

## 5 Esempi di processi di Markov

---

Processo di Wiener	5.1, p. 18
Processo di Ornstein - Uhlenback	5.2, p. 19
Metodo delle Caratteristiche.	5.A, p. 21

---

### 5.1 Processo di Wiener

Un processo di Wiener è modellato dall'equazione di Fokker-Plank così definita:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\omega, t | \omega_0, t_0) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} P(\omega, t | \omega_0, t_0).$$

Questa corrisponde alla forma differenziale di Chapman-Kolmogorov in 1D con  $A = 0$ ,  $B = \text{const}$ ,  $\Phi = 0$ .

Inoltre si impone la seguente condizione iniziale:

$$P(\omega, t_0 | \omega_0, t_0) = \delta(\omega - \omega_0).$$

Il processo si può risolvere utilizzando la funzione caratteristica:

$$\phi(s, t) = \int d\omega P(\omega, t | \omega_0, t_0) e^{is\omega}.$$

Sfruttando le regole della trasformata possiamo riscrivere l'equazione del processo come:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{1}{2} s^2 \phi.$$

$$\phi(s, t_0) = \exp(is\omega_0).$$

La soluzione è nota:

$$\begin{aligned} \phi(s) &= \exp\left(-\frac{1}{2} s^2 (t - t_0)\right) \phi(s, t_0) = \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} s^2 (t - t_0) + is\omega_0\right). \end{aligned}$$

Visto che l'antitrasformata di una Gaussiana è una Gaussiana abbiamo la soluzione nello spazio reale:

#### Soluzione del processo di Wiener

$$P(\omega, t | \omega_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}} \exp\left(-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2(t-t_0)}\right)$$

Il processo che abbiamo ottenuto è Gaussiano:

$$\langle \omega \rangle = \omega_0 \quad (5.1)$$

$$\langle (\omega - \omega_0)^2 \rangle = t - t_0. \quad (5.2)$$

### Proprietà dei processi di Wiener

- È continuo.
- Non è differenziabile,  $\forall k$ :

$$\begin{aligned} \text{Prob}\left(\frac{|\omega(t+h) - \omega(t)|}{h} > k\right) &= \\ &= 2 \int_{kh}^{\infty} d\omega \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} e^{-\omega^2/2h} = \\ &= 1 - \text{erf}\left(k\sqrt{\frac{h}{2}}\right) = \\ &= 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left[k\sqrt{\frac{h}{2}}\right]^{2n+1}}{n!(2n+1)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1. \end{aligned}$$

Quindi  $\forall k$  grande a piacere quando  $h \rightarrow 0$  si ha che:

$$\frac{\omega(t+h) - \omega(t)}{h} > k.$$

Questo implica la non differenziabilità del processo.

- Gli incrementi sono indipendenti:

$$\begin{aligned} P(\omega_2, t_2; \omega_1, t_1; \omega_0, t_0) &= \\ &= P(\omega_2, t_2 | \omega_1, t_1) P(\omega_1, t_1 | \omega_0, t_0) P(\omega_0, t_0). \end{aligned}$$

Il primo termine dopo l'uguale non dipende da  $(\omega_0, t_0)$  perché il processo è Markoviano.

- La correlazione:

Ipotizziamo di avere  $t > s$ :

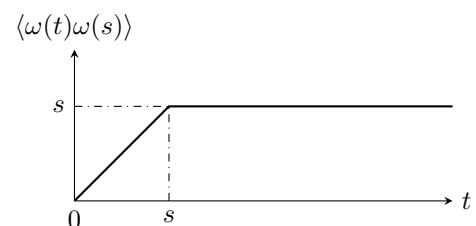
$$\begin{aligned} \langle \omega(t)\omega(s) \rangle &= \langle (\omega(t) - \omega(s))\omega(s) \rangle + \langle \omega^2(s) \rangle = \\ &= \langle (\omega(t) - \omega(s)) \rangle \langle \omega(s) \rangle + s = s. \end{aligned}$$

In cui nel primo passaggio si somma e si sottrae  $\omega(s)$ , nel secondo passaggio si ha che l'incremento  $\omega(t) - \omega(s)$  è indipendente da  $\omega(s)$ , quindi la media del prodotto corrisponde al prodotto delle medie. Tuttavia l'incremento è distribuito come una gaussiana a media nulla, quindi il primo termine si annulla. Il secondo termine invece è pari a  $s$  per l'equazione 5.2.

Nel caso generale si ha che:

$$\langle \omega(t)\omega(s) | [\omega_0 t_0] \rangle = \min(t - t_0, s - t_0) + \omega_0^2.$$

Che nel caso particolare in cui  $\omega_0 = t_0 = 0$  si ricongiunge a quello visto sopra  $\langle \omega(t)\omega(s) \rangle = s$  se  $t > s$ .



## 5.2 Processo di Ornstein - Uhlenback

Prendiamo in considerazione altri esempi di processi di Markov.

### Equazione di Ornstein - Uhlenback

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(kxP) + \frac{1}{2}D \frac{\partial^2}{\partial x^2}P.$$

### Soluzione stazionaria

Cerchiamo intanto la soluzione con  $(\partial_t P = 0)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( kxP + \frac{1}{2}D \frac{\partial}{\partial x}P \right) &= 0 \implies \\ \implies \left[ kxP + \frac{1}{2}D \frac{\partial}{\partial x}P \right]_{-\infty}^x &= J. \end{aligned}$$

Se ipotizziamo che:

1.  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} P(x, t|x_0, t_0) = 0$
2.  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} xP(x, t|x_0, t_0) = 0.$

Allora possiamo affermare che nel limite di  $x \rightarrow \infty$  la corrente  $J$  vale 0. Essendo  $J$  costante allora questo fissa il valore di  $J = 0$ . Si risolve allora l'equazione differenziale:

$$\frac{1}{2}D \frac{\partial P_s}{\partial x} = -kxP_s.$$

### Soluzione stazionaria

$$P_s(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi D/k}} e^{-kx^2/D} \quad (5.3)$$

Si nota subito che, a differenza del processo di Wiener in cui il moto Browniano si allargava sempre di più (la larghezza della gaussiana dipende da  $t$ ), adesso si ha una  $\sigma^2 \propto D/k$  costante.

Il termine aggiuntivo rispetto a Wiener in questo processo funziona come una forza armonica per la  $P$  (una molla) che la richiama in  $x = 0$ .

### Soluzione dipendente dal tempo.

Per la dipendenza temporale sfruttiamo la funzione caratteristica  $\phi(s)$ .

$$\phi(s) = \int e^{isx} P(x, t|x_0, t_0) dx.$$

L'equazione del processo diventa:

$$\partial_t \phi = -ks \partial_s \phi - \frac{1}{2}Ds^2 \phi.$$

Questa equazione alle derivate parziali può essere risolta tramite il metodo delle caratteristiche (5.A). L'unico ostacolo all'utilizzo del metodo è il secondo

termine dopo l'uguale (contiene la soluzione), vorremmo ricondurci all'equazione in forma standard. Facciamo allora il cambio di variabile:

$$g = \ln \phi.$$

Visto che:

$$\partial_t g = \frac{\partial_t \phi}{\phi} \quad \partial_s g = \frac{\partial_s \phi}{\phi}.$$

Si ha una equazione in  $g$  più maneggevole:

$$\partial_t g + ks \partial_s g = -\frac{1}{2}Ds^2.$$

Questa è risolvibile con il metodo delle caratteristiche:

$$(a, b, c) \rightarrow (1, ks, -\frac{1}{2}Ds^2).$$

Parametrizzando con  $\eta$  abbiamo le equazioni caratteristiche:

$$\frac{dt}{d\eta} = 1 \quad \frac{ds}{d\eta} = ks \quad \frac{dg}{d\eta} = -\frac{1}{2}Ds^2.$$

Facendo dell'algebra (da fisici) si ha:

$$\begin{cases} dt = d\eta \\ \frac{ds}{ks} = d\eta \\ \frac{dg}{1/2Ds^2} = -d\eta \end{cases}.$$

Possiamo risolvere per rimuovere  $\eta$ :

$$\begin{cases} 1. & dt = \frac{ds}{ks} \\ 2. & \frac{ds}{ks} = -\frac{dg}{1/2Ds^2} \end{cases}$$

Integrando queste equazioni escono fuori delle costanti, ridefinendo tali costanti come funzioni ( $u_1, u_2$ ) saremo in grado di risalire alla  $\phi$ .

Risolviamo la 1:

$$c_1 = t - \frac{1}{k} \ln(s).$$

Visto che  $c_1$  è una costante possiamo applicarvi qualsiasi operatore (purché non vi siano presenti le variabili del sistema), quindi:

$$c_1 = -kt + \ln(s) \implies c_1'' = se^{-kt}.$$

Quindi definiamo la prima costante del moto come  $u_1$ :

$$u_1(t, s) = se^{-kt} \quad (5.4)$$

L'equazione alle derivate parziali che stiamo risolvendo deve mantenere costante nel tempo la  $u_1$ .

Passiamo alla equazione 2 del sistema, integrando si ottiene:

$$c_2 = \frac{s^2 D}{4k} + g.$$

Ricordando che  $g = \ln \phi$  possiamo definire anche un'altra funzione a partire dalla costante  $c_2$  (si fa l'esponenziale della 2):

$$u_2(t, s) = \phi \exp \left( \frac{Ds^2}{4k} \right) \quad (5.5)$$

Riscrivendo la 5.5 isolando  $\phi$  si ha:

$$\phi = u_2 \exp\left(-\frac{Ds^2}{4k}\right).$$

Visto che  $u_1$  e  $u_2$  sono entrambe costanti collegate dalle equazioni caratteristiche sarà sempre possibile esprimere una in funzione dell'altra:

$$u_2 = f(u_1).$$

Dove la  $f$  è una funzione generica dettata dalle condizioni al contorno.

#### Soluzione dipendente dal tempo per $\phi$

$$\phi = f(se^{-kt}) \exp\left(-\frac{Ds^2}{4k}\right) \quad (5.6)$$

#### Condizioni al contorno

Prendiamo il caso più semplice, l'oggetto in analisi si trova inizialmente nel punto  $x_0$ :

$$P(x, 0|x_0, 0) = \delta(x - x_0) \implies \phi(s, 0) = e^{ix_0 s}.$$

Prendiamo l'equazione 5.6 ed invertiamola per trovare la  $f(s)$  ( $t = 0$ ) inserendo anche la condizione iniziale:

$$\begin{aligned} e^{ix_0 s} &= f(se^0) \exp\left(\frac{-Ds^2}{4k}\right) \implies \\ \implies f(s) &= e^{ix_0 s} \exp\left(\frac{Ds^2}{4k}\right). \end{aligned}$$

Per reinserire il tempo e trovare la soluzione con queste condizioni iniziali basta fare la sostituzione (solo in  $f(s)$ ):

$$s \rightarrow se^{-kt}.$$

#### Soluzione con condizione iniziale $\delta$

$$\phi(s, t) = \exp\left[-\frac{Ds^2}{4k}(1 - e^{-2kt}) + isx_0 e^{-kt}\right] \quad (5.7)$$

A questo punto possiamo tornare indietro con una trasformata inversa, altrimenti possiamo ricavare i momenti sfruttando le proprietà di  $\phi$ :

$$\langle x(t) \rangle = i \frac{\partial \phi}{\partial s} \Big|_{s=0} = x_0 e^{-kt}.$$

$$\begin{aligned} \text{var}(x(t)) &= \langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2 = \\ &= -1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} \Big|_{s=0} - \langle x \rangle^2 = \\ &= \frac{D}{2k} (1 - e^{-2kt}). \end{aligned}$$

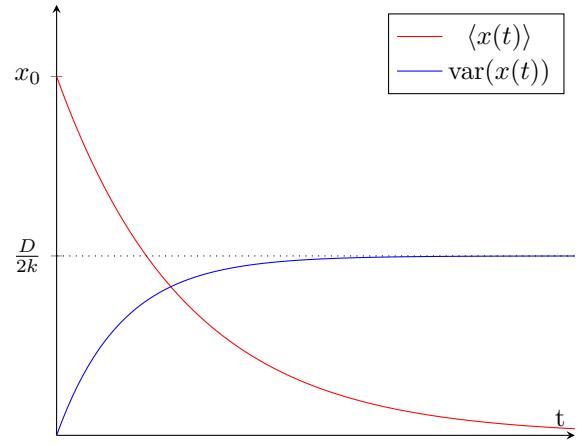


Figura 1.4: Andamento della media e della varianza per il processo di Ornstein-Uhlenbeck.

I risultati ottenuti sono conformi con le condizioni iniziali inserite.

**Media** all'istante iniziale tutti i camminatori sono in  $x_0$  (grazie alla  $\delta$ ).

Quando il processo fa evolvere le posizioni dei camminatori allora i camminatori si allontanano da  $x_0$  andando verso l'origine, questo è conforme con quanto visto per la soluzione stazionaria: una Gaussiana centrata nello 0.

**Varianza** Nell'istante iniziale, quando tutti i camminatori sono nel punto  $x_0$ , la varianza è nulla, questa si stabilizza nel tempo al valore dato dalla Gaussiana nelle condizioni stazionarie.

#### Calcolo delle correlazioni

$$\begin{aligned} \langle x(t_1)x(t_2) | [x_0, t_0] \rangle &= \\ &= \int dx_1 dx_2 P(x_1, t_1; x_2, t_2; x_0, t_0) x_1 x_2 = \\ &= \int dx_1 dx_2 x_1 x_2 P(\bar{x}_1, \bar{x}_2) P(\bar{x}_2, \bar{x}_0). \end{aligned}$$

In cui si è assunto il processo Markoviano e la gerarchia temporale:  $t_1 > t_2 > t_0$ .

Se il processo ha raggiunto la stazionarietà ( $t_0 \rightarrow \infty$ ) allora conosciamo la forma del propagatore:

$$P(x_2|x_0) \sim \exp\left(-k \frac{x_2^2}{D}\right).$$

Risolvendo con questa si ottiene:

#### Correlazione temporale a due

$$\langle x(t)x(s) \rangle \sim \frac{D}{2k} \exp(-k|t-s|).$$

La correlazione temporale delle posizioni decade esponenzialmente.

### Ornstein-Uhlenback come modello per rumore realistico.

Facendo la trasformata di Fourier della funzione di Correlazione si ottiene una Lorenziana:

$$S_{OU}(\omega) = \mathcal{F}(\langle x(t)x(s) \rangle) = \frac{1}{\omega^2/k^2 + 1}.$$

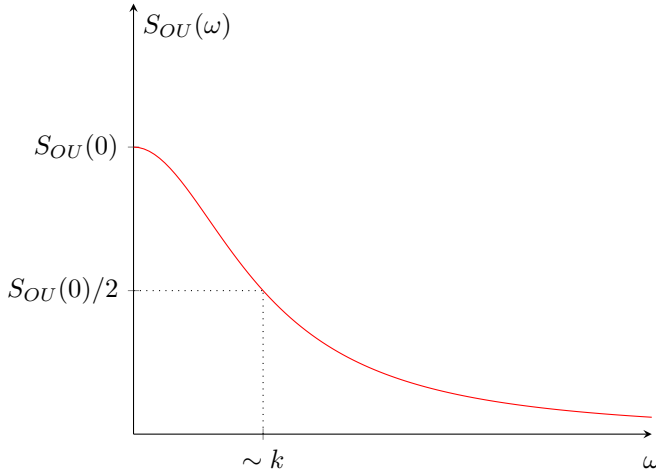


Figura 1.5: Andamento della trasformata della correlazione per il processo di Ornstein-Uhlenback.

Questo è esattamente quello che ci aspettiamo da un rumore realistico: il rumore ha una frequenza di cut-off dettata da una Lorenziana.

Il cut-off è dovuto al fatto che le cose non possono muoversi infinitamente veloci, l'inerzia dei corpi che partecipano al moto stocastico fissa la frequenza di cut-off.

C'è quindi un tempo caratteristico di osservazione del fenomeno

$$\tau = \frac{1}{k}.$$

Se osserviamo il moto su scale temporali di quest'ordine allora lo spettro degli urti tra i corpi va a zero, questo comporta che il moto oltre queste scale temporali non è più ben descritto dal processo di Wiener.

**Esercizio 5.2.1.** Modifica all'equazione di OU Risolvere l'equazione di Ornstein-Uhlenback con l'aggiunta di un termine nella  $\partial_x$ :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}((kx + \alpha)P) + \frac{1}{2}D \frac{\partial^2}{\partial x^2}P.$$

**Soluzione:** Il moto dovrebbe andare a stazionarietà nel punto  $-\alpha/k$ .

## Appendice

### 5.A Metodo delle Caratteristiche.

Supponiamo di avere una PDE della forma:

#### PDE per metodo delle caratteristiche

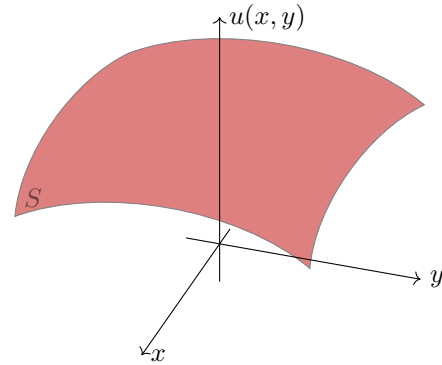
$$a(x, y)\partial_x u + b(x, y)\partial_y u - c(x, y) = 0.$$

Scrivibile anche come:

$$(a, b, c) \cdot (\partial_x u, \partial_y u, -1) = 0 \quad (5.8)$$

Ed una superficie parametrizzata con la soluzione della PDE ( $u(x, y)$ ):

$$S \equiv (x, y, u(x, y)).$$



#### Vettore tangente a S

Il vettore  $(a, b, c)$  appartiene al piano tangente di  $S$  in ogni punto  $(x, y, z)$ .

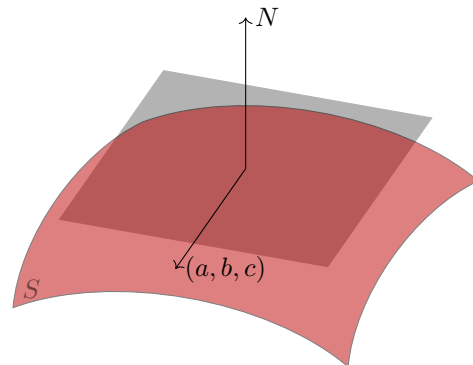
La normale  $\mathbf{N}$  alla superficie  $S$  la si trova facendo il gradiente di:

$$\bar{S} = u(x, y) - z.$$

Si ottiene quindi:

$$\mathbf{N} = (\partial_x u, \partial_y u, -1).$$

Visto che  $\mathbf{N}$  è il secondo termine nella 5.8 si vede che la soluzione è il luogo dei vettori  $(a, b, c)$  ortogonali a  $\mathbf{N}$ , quindi tangenti al piano  $S$ .



Quindi la soluzione della PDE è tale per cui il vettore  $(a, b, c)$  sta sul piano tangente.

**Curva caratteristica**

Per mappare la soluzione si introduce una curva  $C$  detta curva caratteristica che descrive la superficie.

$$C : C \equiv (x(\eta), y(\eta), z(\eta)).$$

$C$  è una curva parametrica in  $\eta$  localmente tangente a  $(a, b, c)$ .

La condizione di parallelismo implica il seguente sistema:

**Equazioni Caratteristiche**

Sono curve integrali per il campo vettoriale  $(a, b, c)$

$$\begin{cases} a(x(\eta), y(\eta)) = \frac{dx}{d\eta} \\ b(x(\eta), y(\eta)) = \frac{dy}{d\eta} \\ c(x(\eta), y(\eta)) = \frac{dz}{d\eta} \end{cases}$$

Queste equazioni risolvono la PDE.

**Esempio 5.A.1** (Equazione del trasporto.).

$$u_t + a \cdot u_x = 0.$$

In questo caso si ha  $(a, b, c) \rightarrow (a, 1, 0)$ , quindi:

$$\frac{dx}{d\eta} = a \quad \frac{dt}{d\eta} = 1 \quad \frac{dz}{d\eta} = 0$$

Passiamo alla risoluzione:

$$\begin{cases} x(\eta) = a\eta + c_1 \\ t(\eta) = c_2 + \eta \\ z(\eta) = c_3 \end{cases} \implies \begin{cases} x - at = x_0 \\ z = k \end{cases}$$

In cui si è effettuata dell'algebra per eliminare  $\eta$  nel primo sistema.

- La funzione che risolve il sistema di destra è la soluzione dell'equazione del trasporto.
- Graficamente le funzioni che risolvono sono delle rette con  $z$  costante, l'unione di queste rette rappresenta  $S$ .
- Abbiamo ottenuto un fascio di soluzioni poiché non abbiamo imposto alcuna soluzione al contorno.

In conclusione  $z$  dovrà essere funzione di  $x - at$ , quindi la soluzione generale sarà una funzione del tipo:

$$z(x, t) = f(x - at) \equiv u(x, t).$$

Supponiamo che all'istante iniziale la soluzione fosse una gaussiana:

$$f(x, t = 0) = e^{-x^2}.$$

Quindi si ha che anche la soluzione a  $t = 0$  è una gaussiana:

$$u(x, t = 0) = e^{-x^2}.$$

Ed introducendo il tempo la soluzione diventa semplicemente:

$$u(x, t) = e^{-(x-at)^2}.$$