

## 4 Definizione di processi di Markov

Processi stazionari e processi di Markov	4.1, p. 15
Equazione di C-K	4.2, p. 15
Continuità dei processi stocastici	4.3, p. 16
Forma differenziale di C-K	4.4, p. 16

### 4.1 Processi stazionari e processi di Markov

#### Probabilità di un processo

Prendiamo un oggetto vittima di un processo stocastico dipendente dal tempo e mettiamoci in un sistema di coordinate spaziali  $x$ .

Possiamo descrivere completamente il processo con la sequenza di  $P_n$  definite come:

$$P_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n).$$

Ovvero la densità di probabilità che l'oggetto si trovi in  $x_1$  al tempo  $t_1$ ,  $x_2$  al tempo  $t_2$  etc...

Per descrivere il moto non basta la densità di probabilità allo step  $n$ -esimo ma serve l'intera sequenza  $P_1, P_2, \dots$ .

Scegliamo una base spazio temporale ( $\bar{x} = (x, t)$ ), le proprietà delle  $P_n$  sono:

- $P_n \geq 0$ .
- Simmetria:  $P_n(\bar{x}_1; \bar{x}_2; \dots) = P_n(\bar{x}_2; \bar{x}_1; \dots)$ .
- Completezza:

$$\int P_n(\bar{x}_1; \dots; \bar{x}_n) dx_n = P_{n-1}(\bar{x}_1; \dots; \bar{x}_{n-1}).$$

- Norma:  $\int P_1(\bar{x}_1) dx_1 = 1$

Possiamo calcolare il valor medio di una quantità nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \langle x(t_1) \cdot \dots \cdot x(t_n) \rangle &= \\ &= \int_{R^n} dx_1 \dots dx_n P_n(\bar{x}_1; \dots; \bar{x}_n) x_1 \dots x_n. \end{aligned}$$

#### Processi stazionari

Un processo si dice stazionario se  $\forall n$ :

$$\begin{aligned} P_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) &= \\ &= P_n(x_1, t_1 + \Delta t; \dots; x_n, t_n + \Delta t). \end{aligned}$$

#### Probabilità condizionata

Ipotizziamo che all'istante  $t_i$  l'oggetto si trovi in  $x \in [x_i, x_i + \Delta x]$  (con  $i \in [1, k]$ ).

Allora la probabilità che l'oggetto si trovi in un istante successivo  $t_{k+l}$  in un intervallo  $[x_{k+l}, x_{k+l} + \Delta x]$  è:

$$\begin{aligned} P_{k+l}(\bar{x}_1; \dots; \bar{x}_{k+l}) &= \\ &= P_k(\bar{x}_1; \dots; \bar{x}_k) \cdot P_{l|k}(\bar{x}_{k+1}; \dots; \bar{x}_{k+l} | \bar{x}_1; \dots; \bar{x}_k). \end{aligned}$$

Con  $P_{l|k}$  probabilità di trovarsi in un intorno di  $x_{k+l}$  condizionata dai primi  $k$  step.

**Esempio 4.1.1** (Prob. condizionata dal primo step).

Ipotizziamo di avere la probabilità di essere in  $x_1$  al tempo  $t_1$ , vogliamo trovare la probabilità di essere in  $x_2$  al tempo  $t_2$ :

$$P_2(\bar{x}_1; \bar{x}_2) = P_{1|1}(\bar{x}_2 | \bar{x}_1) \cdot P_1(\bar{x}_1).$$

#### Processi di Markov

Un processo si dice Markoviano se le sole conoscenze di  $P_1$  e di  $P_{1|1}$  sono sufficienti per studiare l'intera evoluzione del processo.

$$P_{1|n-1}(\bar{x}_n | \bar{x}_1; \dots; \bar{x}_{n-1}) = P_{1|1}(\bar{x}_n | \bar{x}_{n-1}).$$

Fisicamente un processo di questo tipo indica che il sistema è senza memoria.

### 4.2 Equazione di C-K

L'equazione di Chapman-Kolmogorov si applica ai processi Markoviani. Si parte dalla seguente identità:

$$\sum_B P(A \cap B \cap C) = P(A \cap C).$$

Per un processo Markoviano (con ordinamento  $t_1 < t_2 < t_3$ ) l'equazione per la  $P_3$  è:

$$P_3(\bar{x}_1; \bar{x}_2; \bar{x}_3) = P_{1|1}(\bar{x}_3 | \bar{x}_2) P_{1|1}(\bar{x}_2 | \bar{x}_1) P_1(\bar{x}_1).$$

Integrando rispetto alla coordinata  $x_2$  e sfruttando la completezza delle  $P_n$  si ha:

$$\int P_3(\bar{x}_1; \bar{x}_2; \bar{x}_3) dx_2 = P_2(\bar{x}_1; \bar{x}_3) = P_{1|1}(\bar{x}_3 | \bar{x}_1) P_1(\bar{x}_1).$$

Mettendo tutto insieme e semplificando ambo i lati la  $P_1(\bar{x}_1)$ :

#### Equazione di Chapman-Kolmogorov

$$P_{1|1}(x_3 | x_1) = \int P_{1|1}(x_3 | x_2) P_{1|1}(x_2 | x_1) dx_2.$$

Quindi un processo Markoviano rispetta l'equazione di Chapman-Kolmogorov, tuttavia non vale il viceversa!

### 4.3 Continuità dei processi stocastici

**Definizione 4.3.1** (Processo continuo). Un processo stocastico si dice continuo se  $\forall \epsilon > 0$ :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Sigma_\epsilon} dx_1 P_{1|1}(x_1, t + \Delta t | x_2, t) = 0.$$

$$\Sigma_\epsilon : \{|x_1 - x_2| > \epsilon\}.$$

In pratica serve che il cammino descritto dal processo sia continuo, la distanza tra due punti del processo deve andare a 0 più rapidamente di  $\Delta t$ .

I processi Markoviani non sono necessariamente continui:

**Esempio 4.3.1** (Pollaio). Il numero di uova prodotte in un pollaio in un giorno può essere schematizzato come processo markoviano: dipende soltanto dal numero di galline presenti nel pollaio il giorno prima. Questo processo non può essere continuo: è possibile mandare il  $\Delta t$  a 0 ma non possiamo fare altrettanto con  $x$ , ovvero il numero di uova. Infatti in questo caso il numero di uova è discreto. In generale i processi a salti discreti non possono essere continui.

**Esempio 4.3.2** (Moto Browniano). Calcoliamo l'equivalente della  $P_{1|1}$  nel moto Browniano, nella lezione 1 abbiamo visto che:

$$P(x, t + \Delta t) = \int P(x - \Delta, t) f(\Delta) d\Delta.$$

Con  $f(\Delta)$ : probabilità di fare un salto lungo  $\Delta$  nell'intervallo di tempo  $\Delta t$ .

Definendo la quantità  $y = x - \Delta$  intuitivamente la  $f(\Delta)$  corrisponde alla probabilità condizionata:

$$f(\Delta) = P_{1|1}(x, t + \Delta t | y, t).$$

Essendo un oggetto Gaussiano la  $f(\Delta)$  avrà la seguente struttura:

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D \Delta t}} \exp\left(-\frac{1}{4D \Delta t} (x - y)^2\right).$$

In altre parole  $f(\Delta)$  è proprio un propagatore.

Si può quindi calcolare il limite nella definizione di continuità di un processo stocastico (conti saltabili):

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta t)^{3/2}} \int_{|x-y|>\epsilon} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4D \Delta t}\right) dx &\sim \\ &\sim \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\epsilon/\sqrt{2\Delta t}}^{\infty} e^{-t^2} dt \sim \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\text{erf}\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2\Delta t}}\right)}{\Delta t} \\ &\sim \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{\exp\left(-\frac{\epsilon^2}{2\Delta t}\right)}{\epsilon/\sqrt{2\Delta t}} \right) = 0. \end{aligned}$$

Quindi il moto Browniano è un processo continuo.

**Esempio 4.3.3** (Moto di Cauchy). Il moto di Cauchy presenta una struttura per la probabilità di salto (condizionata) del seguente tipo:

$$P_{1|1}(x, t + \Delta t | z, t) = \frac{\Delta t}{\pi} \frac{1}{(x - z)^2 + (\Delta t)^2}.$$

E si può dimostrare che:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Sigma_\epsilon} \frac{\Delta t dx}{\pi [(x - z)^2 + (\Delta t)^2]} = \infty.$$

Di conseguenza il moto di Cauchy non è continuo.

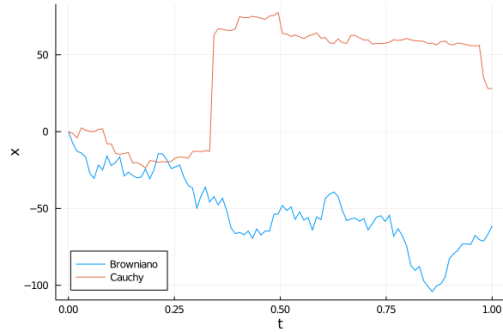


Figura 1.3: Processo di Brown e Processo di Cauchy a confronto  
Link al codice in Julia).

### 4.4 Forma differenziale di C-K

Ipotizziamo di avere un processo stocastico Markoviano quindi per cui è possibile scrivere l'equazione di Chapman-Kolmogorov. Ipotizziamo che tale processo sia scomponibile<sup>1</sup> in una parte continua ed una non continua.

Si può dimostrare che un processo di questo tipo è descritto dalla seguente forma differenziale:

#### Forma differenziale di Chapman - Kolmogorov

$$\partial_t P(\mathbf{z}, t | \mathbf{y}, t') = -\Gamma + \Phi \quad (4.1)$$

In cui  $\Gamma$  è la parte contenente il processo continuo:

$$\begin{aligned} \Gamma = & - \sum_i \partial_{z_i} [A_i(\mathbf{z}, t) P(\mathbf{z}, t | \mathbf{y}, t')] + \\ & + \sum_{i,j} \frac{1}{2} \partial_{z_i z_j}^2 [B_{ij}(\mathbf{z}, t) P(\mathbf{z}, t | \mathbf{y}, t')]. \end{aligned}$$

Qui abbiamo un primo termine "deterministico" (con la  $A$ ) che determina soltanto uno spostamento dell'oggetto ed un termine di diffusione (quello in  $B$ ).

Nella  $\Phi$  abbiamo invece il processo discontinuo:

$$\begin{aligned} \Phi = \int d\mathbf{x} [\omega(\mathbf{z} | \mathbf{x}, t) P(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, t') + \\ - \omega(\mathbf{x} | \mathbf{z}, t) P(\mathbf{z}, t | \mathbf{y}, t')]. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Ipotesi per cui si può scomporre sul Gardiner

Il termine  $\Phi$  somiglia molto al termine della equazione di Volterra che abbiamo visto nella prima lezione (prob. di trovarsi in  $z$  è data dalla probabilità di finire in  $z$  da una posizione  $x$  diminuito la prob. di scappare in  $x$  dalla posizione  $z$ ).

La potenza della equazione è la sua generalità: se sappiamo che un processo è Markoviano (magari per la fisica che ci sta dietro) allora l'equazione di evoluzione delle prob. nel tempo sarà necessariamente quella sopra.

**Esempio 4.4.1** ( $A = B = 0$ , quindi  $\Gamma = 0$ ).

$$\partial_t P = \Phi.$$

Considerando il rapporto incrementale con passo  $\Delta t$ :

$$P(z, t + \Delta t | y, t) = P(z, t | y, t) + \Delta t \cdot \Phi.$$

Sfruttiamo la proprietà ovvia:

$$P(z, t | y, t) = \delta(y - z).$$

Allora possiamo sviluppare  $\Phi$  al primo ordine in  $\Delta t$  l'espressione di  $\Phi$  (in 1D):

$$\begin{aligned} \Phi &= \int \omega(z|x, t) P(x, t | y, t') dx + \\ &\quad - \int \omega(x|z, t) P(z, t | y, t') dx \simeq \\ &\simeq \int [\omega(z|x, t) \delta(x - y) - \omega(x|z, t) \delta(z - y)] dx = \\ &= \omega(z|y) - \delta(z - y) \int dx \omega(x|y). \end{aligned}$$

#### Soluzione della forma diff. con termini continui

$$\begin{aligned} P(z, t + \Delta t | y, t) &= \\ &= \delta(z - y) \left[ 1 - \Delta t \int dx \omega(x|z) \right] + \Delta t \cdot \omega(z|y). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Riconosciamo nella equazione 4.2 un primo termine (con la  $\delta$ ) che corrisponde alla probabilità di essere già in  $z$  diminuito della probabilità di andar via, il secondo termine ( $\Delta t \omega(z|y)$ ) corrisponde invece alla probabilità di finire in  $z$  arrivando da  $y$ .