17 Trasformazioni canoniche e Variabili Azione-Angolo

17.1 Trasformazioni canoniche

Una trasformazione canonica è un cambio di variabili generalizzate tale che:

$$H(p_i, q_i) = H'(P_i(p_i, q_i), Q_i(p_i, q_i)).$$

Le nuove variabili devono rispettare le regole di commutazione canoniche:

$$\dot{Q}_i = -[Q_i, H] \qquad \dot{P}_i = [P_i, H].$$

Spesso nello studio dei sistemi Hamiltoninani è necessario trovare delle trasformazioni che permettano di integrare H.
Integrare l'Hamiltoniana significa trovare le P_i, Q_i tali che:

$$H(p_i, q_i) \to H'(P_i).$$

Quindi per le equazioni di Hamilton-Jacoby anche:

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} = 0$$
$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i} = f_i(P_i).$$

Questo ci permette di trovare una equazione del moto come:

$$\dot{Q}_i = f_i(P_i)t + Q_i(0).$$

Per ottenere una trasformazione canonica è necessario passare dalle **Funzioni generatrici**.
Per trovare queste funzioni partiamo dalla considerazione che H conserva il volume nello spazio delle fasi, quindi anche H' deve conservare tale volume:

$$\int\int dpdq = \int\int dPdQ.$$

Quindi possiamo sfruttare il teorema di stokes:

$$\oint pdq = \oint QdP.$$

$$\oint [pdq - QdP] = 0 \tag{17.1}$$

Grazie a questo integrale possiamo riscrivere tutto in funzione di q e P.

La quantità nell'integrale di linea 17.1 è il differenziale di una qualche funzione F_2:

$$\oint dF_2(q, P) = \oint \frac{\partial F_2}{\partial q} dq + \frac{\partial F_2}{\partial P} dP = 0.$$

Quindi:

$$p = \partial_q F_2(q, P)$$
$$Q = -\partial_P F_2(q, P).$$

Notiamo che aver scritto tutto in funzione della coppia (q, P) è una scelta (che conduce al funzionale chiamato storicamente F_2), si potevano effettuare altre scelte ottenendo lo stesso formalismo con funzionali dipendenti dalle coppie scelte.
Quello che interessa a noi è trovare la trasformazione furba che ci permetta di integrare l'Hamiltoniana.

17.2 Trasformazione che integra H

Supponiamo che la trasformazione ideale sia $S(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\alpha})$, con $\boldsymbol{\alpha}$ nuovi momenti conservati (costanti del moto). Definiamo le Q ideali per la trasformazione come β.
Le equazioni per il cambio di variabile sono:

$$P_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \qquad \beta_i = -\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}.$$

Inserendo l'espressione delle p_i nella Hamiltoniana:

$$H(\boldsymbol{q}, \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{q}}) = H'(\boldsymbol{\alpha}).$$

Si ottiene quindi un sistema di equazioni (di Hamilton-Jacoby) dalle quali è possibile ricavare $\partial_q S$, da tale quantità si risale alla S: la trasformazione ideale.
Considerando che gli $\boldsymbol{\alpha}$ sono costanti del moto[1] il differenziale della derivata di S (dS') si esprime come:

$$dS' = \sum \frac{\partial S}{\partial q_i} dq_i = \sum P_i dq_i.$$

ed integrando si ha direttamente:

$$S = \int_{q_0}^{q_t} \sum_i P_i dq_i.$$

Esempio 17.2.1 (Hamiltoniana 1D)**.** Data la trasformazione della Hamiltoniana:

$$H(q, \partial_q S) = H'(\alpha) = \alpha.$$

Le coordinate dipendenti possono essere espresse tramite la trasformazione (ignota) come:

$$p = \partial_q S(q, \alpha)$$
$$\beta = \partial_\alpha S(q, \alpha). \tag{17.2}$$

Le equazioni HJ sono:

$$\dot{\alpha} = -\partial_\beta H' = 0$$
$$\dot{\beta} = \partial_\alpha H' = 1.$$

[1] Per definizione della trasformazione che cerchiamo si ha che $\dot{\alpha}_i = -\partial_\beta H' = 0$

L'equazione di β può essere integrata, si impone che all'istante iniziale $\beta(t=0)=0$:

$$\beta = t - t_0.$$

Quindi abbiamo che:

$$\begin{aligned} t - t_0 = \int dt\dot{\beta} &= \int_{q_0}^{q_t} d\beta(q) \\ &= \int_{q_0}^{q_t} \partial_q \beta dq = \int \partial_q \partial_\alpha S dq = \\ &= \int \partial_\alpha \partial_q S dq = \int_{q_0}^{q_t} \partial_\alpha P(q,\alpha) dq \\ \Longrightarrow t - t_0 &= \int_{q_0}^{q_t} \partial_\alpha P(q,\alpha) dq. \qquad (17.3) \end{aligned}$$

Esempio 17.2.2 (Moto in potenziale a energia fissa)**.** Prendiamo l'Hamiltoniana unidimensionale con un potenziale:

$$H = \frac{p^2}{2} + V(q) = \alpha \qquad (17.4)$$

La costante del moto (quindi il momento della trasformazione) è l'energia del sistema.
Si inverte l'equazione 17.4 per P:

$$P(q,\alpha) = \sqrt{2(\alpha - V(q))}.$$

Quindi si ottiene il periodo del moto $T = t - t_0$ tramite la 17.3 poiché anche in questo caso $\dot{\beta} = \partial_\alpha H' = 1$:

$$t - t_0 = \int_{q_0}^{q_t} \frac{1}{\sqrt{2(\alpha - V(q))}} dq.$$

Esempio 17.2.3 (Moto in campo centrale)**.**

$$H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\phi^2}{2r^2} + V(r).$$

In questo caso abbiamo un momento conservato: p_ϕ, quindi si definisce α_ϕ costante tale che (dalle equazioni 17.2):

$$\begin{aligned} p_\phi &= \partial_\phi S \\ \beta \equiv \phi &= \partial_\alpha S. \end{aligned}$$

In cui ϕ è la coordinata generalizzata associata a p_ϕ (che non cambia sotto trasformazione perché p_ϕ è già la quantità conservata cercata).
Quindi si può intuire la struttura di $S(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\alpha})$ dalle due relazioni sopra:

$$S(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\alpha}) = \alpha_\phi \phi + S_1(r,\alpha_1).$$

Riscriviamo l'Hamiltoniana:

$$H(\boldsymbol{q}, \partial_{\boldsymbol{q}} S) \equiv H' = \frac{1}{2}\left[(\partial_r S_1)^2 + \frac{\alpha_\phi^2}{r^2}\right] + V(r) = \alpha_1.$$

Si ottiene quindi una equazione per l'incognita $\partial_r S_1$:

$$\partial_r S_1 = \sqrt{2\left[\alpha_1 - V(r)\right] - \frac{\alpha_\phi^2}{r^2}}.$$

Integrando questa equazione si ricava S_1, inserendola nella espressione di S:

$$S = \alpha_\phi \phi + \int dr \sqrt{2\left[\alpha_1 - V(r)\right] - \frac{\alpha_\phi^2}{r^2}}.$$

A questo punto si fanno i passaggi dell'esempio precedente (c'è un cambio di notazione: $-t_0 \to \beta_1$), quindi si ha:

$$\beta_1 + t = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \int \frac{dr}{\sqrt{2(\alpha_1 - V(r)) - \alpha_\phi^2/r^2}}.$$

$$\beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_\phi} = -\int \frac{\alpha_\phi}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2(\alpha_1 - V(r)) - \alpha_\phi^2/r^2}} + \phi.$$

Si nota che che non aver inserito la dipendenza dal tempo per β_2 è una conseguenza di tutto il meccanismo utilizzato: deriva direttamente dalle equazioni d Hamilton:

$$H' = \alpha_1 \Longrightarrow \frac{\partial H'}{\partial \alpha_\phi} = 0 = \dot{\beta}_2.$$

17.3 Variabili azione-angolo in 1D

Partiamo con la seguente:

> Per Hamiltoniane limitate in 1D il moto nello spazio delle fasi avviene sempre su traiettorie chiuse.

Di conseguenza potremmo cercare una variabile angolo θ che aumenti di 2π dopo un giro. Definiamo il momento coniugato di questa variabile come I [2].
La trasformazione canonica cercata è $S(q,I)$.

$$p = \partial_q S(q,I) \qquad \theta = \partial_I S(q,I).$$

Inoltre dobbiamo fare in modo che la trasformazione permetta di integrare l'Hamiltoniana, serve quindi che:

$$H(q, \partial_q S) = \alpha = H'(I).$$

Il fatto che la variabile θ sia periodica porta con se il vantaggio di poter fare teoria delle perturbazioni, come approfondiremo nella prossima lezione.
Procediamo supponendo α costante e fissato.

$$\partial_q \theta = \partial_q \partial_I S = \partial_I \partial_q S \ (= \partial_I P(I)).$$

Visto che dopo un giro si ha che: $\theta \to \theta + 2\pi$.

$$2\pi = \oint_c d\theta = \frac{\partial}{\partial I} \oint \frac{\partial S}{\partial q} dq = \frac{\partial}{\partial I} \oint p dq.$$

Questo implica un importante teorema:

[2] Il motivo per il quale storicamente è di interesse proprio questa trasformazione è che venne studiata per valutare la stabilità del sistema solare

$$\oint pdq = 2\pi I.$$

quindi abbiamo una azione (fissata una curva chiusa nello spazio delle fasi):

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint_c pdq \tag{17.5}$$

Operativamente quello che si fa per risolvere è:

- Si risolve l'Hamiltoniana nel cambio di variabili:

$$H(q, \partial_q S) = \alpha.$$

- Si calcola l'azione I con la formula 17.5 sulle curve "c" aventi α costante.

Le equazioni canoniche per le nuove variabili I, θ sono:

$$\dot{I} = -\partial_\theta H'(I) = 0 \qquad \dot{\theta} = \partial_I H'(I) = \omega(I).$$

Visto che la I è costante nel tempo integriamo l'equazione per $\dot{\theta}$ ottenendo:

$$\theta(t) = \omega(I)t + \theta_0.$$

La cosa importante è che tutta la fisica del problema è inclusa nella funzione ω dipendente solo dall'azione I (che è costante del moto).

Esempio 17.3.1 (Oscillatore armonico)**.** Prendiamo l'equazione per un oscillatore armonico unidimensionale:

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega_0^2 q^2}{2}.$$

Abbiamo come sempre che

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}.$$

Quindi l'Hamiltoniana si esprime come:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 q^2 = \alpha.$$

Passiamo direttamente alla ricerca della azione I:

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint pdq = \frac{1}{2\pi}\oint_c \sqrt{2(\alpha - \frac{1}{2}\omega_0^2 q^2)}dq = \frac{\alpha}{\omega_0}.$$

Si nota che non si è risolto davvero l'integrale, si è assunto che la soluzione sia del tipo α/ω_0.
Possiamo trovare anche il periodo del moto e sfruttarlo per valutare la I:

$$T = \oint_c \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}p\right)dq = \frac{\partial}{\partial\alpha}\oint_c pdq = \frac{\partial}{\partial\alpha}2\pi I.$$

Abbiamo quindi:

$$I = \frac{T}{2\pi}\alpha = \frac{\alpha}{\omega_0}.$$

In conclusione abbiamo ad esempio:

$$\alpha = \omega_0 I = H'.$$

In generale ci si aspetta una Hamiltoniana trasformata del tipo:

$$H' = \omega(I)I.$$

Possiamo esplicitare anche la trasformazione S in modo da ottenere delle equazioni per il moto:

$$S(q, I) = \int\sqrt{2(\omega_0 I - \frac{\omega_0^2 q^2}{2})}dq.$$

Per tornare indietro ed ottenere $q(t)$ è necessario fare un bel calcolo, bisogna tornare indietro passando per la definizione di θ:

$$\theta = \partial_I S(I, q).$$

Quindi derivando all'interno dell'integrale si ottiene:

$$\theta = \sqrt{\frac{2\omega_0}{I}}\int dq\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_0}{2I}q^2}}.$$

Oltre ad effettuare la derivata si è raccolto un termine per esplicitare l'integrale, l'integrale può essere risolto con un cambio di variabili trigonometrico e conduce all'inverso del seno:

$$\theta = \sqrt{\frac{2\omega_0}{I}}\frac{\sin^{-1}(\sqrt{\frac{\omega_0}{2I}}q)}{\sqrt{\frac{2\omega_0}{I}}} + c.$$

Se ne conclude che:

$$\begin{cases} q = \sqrt{2I/\omega_0}\sin(\theta + \delta_0) \\ \theta = \omega_0 t \end{cases} \tag{17.6}$$

17.4 Variabili azione-angolo con $D \geq 2$.

Nel caso di Hamiltoninane separabili il problema si risolve in modo semplice: basta trovare n costanti dell moto (in n dimensioni).
Se si trovano tali costanti allora il moto è confinato ad una varietà n dimensionale nello spazio delle fasi ($2n$ dimensionale).

Teorema di Poincare

Data una Hamiltoniana n dimensionale a variabili separabili.
Consideriamo la trasformazione canonica che integra l'Hamiltoniana, la varietà su cui giacciono le traiettorie è un **Toro** (M) n-dimensionale.

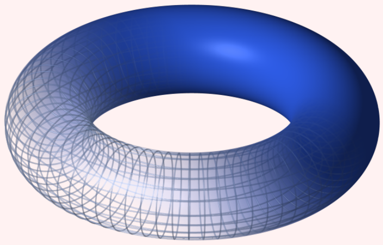

Figura 2.8: Toro in 3 dimensioni, ricordiamo che generalmente si parla di toro n dimensionale.

La dimostrazione è complicata, possiamo immaginarla visivamente pensando che il toro è l'unica varietà che, se considerata letteralmente pelosa, può essere pettinata. Una qualunque altra varietà, come una sfera ad esempio, presenterà delle stizze durante la pettinatura.

Figura 2.9: Un toro perfettamente pettinato

Formalmente se $\dot{\xi}$ è il campo di "velocità" che descrive il flusso di H su M il toro è l'unica varietà che permette di avere questo campo sempre tangente alla varietà stessa.

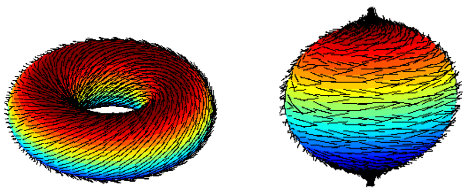

Figura 2.10: Un toroide pettinato ed una sfera non pettinabile (fonte: Wikipedia.)

Nel caso 2-dimensionale ad esempio si ha che

La coppia di variabili azione-angolo è ben definita, infatti il toro è il prodotto di n oggetti periodici.

Tornando alle n dimensioni si ha che:

$$I_k = \frac{1}{2\pi} \oint_{c_k} \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i.$$

Dove le c_k sono traiettorie circuitate attorno al toro.

Esempio 17.4.1 (Oscillatore armonico bidimensionale.)**.**

$$H = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{\omega_1^2}{2}q_1^2 + \frac{\omega_2^2}{2}q_2^2.$$

l'Hamiltoniana è separabile, quindi possiamo procedere definendo α_1 e α_2 come:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{\omega_1^2}{2}q_1^2 \qquad \alpha_2 = \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{\omega_2^2}{2}q_2^2.$$

Abbiamo anche una coppia di azioni $I_{1,2}$:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\oint p_1 dq_1 \qquad I_2 = \frac{1}{2\pi}\oint p_2 dq_2.$$

Mettendo tutto insieme nella Hamiltoniana trasformata finale si ottiene:

$$H'(I_1, I_2) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2.$$

17.5 Scrittura compatta del moto sul Toro

Il moto sul toro ha una struttura generale, possiamo riesprimerlo usando la periodicità nelle variabili azione-angolo.
Il nostro obiettivo finale è esprimere il moto della coordinata spaziale q_i in funzione del tempo $(q_i(t))$.
Nel sistema azione-angolo abbiamo che:

$$q_i(t) = q_i(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\theta}).$$

Possiamo allora cercare la decomposizione di Fourier di questa variabile nello spazio delle I, θ (essendo il moto periodico).
I pesi della trasformata sono:

$$\mathcal{A}_{\boldsymbol{k}}^{(i)}(\boldsymbol{I}) = \int_0^{2\pi} \theta_1 \dots \int_0^{2\pi} \theta_n q_i(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\theta}) e^{i(k_1\theta_1 + \dots + k_n\theta_n)}.$$

In cui i è l'indice associato alla coordinata i-esima, k è il pedice associato al θ.
La decomposizione spettrale invece si esprime come:

$$q_i(t) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{k_n=-\infty}^{\infty} \mathcal{A}_{k_1 \dots k_n}^{(i)} e^{i(k_1\theta_1 + \dots + k_n\theta_n)} = \\ = \sum_{\boldsymbol{k}} \mathcal{A}_{\boldsymbol{k}}^{(i)} e^{i(\boldsymbol{k\omega}t + \boldsymbol{k\delta})}.$$

A questo punto la differenza tra il caso unidimensionale può esser vista in quest'ultima espressione: se gli ω_i stanno tra loro in rapporti razionali allora il moto sarà periodico chiuso, viceversa le orbite non si chiudono (nello spazio dei q_i).
In particolare per avere delle orbite chiuse servono $n-1$ relazioni del tipo:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \omega_i = 0.$$