{2} \right) \tag{8.3}$$

Per dimostrarlo è necessario utilizzare lo sviluppo dell'esponenziale, i momenti maggiori del secondo si annullano e rimane soltanto quello.
Otteniamo in conclusione che:

$$\begin{aligned} \langle x(t) \rangle &= \langle x_0 \rangle \exp\left(-\frac{c^2}{2} t \right) \langle \exp(c\omega(t)) \rangle = \\ &= \langle x_0 \rangle \exp\left(-\frac{c^2}{2} t \right) \exp\left(\frac{c^2}{2} t \right) = \langle x_0 \rangle . \end{aligned}$$

Analogamente si può fare con la correlazione:

$$\begin{aligned} \langle x(t)x(s) \rangle = \langle x_0^2 \rangle e^{-\frac{c^2}{2}(t+s)} \left\langle e^{c(\omega(t)+\omega(s))} \right\rangle &= \\ = \langle x_0^2 \rangle e^{-\frac{c^2}{2}(t+s)} e^{\left\langle \frac{c^2}{2} (\omega(t)+\omega(s))^2 \right\rangle} &= \\ = \langle x_0^2 \rangle e^{c^2 \min(t,s)}. \end{aligned}$$

In cui si è sfruttata la seguente:

$$\begin{aligned} &\langle (\omega(t) + \omega(s))^2 \rangle = \\ &\quad = \langle \omega(t)^2 \rangle + \langle \omega(s)^2 \rangle + 2 \langle \omega(t)\omega(s) \rangle = \\ &\quad = t + s + 2\min(t, s). \end{aligned}$$

Se avessimo fatto il conto con Stratonovich avremmo ottenuto delle quantità divergenti:

$$\begin{aligned} \langle x(t) \rangle &= \langle x_0 \rangle \exp\left(\frac{1}{2} c^2 t \right) \\ \langle x_t x_s \rangle &= \langle x_0^2 \rangle \exp\left(\frac{1}{2} c^2 \left(t + s + 2\min(t, s) \right) \right). \end{aligned}$$

Quindi i due metodi di integrazione portano a dinamiche completamente differenti, è necessario stare attenti ad usare di volta in volta il metodo più opportuno.

Esempio 8.1.3 (Oscillatore Kubo)**.** Si studia la precessione di uno spin attorno ad un campo magnetico ω:

$$dz = i \left(\omega dt + \sqrt{2\gamma} d\omega_t \right) z.$$

Il secondo termine indica che il campo magnetico non è costante, contiene fluttuazioni $d\omega$. Come conseguenza vedremo che il pacchetto di spin inizierà a sparpagliarsi.
Visto che le fluttuazioni del campo devono avere un Cut-Off ad alte frequenze è opportuno usare l'integrazione "fisica" di Stratonovich.
Possiamo valutare il valor medio di z integrando nel modo a noi noto:

$$\frac{dz}{z} = i\omega t + i\sqrt{2\gamma} d\omega_t.$$

La soluzione per z è ovviamente l'esponenziale del termine di destra, facendo il valor medio e sfruttando la 8.3 si ottiene:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle z \rangle = (i\omega - \gamma) \langle z \rangle .$$

Come accennato il primo termine fa girare lo spin, il secondo lo sparpaglia.

$$\langle z_t \rangle = \langle z_0 \rangle \exp\left((i\omega - \gamma) t \right).$$

Essendo in questo caso z una quantità complessa possiamo calcolare una correlazione del tipo:

$$\langle z_t z_s^* \rangle = \ldots = \langle z_0^2 \rangle e^{i\omega(t-s) - \gamma|t-s|}.$$

La funzione di correlazione decade esponenzialmente con un tempo $1/\gamma$, legato alla fluttuazione del campo magnetico.

Esempio 8.1.4.

$$dx = -kxdt + \sqrt{D}d\omega_t.$$

Questa è "parente" del processo di Ornstein-Uhlenback:

$$dx = f(x)dt + \sqrt{D}d\omega_t.$$

Per risolverla si parte dalla omogenea:

$$dx = fdt = -kxdt.$$

Visto che il termine di rumore è costante:

$$g = \sqrt{D} \implies \begin{cases} g = \text{cost} \\ g' = 0 \end{cases}.$$

Allora in questo caso Îto e Stratonovich conducono allo stesso risultato.
Utilizziamo il calcolo di Îto, la prima cosa da fare è cercare il giusto cambio di variabile. Scegliamo:

$$y = xe^{kt}.$$

La formula di Îto per funzioni dipendenti dal tempo si scrive come:

$$df = \left[a\partial_x f + \frac{b^2}{2}\partial^2_{x^2} f + \partial_t f\right] dt + b\partial_x f d\omega.$$

Sviluppando le derivate si ottiene che:

$$dy = \sqrt{D}e^{kt}d\omega.$$

E quindi tornando indietro abbiamo anche la x:

$$x(t) = x_0 e^{-kt} + \sqrt{D}\int_0^t e^{-k(t-t')}d\omega_{t'}.$$

Mediando nel tempo nuovamente i termini con $d\omega$ si cancellano:

$$\langle x(t)\rangle = \langle x_0\rangle e^{-kt}.$$

Per la varianza il calcolo è più elaborato, riportiamo la conclusione:

$$\begin{aligned} &\text{var}\{x(t)\} = \\ &= \left\langle \left[(x_0 - \langle x_0\rangle)e^{-kt} + \sqrt{D}\int^t e^{-k(t-t')}d\omega_{t'}\right]^2 \right\rangle = \\ &= e^{-2kt}\left[\text{var}\{x_0\} - \frac{D}{2k}\right] + \frac{D}{2k}. \end{aligned}$$

Quindi la varianza ha un valore stazionario ed un termine che decade esponenzialmente.

8.2 Ornstein-Uhlenback dipendente dal tempo

Prendiamo la seguente SDE:

$$dx = -a(t)xdt + b(t)d\omega.$$

L'algebra da seguire è simile a quella dell'esempio precedente, risolviamo l'omogenea (senza ω):

$$x(t) = \exp\left(-\int_0^t a(s)ds\right)x_0.$$

Si inserisce adesso la parte disomogenea:

$$\begin{aligned} x(t) = &x_0 \exp\left(-\int_0^t a_s ds\right) + \\ &+ \int_0^t \exp\left(-\int_{t'}^t a(s)ds\right) b(t')d\omega_{t'}. \end{aligned}$$

Al solito si può mediare in ω per mandare via il secondo integrale:

$$\langle x(t)\rangle = \langle x_0\rangle \exp\left(-\int_0^t a(s)ds\right).$$

Mentre per la covarianza si ha che:

$$\begin{aligned} \langle x(t), x(t)\rangle = &\exp\left(-2\int_0^t a(s)ds\right)\langle x_0, x_0\rangle + \\ &+ \int_0^t dt' \exp\left(-2\int_{t'}^t a(s)ds\right) b^2(t'). \end{aligned}$$

8.3 SDE in 2D

Una generica SDE in due dimensioni può essere espressa mediante il seguente sistema:

$$\begin{cases} dx_1 = f_1 dt + b_{11}d\omega_1 \\ dx_2 = f_2 dt + b_{21}d\omega_1 + b_{22}d\omega_2 \end{cases} \tag{8.4}$$

Notiamo che, per mantenere l'equazione generale, nell'equazione per dx_2 si ha una componente per il processo stocastico ω_1 ed un ulteriore processo stocastico indipendente ω_2.
Si procede calcolando valori medi, covarianze e correlazioni dei due processi:

$$\begin{aligned} &\langle dx_1\rangle \sim \langle f_1 dt\rangle \\ &\langle dx_2\rangle \sim \langle f_2 dt\rangle \qquad \text{cov}(dx_1^2) \sim b_{11}^2 \\ &\text{cov}(dx_2^2) \sim b_{21}^2 + b_{22}^2 \\ &\text{cov}(dx_1 dx_2) \sim b_{11}b_{21}. \end{aligned}$$

Quindi, per quanto visto sopra, possiamo aspettarci una equazione di Fokker-Plank per il processo del seguente tipo:

$$\begin{aligned} \partial_t P(x_1, x_2, t) = &[-\partial_{x_1} f_1 - \partial_{x_2} f_2 + \\ &+ \frac{1}{2}\partial^2_{x_1^2} b_{11}^2 + \\ &+ \frac{1}{2}\partial^2_{x_2^2}\left(b_{21}^2 + b_{22}^2\right) + \\ &+ \partial_{x_1}\partial_{x_2}\left(b_{11}b_{21}\right)] P(x_1, x_2, t). \end{aligned}$$