Sistemi complessi

Edoardo Gabrielli

25 settembre 2020

Indice

0.1 Lezione 1: Introduzione . . . 2
  0.1.1 Moto Browniano . . . 2
  0.1.2 Primo esempio di equazione di Fokker-Plank . . . 2
  0.1.3 Introduzione ad una dinamica mesoscopica: Langevin . . . 2
  0.1.4 Nascita-Morte: Master equation . . . 3
0.2 Lezione 2: Argomento . . . 3
  0.2.1 Esempi di Master equation . . . 3
  0.2.2 Metodo della funzione generatrice . . . 3

0.1 Lezione 1: Introduzione

24-09-2020

0.1.1 Moto Browniano

Il conte Brown nel 1827 pensò di aver scoperto la vita osservando particelle di polline in acqua che si muovevano in modo casuale, ne concluse che le particelle fossero vive. Successivamente fu Einstein a dare una descrizione collisionale con i seguenti punti chiave:

- Impatti frequenti.
- Descrizione probabilistica.
- Dinamica discreta (tempo discretizzato).

Mettiamoci in un sistema unidimensionale e ipotizziamo che il tempo caratteristico di impatto tra due palline sia τ e che $n(t)$ sia il numero delle palline.
Sempre per ipotesi per ogni pallina si ha la proprietà:

$$x(t=0)=x \implies x(t=\tau)=x+\Delta.$$

Dove Δ varia da pallina a pallina, di conseguenza possiamo definire una distribuzione pari di questi Δ: $f(\Delta)$

$$\int f(\Delta)d\Delta = 1; \qquad f(\Delta)=f(-\Delta).$$

0.1.2 Primo esempio di equazione di Fokker-Plank

Possiamo trovare il numero di palline che si muovono di una quantità ξ: $\Delta<\xi<\Delta+d\Delta$, chiamiamo tale numero dn.

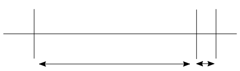

Figura 1: Particelle che si muovono di ξ.

$$dn = nf(\Delta)d\Delta.$$

La probabilità che una pallina si trovi nel punto x al tempo $t+\tau$ per dx è:

Equazione di Chapman-Kulmogorov

$$P(x,t+\tau)dx = dx\int P(x-\Delta,t)f(\Delta)d\Delta \tag{0.1.1}$$

Rappresenta il fatto che il processo è markoviano. Se tale processo non fosse stato di questo tipo avremmo dovuto mettere a destra più di un tempo.

Espandendo in serie (di Kramers-Moyal) le probabilità:

$$P(x,t+\tau)=P(x,t)+\frac{\partial P}{\partial t}\tau$$
$$P(x-\Delta,t)=P(x,t)-\frac{\partial P}{\partial x}\Delta+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\Delta^2.$$

Si ottiene reinserendo nella 0.1.1:

Equazione del tipo di Fokker-Plank

$$\frac{\partial P}{\partial t}=D\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \tag{0.1.2}$$

Nella quale D vale:

$$D=\frac{1}{2\tau}\left\langle \Delta^2\right\rangle.$$

Integrando la 0.1.2 si ottiene, con le condizioni iniziali: $P(x,t=0)=\delta(x)$

$$P(x,t)=\frac{n}{\sqrt{4\pi Dt}}\exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right).$$

0.1.3 Introduzione ad una dinamica mesoscopica: Langevin

Possiamo scrivere una equazione del moto per le palline tenendo di conto di:

- Attrito: $-6\pi\eta d\dot{x}$ (Approccio alla Stokes)
- Impatti random tra le altre particelle: ξ.

$$m\ddot{x}=-6\pi\eta d\dot{x}+\xi \tag{0.1.3}$$

Che è un primo esempio di equazione differenziale stocastica.
Se moltiplichiamo a destra e sinistra per x possiamo riscriverla nel seguente modo:

$$\frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(x^2\right)-m\dot{x}^2=-3\pi\eta d\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x^2\right)+\xi x.$$

Possiamo mediare su tutte le possibili realizzazioni della ξ:

$$\frac{m}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left\langle x^2\right\rangle-kT=-3\pi\eta d\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle x^2\right\rangle.$$

Si risolve con metodi noti:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle x^2\right\rangle=\frac{kT}{3\pi\eta d}+C\exp\left(\frac{-6\pi\eta dt}{m}\right).$$

Possiamo buttare il secondo termine ottenendo:

Equazione di diffusione

$$\left\langle x^2\right\rangle_t-\left\langle x^2\right\rangle_0=\frac{kT}{3\pi\eta d}\cdot t \tag{0.1.4}$$

Andando a vedere l'equazione di Fokker-Plank vista sopra si scopre che c'è una relazione tra D ed i coefficienti di questa equazione:

Relazione tra coefficienti

$$D=\frac{kT}{6\pi\eta d}.$$

0.1.4 Nascita-Morte: Master equation

Ipotizziamo di avere due specie di animali:

- Conigli: x
- Volpi: y

Tali animali possono essere modellizzati con il seguente modello di nascite/morti:

Sistema di Lotka-Volterra

$$\begin{cases} x + \text{food} \to 2x \\ x + y \to 2y \\ y \to \text{death} \end{cases} .$$

Possiamo tradurre questo sistema con due equazioni differenziali (ad intuito):

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k_1 xc - k_2 xy \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = k_2 xy - k_3 y \end{cases} .$$

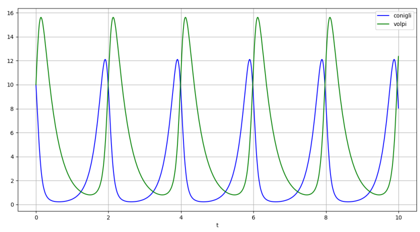

Figura 2: Andamento delle soluzioni

```
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
def func(y,t, c, k1, k2, k3):
    r,s = y
    drds = [k1*c*r-k2*r*s, k2*r*s - k3*s]
    return drds
k1 = 1
k2 = 5
k3 = 1
c = 3
t0 = [10, 10]
t = np.linspace(0,10,1000)
sol = odeint(func, t0, t, args=(k1, k2, k3, c
    ↪ ))
plt.plot(t, sol[:, 0], 'b', label='conigli')
plt.plot(t, sol[:, 1], 'g', label='volpi')
plt.legend(loc='best')
plt.xlabel('t')
plt.grid()
plt.show()
```

Come possiamo tener di conto delle fluttuazioni presenti in natura?
In realtà dovremmo utilizzare un modello discreto, quindi possiamo migliorare il metodo visto in precedenza. Prendiamo la probabilità di avere (x, y) (lepri, volpi) al tempo t: $P(x, y, t)$ (dove adesso x, y sono discreti). Valgono le seguenti uguaglianze per un certo tempo Δt:

$$\begin{aligned} &P_r(x \to x+1, y)\Delta t = k_1 cx \Delta t \\ &P_r(x \to x-1, y \to y+1)\Delta t = k_2 xy \Delta t \\ &P_r(x \to x, y \to y-1)\Delta t = k_3 y \Delta t \\ &P(x \to x, y \to y)\Delta t = \Delta t \left[1 - (k_1 cx + k_2 xy + k_3 y)\right] . \end{aligned}$$

Dove P_r è la probabilità di fare la transizione (indipendente da t per ipotesi). Possiamo trovare l'evoluzione temporale come:

Esempio di Master Equation

$$\begin{aligned} &\frac{P(x, y, t+\Delta t) - P(x, y, t)}{\Delta t} = \\ &\quad P_r(x-1 \to x, y) \cdot P(x-1, y, t) + \\ &\quad P_r(x+1 \to x, y-1 \to y) \cdot P(x+1, y, t) + \\ &\quad P(x \to x, y+1 \to y) P(x, y+1, t) + \\ &\quad \left[P_r(x \to x, y \to y) - 1\right] \cdot P(x, y, t) \end{aligned} \tag{0.1.5}$$

0.2 Lezione 2: Argomento

25-09-2020

0.2.1 Esempi di Master equation

- Rumore shot.
- Rumore Jonshon

Prendiamo il rumore Shot, questo si basa sul fatto che la corrente non è proprio continua, chiamiamo t_k il tempo di arrivo di un elettrone:

$$I(t) = \sum_{t_k} F(t - t_k).$$

Mentre $F(t - t_k)$ è una funzione a pinna di squalo. Cerchiamo la Master equation per questo sistema:

$$P(n \to n+1, \text{in } \Delta t) = \lambda \Delta t P_n(t).$$

Visto che possiamo riscrivere la probabilità di avere n elettroni al tempo $t + \Delta t$ come:

$$P_n(t + \Delta t) = (1 - \lambda \Delta t) P_n(t) + \lambda \Delta t.$$

Si ottiene:

$$\frac{P(n, t+\Delta t) - P(n, t)}{\Delta t} = \lambda (P(n-1, t) - P(n, t)).$$

0.2.2 Metodo della funzione generatrice

Possiamo risolvere questa equazione utilizzando una tecnica standard: la funzione generatrice $G(s, t)$:

$$G(s, t) = \sum s^n P(n, t).$$

Sostituendo nella master si ha:

$$\frac{\partial G(s,t)}{\partial t} = \lambda(s-1)G(s,t).$$

Che si risolve con il risultato:

$$G(s,t) = \exp\left(\lambda(s-1)t\right) G(s,0).$$

Gli elettroni arrivano per $t \geq 0$, infatti si deve avere che: $P(0,0) = 1$, $P(n,0) = 0 \ \forall n$, queste condizioni iniziali ci portano a $G(s,0) = 1$.

$$G(s,t) = e^{\lambda(s-1)t} G(s,0) = \sum s^n P(n,t) \implies$$

$$\sum e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t s)^n}{n!} G(s,0) = \sum s^n P(n,t).$$

In cui si è sfruttato la serie dell'esponenziale $e^{\lambda st}$.

Distribuzione di Poisson

$$P(n,t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Dove $P(n,t)$ è la probabilità che al tempo t abbiamo $N(t) = n$ elettroni.

Tornando alla corrente dobbiamo trovare un modo per contare gli elettroni:

$$\mu(t) = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} \quad \begin{cases} 0 & \text{di solito} \\ \delta(t-t_k) & \text{Arriva e}^- \text{ al tempo } t_k \end{cases}$$

Dove ricordiamo che t_k è random. Quindi abbiamo che:

$$\mu(t) = \sum_k \delta(t-t_k).$$

Allora possiamo riscrivere la corrente con un integrale sfruttando le δ:

$$I(t) = \int dx F(t-t_k)\mu(x).$$

Prendendo come F modello la funzione:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ q\exp(-\alpha t) & t \geq 0 \end{cases}.$$

Otteniamo per la corrente:

$$I(t) = \int_{-\infty}^{t} q\exp\left(-\alpha(t-x)\right) \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x} dx.$$

Adesso dobbiamo risolvere il problema che $N(t)$ è una funzione a salti irregolari tra loro. Vediamo l'equazione differenziale per $I(t)$.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} =& q\exp\left(-\alpha(t-x)\right) \dot{N}\Big|_{x=t} + \\ &+ \int_{-\infty}^{t} (-\alpha q)\exp\left(-\alpha(t-x)\right) \dot{N} dx. \end{aligned}$$

Risolvendo a sinistra ed usando le definizioni ci si riduce a:

Equazione stocastica differenziale

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -\alpha I(t) + q\mu(t).$$

Il termine in μ dipende dalla sequenza casuale di δ, ogni sequenza casuale diversa ci può dare soluzioni diverse.

L'idea per risolvere il problema è di interpolare l'andamento di N con un moto browniano, prendendo la media e le fluttuazioni del termine stocastico. Essendo il termine in μ la derivata di un processo poissoniano abbiamo le seguenti proprietà:

$$\langle \mu dt \rangle = \langle dN \rangle = \lambda dt$$
$$\left\langle (\lambda dt - \mu dt)^2 \right\rangle = \lambda dt.$$

Si ha un termine di fluttuazioni $d\eta$ tale che:

$$dN = \lambda dt + d\eta.$$

Il differenziale della corrente si scrive come::

$$dI(t) = (\lambda q - \alpha I)\, dt + q d\eta(t).$$

Prendendo la media di questa equazione abbiamo che il termine di fluttuazione media a zero:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle I \rangle = \lambda q - \alpha \langle I \rangle.$$

Questa equazione per tempi lunghi da il risultato stazionario:

$$\langle I \rangle_\infty = \frac{\lambda q}{\alpha}.$$

Andiamo avanti nel conto con la seguente presa di posizione:

$$(I + dI)^2 \approx I^2 + 2IdI \tag{0.2.1}$$

Quindi con il risultato che dovrebbe esser noto sui differenziali: $d\left(I^2\right) = 2IdI$, se assumiamo questo e moltiplichiamo a destra e sinistra per $\langle I \rangle$ nella equazione per la corrente otteniamo:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left\langle I^2 \right\rangle = \lambda q \langle I \rangle - \alpha \left\langle I^2 \right\rangle.$$

Che ci porta a concludere che:

$$\left\langle I^2 \right\rangle_\infty = \frac{\lambda q}{\alpha} \langle I \rangle_\infty = \left(\langle I \rangle_\infty\right)^2.$$

Otteniamo quindi un paradosso, la corrente ha varianza nulla:

$$\left\langle I^2 \right\rangle - \langle I \rangle^2 = 0.$$

Questo significherebbe che la "larghezza" del moto Browniano è nulla, quindi la corrente sarebbe costante e continua.

L'errore è dovuto al differenziale 0.2.1, infatti il termine trascurato vale:

$$\left\langle dI^2 \right\rangle = \left\langle q^2 d\eta^2 \right\rangle = q^2 \lambda dt.$$

Che è anch'esso di prim'ordine nel tempo! L'equazione corretta sarebbe allora:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left\langle I^2 \right\rangle = \lambda q \langle I \rangle - \alpha \left\langle I^2 \right\rangle + q^2 \lambda.$$