

20 Distrib. limite del RW di Wiestrass

Random Walk di Weierstrass nel dettaglio	20.1, p. 50
Serie di Weierstrass e distribuzione stabile per il RW	20.2, p. 51

20.1 Random Walk di Weierstrass nel dettaglio

Abbiamo visto che per un camminatore di Weierstrass la forma della distribuzione poteva non essere Gaussiana al variare del parametro N^2/b (Vedi sezione 16.2).

Rispetto alla lezione 6 adesso si cambia la notazione:

$$b \rightarrow M \quad N \rightarrow b.$$

Quindi adesso b è il parametro dell'ampiezza di salto mentre M è il fattore che smorza il rate. La condizione di rottura del teorema del limite centrale diventa:

$$\frac{b^2}{M} > 1.$$

Cerchiamo la distribuzione invariante per il camminatore di Weierstrass proprio in questo caso.

La probabilità di fare un salto l può essere scritta come:

$$P(l) = \frac{M-1}{2M} \sum_{J=0}^{\infty} \frac{1}{M^J} [\delta(l - b^J a) + \delta(l + b^J a)].$$

Per capire se è invariante è necessario considerare n salti, farlo nello spazio reale può essere complicato. Ricordiamo le proprietà generali di questo moto random:

- Occorrono $\sim M$ salti di $\pm a$ prima di saltare ba .
- Occorrono $\sim M$ salti di $\pm ba$ (M^2 salti lunghi a) prima di saltare $b^2 a$.
- etc ...

Queste caratteristiche fanno sì che il sistema esibisca dei cluster di camminatori attorno alle posizioni dei salti più lunghi (sulla scala temporale di osservazione).

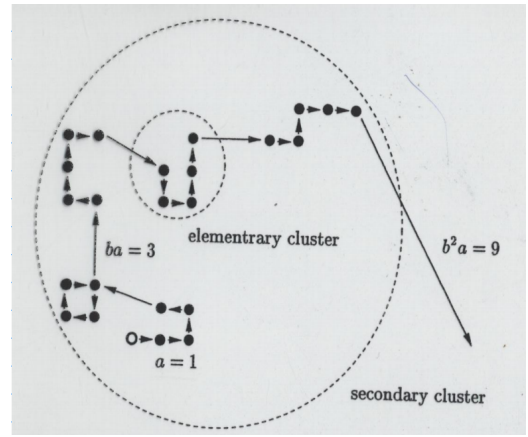


Figura 1.13: Random Walk di Weierstrass ($b = 3$, $M = 4$): formazione dei Cluster (Paul and Baschangel: Stochastic Process, Springer).

Proprio per la formazione di questi cluster su scale spaziali diverse il sistema può presentare un comportamento auto-similare.

Possiamo notare anche come cambiano i risultati al variare dei parametri M e b :

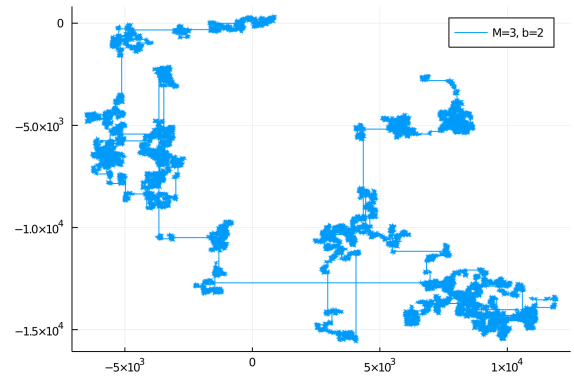


Figura 1.14: Rapporto $b^2/M = 4/3$ (Link al codice).

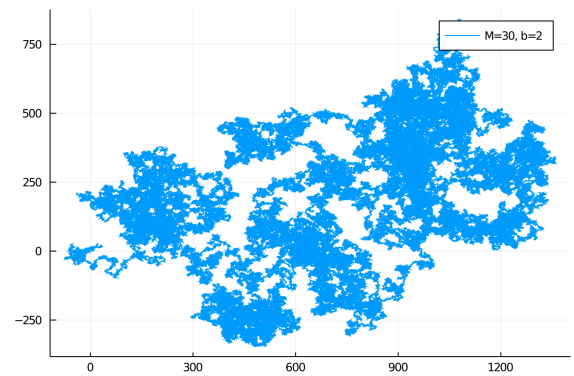


Figura 1.15: Rapporto $b^2/M = 4/30$, notiamo come i cluster che si formano siano diversi nei due casi: in questo caso il moto diventa quasi irriconoscibile rispetto ad un RW "normale". (Link al codice).

Mettiamoci nel caso in cui la distribuzione non può essere una Gaussiana e risolviamo per $\langle l^2 \rangle \rightarrow \infty$:

$$\langle l^2 \rangle = \frac{(M-1)a^2}{M} \sum \left(\frac{b^2}{M} \right)^J \rightarrow \infty \quad \text{se} \quad \frac{b^2}{M} > 1.$$

Per capire se $P(l)$ può essere stabile andiamo in trasformata:

20.2 Serie di Weierstrass e distribuzione stabile per il RW

Ricordando che:

$$P(k) = \langle e^{ikl} \rangle.$$

Si ottiene:

$$P(k) = \int dl P(l) e^{ikl} = \frac{M-1}{M} \sum_J \frac{\cos(kb^J a)}{M^J}.$$

Questa serie è continua ovunque ma non differenziabile rispetto a k se $b > M$.

Per dimostrare che $P(l)$ è stabile dobbiamo dimostrare che $P(k)$ è invariante sotto convoluzione. Partiamo osservando come scala $P(k)$ se mandiamo $k \rightarrow bk$, questo cambio di scala è interessante perché b è l'unica grandezza fisica che descrive la scala sulla quale avviene il moto del camminatore.

$$\begin{aligned} P(bk) &= \frac{M-1}{M} \sum_{J=0}^{\infty} \frac{1}{M^J} \cos(kb^{J+1}a) = \dots = \\ &= MP(k) - \frac{M-1}{M} \cos(ka). \end{aligned}$$

Per arrivare a questa conclusione si è esplicitata la sommatoria di $P(bk)$, moltiplicato e diviso per M e isolato il primo termine della sommatoria.

Equazione per la $P(k)$

$$P(k) = \frac{1}{M} P(bk) + \frac{M-1}{M} \cos(ka).$$

Per soddisfare l'invarianza di scala la $P(k)$ deve soddisfare questa equazione. Dividiamo la soluzione in una parte omogenea ed una particolare.

$$P(k) = \frac{1}{M} P_0(k) + P_p(k).$$

Possiamo sviluppare in serie il coseno per trovare la forma della soluzione particolare:

$$P_p(k) = \frac{M-1}{M} \sum_{J=1}^{\infty} \frac{(-1)^J}{(2J)!} \frac{(ka)^{2J}}{1 - b^{2J}/M} + 1.$$

Notiamo subito che la soluzione particolare non è responsabile della divergenza di $\langle l^2 \rangle$, infatti possiamo calcolare il momento secondo come:

$$\langle l^2 \rangle = - \frac{d^2}{dk^2} P_0(k) \Big|_0 - \frac{d^2}{dk^2} P_p(k) \Big|_0.$$

La derivata seconda di P_p non diverge:

$$\langle l^2 \rangle_p = \frac{M-1}{M} \frac{a^2}{b^2/M - 1} < \infty \quad \text{con } b^2/M > 1.$$

Quindi è il termine omogeneo di pura scala ad essere responsabile della divergenza.

Scaling discreto della soluzione omogenea

$$P_0(k) = \frac{1}{M} P_0(bk).$$

Possiamo esprimere la soluzione di questa equazione in funzione di una qualunque $Q(k)$ tale che:

- $Q(k) = Q(bk)$
- $Q(k)$ periodica in $\ln(k)$ con periodo $T = \ln(b)$.

Senza riportare i passaggi la soluzione della omogenea è:

$$P_0(k) = |ka|^\alpha Q(k).$$

con:

$$\alpha = \frac{\ln(M)}{\ln(b)} \quad 0 < \alpha < 2.$$

Che deve essere rispettata per imporre la self-similarità.

Valutando i termini della soluzione, P_p e P_0 , quando $k \rightarrow 0$ si nota che sopravvivono solo:

- Il termine unitario nella P_p (il termine più rilevante nella sommatoria va a zero come k^2).
- L'intera soluzione omogenea ($\alpha < 2$)

Per $k \rightarrow 0$ si ha quindi che:

$$P(k) \sim 1 - c(\alpha) |ka|^\alpha.$$

Per ricondurci ad una forma del tipo Levy dobbiamo trovare il modo di esprimere il $\log P(k)$, approssimiamo allora la $P(k)$ ottenuta per $k \rightarrow 0$ come esponenziale (visto che corrisponde ai primi due termini dello sviluppo di quest'ultimo).

$$P(k) \sim \exp(-c(\alpha) |ka|^\alpha).$$

Quindi:

$$\ln(P(k)) = -c(\alpha) |ka|^\alpha.$$

Che è effettivamente una distribuzione di Levy con $\alpha = \ln M / \ln b$. Quindi la distribuzione $P(l)$ è stabile per tutti i valori di b^2/M .