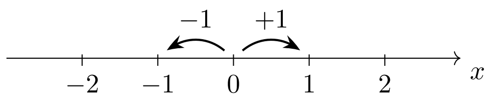
6 Random Walk

6.1 Modelli semplici di Random Walk

Mettiamoci in una situazione unidimensionale, con un oggetto che può fare salti di ampiezza unitaria.



Possiamo analizzare due modelli di RW:

1. Salto di ± 1 ad un tempo casuale.
2. Salto di ± 1 ad un tempo τ fissato.

Entrambi i casi descrivono processi Markoviani.

1. Salto ad un tempo random.

L'equazione di Chapman-Kolmogorov in forma differenziale per il processo si scrive come:

$$\begin{aligned}\partial_t P(n,t|n',t') = [\ & \omega(n|n+1,t)\, P(n+1,t|n',t') + \\ & +\omega(n|n-1,t)\, P(n-1,t|n',t') + \\ & -2P(n,t|n',t')\ ].\end{aligned}$$

Facciamo chiarezza sui termini in equazione, prendiamo il primo nella parentesi quadra dopo l'uguale:

$$\omega(n|n+1,t)\, P(n+1,t|n',t').$$

Questo indica la probabilità di essere in $n+1$ (descritta dal termine P) e di fare un salto all'indietro (descritta dalla probabilità corrispondente ω).
L'ultimo termine in parentesi indica la probabilità di essere in n al tempo t, se ci troviamo in tal punto allora allo step successivo usciamo sicuramente fuori per costruzione del moto.
Imponendo che il rate di salto in avanti sia uguale a quello di salto all'indietro:

$$\omega(n+1|n,t) = \omega(n-1|n,t) \equiv d \tag{6.1}$$

Possiamo semplificare l'equazione del processo:

Chapman-Kolmogorov per RW 1.

$$\begin{aligned}\partial_t P(n,t|n',t') = d\,[\ & P(n+1,t|n',t') + \\ & +P(n-1,t|n',t') + \\ & -2P(n,t|n',t')\ ].\end{aligned} \tag{6.2}$$

Si risolve in trasformata:

$$G(s,t) = \langle e^{isn} \rangle = \sum_n^{\infty} P(n,t|n',t')\, e^{isn}.$$

Quando abbiamo un termine del tipo $P(n\pm 1|n',t')$ basta scrivere:

$$e^{isn} P(n\pm 1,t|n',t') = e^{\mp is} e^{is(n\pm 1)} P(n\pm 1,t|n',t').$$

Quindi inserendo nella equazione di CK:

$$\partial_t G(s,t) = d\left(e^{-is} + e^{is} - 2\right) G(s,t).$$

Si risolve per $G(s,t)$:

$$G(s,t) = \exp\left[\left(e^{is} + e^{-is} - 2\right) td\right] G(s,0).$$

Andando a cercare la soluzione stazionaria si ha che:

$$t \to \infty \implies s \to 0.$$

Questo per le relazioni tra spazio reale e trasformata: in sostanza stiamo assumendo i camminatori come oggetti reali, quindi se $\omega \to 0$ dev'essere necessariamente che $s \to 0$:

$$\omega \sim sc.$$

Sviluppando la G al secondo ordine in s si ottiene:

$$G(s,t) = \exp(-s^2 td) \equiv e^{-s\sigma^2/2}.$$

Quindi effettuando la trasformata inversa si ottiene una Gaussiana con larghezza $\sigma^2 = 2td$: la distribuzione si allarga nel tempo.

2. Salto ad un tempo τ fissato

In questo caso il tempo è una variabile discreta di passo τ.

Equazione per il propagatore nel RW 2

$$\begin{aligned}& P(n,(N+1)\tau|n',N'\tau) = \\ & \frac{1}{2}\left[P(n+1,N\tau|n',N'\tau) + \right. \\ & \quad \left. + P(n-1,N\tau|n',N'\tau)\right].\end{aligned} \tag{6.3}$$

RW1 e RW2 equivalenti per scale piccole.

Se τ è piccolo rispetto a $N\tau$ il caso (2) diventa equivalente al caso (1).

Definiamo il tempo $t' = N'\tau$ e riscriviamo l'espressione per la derivata di P nel seguente modo:

$$\begin{aligned}P(n,(N+1)\tau|n',N'\tau) \simeq & P(n,N\tau|n',t') + \\ & + \tau\partial_t P(n,N\tau|n',t').\end{aligned} \tag{6.4}$$

Si procede definendo il rate di salto come:

$$d \equiv 1/2\tau.$$

Possiamo ottenere l'equazione 6.2 sostituendo al termine a sinistra dell'uguale nella 6.3 l'espressione ottenuta nella 6.4 .
Risolviamo adesso la 6.3 con il metodo della funzione caratteristica ($G(s,t) = \langle e^{ins} \rangle$):

$$G(s,(N+1)\tau) = \frac{1}{2}\left(e^{is} + e^{-is}\right) G(s,N\tau).$$

Come condizione iniziale si impone che $G(s,0) = 1$.
In questo modo l'equazione in G è una ricorsiva in N che ha soluzione:

$$G(s,N\tau) = \left(\frac{1}{2}\left(e^{is} + e^{-is}\right)\right)^N.$$

A questo punto possiamo vedere che se $N \to \infty$ si ottiene una soluzione Gaussiana come nell'RW1 (mandare $N \to \infty$ significa limite stazionario).

$$\begin{cases} \tau N = t \\ d = \dfrac{1}{2\tau} \end{cases} \implies \frac{td}{N} = \frac{1}{2}.$$

$$G(s,N\tau) = \left[1 + \frac{td}{N}\left(e^{is} + e^{-is} - 2\right)\right]^N.$$

Sfruttando il limite notevole:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha.$$

Si ottiene:

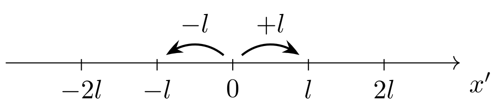
$$G(s,N\tau) \xrightarrow{N\to\infty} G(s,t) = \exp\left[td\left(e^{is} + e^{-is} - 2\right)\right].$$

In conclusione è come se, aspettando abbastanza a lungo, la caoticità sul salto di ± 1 contagiasse il clock di salto τ rendendo anch'esso caotico come nel caso RW1.
Nel proseguo distingueremo i due casi solo dove necessario vista la loro equivalenza a stazionarietà.

Limite al continuo nei salti

Definiamo lo spazio percorso dal camminatore dopo n step in un reticolo di passo l:

$$x = nl.$$



Quello che faremo sarà far il limite per $l \to 0$.
La trasformata si modifica per questo caso nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\phi(s,t) = \langle e^{isx} \rangle = G(ls,t) = \\ = \exp\left[\left(e^{ils} + e^{-ils} - 2\right) td\right].\end{aligned} \tag{6.5}$$

Dove ricordiamo che d è il rate del processo definito dalla 6.1.

Si studia adesso anche il caso stazionario, quindi dobbiamo effettuare entrambi i limiti:

$$\begin{aligned} l &\to 0 \\ \tau &\to 0. \end{aligned}$$

Sviluppando nell'esponenziale della 6.5 ci si rende conto che sopravvive solo il termine:

$$\sim \exp\left(-s^2 l^2 td\right).$$

Quindi la $G(ls,t)$ si annulla per $l \to 0$. Per rimediare a questo fatto è possibile supporre che il rate d diverga in modo da bilanciare l'andamento di l.

$$D \equiv \lim_{\substack{l\to 0 \\ d\to\infty}} l^2 d = \text{Finito}.$$

Fare il limite per il Rate $d \to \infty$ è lo stesso che fare il limite per $\tau \to 0$ poiché per definizione $d = 1/2\tau$.
In conclusione otteniamo un andamento per ϕ Gaussiano:

Funzione caratteristica per RW nel limite continuo

$$\phi(s,t) = \exp\left(-s^2 tD\right).$$

Quindi abbiamo anche che:

$$\langle x^2 \rangle \sim 2tD \tag{6.6}$$

Random Walk e processi di Wiener

Si può dimostrare che per $l \to 0$ l'equazione che regola il propagatore P è una Fokker-Plank (che regola anche i processi di Wiener).
Partiamo dalla Master Equation già scritta sopra:

$$\partial_t P(n) = d\left(P(n+1) + P(n-1) - 2P(n)\right).$$

Sviluppando in $l = 0$ si ha:

$$\begin{aligned} P(n+1) &= P(n) + \partial_x P(n) l + \frac{1}{2}\partial^2_{x^2} l^2 P(n) \\ P(n+1) &= P(n) - \partial_x P(n) l + \frac{1}{2}\partial^2_{x^2} l^2 P(n). \end{aligned}$$

E reinserendo nella equazione per P si ha:

$$\partial_t P(n) = dl^2 \partial^2_{x^2} P(n).$$

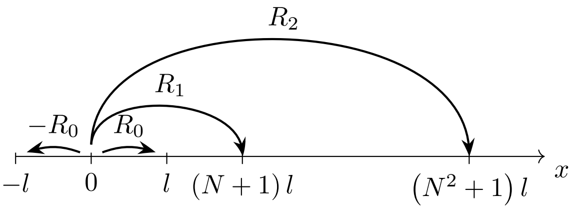
Che è appunto una Fokker-Plank.

6.2 Random Walk di Weierstrass

Questo RW è più complesso dei primi due, si basa su alcuni parametri che ne determinano il passo ed il rate: (N, b).
Adesso anziché fare salti fissi di l si fanno salti J_n con rate R_n che variano al variare dell'intero n. J_n e R_n sono così definiti:

$$J_n = (N^n + 1)\, l \qquad R_n = \frac{\gamma}{b^n} \qquad b, N > 1.$$

$$n \in [0 \ldots \infty].$$



Possiamo considerare γ come il parametro corrispondente a d della sezione precedente. Quindi ad esempio si può avere:

- Salto di l con rate γ.
- Salto di $(N+1)\,l$ con rate γ/b.
- Salto di $\left(N^2+1\right)l$ con rate γ/b^2.

Come conseguenza salti più lunghi avranno rate più bassi (quindi saranno meno frequenti).

Master Equation per il RW di Weierstrass

$$\begin{aligned}\partial_t P\left(n,t|n',t'\right) = & \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\gamma}{b^i}\left[P\left(n+(N^i+1),t|n',t'\right)+\right.\\ & \left.+\,P\left(n-(N^i+1),t|n',t'\right)\right]+\\ & -2\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\gamma}{b^i}\right)P\left(n,t|n',t'\right).\end{aligned}$$

La prima sommatoria tiene di conto di tutti i punti che possono arrivare da distanze diverse. La seconda sommatoria invece tiene conto di quelli che sono già nel punto e scappano via.
L'equazione descrive un processo a salti, di conseguenza il moto in questione è Markoviano. Come per gli altri RW risolviamo con la funzione caratteristica.

$$G(s,t)=\left\langle e^{isn}\right\rangle=\sum_{n}^{\infty}e^{isn}P(n,t|n',t').$$

La master equation si riscrive come:

$$\begin{aligned}\partial_t G(s,t)=\gamma\Bigg[& e^{is}\left(1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{isN^n}}{b^n}\right)+\\ & +e^{-is}\left(1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-isN^n}}{b^n}\right)+\\ & -2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{b^n}\Bigg]G(s,t).\end{aligned}$$

Possiamo compattare la scrittura con la notazione:

$$f(s)\equiv\left[e^{is}\left(1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{isN^n}}{b^n}\right)+C.C-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{b^n}\right].$$

Che ci permette di esprimere direttamente il risultato:

Funzione caratteristica per il RW di Weierstrass

$$G(s,t)=\exp\left(tf(s)\right)G(s,0).$$

Limite stazionario

Vediamo se anche in questo caso mandando $t\to\infty$ si ottiene una Gaussiana come nei casi RW1 e RW2. Sviluppando la G per $s\to 0$ si ottiene che molti termini polinomiali si semplificano, rimane soltanto la seguente:

$$G(s,t)=\exp\left(-ts^2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{N^2}{b}\right)^k\right).$$

Il coefficiente di diffusione D è rappresentato in questo caso dalla sommatoria:

$$D\to\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{N^2}{b}\right)^k .$$

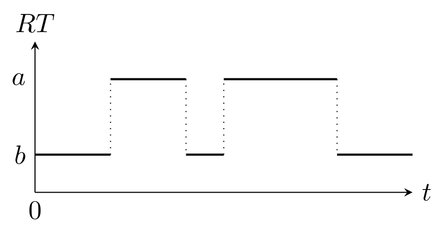
Quello che si scopre è quindi che il parametro N^2/b decide se il processo sarà Gaussiano o no, infatti:

- Se $N^2/b<1$ abbiamo una serie geometrica all'esponenziale che ci riconduce ad una forma Gaussiana.
- Se $N^2/b>1$ la sommatoria diverge, il processo resta Markoviano ma non vale più il teorema del limite centrale (poiché la varianza diverge).

Visto che il momento secondo è proporzionale a D (eq. 6.6) se ne conclude un processo con $N^2/b>1$ ha varianza infinita.
La cosa interessante è che abbiamo scoperto un processo random che al limite non diventa una Gaussiana [2]

6.3 Random Telegraph

Il RT è un processo random che coinvolge un sistema a due stati (o livelli):



Il processo è descritto dalle equazioni differenziali:

$$\begin{aligned}\partial_t P\left(a,t|x,t_0\right)&=-\lambda P\left(a,t|x,t_0\right)+\mu P\left(b,t|x,t_0\right)\\ \partial_t P\left(b,t|x,t_0\right)&=\lambda P\left(a,t|x,t_0\right)-\mu P\left(b,t|x,t_0\right).\end{aligned}$$

In cui x può essere a oppure b.
In questo caso c'è anche una terza equazione per la normalizzazione del processo:

$$P\left(a,t|x,t_0\right)+P\left(b,t|x,t_0\right)=1.$$

[2] il momento secondo deve essere definito nelle ipotesi per il teorema del limite centrale...

Si scelgono le condizioni iniziali:

$$P(x, t_0|x', t_0) = \delta_{xx'}.$$

E quello che si ottiene risolvendo le equazioni differenziali è:

$$P(x', t|x, t_0) = \frac{\omega(x')}{R} + e^{-R(t-t_0)}\left(\frac{\lambda}{R}\delta_{ax} + \frac{\mu}{R}\delta_{bx}\right) \tag{6.7}$$

In cui R è la somma dei due rate:

$$R = \mu + \lambda.$$

Mentre la funzione $\omega(x')$ differenzia i casi con $x' = a$ e $x' = b$:

$$\omega(x') = \begin{cases} \lambda & \text{se } x' = a \\ \mu & \text{se } x' = b \end{cases}.$$

Il primo termine nella 6.7 è il termine stazionario. Il secondo termine invece decade esponenzialmente in t, il termine con le δ a moltiplicare deriva dalle condizioni iniziali inserite.

$$\begin{aligned}\langle x(t)|\,[x_0, t_0]\rangle = & \sum_{x=a,b} xP(x, t|x_0, t_0) = \\ = & \mathcal{R} + (x - \mathcal{R})\, e^{-R(t-t_0)}.\end{aligned}$$

Dove $\mathcal{R}$ è il Rate ridotto:

$$\mathcal{R} = \frac{a\mu + b\lambda}{\lambda + \mu}; \qquad R = \mu + \lambda.$$

Si può anche calcolare la varianza di $x(t)x(s)$, senza esplicitare i conti si ha:

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(x(t)x(s)) = & \langle x(s)x(t)\rangle - \langle x(s)\rangle\langle x(t)\rangle = \\ = & \frac{(a-b)^2\,\lambda\mu}{\mu + \lambda} e^{-R(t-t_0)}.\end{aligned}$$

RT e OU

Le dipendenze dal tempo di media e varianza calcolate per il processo di Ornstein-Uhlenback sono le stesse che per il processo di Random Telegraph.

Per questo motivo spesso si preferisce studiare alcuni processi con il random telegraph che, analiticamente, permette di trovare la soluzione in modo più semplice.