

# 1 Trasformazioni canoniche e Variabili Azione-Angolo

## 1.1 Trasformazioni canoniche

Una trasformazione canonica è un cambio di variabili generalizzate tale che:

$$H(p_i, q_i) = H'(P_i(p_i, q_i), Q_i(p_i, q_i)).$$

Le nuove variabili devono rispettare le regole di commutazione canoniche:

$$\dot{Q}_i = -[Q_i, H] \quad \dot{P}_i = [P_i, H].$$

Spesso nello studio dei sistemi Hamiltoniani è necessario trovare delle trasformazioni che permettano di integrare  $H$ .

Integrare l'Hamiltoniana significa trovare le  $P_i, Q_i$  tali che:

$$H(p_i, q_i) \rightarrow H'(P_i).$$

Quindi per le equazioni di Hamilton-Jacoby anche:

$$\begin{aligned} \dot{P}_i &= -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} = 0 \\ \dot{Q}_i &= \frac{\partial H'}{\partial P_i} = f_i(P_i). \end{aligned}$$

Questo ci permette di trovare una equazione del moto come:

$$\dot{Q}_i = f_i(P_i)t + Q_i(0).$$

Per ottenere una trasformazione canonica è necessario passare dalle **Funzioni generatrici**.

Per trovare queste funzioni partiamo dalla considerazione che  $H$  conserva il volume nello spazio delle fasi, quindi anche  $H'$  deve conservare tale volume:

$$\int \int dp dq = \int \int dP dQ.$$

Quindi possiamo sfruttare il teorema di Stokes:

$$\begin{aligned} \oint pdq &= \oint QdP. \\ \oint [pdq - QdP] &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Grazie a questo integrale possiamo riscrivere tutto in funzione di  $q$  e  $P$ .

La quantità nell'integrale di linea ?? è il differenziale di una qualche funzione  $F_2$ :

$$\oint dF_2(q, P) = \oint \frac{\partial F_2}{\partial q} dq + \frac{\partial F_2}{\partial P} dP = 0.$$

Quindi:

$$\begin{aligned} p &= \partial_q F_2(q, P) \\ Q &= -\partial_P F_2(q, P). \end{aligned}$$

Notiamo che aver scritto tutto in funzione della coppia  $(q, P)$  è una scelta (che conduce al funzionale chiamato storicamente  $F_2$ ), si potevano effettuare altre scelte ottenendo lo stesso formalismo con funzionali dipendenti dalle coppie scelte.

Quello che interessa a noi è trovare la trasformazione furba che ci permetta di integrare l'Hamiltoniana.

## 1.2 Trasformazione che integra $H$

Supponiamo che la trasformazione ideale sia  $S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha})$ , con  $\boldsymbol{\alpha}$  nuovi momenti conservati (costanti del moto). Definiamo le  $Q$  ideali per la trasformazione come  $\beta$ .

Le equazioni per il cambio di variabile sono:

$$P_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad \beta_i = -\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}.$$

Inserendo l'espressione delle  $p_i$  nella Hamiltoniana:

$$H(\mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}) = H'(\boldsymbol{\alpha}).$$

Si ottiene quindi un sistema di equazioni (di Hamilton-Jacoby) dalle quali è possibile ricavare  $\partial_q S$ , da tale quantità si risale alla  $S$ : la trasformazione ideale.

Considerando che gli  $\boldsymbol{\alpha}$  sono costanti del moto<sup>1</sup> il differenziale della derivata di  $S$  ( $dS'$ ) si esprime come:

$$dS' = \sum \frac{\partial S}{\partial q_i} dq_i = \sum P_i dq_i.$$

ed integrando si ha direttamente:

$$S = \int_{q_0}^{q_t} \sum_i P_i dq_i.$$

**Esempio 1.2.1** (Hamiltoniana 1D). Data la trasformazione della Hamiltoniana:

$$H(q, \partial_q S) = H'(\alpha) = \alpha.$$

Le coordinate dipendenti possono essere espresse tramite la trasformazione (ignota) come:

$$\begin{aligned} p &= \partial_q S(q, \alpha) \\ \beta &= \partial_\alpha S(q, \alpha). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Le equazioni HJ sono:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -\partial_\beta H' = 0 \\ \dot{\beta} &= \partial_\alpha H' = 1. \end{aligned}$$

L'equazione di  $\beta$  può essere integrata, si impone che all'istante iniziale  $\beta(t=0) = 0$ :

$$\beta = t - t_0.$$

<sup>1</sup>Per definizione della trasformazione che cerchiamo si ha che  $\dot{\alpha}_i = -\partial_{\beta_i} H' = 0$

Quindi abbiamo che:

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \int dt \dot{\beta} = \int_{q_0}^{q_t} d\beta(q) \\ &= \int_{q_0}^{q_t} \partial_q \beta dq = \int \partial_q \partial_\alpha S dq = \\ &= \int \partial_\alpha \partial_q S dq = \int_{q_0}^{q_t} \partial_\alpha P(q, \alpha) dq \\ \implies t - t_0 &= \int_{q_0}^{q_t} \partial_\alpha P(q, \alpha) dq. \end{aligned} \quad (1.3)$$

**Esempio 1.2.2** (Moto in potenziale a energia fissa). Prendiamo l'Hamiltoniana unidimensionale con un potenziale:

$$H = \frac{p^2}{2} + V(q) = \alpha \quad (1.4)$$

La costante del moto (quindi il momento della trasformazione) è l'energia del sistema.

Si inverte l'equazione ?? per  $P$ :

$$P(q, \alpha) = \sqrt{2(\alpha - V(q))}.$$

Quindi si ottiene il periodo del moto  $T = t - t_0$  tramite la ?? poiché anche in questo caso  $\dot{\beta} = \partial_\alpha H' = 1$ :

$$t - t_0 = \int_{q_0}^{q_t} \frac{1}{\sqrt{2(\alpha - V(q))}} dq.$$

**Esempio 1.2.3** (Moto in campo centrale).

$$H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\phi^2}{2r^2} + V(r).$$

In questo caso abbiamo un momento conservato:  $p_\phi$ , quindi si definisce  $\alpha_\phi$  costante tale che (dalle equazioni ??):

$$\begin{aligned} p_\phi &= \partial_\phi S \\ \beta &\equiv \phi = \partial_\alpha S. \end{aligned}$$

In cui  $\phi$  è la coordinata generalizzata associata a  $p_\phi$  (che non cambia sotto trasformazione perché  $p_\phi$  è già la quantità conservata cercata).

Quindi si può intuire la struttura di  $S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha})$  dalle due relazioni sopra:

$$S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) = \alpha_\phi \phi + S_1(r, \alpha_1).$$

Riscriviamo l'Hamiltoniana:

$$H(\mathbf{q}, \partial_q S) \equiv H' = \frac{1}{2} \left[ (\partial_r S_1)^2 + \frac{\alpha_\phi^2}{r^2} \right] + V(r) = \alpha_1.$$

Si ottiene quindi una equazione per l'incognita  $\partial_r S_1$ :

$$\partial_r S_1 = \sqrt{2[\alpha_1 - V(r)] - \frac{\alpha_\phi^2}{r^2}}.$$

Integrando questa equazione si ricava  $S_1$ , inserendola nella espressione di  $S$ :

$$S = \alpha_\phi \phi + \int dr \sqrt{2[\alpha_1 - V(r)] - \frac{\alpha_\phi^2}{r^2}}.$$

A questo punto si fanno i passaggi dell'esempio precedente (c'è un cambio di notazione:  $-t_0 \rightarrow \beta_1$ ), quindi si ha:

$$\beta_1 + t = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \int \frac{dr}{\sqrt{2(\alpha_1 - V(r)) - \alpha_\phi^2/r^2}}.$$

$$\beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_\phi} = - \int \frac{\alpha_\phi}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2(\alpha_1 - V(r)) - \alpha_\phi^2/r^2}} + \phi.$$

Si nota che che non aver inserito la dipendenza dal tempo per  $\beta_2$  è una conseguenza di tutto il meccanismo utilizzato: deriva direttamente dalle equazioni di Hamilton:

$$H' = \alpha_1 \implies \frac{\partial H'}{\partial \alpha_\phi} = 0 = \dot{\beta}_2.$$

### 1.3 Variabili azione-angolo in 1D

Partiamo con la seguente:

Per Hamiltoniane limitate in 1D il moto nello spazio delle fasi avviene sempre su traiettorie chiuse.

Di conseguenza potremmo cercare una variabile angolo  $\theta$  che aumenti di  $2\pi$  dopo un giro. Definiamo il momento coniugato di questa variabile come  $I$  <sup>2</sup>.

La trasformazione canonica cercata è  $S(q, I)$ .

$$p = \partial_q S(q, I) \quad \theta = \partial_I S(q, I).$$

Inoltre dobbiamo fare in modo che la trasformazione permetta di integrare l'Hamiltoniana, serve quindi che:

$$H(q, \partial_q S) = \alpha = H'(I).$$

Il fatto che la variabile  $\theta$  sia periodica porta con sé il vantaggio di poter fare teoria delle perturbazioni, come approfondiremo nella prossima lezione.

Procediamo supponendo  $\alpha$  costante e fissato.

$$\partial_q \theta = \partial_q \partial_I S = \partial_I \partial_q S (= \partial_I P(I)).$$

Visto che dopo un giro si ha che:  $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$ .

$$2\pi = \oint_c d\theta = \frac{\partial}{\partial I} \oint \frac{\partial S}{\partial q} dq = \frac{\partial}{\partial I} \oint p dq.$$

Questo implica un importante teorema:

$$\oint p dq = 2\pi I.$$

quindi abbiamo una azione (fissata una curva chiusa nello spazio delle fasi):

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_c p dq \quad (1.5)$$

Operativamente quello che si fa per risolvere è:

<sup>2</sup>Il motivo per il quale storicamente è di interesse proprio questa trasformazione è che venne studiata per valutare la stabilità del sistema solare

- Si risolve l'Hamiltoniana nel cambio di variabili:

$$H(q, \partial_q S) = \alpha.$$

- Si calcola l'azione  $I$  con la formula ?? sulle curve "c" aventi  $\alpha$  costante.

Le equazioni canoniche per le nuove variabili  $I, \theta$  sono:

$$\dot{I} = -\partial_\theta H'(I) = 0 \quad \dot{\theta} = \partial_I H'(I) = \omega(I).$$

Visto che la  $I$  è costante nel tempo integriamo l'equazione per  $\dot{\theta}$  ottenendo:

$$\theta(t) = \omega(I)t + \theta_0.$$

La cosa importante è che tutta la fisica del problema è inclusa nella funzione  $\omega$  dipendente solo dall'azione  $I$  (che è costante del moto).

**Esempio 1.3.1** (Oscillatore armonico). Prendiamo l'equazione per un oscillatore armonico unidimensionale:

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega_0^2 q^2}{2}.$$

Abbiamo come sempre che

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}.$$

Quindi l'Hamiltoniana si esprime come:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 q^2 = \alpha.$$

Passiamo direttamente alla ricerca della azione  $I$ :

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq = \frac{1}{2\pi} \oint_c \sqrt{2(\alpha - \frac{1}{2} \omega_0^2 q^2)} dq = \frac{\alpha}{\omega_0}.$$

Si nota che non si è risolto davvero l'integrale, si è assunto che la soluzione sia del tipo  $\alpha/\omega_0$ .

Possiamo trovare anche il periodo del moto e sfruttarlo per valutare la  $I$ :

$$T = \oint_c \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} p \right) dq = \frac{\partial}{\partial \alpha} \oint_c p dq = \frac{\partial}{\partial \alpha} 2\pi I.$$

Abbiamo quindi:

$$I = \frac{T}{2\pi} \alpha = \frac{\alpha}{\omega_0}.$$

In conclusione abbiamo ad esempio:

$$\alpha = \omega_0 I = H'.$$

In generale ci si aspetta una Hamiltoniana trasformata del tipo:

$$H' = \omega(I)I.$$

Possiamo esplicitare anche la trasformazione  $S$  in modo da ottenere delle equazioni per il moto:

$$S(q, I) = \int \sqrt{2(\omega_0 I - \frac{\omega_0^2 q^2}{2})} dq.$$

Per tornare indietro ed ottenere  $q(t)$  è necessario fare un bel calcolo, bisogna tornare indietro passando per la definizione di  $\theta$ :

$$\theta = \partial_I S(I, q).$$

Quindi derivando all'interno dell'integrale si ottiene:

$$\theta = \sqrt{\frac{2\omega_0}{I}} \int dq \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_0}{2I} q^2}}.$$

Oltre ad effettuare la derivata si è raccolto un termine per esplicitare l'integrale, l'integrale può essere risolto con un cambio di variabili trigonometrico e conduce all'inverso del seno:

$$\theta = \sqrt{\frac{2\omega_0}{I}} \frac{\sin^{-1}(\sqrt{\frac{\omega_0}{2I}} q)}{\sqrt{\frac{2\omega_0}{I}}} + c.$$

Se ne conclude che:

$$\begin{cases} q = \sqrt{2I/\omega_0} \sin(\theta + \delta_0) \\ \theta = \omega_0 t \end{cases} \quad (1.6)$$

## 1.4 Variabili azione-angolo con $D \geq 2$ .

Nel caso di Hamiltoniane separabili il problema si risolve in modo semplice: basta trovare  $n$  costanti del moto (in  $n$  dimensioni).

Se si trovano tali costanti allora il moto è confinato ad una varietà  $n$  dimensionale nello spazio delle fasi ( $2n$  dimensionale).

### Teorema di Poincare

Data una Hamiltoniana  $n$  dimensionale a variabili separabili.

Consideriamo la trasformazione canonica che integra l'Hamiltoniana, la varietà su cui giacciono le traiettorie è un **Toro** ( $M$ )  $n$ -dimensionale.

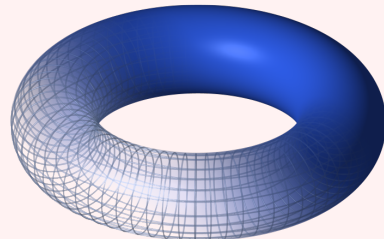


Figura 1: Toro in 3 dimensioni, ricordiamo che generalmente si parla di toro  $n$  dimensionale.

La dimostrazione è complicata, possiamo immaginarla visivamente pensando che il toro è l'unica varietà che, se considerata letteralmente pelosa, può essere pettinata. Una qualunque altra varietà, come una sfera ad esempio, presenterà delle stizze durante la pettinatura.



Figura 2: Un toro perfettamente pettinato

Formalmente se  $\dot{\xi}$  è il campo di "velocità" che descrive il flusso di  $H$  su  $M$  il toro è l'unica varietà che permette di avere questo campo sempre tangente alla varietà stessa.

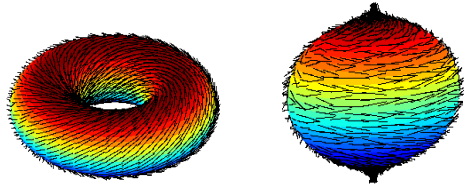


Figura 3: Un toroide pettinato ed una sfera non pettinabile (fonte: Wikipedia.)

Nel caso 2-dimensionale ad esempio si ha che

La coppia di variabili azione-angolo è ben definita, infatti il toro è il prodotto di  $n$  oggetti periodici.

Tornando alle  $n$  dimensioni si ha che:

$$I_k = \frac{1}{2\pi} \oint_{c_k} \sum_{i=1}^n p_i dq_i.$$

Dove le  $c_k$  sono traiettorie circuitate attorno al toro.

**Esempio 1.4.1** (Oscillatore armonico bidimensionale.).

$$H = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{\omega_1^2}{2}q_1^2 + \frac{\omega_2^2}{2}q_2^2.$$

l'Hamiltoniana è separabile, quindi possiamo procedere definendo  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  come:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{\omega_1^2}{2}q_1^2 \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{\omega_2^2}{2}q_2^2.$$

Abbiamo anche una coppia di azioni  $I_{1,2}$ :

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \oint p_1 dq_1 \quad I_2 = \frac{1}{2\pi} \oint p_2 dq_2.$$

Mettendo tutto insieme nella Hamiltoniana trasformata finale si ottiene:

$$H'(I_1, I_2) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2.$$

## 1.5 Scrittura compatta del moto sul Toro

Il moto sul toro ha una struttura generale, possiamo riesprimerlo usando la periodicità nelle variabili azione-angolo.

Il nostro obiettivo finale è esprimere il moto della coordinata spaziale  $q_i$  in funzione del tempo  $(q_i(t))$ . Nel sistema azione-angolo abbiamo che:

$$q_i(t) = q_i(I, \theta).$$

Possiamo allora cercare la decomposizione di Fourier di questa variabile nello spazio delle  $I, \theta$  (essendo il moto periodico).

I pesi della trasformata sono:

$$\mathcal{A}_k^{(i)}(I) = \int_0^{2\pi} \theta_1 \dots \int_0^{2\pi} \theta_n q_i(I, \theta) e^{i(k_1 \theta_1 + \dots + k_n \theta_n)}.$$

In cui  $i$  è l'indice associato alla coordinata  $i$ -esima,  $k$  è il pedice associato al  $\theta$ .

La decomposizione spettrale invece si esprime come:

$$\begin{aligned} q_i(t) &= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{k_n=-\infty}^{\infty} \mathcal{A}_{k_1 \dots k_n}^{(i)} e^{i(k_1 \theta_1 + \dots + k_n \theta_n)} = \\ &= \sum_k \mathcal{A}_k^{(i)} e^{i(k \omega t + k \delta)}. \end{aligned}$$

A questo punto la differenza tra il caso unidimensionale può esser vista in quest'ultima espressione: se gli  $\omega_i$  stanno tra loro in rapporti razionali allora il moto sarà periodico chiuso, viceversa le orbite non si chiudono (nello spazio dei  $q_i$ ).

In particolare per avere delle orbite chiuse servono  $n - 1$  relazioni del tipo:

$$\sum_{i=1}^n k_i \omega_i = 0.$$