4 Definizione di processi di Markov

4.1 Processi stazionari e processi di Markov

Probabilità di un processo

Prendiamo un oggetto vittima di un processo stocastico dipendente dal tempo e mettiamoci in un sistema di coordinate spaziali x.
Possiamo descrivere completamente il processo con la sequenza di P_n definite come:

$$P_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \ldots; x_n, t_n).$$

Ovvero la densità di probabilità che l'oggetto si trovi in x_1 al tempo t_1, x_2 al tempo t_2 etc...
Per descrivere il moto non basta la densità di probabilità allo step n-esimo ma serve l'intera sequenza $P_1, P_2, \ldots$
Scegliamo una base spazio temporale ($\overline{x} = (x, t)$), le proprietà delle P_n sono:

- $P_n \geq 0$.
- Simmetria: $P_n(\overline{x}_1; \overline{x}_2; \ldots) = P_n(\overline{x}_2; \overline{x}_1)$.
- Completezza:
$$\int P_n(\overline{x}_1; \ldots; \overline{x}_n) dx_n = P_{n-1}(\overline{x}_1; \ldots; \overline{x}_{n-1}).$$
- Norma: $\int P_1(\overline{x}_1) dx_1 = 1$

Possiamo calcolare il valor medio di una quantità nel seguente modo:

$$\langle x(t_1) \cdot \ldots \cdot x(t_n) \rangle = \\ = \int_{R^n} dx_1 \ldots dx_n P_n(\overline{x}_1; \ldots; \overline{x}_n) x_1 \ldots x_n.$$

Processi stazionari

Un processo si dice stazionario se $\forall n$:

$$P_n(x_1, t_1; \ldots; x_n, t_n) = \\ = P_n(x_1, t_1 + \Delta t; \ldots; x_n, t_n + \Delta t).$$

Probabilità condizionata

Ipotizziamo che all'istante t_i l'oggetto si trovi in $x \in [x_i, x_i + \Delta x]$ (con $i \in [1, k]$).
Allora la probabilità che l'oggetto si trovi in un istante successivo t_{k+l} in un intervallo $[x_{k+l}, x_{k+l} + \Delta x]$ è:

$$P_{k+l}(\overline{x}_1; \ldots; \overline{x}_{k+l}) = \\ = P_k(\overline{x}_1; ..; \overline{x}_k) \cdot P_{l|k}(\overline{x}_{k+1}; ..; \overline{x}_{k+l} | \overline{x}_1; ..; \overline{x}_k).$$

Con $P_{l|k}$ probabilità di trovarsi in un intorno di x_{k+l} condizionata dai primi k step.

Esempio 4.1.1 (Prob. condizionata dal primo step)**.** Ipotizziamo di avere la probabilità di essere in x_1 al tempo t_1, vogliamo trovare la probabilità di essere in x_2 al tempo t_2:

$$P_2(\overline{x}_1; \overline{x}_2) = P_{1|1}(\overline{x}_2 | \overline{x}_1) \cdot P_1(\overline{x}_1).$$

Processi di Markov

Un processo si dice Markoviano se le sole conoscenze di P_1 e di $P_{1|1}$ sono sufficienti per studiare l'intera evoluzione del processo.

$$P_{1|n-1}(\overline{x}_n | \overline{x}_1; \ldots; \overline{x}_{n-1}) = P_{1|1}(\overline{x}_n | \overline{x}_{n-1}).$$

Fisicamente un processo di questo tipico indica che il sistema è senza memoria.

4.2 Equazione di C-K

L'equazione di Chapman-Kolmogorov si applica ai processi Markoviani. Si parte dalla seguente identità:

$$\sum_B^{\Omega} P(A \cap B \cap C) = P(A \cap C).$$

Per un processo Markoviano (con ordinamento $t_1 < t_2 < t_3$) l'equazione per la P_3 è:

$$P_3(\overline{x}_1; \overline{x_2}; \overline{x}_3) = P_{1|1}(\overline{x}_3 | \overline{x}_2) P_{1|1}(\overline{x}_2 | \overline{x}_1) P_1(\overline{x}_1).$$

Integrando rispetto alla coordinata x_2 e sfruttando la completezza delle P_n si ha:

$$\int P_3(\overline{x}_1; \overline{x_2}; \overline{x}_3) dx_2 = P_2(\overline{x}_1; \overline{x}_3) = P_{1|1}(\overline{x}_3 | \overline{x}_1) P_1(\overline{x}_1).$$

Mettendo tutto insieme e semplificando ambo i lati la $P_1(\overline{x}_1)$:

Equazione di Chapman-Kolmogorov

$$P_{1|1}(x_3 | x_1) = \int P_{1|1}(x_3 | x_2) P_{1|1}(x_2 | x_1) dx_2.$$

Quindi un processo Markoviano rispetta l'equazione di Chapman-Kolmogorov, tuttavia non vale il viceversa!

4.3 Continuità dei processi stocastici

Definizione 4.3.1 (Processo continuo)**.** Un processo stocastico si dice continuo se $\forall\epsilon > 0$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Sigma_\epsilon} dx_1 P_{1|1}(x_1, t + \Delta t | x_2, t) = 0.$$

$$\Sigma_\epsilon : \{|x_1 - x_2| > \epsilon\}.$$

In pratica serve che il cammino descritto dal processo sia continuo, la distanza tra due punti del processo deve andare a 0 più rapidamente di Δt.
I processi Markoviani non sono necessariamente continui:

Esempio 4.3.1 (Pollaio)**.** Il numero di uova prodotte in un pollaio in un giorno può essere schematizzato come processo markoviano: dipende soltanto dal numero di galline presenti nel pollaio il giorno prima.
Questo processo non può essere continuo: è possibile mandare il Δt a 0 ma non possiamo fare altrettanto con x, ovvero il numero di uova. Infatti in questo caso il numero di uova è discreto.
In generale i processi a salti discreti non possono essere continui.

Esempio 4.3.2 (Moto Browniano)**.** Calcoliamo l'equivalente della $P_{1|1}$ nel moto Browniano, nella lezione 1 abbiamo visto che:

$$P(x, t + \Delta t) = \int P(x - \Delta, t) f(\Delta) d\Delta.$$

Con $f(\Delta)$: probabilità di fare un salto lungo Δ nell'intervallo di tempo Δt.
Definendo la quantità $y = x - \Delta$ intuitivamente la $f(\Delta)$ corrisponde alla probabilità condizionata:

$$f(\Delta) = P_{1|1}(x, t + \Delta t | y, t).$$

Essendo un oggetto Gaussiano la $f(\Delta)$ avrà la seguente struttura:

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D \Delta t}} \exp\left(-\frac{1}{4D\Delta t}(x-y)^2\right).$$

In altre parole $f(\Delta)$ è proprio un propagatore.
Si può quindi calcolare il limite nella definizione di continuità di un processo stocastico (conti saltabili):

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{(\Delta t)^{3/2}} \int_{|x-y|>\epsilon} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4D\Delta t}\right) dx \sim$$

$$\sim \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\epsilon/\sqrt{2\Delta t}}^{\infty} e^{-t^2} dt \sim \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2\Delta t}}\right)}{\Delta t}$$

$$\sim \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\exp\left(-\frac{\epsilon^2}{2\Delta t}\right)}{\epsilon/\sqrt{2\Delta t}}\right) = 0.$$

Quindi il moto Browniano è un processo continuo.

Esempio 4.3.3 (Moto di Cauchy)**.** Il moto di Cauchy presenta una struttura per la probabilità di salto (condizionata) del seguente tipo:

$$P_{1|1}(x, t + \Delta t | z, t) = \frac{\Delta t}{\pi} \frac{1}{(x-z)^2 + (\Delta t)^2}.$$

E si può dimostrare che:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Sigma_\epsilon} \frac{\Delta t dx}{\pi\left[(x-z)^2 + (\Delta t)^2\right]} = \infty.$$

Di conseguenza il moto di Cauchy non è continuo.

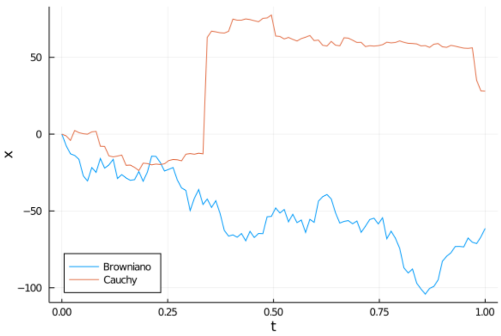

Figura 3: Processo di Brown e Processo di Cauchy a confronto Link al codice in Julia).

4.4 Forma differenziale di C-K

Ipotizziamo di avere un processo stocastico Markoviano quindi per cui è possibile scrivere l'equazione di Chapman-Kolmogorov. Ipotizziamo che tale processo sia scomponibile [1] in una parte continua ed una non continua.
Si può dimostrare che un processo di questo tipo è descritto dalla seguente forma differenziale:

Forma differenziale di Chapman - Kolmogorov

$$\partial_t P(\boldsymbol{z}, t | \boldsymbol{y}, t') = -\Gamma + \Phi \tag{4.1}$$

In cui Γ è la parte contenente il processo continuo:

$$\Gamma = -\sum_i \partial_{z_i} \left[A_i(\boldsymbol{z}, t) P(\boldsymbol{z}, t | \boldsymbol{y}, t')\right] +$$

$$+ \sum_{i,J} \frac{1}{2} \partial^2_{z_i Z_J} \left[B_{iJ}(\boldsymbol{z}, t) P(\boldsymbol{z}, t | \boldsymbol{y}, t')\right].$$

Qui abbiamo un primo termine "deterministico" (con la A) che determina soltanto uno spostamento dell'oggetto ed un termine di diffusione (quello in B).
Nella Φ abbiamo invece il processo discontinuo:

$$\Phi = \int d\boldsymbol{x} \left[\omega(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x}, t) P(\boldsymbol{x}, t | \boldsymbol{y}, t') + \right.$$

$$\left. - \omega(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}, t) P(\boldsymbol{z}, t | \boldsymbol{y}, t')\right].$$

[1] Ipotesi per cui si può scomporre sul Gardiner

Il termine Φ somiglia molto al termine della equazione di Volterra che abbiamo visto nella prima lezione (prob. di trovarsi in $\boldsymbol{z}$ è data dalla probabilità di finire in $\boldsymbol{z}$ da una posizione $\boldsymbol{x}$ diminuito la prob. di scappare in $\boldsymbol{x}$ dalla posizione $\boldsymbol{z}$).
La potenza della equazione è la sua generalità: se sappiamo che un processo è Markoviano (magari per la fisica che ci sta dietro) allora l'equazione di evoluzione delle prob. nel tempo sarà necessariamente quella sopra.

Esempio 4.4.1 ($A = B = 0$, quindi $\Gamma = 0$)**.**

$$\partial_t P = \Phi.$$

Considerando il rapporto incrementale con passo Δt:

$$P(z, t + \Delta t|y, t) = P(z, t|y, t) + \Delta t \cdot \Phi.$$

Sfruttiamo la proprietà ovvia:

$$P(\boldsymbol{z}, t|\boldsymbol{y}, t) = \delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}).$$

Allora possiamo sviluppare Φ al primo ordine in Δt l'espressione di Φ (in 1D):

$$\begin{aligned}\Phi = &\int \omega(z|x, t)P(x, t|y, t')dx+ \\ &- \int \omega(x|z, t)P(z, t|y, t')dx \simeq \\ \simeq &\int \left[\omega(z|x, t)\delta(x - y) - \omega(x|z, t)\delta(z - y)\right] dx = \\ = &\,\omega(z|y) - \delta(z - y) \int dx\omega(x|y).\end{aligned}$$

Soluzione della forma diff. con termini continui

$$\begin{aligned}&P(z, t + \Delta t|y, t) = \\ &\quad = \delta(z - y)\left[1 - \Delta t \int dx\omega(x|z)\right] + \Delta t \cdot \omega(z|y).\end{aligned} \tag{4.2}$$

Riconosciamo nella equazione 4.2 un primo termine (con la δ) che corrisponde alla probabilità di essere già in z diminuito della probabilità di andar via, il secondo termine ($\Delta t\omega(z|y)$) corrisponde invece alla probabilità di finire in z arrivando da y.