

## 19 Mappa di Poincaré

Visualizzare la dinamica: mappa di Poincaré . . . . .	19.1, p. 76
Mappa di Poincaré per sistema con una costante del moto . . . . .	19.2, p. 76
Sistema di Henon e Heiles: sono stabili le stelle delle galassie? . . . . .	19.3, p. 77
Twist Map . . . . .	19.4, p. 78
Mappa di Henon . . . . .	19.5, p. 79
Legare una mappa ad una Hamiltoniana	19.6, p. 80

### 19.1 Visualizzare la dinamica: mappa di Poincaré

Siamo interessati a capire come visualizzare il caos quando andiamo in dimensioni superiori a 1, questo perché vorremmo studiare almeno il caso 2D, però non siamo in grado di plottare uno spazio delle fasi a quattro dimensioni.

Un metodo molto popolare è quello di sfruttare le **mappe di Poincaré**.

Prendiamo una Hamiltoniana del seguente tipo:

$$H = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + V(x, y).$$

L'idea di fondo delle mappe di Poincaré è quello di catturare il moto in 4 dimensioni su una sezione, la sezione che si sceglie è:

$$\begin{aligned} p_y &> 0 \\ y &= 0. \end{aligned}$$

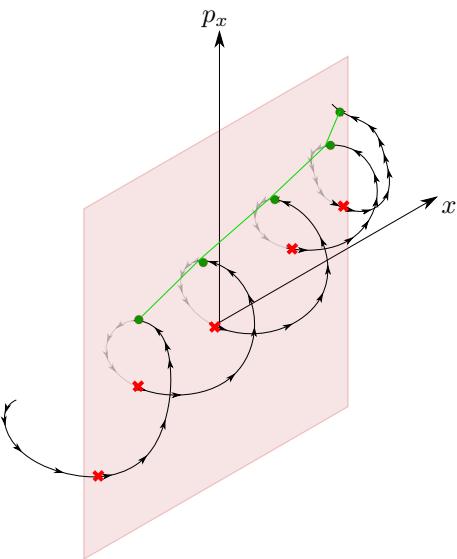


Figura 2.11: Le traiettorie nello spazio delle fasi a quattro dimensioni, essendo su dei tori, possono essere immaginate come delle curve che girano su loro stesse. La proiezione che cerchiamo sono i punti che intersecano il piano rosso ( $y = 0$ ) ed allo stesso tempo entrano nel foglio (vogliamo  $p_y > 0$ ). In questo modo si ottiene una traiettoria descritta dai punti verdi scuri, uniti dalla linea verde chiara. Le croci rosse sono i punti che arrivano in  $y = 0$  ma vanno esclusi poiché hanno  $p_y < 0$  (il segno di  $p_y$  è espresso dalla direzione della freccia quando entra nel piano  $y = 0$ ).

Non è facile da spiegare, è più facile da vedere: ti lascio il link all'indiano che te lo spiega (clicca QUI). Vediamo un esempio pratico riprendendo un sistema già analizzato nella lezione precedente (18.5).

### 19.2 Mappa di Poincaré per sistema con una costante del moto

$$H = H_0(\mathbf{I}) + \alpha I_1 I_2 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2) = E.$$

Con  $E$  costante e:

$$H_0(\mathbf{I}) = I_1 + I_2 - I_1^2 - 3I_1 I_2 + I_2^2.$$

Il cambio di variabili effettuato per applicare il metodo perturbativo è:

$$J_1 = I_1 + I_2; \quad J_2 = I_2; \quad \varphi_1 = \theta_2; \quad \varphi_2 = \theta_2 - \theta_1.$$

In questo modo appare la costante del moto  $J_1$ , le equazioni di HJ sono:

$$\begin{aligned} \dot{J}_1 &= 0 \\ \dot{J}_2 &= 2\alpha J_2(J_1 - J_2) \sin(2\varphi_2) \\ \dot{\varphi}_1 &= 1 - 2J_1 - J_2 + \alpha J_2 \cos(2\varphi_2) \\ \dot{\varphi}_2 &= -J_1 + 6J_2 + \alpha(J_1 - 2J_2) \cos(2\varphi_2). \end{aligned}$$

E quindi l'Hamiltoniana:

$$H(\mathbf{J}, \boldsymbol{\varphi}) = J_1 - J_1^2 - J_1 J_2 + 3J_2^2 + \alpha J_2(J_1 - J_2) \cos(2\varphi_2).$$

Ormai siamo abituati a scrivere l'Hamiltoniana in termine delle variabili azione-angolo  $I, \theta$  (oppure  $J, \varphi$ ), per visualizzare la dinamica dobbiamo tornare indietro nelle variabili  $p, q$ .

Per farlo dobbiamo applicare passaggi analoghi a quelli di 17.6, in tal caso si è esplicitato come trovare  $q$ , per trovare  $p$  basta fare  $\partial_q S(q, J)$ . In questo caso si assume inoltre  $\omega_0 = 1$ .

$$\begin{aligned} p_i &= -\sqrt{2J_i} \sin \varphi_i \\ q_i &= \sqrt{2J_i} \cos \varphi_i. \end{aligned} \tag{19.1}$$

Si può esprimere le variabili  $J_i, \varphi_i$  in funzione delle  $q_i$  e delle  $p_i$  per poi reinserirle nella Hamiltoniana.

$$J_1 = \frac{p_1^2 + q_1^2}{2} \quad J_2 = \frac{p_2^2 + q_2^2}{2}.$$

$$\begin{aligned} \cos(2\varphi_2) &= \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \\ &= -\left( \frac{p_2^2 - q_2^2}{2J_2} \right) = -\left( \frac{p_2^2 - q_2^2}{2(p_2^2 + q_2^2)} \right). \end{aligned}$$

Giusto per referenza l'Hamiltoniana in termini di  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  sarebbe:

$$\begin{aligned} H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \frac{p_1^2 + q_1^2}{2} - \left( \frac{p_1^2 + q_1^2}{2} \right)^2 + \\ &\quad - \left( \frac{p_1^2 + q_1^2}{2} \right) \left( \frac{p_2^2 + q_2^2}{2} \right) + 3 \left( \frac{p_2^2 + q_2^2}{2} \right)^2 + \\ &\quad - \frac{(p_2^2 - q_2^2)}{4} (p_1^2 - p_2^2 + q_1^2 - q_2^2). \end{aligned}$$

**Ottenere la mappa** In questo caso particolare conviene risolvere il problema nelle variabili  $J_i, \phi_i$ , successivamente applicare le trasformazioni 19.1 per tornare nello spazio  $p, q$ .

Possiamo notare che, fissando l'energia  $E$  del sistema ed avendo un'integrale del moto ( $J_1$ ), il problema è completamente risolto: non c'è bisogno di fissare alcun piano (tipo  $y = 0$ ) come detto nel caso generale della sezione precedente.

Infatti senza alcun integrale del moto si hanno 4 gradi di libertà, la presenza di  $E$  e  $J_1$  ne lascia soltanto 2 a disposizione. Nel seguito si sceglie di lasciare liberi soltanto  $J_2$  e  $\phi_2$  (quindi si plotta  $p_y$  in funzione di  $y$ ). Si elencano operativamente i passaggi da seguire per ottenere la mappa:

1. Selezionare energia e  $\alpha$  iniziali.
2. Selezionare un parametro  $J_1$  iniziale e farlo variare in un intervallo ragionevole (vedere Linda Reichl, pag. 28-31).
3. Sulla base della scelta di  $J_1$  fissare  $J_2$  e  $\phi_2$  in modo da conservare l'energia. Per far questo è necessario invertire l'Hamiltoniana per trovare  $J_2$ :

$$\begin{aligned} [3 - \alpha \cos(2\phi_2)] J_2^2 + \\ [(\alpha \cos(2\phi_2) - 1) J_1] J_2 + [J_1 - J_1^2 - E] = 0. \end{aligned}$$

Per trovare un intervallo dove le soluzioni esistono è necessario che il discriminante  $\Delta$  di questa equazione sia positivo, imponendo  $\Delta > 0$  si fissa quindi un possibile  $\phi_2$ .

4. Integrare le equazioni 19.1 con un metodo appropriato, io ho scelto integratore di Heun (senza parte stocastica) come il professore.
5. Tornare nelle variabili  $y, p_y$  con la trasformazione canonica.
6. Plottare  $p_y$  vs  $y$ .

Vi assicuro che i punti (2) e (3) non sono affatto divertenti: il dominio di esistenza di questi parametri non è molto vasto, fatevi guidare dal libro sopra citato, dallo script di Fortran del professore (mapH22.f) e dal notebook caricato su Github.

Se sarete pazienti otterrete la seguente mappa:

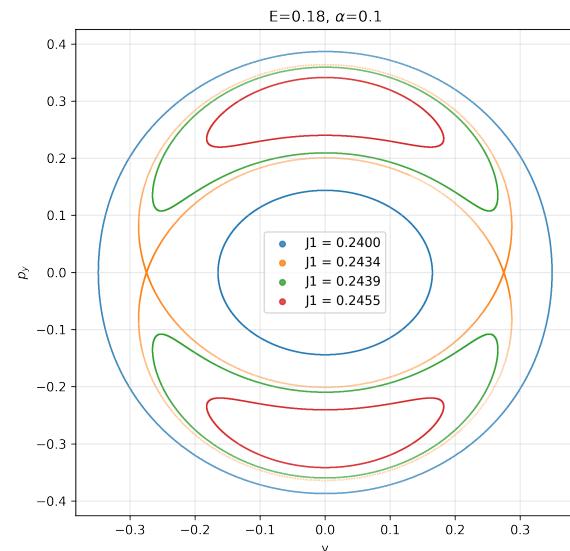


Figura 2.12: Mappa di Poincaré per il sistema bidimensionale di questa sezione, notiamo la risonanza in  $J_1 = 0.24$ . Per  $\alpha \ll 1$  si dovrebbe avere la risonanza a  $J_1 \simeq 5J_2$ . Numericamente questa non è esattamente rispettata, probabilmente  $\alpha = 0.1$  non basta.

### 19.3 Sistema di Henon e Heiles: sono stabili le stelle delle galassie?

Nel 1964 era noto che, il moto di una stella nella galassia presentava due integrali del moto: l'energia ed una componente del momento angolare.

Analiticamente nessuno riusciva a capire se fosse presente un altro integrale del moto, tuttavia le osservazioni del rapporto tra la velocità parallela al centro della galassia e quella ortogonale ne suggerivano la presenza (tale rapporto risultava circa 2:1).

Henon e Heiles ci riuscirono nell'intento modellizzando con una semplice Hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2y - \frac{1}{3}y^3.$$

Quello che fecero è studiare la mappa: se si fosse presentata una terza costante del moto sarebbe apparsa nel numero di tori invarianti del sistema.

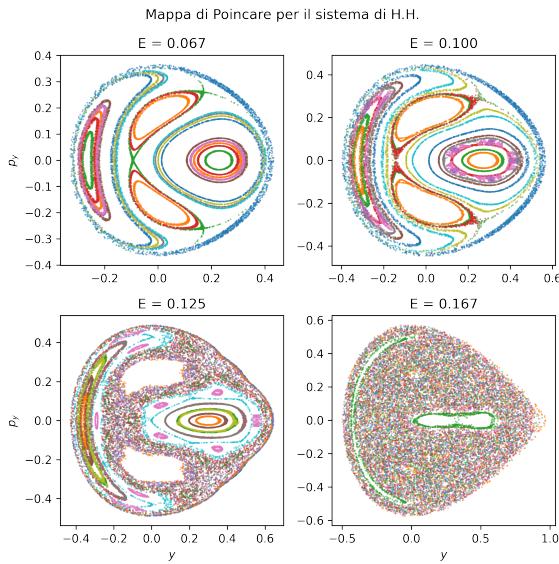


Figura 2.13: Mappa di Poincaré per il sistema di Henon-Heiles: notiamo come a bassa energia è evidente la presenza di tori invarianti: c'è un terzo integrale del moto.

Si vede bene che, all'aumentare della energia, i tori invarianti si rompono. In particolare si ha che i primi tori a rompersi sono proprio quelli passanti per il punto fisso: quelli corrispondenti a delle frequenze di H tra loro razionali.

#### Tentativo di costruire una teoria perturbativa per Henon-Heiles

Il motivo per il quale non è stato possibile trovare un terzo integrale del moto analiticamente è il fallimento della teoria perturbativa. Andiamo in variabili azione-angolo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}x^2 &= \omega_x I_x. \\ \frac{1}{2}p_y^2 + \frac{1}{2}y^2 &= \omega_y I_y. \end{aligned}$$

Le trasformazioni canoniche associate sono:

$$x = \sqrt{2I_x} \sin \theta_x \quad y = \sqrt{2I_y} \sin \theta_y.$$

In conclusione possiamo scrivere l'Hamiltoniana imperturbata come:

$$H_0 = \omega_x I_x + \omega_y I_y.$$

Mentre la perturbazione:

$$\begin{aligned} H_I &= \frac{(2I_x)(2I_y)^{1/2}}{2} \times \\ &\times \left[ \sin \theta_y - \frac{1}{2} \sin(\theta_y + 2\theta_x) - \frac{1}{2} \sin(\theta_y - 2\theta_x) \right] + \\ &- \frac{1}{3} (2I_y)^{3/2} \left[ \frac{3}{2} \sin \theta_y - \frac{1}{2} \sin(3\theta_y) \right]. \end{aligned}$$

In conclusione si dovrebbe trovare la trasformazione che integra la seguente H:

$$H = H_0 + H_I.$$

Il grosso problema è che possiamo trovarne una che elimini una delle due risonanze in  $\theta_y \pm 2\theta_x$ <sup>3</sup>, non è tuttavia possibile eliminarle entrambe. La teoria perturbativa quindi fallisce in questo caso e vediamo i tori nello spazio delle fasi rompersi all'aumentare dell'energia.

Nel seguito ci focalizzeremo su delle mappe che siano **"Area preserving"**, ovvero quelle che derivano da sistemi Hamiltoniani.

Una mappa, per essere area preserving deve avere uno Jacobiano unitario, in due dimensioni ad esempio dovrà essere:

$$\frac{\partial(x_{i+1}, y_{i+1})}{\partial(x_i, y_i)} = 1.$$

La logica di questo cambio di punto di vista è la seguente: se studiamo degli insiemi generici di mappe (Area preserving) allora dato un qualunque sistema Hamiltoniano potremmo pensare di ricondurlo ad una determinate classi di mappe.

Questo approccio ci permette di risolvere generalizzando molti più problemi Hamiltoniani.

#### 19.4 Twist Map

Supponiamo di avere un toro bidimensionale avente frequenze tra di loro incommensurabili (rapporto irrazionale). Supponiamo inoltre che le due frequenze  $\omega_1, \omega_2$  varino debolmente con l'azione  $I$ .

Dalla definizione di variabili azione angolo sappiamo che:

$$\theta_1(t) = \omega_1 t + \theta_1(0) \quad \theta_2(t) = \omega_2 t + \theta_2(0).$$

E anche:

$$\omega_1 = \partial_{I_1} H \quad \omega_2 = \partial_{I_2} H.$$

Sia  $t_2$  il periodo per avere  $\theta_2 \rightarrow \theta_2 + 2\pi$ , sempre per definizione di pulsazione  $\omega$  si ha:

$$t_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}.$$

Cosa possiamo dire sulla traslazione temporale di  $t_2$  per  $\theta_1$ ?

$$\begin{aligned} \theta_1(t + t_2) &= \theta_1(t) + \omega_1 t_2 = \\ &= \theta_1(t) + 2\pi \frac{\omega_1}{\omega_2} = \\ &= \theta_1(t) + 2\pi \frac{\omega_1}{\omega_2} (I_1). \end{aligned}$$

Attenzione al fatto che  $\omega_1/\omega_2$  è una funzione di variabile  $I_1$  (non è una moltiplicazione).

Operativamente una twist map ha una struttura sulla superficie di Poincaré del seguente tipo:

<sup>3</sup>Il problema di questi termini deriva dalla **interazione** delle due variabili angolo: tale interazione potrebbe distruggere la teoria perturbativa per la scelta di determinati valori iniziali ad esempio.

### Twist map

$$x_i \equiv (\theta_1(t + it_2), I_1) \equiv (\theta_i, r_i).$$

in cui la dipendenza da  $r_i$  compare nel fattore  $\omega_1/\omega_2 \equiv \alpha(r_i)$ .

**Esempio 19.4.1** (Twist map semplice).

$$\begin{cases} \theta_{i+1} = \theta_i + 2\pi\alpha(r_i) \\ r_{i+1} = r_i \end{cases}.$$

Possiamo visualizzare la mappa nello spazio  $x, y$ :

$$\begin{aligned} x_i &= r_i \cos(\theta_i) & y_i &= r_i \sin(\theta_i). \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

In queste coordinate si ha che, se  $\alpha$  non dipende da  $r$ , iterando la mappa i punti  $x, y$  giacciono tutti sulla stessa circonferenza. Visto che in generale abbiamo una dipendenza da  $\alpha$  allora i punti con  $r$  maggiore ruotano di più o di meno rispetto a quelli con  $r$  minore, formando quindi una specie di rotazione-dilatazione dello spazio  $(x, y)$ .

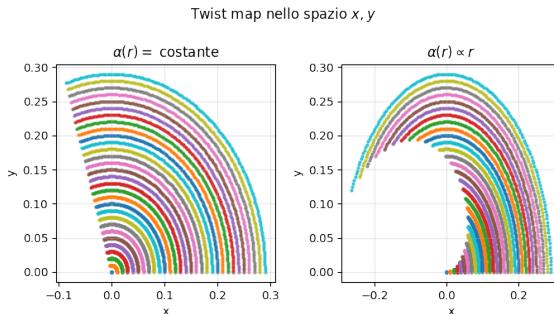


Figura 2.14: Twist map nello spazio  $x, y$ , le condizioni iniziali utilizzate sono  $\theta_0 = 0$ . Per  $r_0$  sono stati selezionati diversi valori tra 0 e 0.3 che danno origine alle curve rotanti (un colore corrisponde alla singola traiettoria, dopo il celeste la mappa di colori si ripete).

**Esempio 19.4.2** (Twist map in cartesiane). Un esempio di Twist map in coordinate cartesiane è:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + y_i \\ y_{i+1} = y_i \end{cases}$$

Notiamo che la struttura delle equazioni è identica al caso precedente (in coordinate polari).

Questa mappa è area preserving, infatti:

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}.$$

Partendo con dei punti aventi tutti la stessa coordinata  $x$  si osserva che, per iterate successive, i punti con la  $y$  maggiore vengono mandati in  $x$  maggiori rispetto a quelli con una  $x$  minore. La coordinata  $y$  resta invece inalterata.

Abbiamo quindi una rotazione + dilatazione nello spazio  $x, y$ : una Twist map.

### 19.5 Mappa di Henon

La mappa di Henon è stata al centro di numerose ricerche sui sistemi caotici e non lineari. Henon ebbe l'idea di modellizzare con questa mappa il moto degli oggetti celesti. Secondo il suo modello, per determinati parametri iniziali, il moto sfocia nel caos.

Costruiamo la mappa in due step, un primo step è un "twist" con un termine  $-x^2$ , chiamiamo questa trasformazione  $T_1$ :

$$T_1 : \begin{cases} x' = x_i \\ y' = y_i - x_i^2 \end{cases}.$$

Mentre il secondo step ( $T_2$ ) è una rotazione del primo:

$$T_2 : \begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

In conclusione abbiamo  $T = T_1 \cdot T_2$ :

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i \cos \alpha - (y_i - x_i^2) \sin \alpha \\ y_{i+1} = x_i \sin \alpha + (y_i - x_i^2) \cos \alpha \end{cases}.$$

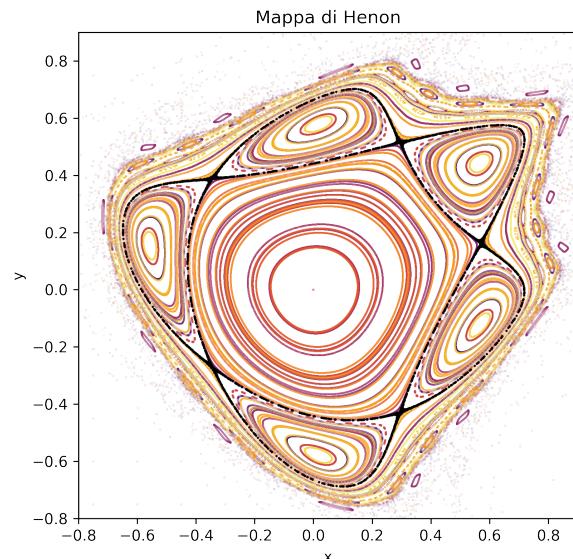


Figura 2.15: Mappa di Henon al variare dei parametri iniziali di  $x$  e  $y$  con  $\alpha = 1.328$ . Si è messa enfasi sulla traiettoria passante per il punto fisso (in nero). Notiamo come le traiettorie esterne sfocino già nel caos. Realizzata in Fortran e Python.

In questa immagine c'è molto di più di quel che si vede, provando a valutare il moto negli intorni dei punti fissi appaiono strutture di vario genere, piccoli tori circondati da caos (provare a giocare con le condizioni iniziali per vedere).

Possiamo chiederci se questa mappa sia Area preserving.

Per quanto riguarda la rotazione  $T_2$  non ci sono problemi, sappiamo che ogni rotazione ha un Jacobiano unitario.

La mappa  $T_1$  invece (usiamo la notazione di sopra con  $x', y'$ ):

$$\frac{\partial x'}{\partial x_i} = 1 \quad \frac{\partial x'}{\partial y_i} = 0$$

$$\frac{\partial y'}{\partial x_i} = 0 \quad \frac{\partial y'}{\partial y_i} = 1.$$

Quindi abbiamo che il determinante della matrice delle derivate miste è unitario anche per  $T_1$ , di conseguenza la trasformazione è Area preserving e potrebbe essere attribuita ad una qualche Hamiltoniana. Quale Hamiltoniana genera questa mappa?

## 19.6 Legare una mappa ad una Hamiltoniana

Prendiamo una Hamiltoniana del tipo:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum \frac{1}{2} p_i^2 + V(\mathbf{q}) \quad (19.2)$$

**L'integrazione di Eulero non è Area preserving**  
Possiamo provare a discretizzare le equazioni del moto in questo modo:

$$\begin{cases} q_{i+1} = q_i + h p_i \\ p_{i+1} = p_i - h \frac{\partial V}{\partial q_i} \end{cases} \quad h = \Delta t.$$

Possiamo scrivere la mappa in forma di matrice (in questo modo si isola lo Jacobiano):

$$\begin{pmatrix} q_{i+1} \\ p_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & h \\ -hV'' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_i \\ p_i \end{pmatrix}.$$

Dove la derivata seconda  $V''$  appare perché si scrive:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_i^2} \partial q_i.$$

Per rendere proporzionale a  $q$  il termine con la derivata parziale di  $V$ .

Il determinante della trasformazione non è unitario:

$$\det = 1 + h^2 V'' \neq 1.$$

Quindi la mappa che si ottiene da una integrazione con Eulero non è area preserving. Integrando con questo metodo l'Hamiltoniana perderemo molto rapidamente le caratteristiche del nostro sistema fisico.

**Eulero "a due step" è Area preserving** Prendiamo la seguente variante dell'integrazione con Eulero:

$$\begin{cases} q_{i+1} = q_i + h p_i \\ p_{i+1} = p_i - h V'_{i+1} \end{cases}.$$

In cui il termine  $V'_{i+1}$  è la derivata del potenziale rispetto a  $q_{i+1}$ .

Così facendo il termine in basso a sinistra nello Jacobiano descritto sopra non c'è:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ed il determinante di questa matrice è 1: abbiamo una integrazione AP (Area preserving).

Il problema è che, a differenza delle equazioni agli incrementi di Eulero, questa integrazione non deriva direttamente dalle equazioni di Hamilton discretezzate dell'Hamiltoniana 19.2. Da quale Hamiltoniana derivano?

Si può dimostrare che questa  $H$  deve esser della forma:

$$H = \frac{p^2}{2} + h V(q) \delta(t - ih) \quad i \in \mathbb{N} \quad (19.3)$$

Per un tempo  $h'$  abbiamo una equazione per particella libera ( $H = p^2/2$ ), tale Hamiltoniana si sa integrare (equazioni del moto lineari).

$$\begin{aligned} q_{i+1} &= q_i + h p_i \\ p_{i+1} &= p_i. \end{aligned}$$

Quindi lontano dalle  $\delta$  abbiamo una specie di twist map. Ai tempi  $t = ih$  il nostro oggetto prende un colpo dal potenziale.

Immaginiamo di iniziare l'integrazione in un tempo tra  $[ih, (i+1)h]$ , in tal caso si ha per  $q$  l'equazione scritta sopra, mentre per  $p$  abbiamo una sorpresa:

$$\dot{p} = -\frac{\partial V}{\partial q}.$$

Se la integriamo nel tempo sopravvivono soltanto dei pezzi negli intorni di  $(i+1)h$  (il tempo  $ih$  è già passato):

$$p_{i+1} - p_i = - \int_{(i+1)h-\epsilon}^{(i+1)h+\epsilon} V' dt = -h V'_{i+1}.$$

Notiamo che si potrebbe anche invertire il ruolo di  $p$  e  $q$ , effettuando prima il "calcio" e successivamente l'evoluzione:

$$\begin{aligned} q_{i+1} &= q_i + p_{i+1} h \\ p_{i+1} &= p_i - V'_i h. \end{aligned}$$

**Analogia con le mappe di Poincaré** La questione del passaggio dall'Hamiltoniana di partenza ad una mappa (e viceversa) è quindi risolta? Cosa significa fisicamente risolvere per una Hamiltoniana come quella di equazione 19.3?

Sorprendentemente significa che stiamo studiando una mappa di Poincaré: fissare degli istanti di "osservazione" del sistema con la  $\delta$  significare fissare dei piani a tempi fissi nello spazio  $(q, p, t)$ , esattamente quello che si fa con una mappa di Poincaré.

Infatti fissare un piano di osservazione <sup>4</sup> significa aspettare gli istanti in cui l'oggetto passerà nuovamente da tale piano, quindi è esattamente l'analogo di quello che stiamo facendo adesso.

<sup>4</sup>ad esempio  $y = 0$  come nell'esempio della lezione scorsa