7 Integrali con variabili stocastiche

7.1 Integrali stocastici

Sia x una variabile stocastica, il differenziale di questa variabile lo definiamo come:

$$dx = d\omega(t) \tag{7.1}$$

Ipotizziamo che il processo stocastico sia un processo di Wiener, in tal caso:

$$P(d\omega) \sim \exp\left(-\frac{(d\omega)^2}{dt}\right).$$

Con dt differenziale temporale.
Prendiamo allora una funzione $G(t)$, vogliamo definire cosa significa calcolare l'integrale di $G(t)$ se la misura è stocastica ($d\omega(t)$).

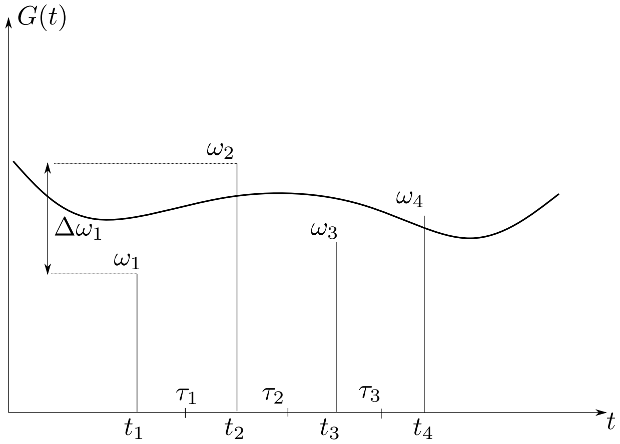

Figura 1.6: Funzione $G(t)$ con punti stocastici ω_i, $\Delta\omega_i$ è la distanza sull'asse y tra il punto ω_{i-1} e ω_i.

Definiamo l'integrale di $G(t)$ come mean-square limit:

Integrale stocastico

$$\int_{t_0}^{t_n} G(s)d\omega(s) \equiv \operatorname*{ms-lim}_{n\to\infty} \sum_i G(\tau_i)\left[\omega(t_i) - \omega(t_{i-1})\right]$$

Il valore dell'integrale dipende dalla scelta dei τ_i.

Il limite in questione è definito analogamente a quanto definito nella 2.3.2: sia I il risultato dell'integrale, allora deve valere che:

$$\lim_{n\to\infty}\left\langle\left(I - \sum_i G(\tau_i)\left[\omega(t_i) - \omega(t_{i-1})\right]\right)^2\right\rangle = 0.$$

É interessante utilizzare come $G(t)$ il processo di Wiener stesso per vedere cosa succede:

$$G(t) = \omega(t).$$

Inoltre definiamo gli step τ_i come:

$$\tau_i = t_{i-1} + \alpha(t_i - t_{i-1}) \qquad 0 < \alpha < 1.$$

Valutiamo la sommatoria all'interno della definizione:

$$\begin{aligned}\langle S_n\rangle &= \sum_{i=0}^{n}\langle\omega(\tau_i)\left[\omega(t_i) - \omega(t_{i-1})\right]\rangle = \\ &= \sum_{i=0}^{n}\langle\omega(t_{i-1} + \alpha(t_i - t_{i-1}))\omega(t_i)\rangle + \\ &\quad - \langle\omega(t_{i-1} + \alpha(t_i - t_{i-1}))\omega(t_{i-1})\rangle .\end{aligned}$$

Ricordando che nei processi di Wiener vale:

$$\langle\omega(t)\omega(s)\rangle = \min(s,t).$$

Rimane soltanto:

$$\begin{aligned}\langle S_n\rangle &= \sum_{i=0}^{n} t_{i-1} + \alpha(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=0}^{n} t_{i-1} = \\ &= \alpha(t_n - t_0).\end{aligned}$$

Di conseguenza con la scelta 7.1 per i τ_i contano solo l'istante finale ed iniziale. Quindi anche facendo il limite per $\Delta t \to 0$ (quindi $n \to \infty$) il limite dipende sempre da α.
Quando $\alpha = 0$ l'integrale si annulla, mentre quando $\alpha = 1$ l'integrale è l'intervallo temporale.
La vera domanda da porsi è quale sia il giusto valore di α...

7.2 Integrale di Îto e di Stratonovich

Integrale di Îto

Îto è un matematico Giapponese, integrare con Îto implica scegliere τ_i all'inizio dell'intervallo.

Integrale di Îto

$$\alpha = 0.$$

$$\tau_i = t_{i-1}.$$

Le somme parziali con questo integrale si scrivono come:

$$S_n = \sum_i \omega(t_{i-1})\left[\omega(t_i) - \omega(t_{i-1})\right].$$

L'integrazione di Îto forma una `Martingala`.

Martingala Dato un set di variabili stocastiche:

$$\{x_i\} : E(|x_i|) < \infty.$$

$$\{x_i\} \text{ è marting.} \iff E(x_{n+1}|x_1, \dots, x_n) = x_n.$$

Con E: valore di aspettazione.
Possiamo notare che il processo di Wiener realizza una martingala perché rispetta questa proprietà.
Il calcolo di Îto è anche non anticipante:

Funzione non anticipante

$G(t)$ è non anticipante se è indipendente dall'incremento $\omega(t) - \omega(s)$ $\forall t, s$.

Esempio 7.2.1 (Esempi di funzioni non anticipanti)**.** Dato un processo di Wiener $\omega(t)$ tutte le seguenti funzioni sono non anticipanti:

- $\omega(t)$.
- $\int dt f(\omega(t))$.
- $\int d\omega f(\omega(t))$.

Integrale di Stratonovich

Stratonovich era un fisico russo, integrare con Stratonovich implica scegliere il centro dell'intervallo.

Integrale di Stratonovich

$$\alpha = \frac{1}{2}.$$

$$\tau_i = \frac{1}{2}\left(\tau_{i-1} + \tau_i\right).$$

Le somme parziali in questo caso si scrivono come:

$$S_n = \sum_i \omega\left(\frac{t_i + t_{i-1}}{2}\right)\left[\omega(t_i) - \omega(t_{i-1})\right].$$

L'integrale di Stratonovich ha caratteristiche analoghe a quello che si usa normalmente in fisica, infatti si applica bene con funzioni "morbide".

Esempio 7.2.2.

$$\int_0^t \omega(t)dt = \begin{cases} \dfrac{\omega^2(t)}{2} - \dfrac{\omega^2(0)}{2} = \dfrac{t}{2} & \text{Strato} \\ \sum \omega_{i-1}\left(\omega_i - \omega_{i-1}\right) = 0 & \text{Îto} \end{cases}$$

7.3 Incremento stocastico e temporale.

Dato ω processo di Wiener, allora vale la seguente:

$$(d\omega)^2 \sim dt.$$

Questo significa che $d\omega$ è continuo ma non è differenziabile, come accennato nella Sezione 5.1 per i processi di Wiener.
Tutti gli ordini più alti dell'incremento si annullano:

$$d\omega^{N+2} \sim 0 \qquad \forall N > 0.$$

Più formalmente, consideriamo il seguente integrale calcolato con il metodo di Îto:

$$\int (d\omega)^{2+N}\, G(t) = \operatorname*{ms-lim}_{n\to\infty} \sum_{i=0}^n G_{i-1}(\Delta\omega_i)^{2+N}.$$

In cui $\Delta\omega_i = \omega_i - \omega_{i-1}$. Dimostriamo che questo integrale vale:

$$\operatorname*{ms-lim}_{n\to\infty} \sum_{i=0}^n G_{i-1}(\Delta\omega_i)^{2+N} = \begin{cases} \int dtG(t) & N = 0 \\ 0 & N > 0 \end{cases}$$

Partiamo con l'esprimere il risultato per $N = 0$, quindi vogliamo dimostrare che:

$$\int G(t)\,(d\omega)^2 = \int G(t)dt \tag{7.2}$$

In termini di Îto il risultato dell'integrale si esprime come:

$$\int G(t)dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^n G_{i-1}\Delta t_i.$$

Dimostrando la relazione 7.2 si ha la tesi. Per farlo utilizziamo la definizione di limite m-s (la quantità sotto definita I deve tendere a 0):

$$\begin{aligned} I = &\lim_{n\to\infty} \left\langle \left[G_{i-1}\left(\Delta\omega_i^2 - \Delta t_i\right)\right]^2 \right\rangle = \\ = &\lim_{n\to\infty} \left\langle \sum_{i=0}^n G_{i-1}^2 \left(\Delta\omega_i^2 - \Delta t_i\right)^2 \right\rangle + \\ &+ 2\sum_{i>j}^n \left\langle G_{i-1}Gj - 1\left(\Delta\omega_j^2 - \Delta t_j\right)\left(\Delta\omega_i^2 - \Delta t_i\right)\right\rangle. \end{aligned}$$

I due termini all'interno della prima sommatoria (su $i = 0 \to \infty$) sono indipendenti perché il processo è non anticipante, lo stesso vale per la seconda sommatoria con il termine $\left(\Delta\omega_i^2 - \Delta t_i\right)$ e tutti i restanti a moltiplicare. Di conseguenza si possono mediare separatamente i termini indipendenti.
Esplicitiamo la relazione $\left\langle\left(\Delta\omega_i^2 - \Delta t_i\right)^2\right\rangle$ ricordando la eq. 5.2:

$$\left\langle \Delta\omega_i^2 \right\rangle = \Delta t_i \tag{7.3}$$

Ed anche la eq. 3.1:

$$\left\langle \Delta\omega_i^4 \right\rangle = 2\left(\sigma^2\right)^2 = 3\Delta t_i^2.$$

Possiamo esplicitare i vari termini nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \left\langle\left(\Delta\omega_i^2 - \Delta t_i\right)^2\right\rangle &= \left\langle\Delta\omega_i^4\right\rangle - 2\Delta t_i\left\langle\Delta\omega_i^2\right\rangle + \Delta t_i^2 = \\ &= 3\Delta t_i^2 - 2\Delta t_i^2 + \Delta t_i^2 = 2\Delta t_i^2. \end{aligned}$$

I termini della seconda sommatoria sono tutti nulli perché:

$$\left\langle\left(\Delta\omega_i^2 - \Delta t_i\right)\right\rangle = \Delta t_i - \Delta t_i = 0.$$

Per via della eq. 7.3. In conclusione il limite vale:

$$\lim_{n\to\infty} 2\sum_{i=0}^{n} \left\langle G_{i-1}^2 \right\rangle \Delta t_i^2 = 0.$$

Perché Δt_i^2 tende a 0 con $n \to \infty$.
Quindi è dimostrata la relazione 7.2 (proprio per la definizione di limite m-s) e di conseguenza si ha l'andamento atteso:

$$d\omega \sim O(dt^{1/2}) \tag{7.4}$$

Applicazione: Differenziale di una funzione

Prendiamo una funzione del tempo e del processo di Wiener: $f[\omega, t]$. Visto che si ha la 7.4 il differenziale df all'ordine più basso è:

Differenziale di una funzione

$$df[\omega, t] = \left[\frac{\partial d}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2}\right] dt + \frac{\partial f}{\partial \omega} d\omega.$$

Questa struttura per il differenziale di una funzione è profondamente legata alla formula di Îto.

7.4 Formula di Îto

Supponiamo di avere una SDE della seguente forma:

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)d\omega.$$

La soluzione formale è del seguente tipo:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(x,s)ds + \int_{t_0}^{t} b(x,s)d\omega(s).$$

Supponiamo che esista una ed una sola soluzione non anticipante [3].
Allora se ho una $f(x,t)$ con x soluzione della SDE scrivendone il differenziale all'ordine più basso si ha:

Formula di Îto

$$df(x,t) = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + a\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right] dt + b\frac{\partial f}{\partial x} d\omega.$$

con $dx = adt + bd\omega$.

L'utilità della formula è che ci permette di fare cambi di variabili con funzioni dipendenti da una variabile casuale.

7.5 Integrale di una SDE

Prendiamo una SDE (Stochastical Differential Equation) del seguente tipo:

$$dx = f(x)dt + g(x)d\omega.$$

[3] Le ipotesi per cui vale sono negli appunti

Con ω processo di Wiener.
Nell'equazione abbiamo una parte deterministica ($f(x)dt$) ed una stocastica ($g(x)d\omega$).

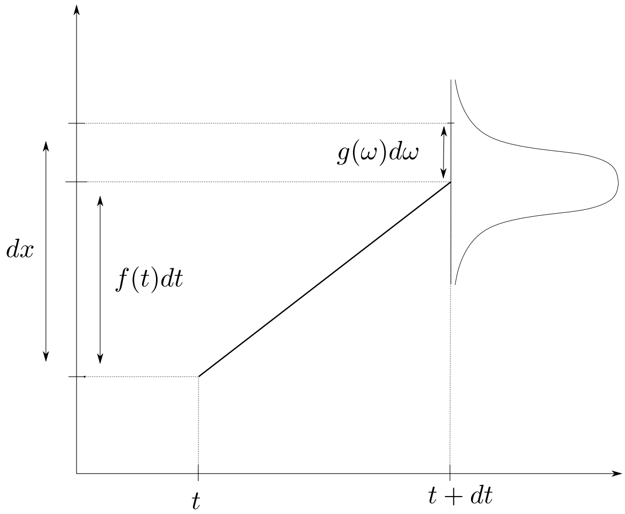

Figura 1.7: La linea rappresenta l'incremento della parte deterministica, in alto abbiamo invece il processo stocastico che discosta la x dalla parte di funzione deterministica (come un rumore sovrapposto al segnale).

Abbiamo detto che formalmente possiamo integrare nel seguente modo (con h passo di integrazione):

$$x_h - x_0 = \int_0^h f(x(s))ds + \int_0^h g(x(s))d\omega.$$

La formalità dell'espressione deriva dal fatto che le funzioni f e g dipendono da x, quindi non possiamo semplicemente risolvere questo integrale.

Soluzione perturbativa

Se prendiamo un passo di integrazione h piccolo, possiamo sviluppare f e g attorno al punto x_0:

$$f(x_s) = f_0 + f_0'\delta x_s + \frac{1}{2}f_0''(\delta x_s)^2$$
$$g(x_s) = g_0 + g_0'\delta x_s + \frac{1}{2}g_0''(\delta x_s)^2.$$

Con $\delta x_s = x_s - x_0$. Sostituendo nella equazione per la soluzione formale e tenendo solo l'ordine più basso si ha:

$$\delta x_h = \int_0^h f_0 ds + \int_0^h g_0 d\omega = f_0 h + g_0 \int_0^h d\omega.$$

Al secondo termine abbiamo un integrale stocastico. Questo indica che, operativamente, per effettuare una integrazione numerica e calcolare il punto successivo x_{n+1} si deve:

- Valutare la f nel punto x_n.
- Valutare la g nel punto x_n (la g di per se è solo una funzione, se la variabile è deterministica anche la g da un risultato deterministico).
- Ipotizzare una distribuzione per ω.

- Estrarre ogni volta un valore Z_n secondo tale distribuzione [4] facendo in modo che, alla fine del processo, i valori siano distribuiti secondo la distribuzione di ω.
- $x_{n+1} = f(x_n)h + g(x_n)Z_n$

Il procedimento funziona perché l'integrale:

$$\int_0^h d\omega.$$

É la somma di variabili Gaussiane, di conseguenza è anch'esso un processo con distribuzione Gaussiana:

$$Z_1(h) \equiv \int_0^h d\omega.$$

Vediamo le proprietà di Z_1:

$$\langle Z_1(h) \rangle = \int_0^h \langle d\omega \rangle = 0.$$

Poiché il processo di Wiener ha media nulla.

$$\begin{aligned}\left\langle Z^2(h) \right\rangle &= \left\langle \int_0^h d\omega_s \int_0^h d\omega_t \right\rangle = \\ &= \left\langle \sum_i (\omega_i - \omega_{i-1}) \sum_J (\omega_J - \omega_{J-1}) \right\rangle = \\ &= \sum_i \sum_J \Delta t \delta_{iJ} = h.\end{aligned}$$

Dove per risolvere si è usato che:

$$\left\langle \Delta\omega^2 \right\rangle = \Delta t.$$

Se ne conclude che la variabile Z_1 è una Gaussiana a media nulla e con varianza $\sqrt{h}$:

$$Z_1 \in G(0, \sqrt{h}).$$

Operativamente possiamo generare un numero random tra 0 e 1:

$$Y_1(i) \in G(0,1).$$

Ed ottenere la variabile da moltiplicare a g_0 con:

$$Z_1(h) = \sqrt{h} Y_1(i).$$

In conclusione si ha che:

$$\delta x_h = f_0 h + g_0 Z_1(h).$$

Guardando l'espressione notiamo che il primo termine è di ordine h mentre il secondo è di ordine $\sqrt{h}$ poiché è un processo di Wiener.
Risulta quindi necessario capire se ci siamo persi dei termini di ordine h nella parte di sviluppo stocastico. Possiamo prendere la soluzione perturbativa al primo ordine e inserirla nuovamente all'interno dello sviluppo.

[4] caratterizzeremo meglio tale distribuzione sotto

Ci limitiamo inoltre ad inserire solo il termine all'ordine più basso ($g_0 Z_1(h)$) poiché il termine con f_0 darebbe sicuramente contributi di ordine superiore.

$$\delta x_s^{(1/2)} = g_0 Z_1(h) = g_0 \int_0^h d\omega.$$

$$\begin{aligned}\delta x_t = &\int_0^t \left(f_0 + f_0' g_0 \int_0^s d\omega_r \right) ds + \\ &+ \int_0^h \left(g_0 + g_0' g_0 \int_0^s d\omega_r \right) d\omega_s.\end{aligned}$$

L'unico contributo di ordine h deriva dal secondo integrale, che ci da un termine del tipo:

$$\int_0^t \int_0^s d\omega_r d\omega_s = \int_0^t \omega_s d\omega_s.$$

Quindi adesso dobbiamo decidere quale calcolo utilizzare: Îto oppure Stratonovich.

L'evoluzione dell'equazione differenziale stocastica dipende dalla scelta del metodo di integrazione.

$$\int_0^t \omega_s d\omega_s = \begin{cases} \dfrac{\omega_t^2}{2} & \text{Strato} \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\omega_t^2}{2} - t\right) & \text{Îto} \end{cases}$$

In entrambi i casi si ottiene un termine $O(h)$, quindi:

$$\delta x_h = g_0 Z_1(h) + f_0 h + \frac{g_0 g_0'}{2} \cdot \alpha(\hat{\text{I}}, S)$$

Con $\alpha(\hat{\text{I}}, S)$ data da:

$$\alpha(\hat{\text{I}}, S) = \begin{cases} Z_1^2(h) & \text{Strato} \\ Z_1^2(h) - h & \hat{I}to \end{cases}$$

Uguaglianza tra i due metodi

Effettuando il seguente cambio di variabili:

$$dx = \left(f - \frac{1}{2} g g' \right) dt + g d\omega.$$

si ha che i due δx_h (Îto e Stratonovich) si eguagliano poiché il termine aggiunto va a compensare il termine che subentra con l'integrale di Îto.
L'importanza di questo "cambio di variabili" è che ci autorizza ad utilizzare l'approccio di Stratonovich anche per sistemi che fisicamente andrebbero trattati con Îto [5].

[5] Stratonovich permette algoritmi di integrazione più potenti.

7.6 Algoritmo di Heun

Operativamente (per davvero) si usa spesso l'algoritmo di Heun per l'integrazione di SDE: si tratta di un algoritmo a 3 step:

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_1 &= x_0 + Z_1 g_0 + f_0 h + \frac{1}{2} g_0 g_0' Z_1^2 \\
x_1 &= x_0 + Z_1 g(\tilde{x}_0) + f(\tilde{x}_0) + \frac{1}{2} g(\tilde{x}_0) g'(\tilde{x}_0) Z_1^2 \\
x_h &= \frac{1}{2} \left(x_1 + \tilde{x}_1 \right) .
\end{aligned}$$

Sostanzialmente equivale a fare un primo step di predizione ed un successivo step di correzione.