

22 Identificare Il caos: Caos Globale

K.S. Entropy	22.1, p. 89
Indicatori di Caos globale	22.2, p. 90
Calcolo degli esponenti di Lyapunov in processi di Wiener.	22.3, p. 93
Tecnica di Embedding per calcolare gli esponenti di Lyapunov in sistema reale.	22.4, p. 93
Mixing delle traiettorie	22.5, p. 94

22.1 K.S. Entropy

Prendiamo un sistema dinamico come una mappa Hamiltoniana che conserva una certa misura su un insieme X .

Supponiamo di introdurre una partizione di X chiamata Q tale per cui non ci sono sovrapposizioni tra le partizioni Q_i .

Inoltre chiediamo una ipotesi più forte: un punto $x \in X$ che appartiene ad uno solo dei Q_i e vi appartiene anche ogni sua n -esima iterata della mappa T .

Possiamo costruire una dinamica simbolica: una sequenza di interi $\{x_n\}$ tali che:

$$T^n x \in Q_{x_n}.$$

Si dice **partizione generatore** la partizione Q se per ogni x si ha una unica dinamica simbolica (quindi una unica sequenza di interi).

Strumento per definire l'entropia: Baker Transformation

Prendiamo un sistema bidimensionale con variabili p, q , la trasformazione di Baker ha la seguente forma:

$$T(p, q) = \begin{cases} 2p, & q/2 & \text{se } 0 \leq p < 1/2 \\ 2p - 1, & q/2 + 1/2 & \text{se } 1/2 \leq p \leq 1 \end{cases}$$

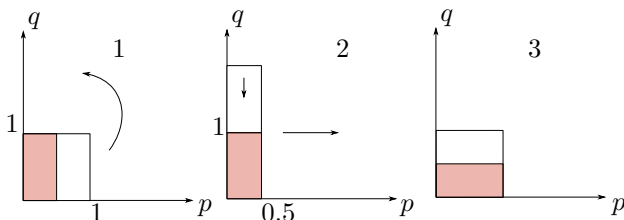


Figura 2.30: Passaggi operativi della mappa di Baker. Si fa come con il pane: si mette sopra e poi si schiaccia.

Con questa mappa è comodo scrivere le coordinate p, q in base 2:

$$p = \sum_{k=0}^{\infty} s_k 2^{k-1} \quad q = \sum_{k=1}^{\infty} s_k 2^{-k}.$$

Le potenze k dello sviluppo sono negative, questo perché le variabili vanno da 0 a 1. Le s_k inoltre possono valere 0 o 1.

Ogni punto in questa base è esprimibile come sequenza di 0 e 1 nel seguente modo:

$$x_i = (\dots, s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, \dots) \quad (22.1)$$

Vediamo come agisce la mappa con un esempio pratico: se si ha $0 < p < 1/2$ e si applica T avremmo che

$$p \rightarrow 2p, \quad q \rightarrow q/2.$$

Nel linguaggio della lista dei s_i questo significa che tutti gli s_i andranno verso destra. Quindi l'evoluzione della mappa è semplicemente lo spostare i coefficienti s_i verso destra con la notazione 22.1.

Abbiamo anche un effetto di bordo tra le p e le q : s_0 perché dovrebbe andare in s_1 visto che il primo è un fattore di p e l'altro è un fattore di q ?

La risposta è proprio nella natura della trasformazione che "ruota" lo spazio p e q . Facendo un controllo nel caso specifico patologico ($p = 1/2$) si vede subito che il coefficiente s_0 deve necessariamente andare in s_1 .

Definizione di KS entropy

Introduciamo adesso la partizione che deriva dalla intersezione delle iterate della trasformazione di Baker.

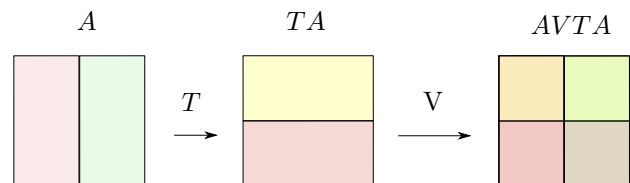


Figura 2.31: Mappa di Baker con intersezione delle partizioni.

Potremmo iterare la procedura più volte ottenendo ogni volta una potenza di due in più nel numero di partizioni.

Si definisce KS Entropy:

$$h_{KS} = \sup \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h[AV(TA)V(T^2A)V \dots VT^{n-1}A]}{n} \right).$$

con

$$h(A) = - \sum_i p_i \ln(p_i).$$

Dove p_i è l'area della partizione i .

Nel caso della mappa di Baker si ha che il numero di partizioni generate alla n -esima iterazione (considerando anche l'operatore di intersezione V) è 2^n . L'area di ogni partizione sarà allora 2^{-n} e l'entropia di

KS vale:

$$h_{KS} = \frac{1}{n} \sum_i^{2^n} \left(\frac{1}{2^n} \right) n \ln \left(\frac{1}{2} \right) = \ln 2.$$

Sempre nel caso della Baker trasform. proviamo a calcolare gli esponenti di Lyapunov:

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}_{n+1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}_n.$$

Si vede subito che gli autovalori in questione sono:

$$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 1/2.$$

Quindi gli esponenti di Lyapunov per la mappa sono $\pm \ln 2$. Il più grande tra i due esponenti è proprio l'entropia di KS, è un caso?

Teorema di Piesin

La KS entropy è la somma degli esponenti di Lyapunov positivi.

$$h_{KS} = \int_P \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i d\mu.$$

In cui λ_i sono gli esponenti di Lyapunov in una regione di energia E di misura $d\mu$.

22.2 Indicatori di Caos globale

Metodo di Chirinkov

L'idea alla base per trovare il caos globale è quella di cercare, anziché le singole traiettorie caotiche, delle intere strutture caotiche nello spazio delle fasi.

Partiamo da un sistema Hamiltoniano integrabile perturbato:

$$H(I, \theta) = H_0(I) + \epsilon H_1(I, \theta).$$

Scriviamo la perturbazione in componenti spettrali di Fourier:

$$H(I, \theta) = H_0(I) + \epsilon \sum_m H_m(I) e^{im\theta}.$$

Sappiamo che la mappa per l'Hamiltoniana imperturbata è la seguente:

$$\begin{cases} I_i = I_i(0) \\ \theta_i = \omega_i(I)t + \theta_i(0) \end{cases}.$$

Con la pulsazione ω che è definita da:

$$\omega_i = \frac{\partial H_0}{\partial I_i}.$$

Inseriamo la perturbazione e ipotizziamo che questa abbia una sola componente spettrale:

$$H(I, \theta) = H_0(I) + \epsilon H_m(I) e^{im\theta}.$$

Allora abbiamo visto che:

$$\begin{aligned} \dot{I}_i &= -i\epsilon m_i H_m(I) e^{im\theta} \\ \dot{\theta}_i &= \omega_i(I) + \epsilon H'_m(I) e^{im\theta}. \end{aligned}$$

E all'ordine ϵ la soluzione è:

$$I_i = I_i(0) - \frac{\epsilon m_i H'_m(I_0) e^{i(m \cdot \omega)t + i\delta}}{m \cdot \omega}.$$

La trasformazione canonica "astuta" che permette di rendere integrabile l'Hamiltoniana al primo ordine in ϵ in questo caso è:

$$F = m_{\perp} I.$$

Dove m_{\perp} è tale per cui $m_{\perp} \cdot m = 0$. In tal caso la trasformazione canonica elimina la risonanza.

Questo metodo funziona quando abbiamo una sola risonanza, con più risonanze non è possibile "curare" il sistema: la teoria perturbativa non risolve in tutto lo spazio con più risonanze.

Visivamente il caos arriva quando si hanno sistemi nello spazio delle fasi del tipo:

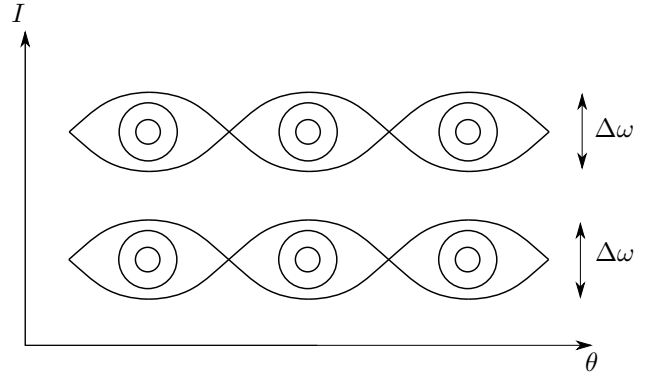


Figura 2.32: Spazio delle fasi in presenza di due risonanze: quando i lobi si avvicinano iniziano a rompersi i tori e a quel punto siamo in presenza di un caos globale.

Esempio 22.2.1 (Mappa standard). Nel caso della mappa standard si ha:

$$\begin{aligned} H(I, \theta, t) &= \frac{I^2}{2} + 2\pi k \cos \theta \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(2\pi m - t) = \\ &= \frac{I^2}{2} + k \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(\theta - nt). \end{aligned}$$

La mappa che abbiamo visto nelle lezioni precedenti è proprio questa integrata su un periodo.

Vediamo che in questo caso generale escono fuori dei termini del tipo:

$$H^{(n)} = \frac{I^2}{2} + k \cos \psi_n \quad \psi_n = \theta - nt.$$

Abbiamo un set di Hamiltoniane risonanti con

$$\omega_n \equiv n.$$

Possiamo trovare la larghezza dell'"occhio" $\Delta\omega$ valutando la I nel minimo del potenziale periodico:

$$0 = \frac{I^2}{2} - k \implies \Delta\omega_n \equiv I_{\max, n} = 2\sqrt{k}.$$

Come abbiamo detto in precedenza le ω sono numeri interi n , quindi tra una risonanza e l'altra c'è una distanza unitaria.

Per questo motivo possiamo affermare che i lobi iniziano a toccarsi quando la loro distanza vale 1, se due lobi distano tale valore significa che la larghezza del singolo occhio vale $1/2$:

$$\frac{1}{2} = 2k^{1/2} \implies k = \frac{1}{16}.$$

Per tale valore di k (e per valori minori) nel sistema si ha una forma di caos globale. Possiamo verificare la cosa andando a setacciare la mappa standard al variare di k :

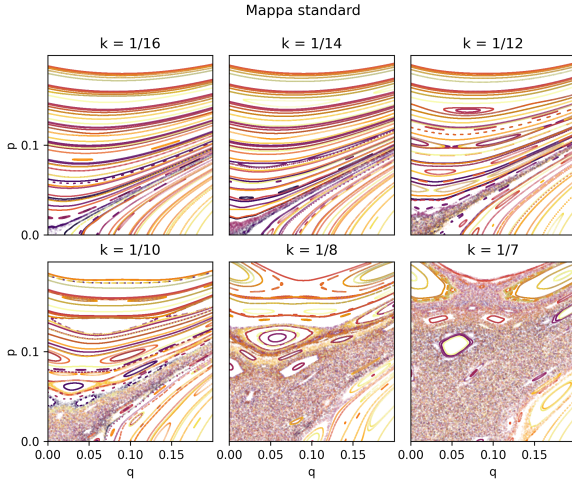


Figura 2.33: Zoom della mappa standard: si usano gli stessi parametri iniziali per tutte le traiettorie e si fa variare k nella mappa. I primi cenni di caos in basso a sinistra (in tutte le figure) si hanno per $k = 1/16$.

Esempio 22.2.2 (Sistema di Henon-Hieles). Questo esempio è un ripasso della teoria perturbativa ed una applicazione al criterio di Chirinkov. Prendiamo la seguente Hamiltoniana con perturbazione:

$$H = \frac{q_x^2 + q_y^2}{2} + \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + \epsilon q_x^2 q_y^2.$$

La trasformazione canonica per le variabili azione angolo ci conduce a:

$$H_0 = \omega_x I_x + \omega_y I_y.$$

Riscriviamo anche la trasformazione canonica inversa per completezza, come sempre:

$$\begin{cases} q_x = \sqrt{2I_x} \cos \theta_x \\ q_y = \sqrt{2I_y} \cos \theta_y \end{cases}.$$

Il termine di perturbazione in questa base si presenta come:

$$H_I = \epsilon 4I_x I_y \cos^2 \theta_x \cos^2 \theta_y.$$

Facendo la teoria perturbativa dobbiamo trovare una trasformazione S tale che la nuova Hamiltoniana del sistema sia del tipo:

$$K(\mathbf{J}) = K_0(\mathbf{J}) + \epsilon K_1(\mathbf{J}).$$

Quindi cerchiamo di rimuovere la dipendenza dalle variabili angolo.

$$S = S_0 + \epsilon S_1 = J_x \theta_x + J_y \theta_y + \epsilon S_1(\mathbf{J}, \boldsymbol{\theta}).$$

Quindi le nuove variabili sono legate alle vecchie dalle relazioni che conosciamo:

$$\begin{aligned} I_x &= J_x + \epsilon \partial_{\theta_x} S_1; & I_y &= J_y + \epsilon \partial_{\theta_y} S_1 \\ \varphi_x &= \theta_x + \epsilon \partial_{J_x} S_1 & \varphi_y &= \theta_y + \epsilon \partial_{J_y} S_1. \end{aligned}$$

Ripetendo ancora si ha che:

$$H_0(\partial_{\theta_x} S, \partial_{\theta_y} S) + \epsilon H_I(\partial_{\theta_x} S, \partial_{\theta_y} S, \boldsymbol{\theta}) = K_0(\mathbf{J}) + \epsilon K_1(\mathbf{J}).$$

Quindi l'Hamiltoniana all'ordine 0 è:

$$K_0(\mathbf{J}) = \omega_x I_x + \omega_y I_y.$$

Quella all'ordine ϵ invece:

$$\begin{aligned} K_1(\mathbf{J}) &= \omega_x \partial_{\theta_x} S_1 + \omega_y \partial_{\theta_y} S_1 + \\ &+ \epsilon 4J_x J_y \cos^2 \theta_x \cos^2 \theta_y. \end{aligned}$$

Come abbiamo fatto in una dimensione si ha che K_1 non deve dipendere dagli angoli $\boldsymbol{\theta}$, quindi possiamo integrarlo:

$$\begin{aligned} K_1(\mathbf{J}) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_x d\theta_y \cos^2 \theta_x \cos^2 \theta_y 4J_x J_y = \\ &= J_x J_y. \end{aligned}$$

In cui le derivate di S sono andate via poiché periodiche (si annullano integrate sul periodo).

Reinserendo K_1 nella equazione della Hamiltoniana al primo ordine non integrata si ottiene una equazione differenziale per la trasformazione S_1 :

$$\omega_x \partial_{\theta_x} S_1 + \omega_y \partial_{\theta_y} S_1 = J_x J_y (1 - 4 \cos^2 \theta_x \cos^2 \theta_y).$$

Facendo uso di formule trigonometriche possiamo far sparire i termini non lineari nei coseni:

$$\begin{aligned} \omega_x \partial_{\theta_x} S_1 + \omega_y \partial_{\theta_y} S_1 &= \\ &= -J_x J_y [\cos(2\theta_x) + \cos(2\theta_y) + \\ &+ \cos(2(\theta_x - \theta_y)) + \cos(2(\theta_x + \theta_y))]. \end{aligned}$$

Questa equazione può essere integrata analiticamente e porta al seguente risultato:

$$\begin{aligned} S_1 &= -J_x J_y \left(\frac{\sin(2\theta_x)}{2\omega_x} + \frac{\sin(2\theta_y)}{2\omega_y} + \right. \\ &+ \left. \frac{\sin(2(\theta_x - \theta_y))}{\omega_x - \omega_y} + \frac{\sin(2(\theta_x + \theta_y))}{\omega_x + \omega_y} \right). \end{aligned}$$

Notiamo come non sia possibile fare uno sviluppo perturbativo che rimuova tutte le risonanze.

Criterio di Melnikov

Supponiamo di avere un punto iperbolico e poniamoci in un sistema con una Hamiltoniana integrabile imperturbata. Supponiamo che tale punto fisso presenti un'orbita omoclinica $\phi(t)$ stabile:

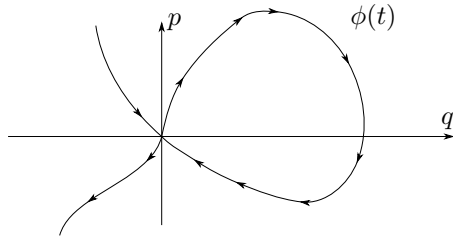


Figura 2.34: Orbita omoclinica stabile per il sistema. Notiamo che per questo tipo di orbita non c'è formazione di caos: i manifold non si incrociano, rientrano nel punto critico in modo continuo.

Inseriamo adesso la perturbazione nel sistema, dal punto di vista di Melnikov quello che succede è che si modificano i manifold nel seguente modo:

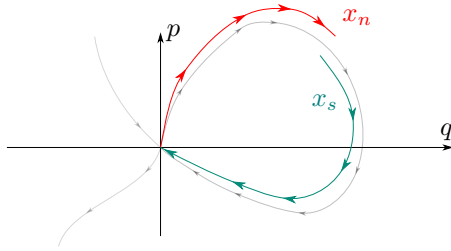


Figura 2.35: Orbite perturbate rispetto alla omoclinica.

Sappiamo che se \mathbf{x}_n (il manifold instabile) ed \mathbf{x}_s (il manifold stabile) si incrociano una volta allora si genera il caos. Il criterio di Melnikov si basa proprio sul capire quanto sono distanti i manifold e valutare la possibilità che si incrocino.

Definiamo quindi la distanza tra i due manifold (in ogni punto appartenente ai due manifold) come $\Delta(t)$.

$$\Delta(t) = \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_s.$$

Se dimostriamo che questa quantità va a zero in un punto dello spazio delle fasi allora sappiamo che nel sistema emerge del caos globale.

Un primo metodo è quello di valutare $|\Delta(t)|$ e trovarne il minimo, se il minimo si annulla allora concludiamo.

Una cosa più semplice è calcolare la quantità:

$$d = \Delta \cdot \hat{n}.$$

Dove \hat{n} è la normale alla separatrice imperturbata $\phi(t)$.

Per calcolare d partiamo dalle equazioni del moto per la separatrice imperturbata:

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} f_q \\ f_p \end{pmatrix}_0.$$

Per trovare \hat{n} possiamo fare il prodotto vettoriale tra la terza coordinata \hat{z} e la velocità della traiettoria imperturbata $\phi(t) (\equiv \mathbf{x}_0)$.

$$\hat{n} = \hat{z} \wedge \dot{\mathbf{x}}_0.$$

La quantità d può essere trovata sfruttando la ciclicità del prodotto:

$$d(t) = |\dot{\mathbf{x}}_0 \wedge \Delta| = f_q \Delta_p - f_p \Delta_q \quad (22.2)$$

Adesso cerchiamo una equazione differenziale per la Δ , facendo la derivata esplicita della 22.2:

$$\begin{aligned} \dot{d} = & (\partial_q f_q \dot{q}_0 + \partial_p f_p \dot{p}_0) \Delta_p + \\ & - (\partial_q f_q \dot{q}_0 + \partial_p f_p \dot{p}_0) \Delta_q + \\ & + f_q \dot{\Delta}_p - f_p \dot{\Delta}_q. \end{aligned} \quad (22.3)$$

Proviamo a semplificare questa espressione, partiamo dalla definizione della quantità vettoriale Δ :

$$\Delta = \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0 - (\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_0).$$

Aniché valutare l'intero tratto Δ concentriamoci solo sul calcolo del primo termine: $\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0$. Questo calcolo è più semplice, operativamente l'altro termine può esser sempre calcolato con il metodo sotto.

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_n \\ \dot{p}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_q \\ f_p \end{pmatrix} \Big|_n + \epsilon \begin{pmatrix} g_q \\ g_p \end{pmatrix} \Big|_n.$$

Questa è l'equazione dell'evoluzione della traiettoria con l'aggiunta del pezzo di perturbazione.

Possiamo sviluppare al primo ordine la f_q vicino all'orbita omoclinica (visto che la stiamo valutando sull'orbita perturbata n):

$$f_q(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0) \simeq f_q(\mathbf{x}_0) + \nabla f_q|_{q_0} (\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0).$$

Prenderemo poi l'ordine più basso in ϵ della perturbazione.

Reinserendo nella equazione sopra questo sviluppo si ha:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} d/dt(q_n - q_0) \\ d/dt(p_n - p_0) \end{pmatrix} &= \\ &= \begin{pmatrix} \partial_q f_q(q_n - q_0) + \partial_p f_q(p_n - p_0) \\ \partial_q f_p(p_n - p_0) + \partial_p f_p(q_n - q_0) \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} g_q \\ g_p \end{pmatrix}_0. \end{aligned}$$

Quindi abbiamo le equazioni differenziali per $\dot{\Delta}$:

$$\begin{cases} \dot{\Delta}_q = \partial_q f_q \Delta_q + \partial_p f_q \Delta_p + \epsilon g_q \\ \dot{\Delta}_p = \partial_q f_p \Delta_q + \partial_p f_p \Delta_p + \epsilon g_p \end{cases}$$

Si tratta adesso di reinserire queste equazioni nella 22.3 e svolgere un po' d'algebra.

Inserendo la notazione per il prodotto esterno tra f e g :

$$f \wedge g = f_q g_p - f_p g_q.$$

Possiamo scrivere il risultato cercato: la ODE per \dot{d}

$$\dot{d} = (\partial_q f_q + \partial_p f_p) d + \epsilon f \wedge g.$$

Risolvendo si ha che:

$$d(t) = \int_{-\infty}^t dt \exp \left(\int \partial_q f_q \partial_p f_p ds \right) f \wedge g.$$

Se questo oggetto ha degli zeri allora nel sistema è presente il caos globale.
Nel caso di un sistema Hamiltoniano si ha che:

$$\partial_q f_q = \partial_q \partial_p H = \partial_p \partial_q H = -\partial_p f_p.$$

Quindi l'esponentiale nell'integrale si cancella.
Facendo lo stesso ragionamento con x_s si ottiene che l'intero tratto vale:

$$d(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp \left(\int \partial_q f_q \partial_p f_p ds \right) f \wedge g.$$

Esempio 22.2.3 (Pendolo perturbato). Prendiamo la mappa Hamiltoniana:

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\sin \varphi \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} 0 \\ a - \alpha y + A \sin(\Omega t) \end{pmatrix}.$$

La φ_0 in questo caso la si sa calcolare, il risultato è il seguente:

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= \pm 2 \arctan(\sinh(t)) \\ y_0(t) &= \pm 2 \operatorname{sech}(t). \end{aligned}$$

In questo caso il prodotto esterno $f \wedge g$ vale:

$$f \wedge g = y(a - \alpha y + A \sin(\Omega t)).$$

Il sistema è Hamiltoniano poiché:

$$\partial_q f_p + \partial_p f_q = 0.$$

Quindi possiamo calcolare direttamente la quantità $d(t)$, che definiamo qua come $M(t)$:

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} y_n(t-t_0) [a + A \sin(\Omega t) - \alpha y_n(t-t_0)] dt.$$

In cui si valuta la y_n con una fase $t - t_0$ rispetto al $\sin(\Omega t)$. Questo integrale si risolve con il risultato:

$$M(t_0) = \pm 2\pi a - 8\alpha \pm 2\pi \operatorname{sech}\left(\frac{\pi\Omega}{2}\right) \sin(\Omega t).$$

I segni \pm si riferiscono al fatto che possiamo trovarci nel "ramo" di sopra o di sotto rispetto allo zero delle y nello spazio delle fasi.

In conclusione possiamo studiare i punti di annullamento di M al variare di t_0 per scoprire che il caos entra nel sistema appena vale la seguente disuguaglianza (si fissano a e α):

$$A \geq \left| \pm a + \frac{4\alpha}{\pi} \right| \cosh\left(\frac{\pi\Omega}{2}\right).$$

Per valori di A maggiori i manifold si incrociano nello spazio delle fasi dando il via al caos nelle modalità espresse dal teorema di Poincare.

Possono esistere fenomeni caotici che non sono "visti" dal criterio di Melnikov perché implicano delle strutture ancora più complicate nello spazio delle fasi.

22.3 Calcolo degli esponenti di Lyapunov in processi di Wiener.

Prendiamo un caso unidimensionale:

$$dx = -V' dt + dw.$$

Sappiamo che la distribuzione stazionaria per il processo ha la forma:

$$P_{st}(x) \sim \exp(-V(x)).$$

Per calcolare l'esponente di Lyapunov dobbiamo guardare uno scostamento infinitesimo dalla traiettoria x_t :

$$x_t + \delta x_t.$$

Inserendo nella equazione stocastica:

$$d(x_t + \delta x_t) = -V'(x_t + \delta x_t)dt + dw.$$

Svolgendo ed esplicitando i termini:

$$dx_t + d\delta x_t = -V'(x_t)dt - V''(x_t)d\delta x_t + dw.$$

Definendo la variabile infinitesima:

$$\epsilon_t = \delta x_t.$$

Abbiamo una equazione differenziale del tipo:

$$d\epsilon_t = -V''(x_t)\epsilon_t dt.$$

Questa equazione differenziale ci dice che:

$$\epsilon_{t+\Delta t} = \exp(-V''(x_t)\Delta t)\epsilon_t.$$

Con Δt "piccolo".

Possiamo allora calcolare l'esponente di Lyapunov con la definizione:

$$\lambda_t \sim \frac{1}{\Delta t} \ln \left(\frac{\epsilon_{t+\Delta t}}{\epsilon_t} \right) \sim -V''(x_t).$$

Ovviamente per valutare la caoticità del sistema dobbiamo mediare sulle posizioni della traiettoria:

$$\lambda = \langle \lambda_t \rangle = -\langle V'' \rangle.$$

Possiamo esplicitare quest'ultimo conto:

$$\begin{aligned} -\langle V'' \rangle &= - \int V'' e^{-V} dx = \\ &= - \int \left(\frac{d}{dx} V' e^{-V} + V'^2 e^{-V} \right) dx = \\ &= 0 - \int V'^2 e^{-V} dx < 0. \end{aligned}$$

Quindi visto che $\lambda < 0$ il sistema non è mai caotico. Il problema diventa meno banale quando siamo di fronte ad un esperimento: vorremmo essere in grado di trovare gli esponenti di Lyapunov in un caso reale in cui non si hanno le equazioni differenziali stocastiche.

22.4 Tecnica di Embedding per calcolare gli esponenti di Lyapunov in sistema reale.

Prendiamo un segnale all'apparenza stocastico, ad esempio il seguente:

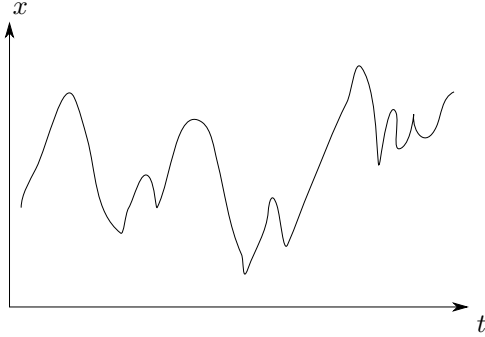


Figura 2.36: Segnale ignoto, vogliamo scoprire se presenta caos.

Si procede facendo una operazione "inversa" rispetto alla mappa di Poincare: proiettiamo il sistema unidimensionale (in x) in un sistema n dimensionale. Dobbiamo quindi pensare che il segnale che si osserva sia solo una proiezione di un fenomeno a dimensionalità più elevata.

Per far questo si procede nel seguente modo:

- Si definisce un tempo τ e si decide la dimensionalità n che si vuole teorizzare.
- Si seleziona un punto sul tracciato: x_0 e si prendono gli $n - 1$ punti che distano τ da x_0 . Se ad esempio si selezionano 3 dimensioni si avrà $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$.
- Si itera la procedura con un altro punto $x_1 \dots$ Si genera una sequenza di vettori n dimensionali che identificano la traiettoria del sistema ad alta dimensionalità (arbitraria).

Il procedimento è illustrato in figura 2.37.

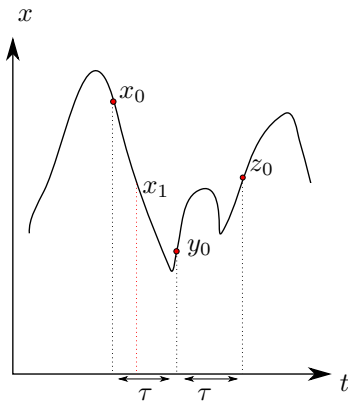


Figura 2.37: Zoom del grafico precedente con procedura di Embedding.

Quindi avremo degli oggetti in generale del tipo:

$$\mathbf{x}(t) = \{x(t), x(t + \tau), x(t + 2\tau), \dots, x(t + (n - 1)\tau)\}.$$

Vista la arbitrarietà del metodo sono state pensate una serie di tecniche entropiche per valutare la dimensionalità e τ come iper-parametri del sistema.

Per concludere gli esponenti di Lyapunov vengono fuori valutando la distanza tra le varie traiettorie $\mathbf{x}(t_i)$ più vicine. Se prendiamo ad esempio la distanza euclidea tra la traiettoria \mathbf{x}_{n+1} e quella \mathbf{x}_n (che chiamiamo d) abbiamo che:

$$\delta \mathbf{x}_{n+1} = d \delta \mathbf{x}_n.$$

Quindi per definizione di esponente di Lyapunov σ :

$$e^{N\sigma} = d.$$

Dove N è il numero totale di punti.

Quindi se da questa analisi emergono dei λ positivi possiamo affermare con certezza che il sistema è caotico, notiamo che invece non vale il viceversa: se si ottiene un esponente negativo potremmo essere semplicemente stati sfigati a beccare una regione nello spazio delle fasi priva di caos.

22.5 Mixing delle traiettorie

Se abbiamo delle divergenze esponenziali nelle traiettorie dello spazio delle fasi allora possiamo dedurre che il sistema realizza un mixing.

Si parla di mixing quando la misura di due traiettorie distinte ha la proprietà:

$$\langle A(t)B(t) \rangle \rightarrow \langle A \rangle \langle B \rangle \quad \text{con } t \rightarrow \infty.$$

Vediamo cosa significa in pratica a partire da un famoso esempio:

Esempio 22.5.1 (Gatto di Arnold). Il sistema del gatto di Arnold è descritto dalla seguente mappa:

$$T: \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{mod } x = \text{mod } y = 1.$$

La mappa è Hamiltoniana poiché ha determinante unitario.

Per capire come questo sistema realizza il mixing andiamo a studiare i punti fissi. Sappiamo che un punto fisso deve finire in se stesso dalla applicazione della mappa:

$$\begin{cases} x = x + y - n \\ y = x + 2y - m \end{cases}.$$

In cui $n \in [0, 1]$, $m \in [0, 2]$ per via del modulo unitario.

In particolare si ha $n = 1$ solo se la x esce dal quadrato unitario, lo stesso vale per la y che potrebbe aver bisogno anche di una spinta di -2 per rientrare.

Risolvendo per i punti fissi otteniamo i seguenti valori:

$$y = n \quad x = -y + m.$$

Quindi i punti fissi sono i quattro vertici del quadrato che, in sostanza, sono tutti lo stesso punto per via del modulo unitario.

La mappa tangente invece è equivalente alla mappa stessa (si ottiene con le derivate miste):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori e gli autovettori di questa mappa sono:

$$\lambda_{\pm} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \xi_{\pm} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}.$$

Notiamo che essendo la mappa Hamiltoniana i due autovalori devono essere uno l'inverso dell'altro, questa proprietà è rispettata dai λ_{\pm} .

Possiamo quindi vedere come sono fatte le varietà stabili/instabili attorno ai quattro punti fissi.

Scostandosi da ogni punto fisso di una quantità ϵ (per ciascuna delle due coordinate) e inserendo il punto "scostato" nella mappa si ottengono i seguenti risultati:

$$\begin{aligned} (\epsilon, \epsilon) &\rightarrow (2\epsilon, 3\epsilon) \\ (1 - \epsilon, \epsilon) &\rightarrow (1, 1 + \epsilon) \rightarrow (1, \epsilon). \end{aligned}$$

Quindi il primo punto è instabile, il secondo è stabile (non sappiamo se ci siamo posti esattamente sul manifold uscente/entrante, sappiamo solo che nei pressi degli scostamenti valutati c'è uno di questi due).

I risultati per gli altri punti sono riportati in figura 2.38.

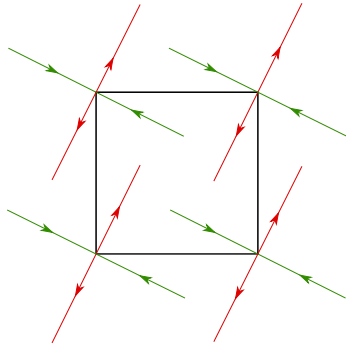


Figura 2.38: Stabilità dei punti fissi nel sistema di Arnold.

Visto che abbiamo valutato gli autovalori della mappa tangente possiamo prendere il maggiore e valutarvi l'esponente di Lyapunov:

$$\sigma = \ln(\lambda_+) = \ln\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right) > 0.$$

Il sistema presenta caos. Possiamo vedere cosa succede alla mappa iterata due volte, facciamo il prodotto tra le matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \mod 1.$$

Possiamo cercare nuovamente i punti fissi, procedendo nello stesso modo visto nel caso della mappa iterata una sola volta si arriva a (x, y) :

$$\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right); \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right); \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right); \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right).$$

E tutti questi sono ancora punti iperbolici i cui manifold si incrociano formando di nuovo caos. Gli autovalori della mappa tangente questa volta sono:

$$\lambda_{\pm} = \frac{7 \pm \sqrt{45}}{2}.$$

Quindi abbiamo una mappa che induce una dinamica molto complicata e caotica già dalle prime iterazioni.

Esempio 22.5.2 (Trasformazione di Baker). Riprendiamo la trasformazione di Baker già vista nella precedente lezione:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n \\ y_{n+1} = y_n/2 \end{cases} \quad \text{se } 0 \leq x_n \leq 1/2$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - 1 \\ y_{n+1} = y_n/2 + 1/2 \end{cases} \quad \text{se } 1/2 < x_n \leq 1$$

I punti fissi della mappa sono:

$$(0, 0); \quad (1, 1).$$

Andiamo a vedere la mappa linearizzata:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori sono già sulla diagonale, siamo quindi in una base di autovettori:

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \omega_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Andando a vedere gli scostamenti dai punti fissi si scopre che questi sono iperbolici, rammentiamo che per capirlo è proprio necessario andare a studiare/simulare la dinamica nei pressi del punto fisso.

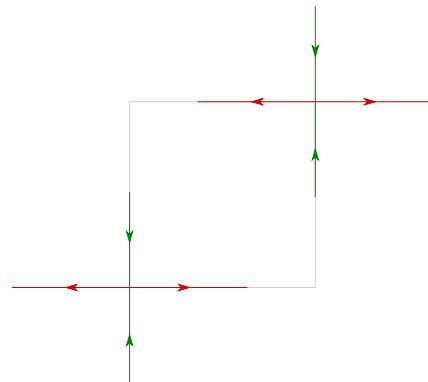


Figura 2.39: Punti iperbolici nel sistema di Baker.

Potremmo andare a vedere la mappa iterata due volte, scopriremo che i punti fissi (che diventano 4) sono ancora iperbolici.

Bernoulli Shift

La trasformazione di Beker ha un'altra importante caratteristica, riprendiamo la notazione binaria per rappresentare l'evoluzione dei numeri nella mappa:

$$x_n = \sum_{J < 0} 2^J a_J \quad y_n = \sum_{k > 0} 2^{-k} b_k.$$

Se prendiamo come x_0 iniziale un numero irrazionale (tra 0 e 1) si ha che la sequenza di $a_i \dots, b_j \dots$ è infinita.

Se applichiamo a questo numero una trasformazione di Beker otteniamo un numero completamente random (quando si fa nuovamente il cambio di base da 2 a 10). Questa caratteristica del sistema è detta Bernoulli Shift e può essere utilizzata per generare numeri random (a partire da una dinamica del tutto deterministica!).