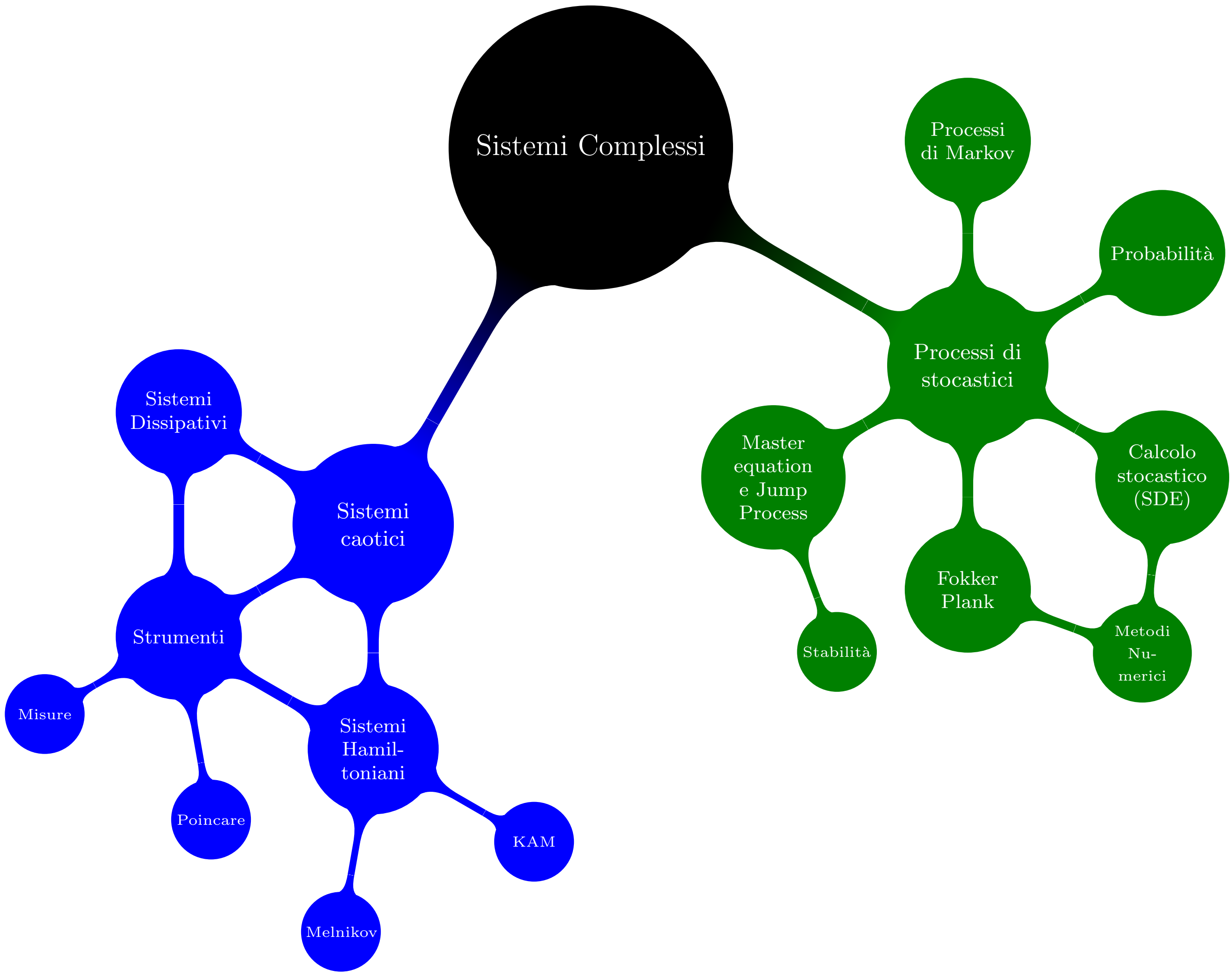
Sistemi complessi

Edoardo Gabrielli

18 dicembre 2020

Indice

MindMap del corso



Capitolo 1

Processi stocastici

1 Lezione 4

1.1 Continuità dei processi stocastici

Definizione 1.1.1 (Processo continuo)**.** Un processo stocastico si dice continuo se $\forall\epsilon > 0$:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{\Sigma_\epsilon} dx_1 P_{1|1}(x_1, t+\Delta t|x_2, t) = 0.$$

$$\Sigma_\epsilon : \{|x_1 - x_2| > \epsilon\}.$$

In pratica serve che il cammino descritto dal processo sia continuo, la distanza tra due punti del processo deve andare a 0 più rapidamente di Δt.
I processi Markoviani non sono necessariamente continui:

Esempio 1.1.1 (Pollaio)**.** Il numero di uova prodotte in un pollaio in un giorno può essere schematizzato come processo markoviano: dipende soltanto dal numero di galline presenti nel pollaio il giorno prima.
Questo processo non può essere continuo: è possibile mandare il Δt a 0 ma non possiamo fare altrettanto con x, ovvero il numero di uova. Infatti in questo caso il numero di uova è discreto.
In generale i processi a salti discreti non possono essere continui.

Esempio 1.1.2 (Moto Browniano)**.** Calcoliamo l'equivalente della $P_{1|1}$ nel moto Browniano, nella lezione 1 abbiamo visto che:

$$P(x, t+\Delta t) = \int P(x-\Delta, t) f(\Delta) d\Delta.$$

Con $f(\Delta)$: probabilità di fare un salto lungo Δ nell'intervallo di tempo Δt.
Definendo la quantità $y = x - \Delta$ intuitivamente la $f(\Delta)$ corrisponde alla probabilità condizionata:

$$f(\Delta) = P_{1|1}(x, t+\Delta t|y, t).$$

Essendo un oggetto Gaussiano la $f(\Delta)$ avrà la seguente struttura:

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D\Delta t}}\exp\left(-\frac{1}{4D\Delta t}(x-y)^2\right).$$

In altre parole $f(\Delta)$ è proprio un propagatore.
Inserendo questo oggetto nella definizione di processo continuo si vede che l'uguaglianza al limite è soddisfatta, quindi il moto Browniano è un processo continuo.

Esempio 1.1.3 (Moto di Cauchy)**.** Il moto di Cauchy presenta una struttura per la probabilità di salto (condizionata) del seguente tipo:

$$P_{1|1}(x, t+\Delta t|z, t) = \frac{\Delta t}{\pi}\frac{1}{(x-z)^2 + (\Delta t)^2}.$$

E si può dimostrare che:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{\Sigma_\epsilon}\frac{\Delta t dx}{\pi\left[(x-z)^2 + (\Delta t)^2\right]} = \infty.$$

Di conseguenza il moto di Cauchy non è continuo.

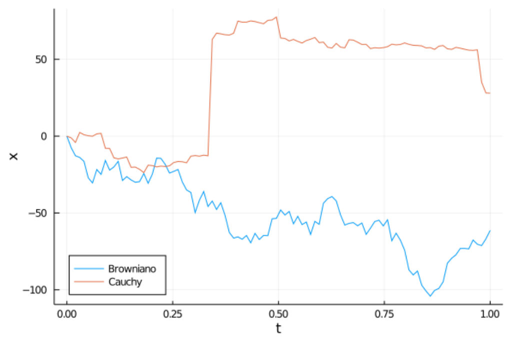


Figura 1.1: Processo di Brown e Processo di Cauchy a confronto (Ottenuto in Julia).

1.2 Forma differenziale di Chapman - Kolmogorov

Prendiamo un processo stocastico scomponibile [1] in una parte continua ed una non continua.
Si può dimostrare che un processo di questo tipo è descritto dalla seguente forma differenziale:

Forma di Chapman-Kolmogorov

$$\partial_t P(\boldsymbol{z}, t|\boldsymbol{y}, t') = -\Gamma + \Phi.$$

In cui Γ è la parte contenente il processo continuo:

$$\Gamma = \sum_i \partial_{z_i}\left[A_i(\boldsymbol{z}, t)P(\boldsymbol{z}, t|\boldsymbol{y}, t')\right] +$$

$$+\sum_{i,J}\frac{1}{2}\partial^2_{z_i Z_J}\left[B_{iJ}(z, t)P(\boldsymbol{z}, t|\boldsymbol{y}, t')\right].$$

[1] Ipotesi per cui si può scomporre sul Gardiner

Qui abbiamo un primo termine "deterministico" (con la A) che determina soltanto uno spostamento dell'oggetto ed un termine di diffusione (quello in B).
Nella Φ abbiamo invece il processo discontinuo:

$$\Phi = \int d\boldsymbol{x} \left[\omega(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x},t)P(\boldsymbol{x},t|\boldsymbol{y},t') + \right.$$
$$\left. -\omega(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z},t)P(\boldsymbol{z},t|\boldsymbol{y},t')\right].$$

Il termine Φ somiglia molto al termine della equazione di Volterra che abbiamo visto nella prima lezione (prob. di trovarsi in $\boldsymbol{z}$ è data dalla probabilità di finire in $\boldsymbol{z}$ da una posizione $\boldsymbol{x}$ diminuito la prob. di scappare in $\boldsymbol{x}$ dalla posizione $\boldsymbol{z}$).
La potenza della equazione è la sua generalità: se sappiamo che un processo è Markoviano (magari per la fisica che ci sta dietro) allora l'equazione di evoluzione delle prob. nel tempo sarà necessariamente quella sopra.

Esempio 1.2.1 ($A = B = 0$, quindi $\Gamma = 0$)**.**

$$\partial_t P = \Phi.$$

Considerando il rapporto incrementale con passo Δt:

$$P(z, t + \Delta t|y, t) = P(z, t|y, t) + \Delta t \cdot \Phi.$$

Sfruttiamo la proprietà ovvia:

$$P(\boldsymbol{z}, t|\boldsymbol{t}, t) = \delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}).$$

Allora possiamo sviluppare l'espressione con Δt che tende a 0 (mettiamoci in una dimensione per semplicità):

Soluzione della forma diff. con termini continui

$$P(z, t + \Delta t|y, t) =$$
$$= \delta(z - y)\left[1 - \Delta t \int dx\omega(x|z)\right] + \Delta t \cdot \omega(z|y).$$

1.3 Processo di Wiener

Un processo di Wiener è modellato dalla seguente equazione:

Equazione per processo di Wiener

$$\frac{\partial}{\partial t}P(\omega, t|\omega_0, t_0) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \omega^2}P(\omega, t|\omega_0, t_0).$$

Inoltre deve esser rispettata la condizione iniziale:

$$P(\omega, t_0|\omega_0, t_0) = \delta(\omega - \omega_0).$$

Il processo si può risolvere utilizzando la funzione caratteristica:

$$\phi(s, t) = \int d\omega P(\omega, t|\omega_0, t_0)e^{is\omega}.$$

Sfruttando le regole della trasformata possiamo riscrivere l'equazione del processo come:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{1}{2}s^2\phi.$$
$$\phi(s, t_0) = \exp(is\omega_0).$$

La soluzione è nota:

$$\phi(s) = \exp\left(-\frac{1}{2}s^2(t - t_0)\right)\phi(s, t_0) =$$
$$= \exp\left(-\frac{1}{2}s^2(t - t_0) + is\omega_0\right).$$

Visto che l'antitrasformata di una Gaussiana è una Gaussiana abbiamo la soluzione nello spazio reale:

Soluzione del processo di Wiener

$$P(\omega, t|\omega_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t - t_0)}}\exp\left(-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2(t - t_0)}\right)$$

Il processo che abbiamo ottenuto è Gaussiano:

$$\langle\omega\rangle = \omega_0.$$
$$\left\langle(\omega - \omega_0)^2\right\rangle = t - t_0.$$

Proprietà dei processi di Wiener

- É continuo.
- Non è differenziabile, $\forall k$:

$$\text{Prob}\left(\frac{|\omega(t + h) - \omega(t)|}{h} > k\right) =$$
$$= 2\int_{kh}^{\infty} d\omega \frac{1}{\sqrt{2\pi h}}e^{-\omega^2/2h} \xrightarrow{h\to 0} 1.$$

- Gli incrementi sono indipendenti:

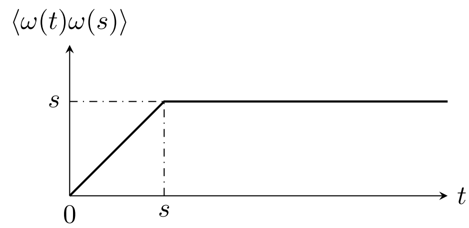
$$P(\omega_2, t_2; w_1, t_1; \omega_0, t_0) =$$
$$= P(\omega_2, t_2|\omega_1, t_1)P(\omega_1, t_1|\omega_0, t_0)P(\omega_0, t_0).$$

  Il primo termine dopo l'uguale non dipende da (ω_0, t_0) perché il processo è Markoviano.

- La correlazione:

$$\langle\omega(t)\omega(s)|\,[\omega_0, t_0]\rangle = \min(t - t_0, s - s_0) + \omega_0^2.$$

  Che nel caso particolare in cui $\omega_0 = t_0 = 0$ si ha $\langle\omega(t)\omega(s)\rangle = s$ se $t > s$.



2 Lezione 5

2.1 Processo di Ornstein - Uhlenback

Prendiamo in considerazione altri esempi di processi di Markov.

Equazione di Ornstein - Uhlenback

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(kxP) + \frac{1}{2} D \frac{\partial^2}{\partial x^2} P.$$

Soluzione stazionaria

Cerchiamo intanto la soluzione con ($\partial_t P = 0$):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(kxP + \frac{1}{2} D \frac{\partial}{\partial x} P\right) = 0 \implies$$

$$\implies \left[kxP + \frac{1}{2} D \frac{\partial}{\partial x} P\right]_{-\infty}^{x} = J.$$

Se ipotizziamo che:

1. $\lim_{|x|\to\infty} P(x, t|x_0, t_0) = 0$
2. $\lim_{|x|\to\infty} xP(x, t|x_0, t_0) = 0.$

Allora possiamo affermare che la corrente $J = 0$ per $x \to \infty$. Si risolve allora l'equazione differenziale:

Soluzione stazionaria

$$P_s(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi D/k}} e^{-kx^2/D}.$$

Soluzione dipendente dal tempo.

Per la dipendenza temporale sfruttiamo la funzione caratteristica $\phi(s)$.

$$\phi(s) = \int e^{isx} P(x, t|x_0, t_0) dx.$$

L'equazione del processo diventa:

$$\partial_t \phi = -ks\partial_s \phi - \frac{1}{2} D s^2 \phi.$$

Questa equazione alle derivate parziali può essere risolta tramite il metodo delle caratteristiche (2.A). L'unico ostacolo all'utilizzo del metodo è il secondo termine dopo l'uguale (contiene la soluzione), vorremmo ricondurci all'equazione in forma standard. Facciamo allora il cambio di variabile:

$$g = \ln \phi.$$

Visto che:

$$\partial_t g.$$

Appendice

2.A Metodo delle Caratteristiche.

Supponiamo di avere una PDE della forma:

PDE per metodo delle caratteristiche

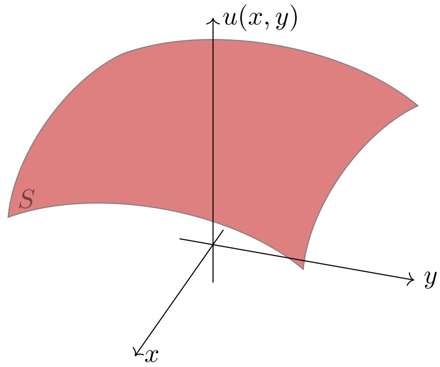
$$a(x, y)\partial_x u + b(x, y)\partial_y u - c(x, y) = 0.$$

Scrivibile anche come:

$$(a,\ b,\ c) \cdot (\partial_x u,\ \partial_y u,\ -1) = 0 \tag{2.1}$$

Ed una superficie parametrizzata con la soluzione della PDE ($u(x, y)$):

$$S \equiv (x, y, u(x, y)).$$



Vettore tangente a S

Il vettore $(a,\ b,\ c)$ appartiene al piano tangente di S in ogni punto (x, y, z).

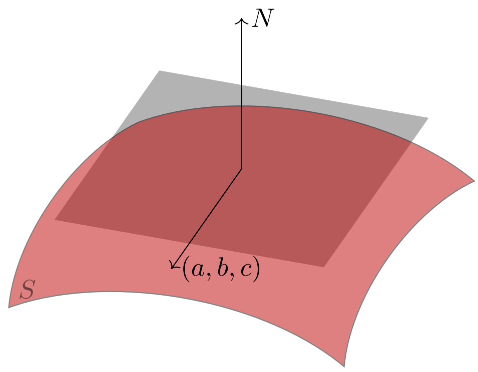
La normale $\boldsymbol{N}$ alla superficie S la si trova facendo il gradiente di:

$$\overline{S} = u(x, y) - z.$$

Si ottiene quindi:

$$\boldsymbol{N} = (\partial_x u,\ \partial_y u,\ -1).$$

Visto che $\boldsymbol{N}$ è il secondo termine nella 2.1 si vede che la soluzione è il luogo dei vettori (a, b, c) ortogonali a $\boldsymbol{N}$, quindi tangenti al piano S.



Quindi la soluzione della PDE è tale per cui il vettore (a, b, c) sta sul piano tangente.

Curva caratteristica

Per mappare la soluzione si introduce una curva C detta curva caratteristica che descrive la superficie.

$$C: \quad C \equiv (x(\eta), y(\eta), z(\eta))\,.$$

C è una curva parametrica in η localmente tangente a (a, b, c).
La condizione di parallelismo implica il seguente sistema:

Equazioni Caratteristiche

Sono curve integrali per il campo vettoriale (a, b, c)

$$\begin{cases} a(x(\eta), y(\eta)) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\eta} \\[2ex] b(x(\eta), y(\eta)) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\eta} \\[2ex] c(x(\eta), y(\eta)) = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\eta} \end{cases}$$

Queste equazioni risolvono la PDE.

Esempio 2.A.1 (Equazione del trasporto.)**.**

$$u_t + a \cdot u_x = 0.$$

In questo caso si ha $(a, b, c) \to (a, 1, 0)$, quindi:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\eta} = a \qquad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\eta} = 1 \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\eta} = 0$$

Passiamo alla risoluzione:

$$\begin{cases} x(\eta) = a\eta + c_1 \\ t(\eta) = c_2 + \eta \\ z(\eta) = c_3 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x - at = x_0 \\ z = k \end{cases}$$

In cui si è effettuata dell'algebra per eliminare η nel primo sistema.

- La funzione che risolve il sistema di destra è la soluzione dell'equazione del trasporto.
- Graficamente le funzioni che risolvono sono delle rette con z costante, l'unione di queste rette rappresenta S.
- Abbiamo ottenuto un fascio di soluzioni poiché non abbiamo imposto alcuna soluzione al contorno.

In conclusione z dovrà essere funzione di $x - at$, quindi la soluzione generale sarà una funzione del tipo:

$$z(x, t) = f(x - at) \equiv u(x, t).$$

Supponiamo che all'istante iniziale la soluzione fosse una gaussiana:

$$f(x, t = 0) = e^{-x^2}.$$

Quindi si ha che anche la soluzione a $t = 0$ è una gaussiana:

$$u(x, t = 0) = e^{-x^2}.$$

Ed introducendo il tempo la soluzione diventa semplicemente:

$$u(x, t) = e^{-(x - at)^2}.$$

Capitolo 2

Sistemi caotici