# 14 Processi a salto



Prendiamo di nuovo l'equazione differenziale CK (4.1) e concentriamoci sulla parte che abbiamo trascurato fino a questo punto: il processo a salti.

## 14.1 Processo di nascita e morte

Prendiamo un processo con la probabilità di transizione $\omega$:

$$\omega(x|x',t) = t^+(x')\delta_{x,x'+1} + t^-(x')\delta_{x,x+1}.$$

In cui $t^\pm(x')$ sono le probabilità di nascita o di morte per un individuo in $x$, quindi per la popolazione $x$ si ha:

$$\begin{cases} x \to x+1 \text{ con prob. } t^+(x) \\ x \to x-1 \text{ con prob. } t^-(x) \end{cases}.$$

Stiamo valutando come variabile $x$ l'andamento del numero degli individui della popolazione. La probabilità di trovarsi in un certo punto $x$ è quindi data dalla parte discontinua della equazione di Chapman-Kolmogorov:

$$\begin{aligned} \partial_t P\left(x,t|x',t'\right) =& t^+(x-1)P\left(x-1,t|x',t'\right) + \\ &+ t^-(x+1)P(x+1,t|x',t')+ \\ &- \left(t^+(x)+t^-(x)\right)P\left(x,t|x',t'\right). \end{aligned}$$

Proviamo a risolvere questa equazione in modo analogo a quanto fatto per la Fokker-Plank. Cerchiamo la distribuzione di equilibrio:

$$\partial_t P_s(x) = 0.$$

$$\begin{aligned} 0 =& t^+(x-1)P_s\left(x-1,t|x',t'\right) + \\ &+ t^-(x+1)P_s(x+1,t|x',t')+ \\ &- \left(t^+(x)+t^-(x)\right)P_s\left(x,t|x',t'\right). \end{aligned}$$

Quindi possiamo scrivere una equazione per la conservazione della corrente:

$$J(x+1) - J(x) = 0 \tag{14.1}$$

In cui la corrente è definita come:

$$J(x) = t^-(x)P_s(x) - t^+(x-1)P_s(x-1) \tag{14.2}$$

Scegliamo le condizioni al contorno: identifichiamo con $x=0$ il primo sito, le condizioni al contorno scelte sono tali per cui la transizione $(x=0)\to(x=-1)$ è posta nulla. In questo modo si modella un processo di nascita e morte in cui il numero di individui di una specie non può scendere sotto lo zero.

$$t^-(0) = 0.$$

La condizione sul propagatore diventa:

$$P\left(x,t|x',t'\right) = 0 \quad \text{se } x<0 \;||\; x'<0.$$

Si hanno quindi delle conseguenze su $J(0)$:

$$J(0) = t^-(0)P_s(0) - t^{-1}P_s(-1) = 0 \tag{14.3}$$

Sfruttando l'identità 14.1 applicata a $(x+1,x),(x,x-1),\ldots$ fino a $(1,0)$ si arriva a dimostrare che, per via della 14.3:

$$J(x) - J(0) = 0 \implies J(x) = 0.$$

Questo risultato (oltre a dirci che il sistema presenta il bilancio dettagliato) ci permette di trovare la distribuzione di equilibrio utilizzando la definizione di $J(x)$ (14.2):

$$P_s(x) = \frac{t^+(x-1)}{t^-(x)}P_s(x-1).$$

Risolvendo tale equazione definita per ricorrenza:

$$P_s(x) = P_s(0)\prod_{z=1}^{x}\frac{t^+(z-1)}{t^-(z)}.$$

## 14.2 Applicazione a processo con Rate di passaggio

Immaginiamo un processo in cui i rate di passaggio $t^\pm$ possono essere scritti come:

$$\begin{cases} t^+(x) = k_2 a \\ t^-(x) = k_1 x \end{cases}.$$

Stiamo studiando un sistema di popolazioni in cui ho l'equilibrio tra la popolazione $X$ e la popolazione $A$ che ha un rate di nascita fissato $k_2 a$.
La master equation si esprime come:

$$\begin{aligned} \partial_t P(x,t) =& k_2 a P(x-1,t)+ \\ &+ k_1(x+1)P(x+1,t)+ \\ &- (k_1 x + k_2 a)P(x,t). \end{aligned}$$

Per trovare la distribuzione di equilibrio utilizziamo la funzione generatrice:

$$G(s,t) = \sum_{x=0}^{\infty} s^x P(x,t).$$

Notiamo che vale la seguente:

$$x s^x P(x,t) = s\partial_s s^x P(x,t).$$

Quindi otteniamo una equazione per $G(s,t)$:

$$\begin{aligned} \partial_t G(s,t) =& k_2 a s G(s,t) + k_1\partial_s G(s,t)+ \\ &- k_1 s\partial_s G(s,t) - k_2 a G(s,t) = \\ =& k_2 a(s-1)G(s,t) + k_1(1-s)\partial_s G(s,t). \end{aligned}$$

Questa equazione alle derivate parziali può essere risolta con il metodo delle caratteristiche. Prima di applicare il metodo è necessario effettuare il cambio di variabile:

$$\phi = \ln G.$$

$$\Longrightarrow \phi_t + k_1(s-1)\phi_s - k_2 a(s-1) = 0.$$

A questo punto si ottengono le due equazioni differenziali che ci portano alla soluzione:

$$dt = \frac{ds}{k_1(s-1)}$$
$$\frac{ds}{k_1} = \frac{d\phi}{k_2 a}.$$

Dalla prima si ottiene:

$$u_1 = t - \frac{\ln(s-1)}{k_1}.$$

dalla seconda invece:

$$u_2 = \frac{s}{k_1} - \frac{\phi}{k_2 a} = f(e^{-k_1 t}(s-1)) = f(e^{-k_1 u_1}).$$

Se ne conclude che

$$\phi = f(e^{-k_1 u_1}(s-1)) + \frac{s k_2 a}{k_1}.$$

E quindi abbiamo la $G$:

$$G = \exp\left(\frac{k_2 a s}{k_1}\right) f(e^{-k_1 u_1}(s-1)).$$

Notiamo che all'interno dell'esponenziale abbiamo $s$ mentre nella funzione $f$ compare il termine $(s-1)$. Possiamo allora moltiplicare la $G$ per una costante (essendo $f$ arbitraria) e riscrivere il tutto come:

$$G = \exp\left(\frac{k_2 a(s-1)}{k_1}\right) f(e^{-k_1 u_1}(s-1)) \qquad (14.4)$$

Non sarebbe possibile sostituire $s-1 \to s$ all'interno di $f$ perché così facendo si sbaglierebbe la dipendenza dal tempo della funzione $u_1$ ($t$ e $\ln(s-1)$ hanno lo stesso andamento poiché $u_1$ costante).

Prima di procedere possiamo notare che, per la proprietà di completezza di $P(x,t)$ si ha:

$$G(1,t) = \sum P(x,t) = 1.$$

Questo implica nella 14.4 che:

$$f(0) = 1.$$

Nel metodo delle caratteristiche per trovare la forma della $f$ dobbiamo inserire le condizioni iniziali.

### Condizioni iniziali a $\delta$.

supponiamo che nello stato iniziale la popolazione sia $N$ (vuol dire che la probabilità diventa una $\delta$ in $N$):

$$P(x,0|N,0) = \delta_{x,N} \quad \Longrightarrow \quad G(s,0) = s^N.$$

In cui $N$ è un numero arbitrario. Sostituendo nella 14.4 con $t=0$ si ottiene:

$$f(s-1)\exp\left(\frac{k_2 a}{k_1}(s-1)\right) = s^N.$$

Invertendo l'espressione si ha la $f$:

$$\begin{aligned} f(s-1) =& s^N \exp\left((s-1)\frac{k_2 a}{k_1}\right) = \\ =& \exp\left(-(s-1)\frac{k_2 a}{k_1}\right)(s-1+1)^N. \end{aligned}$$

Adesso reintroduciamo questa sempre nella 14.4 ricordando di sostituire, nella $f$ il termine $s-1$ con $(s-1)e^{-k_1 t}$.

$$\begin{aligned} G(s,t) = \exp\left(\frac{k_2 a}{k_1}(s-1)\right)((s-1)e^{-k_1 t}+1)^N \cdot \\ \cdot \exp\left(-(s-1)e^{-k_1 t}\frac{k_2 a}{k_1}\right). \end{aligned}$$

Il problema è formalmente risolto, tuttavia non si risale analiticamente al propagatore $P$ tramite questa funzione caratteristica.

La funzione $G$ ci permette comunque di trovare il valor medio della popolazione:

$$\langle x \rangle_t = \partial_s G(s,t)\big|_{s=1} = \frac{k_2 a}{k_1}(1-e^{-k_1 t}) + N e^{-k_1 t}$$
$$\left\langle x^2 \right\rangle_t = \partial^2_{s^2} G(s,t)\big|_{s=1} = \langle x \rangle_t^2 - N e^{-2k_1 t}.$$

Visto che asintoticamente il sistema presenta una caratteristica tipica della Distribuzione di Poisson: $\sigma^2 \to \mu$. Inoltre il valore della media per $t \to \infty$ è quello atteso se si scrive una semplice equazione del moto per la $x$ a stazionarietà:

$$0 = \dot{x} = -k_1 x + k_2 a \qquad \Longrightarrow \qquad x_s = \frac{k_2 a}{k_1}.$$

### Condizioni iniziali Poissoniane

Supponiamo che la popolazione iniziale avesse una distribuzione di probabilità poissoniana del tipo:

$$P(x,0) = e^{-a_0}\frac{a_0^x}{x!}.$$

In tal caso la funzione caratteristica all'istante iniziale si può riscrivere tramite lo sviluppo dell'esponenziale:

$$\begin{aligned} G(s,0) &= \sum s^x P(x,0) = \\ &= \sum_x (s a_0)^x \frac{e^{-a_0}}{x!} = \\ &= e^{-a_0} e^{s a_0} = e^{a_0(s-1)}. \end{aligned}$$

Con passaggi analoghi a quelli per il caso precedente siamo in grado di trovare la $f$ e reinserirla in $G(s,t)$ ottenendo:

$$\begin{aligned} G(s,t) =& \exp\left((s-1)\frac{k_2 a}{k_1}\right) \times \\ & \times \exp\left((s-1)e^{-k_1 t}\left(a_0 - \frac{k_2 a}{k_1}\right)\right) = \\ =& \exp\left((s-1)\left[a_0 e^{-k_1 t} + \frac{k_2 a}{k_1}(1-e^{-k_1 t})\right]\right). \end{aligned}$$

Notiamo che la struttura della trasformata di una poissoniana è rimasta anche nella $G(s,t)$, solo che a differenza della $G(s,0)$ il termine $a_0$ è stato sostituito da un termine $\alpha(t)$ tale che:

$$\alpha(t) = a_0 e^{-k_1 t} + \frac{k_2 a}{k_1}(1 - e^{-k_1 t}).$$

Quindi:

$$G(s,t) = \exp\left((s-1)\alpha(t)\right).$$

Applicando un'antitrasformata possiamo risolvere nello spazio reale:

$$P(x,t) = \frac{e^{-\alpha(t)}}{x!}\left[\alpha(t)\right]^x.$$

Quindi la soluzione con queste condizioni iniziali è una poissoniana "traslata".
Si ha che in generale che lavorare con la Master Equation è complicato ma per questo caso specifico siamo stati in grado di ottenere la distribuzione.
Potrebbe essere utile trovare il sistema per passare dalla Master-Equation alla Fokker-Plank in modo da applicare i metodi risolutivi discussi nelle precedenti sezioni.