25 Attrattore di Lorenz

25.1 Nozioni di fluidodinamica

Equazione di diffusione

Prendiamo un sistema fluido in cui è presente un gradiente di temperatura ΔT in una distanza nella coordinata z data da h:

$$\Delta T = \frac{T_1 - T_0}{h}\Delta z.$$

Studiamo il processo di diffusione termica in un cubetto infinitesimo di materia tra il piano $z = 0$ e $z = h$. Il calore entrante nel cubetto è Q_d, quello uscente è Q_u.

$$\begin{aligned}\Delta Q = &- Q_u + Q_d \propto \\ &\propto D_T(-T(\Delta z) + T(0) - T(-\Delta z)) \propto \\ &\propto D_T \nabla^2 T.\end{aligned}$$

Quindi, visto che il gradiente di temperatura in z per il cubetto è sempre ΔT abbiamo l'equazione di diffusione del calore nel materiale:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{v}\nabla T = D_T \nabla^2 T.$$

Forze in gioco nel sistema

Visto che il sistema è un fluido subirà la spinta di Archimede, questa spinta è dovuta al gradiente di temperatura che indurrà una dilatazione termica:

$$g\Delta V(\rho_0 + \alpha\rho_0\Delta T - \rho_0).$$

In cui α è il coefficiente di dilatazione termica, ΔV è l'unità di volume (rappresentata dal volume del cubetto).

$$\frac{F_A}{\Delta V} = g\rho_0\alpha\frac{T_1 - T_0}{h}\Delta z.$$

Sentirà anche le forze viscose. Per valutare immaginiamo di traslare il piano superiore del sistema di un fattore Δz a velocità costante Δv rispetto al piano inferiore. La forza necessaria per effettuare questa operazione può essere modellizzata come:

$$F(z + \Delta z) = \mu\frac{\Delta v}{\Delta z}A.$$

In cui μ è il coefficiente di viscosità, A la superficie da traslare.
La velocità Δv rappresenta la velocità relativa tra i due piani che stiamo considerando.
Possiamo valutare un gradiente di forza per effettuare la traslazione calcolando $F(z + \Delta z) - F(z)$:

$$f = F(z + \Delta z) - F(z) = \frac{\partial F}{\partial z}\Delta z = \mu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}A\Delta z.$$

In conclusione, come per Archimede, prendiamo la forza per unità di volume:

$$F_v = \frac{f}{\Delta V} \implies \frac{f_i}{A\Delta z} = \mu\nabla^2 v_i.$$

in cui i sta ad indicare la coordinata i-esima della forza (x, y, z).
Visto che la distanza delle due piastre è h possiamo approssimare il $\nabla^2 v$ come:

$$F_{v,z} = \mu\frac{v_z}{h^2}.$$

Notiamo che nelle equazioni delle forze e di diffusione vi sono delle importanti quantità intensive del fluido in considerazione

$$[\rho] = \frac{[M]}{[L]^3} \qquad [D_T] = \frac{[L]^2}{[T]} \qquad [\mu] = \frac{[M]}{[L]\,[T]}.$$

è utile introdurne altre, come la **Viscosità cinematica**:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{[L]^2}{[T]}.$$

Questa è legata alle forze tra le molecole del fluido (come è lecito aspettarsi avendo al denominatore la densità).
In questo modo si ha una quantità che può essere sfruttata sia per studiare i fluidi che per studiare i gas.
Introduciamo anche un numero puro, rilevante per il nostro sistema: il **Numero di Prandtl**.

$$P = \frac{\nu}{D_T}.$$

Questo misura l'importanza relativa tra viscosità e diffusione termica.

Equilibrio tra forze e scale tipiche temporali

Uguagliando la forza di Archimede a quella viscosa:

$$\alpha\rho_0 g\frac{\Delta T}{h}\Delta z = \mu\frac{v}{h^2} \qquad (25.1)$$

Se abbiamo un oggetto che rompe l'equilibrio (perché troppo caldo ad esempio) allora inizierà a salire lungo l'asse z fino a raggiungere una velocità uniforme di salita: l'equilibrio tra Archimede e la forza viscosa.
Questo fenomeno definisce una velocità limite che può essere ottenuto invertendo la relazione 25.1.

$$v_{lim} = \frac{\alpha\rho_0 g\Delta T\Delta z h}{\mu}.$$

In presenza di questa velocità limite l'oggetto del moto percorre una distanza Δz in un tempo critico τ_v determinato dall'equilibrio stesso:

$$\frac{\Delta z}{v_{lim}} = \frac{\mu}{\alpha\rho_0 g\Delta T\Delta z h} = \tau_v.$$

Questo tempo è legato a quanto tempo impieghiamo a portare in equilibrio il sistema con il moto convettivo.

L'equilibrio potrebbe essere raggiunto anche tramite un processo di diffusione.

$$\partial_t T \sim D_T \nabla^2 T \sim D_T \frac{T}{h^2} \implies \tau_T = \frac{h^2}{D_T}.$$

Valutando il rapporto tra le scale temporali di diffusione e di convezione otteniamo un altro numero puro: il **numero di Rayleigh**.

$$R_a = \frac{\tau_T}{\tau_v} = \frac{h^3}{D_T} \frac{\alpha \rho_0 g \Delta T}{\mu}.$$

Chiaramente questo numero dice se il sistema è dominato da convezione o da conduzione:

- $\tau_T > \tau_v$: stato convettivo.
- $\tau_T < \tau_v$: stato non conduttivo.

In conclusione abbiamo un ultimo numero puro importante per la dinamica del sistema: il **Numero di Reynolds**:

$$R_e = \frac{\rho v L}{\mu}.$$

In cui L può essere interpretato come il diametro del "tubo" in cui avviene il moto.
Questo numero misura la transizione tra un fluido di tipo laminare ($R_e < 1000$) ed un fluido di tipo turbolento ($R_e > 1000$).

25.2 Modello di Lorenz della turbolenza

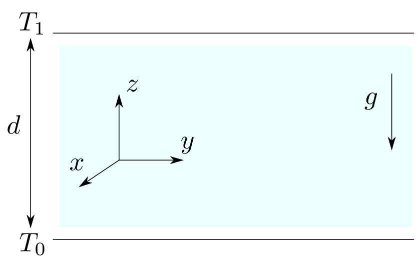

Figura 2.53: Superfici a temperature $T_{0,1}$ tra le quali è presente un fluido in presenza di gravità.

Ipotizziamo di avere un fluido incomprimibile come in figura 2.53 con le seguenti caratteristiche note:

- ρ_0 a temperatura T_0.
- $\nu = \mu/\rho_0$ coefficiente di viscosità cinematica.
- α coefficiente di espansione termica.
- D_T coefficiente di diffusione.

Cerchiamo il campo di velocità del fluido $\boldsymbol{u}$. Le componenti di questo campo le definiamo come:

$$\boldsymbol{u} = (u, v, \omega).$$

Ipotizziamo inoltre che valga la seguente:

$$\nabla \boldsymbol{u} = 0.$$

Diamo per note le equazioni di Navy-Stokes e quelle del gradiente di temperatura:

$$\begin{aligned} &\partial_t \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \nabla \boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P + \nu \nabla^2 \boldsymbol{u} + \alpha g (T - T_0) \hat{z} \\ &\partial_t T + \boldsymbol{u} \nabla T = D_T \nabla^2 T. \end{aligned}$$

Tradizionalmente si introducono delle variabili riscalate:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x}^* = \frac{\boldsymbol{x}}{d} && t^* = \frac{D_T}{d^2} t \\ &\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{u} \frac{d}{D_T} && p^* = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{d}{D_T} \right)^2 P \\ &\theta^* = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} - z^* && \left[T = T_0 + \Delta T (\theta^* + z^*) \right]. \end{aligned}$$

La variabile θ^* rappresenta la variazione dalla linearità del profilo di temperatura.
Inserendo queste variabili nelle equazioni sopra:

$$\begin{aligned} &\nabla \boldsymbol{u} = 0 \\ &\partial_t \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} = -\nabla P + P_r \nabla^2 \boldsymbol{u} + P_r R_a \theta \hat{z} \\ &\partial_t \theta + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \theta = \omega + \nabla^2 \theta. \end{aligned}$$

In cui $P_r = \nu / D_T$.
Inseriamo le condizioni al contorno:

$$z = 0, 1 \qquad \theta = 0 \qquad \omega = 0 \qquad \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = 0.$$

Fino a questo punto il problema è piuttosto generale, Lorenz lo specializzò ad una situazione particolare: il fluido deve muoversi su dei rulli ("rolls").

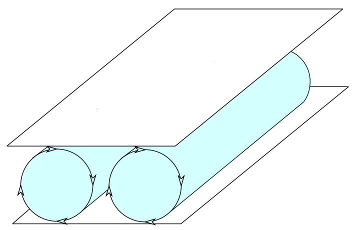

Figura 2.54: Moto del fluido tra i due strati, si ipotizza quindi la componente della velocità $\boldsymbol{u}_x$ nulla.

In questo modo ci si riduce a studiare il moto solo lungo il piano y, z. La divergenza nulla del campo di velocità implica allora che:

$$\partial_y u_y + \partial_z u_z = 0.$$

Una ipotesi (forte) che possiamo fare è che la forma del campo di velocità sia del seguente tipo:

$$u_y = \partial_z \psi(y, z) \qquad u_z = -\partial_y \psi(y, z).$$

In questo modo la divergenza nulla è rispettata. La funzione ψ viene chiamata "stream function".
Quest'ultima ipotesi equivale a dire che il rotore del campo di velocità (la vorticità: $\boldsymbol{\xi}$) sia solo lungo x.

$$\boldsymbol{\xi} = \nabla \times \boldsymbol{u} \implies \xi_x = \partial_y u_z - \partial_z u_y = -\nabla_2^2 \psi.$$

In cui l'ultimo laplaciano ∇_2^2 è bidimensionale.
Facendo il rotore della equazione di Navy-Stokes nelle variabili riscalate possiamo introdurvi la $\boldsymbol{\xi}$. Effettuando un pò di algebra si arriva alla seguente espressione:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \boldsymbol{u}\nabla\xi = P_r\nabla_2^2\xi + P_rR_a\frac{\partial \xi}{\partial y}.$$

L'equazione per la variabile θ invece può essere riscritta come:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + J(\theta,\psi) = \nabla_2^2\xi - \frac{\partial \xi}{\partial y}.$$

Dove si definisce la quantità:

$$J(f,\psi) = \boldsymbol{u}\nabla f.$$

Grazie alle proprietà della stream function (che entra nella espressione di J sostituendo u_y, u_z).
In conclusione il sistema di equazioni differenziali da risolvere diventa:

$$\begin{aligned} &\xi = -\nabla_2^2\psi \\ &\frac{\partial \xi}{\partial t} + J(\xi,\psi) = P_r\nabla_2^2\xi + P_rR_a\frac{\partial \xi}{\partial y} \\ &\frac{\partial \theta}{\partial t} + J(\theta,\psi) = \nabla_2^2\xi - \frac{\partial \xi}{\partial y}. \end{aligned}$$

Queste ci determinano completamente il moto nei rolls.
A questo punto viene fatta una approssimazione
A questo punto viene fatta una approssimazione sfruttando l'espansione di Galerkin. Si cercano i modi più bassi che possono essere rilevanti per la dinamica che vogliamo studiare.

$$\begin{aligned} \psi(z,y,t) &= a(t)\sin(\pi z)\sin(k\pi y) \\ \theta(z,y,t) &= b(t)\sin(\pi z)\cos(k\pi y) + c(t)\sin(2\pi z). \end{aligned}$$

I termini trigonometrici in $k\pi y$ tengono di conto della periodicità del moto sui rolls, i termini che contengono invece πz tengono di conto che il moto può dipendere dall'angolo.
A questo punto si reinseriscono queste quantità nelle equazioni differenziali ed otterremo un sistema di equazioni nelle derivate rispetto al tempo dei coefficienti a, b, c.
In particolare i termini a, b rappresentano dei rolls lungo y (aventi numero d'onda k). La variabile c invece tiene di conto della convezione e quantifica la deviazione della temperatura rispetto alla media.
Il risultato finale di questa operazione sono le seguenti 3 equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} &= -y + rx - xz \\ \dot{z} &= -\tilde{b}z + xy. \end{aligned}$$

Con le 3 variabili che sono delle riscalature di a, b, c:

$$\begin{aligned} x &= \frac{ka}{\sqrt{2}(1+k^2)} \\ y &= \frac{kb}{\sqrt{2}(1+k^2)} \\ z &= c. \end{aligned}$$

Le equazioni scritte sopra sono proprio quelle del modello di Lorenz.