1 Lezione 8

1.1 Legame tra SDE e Fokker-Plank

Prendiamo una equazione differenziale sticastica del tipo:

$$dx = adt + bd\omega.$$

Possiamo immaginare che questa SDE dia luogo ad una distribuzione di probabilità Markoviana, quindi che soddisfi l'equazione di Chapman-Kolmogorov (**??**).
Il problema è che la forma differenziale di CK è molto generale, cerchiamo di capire quale forma assume per soddisfare la SDE sopra.
Prendiamo una generica funzione $f(x(t))$, il suo differenziale è dato dalla formula di $\hat{I}$to:

$$df = \left(a\partial_x f + \frac{1}{2}b^2\partial^2_{x^2} f\right) dt + b\partial_x f d\omega.$$

Consideriamo la derivata di f rispetto al tempo mediata sulle realizzazioni di ω:

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \right\rangle_\omega = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle f(x(t)) \rangle .$$

Essendo $\langle d\omega \rangle_\omega = 0$ si ha che:

$$\frac{\mathrm{d}\langle f \rangle}{\mathrm{d}t} = \left\langle a\partial_x f + \frac{1}{2}b^2\partial^2_{x^2} f \right\rangle \tag{1.1}$$

L'equazione di CK ci dava una condizione sul propagatore $P(x,t|x_0,t_0)$, tale propagatore entra in gioco nel calcolo del valor medio di f:

$$\langle f(x(t)) \rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int dx f(x) P(x,t|x_0,t_0).$$

In tale espressione la dipendenza temporale entra soltanto all'interno del propagatore.
Sostituendo la **??** si ha:

$$\int dx \left[a\partial_x f + \frac{1}{2}b^2\partial^2_{x^2} f\right] P = \int dx f(x) \partial_t P.$$

Integrando per parti a destra dell'uguale e supponendo che la $P(x,t|x_0,t_0)$ non diverga al bordo:

$$\int dx f(x)\partial_t P = \int dx f(x) \left[-\partial_x(aP) + \partial^2_{x^2}\left(\frac{1}{2}b^2 P\right)\right].$$

Visto che si è isolata la f a destra e sinistra l'equazione per P che si ottiene ha la forma di una CK come anticipato:

Chapman-Kolmogorov per SDE

$$\partial_t P(x,t) = \left(-\partial_x a + \frac{1}{2}\partial^2_{x^2} b^2\right) P(x,t) \tag{1.2}$$

Esempio 1.1.1. Prendiamo i seguenti valori per i parametri della SDE:

- $a(x,t) = a(t)$
- $b(x,t) = b(t)$

$$dx = a(t)dt + b(t)d\omega.$$

Integrando si ha:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)d\omega_s.$$

Mediando sulle realizzazioni di ω l'ultimo termine va via:

$$\langle x(t) \rangle_\omega = \langle x_0 \rangle + \int_0^t a(s)ds.$$

Calcoliamo anche la varianza:

$$\begin{aligned}\langle x(t)x(s) \rangle &= \langle (x(t) - \langle x(t) \rangle (x(s) - \langle x(s) \rangle)) \rangle = \\ &= \left\langle \int_0^t b(t')d\omega(t') \int_0^s b(s')d\omega(s') \right\rangle .\end{aligned}$$

Sfruttando le proprietà della varianza per un processo di Wiener:

$$\langle x(t)x(s) \rangle = \int^{\min(t,s)} b^2(t')dt'.$$

Nel caso più semplice in cui a, b costanti:

- $\langle x(t) \rangle = x_0 + at$
- $\langle x(t)x(s) \rangle = b^2 \min(t,s)$

Esempio 1.1.2.

$$dx = cxd\omega(t).$$

Potremmo procedere con l'approccio di Stratonovich:

$$\frac{dx}{x} = dy = cd\omega(t).$$

Il problema è che non è detto che l'oggetto a sinistra sia mordibo, quindi questo approccio è in generare sbagliato (non è rispettata la seconda uguaglianza).
Dobbiamo utilizzare la formula di Îto per effettuare il cambio di variabili. Prendiamo il seguente:

$$f = y = \ln x.$$

La formula ci dice che:

$$df = \left(af' + \frac{1}{2}b^2 f''\right) dt + bf'd\omega.$$

Nel nostro caso:

- $a = 0$
- $b = cx$
- $f = 1/x$
- $f'' = -1/x^2$

Quindi in conclusione si ha una equazione differenziale per y che non è quella che ci saremmo aspettati:

$$dy = -\frac{c^2}{2}dt + cd\omega.$$

Abbiamo in più il primo termine. Integrando:

$$y(t) = y_0 + cd\omega(t) - \frac{c^2}{2}t.$$

A questo punto il problema è risolto per x:

$$x(t) = \exp(y) = x_0 \exp\left(c\omega(t) - \frac{c^2}{2}t\right).$$

Possiamo calcolare $\langle x \rangle$ sfruttando il fatto che il valor medio di un processo gaussiano è nullo.

$$z \in G(0,1) \implies \langle z \rangle = 0.$$

Nella nostra equazione abbiamo una espressione del tipo $\langle \exp(z) \rangle$, sfruttando le proprietà dei momenti di un processo Gaussiano si ha che:

$$\langle \exp(z) \rangle = \exp\left(\frac{\langle z^2 \rangle}{2}\right) \tag{1.3}$$

Per dimostrarlo è necessario utilizzare lo sviluppo dell'esponenziale, i momenti maggiori del secondo si annullano e rimane soltanto quello.
Otteniamo in conclusione che:

$$\begin{aligned}\langle x(t) \rangle &= \langle x_0 \rangle \exp\left(-\frac{c^2}{2}t\right) \langle \exp(c\omega(t)) \rangle = \\ &= \langle x_0 \rangle \exp\left(-\frac{c^2}{2}t\right) \exp\left(\frac{c^2}{2}t\right) = \langle x_0 \rangle .\end{aligned}$$

Analogamente si può fare con la correlazione:

$$\begin{aligned}\langle x(t)x(s) \rangle &= \langle x_0^2 \rangle e^{-\frac{c^2}{2}(t+s)} \left\langle e^{c(\omega(t)+\omega(s))} \right\rangle = \\ &= \langle x_0^2 \rangle e^{-\frac{c^2}{2}(t+s)} e^{\frac{c^2}{2}(\omega^2(t)+\omega^2(s))} = \\ &= \langle x_0^2 \rangle e^{c^2 \min(t,s)}.\end{aligned}$$

Se avessimo fatto il conto con Stratonovich avremmo ottenuto delle quantità divergenti:

$$\begin{aligned}\langle x(t) \rangle &= \langle x_0 \rangle \exp\left(\frac{1}{2}c^2 t\right) \\ \langle x_t x_s \rangle &= \langle x_0^2 \rangle \exp\left(\frac{1}{2}c^2 \left(t + s + 2\min(t,s)\right)\right).\end{aligned}$$

Quindi i due metodi di integrazione portano a dinamiche completamente differenti, è necessario stare attenti ad usare di volta in volta il metodo più opportuno.

Esempio 1.1.3 (Oscillatore Kubo)**.** Si studia la precessione di uno spin attorno ad un campo magnetico ω:

$$dz = i\left(\omega dt + \sqrt{2\gamma}d\omega_t\right) z.$$

Il secondo termine indica che il campo magnetico non è costante, contiene fluttuazioni $d\omega$. Come conseguenza vedremo che il pacchetto di spin inizierà a sparpagliarsi.
Visto che le fluttuazioni del campo devono avere un Cut-Off ad alte frequenze è opportuno usare l'integrazione "fisica" di Stratonovich.
Possiamo valutare il valor medio di z integrando nel modo a noi noto:

$$\frac{dz}{z} = i\omega t + i\sqrt{2\gamma}d\omega_t.$$

La soluzione per z è ovviamente l'esponenziale del termine di destra, facendo il valor medio e sfruttando la **??** si ottiene:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle z \rangle = (i\omega - \gamma) \langle z \rangle .$$

Come accennato il primo termine fa girare lo spin, il secondo lo sparpaglia.

$$\langle z_t \rangle = \langle z_0 \rangle \exp\left((i\omega - \gamma)\, t\right).$$

Essendo in questo caso z una quantità complessa possiamo calcolare una correlazione del tipo:

$$\langle z_t z_s^* \rangle = \ldots = \langle z_0^2 \rangle e^{i\omega(t-s) - \gamma|t-s|}.$$

La funzione di correlazione decade esponenzialmente con un tempo $1/\gamma$, legato alla fluttuazione del campo magnetico.

Esempio 1.1.4.

$$dx = -kxdt + \sqrt{D}d\omega_t.$$

Questa è "parente" del processo di Ornstein-Uhlenback:

$$dx = f(x)dt + \sqrt{D}d\omega_t.$$

Per risolverla si parte dalla omogenea:

$$dx = fdt = -kxdt.$$

Visto che il termine di rumore è costante:

$$g = \sqrt{D} \implies \begin{cases} g = \text{cost} \\ g' = 0 \end{cases}.$$

Allora in questo caso Îto e Stratonovich conducono allo stesso risultato.
Utilizziamo il calcolo di Îto, la prima cosa da fare è cercare il giusto cambio di variabile. Scegliamo:

$$y = xe^{kt}.$$

La formula di Îto per funzioni dipendenti dal tempo si scrive come:

$$df = \left[a\partial_x f + \frac{b^2}{2}\partial_{x^2}^2 f + \partial_t f\right] dt + b\partial_x f d\omega.$$

Sviluppando le derivate si ottiene che:

$$dy = \sqrt{D}e^{kt}d\omega.$$

E quindi tornando indietro abbiamo anche la x:

$$x(t) = x_0 e^{-kt} + \sqrt{D}\int_0^t e^{-k(t-t')}d\omega_{t'}.$$

Mediando nel tempo nuovamente i termini con $d\omega$ si cancellano:

$$\langle x(t)\rangle = \langle x_0\rangle e^{-kt}.$$

Per la varianza il calcolo è più elaborato, riportiamo la conclusione:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{var}\{x(t)\} = \\
&= \left\langle \left[(x_0 - \langle x_0\rangle)e^{-kt} + \sqrt{D}\int^t e^{-k(t-t')}d\omega_{t'}\right]^2 \right\rangle = \\
&= e^{-2kt}\left[\mathrm{var}\{x_0\} - \frac{D}{2k}\right] + \frac{D}{2k}.
\end{aligned}$$

Quindi la varianza ha un valore stazionario ed un termine che decade esponenzialmente.

1.2 Ornstein-Uhlenback dipendente dal tempo

Prendiamo la seguente SDE:

$$dx = -a(t)xdt + b(t)d\omega.$$

L'algebra da seguire è simile a quella dell'esempio precedente, risolviamo l'omogenea (senza ω):

$$x(t) = \exp\left(-\int_0^t a(s)ds\right)x_0.$$

Si inserisce adesso la parte disomogenea:

$$\begin{aligned}
x(t) =& x_0\exp\left(-\int_0^t a_s ds\right) + \\
&+ \int_0^t \exp\left(-\int_{t'}^t a(s)ds\right) b(t')d\omega_{t'}.
\end{aligned}$$

Al solito si può mediare in ω per mandare via il secondo integrale:

$$\langle x(t)\rangle = \langle x_0\rangle \exp\left(-\int_0^t a(s)ds\right).$$

Mentre per la covarianza si ha che:

$$\begin{aligned}
\langle x(t), x(t)\rangle =& \exp\left(-2\int_0^t a(s)ds\right)\langle x_0, x_0\rangle + \\
&+ \int_0^t dt' \exp\left(-2\int_{t'}^t a(s)ds\right) b^2(t').
\end{aligned}$$