

# Sistemi complessi

Edoardo Gabrielli

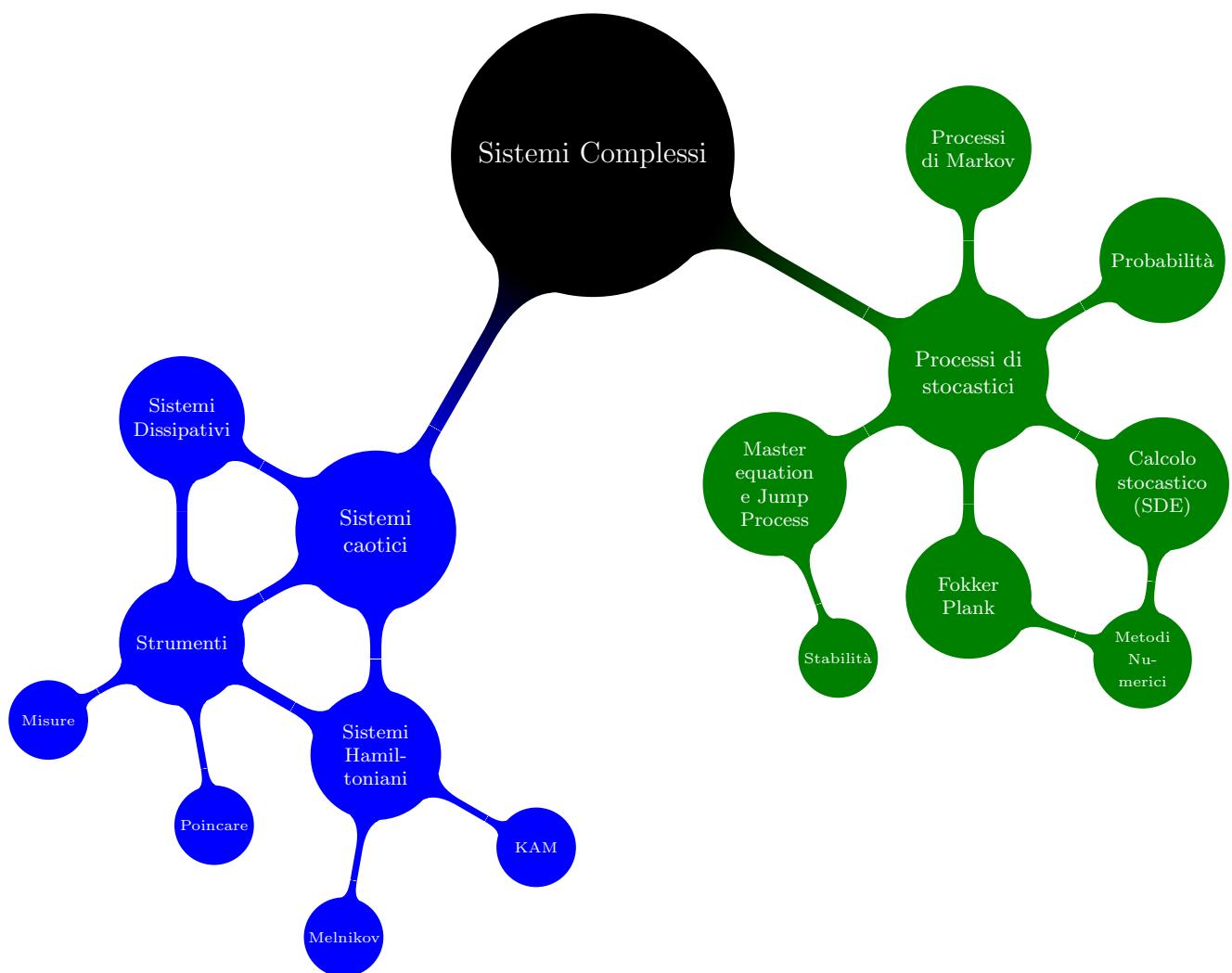
1 febbraio 2021

# Indice

<b>1</b>	<b>Processi stocastici</b>	<b>4</b>
1	Lezione 1 . . . . .	4
1.1	Moto Browniano . . . . .	4
1.2	Dinamica mesoscopica: Langevin . . . . .	4
1.3	Nascita-Morte: Master equation . . . . .	5
2	Lezione 2 . . . . .	6
2.1	Esempi di Master equation . . . . .	6
2.2	Metodo della funzione generatrice . . . . .	6
2.3	Correlazione e densità spettrale . . . . .	7
2.4	Probabilità . . . . .	7
2.5	Funzione caratteristica . . . . .	8
3	Lezione 3 . . . . .	9
3.1	Limiti con variabili stocastiche . . . . .	9
3.2	Cumulanti della funzione caratteristica. . . . .	10
3.3	Teorema del limite centrale . . . . .	10
3.4	Momenti fattoriali . . . . .	11
3.5	Processi stazionari e processi di Markov . . . . .	11
3.6	Equazione di Chapman - Kolmogorov . . . . .	12
4	Lezione 4 . . . . .	13
4.1	Continuità dei processi stocastici . . . . .	13
4.2	Forma differenziale di Chapman - Kolmogorov . . . . .	13
4.3	Processo di Wiener . . . . .	14
5	Lezione 5 . . . . .	15
5.1	Processo di Ornstein - Uhlenback . . . . .	15
5.A	Metodo delle Caratteristiche. . . . .	17
6	Lezione 6 . . . . .	19
6.1	Modelli semplici di Random Walk . . . . .	19
6.2	Random Walk di Weierstrass . . . . .	20
6.3	Random Telegraph . . . . .	21
6.4	Integrali stocastici . . . . .	22
6.5	Integrale di $\hat{I}$ to e di Stratonovich . . . . .	22
6.6	Relazione tra l'incremento stocastico e l'incremento temporale. . . . .	23
6.7	Formula di $\hat{I}$ to . . . . .	23
7	Lezione 7 . . . . .	24
7.1	Integrale di una SDE . . . . .	24
7.2	Algoritmo di Heun . . . . .	25
8	Lezione 8 . . . . .	26
8.1	Legame tra SDE e Fokker-Plank . . . . .	26
8.2	Ornstein-Uhlenback dipendente dal tempo . . . . .	28
9	Lezione 9 . . . . .	29
9.1	Oltre il teorema del limite centrale . . . . .	29
9.2	Distribuzioni stabili . . . . .	29
9.3	Teorema di Levy-Kintchine . . . . .	30
9.4	Bacino di attrazione di una distribuzione . . . . .	31
9.5	Cambio di scala . . . . .	31
9.6	SDE con variabili stocastiche con distrib. di Levy . . . . .	32
10	Lezione 10 . . . . .	33
10.1	Random Walk di Weierstrass nel dettaglio . . . . .	33
10.2	Serie di Weierstrass e distribuzione stabile per il RW . . . . .	33

11	Lezione 11 . . . . .	35
11.1	Equazione di Fokker-Plank: soluzione analitica.	35
11.2	Condizioni al bordo per la soluzione della FK.	35
11.3	Distribuzione di equilibrio del processo . . . . .	35
11.4	Bilancio dettagliato . . . . .	37
11.5	Relazione di Onsager e Teorema di Fluttuazione Dissipazione.	39
11.6	Fokker-Plank dipendente dal tempo . . . . .	40
11.7	Tempo di primo passaggio o MFPT . . . . .	42
11.8	MFTP in 1D . . . . .	42
11.9	MFPT per fuga da buca di potenziale . . . . .	43
11.10	MFPT in più dimensioni . . . . .	44
11.11	Calcolo numerico del MFTP . . . . .	44
12	Lezione 12 . . . . .	46
12.1	Simulazione del processo di Wiener in una doppia buca.	46
12.2	Hamiltoniana per il MFPT . . . . .	47
12.3	Da cammino ottimale a MFPT . . . . .	49
12.4	Calcolo del MFPT in 2D: Oscillatore di Van Der Pol invertito . . . . .	50
12.5	MFPT applicato allo studio delle glaciazioni . . . . .	52
13	Lezione 13 . . . . .	53
13.1	Processo di nascita e morte . . . . .	53
13.2	Applicazione a processo con Rate di passaggio . . . . .	53
13.3	Da Master Equation a Fokker Plank . . . . .	55
14	Lezione 14 . . . . .	56
14.1	Derivazione classica del passaggio ME→FK: Kramers Moyal . . . . .	56
14.2	Derivazione di Van Kampen . . . . .	56
14.3	Differenze fisiche tra Kramers Moyal e Van Kampen . . . . .	57
<b>2</b>	<b>Sistemi caotici</b>	<b>58</b>
15	Lezione 15 . . . . .	58
15.1	Dinamica nello spazio delle fasi.	58
15.2	Tecnica della stabilità lineare . . . . .	59
15.3	Classificazione dei punti fissi . . . . .	59
16	Lezione 16 . . . . .	63
16.1	Trasformazioni canoniche . . . . .	63
16.2	Ricerca della trasformazione che integra $H$ . . . . .	63
16.3	Variabili azione-angolo in una dimensione . . . . .	64
16.4	Variabili azione-angolo in dimensioni $D \geq 2$ . . . . .	65
16.5	Scrittura compatta del moto sul Toro . . . . .	66
17	Lezione 17 . . . . .	67
17.1	Sistemi quasi integrabili: teoria delle perturbazioni . . . . .	67
17.2	Sviluppo perturbativo in due dimensioni . . . . .	69
17.3	Esempio di rottura della teoria perturbativa . . . . .	69
17.4	Teorema KAM . . . . .	70
18	Lezione 18 . . . . .	72
18.1	Visualizzare la dinamica: mappa di Poincare . . . . .	72
18.2	Mappa di Poincare per sistema con una costante del moto . . . . .	72
18.3	Sistema di Henon e Heiles: sono stabili le stelle delle galassie? . . . . .	73
18.4	Twist Map . . . . .	74
19	Lezione 19 . . . . .	76
19.1	Mappa di Henon . . . . .	76
19.2	Legare una mappa ad una Hamiltoniana . . . . .	76
19.3	Introduzione alla mappa standard . . . . .	77
19.4	Studio dei punti fissi per un mappa Hamiltoniana . . . . .	77
19.5	Caos e rottura del teorema KAM . . . . .	78

# MindMap del corso



# Capitolo 1

## Processi stocastici

### 1 Lezione 1

#### 1.1 Moto Browniano

Il conte Brown nel 1827 pensò di aver scoperto la vita osservando particelle di polline in acqua che si muovevano in modo casuale, ne concluse che le particelle fossero vive. Successivamente fu Einstein a dare una descrizione collisionale con i seguenti punti chiave:

- Impatti frequenti.
- Descrizione probabilistica.
- Dinamica discreta (tempo discretizzato).

Mettiamoci in un sistema unidimensionale e ipotizziamo che il tempo caratteristico di impatto tra due palline sia  $\tau$  e che  $n(t)$  sia il numero delle palline. Sempre per ipotesi per ogni pallina si ha la proprietà:

$$x(t=0) = x \implies x(t=\tau) = x + \Delta.$$

Dove  $\Delta$  varia da pallina a pallina, possiamo definire una distribuzione pari di questi  $\Delta$ :  $f(\Delta)$

$$\int f(\Delta) d\Delta = 1; \quad f(\Delta) = f(-\Delta).$$

**Primo esempio di equazione di Fokker-Plank**  
Possiamo trovare il numero  $dn$  di palline che si muovono di una quantità  $\xi$ :  $\Delta < \xi < \Delta + d\Delta$ .

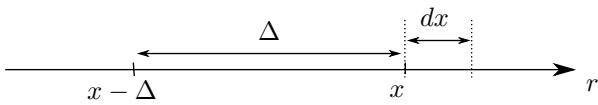


Figura 1.1: Particelle che si muovono di  $\xi$ , dove  $\Delta$  è la variabile stocastica per le palline.

$$dn = n f(\Delta) d\Delta.$$

La probabilità che una pallina si trovi nel punto  $x$  al tempo  $t + \tau$  per  $dx$  è:

#### Equazione di Chapman-Kolmogorov

$$P(x, t + \tau) dx = dx \int P(x - \Delta, t) f(\Delta) d\Delta \quad (1.1)$$

L'equazione rappresenta il fatto che il processo in questione è markoviano. Se così non fosse avremmo dovuto mettere a destra più di un tempo (anticipazione di argomento del corso).

Espandendo in serie (di Kramers-Moyal) le probabilità:

$$P(x, t + \tau) = P(x, t) + \frac{\partial P}{\partial t} \tau$$

$$P(x - \Delta, t) = P(x, t) - \frac{\partial P}{\partial x} \Delta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \Delta^2.$$

Si ottiene reinserendo nella 1.1:

#### Equazione del tipo di Fokker-Plank

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \quad (1.2)$$

Nella quale  $D$  vale:

$$D = \frac{1}{2\tau} \langle \Delta^2 \rangle.$$

Integrando la 1.2 si ottiene, con le condizioni iniziali:  $P(x, t=0) = \delta(x)$

$$P(x, t) = \frac{n}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right).$$

### 1.2 Dinamica mesoscopica: Langevin

Possiamo scrivere una equazione del moto per le palline tenendo di conto di:

- Attrito:  $-6\pi\eta d\dot{x}$  (Approccio alla Stokes)
- Impatti random tra le altre particelle:  $\xi$ .

$$m\ddot{x} = -6\pi\eta d\dot{x} + \xi \quad (1.3)$$

Che è un primo esempio di equazione differenziale stocastica.

Se moltiplichiamo a destra e sinistra per  $x$  possiamo riscriverla nel seguente modo:

$$\frac{1}{2}m \frac{d^2}{dt^2} (x^2) - m\dot{x}^2 = -3\pi\eta d \frac{d}{dt} (x^2) + \xi x.$$

Possiamo mediare su tutte le possibili realizzazioni della  $\xi$ :

$$\frac{m}{2} \frac{d^2}{dt^2} \langle x^2 \rangle - kT = -3\pi\eta d \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle.$$

Si risolve con metodi noti:

$$\frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = \frac{kT}{3\pi\eta d} + C \exp\left(\frac{-6\pi\eta dt}{m}\right).$$

Possiamo buttare il secondo termine ottenendo:

### Equazione di diffusione

$$\langle x^2 \rangle_t - \langle x^2 \rangle_0 = \frac{kT}{3\pi\eta d} \cdot t \quad (1.4)$$

Andando a vedere l'equazione di Fokker-Plank vista sopra si scopre che c'è una relazione tra  $D$  ed i coefficienti di questa equazione:

### Coefficiente di Einstein

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta d}.$$

Detto anche coefficiente di diffusione.

## 1.3 Nascita-Morte: Master equation

Ipotizziamo di avere due specie di animali:

- Conigli:  $x$
- Volpi:  $y$

Tali animali possono essere modellizzati con il seguente modello di nascite/morti:

### Sistema di Lotka-Volterra

$$\begin{cases} x + \text{food} \rightarrow 2x \\ x + y \rightarrow 2y \\ y \rightarrow \text{death} \end{cases}.$$

Possiamo tradurre questo sistema con due equazioni differenziali (ad intuito):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k_1 xc - k_2 xy \\ \frac{dy}{dt} = k_2 xy - k_3 y \end{cases}.$$

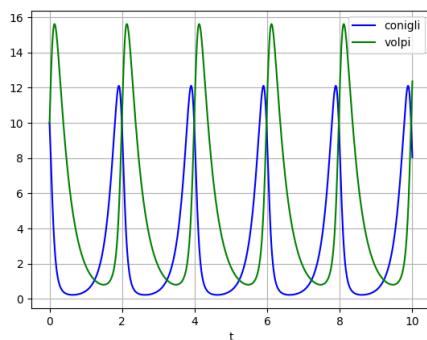


Figura 1.2: Andamento delle soluzioni (Link al codice)

Come possiamo tener di conto delle fluttuazioni presenti in natura? (domanda aperta)

In realtà dovremmo utilizzare un modello discreto essendo il numero di volpi/conigli appartenente ai naturali. Prendiamo la probabilità di avere  $(x, y)$  (lepri, volpi) al tempo  $t$ :  $P(x, y, t)$  (dove adesso  $x, y$  sono discreti). Valgono le seguenti uguaglianze per un certo tempo  $\Delta t$ :

$$\begin{aligned} P_r(x \rightarrow x+1, y)\Delta t &= k_1 cx \Delta t \\ P_r(x \rightarrow x-1, y \rightarrow y+1)\Delta t &= k_2 xy \Delta t \\ P_r(x \rightarrow x, y \rightarrow y-1)\Delta t &= k_3 y \Delta t \\ P(x \rightarrow x, y \rightarrow y)\Delta t &= \Delta t [1 - (k_1 cx + k_2 xy + k_3 y)]. \end{aligned}$$

Dove  $P_r$  è la probabilità di fare la transizione (indipendente da  $t$  per ipotesi). Possiamo trovare l'evoluzione temporale come:

### Esempio di Master Equation

$$\begin{aligned} \frac{P(x, y, t + \Delta t) - P(x, y, t)}{\Delta t} &= \\ P_r(x-1 \rightarrow x, y) \cdot P(x-1, y, t) + & \\ P_r(x+1 \rightarrow x, y-1 \rightarrow y) \cdot P(x+1, y, t) + & \\ P(x \rightarrow x, y+1 \rightarrow y) P(x, y+1, t) + & \\ [P_r(x \rightarrow x, y \rightarrow y) - 1] \cdot P(x, y, t) & \end{aligned} \quad (1.5)$$

## 2 Lezione 2

### 2.1 Esempi di Master equation

- Rumore shot.
- Rumore Jonshon

**Rumore shot** La corrente è composta da elettroni che si spostano, le fluttuazioni del numero di elettroni generano rumore.

Chiamiamo  $t_k$  il tempo di arrivo di un elettrone su una certa sezione ortogonale alla direzione del flusso, si sceglie il seguente modello per la corrente:

$$I(t) = \sum_{t_k} F(t - t_k).$$

$F(t - t_k)$  ha la forma di una scarica di condensatore:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ q \exp(-\alpha t) & t \geq 0 \end{cases}$$

Cerchiamo la Master equation per questo sistema:

$$P(n \rightarrow n+1, \text{in } \Delta t) = \lambda \Delta t P_n(t).$$

Visto che possiamo riscrivere la probabilità di avere  $n$  elettroni al tempo  $t + \Delta t$  come:

$$P_n(t + \Delta t) = (1 - \lambda \Delta t) P_n(t) + \lambda \Delta t \implies$$

$$\frac{P(n, t + \Delta t) - P(n, t)}{\Delta t} = \lambda [P(n-1, t) - P(n, t)].$$

### 2.2 Metodo della funzione generatrice

Per risolvere il problema introduciamo la funzione generatrice  $G(s, t)$ :

$$G(s, t) = \sum_n s^n P(n, t).$$

Sostituendo nella master si ha:

$$\frac{\partial G(s, t)}{\partial t} = \lambda(s-1)G(s, t).$$

$$\implies G(s, t) = \exp(\lambda(s-1)t) G(s, 0).$$

Gli elettroni arrivano per  $t \geq 0$ , infatti si deve avere che:

$$\begin{cases} P(0, 0) = 1 \\ P(n, 0) = 0 \end{cases} \forall n \implies G(s, 0) = 1.$$

$$G(s, t) = e^{\lambda(s-1)t} = \sum_n s^n P(n, t) \implies$$

$$\sum_n e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t s)^n}{n!} = \sum_n s^n P(n, t).$$

In cui si è sfruttato la serie dell'esponenziale  $e^{\lambda st}$ .

### Distribuzione di Poisson

$$P(n, t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Dove  $P(n, t)$  è la probabilità che al tempo  $t$  ci siano  $N(t) = n$  elettroni nel sistema.

Tornando alla corrente dobbiamo trovare un modo per contare gli elettroni:

$$\mu(t) \equiv \frac{dN}{dt} = \delta(t - t_k)$$

Dove  $t_k$  è il tempo (random) in cui arriva un elettrone. Passiamo al continuo nei tempi di arrivo degli elettroni e riscriviamo la corrente come:

$$\begin{aligned} I(t) &= \int dx F(t-x) \mu(x) = \\ &= \int_{-\infty}^t q \exp(-\alpha(t-x)) \frac{dN}{dx} dx. \end{aligned}$$

La difficoltà dell'espressione sta nel fatto che  $N(t)$  è una funzione a salti irregolari.

Differenziando rispetto al tempo  $I(t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= q \exp(-\alpha(t-x)) \dot{N} \Big|_{x=t} + \\ &\quad + \int_{-\infty}^t (-\alpha q) \exp(-\alpha(t-x)) \dot{N} dx = \\ &= q\mu(t) - \alpha I(t). \end{aligned}$$

### Equazione stocastica differenziale

$$\frac{dI}{dt} = -\alpha I(t) + q\mu(t).$$

Il termine in  $\mu$  dipende dalla sequenza casuale di  $\delta$ , ognuna di queste può dare soluzioni differenti.

L'idea per risolvere il problema è di interpolare l'andamento di  $N$  con un moto browniano, prendendo la media e le fluttuazioni del termine stocastico. Essendo il termine in  $\mu$  la derivata di un processo poissoniano abbiamo le seguenti proprietà:

$$\langle \mu dt \rangle = \langle dN \rangle = \lambda dt$$

$$\langle (\lambda dt - \mu dt)^2 \rangle = \lambda dt.$$

Si ha un termine di fluttuazioni  $d\eta$  tale che:

$$dN = \lambda dt + d\eta.$$

Il differenziale della corrente si scrive come:

$$dI(t) = (\lambda q - \alpha I) dt + q d\eta(t).$$

Prendendo la media di questa equazione abbiamo che il termine di fluttuazione ( $Id\eta$ ) media a zero per ipotesi:

$$\frac{d}{dt} \langle I \rangle = \lambda q - \alpha \langle I \rangle.$$

Il risultato stazionario per l'equazione è:

$$\langle I \rangle_\infty = \frac{\lambda q}{\alpha}.$$

Procediamo con una ipotesi sbagliata: trascurare le fluttuazioni nel seguente termine

$$(I + dI)^2 \approx I^2 + 2IdI \quad (2.1)$$

Quindi con il risultato che dovrebbe esser noto sui differenziali:  $d(I^2) = 2IdI$ , se assumiamo questo e moltiplichiamo a destra e sinistra per  $\langle I \rangle$  nella equazione per la corrente otteniamo:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle I^2 \rangle = \lambda q \langle I \rangle - \alpha \langle I^2 \rangle.$$

Che ci porta a concludere che:

$$\langle I^2 \rangle_\infty = \frac{\lambda q}{\alpha} \langle I \rangle_\infty = (\langle I \rangle_\infty)^2.$$

Otteniamo quindi un paradosso, la corrente ha varianza nulla:

$$\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2 = 0.$$

Questo significherebbe che la "larghezza" del moto Browniano è nulla, quindi la corrente sarebbe costante e continua.

L'errore è dovuto al differenziale 2.1, infatti il termine trascurato vale:

$$\langle dI^2 \rangle = \langle q^2 d\eta^2 \rangle = q^2 \lambda dt.$$

Che è anch'esso di prim'ordine nel tempo! L'equazione corretta sarebbe allora:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle I^2 \rangle = \lambda q \langle I \rangle - \alpha \langle I^2 \rangle + q^2 \lambda + O(dt).$$

## 2.3 Correlazione e densità spettrale

Si rimembrano definizioni utili ai fini del corso.

### Correlazione

$$G(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t+s)x(s) ds.$$

Se il sistema è ergodico questa definizione è equivalente a quella mediata sull'Ensemble:

$$G(t) = \langle x(t+s) \cdot x(s) \rangle.$$

### Densità spettrale

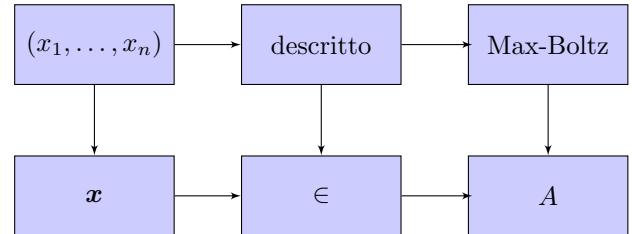
$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} \left| \int_0^T x(t) e^{-i\omega t} dt \right|.$$

Le due definizioni sono legate da una trasformata di Fourier:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int G(\omega) e^{-i\omega t} dt.$$

## 2.4 Probabilità

Possiamo ripensare una definizione assiomatica della probabilità.



Nella quale  $x$  è un evento,  $A$  è un set di eventi possibili appartenente ad  $\Omega$ : l'insieme di tutti gli eventi possibili ( $A \in \Omega$ ).

### Proprietà di $P$

- $P(A) \geq 0$ .
- $P(\Omega) = 1$ .
- $P(\cup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$  con  $A_i$  collezione di insiemi disgiunti numerabile.
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ .
- Se  $\omega \in A \cup B$  con  $A \cup B = \Omega \implies \omega \in A \cap \omega \in B$ .

**Probabilità condizionata** La probabilità che avvenga l'evento  $A$  sapendo che è già avvenuto un evento  $B$  è data da:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Ovviamente si ha anche che:

$$P(A|B)P(B) = P(A)P(B|A).$$

Prendiamo adesso un insieme  $B_i$  di set di eventi:

$$B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i, j$$

$$\bigcup_i B_i = \Omega.$$

Da queste ne deriva che, per il set  $A$ :

$$\bigcup_i (A \cap B_i) = A \cap (\bigcup_i B_i) = A \cap \Omega = A.$$

$$\sum_i P(A \cap B_i) = P(\bigcup_i (A \cap B_i)) = P(A)$$

) Utile per

Per la probabilità congiunta si ha in generale che:

$$\sum_i P(A|B_i)P(B_i) = \sum_i P(A \cap B_i) = P(A).$$

**Eventi indipendenti** Due eventi  $x_A, x_B$  si dicono indipendenti se i set a cui appartengono  $(A, B)$  rispettano la seguente:

$$P(B)P(A|B) = P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Questa fattorizzazione è valida in generale per eventi indipendenti:

$$P\left(\bigcap_i A_i\right) = \prod_i P(A_i).$$

**Valor medio e distribuzione di probabilità** Sia  $R$  una variabile random funzione di un evento  $\omega$ , il valor medio di  $R$  sarà:

$$\langle R \rangle = \sum_{\omega} P(\omega)R(\omega).$$

Possiamo facilmente estendere la definizione al caso continuo, definiamo il set  $A(\omega_0, d\omega_0)$  come l'insieme degli eventi  $\omega$  tali che:

$$\omega \in [\omega_0, \omega_0 + d\omega_0].$$

La densità di probabilità di trovare un evento nel set  $A(\omega_0, d\omega_0)$  è data da:

$$P(\omega_0)d\omega_0 \equiv P[A(\omega_0, d\omega_0)] = P(\omega_0, d\omega_0).$$

Quindi il valor medio di  $R$  nel continuo:

### Valor medio nel continuo

$$\langle R \rangle = \int_{\omega \in \Omega} R(\omega)P(\omega).$$

## 2.5 Funzione caratteristica

Sia  $\mathbf{x}$  una variabile random con distribuzione di probabilità  $P(\mathbf{x})$ , la funzione caratteristica della distribuzione è:

$$\phi(\mathbf{s}) = \int d\mathbf{x} P(\mathbf{x})e^{i\mathbf{x} \cdot \mathbf{s}}.$$

**Esempio 2.5.1** (Distribuzione Gaussiana).

$$P(x) = \frac{e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \implies \phi(s) = e^{-\sigma^2 s^2/2}.$$

**Esempio 2.5.2** (Distribuzione uniforme).

$$P(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{Altrimenti} \end{cases}$$

$$\phi(s) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{ixs} dx = \frac{2}{s} \sin\left(\frac{s}{2}\right).$$

### Proprietà della funzione caratteristica

1.  $|\phi(s)| = 1$ .
2.  $\phi(s)$  è continua.
3. Se  $\exists \langle x^n \rangle$  allora:

$$\langle x^n \rangle = (-i)^n \left. \frac{\partial^n}{\partial s^n} \phi(s) \right|_{s=0}.$$

4. Una sequenza di distribuzioni converge ad una distribuzione limite  $\iff$  converge la sequenza di funzioni caratteristiche.
5. Dato  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  con  $x_i$  indipendenti  $\forall i$  allora:

$$\phi(s_1, s_2, \dots) = \prod_{i=1}^n \phi(s_i)$$

6. Se  $y = \sum_i x_i$  con  $x_i$  indipendenti, allora:

$$\phi(s) = \langle e^{isy} \rangle = \prod_i \phi_i(s).$$

**Esempio 2.5.3.** Se  $y = x_1 + x_2$  ho che:

$$P(y) = \int P(x_1)P(y - x_1)dx_1.$$

Allora per le proprietà della trasformata di una convoluzione:

$$\phi(s) = \phi_1(s)\phi_2(s).$$

### 3 Lezione 3

#### 3.1 Limiti con variabili stocastiche

Un problema al limite con una variabile stocastica  $x$  è un problema del seguente tipo:

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad x_n \in \Omega.$$

Dove  $x_n$  è una serie di funzioni di variabile stocastica  $\omega$ , indicizzata da  $n$  intero.

La variabile stocastica  $\omega$  appartiene all'insieme degli eventi possibili  $\Omega$

**Definizione 3.1.1 (Almost Certain Limit).**

$$\lim_{n \rightarrow \infty}^{\text{ac}} x_n = x \quad \text{se } \forall \omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(\omega) = x.$$

Tale limite rispetta la proprietà:

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(\omega) = x\right) = 1.$$

**Esempio 3.1.1** (Farfalle). Alcune specie di farfalle vivono mediamente un giorno, prendiamo tutte le farfalle viventi che appartengono a questa specie (ed escludiamo quelle che devono ancora nascere).

Se misuriamo la media del cibo consumato da questo campione ogni ora otteniamo una sequenza di numeri casuali. Tuttavia possiamo essere quasi sicuri che tale sequenza dopo 30 ore sarà 0 e rimarrà 0 per sempre. In questo esempio si hanno:

- $x_n$  la sequenza di medie del cibo.
- $\omega$  Il cibo che una farfalla della specie mangia in un'ora.
- $x = 0$ .

**Esempio 3.1.2** (Equazione stocastica). Prendiamo una equazione stocastica differenziale così costruita:

$$dx = -\alpha x dt + b x d\omega.$$

In cui il termine  $d\omega$  è un termine stocastico.

I passi degli  $x_n$  saranno definiti dalla equazione sopra:

$$x_{n+1} = x_n - \alpha x_n \Delta t + b x_n \Delta \omega_n.$$

Se ipotizziamo che la  $x_n$  (variabile composta da termine stocastico e termine temporale) nell'evoluzione si avvicini all'origine ( $x_n = 0$ ) allora il termine stocastico in  $\omega$  non può più contribuire alla equazione, in tal caso la convergenza avviene.

**Definizione 3.1.2 (Mean Square Limit).** Se si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle (x_n(\omega) - x(\omega))^2 \rangle &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int d\omega P(\omega) [x_n(\omega) - x(\omega)]^2 = 0. \end{aligned}$$

Allora:

$$\lim_{n \rightarrow \infty}^{\text{ms}} x_n = x.$$

**Definizione 3.1.3 (Limite in probabilità).**

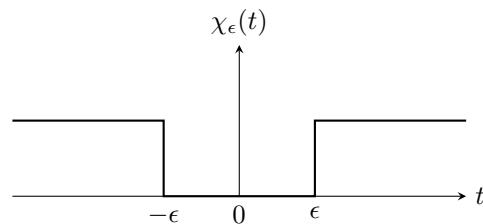
$$\lim_{n \rightarrow \infty}^{\text{P}} x_n = x.$$

se vale che,  $\forall \epsilon > 0$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|x_n - x| > \epsilon) = 0.$$

Per capire cosa rappresenta il termine  $P(|x_n - x| > \epsilon)$  introduciamo la funzione caratteristica:

$$\chi_\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & |t| < \epsilon \\ 1 & |t| > \epsilon \end{cases}.$$



Il termine di probabilità in questione è valutato proprio nel supporto di questa funzione:

$$P(|x_n - x| > \epsilon) = \int d\omega P(\omega) \chi_\epsilon(|x_n - x|).$$

**Definizione 3.1.4 (Limite in distribuzione).** Data una funzione di  $x_n$ :  $f(x_n)$  si ha che questa converge a  $f(x)$  in distribuzione se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty}^{\text{dist}} : \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f(x_n) \rangle = \langle f(x) \rangle.$$

**Esempio 3.1.3** (Moto Browniano e moto a step). Prendiamo due moti con regole stocastiche differenti: un moto Browniano (passo del moto random) ed un moto casuale di passo unitario. Ipotizziamo che il corpo che effettua il moto (nei due casi) parta dall'origine.

Le distribuzioni di probabilità dei fenomeni sono diverse, il valor medio del moto è invece nullo in entrambi i casi. Per questo motivo entrambi i moti tendono a 0 in distribuzione.

Quest'ultimo limite è usato spesso "simulativamente", ovvero per la soluzione di equazioni differenziali stocastiche.

I limiti elencati in questa sezione non sono tutti indipendenti, infatti ( $\implies$  = "implica" ) :

$$\begin{array}{ccc} \lim_{n \rightarrow \infty}^{\text{ac}} & \implies & \lim_{n \rightarrow \infty}^{\text{P}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty}^{\text{ms}} & \implies & \lim_{n \rightarrow \infty}^{\text{P}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty}^{\text{P}} & \implies & \lim_{n \rightarrow \infty}^{\text{dist}} \end{array}$$

### 3.2 Cumulanti della funzione caratteristica.

#### Funzione generatrice dei cumulanti

$$\Phi(s) = \ln(\phi(s)).$$

Si potrebbe dimostrare che la funzione generatrice si esprime in modo generale in funzione di quantità definite come cumulanti:

$$\Phi = \sum_{r=1}^{\infty} i^r \sum_{\{m\}} \langle\langle x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots \rangle\rangle \prod_{i=1}^{\infty} \frac{s_i^{m_i}}{m_i!} \delta(r - \sum_{i=1}^r m_r).$$

Dove i termini tra le parentesi  $\langle\langle x_i^{m_i} \rangle\rangle$  sono i cumulanti. Prendiamo ad esempio lo sviluppo dei primi due:

$$\begin{aligned} \langle\langle x_1 \rangle\rangle &= \langle x_1 \rangle \sim \text{Media} \\ \langle\langle x_1 x_2 \rangle\rangle &= \langle x_1 x_2 \rangle - \langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle \sim \text{Covarianza}. \end{aligned}$$

Consideriamo adesso i cumulanti per una stessa variabile stocastica ( $x_i = x_j \forall i, j$ ), che chiameremo in questo contesto anche **Momenti**.

#### Cumulanti di processo Gaussiano.

I cumulanti per un processo Gaussiano sono tutti nulli per  $n \geq 3$ .

$$\langle\langle x^n \rangle\rangle = 0 \quad \forall n \geq 3.$$

**Esempio 3.2.1** (Cumulante quarto per Gaussiana).

$$\begin{aligned} \langle\langle x^4 \rangle\rangle &= \langle x^4 \rangle - 4 \langle x^3 \rangle \langle x \rangle + \\ &\quad - 3 \langle x^2 \rangle^2 + 12 \langle x^2 \rangle \langle x \rangle^2 - 6 \langle x \rangle^4. \end{aligned}$$

Possiamo dimostrare che questo è nullo valutando la derivata del cumulante terzo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} \left\{ x^3 \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right) \right\} dx = 0.$$

Questa si azzera perché la Gaussiana si annulla per  $x = \pm\infty$ , rendendo esplicita la derivata:

$$\int \left( 3x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) - \frac{x^4}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \right) dx = 0.$$

$$\langle x^4 \rangle = 3\sigma^2 \langle x^2 \rangle = 3(\sigma^2)^2.$$

Inserendo nella equazione per il cumulante quarto si annullano tutti i termini (per semplicità abbiamo preso una gaussiana a media nulla  $\langle x \rangle = 0$ ).

In generale questa cosa non funziona, non è possibile esprimere i cumulanti in funzione di altri cumulanti di ordine inferiore per ogni distribuzione.

### 3.3 Teorema del limite centrale

#### Teorema del limite centrale

La somma di variabili stocastiche aventi media e varianza definita tende ad una Gaussiana.

Sia  $\{x_i\}$  una variabile random con distribuzione di probabilità  $P_i(x_i)$  tale che:

$$\langle x_i \rangle = 0; \quad \text{var}\{x_i^2\} = b_i^2.$$

Il teorema richiede che i primi due momenti siano definiti:

$$s_n = \sum_{i=1}^n x_i; \quad \sigma_n^2 = \sum_{i=1}^n b_i^2.$$

Inoltre le code della  $s_n$  si devono annullare in modo rapido:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=1}^n \int_{|x|>t\sigma_n} dx x_i^2 P_i(x) \right] = 0 \quad \forall t > 0.$$

Se ne conclude che

$$\tilde{s}_n = s_n / \sigma_n \rightarrow G.$$

Con  $G$  Gaussiana di media 0 e varianza 1.

#### Teorema di Chebyshev

Si cerca di quantificare quanto velocemente una distribuzione tenda alla Gaussiana.

Definiamo la funzione:

$$F_n(t) \equiv \int_{-\infty}^t \tilde{P}(\tilde{s}_n) d\tilde{s}_n; \quad \phi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(t).$$

Dove  $\tilde{P}$  è la distribuzione dei  $\tilde{s}_n$ , che tiene di conto che ad ogni step  $n$  cambia la normalizzazione necessaria per essere una probabilità.

#### Teorema di Chebyshev

$$F_n - \phi(t) \sim \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{Q_1(t)}{n^{1/2}} + \frac{Q_2(t)}{n} + \dots \right].$$

In cui i  $Q_i$  sono i polinomi di Chebyshev-Hermite, legati ai momenti di  $\{x_i\}$ .

Prendiamo ad esempio  $Q_1(t)$ :

$$Q_1(t) \propto \frac{\langle (x - \langle x \rangle)^3 \rangle}{\sigma^3}.$$

la quantità a destra è legata al momento terzo di  $\{x_i\}$ , di conseguenza è nulla nel caso gaussiano (e lo sono anche tutte le restanti  $Q_i$ ).

In conclusione le distribuzioni tendono ad una Gaussiana nelle ipotesi del teorema del limite centrale come  $1/\sqrt{n}$ .

### 3.4 Momenti fattoriali

Momenti fattoriali della distribuzione di Poisson

$$P(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}.$$

#### Momenti fattoriali

$$\langle x^r \rangle_f = \langle x \cdot (x-1) \cdot \dots \cdot (x-r+1) \rangle.$$

**Esempio 3.4.1** (Poisson con  $r=2$ ).

$$\begin{aligned} \langle x(x-1) \rangle &= \left\langle x(x-1)e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \right\rangle = \\ &= \lambda^2 \left\langle e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} \right\rangle = \lambda^2. \end{aligned}$$

Iterando questa procedura si ottiene:

#### Momenti fattoriali per distribuzione di Poisson

$$\langle x^r \rangle_f = \lambda^r.$$

**Funzione generatrice generalizzata.**

#### Funzione generatrice

$$G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n P(n) = \langle s^n \rangle.$$

Possiamo ottenere la  $G(s)$  a partire dalla funzione caratteristica:

$$G(s) = \phi(-i \ln s).$$

Grazie a questa possiamo esprimere i cumulantifattoriali nel seguente modo:

$$\langle x^n \rangle_f = \left[ \frac{\partial^n}{\partial s^n} G(s) \right].$$

#### Funzione generatrice dei cumulantifattoriali

$$g(s) \equiv \ln(G(s)) = \sum_{r=1}^{\infty} \langle \langle x^r \rangle \rangle_f \frac{(s-1)^r}{r!}.$$

**Esempio 3.4.2** (Funzione generatrice per Poissoniana).

$$\begin{aligned} G(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} s^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = \\ &= e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s\lambda)^n}{n!} = e^{\lambda(s-1)}. \end{aligned}$$

Per Poisson si ha quindi che:

$$\langle \langle x^r \rangle \rangle_f = 0 \quad \forall r \geq 2.$$

### 3.5 Processi stazionari e processi di Markov

#### Probabilità di un processo

Prendiamo un oggetto vittima di un processo stocastico dipendente dal tempo e mettiamoci in un sistema di coordinate spaziali  $x$ .

Possiamo descrivere completamente il processo con:

$$P_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n).$$

Ovvero la densità di probabilità che l'oggetto si trovi in  $x_1$  al tempo  $t_1$ ,  $x_2$  al tempo  $t_2$  etc...

Scegliamo una base spazio temporale  $(\bar{x} = (x, t))$ , le proprietà di cui gode questa quantità sono:

- $P_n \geq 0$ .
- Simmetria:  $P_n(\bar{x}_1; \bar{x}_2; \dots) = P_n(\bar{x}_2; \bar{x}_1)$ .
- Completezza:

$$\int P_n(\bar{x}_1; \dots; \bar{x}_n) dx_n = P_{n-1}(\bar{x}_1; \dots; \bar{x}_{n-1}).$$

- Norma:  $\int P_1(\bar{x}_1) d\bar{x}_1 = 1$

Possiamo calcolare il valor medio di una quantità nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \langle x(t_1) \cdot \dots \cdot x(t_n) \rangle &= \\ &= \int_{R^n} dx_1 \dots dx_n P_n(\bar{x}_1; \dots; \bar{x}_n) x_1 \dots x_n. \end{aligned}$$

#### Processi stazionari

Un processo si dice stazionario se  $\forall n$ :

$$\begin{aligned} P_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) &= \\ &= P_n(x_1, t_1 + \Delta t; \dots; x_n, t_n + \Delta t). \end{aligned}$$

#### Probabilità condizionata

Ipotizziamo che all'istante  $t_i$  l'oggetto si trovi in  $x \in [x_i, x_i + \Delta x]$  (con  $i \in [1, k]$ ).

Allora la probabilità che l'oggetto si trovi in un istante successivo  $t_{k+l}$  in un intervallo  $[x_{k+l}, x_{k+l} + \Delta x]$  è:

$$\begin{aligned} P_{k+l}(\bar{x}_1; \dots; \bar{x}_{k+l}) &= \\ &= P_k(\bar{x}_1; \dots; \bar{x}_k) \cdot P_{l|k}(\bar{x}_{k+1}; \dots; \bar{x}_{k+l} | \bar{x}_1; \dots; \bar{x}_k). \end{aligned}$$

Con  $P_{l|k}$  probabilità di trovarsi in un intorno di  $x_{k+l}$  condizionata dai primi  $k$  step.

**Esempio 3.5.1** (Prob. condizionata dal primo step).

$$P_2(\bar{x}_1; \bar{x}_2) = P_{1|1}(\bar{x}_2 | \bar{x}_1) \cdot P_1(\bar{x}_1).$$

#### Processi di Markov

Un processo si dice Markoviano se:

$$P_{1|n-1}(\bar{x}_n | \bar{x}_1; \dots; \bar{x}_{n-1}) = P_{1|1}(\bar{x}_n | \bar{x}_{n-1}).$$

Nel caso dei processi di Markov basta conoscere  $P_1$  e  $P_{1|1}$  per conoscere l'intero processo.

### 3.6 Equazione di Chapman - Kolmogorov

L'idea per l'equazione è data dall'identità:

$$\sum_B^{\Omega} P(A \cap B \cap C) = P(A \cap C).$$

Prendiamo un processo Markoviano, l'equazione per la  $P_3$  è:

$$P_3(\bar{x}_1; \bar{x}_2; \bar{x}_3) = P_{1|1}(\bar{x}_3|\bar{x}_2)P_{1|1}(\bar{x}_2|\bar{x}_1)P_1(\bar{x}_1).$$

Integrando rispetto alla coord.  $x_2$  otteniamo a sinistra la  $P_2(\bar{x}_1; \bar{x}_3)$  (per la completezza delle  $P_n$ ) , che può essere riscritta come:

$$P_2(\bar{x}_1; \bar{x}_3) = P_{1|1}(\bar{x}_3|\bar{x}_1)P_1(\bar{x}_1).$$

Il risultato è l'equazione di Chapman-Kolmogorov.

$$P_{1|1}(x_3|x_1) = \int P_{1|1}(x_3|x_2)P_{1|1}(x_2|x_1)dx_2.$$

## 4 Lezione 4

### 4.1 Continuità dei processi stocastici

**Definizione 4.1.1** (Processo continuo). Un processo stocastico si dice continuo se  $\forall \epsilon > 0$ :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Sigma_\epsilon} dx_1 P_{1|1}(x_1, t + \Delta t | x_2, t) = 0.$$

$$\Sigma_\epsilon : \{|x_1 - x_2| > \epsilon\}.$$

In pratica serve che il cammino descritto dal processo sia continuo, la distanza tra due punti del processo deve andare a 0 più rapidamente di  $\Delta t$ .

I processi Markoviani non sono necessariamente continui:

**Esempio 4.1.1** (Pollaio). Il numero di uova prodotte in un pollaio in un giorno può essere schematizzato come processo markoviano: dipende soltanto dal numero di galline presenti nel pollaio il giorno prima. Questo processo non può essere continuo: è possibile mandare il  $\Delta t$  a 0 ma non possiamo fare altrettanto con  $x$ , ovvero il numero di uova. Infatti in questo caso il numero di uova è discreto.

In generale i processi a salti discreti non possono essere continui.

**Esempio 4.1.2** (Moto Browniano). Calcoliamo l'equivalente della  $P_{1|1}$  nel moto Browniano, nella lezione 1 abbiamo visto che:

$$P(x, t + \Delta t) = \int P(x - \Delta t, t) f(\Delta) d\Delta.$$

Con  $f(\Delta)$ : probabilità di fare un salto lungo  $\Delta$  nell'intervallo di tempo  $\Delta t$ .

Definendo la quantità  $y = x - \Delta$  intuitivamente la  $f(\Delta)$  corrisponde alla probabilità condizionata:

$$f(\Delta) = P_{1|1}(x, t + \Delta t | y, t).$$

Essendo un oggetto Gaussiano la  $f(\Delta)$  avrà la seguente struttura:

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D \Delta t}} \exp\left(-\frac{1}{4D\Delta t} (x - y)^2\right).$$

In altre parole  $f(\Delta)$  è proprio un propagatore. Inserendo questo oggetto nella definizione di processo continuo si vede che l'uguaglianza al limite è soddisfatta, quindi il moto Browniano è un processo continuo.

**Esempio 4.1.3** (Moto di Cauchy). Il moto di Cauchy presenta una struttura per la probabilità di salto (condizionata) del seguente tipo:

$$P_{1|1}(x, t + \Delta t | z, t) = \frac{\Delta t}{\pi} \frac{1}{(x - z)^2 + (\Delta t)^2}.$$

E si può dimostrare che:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Sigma_\epsilon} \frac{\Delta t dx}{\pi [(x - z)^2 + (\Delta t)^2]} = \infty.$$

Di conseguenza il moto di Cauchy non è continuo.

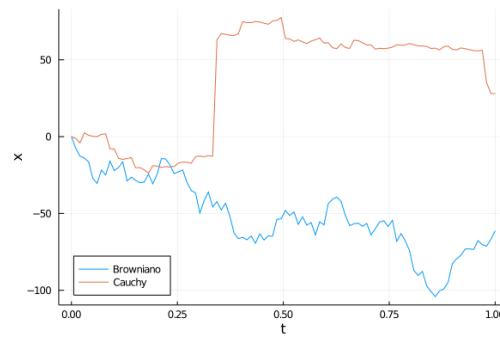


Figura 1.3: Processo di Brown e Processo di Cauchy a confronto  
Link al codice in Julia).

### 4.2 Forma differenziale di Chapman - Kolmogorov

Prendiamo un processo stocastico scomponibile<sup>1</sup> in una parte continua ed una non continua.

Si può dimostrare che un processo di questo tipo è descritto dalla seguente forma differenziale:

#### Forma di Chapman-Kolmogorov

$$\partial_t P(\mathbf{z}, t | \mathbf{y}, t') = -\Gamma + \Phi \quad (4.1)$$

In cui  $\Gamma$  è la parte contenente il processo continuo:

$$\begin{aligned} \Gamma = \sum_i \partial_{z_i} [A_i(\mathbf{z}, t) P(\mathbf{z}, t | \mathbf{y}, t')] + \\ + \sum_{i,J} \frac{1}{2} \partial_{z_i Z_J}^2 [B_{iJ}(z, t) P(\mathbf{z}, t | \mathbf{y}, t')]. \end{aligned}$$

Qui abbiamo un primo termine "deterministico" (con la  $A$ ) che determina soltanto uno spostamento dell'oggetto ed un termine di diffusione (quello in  $B$ ).

Nella  $\Phi$  abbiamo invece il processo discontinuo:

$$\Phi = \int d\mathbf{x} [\omega(\mathbf{z} | \mathbf{x}, t) P(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, t') + \\ - \omega(\mathbf{x} | \mathbf{z}, t) P(\mathbf{z}, t | \mathbf{y}, t')].$$

Il termine  $\Phi$  somiglia molto al termine della equazione di Volterra che abbiamo visto nella prima lezione (prob. di trovarsi in  $\mathbf{z}$  è data dalla probabilità di finire in  $\mathbf{z}$  da una posizione  $\mathbf{x}$  diminuito la prob. di scappare in  $\mathbf{x}$  dalla posizione  $\mathbf{z}$ ).

La potenza della equazione è la sua generalità: se sappiamo che un processo è Markoviano (magari per la fisica che ci sta dietro) allora l'equazione di evoluzione delle prob. nel tempo sarà necessariamente quella sopra.

**Esempio 4.2.1** ( $A = B = 0$ , quindi  $\Gamma = 0$ ).

$$\partial_t P = \Phi.$$

Considerando il rapporto incrementale con passo  $\Delta t$ :

$$P(z, t + \Delta t | y, t) = P(z, t | y, t) + \Delta t \cdot \Phi.$$

<sup>1</sup>Ipotesi per cui si può scomporre sul Gardiner

Sfruttiamo la proprietà ovvia:

$$P(\mathbf{z}, t | \mathbf{t}, t) = \delta(\mathbf{y} - \mathbf{z}).$$

Allora possiamo sviluppare l'espressione con  $\Delta t$  che tende a 0 (mettiamoci in una dimensione per semplicità):

### Soluzione della forma diff. con termini continui

$$\begin{aligned} P(z, t + \Delta t | y, t) &= \\ &= \delta(z - y) \left[ 1 - \Delta t \int dx \omega(x|z) \right] + \Delta t \cdot \omega(z|y). \end{aligned}$$

## 4.3 Processo di Wiener

Un processo di Wiener è modellato dalla seguente equazione:

### Equazione per processo di Wiener

L'equazione che regola il processo di Wiener è una Fokker-Planck:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\omega, t | \omega_0, t_0) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} P(\omega, t | \omega_0, t_0).$$

Inoltre deve esser rispettata la condizione iniziale:

$$P(\omega, t_0 | \omega_0, t_0) = \delta(\omega - \omega_0).$$

Il processo si può risolvere utilizzando la funzione caratteristica:

$$\phi(s, t) = \int d\omega P(\omega, t | \omega_0, t_0) e^{is\omega}.$$

Sfruttando le regole della trasformata possiamo riscrivere l'equazione del processo come:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{1}{2} s^2 \phi.$$

$$\phi(s, t_0) = \exp(is\omega_0).$$

La soluzione è nota:

$$\begin{aligned} \phi(s) &= \exp\left(-\frac{1}{2}s^2(t-t_0)\right) \phi(s, t_0) = \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}s^2(t-t_0) + is\omega_0\right). \end{aligned}$$

Visto che l'antitrasformata di una Gaussiana è una Gaussiana abbiamo la soluzione nello spazio reale:

### Soluzione del processo di Wiener

$$P(\omega, t | \omega_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}} \exp\left(-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2(t-t_0)}\right)$$

Il processo che abbiamo ottenuto è Gaussiano:

$$\langle \omega \rangle = \omega_0.$$

$$\langle (\omega - \omega_0)^2 \rangle = t - t_0.$$

## Proprietà dei processi di Wiener

- È continuo.
- Non è differenziabile,  $\forall k$ :

$$\begin{aligned} \text{Prob}\left(\frac{|\omega(t+h) - \omega(t)|}{h} > k\right) &= \\ &= 2 \int_{kh}^{\infty} d\omega \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} e^{-\omega^2/2h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1. \end{aligned}$$

- Gli incrementi sono indipendenti:

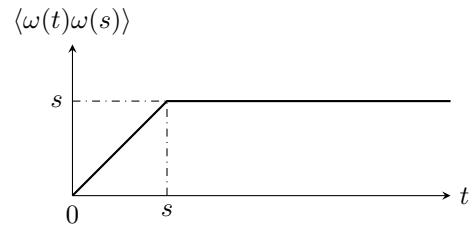
$$\begin{aligned} P(\omega_2, t_2; \omega_1, t_1; \omega_0, t_0) &= \\ &= P(\omega_2, t_2 | \omega_1, t_1) P(\omega_1, t_1 | \omega_0, t_0) P(\omega_0, t_0). \end{aligned}$$

Il primo termine dopo l'uguale non dipende da  $(\omega_0, t_0)$  perché il processo è Markoviano.

- La correlazione:

$$\langle \omega(t) \omega(s) | [\omega_0, t_0] \rangle = \min(t - t_0, s - s_0) + \omega_0^2.$$

Che nel caso particolare in cui  $\omega_0 = t_0 = 0$  si ha  $\langle \omega(t) \omega(s) \rangle = s$  se  $t > s$ .



## 5 Lezione 5

### 5.1 Processo di Ornstein - Uhlenbeck

Prendiamo in considerazione altri esempi di processi di Markov.

#### Equazione di Ornstein - Uhlenbeck

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(kxP) + \frac{1}{2}D \frac{\partial^2}{\partial x^2}P.$$

#### Soluzione stazionaria

Cerchiamo intanto la soluzione con ( $\partial_t P = 0$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( kxP + \frac{1}{2}D \frac{\partial}{\partial x}P \right) &= 0 \implies \\ \implies \left[ kxP + \frac{1}{2}D \frac{\partial}{\partial x}P \right]_{-\infty}^x &= J. \end{aligned}$$

Se ipotizziamo che:

1.  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} P(x, t|x_0, t_0) = 0$
2.  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} xP(x, t|x_0, t_0) = 0$ .

Allora possiamo affermare che la corrente  $J = 0$  per  $x \rightarrow \infty$ . Si risolve allora l'equazione differenziale:

#### Soluzione stazionaria

$$P_s(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi D/k}} e^{-kx^2/D} \quad (5.1)$$

#### Soluzione dipendente dal tempo.

Per la dipendenza temporale sfruttiamo la funzione caratteristica  $\phi(s)$ .

$$\phi(s) = \int e^{isx} P(x, t|x_0, t_0) dx.$$

L'equazione del processo diventa:

$$\partial_t \phi = -ks \partial_s \phi - \frac{1}{2}Ds^2 \phi.$$

Questa equazione alle derivate parziali può essere risolta tramite il metodo delle caratteristiche (5.A).

L'unico ostacolo all'utilizzo del metodo è il secondo termine dopo l'uguale (contiene la soluzione), vorremmo ricondurci all'equazione in forma standard.

Facciamo allora il cambio di variabile:

$$g = \ln \phi.$$

Visto che:

$$\partial_t g = \frac{\partial_t \phi}{\phi} \quad \partial_s g = \frac{\partial_s \phi}{\phi}.$$

Si ha una equazione in  $g$  più maneggevole:

$$\partial_t g + ks \partial_s g = -\frac{1}{2}Ds^2.$$

Questa è risolubile con il metodo delle caratteristiche:

$$(a, b, c) \rightarrow (1, ks, -\frac{1}{2}Ds^2).$$

Parametrizzando con  $\eta$  abbiamo le equazioni caratteristiche:

$$\frac{dt}{d\eta} = 1 \quad \frac{ds}{d\eta} = ks \quad \frac{dg}{d\eta} = -\frac{1}{2}Ds^2.$$

Possiamo risolvere per rimuovere  $\eta$ :

$$\begin{cases} 1. & dt = \frac{ds}{ks} \\ 2. & \frac{ds}{ks} = -\frac{dg}{1/2Ds^2} \end{cases}$$

Integrando queste equazioni escono fuori delle costanti, ridefinendo tali costanti come funzioni ( $u_1, u_2$ ) saremo in grado di risalire alla  $\phi$ .

Risolviamo la 1:

$$c_1 = t - \frac{1}{k} \ln(s) \implies c'_1 = \exp \left( t - \frac{1}{k} \ln(s) \right) = se^{-kt}.$$

Quindi definiamo la prima soluzione come  $u_1$ :

$$u_1(t, s) = se^{-kt} \quad (5.2)$$

Passiamo alla equazione 2 del sistema, integrando si ottiene:

$$c_2 = \frac{s^2 D}{4k} + g.$$

Ricordando che  $g = \ln \phi$  possiamo definire anche un'altra funzione a partire dalla costante  $c_2$  (si fa l'esponenziale della 2):

$$u_2(t, s) = \phi \exp \left( \frac{Ds^2}{4k} \right) \quad (5.3)$$

Riscrivendo la 5.3 isolando  $\phi$  si ha:

$$\phi = u_2 \exp \left( -\frac{Ds^2}{4k} \right).$$

Visto che  $u_1$  e  $u_2$  sono entrambe costanti collegate dalle equazioni caratteristiche sarà vero che:

$$u_2 = f(u_1).$$

#### Soluzione dipendente dal tempo per $\phi$

$$\phi = f(se^{-kt}) \exp \left( -\frac{Ds^2}{4k} \right) \quad (5.4)$$

#### Condizioni al contorno

$$P(x, 0|x_0, 0) = \delta(x - x_0) \implies \phi(s, 0) = e^{ix_0 s}.$$

Prendiamo l'equazione 5.4 ed invertiamola per trovare la  $f(s)$  ( $t = 0$ ) inserendo anche la condizione iniziale:

$$f(s) = e^{ix_0 s} \exp \left( \frac{Ds^2}{4k} \right).$$

Per reinserire il tempo e trovare la soluzione con queste condizioni iniziali basta fare la sostituzione:

$$s \rightarrow se^{-kt}.$$

### Soluzione con condizione iniziale $\delta$

$$\phi(s, t) = \exp \left[ -\frac{Ds^2}{4k} (1 - e^{-2kt}) + isx_0 e^{-kt} \right] \quad (5.5)$$

A questo punto possiamo tornare indietro con una antitrasformata, altrimenti possiamo ricavare i momenti sfruttando le proprietà di  $\phi$ :

$$\langle x(t) \rangle = i \frac{\partial \phi}{\partial s} \Big|_{s=0} = x_0 e^{-kt}.$$

$$\begin{aligned} \text{var}(x(t)) &= \langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2 = \\ &= -1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} \Big|_{s=0} - \langle x \rangle^2 = \\ &= \frac{D}{2k} (1 - e^{-2kt}). \end{aligned}$$

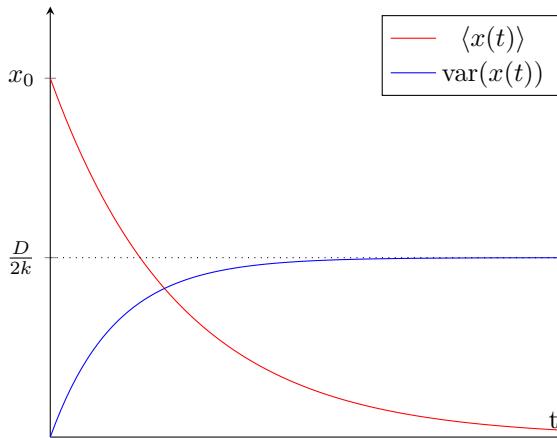


Figura 1.4: Andamento della media e della varianza per il processo di Ornstein-Uhlenbeck.

I risultati ottenuti sono conformi con le condizioni iniziali inserite.

**Media** all'istante iniziale tutti i camminatori sono in  $x_0$  (grazie alla  $\delta$ ).

Quando il processo fa evolvere le posizioni dei camminatori allora i camminatori si allontanano da  $x_0$  andando verso l'origine, questo è conforme con quanto visto per la soluzione stazionaria: una Gaussiana centrata nello 0.

**Varianza** Nell'istante iniziale, quando tutti i camminatori sono nel punto  $x_0$ , la varianza è nulla, questa si stabilizza nel tempo al valore dato dalla Gaussiana nelle condizioni stazionarie.

### Calcolo delle correlazioni

$$\begin{aligned} \langle x(t_1)x(t_2) | [x_0, t_0] \rangle &= \\ &= \int dx_1 dx_2 P(x_1, t_1; x_2, t_2; x_0, t_0) x_1 x_2 = \\ &= \int dx_1 dx_2 x_1 x_2 P(\bar{x}_1, \bar{x}_2) P(\bar{x}_2, \bar{x}_0). \end{aligned}$$

In cui si è assunto il processo Markoviano e la gerarchia temporale:  $t_1 > t_2 > t_0$ .

Se il processo ha raggiunto la stazionarietà ( $t_0 \rightarrow \infty$ ) allora conosciamo la forma del propagatore:

$$P(x_2|x_0) \sim \exp \left( -k \frac{x_2^2}{D} \right).$$

Risolvendo con questa si ottiene:

### Correlazione temporale a due

$$\langle x(t)x(s) \rangle \sim \frac{D}{2k} \exp(-k|t-s|).$$

La correlazione temporale delle posizioni decade esponenzialmente.

### Ornstein-Uhlenback come modello per rumore realistico.

Facendo la trasformata di Fourier della funzione di Correlazione si ottiene una Lorenziana:

$$\begin{aligned} S_{OU}(\omega) &= \mathcal{F}(\langle x(t)x(s) \rangle) = \\ &= \frac{1}{\omega^2/k^2 + 1}. \end{aligned}$$

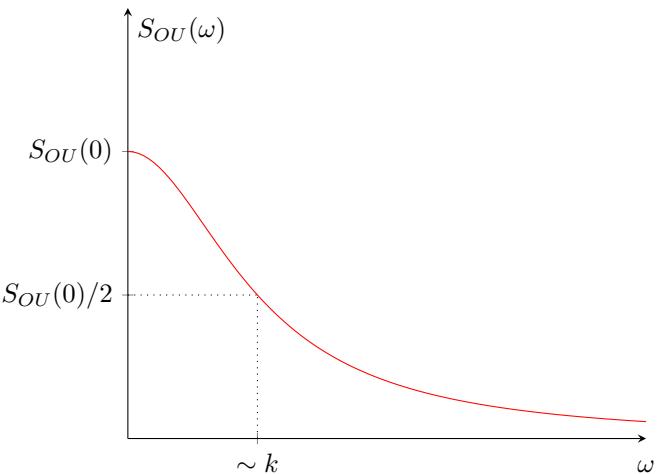


Figura 1.5: Andamento della trasformata della correlazione per il processo di Ornstein-Uhlenbeck.

Questo è esattamente quello che ci aspettiamo da un rumore realistico: il rumore ha una frequenza di cut-off dettata da una Lorenziana.

Il cut-off è dovuto al fatto che le cose non possono muoversi infinitamente veloci, l'inerzia dei corpi che partecipano al moto stocastico fissa la frequenza di cut-off.

C'è quindi un tempo caratteristico di osservazione del fenomeno

$$\tau = \frac{1}{k}.$$

Se osserviamo il moto su scale temporali di quest'ordine allora lo spettro degli urti tra i corpi va a zero, questo comporta che il moto oltre queste scale temporali non è più ben descritto dal processo di Wiener.

**Esercizio 5.1.1.** Modifica all'equazione di OU Risolvere l'equazione di Ornstein-Uhlenbeck con l'aggiunta di un termine nella  $\partial_x$ :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}((kx + \alpha)P) + \frac{1}{2}D\frac{\partial^2}{\partial x^2}P.$$

**Soluzione:** Il moto dovrebbe andare a stazionarietà nel punto  $-\alpha/k$ .

## Appendice

### 5.A Metodo delle Caratteristiche.

Supponiamo di avere una PDE della forma:

**PDE per metodo delle caratteristiche**

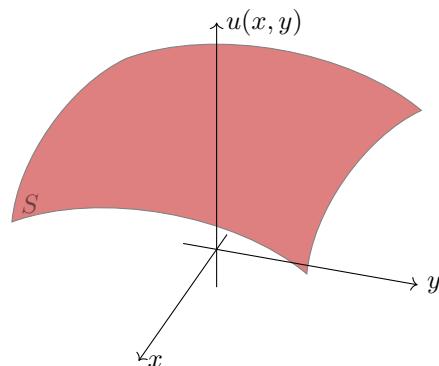
$$a(x, y)\partial_x u + b(x, y)\partial_y u - c(x, y) = 0.$$

Scrivibile anche come:

$$(a, b, c) \cdot (\partial_x u, \partial_y u, -1) = 0 \quad (5.6)$$

Ed una superficie parametrizzata con la soluzione della PDE ( $u(x, y)$ ):

$$S \equiv (x, y, u(x, y)).$$



#### Vettore tangente a $S$

Il vettore  $(a, b, c)$  appartiene al piano tangente di  $S$  in ogni punto  $(x, y, z)$ .

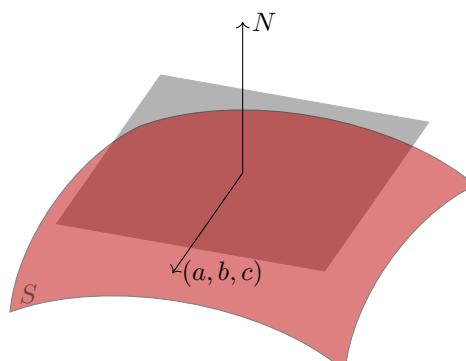
La normale  $N$  alla superficie  $S$  la si trova facendo il gradiente di:

$$\bar{S} = u(x, y) - z.$$

Si ottiene quindi:

$$N = (\partial_x u, \partial_y u, -1).$$

Visto che  $N$  è il secondo termine nella 5.6 si vede che la soluzione è il luogo dei vettori  $(a, b, c)$  ortogonali a  $N$ , quindi tangenti al piano  $S$ .



Quindi la soluzione della PDE è tale per cui il vettore  $(a, b, c)$  sta sul piano tangente.

### Curva caratteristica

Per mappare la soluzione si introduce una curva  $C$  detta curva caratteristica che descrive la superficie.

$$C : \quad C \equiv (x(\eta), y(\eta), z(\eta)).$$

$C$  è una curva parametrica in  $\eta$  localmente tangente a  $(a, b, c)$ .

La condizione di parallelismo implica il seguente sistema:

#### Equazioni Caratteristiche

Sono curve integrali per il campo vettoriale  $(a, b, c)$

$$\begin{cases} a(x(\eta), y(\eta)) = \frac{dx}{d\eta} \\ b(x(\eta), y(\eta)) = \frac{dy}{d\eta} \\ c(x(\eta), y(\eta)) = \frac{dz}{d\eta} \end{cases}$$

Queste equazioni risolvono la PDE.

**Esempio 5.A.1** (Equazione del trasporto.).

$$u_t + a \cdot u_x = 0.$$

In questo caso si ha  $(a, b, c) \rightarrow (a, 1, 0)$ , quindi:

$$\frac{dx}{d\eta} = a \quad \frac{dt}{d\eta} = 1 \quad \frac{dz}{d\eta} = 0$$

Passiamo alla risoluzione:

$$\begin{cases} x(\eta) = a\eta + c_1 \\ t(\eta) = c_2 + \eta \\ z(\eta) = c_3 \end{cases} \implies \begin{cases} x - at = x_0 \\ z = k \end{cases}$$

In cui si è effettuata dell'algebra per eliminare  $\eta$  nel primo sistema.

- La funzione che risolve il sistema di destra è la soluzione dell'equazione del trasporto.
- Graficamente le funzioni che risolvono sono delle rette con  $z$  costante, l'unione di queste rette rappresenta  $S$ .
- Abbiamo ottenuto un fascio di soluzioni poiché non abbiamo imposto alcuna soluzione al contorno.

In conclusione  $z$  dovrà essere funzione di  $x - at$ , quindi la soluzione generale sarà una funzione del tipo:

$$z(x, t) = f(x - at) \equiv u(x, t).$$

Supponiamo che all'istante iniziale la soluzione fosse una gaussiana:

$$f(x, t=0) = e^{-x^2}.$$

Quindi si ha che anche la soluzione a  $t = 0$  è una gaussiana:

$$u(x, t=0) = e^{-x^2}.$$

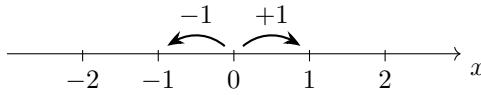
Ed introducendo il tempo la soluzione diventa semplicemente:

$$u(x, t) = e^{-(x-at)^2}.$$

## 6 Lezione 6

### 6.1 Modelli semplici di Random Walk

Mettiamoci in una situazione unidimensionale, con un oggetto che può fare salti di ampiezza unitaria.



Possiamo analizzare due modelli di RW:

1. Salto di  $\pm 1$  ad un tempo casuale.
2. Salto di  $\pm 1$  ad un tempo  $\tau$  fissato.

Entrambi i casi descrivono processi Markoviani.

#### 1. Salto ad un tempo random.

L'equazione di Chapman-Kolmogorov in forma differenziale per il processo si scrive come:

$$\partial_t P(n, t|n', t') = [\omega(n|n+1, t)P(n+1, t|n', t') + \omega(n|n-1, t)P(n-1, t|n', t') + -2P(n, t|n', t')].$$

Facciamo chiarezza sui termini in equazione, prendiamo il primo nella parentesi quadra dopo l'uguale:

$$\omega(n|n+1, t)P(n+1, t|n', t').$$

Questo indica la probabilità di essere in  $n+1$  (descritta dal termine  $P$ ) e di fare un salto all'indietro (descritta dalla probabilità corrispondente  $\omega$ ).

L'ultimo termine in parentesi indica la probabilità di essere in  $n$  al tempo  $t$ , se ci troviamo in tal punto allora allo step successivo usciamo sicuramente fuori per costruzione del moto.

Imponendo che il rate di salto in avanti sia uguale a quello di salto all'indietro:

$$\omega(n+1|n, t) = \omega(n-1|n, t) \equiv d \quad (6.1)$$

Possiamo semplificare l'equazione del processo:

#### Chapman-Kolmogorov per RW 1.

$$\begin{aligned} \partial_t P(n, t|n', t') = d & [ P(n+1, t|n', t') + \\ & + P(n-1, t|n', t') + \\ & - 2P(n, t|n', t') ]. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Si risolve in trasformata:

$$G(s, t) = \langle e^{isn} \rangle = \sum_n^\infty P(n, t|n', t') e^{isn}.$$

Quando abbiamo un termine del tipo  $P(n \pm 1|n', t')$  basta scrivere:

$$e^{isn} P(n \pm 1, t|n', t') = e^{\mp is} e^{is(n \pm 1)} P(n \pm 1, t|n', t').$$

Quindi inserendo nella equazione di CK:

$$\partial_t G(s, t) = d(e^{-is} + e^{is} - 2) G(s, t).$$

Si risolve per  $G(s, t)$ :

$$G(s, t) = \exp [(e^{is} + e^{-is} - 2) td] G(s, 0).$$

Andando a cercare la soluzione stazionaria si ha che:

$$t \rightarrow \infty \implies s \rightarrow 0.$$

Questo per le relazioni tra spazio reale e trasformata: in sostanza stiamo assumendo i camminatori come oggetti reali, quindi se  $\omega \rightarrow 0$  dev'essere necessariamente che  $s \rightarrow 0$ :

$$\omega \sim sc.$$

Tornando alla  $G$  sviluppando si ottiene una Gaussiana:

$$G(s, t) = \exp(-s^2 td).$$

#### 2. Salto ad un tempo $\tau$ fissato

In questo caso il tempo è una variabile discreta di passo  $\tau$ .

#### Equazione per il propagatore nel RW 2

$$\begin{aligned} P(n, (N+1)\tau | n', N'\tau) = & \\ & \frac{1}{2} [P(n+1, N\tau | n', N'\tau) + \\ & + P(n-1, N\tau | n', N'\tau)]. \end{aligned} \quad (6.3)$$

#### RW1 e RW2 equivalenti per scale piccole.

Se  $\tau$  è piccolo rispetto a  $N\tau$  il caso (2) diventa equivalente al caso (1).

Definiamo il tempo  $t' = N'\tau$ :

$$\begin{aligned} P(n, (N+1)\tau | n', N'\tau) \simeq & P(n, N\tau | n', t') + \\ & + \tau \partial_t P(n, N\tau | n', t'). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Si procede definendo:

$$d \equiv 1/2\tau.$$

Possiamo ottenere l'equazione 6.2 sostituendo al primo termine della 6.3 il secondo della 6.4.

Risolviamo adesso la 6.3 con il metodo della funzione caratteristica ( $G(s, t) = \langle e^{its} \rangle$ ):

$$G(s, (N+1)\tau) = \frac{1}{2} (e^{is} + e^{-is}) G(s, N\tau).$$

Come condizione iniziale si impone che  $G(s, 0) = 1$ . In questo modo l'equazione in  $G$  è una ricorsiva in  $N$  che ha soluzione:

$$G(s, N\tau) = \left( \frac{1}{2} (e^{is} + e^{-is}) \right)^N.$$

A questo punto possiamo vedere che se  $N \rightarrow \infty$  si ottiene una soluzione Gaussiana come nell'RW1 (mandare  $N \rightarrow \infty$  significa limite stazionario).

$$\begin{cases} \tau N = t \\ d = \frac{1}{2\tau} \end{cases} \implies \frac{td}{N} = \frac{1}{2}.$$

$$G(s, N\tau) = \left[ 1 + \frac{td}{N} (e^{is} + e^{-is} - 2) \right]^N.$$

Sfruttando il limite notevole:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{\alpha}{x} \right)^x = e^\alpha.$$

Si ottiene:

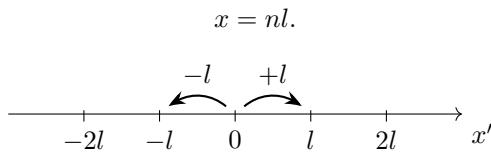
$$G(s, N\tau) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} G(s, t) = \exp [td(e^{is} + e^{-is} - 2)].$$

In conclusione è come se, aspettando abbastanza a lungo, la caoticità sul salto di  $\pm 1$  contagiasse il clock di salto  $\tau$  rendendo anch'esso caotico come nel caso RW1.

Nel proseguo distingueremo i due casi solo dove necessario vista la loro equivalenza a stazionarietà.

### Limite al continuo nei salti

Definiamo lo spazio percorso dal camminatore dopo  $n$  step in un reticolo di passo  $l$ :



Quello che faremo sarà far il limite per  $l \rightarrow 0$ . La trasformata si modifica per questo caso nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \phi(s, t) &= \langle e^{isx} \rangle = G(ls, t) = \\ &= \exp [(e^{ils} + e^{-ils} - 2) td]. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Dove ricordiamo che  $d$  è il rate del processo definito dalla 6.1.

Si studia adesso anche il caso stazionario, quindi dobbiamo effettuare entrambi i limiti:

$$\begin{aligned} l &\rightarrow 0 \\ \tau &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Sviluppando nell'esponenziale della 6.5 ci si rende conto che sopravvive solo il termine:

$$\sim \exp (-s^2 l^2 td).$$

Per questo è necessario che:

$$D = \lim_{\substack{l \rightarrow 0 \\ d \rightarrow \infty}} l^2 d = \text{Finito.}$$

Fare il limite per il Rate  $d \rightarrow \infty$  è lo stesso che fare il limite per  $\tau \rightarrow 0$  poiché per definizione  $d = 1/\tau$ .

In conclusione otteniamo un andamento per  $\phi$  Gaussiano:

**Funzione caratteristica per RW nel limite continuo**

$$\phi(s, t) = \exp (-s^2 t D).$$

Quindi abbiamo anche che:

$$\langle x^2 \rangle \sim 2tD \quad (6.6)$$

### Random Walk e processi di Wiener

Si può dimostrare che per  $l \rightarrow 0$  l'equazione che regola il propagatore  $P$  è una Fokker-Plank (che regola anche i processi di Wiener).

Partiamo dalla Master Equation già scritta sopra:

$$d_t P(n) = d(P(n+1) + P(n-1) - 2P(n)).$$

Sviluppando in  $l = 0$  si ha:

$$\begin{aligned} P(n+1) &= P(n) + \partial_x P(n)l + \frac{1}{2} \partial_{x^2}^2 l^2 P(n) \\ P(n-1) &= P(n) - \partial_x P(n)l + \frac{1}{2} \partial_{x^2}^2 l^2 P(n). \end{aligned}$$

E reinserendo nella equazione per  $P$  si ha:

$$d_t P(n) = dl^2 \partial_{x^2}^2 P(n).$$

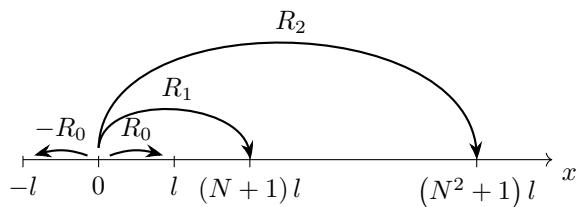
Che è appunto una Fokker-Plank.

## 6.2 Random Walk di Weierstrass

Questo RW è più complesso dei primi due, si basa su alcuni parametri che ne determinano il passo ed il rate:  $(N, b)$ .

Adesso anziché fare salti fissi di  $l$  si fanno salti  $J_n$  con rate  $R_n$  che variano al variare dell'intero  $n$ .  $J_n$  e  $R_n$  sono così definiti:

$$\begin{aligned} J_n &= (N^n + 1)l & R_n &= \frac{\gamma}{b^n} & b, N > 1. \\ n &\in [0 \dots \infty]. \end{aligned}$$



Possiamo considerare  $\gamma$  come il parametro corrispondente a  $d$  della sezione precedente. Quindi ad esempio si può avere:

- Salto di  $l$  con rate  $\gamma$ .
- Salto di  $(N+1)l$  con rate  $\gamma/b$ .
- Salto di  $(N^2+1)l$  con rate  $\gamma/b^2$ .

Come conseguenza salti più lunghi avranno rate più bassi (quindi saranno meno frequenti).

### Master Equation per il RW di Weierstrass

$$\partial_t P(n, t|n', t') = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\gamma}{b^i} [P(n + (N^i + 1), t|n', t') + P(n - (N^i + 1), t|n', t')] + \\ - 2 \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{1}{b^i} \right) P(n, t|n', t').$$

La prima sommatoria tiene di conto di tutti i punti che possono arrivare da distanze diverse. La seconda sommatoria invece tiene conto di quelli che sono già nel punto e scappano via.

L'equazione descrive un processo a salti, di conseguenza il moto in questione è Markoviano. Come per gli altri RW risolviamo con la funzione caratteristica.

$$G(s, t) = \langle e^{isn} \rangle = \sum_n e^{isn} P(n, t|n', t').$$

La master equation si riscrive come:

$$\partial_t G(s, t) = \gamma \left[ e^{is} \left( 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{isN^n}}{b^n} \right) + e^{-is} \left( 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-isN^n}}{b^n} \right) + - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b^n} \right] G(s, t).$$

Possiamo compattare la scrittura con la notazione:

$$f(s) \equiv \left[ e^{is} \left( 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{isN^n}}{b^n} \right) + C.C. - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b^n} \right].$$

Che ci permette di esprimere direttamente il risultato:

#### Funzione caratteristica per il RW di Weierstrass

$$G(s, t) = \exp(t f(s)) G(s, 0).$$

### Limite stazionario

Vediamo se anche in questo caso mandando  $t \rightarrow \infty$  si ottiene una Gaussiana come nei casi RW1 e RW2. Sviluppando la  $G$  per  $s \rightarrow 0$  si ottiene che molti termini polinomiali si ammazzano a vicenda, rimane soltanto la seguente:

$$G(s, t) = \exp \left( -ts^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{N^2}{b} \right)^k \right).$$

All'esponente notiamo che il coefficiente di diffusione  $D$  è una sommatoria:

$$D \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{N^2}{b} \right)^k.$$

Quello che si scopre è quindi che il parametro  $N^2/b$  decide se il processo sarà Gaussiano o no, infatti:

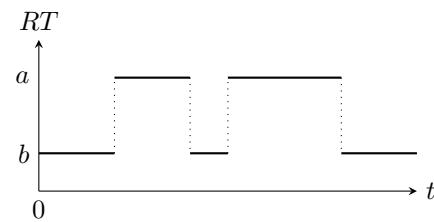
- Se  $N^2/b < 1$  abbiamo una serie geometrica all'esponenziale che ci riconduce ad una forma Gaussiana.
- Se  $N^2/b > 1$  la sommatoria diverge, il processo resta Markoviano ma non vale più il teorema del limite centrale.

Visto che il momento secondo è proporzionale a  $D$  (eq. 6.6) se ne conclude un processo con  $N^2/b > 1$  ha varianza infinita.

La cosa interessante è che abbiamo scoperto un processo random che al limite non diventa una Gaussiana<sup>2</sup>

### 6.3 Random Telegraph

Il RT è un processo random che coinvolge un sistema a due stati (o livelli):



Il processo è descritto dalle equazioni differenziali:

$$\begin{aligned} \partial_t P(a, t|x, t_0) &= -\lambda P(a, t|x, t_0) + \mu P(b, t|x, t_0) \\ \partial_t P(b, t|x, t_0) &= \lambda P(a, t|x, t_0) - \mu P(b, t|x, t_0). \end{aligned}$$

In cui  $x$  può essere  $a$  oppure  $b$ .

In questo caso c'è anche una terza equazione per la normalizzazione del processo:

$$P(a, t|x, t_0) + P(b, t|x, t_0) = 1.$$

Si scelgono le condizioni iniziali:

$$P(x, t_0|x', t_0) = \delta_{xx'}.$$

E quello che si ottiene risolvendo le equazioni differenziali è:

$$P(x', t|x, t_0) = \frac{\omega(x')}{R} + e^{-R(t-t_0)} \left( \frac{\lambda}{R} \delta_{ax} + \frac{\mu}{R} \delta_{bx} \right) \quad (6.7)$$

In cui  $R$  è la somma dei due rate:

$$R = \mu + \lambda.$$

Mentre la funzione  $\omega(x')$  differenzia i casi con  $x' = a$  e  $x' = b$ :

$$\omega(x') = \begin{cases} \lambda & \text{se } x' = a \\ \mu & \text{se } x' = b \end{cases}.$$

Il primo termine nella 6.7 è il termine stazionario. Il secondo termine invece decade esponenzialmente

<sup>2</sup>il momento secondo deve essere definito nelle ipotesi per il teorema del limite centrale...

in  $t$ , il termine con le  $\delta$  a moltiplicare deriva dalle condizioni iniziali inserite.

$$\begin{aligned}\langle x(t) | [x_0, t_0] \rangle &= \sum_{x=a,b} x P(x, t | x_0, t_0) = \\ &= \mathcal{R} + (x - \mathcal{R}) e^{-R(t-t_0)}.\end{aligned}$$

Dove  $\mathcal{R}$  è il Rate ridotto:

$$\mathcal{R} = \frac{a\mu + b\lambda}{\lambda + \mu}; \quad R = \mu + \lambda.$$

Si può anche calcolare la varianza di  $x(t)x(s)$ , senza esplicitare i conti si ha:

$$\begin{aligned}\text{var}(x(t)x(s)) &= \langle x(s)x(t) \rangle - \langle x(s) \rangle \langle x(t) \rangle = \\ &= \frac{(a-b)^2 \lambda \mu}{\mu + \lambda} e^{-R(t-t_0)}.\end{aligned}$$

### RT e OU

Le dipendenze dal tempo di media e varianza calcolate per il processo di Ornstein-Uhlenbeck sono le stesse che per il processo di Random Telegraph.

Per questo motivo spesso si preferisce studiare alcuni processi con il random telegraph che, analiticamente, permette di trovare la soluzione in modo più semplice.

## 6.4 Integrali stocastici

Sia  $x$  una variabile stocastica, il differenziale di questa variabile lo definiamo come:

$$dx = d\omega(t) \quad (6.8)$$

Ipotizziamo che il processo stocastico sia un processo di Wiener, in tal caso:

$$P(d\omega) \sim \exp\left(-\frac{(d\omega)^2}{dt}\right).$$

Con  $dt$  differenziale temporale.

Prendiamo allora una funzione  $G(s)$ , vogliamo definire cosa significa calcolare l'integrale di  $G(s)$  se la misura è stocastica.

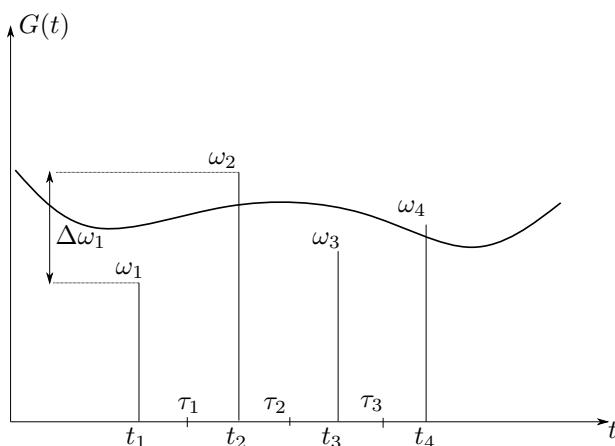


Figura 1.6: Funzione  $G(t)$  con punti stocastici  $\omega_i$ ,  $\Delta\omega_i$  è la distanza sull'asse  $y$  tra il punto  $\omega_{i-1}$  e  $\omega_i$ .

Definiamo allora l'integrale come:

### Integrale stocastico

$$\int_{t_0}^{t_n} G(s) d\omega(s) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i^{\text{ms}} G(\tau_i) [\omega(t_i) - \omega(t_{i-1})]$$

Il valore dell'integrale dipende dalla scelta dei  $\tau_i$ .

È interessante utilizzare come  $G(t)$  il processo di Wiener stesso per vedere cosa succede:

$$G(t) = \omega(t).$$

Inoltre definiamo gli step  $\tau_i$  come:

$$\tau_i = t_{i-1} + \alpha(t_i - t_{i-1}) \quad 0 < \alpha < 1.$$

Valutiamo la sommatoria all'interno della definizione:

$$\begin{aligned}\langle S_n \rangle &= \sum_{i=0}^n \langle \omega(\tau_i) [\omega(t_i) - \omega(t_{i-1})] \rangle = \\ &= \sum_{i=0}^n \langle \omega(t_{i-1} + \alpha(t_i - t_{i-1})) \omega(t_i) \rangle + \\ &\quad - \langle \omega(t_{i-1} + \alpha(t_i - t_{i-1})) \omega(t_{i-1}) \rangle.\end{aligned}$$

Ricordando che nei processi di Wiener vale:

$$\langle \omega(t)\omega(s) \rangle = \min(s, t).$$

Rimane soltanto:

$$\begin{aligned}\langle S_n \rangle &= \sum_{i=0}^n t_{i-1} + \alpha(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=0}^n t_{i-1} = \\ &= \alpha(t_n - t_0).\end{aligned}$$

Di conseguenza con la scelta 6.4 per i  $\tau_i$  contano solo l'istante finale ed iniziale.

Inoltre quando  $\alpha = 0$  l'integrale si annulla, mentre quando  $\alpha = 1$  l'integrale è l'intervallo temporale.

La vera domanda da porsi è quale sia il giusto valore di  $\alpha$ ...

## 6.5 Integrale di $\hat{I}$ to e di Stratonovich

### Integrale di $\hat{I}$ to

$$\alpha = 0.$$

$$\tau_i = t_{i-1}.$$

Le somme parziali con questo integrale si scrivono come:

$$S_n = \sum_i \omega(t_{i-1}) [\omega(t_i) - \omega(t_{i-1})].$$

L'integrazione di  $\hat{I}$ to forma una Martingala.

**Martingala** Dato un set di variabili stocastiche:

$$\{x_i\} : E(|x_i|) < \infty.$$

$$\{x_i\} \text{ è marting. } \iff E(x_{n+1}|x_1, \dots, x_n) = x_n.$$

Con  $E$ : valore di aspettazione.

Possiamo notare che il processo di Wiener realizza una martingala perché rispetta questa proprietà.

Il calcolo di  $\hat{I}$ to è anche non anticipante:

### Funzione non anticipante

$G(t)$  è non anticipante se è indipendente dall'incremento  $\omega(t) - \omega(s) \forall t, s$ .

**Esempio 6.5.1** (Esempi di funzioni non anticipanti). Dato un processo di Wiener  $\omega(t)$  tutte le seguenti funzioni sono non anticipanti:

- $\omega(t)$ .
- $\int dt f(\omega(t))$ .
- $\int d\omega f(\omega(t))$ .

### Integrale di Stratonovich

Stratonovich era un fisico russo, integrare con Stratonovich implica scegliere il centro dell'intervallo.

#### Integrale di Stratonovich

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{2}. \\ \tau_i &= \frac{1}{2} (\tau_{i-1} + \tau_i).\end{aligned}$$

Le somme parziali in questo caso si scrivono come:

$$S_n = \sum_i \omega \left( \frac{t_i + t_{i-1}}{2} \right) [\omega(t_i) - \omega(t_{i-1})].$$

L'integrale di Stratonovich ha caratteristiche analoghe a quello che si usa normalmente in fisica, infatti si applica bene con funzioni "morbide".

**Esempio 6.5.2.**

$$\int_0^t \omega(s) ds = \begin{cases} \frac{\omega^2(t)}{2} - \frac{\omega^2(0)}{2} = \frac{t}{2} & \text{Strato} \\ \sum \omega_{i-1} (\omega_i - \omega_{i-1}) = 0 & \hat{I}to \end{cases}$$

### 6.6 Relazione tra l'incremento stocastico e l'incremento temporale.

La relazione tra i due differenziali è la seguente:

$$(d\omega)^2 \sim dt.$$

Questo significa che  $d\omega$  è continuo ma non è differenziabile. Abbiamo già accennato alla non differenziabilità dei processi di Wiener, ecco un'altra riprova. Tutti gli ordini più alti dell'incremento si annullano:

$$d\omega^{N+2} \sim 0 \quad \forall N > 0.$$

Più formalmente, consideriamo il seguente integrale:

$$\int (d\omega)^{2+N} G(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n G_{i-1} (\Delta \omega_i)^{2+N}.$$

Quello che si può dimostrare è che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n G_{i-1} (\Delta \omega_i)^{2+N} = \begin{cases} \int dt G(t) & N = 0 \\ 0 & N > 0 \end{cases}$$

Quindi anche che:

$$\int (d\omega)^2 G(t) = \int dt G(t).$$

$$d\omega \sim O(dt^{1/2}) \quad (6.9)$$

### Applicazione: Differenziale di una funzione

Prendiamo una funzione del tempo e del processo di Wiener:  $f[\omega, t]$ . Visto che si ha la 6.9 il differenziale  $df$  all'ordine più basso è:

#### Differenziale di una funzione

$$df[\omega, t] = \left[ \frac{\partial d}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2} \right] dt + \frac{\partial f}{\partial \omega} d\omega.$$

Questa struttura per il differenziale di una funzione è profondamente legata alla formula di  $\hat{I}$ to.

### 6.7 Formula di $\hat{I}$ to

Supponiamo di avere una SDE della seguente forma:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)d\omega.$$

La soluzione formale è del seguente tipo:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t a(x, s)ds + \int_{t_0}^t b(x, s)d\omega(s).$$

Supponiamo che esista una ed una sola soluzione non anticipante<sup>3</sup>.

Allora se ho una  $f(x, t)$  con  $x$  soluzione della SDE scrivendone il differenziale all'ordine più basso si ha:

#### Formula di $\hat{I}$ to

$$df(x, t) = \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + a \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right] dt + b \frac{\partial f}{\partial x} d\omega.$$

con  $dx = adt + bd\omega$ .

L'utilità della formula è che ci permette di fare cambi di variabili con funzioni dipendenti da una variabile casuale.

<sup>3</sup>Le ipotesi per cui vale sono negli appunti

## 7 Lezione 7

### 7.1 Integrale di una SDE

Prendiamo una SDE (Stochastical Differential Equation) del seguente tipo:

$$dx = f(x)dt + g(x)d\omega.$$

Con  $\omega$  processo di Wiener.

Nell'equazione abbiamo una parte deterministica ( $f(x)dt$ ) ed una stocastica ( $g(x)d\omega$ ).

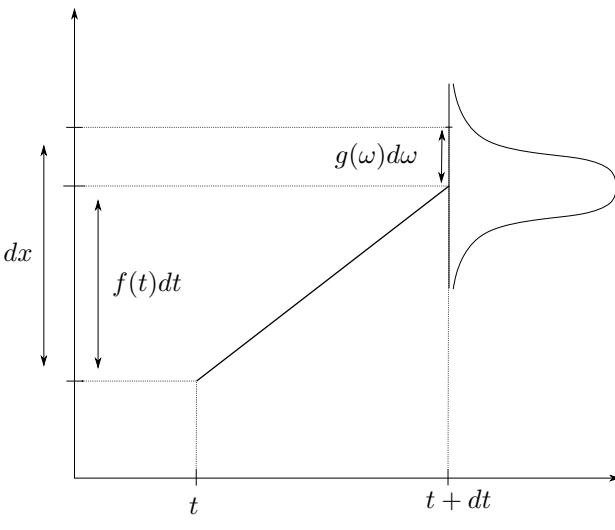


Figura 1.7: La linea rappresenta l'incremento della parte deterministica, in alto abbiamo invece il processo stocastico che discosta la  $x$  dalla parte di funzione deterministica (come un rumore sovrapposto al segnale).

Abbiamo detto che formalmente possiamo integrare nel seguente modo (con  $h$  passo di integrazione):

$$x_h - x_0 = \int_0^h f(x(s))ds + \int_0^h g(x(s))d\omega.$$

La formalità dell'espressione deriva dal fatto che le funzioni  $f$  e  $g$  dipendono da  $x$ , quindi non possiamo semplicemente risolvere questo integrale.

#### Soluzione perturbativa

Se prendiamo un passo di integrazione  $h$  piccolo, possiamo sviluppare  $f$  e  $g$  attorno al punto  $x_0$ :

$$\begin{aligned} f(x_s) &= f_0 + f'_0 \delta x_s + \frac{1}{2} f''_0 (\delta x_s)^2 \\ g(x_s) &= g_0 + g'_0 \delta x_s + \frac{1}{2} g''_0 (\delta x_s)^2. \end{aligned}$$

Con  $\delta x_s = x_s - x_0$ . Sostituendo nella equazione per la soluzione formale e tenendo solo l'ordine più basso si ha:

$$\delta x_h = \int_0^h f_0 ds + \int_0^h g_0 d\omega = f_0 h + g_0 \int_0^h d\omega.$$

Al secondo termine abbiamo un integrale stocastico. Questo indica che, operativamente, per effettuare una integrazione numerica e calcolare il punto successivo  $x_{n+1}$  si deve:

- Valutare la  $f$  nel punto  $x_n$ .
- Valutare la  $g$  nel punto  $x_n$  (la  $g$  di per sé è solo una funzione, se la variabile è deterministica anche la  $g$  da un risultato deterministico).
- Ipotizzare una distribuzione per  $\omega$ .
- Estrarre ogni volta un valore  $Z_n$  secondo tale distribuzione <sup>4</sup> facendo in modo che, alla fine del processo, i valori siano distribuiti secondo la distribuzione di  $\omega$ .
- $x_{n+1} = f(x_n)h + g(x_n)Z_n$

Il procedimento funziona perché l'integrale:

$$\int_0^h d\omega.$$

È la somma di variabili Gaussiane, di conseguenza è anch'esso un processo con distribuzione Gaussiana:

$$Z_1(h) \equiv \int_0^h d\omega.$$

Vediamo le proprietà di  $Z_1$ :

$$\langle Z_1(h) \rangle = \int_0^h \langle d\omega \rangle = 0.$$

Poiché il processo di Wiener ha media nulla.

$$\begin{aligned} \langle Z^2(h) \rangle &= \left\langle \int_0^h d\omega_s \int_0^h d\omega_t \right\rangle = \\ &= \left\langle \sum_i (\omega_i - \omega_{i-1}) \sum_J (\omega_J - \omega_{J-1}) \right\rangle = \\ &= \sum_i \sum_J \Delta t \delta_{iJ} = h. \end{aligned}$$

Dove per risolvere si è usato che:

$$\langle \Delta \omega^2 \rangle = \Delta t.$$

Se ne conclude che la variabile  $Z_1$  è una Gaussiana a media nulla e con varianza  $\sqrt{h}$ :

$$Z_1 \in G(0, \sqrt{h}).$$

Operativamente possiamo generare un numero random tra 0 e 1:

$$Y_1(i) \in G(0, 1).$$

Ed ottenere la variabile da moltiplicare a  $g_0$  con:

$$Z_1(h) = \sqrt{h} Y_1(i).$$

In conclusione si ha che:

$$\boxed{\delta x_h = f_0 h + g_0 Z_1(h).}$$

<sup>4</sup>caratterizzeremo meglio tale distribuzione sotto

Guardando l'espressione notiamo che il primo termine è di ordine  $h$  mentre il secondo è di ordine  $\sqrt{h}$  poiché è un processo di Wiener.

Risulta quindi necessario capire se ci siamo persi dei termini di ordine  $h$  nella parte di sviluppo stocastico. Possiamo prendere la soluzione perturbativa al primo ordine e inserirla nuovamente all'interno dello sviluppo.

Ci limitiamo inoltre ad inserire solo il termine all'ordine più basso ( $g_0 Z_1(h)$ ) poiché il termine con  $f_0$  darebbe sicuramente contributi di ordine superiore.

$$\delta x_s^{(1/2)} = g_0 Z_1(h) = g_0 \int_0^h d\omega.$$

$$\begin{aligned} \delta x_t &= \int_0^t \left( f_0 + f'_0 g_0 \int_0^s d\omega_r \right) ds + \\ &\quad + \int_0^h \left( g_0 + g'_0 g_0 \int_0^s d\omega_r \right) d\omega_s. \end{aligned}$$

L'unico contributo di ordine  $h$  deriva dal secondo integrale, che ci da un termine del tipo:

$$\int_0^t \int_0^s d\omega_r d\omega_s = \int_0^t \omega_s d\omega_s.$$

Quindi adesso dobbiamo decidere quale calcolo utilizzare: Ito oppure Stratonovich.

L'evoluzione dell'equazione differenziale stocastica dipende dalla scelta del metodo di integrazione.

$$\int_0^t \omega_s d\omega_s = \begin{cases} \frac{\omega_t^2}{2} & \text{Strato} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_t^2}{2} - t \right) & \text{Ito} \end{cases}$$

In entrambi i casi si ottiene un termine  $O(h)$ , quindi:

$$\delta x_h = g_0 Z_1(h) + f_0 h + \frac{g_0 g'_0}{2} \cdot \alpha(\hat{I}, S)$$

Con  $\alpha(\hat{I}, S)$  data da:

$$\alpha(\hat{I}, S) = \begin{cases} Z_1^2(h) & \text{Strato} \\ Z_1^2(h) - h & \text{Ito} \end{cases}$$

### Uguaglianza tra i due metodi

Effettuando il seguente cambio di variabili:

$$dx = \left( f - \frac{1}{2} gg' \right) dt + gd\omega.$$

si ha che i due  $\delta x_h$  (Ito e Stratonovich) si egualano poiché il termine aggiunto va a compensare il termine che subentra con l'integrale di Ito.

L'importanza di questo "cambio di variabili" è che ci autorizza ad utilizzare l'approccio di Stratonovich

anche per sistemi che fisicamente andrebbero trattati con Ito<sup>5</sup>.

## 7.2 Algoritmo di Heun

Operativamente (per davvero) si usa spesso l'algoritmo di Heun per l'integrazione di SDE: si tratta di un algoritmo a 3 step:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= x_0 + Z_1 g_0 + f_0 h + \frac{1}{2} g_0 g'_0 Z_1^2 \\ x_1 &= x_0 + Z_1 g(\tilde{x}_0) + f(\tilde{x}_0) + \frac{1}{2} g(\tilde{x}_0) g'(\tilde{x}_0) Z_1^2 \\ x_h &= \frac{1}{2} (x_1 + \tilde{x}_1). \end{aligned}$$

Sostanzialmente equivale a fare un primo step di predizione ed un successivo step di correzione.

---

<sup>5</sup>Stratonovich permette algoritmi di integrazione più potenti.

## 8 Lezione 8

### 8.1 Legame tra SDE e Fokker-Plank

Prendiamo una equazione differenziale stocastica del tipo:

$$dx = adt + bd\omega.$$

Possiamo immaginare che questa SDE dia luogo ad una distribuzione di probabilità Markoviana, quindi che soddisfi l'equazione di Chapman-Kolmogorov (4.1).

Il problema è che la forma differenziale di CK è molto generale, cerchiamo di capire quale forma assume per soddisfare la SDE sopra.

Prendiamo una generica funzione  $f(x(t))$ , il suo differenziale è dato dalla formula di Ito:

$$df = \left( a\partial_x f + \frac{1}{2}b^2\partial_{x^2}^2 f \right) dt + b\partial_x f d\omega.$$

Consideriamo la derivata di  $f$  rispetto al tempo mediata sulle realizzazioni di  $\omega$ :

$$\left\langle \frac{df}{dt} \right\rangle_\omega = \frac{d}{dt} \langle f(x(t)) \rangle.$$

Essendo  $\langle d\omega \rangle_\omega = 0$  si ha che:

$$\frac{d\langle f \rangle}{dt} = \left\langle a\partial_x f + \frac{1}{2}b^2\partial_{x^2}^2 f \right\rangle \quad (8.1)$$

L'equazione di CK ci dava una condizione sul propagatore  $P(x, t|x_0, t_0)$ , tale propagatore entra in gioco nel calcolo del valor medio di  $f$ :

$$\langle f(x(t)) \rangle = \frac{d}{dt} \int dx f(x) P(x, t|x_0, t_0).$$

In tale espressione la dipendenza temporale entra soltanto all'interno del propagatore.

Sostituendo la 8.1 si ha:

$$\int dx \left[ a\partial_x f + \frac{1}{2}b^2\partial_{x^2}^2 f \right] P = \int dx f(x) \partial_t P.$$

Integrando per parti a destra dell'uguale e supponendo che la  $P(x, t|x_0, t_0)$  non diverga al bordo:

$$\int dx f(x) \partial_t P = \int dx f(x) \left[ -\partial_x(aP) + \partial_{x^2}^2 \left( \frac{1}{2}b^2 P \right) \right].$$

Visto che si è isolata la  $f$  a destra e sinistra l'equazione per  $P$  che si ottiene ha la forma di una CK come anticipato:

#### Chapman-Kolmogorov per SDE

$$\partial_t P(x, t) = \left( -\partial_x a + \frac{1}{2}\partial_{x^2}^2 b^2 \right) P(x, t) \quad (8.2)$$

**Esempio 8.1.1.** Prendiamo i seguenti valori per i parametri della SDE:

- $a(x, t) = a(t)$

- $b(x, t) = b(t)$

$$dx = a(t)dt + b(t)d\omega.$$

Integrando si ha:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)d\omega_s.$$

Mediando sulle realizzazioni di  $\omega$  l'ultimo termine va via:

$$\langle x(t) \rangle_\omega = \langle x_0 \rangle + \int_0^t a(s)ds.$$

Calcoliamo anche la varianza:

$$\begin{aligned} \langle x(t)x(s) \rangle &= \langle (x(t) - \langle x(t) \rangle)(x(s) - \langle x(s) \rangle) \rangle = \\ &= \left\langle \int_0^t b(t')d\omega(t') \int_0^s b(s')d\omega(s') \right\rangle. \end{aligned}$$

Sfruttando le proprietà della varianza per un processo di Wiener:

$$\langle x(t)x(s) \rangle = \int^{\min(t,s)} b^2(t')dt'.$$

Nel caso più semplice in cui  $a, b$  costanti:

- $\langle x(t) \rangle = x_0 + at$
- $\langle x(t)x(s) \rangle = b^2 \min(t, s)$

#### Esempio 8.1.2.

$$dx = cxd\omega(t).$$

Potremmo procedere con l'approccio di Stratonovich:

$$\frac{dx}{x} = dy = cd\omega(t).$$

Il problema è che non è detto che l'oggetto a sinistra sia mordibo, quindi questo approccio è in generale sbagliato (non è rispettata la seconda uguaglianza). Dobbiamo utilizzare la formula di Ito per effettuare il cambio di variabili. Prendiamo il seguente:

$$f = y = \ln x.$$

La formula ci dice che:

$$df = \left( af' + \frac{1}{2}b^2 f'' \right) dt + bf'd\omega.$$

Nel nostro caso:

- $a = 0$
- $b = cx$
- $f = 1/x$
- $f'' = -1/x^2$

Quindi in conclusione si ha una equazione differenziale per  $y$  che non è quella che ci saremmo aspettati:

$$dy = -\frac{c^2}{2} dt + cd\omega.$$

Abbiamo in più il primo termine. Integrando:

$$y(t) = y_0 + cd\omega(t) - \frac{c^2}{2} t.$$

A questo punto il problema è risolto per  $x$ :

$$x(t) = \exp(y) = x_0 \exp\left(c\omega(t) - \frac{c^2}{2} t\right).$$

Possiamo calcolare  $\langle x \rangle$  sfruttando il fatto che il valor medio di un processo gaussiano è nullo.

$$z \in G(0, 1) \implies \langle z \rangle = 0.$$

Nella nostra equazione abbiamo una espressione del tipo  $\langle \exp(z) \rangle$ , sfruttando le proprietà dei momenti di un processo Gaussiano si ha che:

$$\langle \exp(z) \rangle = \exp\left(\frac{\langle z^2 \rangle}{2}\right) \quad (8.3)$$

Per dimostrarlo è necessario utilizzare lo sviluppo dell'esponenziale, i momenti maggiori del secondo si annullano e rimane soltanto quello.

Otteniamo in conclusione che:

$$\begin{aligned} \langle x(t) \rangle &= \langle x_0 \rangle \exp\left(-\frac{c^2}{2} t\right) \langle \exp(c\omega(t)) \rangle = \\ &= \langle x_0 \rangle \exp\left(-\frac{c^2}{2} t\right) \exp\left(\frac{c^2}{2} t\right) = \langle x_0 \rangle. \end{aligned}$$

Analogamente si può fare con la correlazione:

$$\begin{aligned} \langle x(t)x(s) \rangle &= \langle x_0^2 \rangle e^{-\frac{c^2}{2}(t+s)} \left\langle e^{c(\omega(t)+\omega(s))} \right\rangle = \\ &= \langle x_0^2 \rangle e^{-\frac{c^2}{2}(t+s)} e^{\frac{c^2}{2}(\omega^2(t)+\omega^2(s))} = \\ &= \langle x_0^2 \rangle e^{c^2 \min(t,s)}. \end{aligned}$$

Se avessimo fatto il conto con Stratonovich avremmo ottenuto delle quantità divergenti:

$$\begin{aligned} \langle x(t) \rangle &= \langle x_0 \rangle \exp\left(\frac{1}{2} c^2 t\right) \\ \langle x_t x_s \rangle &= \langle x_0^2 \rangle \exp\left(\frac{1}{2} c^2 (t+s+2\min(t,s))\right). \end{aligned}$$

Quindi i due metodi di integrazione portano a dinamiche completamente differenti, è necessario stare attenti ad usare di volta in volta il metodo più opportuno.

**Esempio 8.1.3** (Oscillatore Kubo). Si studia la precessione di uno spin attorno ad un campo magnetico  $\omega$ :

$$dz = i \left( \omega dt + \sqrt{2\gamma} d\omega_t \right) z.$$

Il secondo termine indica che il campo magnetico non è costante, contiene fluttuazioni  $d\omega$ . Come conseguenza vedremo che il pacchetto di spin inizierà a sparpagliarsi.

Visto che le fluttuazioni del campo devono avere un Cut-Off ad alte frequenze è opportuno usare l'integrazione "fisica" di Stratonovich.

Possiamo valutare il valor medio di  $z$  integrando nel modo a noi noto:

$$\frac{dz}{z} = i\omega t + i\sqrt{2\gamma} d\omega_t.$$

La soluzione per  $z$  è ovviamente l'esponenziale del termine di destra, facendo il valor medio e sfruttando la 8.3 si ottiene:

$$\frac{d}{dt} \langle z \rangle = (i\omega - \gamma) \langle z \rangle.$$

Come accennato il primo termine fa girare lo spin, il secondo lo sparpaglia.

$$\langle z_t \rangle = \langle z_0 \rangle \exp((i\omega - \gamma)t).$$

Essendo in questo caso  $z$  una quantità complessa possiamo calcolare una correlazione del tipo:

$$\langle z_t z_s^* \rangle = \dots = \langle z_0^2 \rangle e^{i\omega(t-s) - \gamma|t-s|}.$$

La funzione di correlazione decade esponenzialmente con un tempo  $1/\gamma$ , legato alla fluttuazione del campo magnetico.

#### Esempio 8.1.4.

$$dx = -kxdt + \sqrt{D} d\omega_t.$$

Questa è "parente" del processo di Ornstein-Uhlenbeck:

$$dx = f(x)dt + \sqrt{D} d\omega_t.$$

Per risolverla si parte dalla omogenea:

$$dx = fdt = -kxdt.$$

Visto che il termine di rumore è costante:

$$g = \sqrt{D} \implies \begin{cases} g = \text{cost} \\ g' = 0 \end{cases}.$$

Allora in questo caso Ito e Stratonovich conducono allo stesso risultato.

Utilizziamo il calcolo di Ito, la prima cosa da fare è cercare il giusto cambio di variabile. Scegliamo:

$$y = xe^{kt}.$$

La formula di Ito per funzioni dipendenti dal tempo si scrive come:

$$df = \left[ a\partial_x f + \frac{b^2}{2} \partial_{x^2}^2 f + \partial_t f \right] dt + b\partial_x f d\omega.$$

Sviluppando le derivate si ottiene che:

$$dy = \sqrt{D} e^{kt} d\omega.$$

E quindi tornando indietro abbiamo anche la  $x$ :

$$x(t) = x_0 e^{-kt} + \sqrt{D} \int_0^t e^{-k(t-t')} d\omega_{t'}.$$

Mediando nel tempo nuovamente i termini con  $d\omega$  si cancellano:

$$\langle x(t) \rangle = \langle x_0 \rangle e^{-kt}.$$

Per la varianza il calcolo è più elaborato, riportiamo la conclusione:

$$\begin{aligned} \text{var}\{x(t)\} &= \\ &= \left\langle \left[ (x_0 - \langle x_0 \rangle) e^{-kt} + \sqrt{D} \int_0^t e^{-k(t-t')} d\omega_{t'} \right]^2 \right\rangle = \\ &= e^{-2kt} \left[ \text{var}\{x_0\} - \frac{D}{2k} \right] + \frac{D}{2k}. \end{aligned}$$

Quindi la varianza ha un valore stazionario ed un termine che decade esponenzialmente.

## 8.2 Ornstein-Uhlenbeck dipendente dal tempo

Prendiamo la seguente SDE:

$$dx = -a(t)xdt + b(t)d\omega.$$

L'algebra da seguire è simile a quella dell'esempio precedente, risolviamo l'omogenea (senza  $\omega$ ):

$$x(t) = \exp \left( - \int_0^t a(s) ds \right) x_0.$$

Si inserisce adesso la parte disomogenea:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \exp \left( - \int_0^t a_s ds \right) + \\ &+ \int_0^t \exp \left( - \int_0^s a(s) ds \right) b(t') d\omega_{t'}. \end{aligned}$$

Al solito si può mediare in  $\omega$  per mandare via il secondo integrale:

$$\langle x(t) \rangle = \langle x_0 \rangle \exp \left( - \int_0^t a(s) ds \right).$$

Mentre per la covarianza si ha che:

$$\begin{aligned} \langle x(t), x(t) \rangle &= \exp \left( -2 \int_0^t a(s) ds \right) \langle x_0, x_0 \rangle + \\ &+ \int_0^t dt' \exp \left( -2 \int_{t'}^t a(s) ds \right) b^2(t'). \end{aligned}$$

## 9 Lezione 9

### 9.1 Oltre il teorema del limite centrale

Abbiamo visto che, per variabili stocastiche con media e deviazione standard definite, vale:

$$S_n = \sum_i x_i \rightarrow G.$$

Ci chiediamo se esista solo questa possibilità, ovvero se non esistono altre distribuzioni che possono far da limite per le variabili stocastiche.

Vediamo che succede se prendiamo una somma di variabili stocastiche estratte da una qualunque distribuzione:

$$S_2 = x_1 + x_2 \implies P_2(S_2) = \sum_{x_1} P_1(x_1)P_1(x_2).$$

Si somma solo su  $x_1$  poiché  $x_2 = S_2 - x_1$ :

$$P_2(S_2) = \int P_1(x_1)P_1(S_2 - x_1)dx_1.$$

Quindi si ha che:

$$P_2(S_2) = P_1(x_1) * P_1(x_2).$$

L'idea è che una distribuzione per essere stabile non deve cambiare sotto questa trasformazione (convoluzione).

**Esempio 9.1.1** (Distribuzione di Lorentz - Bright - Wigner).

$$P_L(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Le proprietà di questa distribuzione sono:

$$\begin{aligned} \int P_L dx &= 1 \\ \int x P_L dx &= 0 \\ \int x^2 P_L dx &\rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Per via della terza equazione non sono soddisfatte le condizioni del teorema del limite centrale.

Sviluppando la convoluzione si ha:

$$P_2(S_2) = \int P_1(x_1)P_1(S_2 - x_1)dx_1 = \frac{1}{2\pi \left[ 1 + \left( \frac{S_2}{2} \right)^2 \right]}.$$

La forma della distribuzione è rimasta invariata, l'unica differenza rispetto alla distribuzione di singola variabile è il fattore di scala 1/2.

**Esempio 9.1.2** (Gaussiano).

$$P_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Valutando l'integrale per la  $P_2$  si ha:

$$P_2(S_2) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp\left(-\frac{(S_2)^2}{4}\right).$$

Abbiamo una struttura nuovamente Gaussiana con la  $\sigma^2$  raddoppiata.

**Esempio 9.1.3** (Distribuzione uniforme).

$$P_1(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{Fuori} \end{cases}$$

In questo caso la forma della distribuzione cambia:

$$P_2(S_2) = \dots = 1 - |S_2|.$$

Prendiamo adesso la somma di  $n$  variabili sotto una certa distribuzione:

$$S_n = \sum_i^n x_i \implies P(S_n) = P_1(x_1) * \dots * P_n(x_n).$$

Nel caso di Lorentz e Gauss la procedura è generalizzabile:

$$\text{Gauss : } S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_i^n x_i \implies P_n(S_n) \in G$$

$$\text{Lorentz : } S_n = \frac{1}{n} \sum_i^n x_i \implies P_n(S_n) \in L.$$

### 9.2 Distribuzioni stabili

#### Definizione di Distrib. Stabile

Una distribuzione si dice stabile se è invariante sotto convoluzione.

$$\begin{aligned} P(a_1 z + b_1) * P(a_2 z + b_2) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy P(a_1(z-y) + b_1) P(a_2(y+b_2)) = \\ &= P(az + b). \end{aligned}$$

con  $a_i > 0, b_i \in R$ .

Andiamo in trasformata, chiamiamo la funzione caratteristica  $P(k)$ :

$$P(k) = \mathcal{F}[P(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} P(x) dx.$$

È noto che per convoluzione si ha:

$$\mathcal{F}[P_1 * P_2] = \mathcal{F}[P_1] \cdot \mathcal{F}[P_2].$$

Quindi nel caso visto sopra:

$$S_n = \sum_i^n x_i \implies P_n(k) = [P_1(k)]^n.$$

Nei due casi interessanti discussi nella sezione precedente la trasformata diventa:

$$\begin{aligned} P_G(k) &\sim e^{-\frac{k^2}{2}} \\ P_L(k) &\sim e^{-|k|}. \end{aligned}$$

In particolare nel caso della lorenziana:

$$P_2(k) = e^{-2|k|} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2}.$$

### 9.3 Teorema di Levy-Kintchine

#### Teorema limite $\Leftrightarrow$ stabile

Una distribuzione di probabilità  $L(x)$  può essere la distribuzione limite di  $S_n = \sum_i x_i$  se e solo se  $L(x)$  è stabile.

Abbiamo dimostrato l'esistenza di due distribuzioni limite: Gauss e Lorentz.

Il teorema di Levy-Kintchine ( o della rappresentazione canonica ) serve a generalizzare la forma di una distribuzione limite.

#### Il teorema LK

Data una distribuzione di probabilità  $L_{\alpha,\beta}(x)$  con  $\alpha, \beta$  parametri. Tale distribuzione è stabile se e solo se il logaritmo della sua funzione caratteristica

$$L_{\alpha,\beta}(k) = \langle e^{ikx} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} L_{\alpha,\beta}(x).$$

ha la forma generale:

$$\begin{aligned} \ln(L_{\alpha,\beta}(k)) &= \\ &= \begin{cases} i\mu k - \gamma |k|^{\alpha} \left[ 1 - i\beta \frac{k}{|k|} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right]; & \alpha \neq 1 \\ i\mu k - \gamma |k| \left[ 1 + i\beta \frac{k}{|k|} \frac{2}{\pi} \ln |k| \right]; & \alpha = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Con  $\alpha, \mu, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  e

- $0 \leq \alpha \leq 2$
- $-1 \leq \beta \leq 1$
- $\gamma \geq 0$

Il motivo dei vincoli per  $\alpha$  e  $\beta$  è che, antitrasformando per la distribuzione nello spazio reale, devono essere rispettate le proprietà delle distribuzioni.

**Esempio 9.3.1** (Gaussiana). Ritroviamo la Gaussiana se

- $\alpha = 2$
- $\beta$  qualunque
- $\mu$  qualunque

- $\gamma = 1$

**Esempio 9.3.2** (Lorentz). Ritroviamo la distribuzione di Lorentz se

- $\alpha = 1$
- $\beta = 0$
- $\mu = 0$
- $\gamma = 1$

Gli indici  $\alpha$  e  $\beta$  definiscono la forma e le proprietà della distribuzione mentre  $\mu$  e  $\gamma$  sono fattori di scala.

#### Caratteristiche del funzionale di LK

**Il ruolo di  $\alpha$**  Il parametro  $\alpha$  controlla la forma della  $L_{\alpha,\beta}$  per valori  $|x| \rightarrow \infty$ . Ipotizziamo infatti di avere solo il termine:

$$\ln(L_{\alpha,\beta}(k)) \sim -|k|^{\alpha} \implies L_{\alpha,\beta}(k) \sim e^{-|k|^{\alpha}}.$$

Antitrasformando si ottiene che:

$$\int dk e^{-|k|^{\alpha}} e^{-kx} \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} \sim \frac{1}{|x|^{\alpha+1}}.$$

Quindi si ha che:

#### Andamento asintotico di $L_{\alpha,\beta}(x)$

$$L_{\alpha,\beta}(x) \sim \frac{1}{|x|^{\alpha+1}} \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Con  $0 \leq \alpha \leq 2$

Sfruttando questo andamento asintotico possiamo vedere per quali  $\alpha$  convergono i momenti di ordine  $\delta$  con  $0 < \delta < \alpha$ :

$$\begin{aligned} \langle |x|^{\delta} \rangle &= \int dx |x|^{\delta} L_{\alpha,\beta}(x) = \\ &= \int dx \frac{|x|^{\delta}}{|x|^{\alpha+1}}. \end{aligned}$$

Per avere un momento di ordine  $\delta$  finito l'integrale deve convergere. Se ne conclude che

- per  $\alpha < 2$  la varianza non è definita
- per  $\alpha < 1$  non è definita nemmeno la media.

Studiando un fenomeno fisico quello che abbiamo sempre fatto è stato cercare una scala del problema, quindi il momento secondo.

Per tutte le distribuzioni di Levy (tranne la Gaussiana) il momento secondo non è definito, questo le rende distribuzioni controllintuitive.

**Il ruolo di  $\beta$**  Il parametro  $\beta$  controlla la simmetria della distribuzione:

- $\beta = 0 \implies L_{\alpha,\beta}(x)$  simmetrica
- $\beta = \pm 1 \implies L_{\alpha,\beta}$  molto asimmetrica al variare del parametro  $\alpha$ .

Se  $0 < \alpha < 1$  e  $\beta = 1$  allora il supporto della distribuzione è  $[\mu, \infty)$ .

**Esempio 9.3.3** (Lorentziana).  $\beta = 0, \alpha = 1$

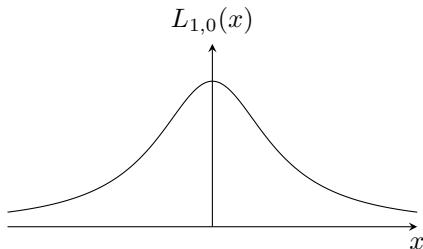


Figura 1.8: Distribuzione di Lorentz-Bright-Wigner.

**Esempio 9.3.4** (Levy-Smirnov).  $\beta = 1, \alpha = 1/2$ , si ha in tal caso:

$$L_{\alpha,\beta}(x) \sim \left(\frac{\gamma^{1/\alpha}}{2\pi}\right) \frac{1}{(x-\mu)^{3/2}} e^{-\frac{\gamma^{1/\alpha}}{2(x-\mu)}} \Theta(\mu).$$

Con  $\Theta(\mu)$  funzione di Heaviside.

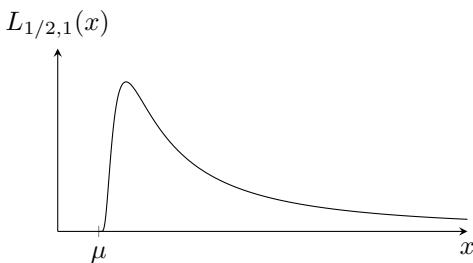


Figura 1.9: Distribuzione di Levy-Smirnov

## 9.4 Bacino di attrazione di una distribuzione

Data una  $P(x)$  possiamo vedere a quale  $L_{\alpha,\beta}(x)$  converge con il seguente teorema:

### Teorema del bacino di attrazione

$P(x)$  appartiene al bacino di attrazione di una distribuzione stabile  $L_{\alpha,\beta}(x)$  con  $0 < \alpha < 2$  se e solo se:

$$P(x) \sim \frac{\alpha a^\alpha c_\pm}{|x|^{1+\alpha}} \quad x \rightarrow \pm\infty.$$

Le costanti  $c_\pm \geq 0$ ,  $a > 0$  sono legate ai coefficienti di  $L_{\alpha,\beta}(x)$  da relazioni semplici (che non si riescono a leggere negli appunti).

Notiamo che anche i momenti di  $P(x)$  sono definiti per  $\delta < \alpha$  esattamente come quelli di  $L_{\alpha,\beta}(x)$ .

## 9.5 Cambio di scala

Le distribuzioni di Levy sono Self-similari.

Consideriamo una distribuzione di Levy e prendiamo nuovamente:

$$S_n = \sum_i^n x_i.$$

Un cambio di scala che lascia invariata la forma della distribuzione mandando  $n \rightarrow \infty$  è:

$$\tilde{S}_N = \frac{1}{B_N} \sum_i^N x_i - A_N.$$

Con

$$B_N = a N^{1/\alpha} \quad A_N = \begin{cases} 0 & 0 < \alpha < 1 \\ \frac{N \langle x \rangle}{B_N} & 1 \leq \alpha \leq 2 \end{cases}.$$

Questo cambio di scala può essere utilizzato come riprova una volta individuata una espressione per la distribuzione di Levy: se aumentando i termini della sommatoria si ha che  $\tilde{S}_N$  va in se stessa allora abbiamo indovinato i coefficienti.

**Esempio 9.5.1** (Gaussiana).

$$B_N = N^{1/2} \sigma \quad A_N = \frac{N \langle x \rangle}{B_N}.$$

### ”Perché troviamo sempre Gaussiane?”

Possiamo chiederci perché le Gaussiane spiccano in fama e diffusione nei processi fisici, la risposta arriva dal fatto che:

$$P(x) \sim \frac{1}{x^{3+\epsilon}} \implies P(x) \rightarrow G \quad \forall \epsilon > 0.$$

Quindi tutte le distribuzioni aventi questa proprietà tendono a delle gaussiane. Quando questa condizione non è rispettata si ottiene una distribuzione di Levy.

### Probabilità di tornare nell’origine

Possiamo estrarre informazioni sulla distribuzione di Levy di un processo andando a cercare la probabilità di tornare nell’origine. Prendiamo ad esempio:

$$L_{\alpha,0}(x) \implies L_{\alpha,0}(k) \sim e^{-\gamma|k|^\alpha}.$$

Considerando l’ennesima iterata abbiamo visto che:

$$S_n \sim e^{-n\gamma|k|^\alpha}.$$

Adesso possiamo trovare la probabilità di rientrare in  $x = 0$  all’ennesima iterata semplicemente antitrasformando:

$$L_{\alpha,0}^n(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos(0) e^{-n\gamma|k|^\alpha} dk = \frac{\Gamma(1/\alpha)}{\pi \alpha (\gamma n)^{1/\alpha}}.$$

Quindi la probabilità di tornare nell’origine in funzione di  $n$  scala come una potenza di  $\alpha$ . Questo ci permette di determinare il valore di  $\alpha$ .

$$L_{\alpha,0}^n(0) = \frac{P(S_n)}{n^{1/\alpha}}.$$

## 9.6 SDE con variabili stocastiche con distrib. di Levy

Prendiamo una SDE del tipo:

$$dx(s) = dL_{\alpha,\beta}(s).$$

### Integrale un processo di Levy

Definiamo l'integrale di una funzione  $f(s)$  secondo un processo di Levy come:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t f(s)dL_{\alpha,\beta}(s) &= \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N f(\Delta s(i-1)) M_{\alpha,\beta}([\Delta s(i-1), \Delta s(i)]). \end{aligned}$$

In cui si è usata l'abbreviazione:

$$M_{\alpha,\beta}(x, y) = L_{\alpha,\beta}(x) - L_{\alpha,\beta}(y).$$

Sostanzialmente è l'integrale di Ito.

### Algoritmo di Weron

Per risolvere è necessario inventare una tecnologia per valutare le variabili stocastiche secondo una distribuzione di Levy generale.

L'algoritmo di Weron si occupa proprio di come generare questi numeri casuali  $\xi$  (Vedi appendice), secondo tale algoritmo l'integrale di una funzione si può scrivere come:

$$\int_{t_0}^t f(s)dL_{\alpha,\beta}(s) = \sum_i^N f(\Delta s(i-1)) (\Delta s)^{1/\alpha} \xi_i.$$

Con  $\Delta s = (t - t_0)/N$ , ovvero l'ampiezza di ogni intervallo temporale, facendo una integrazione elementare si prende ad esempio  $N = 1$ .

Come anticipato il numero  $\xi_i$  è generato tramite una distribuzione di Levy con alcuni parametri:

$$\xi_i \in L_{\alpha,\beta} \left( Z, \gamma = \frac{1}{(2)^{1/2\alpha}}, \mu = 0 \right).$$

Quindi operativamente si ha:

$$x_{n+1} = x_n + h^{1/\alpha} \xi_n.$$

### Che devo fare per generare la $\xi$ ?

Mentre per generare numeri gaussiani possiamo utilizzare una infinità di librerie per generare un numero secondo una distribuzione di Levy non è detto che vi sia un qualche pacchetto.

Quindi se non conosci Python devi riscrivere una funzione di 2 pagine per generare un set di numeri random, se conosci python invece esiste una libreria di Scipy che si occupa di generare numeri secondo una qualunque distribuzione di Levy.

## 10 Lezione 10

### 10.1 Random Walk di Weierstrass nel dettaglio

Abbiamo visto che per un camminatore di Weierstrass la forma della distribuzione poteva non essere Gaussiana al variare del parametro  $N^2/b$  (Vedi sezione 6.2). Rispetto alla lezione 6 adesso si cambia la notazione (Lez6 → Lez10):

$$b \rightarrow M \quad N \rightarrow b.$$

Quindi adesso  $b$  è il parametro dell'ampiezza di salto mentre  $M$  è il fattore che smorza il rate. La condizione di rottura del teorema del limite centrale diventa:

$$\frac{b^2}{M} > 1.$$

Cerchiamo la distribuzione invariante per il camminatore di Weierstrass proprio in questo caso.

La probabilità di fare un salto  $l$  può essere scritta come:

$$P(l) = \frac{M-1}{2M} \sum_{J=0}^{\infty} \frac{1}{M^J} [\delta(l - b^J a) + \delta(l + b^J a)].$$

Per capire se è invariante è necessario considerare  $n$  salti, farlo nello spazio reale può essere complicato. Ricordiamo le proprietà generali di questo moto random:

- Occorrono  $\sim M$  salti di  $\pm a$  prima di saltare  $ba$ .
- Occorrono  $\sim M$  salti di  $\pm ba$  ( $M^2$  salti lunghi  $a$ ) prima di saltare  $b^2 a$ .
- etc ...

Queste caratteristiche fanno sì che il sistema esibisca dei cluster di camminatori attorno alle posizioni dei salti più lunghi (sulla scala temporale di osservazione).

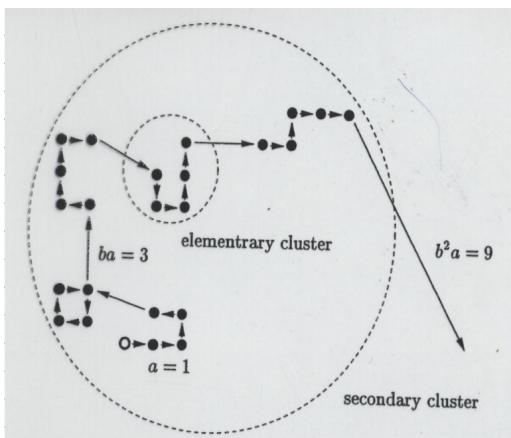


Figura 1.10: Random Walk di Weierstrass ( $b = 3$ ,  $M = 4$ ): formazione dei Cluster (Paul and Baschang: Stochastic Process, Springer).

Proprio per la formazione di questi cluster su scale spaziali diverse il sistema può presentare un comportamento auto-similare.

Possiamo notare anche come cambiano i risultati al variare dei parametri  $M$  e  $b$ :

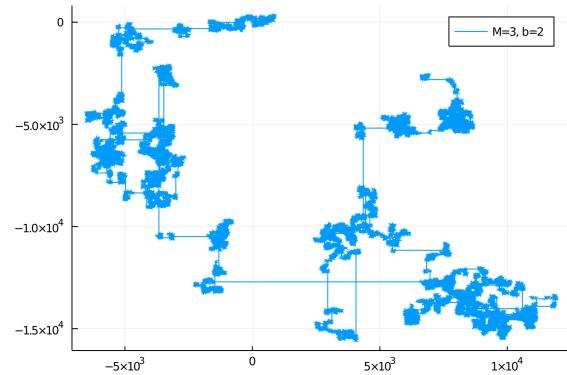


Figura 1.11: Rapporto  $b^2/M = 4/3$  (Link al codice).

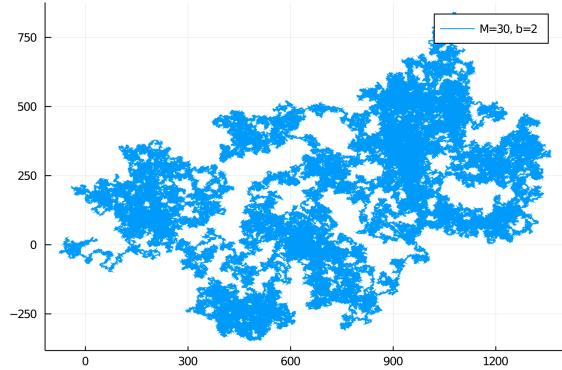


Figura 1.12: Rapporto  $b^2/M = 4/30$ , notiamo come i cluster che si formano siano diversi nei due casi: in questo caso il moto diventa quasi irriconoscibile rispetto ad un RW "normale". (Link al codice).

Mettiamoci nel caso in cui la distribuzione non può essere una Gaussiana e risolviamo per  $\langle l^2 \rangle \rightarrow \infty$ :

$$\langle l^2 \rangle = \frac{(M-1)a^2}{M} \sum \left( \frac{b^2}{M} \right)^J \rightarrow \infty \quad \text{se } \frac{b^2}{M} > 1.$$

Per capire se  $P(l)$  può essere stabile andiamo in trasformata:

### 10.2 Serie di Weierstrass e distribuzione stabile per il RW

Ricordando che:

$$P(k) = \langle e^{ikl} \rangle.$$

Si ottiene:

$$P(k) = \int dl P(l) e^{ikl} = \frac{M-1}{M} \sum_J \frac{\cos(kb^J a)}{M^J}.$$

Questa serie è continua ovunque ma non differenziabile rispetto a  $k$  se  $b > M$ .

Per dimostrare che  $P(l)$  è stabile dobbiamo dimostrare che  $P(k)$  è invariante sotto convoluzione. Partiamo osservando come scala  $P(k)$  se mandiamo  $k \rightarrow bk$ , questo cambio di scala è interessante perché  $b$  è l'unica grandezza fisica che descrive la scala sulla quale avviene il moto del camminatore.

$$\begin{aligned} P(bk) &= \frac{M-1}{M} \sum_{J=0}^{\infty} \frac{1}{M^J} \cos(bk^{J+1}a) = \dots = \\ &= MP(k) - \frac{M-1}{M} \cos(ka). \end{aligned}$$

Per arrivare a questa conclusione si è esplicitata la sommatoria di  $P(bk)$ , moltiplicato e diviso per  $M$  e isolato il primo termine della sommatoria.

### Equazione per la $P(k)$

$$P(k) = \frac{1}{M} P(bk) + \frac{M-1}{M} \cos(ka).$$

Per soddisfare l'invarianza di scala la  $P(k)$  deve soddisfare questa equazione. Dividiamo la soluzione in una parte omogenea ed una particolare.

$$P(k) = \frac{1}{M} P_0(k) + P_p(k).$$

Possiamo sviluppare in serie il coseno per trovare la forma della soluzione particolare:

$$P_p(k) = \frac{M-1}{M} \sum_{J=1}^{\infty} \frac{(-1)^J}{(2J)!} \frac{(ka)^{2J}}{1 - b^{2J}/M} + 1.$$

Notiamo subito che la soluzione particolare non è responsabile della divergenza di  $\langle l^2 \rangle$ , infatti possiamo calcolare il momento secondo come:

$$\langle l^2 \rangle = - \left. \frac{d^2}{dk^2} P_0(k) \right|_0 - \left. \frac{d^2}{dk^2} P_p(k) \right|_0.$$

La derivata seconda di  $P_p$  non diverge:

$$\langle l^2 \rangle_p = \frac{M-1}{M} \frac{a^2}{b^2/M - 1} < \infty \quad \text{con } b^2/M > 1.$$

Quindi è il termine omogeneo di pura scala ad essere responsabile della divergenza.

### Scaling discreto della soluzione omogenea

$$P_0(k) = \frac{1}{M} P_0(bk).$$

Possiamo esprimere la soluzione di questa equazione in funzione di una qualunque  $Q(k)$  tale che:

- $Q(k) = Q(kb)$
- $Q(k)$  periodica in  $\ln(k)$  con periodo  $T = \ln(b)$ .

Senza riportare i passaggi la soluzione della omogenea è:

$$P_0(k) = |ka|^\alpha Q(k).$$

con:

$$\alpha = \frac{\ln(M)}{\ln(b)} \quad 0 < \alpha < 2.$$

Che deve essere rispettata per imporre la self-similarità.

Valutando i termini della soluzione,  $P_p$  e  $P_0$ , quando  $k \rightarrow 0$  si nota che sopravvivono solo:

- Il termine unitario nella  $P_p$  (il termine più rilevante nella sommatoria va a zero come  $k^2$ ).
- L'intera soluzione omogenea ( $\alpha < 2$ )

Per  $k \rightarrow 0$  si ha quindi che:

$$P(k) \sim 1 - c(\alpha) |ka|^\alpha.$$

Per ricondurci ad una forma del tipo Levy dobbiamo trovare il modo di esprimere il  $\log P(k)$ , approssimiamo allora la  $P(k)$  ottenuta per  $k \rightarrow 0$  come esponenziale (visto che corrisponde ai primi due termini dello sviluppo di quest'ultimo).

$$P(k) \sim \exp(-c(\alpha) |ka|^\alpha).$$

Quindi:

$$\ln(P(k)) = -c(\alpha) |ka|^\alpha.$$

Che è effettivamente una distribuzione di Levy con  $\alpha = \ln M / \ln b$ . Quindi la distribuzione  $P(l)$  è stabile per tutti i valori di  $b^2/M$ .

# 11 Lezione 11

## Parte 1

### 11.1 Equazione di Fokker-Plank: soluzione analitica.

Questa lezione è una lunga nota storica su come facevano i nostri antenati a risolvere l'equazione di FK negli anni 80-90 con le mani. L'utilità sta nel fatto che ci da gli strumenti per affrontare la prossima lezione che è invece concettualmente molto interessante.

Abbiamo visto nella Lezione 4 la forma differenziale di Chapman-Kolmogorov (equazione 4.1). La parte di tale equazione che conteneva termini di derivate prime e seconde (quindi quella riguardante la parte continua del processo) è nota come

#### Equazione di Fokker-Plank.

$$\begin{aligned}\partial_t P(\mathbf{x}, t) = & -\partial_{x_i} A_i(\mathbf{x}, t)P(\mathbf{x}, t) + \\ & + \frac{1}{2}\partial_{x_i}\partial_{x_J} B_{iJ}(\mathbf{x}, t)P(\mathbf{x}, t).\end{aligned}$$

In qui il termine  $B_{iJ}$  ricordiamo essere il termine di diffusione.

Modernamente questa equazione viene risolta numericamente per quasi tutti i casi "interessanti". Tuttavia ci sono alcune situazioni in cui si riesce a risolvere analiticamente, concentriamo questa lezione su quelle.

Definiamo una corrente  $\mathbf{J}$ :

$$J_i = \left( A_i - \frac{1}{2}\partial_{x_J} B_{iJ} \right) P(\mathbf{x}, t).$$

Quindi l'equazione di FK si scrive come:

$$\partial_t P + \nabla \mathbf{J} = 0.$$

Quindi possiamo integrare  $P$  su un volume  $V$  e sfruttare il teorema di Gauss:

$$\partial_t \int_V P dV = - \int_V \nabla \mathbf{J} dV = - \int_{\partial V} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{J}.$$

Dove  $\partial V$  è il bordo del volume  $V$  (e l'ultima espressione dopo l'uguale è il flusso di  $\mathbf{J}$  sul bordo di  $V$ ).

La variazione della probabilità in un volume  $V$  è legata al flusso della corrente di probabilità.

Quindi la soluzione di questa equazione alle derivate parziali dipende fortemente dall'andamento della corrente lungo la superficie di  $V$ .

### 11.2 Condizioni al bordo per la soluzione della FK.

**Condizioni al bordo riflettenti.** Questo è il caso in cui la corrente di probabilità rispetta la seguente:

$$\hat{S}\mathbf{J}(\mathbf{z}, t) = 0.$$

Con  $\hat{S}$  versore del bordo di  $V$ . Questa condizione implica che la  $\mathbf{J}$  è parallela alla superficie.

**Condizioni al bordo assorbenti.**

$$\text{Se } \mathbf{z} \in \partial S \implies J(\mathbf{z}, t) = 0.$$

**Condizioni al bordo discontinue** La corrente può essere discontinua sul bordo, in queste condizioni il moto resta possibile, la corrente deve soddisfare l'equazione:

$$\hat{S}(\mathbf{J}(\mathbf{z}^+) - \mathbf{J}(\mathbf{z}^-)) = 0.$$

**Condizioni al bordo periodiche.** Mettiamoci in una dimensione ad esempio, nel segmento  $[a, b]$ , allora le condizioni al contorno periodiche implicano che:

$$\begin{aligned}P(a^+) &= P(b^-) \\ \mathbf{J}(a^+) &= \mathbf{J}(b^-).\end{aligned}$$

**Condizioni al bordo all'infinito.** Tipicamente si lavora con oggetti che possono trovarsi a distanze finite, in tal caso le condizioni all'infinito vengono prese come:

$$\begin{aligned}P(\mathbf{x}, t) &\rightarrow 0 & |x| &\rightarrow \infty \\ \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) &\rightarrow 0 & |x| &\rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Se così non fosse allora una delle due quantità dovrebbe divergere.

**Diffusione nulla al bordo.** Se  $B_{iJ} = 0$  sul bordo del volume abbiamo una situazione totalmente deterministica. In tal caso tale zona potrebbe essere:

- Un ingresso dei camminatori
- Una uscita dei camminatori

In questo caso possono esistere delle situazioni ancor più esoteriche in cui oltre che ad avere  $B_{iJ} = 0$  sul bordo si ha anche  $A(\mathbf{z}) = 0$ . In questo caso speciale i camminatori che raggiungono il bordo si fermano.

#### Esempio 11.2.1.

$$dx = -\alpha x dt + x d\omega.$$

In questo caso il camminatore che arriva nell'origine si ferma. L'equazione di FK in questo caso può esser scritta riprendendo la formula 8.2:

$$\partial_t P = \left[ \partial_x \alpha x + \frac{1}{2} \partial_{x^2}^2 x^2 \right] P.$$

### 11.3 Distribuzione di equilibrio del processo

Riscriviamo la corrente esplicitando la derivata  $\partial_{x_J}$ :

$$J_i = \left[ A_i - \frac{1}{2} (\partial_{x_J} B_{iJ}) \right] P - \frac{1}{2} B_{iJ} \partial_{x_J} P \quad (11.1)$$

Cerchiamo una distribuzione di equilibrio con le seguenti ipotesi:

- $J$  si conserva e all'equilibrio  $J = 0$ .
- All'infinito la distribuzione di probabilità si annulla.
- $B_{iJ}$  invertibile.

Vogliamo allora capire con queste supposizioni quanto vale  $\partial_{x_J} P$ . Si procede invertendo l'espressione ??:

$$\partial_{x_J} P = 2B_{iJ}^{-1} \left[ A_i - \frac{1}{2} \partial_{x_k} B_{ik} \right] P.$$

Quindi portando a sinistra la  $P$  si ha anche:

$$\frac{\partial}{\partial x_J} \ln(P) = 2B_{iJ}^{-1} [A_i - \partial_{x_k} B_{ik}].$$

Quindi abbiamo a sinistra un gradiente, come conseguenza anche la quantità a destra deve essere un gradiente. Per le proprietà del gradiente deve essere vero che:

$$\text{rot}(\nabla f) = 0 \quad \forall f.$$

Quindi:

$$Z_J [A, B, \mathbf{x}] \equiv 2B_{iJ}^{-1} [A_i - \partial_{x_k} B_{ik}].$$

$$\text{rot}(Z_J) = 0 \quad (11.2)$$

Di fatto questa condizione si traduce in:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} Z_J = \frac{\partial}{\partial x_J} Z_i.$$

Se vale questa condizione possiamo allora integrare lungo una curva generica, si ottiene che:

$$P_{st}(\mathbf{x}) = \exp \left( \int^x ds \mathbf{Z} [A, B, s] \right)$$

In cui si definisce

### Forma potenziale

$$P(\mathbf{x}) = \exp(-\phi(\mathbf{x})) \quad (11.3)$$

con

$$\phi(\mathbf{x}) = - \int^x ds \mathbf{Z}.$$

Tutto questo metodo funziona se si verifica il fatto che  $\text{rot}(\mathbf{Z}) = 0$ . Nei casi in cui questa condizione non si avvera non è possibile integrare l'equazione ed ottenere il risultato stazionario 11.3.

**Esempio 11.3.1** (Processo di Wiener).

$$dx = f(x)dt + Bd\omega.$$

La FK si scrive come:

$$\partial_t P = \left( -\partial_x f + \frac{1}{2} B^2 \partial_{x^2} \right) P; \quad Z = \frac{2f}{B^2}.$$

Con  $Z$  valutato come sopra (tramite la corrente stazionaria). Quindi si ha che:

$$P_{st} \sim \exp \left( \int^x \frac{2f}{B^2} dx \right).$$

I processi di Wiener hanno una distribuzione di equilibrio.

Ovviamente è necessario avere una  $f$  che si comporti bene asintoticamente (se ho  $f = x$  rompo il metodo).

**Esempio 11.3.2** (Processo di OU). Prendiamo la stessa equazione dell'esempio precedente

$$dx = f(x)dt + Bd\omega.$$

tuttavia adesso il termine  $Bd\omega$  anziché essere un processo di Wiener (come si intende di solito) lo ipotizziamo di Ornstein-Uhlenbeck:

$$\begin{cases} Bd\omega = Bydt \\ dy = -\frac{1}{\tau}ydt + d\omega \end{cases}$$

Dove il  $d\omega$  nel sistema è adesso un processo di Wiener.

Ricordiamo che questo processo è caratterizzato da avere un taglio in frequenza di  $\frac{1}{\tau}$ .

Per semplificare ancora i conti inseriamo all'interno della SDE un secondo processo di Wiener  $d\omega_2$  (si capirà meglio sotto), si ottiene allora il sistema:

$$\begin{cases} dx = (f(x) + By) dt + d\omega_2 \\ dy = -\frac{1}{\tau}ydt + d\omega_1 \end{cases}.$$

In questo caso è evidente che i termini della FK in due dimensioni<sup>6</sup> corrispondono alle quantità:

$$\begin{aligned} A_x &= f + By & B_{xx} &= 1 \\ A_y &= -\frac{1}{\tau}y & B_{yy} &= 1. \end{aligned}$$

Possiamo scrivere la matrice del rumore  $B$  considerando i coefficienti a moltiplicare i due processi di Wiener  $d\omega_1, d\omega_2$  nelle equazioni. Visto che i due processi sono indipendenti e compaiono uno per l'equazione di  $x$  e l'altro per l'equazione di  $y$  si ha:

$$B = \begin{pmatrix} B_{xx} & B_{xy} \\ B_{yx} & B_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In conclusione possiamo scrivere l'equazione di FK:

$$\partial_t P(x, y) = \left[ -\partial_x A_x - \partial_y A_y + \frac{1}{2} (\partial_{x^2}^2 + \partial_{y^2}^2) \right] P(x, y).$$

Possiamo allora calcolare  $Z_x$  e  $Z_y$  ( $B$  è l'identità quindi  $B^{-1} = B$ ):

$$Z_x = 2(f + By) \quad Z_y = -\frac{2y}{\tau}.$$

<sup>6</sup>Si tratta di due dimensioni perché abbiamo una coppia di variabili stocastiche:  $x$  e  $y$ .

Per essere una divergenza  $\mathbf{Z}$  deve rispettare la condizione del rotore:

$$\text{rot}(\mathbf{Z}) = 0.$$

Tuttavia questa condizione non è soddisfatta:

$$\partial_y Z_x = 2B \neq \partial_x Z_y = 0.$$

Quindi questo processo non soddisfa la condizione di potenziale.

I processi di Ornstein-Uhlenbeck non hanno una distribuzione di equilibrio.

Questo non significa che integrando questa equazione numericamente non si possa ottenere niente, questo tipo di processi presenta una **distribuzione di quasi equilibrio** (approfondiremo più avanti).

**Esempio 11.3.3** (OU modificato). Prendiamo lo stesso moto analizzato nell'esempio precedente ed aggiungiamo il termine  $Bxdt$  all'equazione per  $y$ :

$$\begin{cases} dx = (f(x) + By) dt + d\omega_2 \\ dy = -\frac{1}{\tau}ydt + Bxdt + d\omega_1 \end{cases}.$$

In questo caso abbiamo che:

$$\begin{aligned} A_x &= f + By & B_{xx} &= 1 \\ A_y &= -\frac{1}{\tau}y + Bx & B_{yy} &= 1. \end{aligned}$$

Mentre la matrice  $B$  non cambia:

$$B = \begin{pmatrix} B_{xx} & B_{xy} \\ B_{yx} & B_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ed anche l'equazione di FP resta della stessa forma:

$$\partial_t P(x, y) = \left[ -\partial_x A_x - \partial_y A_y + \frac{1}{2}(\partial_{x^2}^2 + \partial_{y^2}^2) \right] P(x, y).$$

Quello che cambia è la forma di  $A_y$ , che contiene il termine  $Bx$  in più rispetto a prima. Questo comporta anche dei valori delle componenti di  $\mathbf{Z}$  diversi:

$$Z_x = 2(f + By) \quad Z_y = -\frac{2y}{\tau} + 2Bx.$$

Il rotore di  $\mathbf{Z}$  è nullo grazie al termine aggiuntivo.

Il termine aggiunto è quindi un termine ad-hoc per rendere il metodo visto sopra applicabile, infatti in questo modo è possibile avere una soluzione potenziale.

$$P_{st} \sim \exp(\phi).$$

con

$$\begin{aligned} \phi &= - \int^x ds \mathbf{Z} = \\ &= - \int^x (f + By) dx + \left( -\frac{y}{\tau} + Bx \right) dy = \\ &= \left( - \int^x f dx \right) - Bxy + \frac{y^2}{2\tau}. \end{aligned}$$

Ricordiamo che gli integrali con pedice  $x$  sono integrali di linea, sul percorso  $x$  ad intervalli  $ds$ .

Questa cosa ha anche un senso fisico, infatti le equazioni differenziali per  $x$  e  $y$  possono essere riscritte come:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\partial_x \left( - \int^x f dx - Bxy + \frac{y^2}{2\tau} \right) + \xi_x \\ \frac{dy}{dt} &= -\partial_y \left( - \int^x f dx - Bxy + \frac{y^2}{2\tau} \right) + \xi_y. \end{aligned}$$

Poiché svolgendo le derivate alcuni termini si annullano e tornano le due equazioni sopra ( $xi = d\omega/dt$ ). Quindi le due equazioni si presentano in termini di equazioni del moto classiche, nella quale il termine che viene derivato rispetto alla coordinata in ciascuna equazione funge da potenziale.

## 11.4 Bilancio dettagliato

Il principio del bilancio dettagliato detta la struttura della equazione di FP e permetterà di risolverla in certe condizioni.

Il fatto che la corrente sia nulla e che si possa costruire un potenziale equivale a dire che il sistema presenta il bilancio dettagliato.

### Sistema di particelle in moto

Supponiamo di avere un sistema di oggetti caratterizzati da una posizione ed una velocità ad un certo istante  $(r, v, t)$ . La probabilità di trovarsi in  $(r, v, t)$  e ad un altro istante in  $(r', v', t')$  può essere scritta come probabilità congiunta:

$$P(r', v', t + \tau; r, v, t) \quad t' = t + \tau.$$

Per trovare questa quantità possiamo ragionare in termini di propagatore (come abbiamo fatto nelle lezioni precedenti).

$$(r, v, t) \rightarrow (r', v', t + \tau).$$

### Metodo "Nolandiano"

Possiamo chiederci quale sia la probabilità del processo inverso.

$$(r', v', t + \tau) \rightarrow (r, v, t').$$

Anziché pensare ad una inversione temporale per risalire ad un istante precedente possiamo decidere di invertire puntualmente la velocità. In questo modo manteniamo l'ordine temporale mentre gli oggetti si muovono all'indietro (vedi Tenet)

$$(r', -v', t) \rightarrow (r, -v, t + \tau).$$

### Conseguenza del Bilancio dettagliato

Se il sistema presenta bilancio dettagliato allora vale che:

$$P(r', v', t+\tau; r, v, t) = P(r, -v, t+\tau; r', -v', t).$$

Ovviamente in un caso stazionario avviamo anche l'invarianza per traslazione temporale, quindi possiamo considerare l'istante  $t = 0$ :

$$P_s(r', v', \tau; r, v, 0) = P_s(r, -v, \tau; r', -v', 0).$$

Ipotizziamo adesso che il processo sia Markoviano. In tal caso la probabilità composta si può esprimere in termini della distribuzione stazionaria  $P_s(r, v)$  e del propagatore:

$$\begin{aligned} P(r', v', \tau | r, v, 0) P_s(r, v) &= \\ &= P(r, -v, \tau | r', -v', 0) P_s(r', -v'). \end{aligned}$$

Possiamo manipolare questa espressione valutando quali variabili cambiano segno sotto inversione temporale, in generale è vero che:

- Le variabili di tipo "coordinate" non cambiano segno

$$t \rightarrow -t \implies x \rightarrow x.$$

- Le variabili di tipo velocità cambiano segno

$$t \rightarrow -t \implies v_x \rightarrow -v_x.$$

Prendendo delle coordinate generalizzate  $x_i$  abbiamo che per inversione temporale:

$$x_i \xrightarrow{t \rightarrow -t} \epsilon_i x_i \quad \epsilon_i = \pm 1.$$

Quindi ragionando in termini vettoriali:

$$\mathbf{x} = (x, y, z, v_x, v_y, v_z).$$

La notazione usata allude alle coordinate di una singola particella, si può generalizzare una vettore  $\mathbf{x}$  a  $n$  particelle mettendo tutte le coordinate delle particelle  $1, \dots, n$  all'interno del vettore.

Possiamo riscrivere in modo generale i passaggi precedenti<sup>7</sup>:

$$P(\mathbf{x}, t + \tau; \mathbf{x}', t) = P(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{x}', t + \tau; \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{x}, t).$$

Prendiamo le condizioni "iniziali" per  $\tau = 0$ :

$$\tau = 0 :$$

$$\implies \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') P_s(\mathbf{x}') = \delta(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{x}' - \mathbf{x}) P_s(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{x}).$$

Sfruttando il fatto che la  $\delta$  è pari e che la  $\delta$  di una quantità vettoriale può essere vista come il prodotto di  $\delta$  se ne conclude che:

$$\begin{aligned} P_s(\mathbf{x}') &= P_s(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{x}) \\ &\Downarrow \\ P(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}', 0) P_s(\mathbf{x}') &= P(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{x}', \tau | \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{x}, 0) P_s(\mathbf{x}'). \end{aligned}$$

La prima comporta che  $P_s$  dovrà essere una potenza pari delle  $v$  poiché queste ultime cambiano di segno quando si applica  $\boldsymbol{\epsilon}$ .

### Conseguenze del bilancio dettagliato applicato ad una Chapman-Kolmogorov

Si può dimostrare che (libro di Van Kampen) il bilancio dettagliato permette di descrivere la struttura generale dei vari termini della equazione di CK (equazione 4.1), le seguenti formule sono pura referenza ma ne faremo uso...

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{x} | \mathbf{x}') P_s(\mathbf{x}') &= \omega(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{x}' | \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{x}) P_s(\mathbf{x}) \\ \epsilon_i A_i(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{x}) P_s(\mathbf{x}) &= \left[ -A_i(\mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial x_J} B_{iJ}(\mathbf{x}) \right] P_s(\mathbf{x}) \\ \epsilon_i \epsilon_j B_{iJ}(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{x}) &= B_{iJ}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (11.4)$$

### Nota storica sul Bilancio dettagliato

Storicamente si sono introdotte due quantità per capire se il sistema presenta il bilancio dettagliato:

$$\begin{aligned} D_i^{\text{irr}} &= \frac{1}{2} (A_i(x) + \epsilon_i A_i(\epsilon_i x)) \\ D_i^{\text{rev}} &= \frac{1}{2} (A_i(x) - \epsilon_i A_i(\epsilon_i x)). \end{aligned}$$

Infatti se la  $D_i^{\text{irr}} \neq 0$  allora il sistema non presenta il bilancio dettagliato.

#### Esempio 11.4.1.

$$\begin{cases} dx = v dt \\ mdv = -V'(x)dt - \gamma v dt + \sqrt{2\gamma k_B T} d\omega \end{cases} .$$

In cui si ha un termine di attrito alla Stokes:

$$\gamma = 6\pi\eta r.$$

L'equazione di FK che ne emerge è la seguente:

$$\begin{aligned} \partial_t P &= \\ &= -\partial_x v + \frac{1}{m} \partial_v [(V'(x) + \gamma v) P] + + \frac{\gamma k_b T}{m^2} \partial_{v^2}^2 P. \end{aligned}$$

Quindi abbiamo che:

$$A = \begin{pmatrix} v \\ -\frac{\gamma v}{m} - \frac{V'}{m} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\gamma k_b T}{m^2} \end{pmatrix}.$$

Visto che il termine di inversione  $\boldsymbol{\epsilon}$  ci da:

$$\boldsymbol{\epsilon} \cdot \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -v \end{pmatrix}.$$

Si ha anche che (si applica  $\boldsymbol{\epsilon}$  due volte, quindi dove opportuno c'è un doppio cambio di segno):

$$\boldsymbol{\epsilon} A(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -v \\ -\frac{\gamma v}{m} + \frac{V'}{m} \end{pmatrix}.$$

<sup>7</sup>Si è invertita la notazione degli indici primati...

Applicando adesso la seconda delle 11.4:

$$\begin{aligned} \epsilon A(\epsilon x)P_s(x) &= -A(x)P_s(x) + \partial_J B_{iJ} P_s(x) \\ &\Downarrow \\ \left( -\frac{v}{m} + \frac{V'}{m} \right) P_s &= \left( \frac{\gamma v}{m} + \frac{V'}{m} \right) P_s + \left( \partial_v \left( \frac{2\gamma k_B T}{m^2} \right) \right) P_s. \end{aligned}$$

Notiamo che la derivata  $J$  in questo caso indica la derivata sulla seconda componente: la velocità. La prima riga è una identità, la seconda riga invece è meno ovvia:

$$-\frac{2\gamma v}{m} P_s = \frac{2\gamma k_B T}{m^2} \partial_v P_s.$$

Se risolviamo si ha una forma per la  $P_s(x, v)$ :

$$P_s(x, v) = \exp \left( -\frac{v^2 m}{2k_B T} \right) f(x).$$

Notiamo come la distribuzione stazionaria  $P_s(x, v)$  sia quadratica in  $v$ . Questo, a conferma di quanto accennato prima, è dovuto all'invarianza di tale distribuzione quando si applica  $\epsilon$ .

Per trovare la  $f(x)$  basta reinserire la  $P_s$  nella equazione di FK, si impone che il processo sia stazionario ( $\partial_t P_s = 0$ ) e si ottiene:

$$\begin{aligned} v \partial_x f(x) &= -\frac{v}{k_B T} V'(x) f(x) \\ &\Downarrow \\ f(x) &\propto \exp \left( -\frac{V(x)}{k_B T} \right). \end{aligned}$$

In conclusione la distribuzione di equilibrio è la seguente:

$$P_s = N \exp \left( -\frac{1}{k_B T} \left( \frac{mv^2}{2} + V(x) \right) \right).$$

Notiamo come la forma sia esattamente quella che ci si aspetta da un caso fisico:

$$P \sim \exp(-\beta H).$$

Nell'esempio precedente si è legato il termine di dissipazione al termine stocastico (nelle SDE) nella formula:

$$mdv = -V'(x)dt - \gamma v dt + \sqrt{2\gamma k_B T} d\omega.$$

Notiamo infatti che  $\gamma$  compare sia nel termine per  $dt$  che in quello per  $d\omega$ .

Il motivo per il quale lo abbiamo fatto è dovuto ad un importante teorema.

## 11.5 Relazione di Onsager e Teorema di Fluttuazione Dissipazione.

Prendiamo un processo di OU nel quale all'interno della FK il termine  $A$  è lineare ed il termine  $B$  è costante

$$A_i(x) = A_{iJ} x_J \quad B_{iJ}(x) = B_{iJ}.$$

Questa linearizzazione valuta le piccole oscillazioni attorno al punto di equilibrio per un processo di OU. Se un processo ha le seguenti proprietà sotto inversione temporale<sup>8</sup>:

$$\begin{aligned} \epsilon_i \epsilon_J B_{iJ} &= B_{iJ} \\ (\epsilon_i \epsilon_J A_{iJ} + A_{iJ}) x_J &= B_{iJ} \partial_J \ln P_s \end{aligned} \quad (11.5)$$

Allora è sempre vero che:

$$P_s = N \exp \left( -\frac{1}{2} x^t D^{-1} x \right).$$

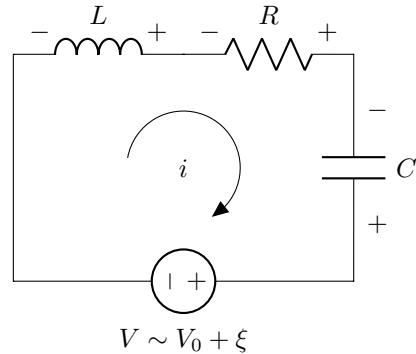
Con  $D^{-1}$  simmetrica.

Se vale il principio del bilancio dettagliato allora esistono delle relazioni che legano la matrice  $D^{-1}$  (che contiene l'equivalente della temperatura del sistema) ai vettori  $A$ :

$$\begin{aligned} \epsilon A \epsilon &= DA^t D^{-1} \\ \epsilon A \epsilon D &= DA^t \\ \epsilon (AD) &= (AD)^t \epsilon \\ B &= -(AD + DA^t). \end{aligned} \quad (11.6)$$

Per arrivare a queste conclusioni si è saltata una paccata di algebra noiosa.

**Esempio 11.5.1** (Circuito RLC). Prendiamo il seguente circuito



Dove la sorgente di potenziale è una soluzione ionica (presenta delle fluttuazioni  $\xi$ ).

L'equazione che determina la corrente nel circuito è:

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L} \left( -\frac{Q}{C} - iR + V_\xi \right).$$

Supponendo che anche la carica sul condensatore senta delle fluttuazioni si ha che:

$$\frac{dQ}{dt} = i - \gamma Q + Q_\xi(t).$$

Possiamo scrivere le SDE del processo stocastico come:

$$\begin{cases} di = -\frac{Q}{LC} dt - \frac{R}{L} idt + \frac{V_\xi}{L} dt \\ dQ = idt - \gamma Q dt + Q_\xi dt \end{cases}.$$

<sup>8</sup>Riscrivo le 11.4 in un'altra forma, esplicitando il fatto che  $B_{iJ}$  è costante.

La matrice  $A$  si esprime come:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{LC} \\ 1 & -\gamma \end{pmatrix}.$$

Mi aspetto che la distribuzione stazionaria abbia una forma del tipo:

$$P_s \sim \exp\left(-\frac{H}{k_B T}\right).$$

L'energia del sistema sappiamo che vale:

$$E = \frac{Li^2}{2} + \frac{Q^2}{2C}.$$

Guardando i termini dell'energia  $\sim H$  ci aspettiamo una matrice  $D$  della seguente forma<sup>9</sup>:

$$D = \begin{pmatrix} \frac{k_B T}{L} & 0 \\ 0 & k_B T C \end{pmatrix}.$$

Mentre per quanto riguarda la matrice di inversione basta considerare l'analogia  $(x, v) \rightarrow (Q, i)$ :

$$\epsilon = \text{diag}(-1, 1).$$

Possiamo verificare che siano rispettate le relazioni sulle matrici  $A$  e  $D$ :

$$AD = \begin{pmatrix} \frac{Rk_B T}{L^2} & \frac{k_B T}{L} \\ -\frac{k_B T}{L} & \gamma k_B T C \end{pmatrix}.$$

$$(AD)_{12} = -(DA)_{21}.$$

Inoltre troviamo la matrice  $B$  sfruttando l'ultima delle equazioni 11.6:

$$B = -(AD + DA^t) = 2k_B T \begin{pmatrix} R/L^2 & 0 \\ 0 & \gamma C \end{pmatrix}.$$

Troviamo allora che tutto il meccanismo delle equazioni esposte sopra funziona in questo esempio.

Quello che cerchiamo adesso è la relazione tra i termini stocastici nelle equazioni ( $V_\xi$  e  $Q_\xi$ ) e la temperatura.

Si nota intanto che i due processi stocastici potrebbero essere legati tra loro, ipotizziamo che le variabili stocastiche che descrivono  $V_\xi$  e  $Q_\xi$  siano  $\xi_1$  e  $\xi_2$  tali che:

$$\begin{cases} V_\xi / L \sim b_{11}\xi_1 + b_{12}\xi_2 \\ Q_\xi \sim b_{21}\xi_1 + b_{22}\xi_2 \end{cases}.$$

Per avere tutte le formule di equilibrio che abbiamo ottenuto in precedenza la struttura della matrice  $b$  deve essere (non ben spiegato perché):

$$b = \begin{pmatrix} \sqrt{2k_B T R / L^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2k_B T \gamma C} \end{pmatrix}.$$

<sup>9</sup>Dobbiamo considerare che l'inversa entrerà nella espressione per  $P_s$

Se ricordiamo bene le equazioni di partenza avevano le proprietà:

$$\begin{cases} di \sim -\frac{R}{L} idt \\ dQ \sim -\gamma Q dt \end{cases}.$$

I due termini a moltiplicare  $i$  e  $Q$  sono proprio i termini che ritroviamo in  $b_{11}$  e  $b_{22}$ .

### Sunto del teorema Flutt. Diss.

Dato un processo con

- Un termine di dissipazione  $\gamma$
- Un processo stocastico  $\xi$ .

Allora l'intensità del processo stocastico vale  $\sim \sqrt{2k_B T \gamma}$  (con normalizzazioni opportune)

## 11.6 Fokker-Plank dipendente dal tempo

L'argomento di questa sezione è un pò fumoso, operativamente si capirà meglio il significato con degli esempi pratici...

Riprendiamo l'equazione FK e cerchiamo una soluzione non stazionaria.

$$\partial_t P = \left( -\partial_x A + \frac{1}{2} \partial_{x^2} B \right) P \quad (11.7)$$

Possiamo vedere il termine nella parentesi di destra come un operatore:  $\mathcal{L}$ .

$$\partial_t P = \mathcal{L} P.$$

Possiamo vedere questa come una equazione agli autovalori, in tal caso possiamo scrivere la  $P$  come una sovrapposizione lineare di autovalori ed autovettori:

$$P = P_\lambda(x) e^{-\lambda t}.$$

Per poi sostituire nella equazione 11.7 per trovare le soluzioni  $P_\lambda, \lambda$ :

$$-\lambda P_\lambda e^{-\lambda t} = \mathcal{L} P_\lambda e^{-\lambda t} \quad (11.8)$$

Possiamo utilizzare la notazione della meccanica quantistica pensando ai  $P_\lambda$  nella equazione 11.8 come dei "ket".

Dobbiamo notare che l'equazione che agisce sui ket è nota, mentre quella che agisce sui bra no. Questo perché, a differenza del caso quantistico, qui c'è di mezzo la distribuzione stazionaria.

Quindi quando si cerca di applicare l'operatore  $\mathcal{L}$  a sinistra si deve tener di conto che va ad agire anche sulla distribuzione stazionaria.

Dobbiamo quindi scrivere la  $P(x, t)$  come:

$$P(x, t) = P_s(x) q(x, t).$$

Possiamo reinserire questa nella FK dipendente dal tempo e isolare i termini con  $P_s$  tramite integrazione

par parti. Ne emerge una equazione per  $q(x, t)$ , che rappresentano i bra, del tipo:

### Backward FK

$$\partial_t q = A\partial_x q + \frac{1}{2}B\partial_{x^2}^2 q.$$

Che differisce dalla equazione per il ket dal solo segno del primo termine dopo l'uguale.

Abbiamo quindi il set di equazioni agli autovalori:

$$\begin{cases} -\partial_x(AP_\lambda) + \frac{1}{2}\partial_{x^2}^2(BP_\lambda) = -\lambda P_\lambda \\ A\partial_x Q_{\lambda'} + \frac{1}{2}B\partial_{x^2}^2 Q_{\lambda'} = -\lambda' Q_{\lambda'} \end{cases} \quad (11.9)$$

A questo punto si tratta di fare fare algebra sulle espressioni, possiamo moltiplicare la prima per  $Q_{\lambda'}$ , integrarla su un certo intervallo  $(a, b)$  ed applicare l'integrazione per parti.

Il risultato al quale si arriva è il seguente:

$$\begin{aligned} (\lambda' - \lambda) \int_a^b Q_{\lambda'} P_\lambda dx &= \\ &= \left\{ Q_{\lambda'} \left[ -AP_\lambda + \frac{1}{2}\partial_x(BP_\lambda) \right] - \frac{1}{2}BP_\lambda \partial_x Q_{\lambda'} \right\}_a^b. \end{aligned}$$

Notiamo ancora l'importanza delle condizioni al contorno su  $(a, b)$ .

**Esempio 11.6.1** (Condizioni al contorno assorbenti). In tal caso il lato destro della equazione si annulla in quanto:

$$Q_{\lambda'}(a) = Q_{\lambda'}(b) = 0.$$

Quindi il sistema è "bi-ortogonale":

$$\int Q_{\lambda'} P_\lambda dx = \delta_{\lambda\lambda'}.$$

**Esempio 11.6.2** (Processo di Wiener con condizioni al bordo  $(0, 1)$  assorbenti.). Per via delle condizioni assorbenti in 0 e 1 abbiamo che:

$$P(0, t) = P(1, t) = 0.$$

La FK che descrive il processo di Wiener è:

$$\partial_t P = \frac{1}{2}\partial_{x^2}^2 P.$$

Possiamo scegliere la base più semplice per lo sviluppo nell'intervallo che rispetti le condizioni al bordo:

$$P_\lambda = \sin(\pi n x).$$

Quindi ogni  $P$  si scrive come sovrapposizione:

$$P(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda n t} \sin(\pi n x).$$

Inserendo nell'equazione per  $P$  si ottengono gli autovalori:

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{2}.$$

Per quanto riguarda i coefficienti  $b_n$  dobbiamo impostare delle condizioni iniziali:

$$P(x, 0) = \delta(x - x_0).$$

Quindi

$$b_n = b_n(0) = \int_0^1 \delta(x - x_0) \sin(n\pi x) dx = \sin(n\pi x_0).$$

E con questo il problema è risolto, infatti si ha:

$$P(x, t|x_0, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi n x_0) \sin(n\pi x) \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2}{2}t\right).$$

**Esempio 11.6.3** (Processo di Wiener in  $(0, 1)$  con condizioni riflettenti). Le condizioni riflettenti al bordo implicano che la corrente  $J$  si annulla al bordo, vista l'espressione di  $J$  (e ricordando che  $A = 0$  per il processo di Wiener) si ha:

$$\frac{\partial P(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial P(1, t)}{\partial x} = 0.$$

Quindi una base opportuna per le soluzioni è quella del coseno. Otteniamo quindi gli stessi autovalori del caso precedente:

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{2}.$$

Ma le autofunzioni sono adesso dei coseni, la soluzione finale è:

$$P(x, t|x_0, 0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(\pi n x_0) \cos(n\pi x) \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2}{2}t\right).$$

## Parte 2

### 11.7 Tempo di primo passaggio o MFPT

Ipotizziamo di avere un fenomeno stocastico e di osservarne l'andamento temporale. Possiamo ipotizzare anche che questo fenomeno presenti dei picchi randomici in maniera irregolare.

In questa lezione cerchiamo un metodo analitico per esprimere l'intervallo temporale medio tra due eventi di questo tipo, anche detto tempo di primo passaggio. Operativamente dobbiamo:

- Creare un modello del fenomeno in termini stocastici.
- Derivare una qualche quantità dal modello che ci permetta di calcolare il tempo medio tra gli eventi.

Ad esempio possiamo avere una certa distribuzione iniziale di oggetti (o camminatori):

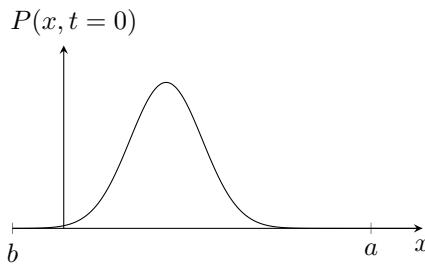


Figura 1.13: Distribuzione iniziale di camminatori.

Ciascuno di questi camminatori si muove secondo l'equazione differenziale stocastica del modello. Possiamo chiederci quanto tempo impiegheranno questi a raggiungere il punto  $a$ .

Possiamo notare subito che il tempo di passaggio dipenderà dalle condizioni al bordo su  $a$ : per condizioni assorbenti tale tempo sarà maggiore (i camminatori spariscono in  $a$ ), per condizioni riflettenti il tempo sarà minore (i camminatori rimbalzano ed hanno altri step, altre possibilità di raggiungere  $a$ ).

Per procedere possiamo seguire i passaggi:

- Si calcola la probabilità che la distribuzione non esca dal dominio (nell'esempio il domino era  $[a, b]$ ).
- Si scrive una equazione differenziale per la probabilità.
- Si risolve l'equazione differenziale.

### 11.8 MFTP in 1D

Prendiamo un ensemble di camminatori stocastici (sostanzialmente immaginiamo un processo di diffusione dei camminatori) nell'intervallo unidimensionale  $a \leq x \leq b$  con condizioni al contorno assorbenti:

$$P(a, t|x, 0) = P(b, t|x, 0) = 0.$$

La probabilità di essere ancora all'intervallo al tempo  $t$  se al tempo  $t = 0$  i camminatori si trovavano in  $x$  è  $G(x, t)$ :

$$G(x, t) = \int_a^b P(x', t|x, 0) dx'.$$

Si tratta sostanzialmente della probabilità condizionata di stare in un punto tra  $a$  e  $b$  al tempo  $t$ .

Sia  $T$  il tempo di uscita del camminatore dal segmento, la probabilità che  $T \geq t$  con  $t$  arbitrario vale:

$$\text{Prob}(T \geq t) = \int_a^b P(x', t|x, 0) dx' = G(x, t).$$

Poiché se al tempo  $t$  il camminatore sta ancora dentro l'intervallo allora sicuramente il tempo di uscita è maggiore di  $t$ .

Cerchiamo l'equazione differenziale alla quale soddisfa l'oggetto del moto.

Il problema è che l'equazione di FP che abbiamo visto per ora ci dice come evolve il propagatore, quindi in questo caso coinvolge la variabile  $x'$ . Noi vorremmo invece lasciar libera la variabile di integrazione  $x'$  e far agire la FK su  $x$ .

Ci viene in aiuto allora la Backward Fokker Plank, si riesce ad ottenere una equazione per la quantità  $P(x, t|y, t')$ . Si riporta adesso l'equazione completa (sul Gardiner si trova tutto il Ballino di conti):

#### Backward FK

$$\begin{aligned} \partial_{t'} P(x, t|y, t') &= \\ &= - \sum A_i(y, t') \partial_{y_i} P(x, t|y, t') + \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i,j} B_{ij}(y, t') \partial_{y_i} \partial_{y_j} P(x, t|y, t') + \\ &\quad + \int dz \omega(z|y, t') [P(x, t|y, t') - P(x, t|z, t')]. \end{aligned}$$

Tornando al problema MFPT in una dimensione l'equazione che ci serve è:

$$\begin{aligned} \partial_{t'} P(x', t|x, t') &= -A(x) \partial_x P(x', t|x, t') + \\ &\quad - \frac{1}{2} B(x) \partial_{x^2} P(x', t|x, t'). \end{aligned}$$

Possiamo notare che per processi omogenei nel tempo deve valere la proprietà (traslazione temporale):

$$P(x', t|x, 0) = P(x', 0|x, -t).$$

Quindi il termine a sinistra dell'uguale nella BFK si scrive come:

$$\begin{aligned} \partial_{t'} P(x', t|x, t') &= -\partial_t P(x', t-t'|x, 0) = \\ &= -\partial_{t''} P(x', t''|x, 0). \end{aligned}$$

E l'equazione completa diventa ( $t'' \rightarrow t$ ):

$$\begin{aligned} \partial_t P(x', t|x, 0) &= A(x) \partial_x P(x', t|x, 0) + \\ &\quad + \frac{1}{2} B(x) \partial_{x^2} P(x', t|x, 0). \end{aligned}$$

Notiamo che la dipendenza temporale è stata spostata tutta sul termine "finale" del propagatore  $(x', t)$ . Inoltre le derivate temporali sono applicate sul primo argomento del propagatore, quelle spaziali invece sul secondo argomento.

Integrando quest'ultima equazione tra  $a$  e  $b$  si ottiene una equazione per  $G(x, t)$ :

$$\partial_t G(x, t) = A(x) \partial_x G(x, t) + \frac{1}{2} B(x) \partial_{x^2}^2 G(x, t) \quad (11.10)$$

Inserendo le solite condizioni iniziali:

$$P(x', 0|x, 0) = \delta(x - x') \implies G(x, 0) = \begin{cases} 1 & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{Altrove} \end{cases}$$

Inoltre si deve avere anche che:

$$\text{Prob}(T \geq t) = 0 \quad \text{se } x = a \text{ oppure } x = b.$$

Quindi anche:

$$G(a, t) = G(b, t) = 0.$$

Visto che il nostro insieme di camminatori, al passare del tempo, avrà una probabilità sempre maggiore di uscire dal segmento sarà vero che:

$$G(x, t + dt) < G(x, t).$$

Il numero di camminatori usciti tra  $t$  e  $t + dt$  vale:

$$dG = G(x, t) - G(x, t + dt) = -\frac{d}{dt}(G(x, t))dt.$$

Questa quantità ci permette di calcolare tutti i valori medi di funzioni dipendenti dal tempo in questo intervallo:

$$\langle f(t) \rangle_x = \int_0^\infty f(t) \frac{d}{dt} [G(x, t)] dt.$$

In particolare il tempo medio di uscita, supponendo di essere in  $x$  a  $t = 0$ :

$$T(x) \equiv \text{MFPT} = - \int_0^\infty t \partial_t G(x, t) dt.$$

Integrando per parti:

$$T(x) = \int_0^\infty G(x, t) dt \quad (11.11)$$

In generale il "momento" n-esimo di primo passaggio vale:

$$T^n(x) = \langle T^n(x) \rangle = \int_0^\infty t^{n-1} G(x, t) dt.$$

Sfruttando la 11.11 e la 11.10 possiamo ricavare una equazione differenziale per il tempo di primo passaggio integrando e notando che:

$$\int_0^\infty \partial_t G(x, t) = G(x, \infty) - G(x, 0) = -1.$$

In conclusione:

$$-1 = AT'(x) + \frac{1}{2} BT''(x).$$

Con le condizioni al contorno banali:

$$T(a) = T(b) = 0.$$

Possiamo risolvere l'equazione per  $T(x)$  utilizzando il fattore integrante:

$$\phi(x) = \exp \left( \int_a^x \frac{2A}{B} dx' \right).$$

che ci porta ad una equazione integrabile per  $T(x)$ :

$$\frac{d}{dx} [T' \phi(x)] = -\frac{2}{B} \phi(x).$$

In conclusione si ha:

### Forma analitica di $T(x)$

$$T(x) = \frac{1}{N} [\Omega(x, b) - \Omega(a, x)].$$

con

$$N = \int_a^b \frac{dy}{\phi(y)}.$$

Che funge da normalizzazione, mentre al numeratore abbiamo:

$$\begin{aligned} \Omega(x_1, x_2) &= \\ &= \int_a^x \frac{dy}{\phi(y)} \int_{x_1}^{x_2} dy' \left[ \frac{1}{\phi(y')} \int_a^{y'} dz \frac{\phi(z)}{B(Z)} \right]. \end{aligned}$$

Cambiando le condizioni al contorno cambia anche il risultato, anche se i passaggi concettuali restano i medesimi.

**Esempio 11.8.1** ( $a$  riflette e  $b$  assorbe). Le condizioni ci dicono che:

$$\partial_x G(x, t)|_a = 0.$$

E si può arrivare a:

$$T(x) = 2 \int_x^b \frac{dy}{\phi(y)} \int_a^y \frac{\phi(z)}{B(z)} dz \quad (11.12)$$

### 11.9 MFPT per fuga da buca di potenziale

Prendiamo una buca di potenziale del seguente tipo:

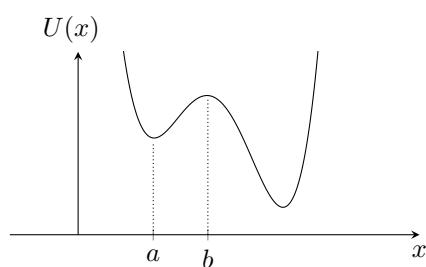


Figura 1.14: Potenziale al quale sono soggetti i camminatori.

Ipotizziamo di preparare il sistema nell'intervallo tra minimo e massimo del potenziale  $[a, b]$ , l'equazione dell'evoluzione del propagatore sarà:

$$\partial_t P = \partial_x (U'(x)P) + D\partial_{x^2}^2 P.$$

Ed abbiamo visto che questa equazione ha come soluzione stazionaria:

$$P_s \approx N \exp \left[ -\frac{U(x)}{D} \right].$$

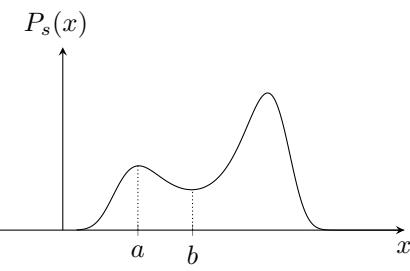


Figura 1.15: Distribuzione di probabilità stazionaria.

A questo punto dobbiamo scegliere le condizioni al contorno su  $a$  e  $b$ , prendiamo ad esempio le seguenti:

- $b \equiv x_0$  bordo assorbente: le particelle che arrivano qui fanno "Puf".
- $a \equiv -\infty$  come dire bordo riflettente poiché a  $-\infty$  c'è un muro di potenziale che va a  $\infty$ .

A questo punto possiamo prendere l'espressione 11.12 e specializzarla per il nostro problema. Si ottiene che il tempo di primo passaggio per andare da  $a$  a  $x_0$  vale:

$$T(a \rightarrow x_0) = \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{D} \int_a^{x_0} dy \exp \left( \frac{U(y)}{D} \right) \int_a^y \exp \left( -\frac{U(z)}{D} \right) dz.$$

Mettiamoci nel limite in cui la barriera di potenziale è molto maggiore del coefficiente di diffusione:

$$\Delta U = U(b) - U(a); \quad \frac{\Delta U}{D} \gg 1.$$

Concentrandoci in un intorno di  $b$  possiamo notare che:

$$\exp \left( \frac{U}{D} \right) \text{ ha max in } b.$$

Inoltre in questa approssimazione:

$$\text{Se } x = b \implies \exp \left( -\frac{U}{D} \right) \rightarrow 0 \quad \text{Con } \frac{U(b)}{D} \gg 1.$$

Visto che il secondo integrale contiene questo termine e che la variabile  $y$  corre tra  $-\infty$  e  $x_0 = b$  possiamo approssimare l'estremo di integrazione  $y$  come:

$$\int_{-\infty}^y \exp \left( -\frac{U(z)}{D} \right) dz \sim \int_{-\infty}^b \exp \left( -\frac{U(z)}{D} \right) dz.$$

Assumendo che i termini della somma provenienti da un intorno di  $b$  contino poco. In questo modo i due integrali si disaccoppiano:

$$T \approx \frac{1}{D} \int_{-\infty}^b \exp \left( -\frac{U(z)}{D} \right) dz \int_{-\infty}^{x_0} dy \exp \left( \frac{U(y)}{D} \right).$$

Un'altra approssimazione che si può fare è pensare  $U(x)$  parabolico intorno ad  $a$  e  $b$ :

$$U(x) \approx U(b) - \frac{1}{2} \frac{(x-b)^2}{\delta^2} \quad \text{vicino a } b$$

$$U(x) \approx U(a) + \frac{1}{2} \frac{(x-a)^2}{\alpha^2} \quad \text{vicino ad } a.$$

Risolvendo quindi gli integrali arriviamo ad una forma per il tempo di primo passaggio:

#### Legge di Arrhenius

$$T(a \rightarrow x_0) \approx 2\alpha\delta\pi \exp \left( \frac{U(b) - U(a)}{D} \right).$$

È una espressione simile alla legge di Arrhenius per le reazioni chimiche se poniamo  $D = k_B T$ .

### 11.10 MFPT in più dimensioni

Quando andiamo a studiare il caso multidimensionale si ha a che fare con questa equazione:

$$\sum_i A_i(x) \delta_i T(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} B_{ij} \partial_i \partial_j T(x) = -1 \quad (11.13)$$

Un modo elegante per risolvere è vederla come un problema agli autovalori.

Introduciamo il set di autofunzioni  $Q_\lambda(x)$ :

$$T(x) = \sum t_\lambda Q_\lambda(x).$$

Il problema si risolve reinserendo questa nella equazione 11.13 e mettendo le opportune condizioni al contorno sulle  $Q_\lambda$ .

Procedendo in questo modo ... si può dimostrare che il tempo di primo passaggio prende la forma:

$$T(x) = \sum_\lambda \frac{1}{\lambda} Q_\lambda(x) \int dx' P_\lambda(x').$$

Nei problemi tipici gli autovalori sono "separati esponenzialmente" l'uno dall'altro, quindi conta soltanto l'autovalore più basso (...).

Il tempo di primo passaggio diventa quindi:

$$T(x) \approx \frac{1}{\lambda_1} Q_1 \int P_1 dx \approx \frac{1}{\lambda_1}.$$

### 11.11 Calcolo numerico del MFPT

Prendiamo la SDE per un set di camminatori:

$$dx = f(x)dt + g(x)d\omega.$$

Quindi per piccoli tempi possiamo scrivere che:

$$x_{n+1} = x_n + f(x_n)\Delta t + g(x_n)\Delta\omega.$$

Quindi mettiamoci in un punto  $x_n$  e valutiamo la probabilità che  $x_{n+1}$  sia fuori dal dominio considerato  $(a, b)$ . Ad esempio consideriamo la probabilità che  $x_{n+1}$  sia oltre  $b$ .

Prendiamo il potenziale a doppia buca della sezione precedente, ipotizziamo che il camminatore elementare abbia fatto abbastanza passaggi da arrivare oltre il massimo  $b$  e cadere nella seconda buca.

Possiamo chiederci quale sia la storia degli step effettuati da questo camminatore elementare, andando a vedere l'intensità del processo di Wiener in funzione della posizione si scopre che:

Per superare il massimo del potenziale il processo di Wiener che spinge il camminatore deve essere sistematicamente diverso da zero.

Ipotizziamo di avere l'andamento del processo stocastico per un camminatore  $\omega(x)$ , dimostriamo che tramite questo possiamo risalire al MFPT.

$$x_{n+1} = x_n + f_n \Delta t + \sqrt{D} \Delta\omega.$$

E si ha anche che:

$$x_n = x_0 + \sum f_i \Delta t + \sqrt{D} \sum \Delta\omega_i.$$

Dalla prima possiamo estrarre  $\Delta\omega_n$ :

$$\Delta\omega_n = \frac{1}{\sqrt{D}} [x_{n+1} - (x_n + f_n \Delta t)].$$

Sappiamo che la forma del processo di Wiener (la soluzione) è la seguente:

$$P(\Delta\omega_n) \sim \exp\left(-\frac{(\Delta\omega_n)^2}{D \Delta t}\right).$$

Per effettuare un salto da  $a$  ad oltre il massimo  $b$  abbiamo bisogno di una sequenza di salti giusti  $\Delta\omega_i$ , ovvero tali che:

$$x_0 = a; \quad x_n = b.$$

Quindi la probabilità di andare da  $a$  a  $b$  sarà la probabilità che tutti i processi di Wiener adeguati si verifichino:

$$P(a \rightarrow b) \sim \prod_i \exp\left(-\frac{(\Delta\omega_i)^2}{D \Delta t}\right).$$

Ed inserendo la forma di  $\Delta\omega_i$  ricavata in precedenza:

$$P(a \rightarrow b) \sim \prod_i \exp\left(-\frac{(x_{i+1} - (x_i + f_i \Delta t))^2}{D \Delta t}\right).$$

Passando al continuo nel tempo ed applicando dell'algebra se ne conclude che per trovare la probabilità massima di fare il passaggio basta risolvere:

$$\min \int_a^b (\dot{x} - f) dt.$$

Questo determina la probabilità che si verifichi una speciale fluttuazione del processo di Wiener che ci fa fare il salto, in definitiva determina anche il tempo medio di primo passaggio.

## 12 Lezione 12

### 12.1 Simulazione del processo di Wiener in una doppia buca.

Riprendiamo l'ultimo argomento della lezione 11.6, ovvero il calcolo del tempo di primo passaggio con un metodo più potente.

Prendiamo un sistema di camminatori che seguono la seguente SDE:

$$\begin{aligned} dx &= f(x)dt + \sqrt{\epsilon}dW = \\ &= (x - x^3) dt + \sqrt{\epsilon}dW. \end{aligned} \quad (12.1)$$

In cui  $f(x)$  è la forza che sente il camminatore in un potenziale a doppia buca della forma:

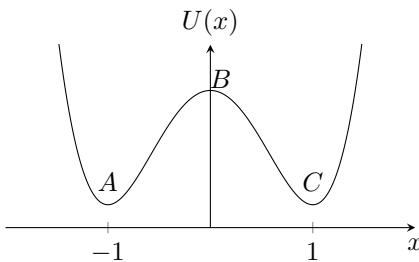


Figura 1.16: Potenziale in cui vivono i camminatori (l'integrale di  $f$  con il segno invertito).

Ipotizziamo di inserire tutti i camminatori nel punto  $A$ , il sistema grazie al processo di Wiener  $dW$  inizia a muoversi e può capitare che un camminatore riesca a raggiungere il punto  $B$  cadendo poi nella buca con minimo in  $C$ .

Quello che vogliamo capire è se tutti i processi di Wiener possono permettere questo tipo di moto oppure se serve una configurazione particolare di  $dW_n$  per raggiungere la buca  $C$ . Per capirlo operativamente si eseguono i seguenti passaggi:

- Si simula il sistema ipotizzando  $\sqrt{\epsilon} \ll f(x) \forall x$ .
- ad evoluzione finita si considerano solo le traiettorie  $x^{(j)}$  che hanno raggiunto  $C$  al tempo  $t^{(j)}$ .
- Si trasla l'origine temporale di ogni traiettoria  $x^{(j)}$  nell'istante in cui tale traiettoria ha raggiunto  $C$ .
- Si graficano tutte le traiettorie in un unico plot.

Effettuando una simulazione multipla seguendo questo procedimento si ottiene:

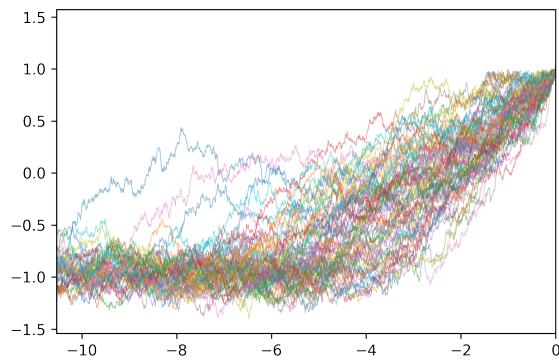


Figura 1.17: 70 camminatori che raggiungono il punto C (Link al codice in python).

Si nota come tutte le traiettorie sembrino seguire un percorso specifico, incanalandosi in una specie di tubo di flusso per arrivare in  $x = 1$ .

Questa cosa appare evidente se andiamo a vedere la densità dei punti in cui nei quali è passato il camminatore:

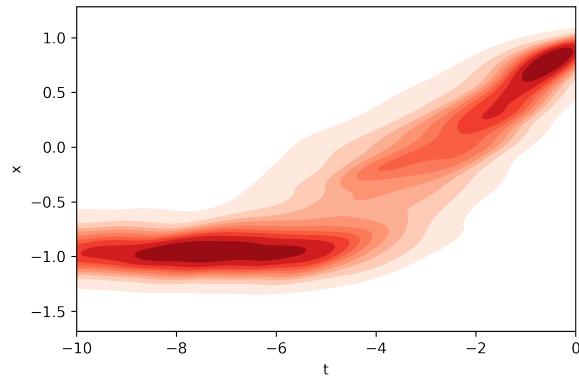


Figura 1.18: Densità dei camminatori che riescono a fare il salto nel tempo, si nota che si addensano attorno ad un tubo di flusso (Link al codice in python)

Una cosa molto interessante da notare è la scala temporale, se mediamente un camminatore impiega un tempo di 100 digit per scappare dalla buca  $A$  restringendoci ai soli camminatori che riescono nell'impresa questo tempo risulta essere inferiore a 8 digit.

Questo significa che la sequenza di  $dW_n$  che permette il passaggio è molto improbabile, infatti deve essere tale da spingere il camminatore oltre una barriera!

Si possono prendere tutte le sequenze di  $dW$  che hanno permesso ai 70 camminatori di attraversare la barriera e valutarne la densità in  $x$ . Il seguente grafico mostra un istogramma bidimensionale ('countour plot') del rumore in funzione di  $x$ :

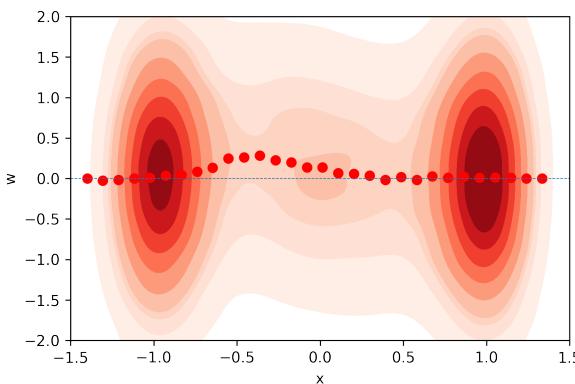


Figura 1.19: Distribuzione del processo stocastico per i camminatori che riescono a fare il salto, notiamo che la media del processo (curva arancione) deve essere diversa da zero (Link al codice in python).

Possiamo notare il fatto che per ottenere una sequenza giusta il rumore debba essere diverso da zero (e positivo) lungo la salita del potenziale.

Superata la barriera allora il rumore può gradualmente rilassare: la fatica ormai è fatta.

## 12.2 Hamiltoniana per il MFPT

Riprendiamo l'equazione per il processo in forma discretizzata:

$$x_{n+1} = x_n + f(x_n)\Delta t + \sigma\Delta\omega_n = F(x_n) + \xi_n.$$

$$\langle \xi_n \xi_m \rangle = \epsilon \Delta_{nm}.$$

Consideriamo sempre l'intervallo  $(a, b)$  come sopra. Abbiamo visto che la probabilità di andare da  $a$  a  $b$

$$P(x_b, t| x_a, 0).$$

è legata alla probabilità di una "corretta" fluttuazione di  $\xi$ .

Supponiamo di discretizzare il tempo con un passo  $\Delta t$ :

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t \quad \forall i.$$

La probabilità di arrivare in  $b$  può essere scritta come una catena di propagatori:

$$\begin{aligned} P(x_b, t|x_a, t_0) = & P(x_1, t_1|x_a, t_0) \cdot P(x_2, t_2|x_1, t_1) \cdot \dots \\ & \dots \cdot P(x_b, t_b|x_{n-1}, t_{n-1}). \end{aligned}$$

Dove si sfrutta in questo passaggio il fatto che il sistema è markoviano (quindi è lecito scrivere la probabilità composta in questo modo).

Notiamo che la probabilità di fare il salto dalla posizione  $x_i$  a quella  $x_{i+1}$  deve essere legato alla probabilità di ottenere il "giusto"  $\xi_i$  del processo di Wiener:

$$P(x_{i+1}, t_{i+1}|x_i, t_i) \sim P(\xi_i).$$

$$\text{Con } \xi_i : \quad x_{i+1} = F(x_i) + \xi_i.$$

Sia  $\gamma$  una fluttuazione ottimale che permette il passaggio da  $a$  a  $b$ .

$$\gamma \rightarrow [\zeta_1, \dots, \zeta_n].$$

La probabilità che tale fluttuazione avvenga avrà la forma (vedi ad esempio la soluzione stazionaria della Lezione 5.1):

$$P(\gamma) \sim \exp\left(-\frac{S[x_1, \dots, x_n]}{\epsilon}\right).$$

$$S = \frac{1}{2} \sum \zeta_i^2.$$

Quindi il tempo di primo passaggio può essere ricavato dal fatto che<sup>10</sup> :

$$P(x_n, t_n = T|x_0, t_0) \sim k \exp\left(-\frac{S_{\min}}{\epsilon}\right).$$

Quello che cerchiamo è il minimo dell'azione  $S$ :  $\bar{S}$ , ovvero la sequenza  $\gamma$  che massimizza la probabilità di fare il salto  $a \rightarrow b$ .

Per risolvere il problema di minimo possiamo utilizzare un set di moltiplicatori di Lagrange  $\lambda_i$ .

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \sum_i \zeta_i^2 + \lambda_i [x_{i+1} - F(x_i) - \zeta_i].$$

Risolvendo il problema dei moltiplicatori si ottiene:

1.  $x_{n+1} = F(x_n) + \lambda_n$
2.  $\lambda_{n+1} = \left[ \frac{\partial F}{\partial x_i} \Big|_{i=n+1} \right]^{-1} \lambda_n.$

Passiamo a tempi continui, chiamiamo  $\Delta t = h$ , dalla prima equazione si ottiene che<sup>11</sup> :

$$x_{n+1} = x_n + h f(x_n) + \lambda_n \implies \dot{x} = f + \lambda.$$

La seconda equazione può essere manipolata considerando la definizione di  $F$ :

$$F(x_n) = x_n + h f(x_n) \implies \frac{\partial F}{\partial x} = 1 + h f'.$$

Sostituendo questa nella (2.) e sommando e sottraendo  $\lambda_n$  si arriva a:

$$\dot{\lambda} = -f' \lambda.$$

Ci siamo ricondotti a due equazioni da integrare con le opportune condizioni al contorno:

### Equazioni di Hamilton per il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \lambda \\ \dot{\lambda} = -f'(x)\lambda \end{cases}.$$

l'Hamiltoniana che corrisponde a queste equazioni è della forma:

$$\lambda \rightarrow p \implies H = \frac{p^2}{2} + pf.$$

<sup>10</sup>La dimostrazione che questa probabilità ed il MFPT sono legati è nel PDF del professore (pathintegral).

<sup>11</sup>Non mi torna l' $h$ , mi pare sparita...

Infatti vale che:

$$\begin{cases} \dot{x} = [x, H] \\ \dot{p} = [p, H] \end{cases} .$$

Le condizioni al contorno che possiamo usare per risolvere sono

$$x(t=0) = a; \quad x(t=t_n) = b.$$

Il problema può essere risolto con il calcolo della azione, sappiamo che l'azione di un sistema è legata alla lagrangiana dalla seguente:

$$\dot{S} = \mathcal{L} = \frac{\partial H}{\partial P} P - H.$$

Quindi operativamente basta integrare la lagrangiana per ottenere la  $S$ , minimizzarla per avere la  $P$ , visto che  $P$  è proporzionale al tempo di primo passaggio  $T$ .

### Applicazione del metodo ad un potenziale $U(x)$

Prendiamo l'equazione per l'incremento di  $x$ :

$$dx = -U' dt + \sqrt{\epsilon} d\omega.$$

In cui si ha che, come già accennato  $-U' = f$ :

$$H = \frac{p^2}{2} - pU'.$$

Risolviamo le equazioni di Hamilton:

$$\begin{cases} \dot{x} = -U' + p \\ \dot{p} = U'' p \end{cases} .$$

Possiamo derivare la prima e sostituire  $\dot{p}$  dalla seconda:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -U'' \dot{x} + \dot{p} = \\ &= -U'' \dot{x} + U'' p = \\ &= U'' (-\dot{x} + p) = U' U''. \end{aligned}$$

Quindi ne emerge che  $U' U''$  ha la struttura di una "forza" <sup>12</sup>, vediamo qual'è la forma grafica di tutte le quantità in gioco.

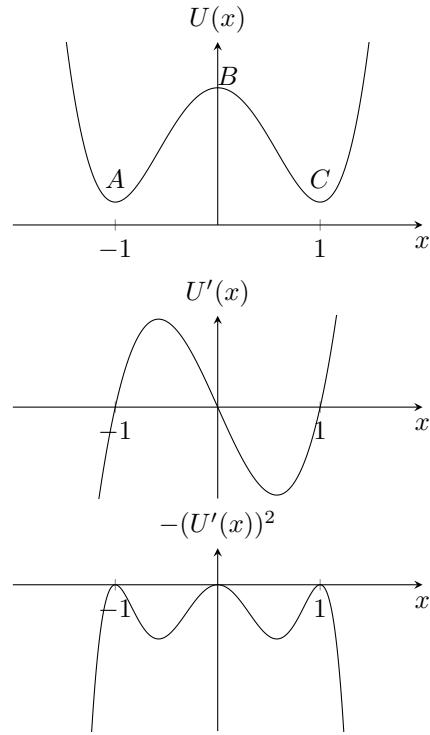


Figura 1.20: Potenziale in cui vivono i camminatori e la sua derivata strettamente legata alla forza sul camminatore.

Il potenziale efficace che mi genera la forza  $U' U''$  è

$$U_{\text{eff}} = -\frac{1}{2} (U'(x))^2.$$

Questo perché effettuando tale derivata si riottiene l'equazione sopra ai grafici, si ha quindi:

$$\ddot{x} = \frac{d}{dx} \left( -\frac{1}{2} (U'(x))^2 \right).$$

Quindi se integriamo questa equazione in  $x$  si scopre che il moto avviene ad una energia costante  $E$ , di fatto si trova la conservazione della energia meccanica:

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 - \frac{1}{2} U'^2 = E.$$

Notiamo che il grafico che conta ai fini del moto (della velocità del camminatore) è il terzo in Figura 1.20.

Poniamoci nel caso di energia nulla, si ottiene che

$$\dot{x} = \pm U' \quad (12.2)$$

Fisicamente nel sistema si ha che nel tratto di salita sul potenziale l'equazione del moto è

$$\dot{x} = +U'.$$

Mentre nel tratto di successiva discesa vale l'equazione con il meno. In conclusione si ha per l'esempio discusso in questa lezione:

$$\begin{cases} \dot{x} = +U' & x < 0 \\ \dot{x} = -U' & x \geq 0 \end{cases}$$

Adesso possiamo confrontare questa equazione con quella di partenza di questa lezione (è la 12.1 riscritta):

$$\dot{x} = -U' + \xi.$$

<sup>12</sup>Per unità di massa eventualmente...

Quindi notiamo che nella parte di discesa il moto stocastico  $\xi$  è irrilevante, infatti abbiamo l'equazione di partenza con  $\xi = 0$ . Nella parte di salita invece il moto stocastico è tale da invertire di segno all'equazione per  $\dot{x}$ .

Proprio per questo motivo le sequenze che permettono il passaggio sopra la barriera sono difficili da generare. Possiamo allora confrontare questa soluzione con le simulazioni mostrate sopra, generando la traiettoria di Equazione 12.2 si ottiene:

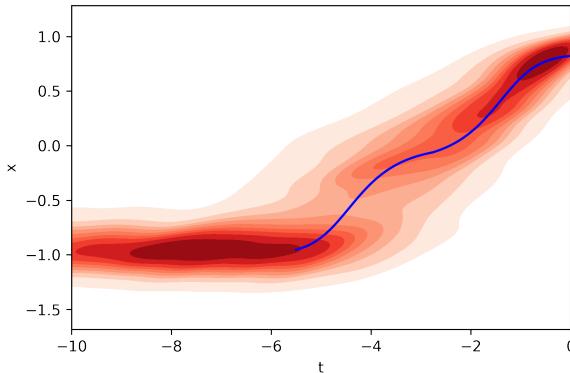


Figura 1.21: Confronto tra simulazione dei camminatori e curva teorica di un camminatore che minimizza l'azione (Link al codice in python).

Notiamo che la curva teorica è compatibile con il flusso di camminatori<sup>13</sup>.

Risolvendo le equazioni di Hamilton per  $p (= \lambda)$  si ottiene anche il seguente andamento teorico:

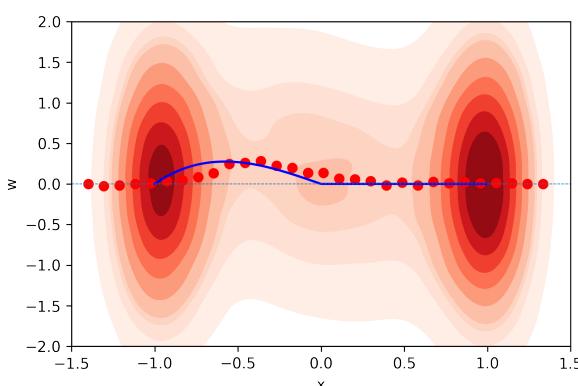


Figura 1.22: Confronto tra media predetta del processo di Wiener e media ottenuta dalle simulazioni, tutto in funzione di  $x$  (Link al codice in python).

Per ottenere questo risultato è stato necessario, a livello computazionale, di moltiplicare la soluzione  $p$  per il fattore  $dt/\sqrt{\epsilon}$ . Senza far questo il rumore ottenuto verrà fuori scala rispetto a quello simulato.

<sup>13</sup>Sul plot è necessario precisare che il camminatore con la legge  $\dot{x} = \pm U'$  raggiunge i punti interessanti  $x = 0$ ,  $x = +1$  in un tempo infinito. Il moto è stato tagliato per renderlo ragionevolmente simile all'andamento delle simulazioni. Guardando il file del professore suppongo abbia fatto lo stesso. Questo falsifica parzialmente la validità del risultato.

Possiamo notare una non conformità nei pressi di  $x = 0$ , questo può essere dovuto al campione statistico di simulazioni<sup>14</sup>.

Possiamo adesso utilizzare questo modello per confrontarlo con le simulazioni. In figura ... si mostra una simulazione di camminatori che raggiungono  $x = 0.2$  per poi rilassare.

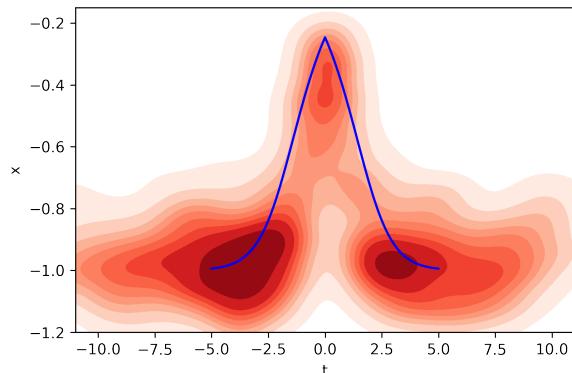
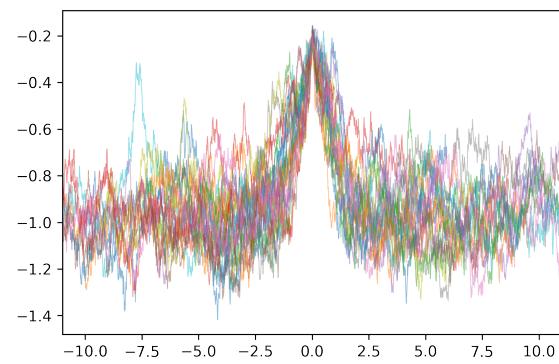


Figura 1.23: Camminatori selezionati che arrivano a  $x = 0.2$  per poi rilassare e distribuzione in densità dei camminatori con la curva teorica in blu (Link al codice in python).

Si nota come i camminatori si distribuiscono lungo due cammini che corrispondono a  $\dot{x} = \pm U'$ .

## 12.3 Da cammino ottimale a MFPT

Abbiamo detto che il contributo stocastico arriva solo nella parte di salita, possiamo usare questo per calcolare la derivata della azione:

$$\begin{aligned}\dot{S} &= \frac{\partial H}{\partial p} p - H = \\ &= (p - U') p - \frac{1}{2} p^2 + pU' = \\ &= \frac{1}{2} p^2 = \\ &= \frac{1}{2} (\dot{x} + U')^2.\end{aligned}\tag{12.3}$$

<sup>14</sup>Noto che il campione può essere ampliato scrivendo una funzione e chiamandola più volte. In questo modo si risolve il problema della memoria occupata in eccesso a causa della matrice di numeri random e di quella delle posizioni iniziali.

Sostituendo la soluzione per  $\dot{x}$  ottenuta prima si ha che:

$$\dot{S} = \begin{cases} 2(U')^2 & \text{Salita} \\ 0 & \text{Discesa} \end{cases} = 2\dot{x}^2 = 2\dot{x}U'.$$

A questo punto possiamo integrare per ottenere l'azione:

$$\begin{aligned} S_{min} &= \int \dot{S} dt = 2 \cdot \int_a^b \dot{x} U' dt = \\ &= 2 \int_a^b \left( \frac{dU}{dt} \right) dt = 2(U_b - U_a). \end{aligned}$$

Quindi il tempo di primo passaggio, come già accennato, sarà proporzionale a:

$$\begin{aligned} \text{MFPT} &\sim \exp \left( -\frac{S_{min}}{\epsilon} \right) = \exp \left( -\frac{2(U_b - U_a)}{2D} \right) = \\ &= \exp \left( -\frac{U_b - U_a}{D} \right). \end{aligned}$$

Che è proprio la legge di Harrenius trovata nella lezione precedente.

Il metodo esposto per il tempo di primo passaggio è molto generale, possiamo applicarlo anche a casi N-dimensional.

## 12.4 Calcolo del MFPT in 2D: Oscillatore di Van Der Pol invertito

Prendiamo un sistema bidimensionale con le seguenti SDE per il moto dei camminatori:

$$\begin{aligned} dx &= y dt \\ dy &= (-2\eta(1-x^2)y - x) dt + \sqrt{4\eta T} d\omega. \end{aligned}$$

Questo sistema è un famoso oscillatore, studiato per descrivere l'andamento della corrente nelle valvole.

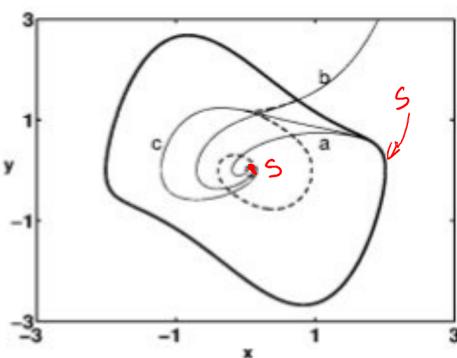


Figura 1.24: Oscillatore di Van Der Pole nello spazio  $x, y$ .

La linea scura in figura è un **Ciclo limite instabile**, inserendo un camminatore in questa traiettoria (con le condizioni iniziali opportune e rimuovendo la parte stocastica della equazione) questo rimarrebbe eternamente su di essa. Un camminatore che parte all'interno collassa sull'origine  $S$ , all'esterno invece i punti scappano via verso  $r \rightarrow \infty$ .

Possiamo immaginare quindi questo sistema come un potenziale dalla forma "vulcanica", in cui il ciclo limite instabile corrisponde al cratere.

Possiamo chiederci quanto impieghi un camminatore inizializzato all'interno ad arrivare sul bordo del cratere (come risalire un potenziale bidimensionale). Potremmo tentare di risolvere il problema come fatto in precedenza:

- Trovare l'equazione di FK.
- Scrivere l'equazione del tempo di primo passaggio.
- Risolvere l'equazione alle derivate parziali.

Il problema è che, anche se si riuscisse a risolvere l'equazione alle derivate parziali, non è affatto banale inserire le condizioni al contorno (ne analiticamente né numericamente).

Il vantaggio del metodo è che possiamo scrivere una Hamiltoniana per il sistema:

$$H = yp_x + [-2\eta(1-x^2)y - x] p_y + \frac{1}{2}(4\eta T)p_y^2.$$

Possiamo dire che i camminatori partono dal fondo del cratere  $S$ , si risolve il problema trovando i cammini che arrivano al bordo del cratere e poi si minimizzano questi cammini (si minimizza l'azione).

Le traiettorie  $a, b$  in figura 1.24 sono state trovate dal professore ed arrivano tangenti al ciclo limite.

Possiamo cercare di capire se il sistema ha una distribuzione di equilibrio, questo equivale a capire se il sistema presenta il bilancio dettagliato.

La condizione del bilancio dettagliato è soddisfatta se vale la 11.2. Esplicitando tale conto si ha:

$$\begin{aligned} f_x &= y & f_y &= -2\eta(1-x^2)y - x. \\ \frac{\partial f_x}{\partial y} &= 1 \neq \frac{\partial f_y}{\partial x} = 4\eta xy - 1. \end{aligned}$$

L'equazione al rotore nullo non è soddisfatta, quindi il sistema non presenta il bilancio dettagliato.

L'assenza del bilancio dettagliato non influisce sul calcolo del MFPT, tuttavia la traiettoria di fuga ottimale non è univoca (come invece si avrebbe con il bilancio dettagliato) e di conseguenza si sviluppa una cuspidone all'interno del ciclo limite instabile (nello spazio delle fasi vediamo più di un cammino partendo dallo stesso punto).

**Esempio 12.4.1.** Prendiamo la seguente SDE:

$$dx = (-U'(x) + A \sin(wt)) dt + \sqrt{\epsilon} d\omega.$$

La possiamo spezzare in due termini:

$$\begin{cases} dx_1 = wdt \\ dx_2 = (-U'(x_2) + A \sin(x_1)) dt + \sqrt{\epsilon} d\omega \end{cases}$$

Le equazioni di Hamilton-Jacobi ricordiamo essere:

$$\begin{cases} \dot{x} = -U' + p \\ \dot{p} = U''p \end{cases}$$

Essendo in due dimensioni non abbiamo quantità scalari, ad esempio:

$$-U' = \begin{pmatrix} w \\ A \sin(x_1) - U'(x_2) \end{pmatrix}$$

Quindi esisterà anche un tensore delle derivate seconde, le cui componenti non nulle sono:

$$\begin{aligned} U''_{x_1,2} &= -\partial_{x_1} w + \partial_{x_1}(A \sin(x_1)) = -A \cos(x_1) \\ U_{x_2,2} &= -\partial_{x_2}(-U'(x_2)) \end{aligned}$$

In cui si è cambiato segno perché avevamo  $-U'$ . Alla fine si ottiene un oggetto del tipo:

$$U'' = \begin{pmatrix} 0 & -A \cos(x_1) \\ 0 & d^2 U / d(x_2)^2 \end{pmatrix}.$$

In conclusione abbiamo il seguente set di equazioni per il moto:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= w \\ \dot{x}_2 &= -U'(x_2) + A \sin(x_1) + p_2 \\ \dot{p}_1 &= -A \cos(x_1) \cdot p_2 \\ \dot{p}_2 &= \frac{d^2}{d(x_2)^2}(U) \cdot p_2. \end{aligned}$$

L'Hamiltoniana si scrive come:

$$H = wp_1 + \frac{(p_2)^2}{2} + p_2(A \sin(x_1) - U'(x_2)).$$

Ricordiamo che di ha questa forma perché dev'essere:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}.$$

Possiamo estrarre l'azione dalla 12.3, si ottiene:

$$\dot{S} = p \partial_p H - H = \dots = \frac{(p_2)^2}{2}.$$

Simulando il moto con le equazioni di Hamilton si possono ottenere delle traiettorie come quelle in Figura 1.25.

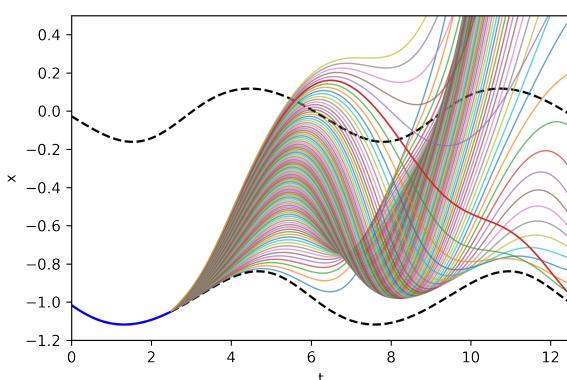


Figura 1.25: Traiettorie di fuga generate con le equazioni del moto. La traiettoria che minimizza l'azione (tra le condizioni iniziali testate) è evidenziata in rosso. Notiamo per arrivare in un punto nei pressi della cuspide ci siano più traiettorie possibili, questo è tipico dei sistemi che non hanno il bilancio dettagliato.

Per generare tali traiettorie c'è bisogno di un "delicato" lavoro computazionale. Creare la routine per i camminatori è semplice, meno semplice è la scelta delle condizioni iniziali. Il sistema è estremamente sensibile alla scelta di  $w$ ,  $A$  e tutte le variabili del moto  $p_i, x_i$ .

Alcune traiettorie in figura sembrano rilassare, questa è solo una "illusione", infatti nelle oscillazioni successive le traiettorie fuggono tutte, d'altronde il modello scelto serve "solo" a descrivere le traiettorie di fuga. Avendo la sequenza dei  $p_2$  è possibile calcolare anche l'azione complessiva su ogni percorso, il risultato che si ottiene è il seguente:

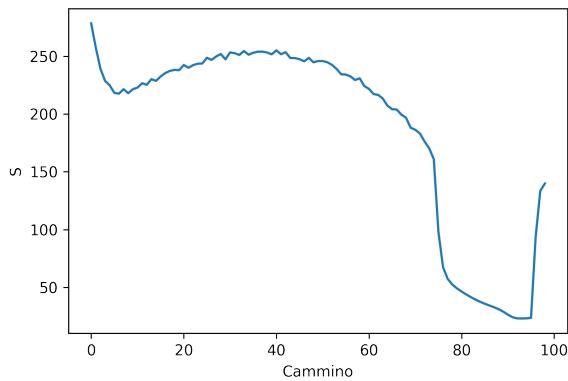


Figura 1.26: Azione al variare del camminatore  $i$ -esimo. Notiamo l'evidenza di un minimo corrispondente alla curva rossa in figura 1.25. La possibilità di stimare l'azione minima permette il calcolo del tempo di primo passaggio.

Il grafico precedente non rispecchia a pieno la vera azione di tutti i camminatori in quanto tutti i moti che scappano dal sistema sono stati troncati per evitare l'overflow, tuttavia possiamo affermare che l'azione di questi camminatori fuggenti è stata sicuramente sottostimata osservando le equazioni di Hamilton.

Il metodo per trovare le traiettorie di fuga (e quindi il MFPT) è molto potente quando il sistema presenta un "contorno" complicato, può essere applicato addirittura ad un bordo frattale come il set di Julia.

**Esercizio 12.4.1** (Camminatore con bordo dato dal set di Julia). Il set di Julia è un bordo frattale, le equazioni agli incrementi per il set sono:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n^2 - y_n^2 + ax_n + \xi_{x_n} \\ y_{n+1} &= 2x_n y_n + ay_n + \xi_{y_n}. \end{aligned}$$

In cui si inserisce un rumore per entrambi gli assi tale che:

$$\langle \xi_{i_n} \xi_{j_n} \rangle = \epsilon \delta_{ij} \delta_{nm}.$$

Il metodo si applica anche a questo bordo senza problemi, se si prova a fare il calcolo si ottiene:

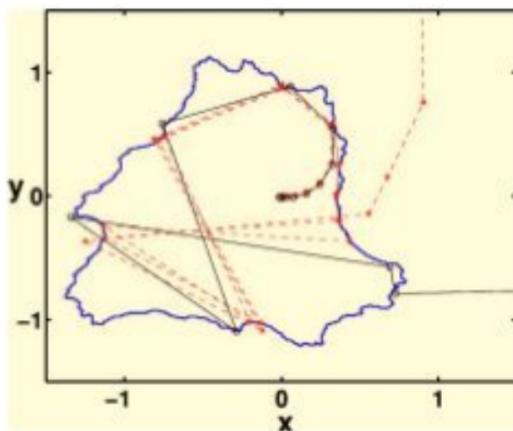


Figura 1.27: Set di Julia con cammino di fuga teorico (tratteggiato) e simulato (nero sottile).

**Esempio 12.4.2** (Processo di Ornstein-Uhlenbeck). Se prendiamo un processo di OU possiamo fare gli stessi ragionamenti dell'esempio precedente, partiamo dalle equazioni del processo:

$$\begin{aligned} dx &= f(x)dt + ydt \\ dy &= -\gamma ydt + \gamma \epsilon dW. \end{aligned}$$

Risolvendo si arriva alle equazioni di Hamilton-Jacoby:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + y \\ \dot{y} &= -\gamma y + p_y \\ \dot{p}_x &= -f'(x)p_x \\ \dot{p}_y &= p_x - \gamma p_y. \end{aligned}$$

Ed il problema è risolto.

## 12.5 MFPT applicato allo studio delle glaciazioni

Si è notato che l'alternanza tra glaciazioni e periodi caldi ha lo stesso periodo della variazione dell'eccentricità dell'orbita terrestre.

Possiamo fare una premessa: la temperatura della terra subisce un feedback negativo per le variazioni di temperatura.

- Se la temperatura diminuisce cade la neve ed aumenta il potere riflettente della terra, quindi la temperatura diminuisce ancor di più.
- Se la temperatura aumenta il ghiaccio si scioglie e si ha il viceversa.

Quindi possiamo immaginare la funzione che determina la temperatura sulla terra come un potenziale a doppia buca (sempre lui, Figura 1.16) i quali minimi corrispondono al periodo di caldo e di freddo.

Quello che potrebbe fare l'eccentricità è abbassare o alzare uno dei due minimi in funzione della distanza dal sole.

Possiamo allora scrivere delle equazioni per la probabilità di essere nel caldo o nel freddo come:

$$\begin{aligned} \dot{P}_f &= -\omega_{fc} P_f + \omega_{cf} P_c \\ \dot{P}_c &= +\omega_{fc} P_f - \omega_{cf} P_c. \end{aligned}$$

In cui le  $\omega_{ij}$  sono le probabilità di passare da  $i$  a  $j$ . Visto che l'eccentricità è oscillante possiamo modellizzare questa probabilità con una oscillazione avente lo stesso periodo della eccentricità:

$$\omega_{fc/cf} \sim \exp\left(-\frac{U}{T} \mp \frac{A \cos(wt)}{T}\right).$$

Con  $T$  temperatura media.

Adesso sfruttiamo la proprietà:

$$P_f + P_c = 1.$$

E approssimiamo l'esponenziale di  $\omega$  per temperature grandi ( $\gamma_0 = \exp(-U/T)$ )

$$\omega_{fc/cf} = \gamma_0 \left(1 \mp \frac{A \cos wt}{T}\right).$$

E si risolvono le equazioni differenziali (di un oscillatore smorzato con una forzante periodica)... Si arriva alla conclusione che:

$$P_f = P_0 + \alpha_1 \cos(wt) + \alpha_2 \sin(wt).$$

Supponendo che in partenza la probabilità di esser caldo o freddo sia la stessa si ha  $P_0 = 1/2$ , la cosa importante sono le costanti  $\alpha_i$ .

Andando a calcolare queste ... se ne conclude che:

$$|P_f| \sim \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} = \frac{A\gamma_0}{T} \frac{1}{\sqrt{w^2 + 4\gamma_0^2}}.$$

Questa struttura è interessante perché, andando a vedere il rapporto segnale/rumore ( $\sim |P_f|/T$ ):

$$\frac{S}{\text{noise}} \sim \frac{A\gamma_0}{T^2} \frac{1}{\sqrt{w^2 + 4\gamma_0^2}}.$$

L'andamento di questa funzione non è monotono ma presenta una temperatura ottimale, per tale temperatura si ha una massima probabilità di fare uno switch caldo/freddo in fase con l'eccentricità dell'orbita terrestre (**Risonanza stocastica**).

## 13 Lezione 13

Prendiamo di nuovo l'equazione differenziale CK (4.1) e concentriamoci sulla parte che abbiamo trascurato fino a questo punto: il processo a salti. Per trattarlo prendiamo l'esempio del processo di nascita-morte.

### 13.1 Processo di nascita e morte

Prendiamo un processo con la probabilità di transizione  $\omega$ :

$$\omega(x|x', t) = t^+(x')\delta_{x,x'+1} + t^-(x')\delta_{x,x+1}.$$

In cui  $t^\pm(x')$  sono le probabilità di nascita o di morte per un individuo in  $x$ , quindi per la popolazione  $x$  si ha:

$$\begin{cases} x \rightarrow x+1 \text{ con prob. } t^+(x) \\ x \rightarrow x-1 \text{ con prob. } t^-(x) \end{cases}.$$

Stiamo valutando come variabile  $x$  l'andamento del numero degli individui della popolazione. La probabilità di trovarsi in un certo punto  $x$  è quindi data dalla parte discontinua della equazione di Chapman-Kolmogorov:

$$\begin{aligned} \partial_t P(x, t|x', t') = & t^+(x-1)P(x-1, t|x', t') + \\ & + t^-(x+1)P(x+1, t|x', t') + \\ & - (t^+(x) + t^-(x))P(x, t|x', t'). \end{aligned}$$

Proviamo a risolvere questa equazione in modo analogo a quanto fatto per la Fokker-Plank. Cerchiamo la distribuzione di equilibrio:

$$\partial_t P_s(x) = 0.$$

$$\begin{aligned} 0 = & t^+(x-1)P_s(x-1, t|x', t') + \\ & + t^-(x+1)P_s(x+1, t|x', t') + \\ & - (t^+(x) + t^-(x))P_s(x, t|x', t'). \end{aligned}$$

Quindi possiamo scrivere una equazione per la conservazione della corrente:

$$J(x+1) - J(x) = 0 \quad (13.1)$$

In cui la corrente è definita come:

$$J(x) = t^-(x)P_s(x) - t^+(x-1)P_s(x-1) \quad (13.2)$$

Scegliamo le condizioni al contorno: identifichiamo con  $x=0$  il primo sito, in questo modo la transizione  $(x=0) \rightarrow (x=-1)$  deve essere posta nulla (non c'è nessuno da uccidere...):

$$t^-(0) = 0.$$

La condizione sul propagatore diventa:

$$P(x, t|x', t') = 0 \quad \text{se } x < 0 \text{ || } x' < 0.$$

Si hanno quindi delle conseguenze su  $J(0)$ :

$$J(0) = t^-(0)P_s(0) - t^+(0)P_s(-1) = 0 \quad (13.3)$$

Sfruttando l'identità 13.1 applicata a  $(x+1, x), (x, x-1), \dots$  fino a  $(1, 0)$  si arriva a dimostrare che, per via della 13.3:

$$J(x) - J(0) = 0 \implies J(x) = 0.$$

Questo risultato (oltre a dirci che il sistema presenta il bilancio dettagliato) ci permette di trovare la distribuzione di equilibrio utilizzando la definizione di  $J(x)$  (13.2):

$$P_s(x) = \frac{t^+(x-1)}{t^-(x)}P_s(x-1).$$

Risolvendo tale equazione definita per ricorrenza:

$$P_s(x) = P_s(0) \prod_{z=1}^x \frac{t^+(z-1)}{t^-(z)}.$$

### 13.2 Applicazione a processo con Rate di passaggio

Immaginiamo un processo in cui i rate di passaggio  $t^\pm$  possono essere scritti come:

$$\begin{cases} t^+(x) = k_2 a \\ t^-(x) = k_1 x \end{cases}.$$

Stiamo studiando un sistema di popolazioni in cui ho l'equilibrio tra la popolazione  $X$  e la popolazione  $A$  che ha un rate di nascita fissato  $k_2 a$ .

La master equation si esprime come:

$$\begin{aligned} \partial_t P(x, t) = & k_2 a P(x-1, t) + \\ & + k_1 (x+1) P(x+1, t) + \\ & - (k_1 x + k_2 a) P(x, t). \end{aligned}$$

Per trovare la distribuzione di equilibrio utilizziamo la funzione generatrice:

$$G(s, t) = \sum_{x=0}^{\infty} s^x P(x, t).$$

Notiamo che vale la seguente:

$$x s^x P(x, t) = s \partial_s s^x P(x, t).$$

Quindi otteniamo una equazione per  $G(s, t)$ :

$$\begin{aligned} \partial_t G(s, t) = & k_2 a s G(s, t) + k_1 \partial_s G(s, t) + \\ & - k_1 s \partial_s G(s, t) - k_2 a G(s, t) = \\ = & k_2 a (s-1) G(s, t) + k_1 (1-s) \partial_s G(s, t). \end{aligned}$$

Questa equazione alle derivate parziali può essere risolta con il metodo delle caratteristiche. Prima di applicare il metodo è necessario effettuare il cambio di variabile:

$$\begin{aligned} \phi &= \ln G, \\ \implies \phi_t + k_1 (s-1) \phi_s - k_2 a (s-1) &= 0. \end{aligned}$$

A questo punto si ottengono le due equazioni differenziali che ci portano alla soluzione:

$$\begin{aligned} dt &= \frac{ds}{k_1 (s-1)} \\ \frac{ds}{k_1} &= \frac{d\phi}{k_2 a}. \end{aligned}$$

Dalla prima si ottiene:

$$u_1 = t - \frac{\ln(s-1)}{k_1}.$$

dalla seconda invece:

$$u_2 = \frac{s}{k_1} - \frac{\phi}{k_2 a} = f(e^{-k_1 t}(s-1)) = f(e^{-k_1 u_1}).$$

Se ne conclude che

$$\phi = f(e^{-k_1 u_1}(s-1)) + \frac{sk_2 a}{k_1}.$$

E quindi abbiamo la  $G$ :

$$G = \exp\left(\frac{k_2 a s}{k_1}\right) f(e^{-k_1 u_1}(s-1)).$$

Notiamo che all'interno dell'esponenziale abbiamo  $s$  mentre nella funzione  $f$  compare il termine  $(s-1)$ . Possiamo allora moltiplicare la  $G$  per una costante (essendo  $f$  arbitraria) e riscrivere il tutto come:

$$G = \exp\left(\frac{k_2 a (s-1)}{k_1}\right) f(e^{-k_1 u_1}(s-1)) \quad (13.4)$$

Non sarebbe possibile sostituire  $s-1 \rightarrow s$  all'interno di  $f$  perché così facendo si sbaglierebbe la dipendenza dal tempo della funzione  $u_1$  ( $t$  e  $\ln(s-1)$  hanno lo stesso andamento poiché  $u_1$  costante).

Prima di procedere possiamo notare che, per la proprietà di completezza di  $P(x, t)$  si ha:

$$G(1, t) = \sum P(x, t) = 1.$$

Questo implica nella 13.4 che:

$$f(0) = 1.$$

Nel metodo delle caratteristiche per trovare la forma della  $f$  dobbiamo inserire le condizioni iniziali.

### Condizioni iniziali a $\delta$ .

Supponiamo che nello stato iniziale la popolazione sia  $N$  (vuol dire che la probabilità diventa una  $\delta$  in  $N$ ):

$$P(x, 0|N, 0) = \delta_{x, N} \implies G(s, 0) = s^N.$$

In cui  $N$  è un numero arbitrario. Sostituendo nella 13.4 con  $t=0$  si ottiene:

$$f(s-1) \exp\left(\frac{k_2 a}{k_1}(s-1)\right) = s^N.$$

Invertendo l'espressione si ha la  $f$ :

$$\begin{aligned} f(s-1) &= s^N \exp\left((s-1)\frac{k_2 a}{k_1}\right) = \\ &= \exp\left(-(s-1)\frac{k_2 a}{k_1}\right) (s-1+1)^N. \end{aligned}$$

Adesso reintroduciamo questa sempre nella 13.4 ricordando di sostituire, nella  $f$  il termine  $s-1$  con  $(s-1)e^{-k_1 t}$ .

$$\begin{aligned} G(s, t) &= \exp\left(\frac{k_2 a}{k_1}(s-1)\right)((s-1)e^{-k_1 t} + 1)^N \cdot \\ &\quad \cdot \exp\left(-(s-1)e^{-k_1 t}\frac{k_2 a}{k_1}\right). \end{aligned}$$

Il problema è formalmente risolto, tuttavia non si risale analiticamente al propagatore  $P$  tramite questa funzione caratteristica.

La funzione  $G$  ci permette comunque di trovare il valor medio della popolazione:

$$\begin{aligned} \langle x \rangle_t &= \partial_s G(s, t)|_{s=1} = \frac{k_2 a}{k_1}(1 - e^{-k_1 t}) + Ne^{-k_1 t} \\ \langle x^2 \rangle_t &= \partial_s^2 G(s, t)|_{s=1} = \langle x \rangle_t^2 - Ne^{-2k_1 t}. \end{aligned}$$

### Condizioni iniziali Poissoniane

Supponiamo che la popolazione iniziale avesse una distribuzione di probabilità poissoniana del tipo:

$$P(x, 0) = e^{-a_0} \frac{a_0^x}{x!}.$$

In tal caso la funzione caratteristica all'istante iniziale si può riscrivere tramite lo sviluppo dell'esponenziale:

$$\begin{aligned} G(s, 0) &= \sum s^x P(x, 0) = \\ &= \sum_x (sa_0)^x \frac{e^{-a_0}}{x!} = \\ &= e^{-a_0} e^{sa_0} = e^{a_0(s-1)}. \end{aligned}$$

Con passaggi analoghi a quelli per il caso precedente siamo in grado di trovare la  $f$  e reinserirla in  $G(s, t)$  ottenendo:

$$\begin{aligned} G(s, t) &= \exp\left((s-1)\frac{k_2 a}{k_1}\right) \times \\ &\quad \times \exp\left((s-1)e^{-k_1 t} \left(a_0 - \frac{k_2 a}{k_1}\right)\right) = \\ &= \exp\left((s-1) \left[a_0 e^{-k_1 t} + \frac{k_2 a}{k_1}(1 - e^{-k_1 t})\right]\right). \end{aligned}$$

Notiamo che la struttura della trasformata di una poissoniana è rimasta anche nella  $G(s, t)$ , solo che a differenza della  $G(s, 0)$  il termine  $a_0$  è stato sostituito da un termine  $\alpha(t)$  tale che:

$$\alpha(t) = a_0 e^{-k_1 t} + \frac{k_2 a}{k_1}(1 - e^{-k_1 t}).$$

Quindi:

$$G(s, t) = \exp((s-1)\alpha(t)).$$

Applicando un'antitrasformata possiamo risolvere nello spazio reale:

$$P(x, t) = \frac{e^{-\alpha(t)}}{x!} [\alpha(t)]^x.$$

Quindi la soluzione con queste condizioni iniziali è una poissoniana "traslata".

Vediamo quindi in generale che lavorare con la Master Equation è generalmente complicato, ci chiediamo se ci sia un modo per passare da questa equazione a quella di Fokker Plank.

### 13.3 Da Master Equation a Fokker Plank

Abbiamo visto in precedenza che a stazionarietà (o mandando a zero il passo del reticolo) un processo a salti poteva esser scritto con una FK. Il passaggio in generale può esser fatto sotto alcune condizioni, prendiamo la ME:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \int dx' [\omega(x|x')P(x') - \omega(x'|x)P(x)] \quad (13.5)$$

Possiamo scrivere una FK per questo processo della seguente forma:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \left[ -\partial_x A_1(x) + \frac{1}{2} \partial_{x^2}^2 A_2(x) \right] P(x).$$

Se vale che<sup>15</sup>:

$$\omega_\delta(x'|x) = \phi \left( \frac{x' - x - A(x)\delta}{\sqrt{\delta}}, x \right).$$

Ed inoltre, definito l'integrale:

$$Q = \int dy \phi(y, x).$$

Si deve avere che i 3 seguenti integrali rimangono finiti ( $A_1$  e  $A_2$  entrano nella FK):

$$\begin{aligned} A_0(x) &= \int dx' \omega_\delta(x'|x) = \frac{Q}{\delta} \\ A_1(x) &= \int dx' (x' - x) \omega_\delta(x'|x) = A(x)Q \\ A_2(x) &= \int dx' (x' - x)^2 \omega_\delta(x'|x) = \int dy y^2 \phi(y, x). \end{aligned}$$

**Esempio 13.3.1** (Random Walk). Nel caso del random walk si aveva:

$$x = nl.$$

$$\omega(x, x') = d(\delta_{x', x-1} + \delta_{x', x+1}).$$

Risolvendo per i momenti  $Q_i$  si ha:

$$\begin{aligned} A_0(x) &= 2d \\ A_1(x) &= 0 \\ A_2(x) &= 2l^2 d. \end{aligned}$$

Se assumiamo  $\delta = l^2$  e  $D = l^2 d$  e mandiamo  $l \rightarrow 0$  e  $\delta \rightarrow 0$  si ha che

- $\omega \rightarrow \infty$ .

<sup>15</sup>scrivendo l'equazione per un processo di Wiener appare naturalmente una forma di questo tipo per  $\omega$

- $A_1$  e  $A_2$  rimangono finiti.

Di conseguenza come avevamo visto questo esempio si esprime tramite una FK:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}.$$

**Esempio 13.3.2** (Distribuzione di Poisson). Nel caso della distribuzione di Poisson invece (lo sharp noise) quello che si ha è:

$$x = nl.$$

$$\omega(x|x') = d\delta_{x, x'+1}.$$

Quindi i momenti sono:

$$\begin{aligned} A_0(x) &= d \\ A_1(x) &= ld \\ A_2(x) &= l^2 d. \end{aligned}$$

Quindi non è possibile fissare finita ne la quantità  $ld$  ne la quantità  $l^2 d$ , in entrambi i casi uno tra  $Q_1$  e  $Q_2$  non è definito.

In questo secondo esempio non è possibile scrivere una Fokker Plank per il sistema. In precedenza infatti per risolvere questo caso abbiamo inserito il rumore  $\omega$  sopra ad una funzione, tuttavia così facendo si risolve un altro problema e non quello in questione.

## 14 Lezione 14

### 14.1 Derivazione classica del passaggio ME→FK: Kramers Moyal

Partiamo dalla ME di equazione 13.5:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \int dx' [\omega(x|x')P(x') - \omega(x'|x)P(x)].$$

Prendiamo il primo termine nella quadra e interpretiamolo come una funzione di  $x'$ :

$$\omega(x|x')P(x') = f(x').$$

Ipotizziamo che la  $\omega$  sia un oggetto "stretto"<sup>16</sup>, ovvero che la probabilità di fare salti "grandi" sia trascurabile. In questo modo possiamo espandere la  $f(x')$  per piccoli  $x'$  (intorno a  $x$ ):

$$f(x') = f(x) + (x' - x) \partial_x f(x)|_x \dots$$

Effettuiamo adesso un cambio di variabili:

$$x' = x - y \quad x = x' + y.$$

e riscriviamo l'espansione di  $f(x')$  in funzione delle nuove:

$$\begin{aligned} \omega(x|x')P(x') &= \omega(x+y|x)P(x) + \\ &\quad - y \partial_x \omega(x+y|x)P(x) + \\ &\quad + \frac{1}{2}(-y)^2 \partial_{x^2}^2 \omega(x+y|x)P(x) \dots \end{aligned}$$

Il vantaggio di questa scrittura è che il primo termine della somma cancella il secondo termine in quadra nella equazione 13.5. Quindi reinserendo all'interno dell'integrale si ottiene:

#### Espansione di Kramer-Moyal

$$\partial_t P = \sum_{n=1}^{\infty} \partial_{x^n}^n \frac{(-1)^n}{n!} A_n(x) P(x).$$

in cui:

$$A_n(x) = \int y^n \omega(x+y|x) dy.$$

Se ci fermiamo al secondo ordine otteniamo proprio la Fokker Plank citata nella scorsa lezione:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \left[ -\partial_x A_1(x) + \frac{1}{2} \partial_{x^2}^2 A_2(x) \right] P(x).$$

Con questa derivazione non si capisce molto bene perché ci si debba fermare proprio al secondo ordine. Vediamo un modo più elegante per giungere alle stesse conclusioni.

### 14.2 Derivazione di Van Kampen

Riprendiamo un sistema unidimensionale che può fare salti discreti (tipo posizioni fisse su reticolato), l'idea di Van Kampen è quella di assumere che i salti che la variabile può fare siano molto più piccoli della dimensione caratteristica del sistema.

**Esempio 14.2.1** (Reazione chimica). Sia la variabile  $a$  il numero di atomi che partecipano ad una determinata reazione in un sistema all'istante  $t$ . In un istante successivo  $t + \Delta t$  l'incremento di  $a$  sarà discreto. Van Kampen assume che questo incremento debba essere molto minore del numero di Avogadro, la grandezza tipica di un sistema molecolare macroscopico.

Dovrà esistere in questo tipo di sistemi una variabile intensiva  $x$  che "governa" il moto, nel caso della reazione chimica questa sarà la concentrazione di atomi.

$$x = \frac{a}{\Omega}.$$

Nell'esempio della reazione  $\Omega$  sarà il volume del sistema mentre  $a$  sarà il numero delle molecole. La probabilità che la reazione chimica avvenga sarà legata alla concentrazione  $x$ .

Quello che cerca di fare VK è di scrivere la  $\omega$  in funzione, anziché del numero di molecole  $a$ , della concentrazione  $x$ .

Se il sistema ha un volume molto grande allora possiamo assumere che la concentrazione diventi un numero reale. L'idea chiave è quindi che i termini successivi al secondo nella equazione di KM spariscono perché c'è un termine al denominatore divergente che li divide (come il volume  $\Omega$  in questo esempio).

Scriviamo la probabilità di transizione  $\omega$  come una quantità dipendente non dai due stati  $a$  e  $a'$  ( $a$  è sempre il numero di atomi nell'esempio) ma dallo stato iniziale  $a'$  e dall'incremento  $\Delta a = a - a'$ .

$$\omega(a|a') = \omega(a'; \Delta a).$$

A questo punto possiamo riscrivere la  $\omega$  in funzione della concentrazione, dobbiamo tuttavia assumere una proporzionalità tra questa probabilità ed il volume. L'assunzione è fisicamente ragionevole: aumentando il volume aumenta anche la probabilità che avvenga la reazione:

$$\omega(a', \Delta a) = \Omega \psi \left( \frac{a'}{\Omega}, \Delta a \right).$$

A questo punto cambiamo variabili definendo la  $z$  tramite:

$$a = \Omega \varphi(t) + \sqrt{\Omega} z.$$

Questo cambio di variabili ha lo scopo di far tendere a zero le fluttuazioni della concentrazione<sup>17</sup> quando il volume diverge:

$$x = \frac{a}{\Omega} = \varphi(t) + \frac{z}{\sqrt{\Omega}}.$$

<sup>16</sup>questo è garantito dalla presenza di un momento secondo

<sup>17</sup>che la variabile  $z$  ha in pancia

In termini di  $x$  i momenti scritti in precedenza diventano<sup>18</sup>:

$$A_n(a) = \Omega \tilde{A}_n(x).$$

Sostituendo tutto nella equazione di Kramers Moyal si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(z, t) - \sqrt{\Omega} \dot{\varphi} \frac{\partial}{\partial z} P(z, t) &= \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Omega^{1-n/2}}{n!} \left( -\frac{\partial}{\partial z} \right)^n \tilde{A}_n \left[ \varphi(t) + \frac{z}{\sqrt{\Omega}} \right] P(z, t). \end{aligned}$$

Visto che  $\dot{\varphi}$  è ancora "libera", ovvero non è stata definita, possiamo sceglierla come:

$$\dot{\varphi} = \tilde{A}_1(\varphi).$$

Questa scelta permette di cancellare il primo termine della sommatoria che va come  $\sim \sqrt{\Omega}$ . La sommatoria parte adesso da  $m = 2$ .

A questo punto si procede espandendo in serie di  $1/\sqrt{\Omega}$  la quantità:

$$\tilde{A}_n \left( \varphi + \frac{z}{\sqrt{\Omega}} \right).$$

reintroducendo l'espansione nella equazione di KM si ha:

$$\begin{aligned} \partial_t P(z, t) &= \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\Omega^{-(m-2)/2}}{m!} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m!}{n!(m-n)!} \times \\ &\quad \times \tilde{A}_n^{(m-n)} [\varphi] \left( -\frac{\partial}{\partial z} \right)^n z^{m-n} P(z, t). \end{aligned}$$

A questo punto quando il volume diverge l'unico termine che sopravvive è quello con  $m = 2$ :

$$\begin{aligned} \partial_t P(z, t) &= -\tilde{A}_1 [\varphi] \frac{\partial}{\partial z} (z, P(z, t)) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \tilde{A}_2 [\varphi(t)] \frac{\partial^2}{\partial z^2} P(z, t). \end{aligned}$$

### KM vs VK

L'espansione di Kramers Moyal di se per se è "brutta", inserita in un contesto fisico nel quale può esser definita una variabile intensiva come la concentrazione acquista di significato e permette di riscrivere una equazione di Fokker Plank anche per un processo a salti (sotto le opportune ipotesi).

Notiamo anche che l'espansione nella visione di Von Kampen, una volta riportata nella variabile originale  $x$  contiene un termine di volume in più rispetto alla equazione di Kramers Moyal al secondo ordine:

$$\partial_t P(x) = -\partial_x \left[ \tilde{A}_1(x) P(x) \right] + \frac{1}{2\Omega} \partial_{x^2}^2 \left[ \tilde{A}_2(x) P(x) \right].$$

<sup>18</sup>La notazione è un pò infelice: gli esempi precedenti parlavano di variabile del sistema come  $x$ , adesso  $x$  è la variabile intensiva del problema, l'analogia con le cose precedenti sta tra  $a$  di questo esempio ed  $x$  degli esempi precedenti.

### 14.3 Differenze fisiche tra Kramers Moyal e Van Kampen

Le due visioni sono identiche all'ordine  $1/\sqrt{\Omega}$ , per ordini successivi invece è necessario fare una distinzione tra il tipo di passaggio al continuo del sistema:

- Se  $\delta \rightarrow 0$  (il salto) allora i termini nella KM superiori al secondo ordine diventano piccoli di conseguenza la Fokker-Plank generata da Kramers Moyal va più che bene, in questo caso i termini di tale equazione sono non lineari.
- Se  $\Omega \rightarrow \infty$  allora serve la Fokker Plank generata dalla trattazione di Van Kampen, l'equazione in questo caso resta lineare.

# Capitolo 2

## Sistemi caotici

### 15 Lezione 15

#### 15.1 Dinamica nello spazio delle fasi.

Tipicamente si parte da un set di variabili differenziali della seguente struttura:

$$\dot{x} = f(x).$$

In cui  $x$  sono delle coordinate generalizzate, mentre le  $f(x)$  sono delle funzioni di queste variabili tipicamente non lineari.

**Esempio 15.1.1** (Oscillatore armonico).

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -\omega_0^2 x.\end{aligned}$$

In questo caso si prendono come coordinate  $x$  e  $v$  e si possono vedere le traiettorie nello spazio delle fasi. Prendendo ad esempio  $\omega_0^2 = 1$  si scopre l'identità:

$$\frac{d}{dt}(v^2 + x^2) = 0.$$

Di conseguenza le traiettorie nello spazio delle fasi sono dei semplici cerchi.

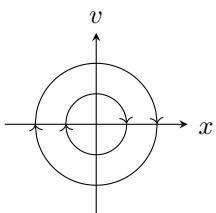


Figura 2.1: Moto nello spazio delle fasi per un oscillatore armonico.

**Esempio 15.1.2** (Pendolo).

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -\frac{g}{l} \sin(x).\end{aligned}$$

Dobbiamo prima cercare le traiettorie per il quale si annullano  $\dot{x}$  oppure  $\dot{v}$  (le nurk lines).

- $\dot{x}$  si annulla quando  $v = 0$ , quindi per tale retta si ha una nurk line.

- $\dot{v}$  si annulla con  $\sin(x) = 0$ , quindi avremmo delle nurk line verticali per i seguenti valori di  $x$ :

$$x = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Anche in questo caso è noto che vi è un integrale del moto (la cui derivata rispetto al tempo è nulla):

$$E = \frac{1}{2}v^2 - \frac{g}{l}(\cos(x) + 1).$$

Quindi possiamo disegnare delle linee di flusso nello spazio delle fasi semplicemente plottando al variare di  $E$  la seguente:

$$v = \pm \sqrt{2(E + \frac{g}{l}(1 + \cos(x)))}.$$

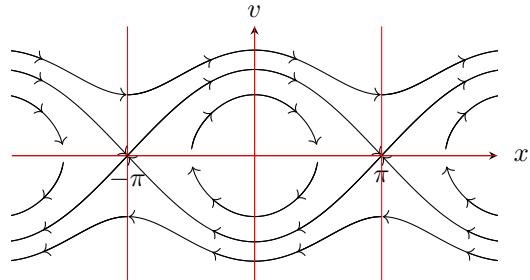


Figura 2.2: Moto nello spazio delle fasi per il pendolo, le linee rosse indicano i valori di  $x$  e  $v$  per il quale si annullano la  $\dot{x}$  o la  $\dot{v}$ . Le linee più esterne indicano un moto con  $E > 0$ , le linee che toccano l'asse  $x$  e "rimbalzano" mantenendo il segno di  $v$  sono quelle con  $E = 0$  mentre le linee che girano nel centro dell'"occhio" hanno  $E < 0$ .

Notiamo in figura 2.2 che nei punti

$$x = 2k\pi, \quad v = 0.$$

le linee di flusso si incrociano ma la dinamica del pendolo sembra presentare uno "spigolo": come se il moto rimbalzasse sull'asse  $x$ . Approfondiremo nel corso della lezione la natura di questi punti sella.

In generale vale che:

#### Linee di flusso nello spazio delle fasi

Dato un potenziale  $U(x)$  possiamo disegnare delle linee di flusso ad energia fissata nello spazio delle fasi  $v, x$  come:

$$v = \pm \sqrt{2(E - U(x))}.$$

**Esempio 15.1.3** (Moto in doppia buca). Prendiamo un potenziale formato da una doppia buca asimmetrica, il moto nello spazio delle fasi è il seguente:

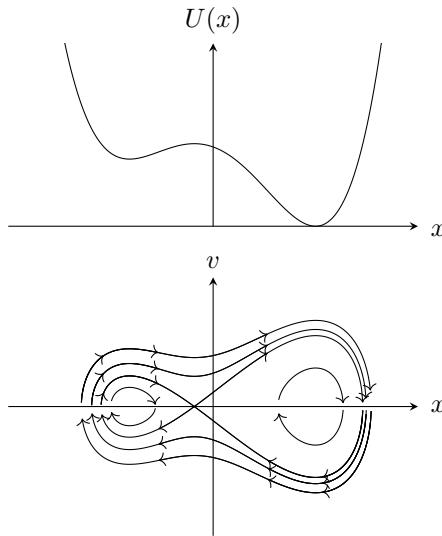


Figura 2.3: Potenziale a doppia buca e linee di flusso per il moto nello spazio delle fasi. Notiamo la presenza di un punto sella che equivale ad un moto nel quale l'oggetto raggiunge il punto di massimo tra le buche con velocità nulla (in un tempo infinito).

Notiamo in figura ?? che il moto può rimanere confinato all'interno di una delle due buche, esistono anche traiettorie che riescono ad entrare in tutte e due le buche "girando in tondo" nello spazio delle fasi.

In generale potremmo cercare un metodo per capire quali traiettorie scappano dal potenziale e quali invece rimangono confinate.

## 15.2 Tecnica della stabilità lineare

Prendiamo delle equazioni del moto del seguente tipo:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}.$$

e supponiamo di aver identificato un punto  $P_0 = (x_0, y_0)$  tale per cui  $\dot{x} = \dot{y} = 0$ .

La tecnica della stabilità lineare si basa sulla espansione delle equazioni del moto attorno al punto di equilibrio  $P_0$ .

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \delta x \\ y &= y_0 + \delta y. \end{aligned}$$

Derivando queste due equazioni si ottiene:

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{x} \\ \delta \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x f & \partial_y f \\ \partial_x g & \partial_y g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} \equiv M \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix}.$$

A questo punto diagonalizzando la matrice  $M$  si ottiene l'andamento del moto nello spazio delle fasi in un intorno del punto di stabilità  $P_0$ .

$$\det |M - \lambda \mathbb{I}| = 0.$$

Infatti ottenuto il set di  $\lambda_i$  possiamo scrivere:

$$\delta \mathbf{x} = C_1 \mathbf{D}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \mathbf{D}_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Con  $\mathbf{D}_i$  autovettori. Nel sistema di questi si ha che:

$$\dot{\mathbf{D}} = \lambda \mathbf{D}.$$

## 15.3 Classificazione dei punti fissi

A seconda del segno degli autovalori possiamo riscontrare diverse situazioni:

**Nodo stabile** Se gli autovalori sono entrambi negativi:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$$

allora l'oggetto del moto cade nel punto  $P_0$  esponenzialmente nel tempo (nello spazio degli autovettori  $D_i$ ) come possiamo vedere in figura 2.4(a)).

### Nodo instabile

$$\lambda_1 > \lambda_2 > 0.$$

In questa situazione l'oggetto del moto si allontana esponenzialmente dal punto fisso (figura 2.4(b)).

### Punto iperbolico

$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2.$$

Questa è la situazione di punto sella accennata nelle sezioni precedenti (figura 2.4(c)).

### Spirale stabile/instabile

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\alpha + i\beta \\ \lambda_2 &= -\alpha - i\beta. \end{aligned}$$

In questo caso l'oggetto spiraleggia fino a cadere nel punto, in questi casi tale punto è spesso chiamato attrattore (figura 2.4(d)).

Nel caso della spirale instabile cambia soltanto il segno di  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha + i\beta \\ \lambda_2 &= \alpha - i\beta. \end{aligned}$$

Gli oggetti si allontanano spiraleggiano dal punto in questione (figura 2.4(e))

### Punto ellittico

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= i\beta_1 \\ \lambda_2 &= -i\beta_2. \end{aligned}$$

In questo caso gli oggetti ruotano attorno al punto fisso, se  $\beta_1 = \beta_2$  allora la traiettoria nello spazio delle fasi è una circonferenza (figura 2.4(f)).

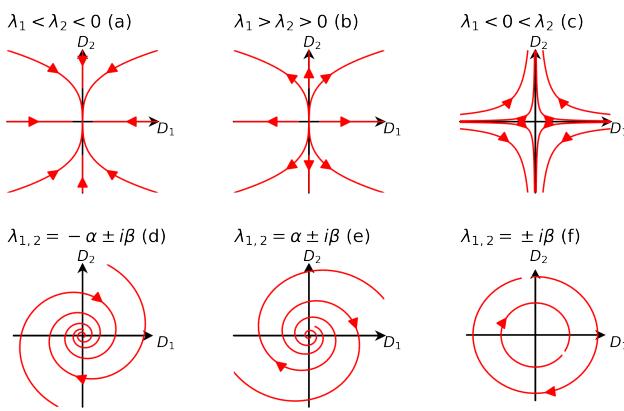


Figura 2.4: Tipi particolari di punti stabili nello spazio delle fasi.

Un ultimo caso è dato dall'annullarsi di uno dei due autovalori, in tal caso il moto avviene lungo una retta nello spazio delle fasi.

**Esempio 15.3.1** (Oscillatore smorzato). Prendiamo l'equazione del moto:

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \gamma \dot{x}.$$

Possiamo riscriverla nel seguente modo:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\gamma v - \omega_0^2 x \end{cases}$$

L'unico punto di equilibrio per il sistema è  $P_0 = (x_0 = 0, v_0 = 0)$ .

Possiamo cercare le Nurk line:

$$\begin{aligned} \dot{x} = 0 &\implies v = 0 \\ \dot{v} = 0 &\implies v = -\frac{\omega_0^2}{\gamma} x. \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto due rette che dividono il piano in 4 parti. Sulla base di queste suddivisioni si potrebbe già indovinare come saranno le linee di flusso nello spazio delle fasi, è necessario infatti considerare che le Nurk lines corrispondono ad una variazione di segno di  $\dot{x}, \dot{v}$ , quindi ci indicano la direzione dell'oggetto nello spazio delle fasi.

Graficando le linee e osservando la direzione degli oggetti nel piano potremmo già concludere che i corpi spiraleggiano attorno all'origine. Proviamo a vederlo con il metodo descritto in questa sezione.

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{x} \\ \delta \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta v \end{pmatrix}.$$

$$\lambda = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2}.$$

Quindi possiamo distinguere due situazioni:

- $\gamma^2 - 4\omega_0^2 > 0$ .

In questo caso gli autovalori  $\lambda_1, \lambda_2$  sono entrambi reali, quindi l'origine è un nodo stabile.

- $\gamma^2 - 4\omega_0^2 < 0$ .

In tal caso si ha che:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\omega.$$

Quindi in tal caso l'origine è un punto di spirale stabile.

Notiamo che in questo caso particolare, poiché la matrice delle derivate miste perde la dipendenza da  $v$  e  $x$ , lo sviluppo lineare vale in tutto il piano e non soltanto in un intorno dell'origine.

**Esempio 15.3.2** (Pendolo smorzato). L'equazione per il pendolo smorzato è:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -g/l \sin(x) - \gamma v \end{cases}$$

I nodi stabili sono tutti i punti tali che:

$$v_0 = 0$$

$$x_0 = n\pi.$$

Prendendo la matrice delle derivate miste si ha:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \delta \dot{x} \\ \delta \dot{v} \end{pmatrix} &= \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g/l \cos(x) & -\gamma \end{pmatrix} \Big|_{x_0, y_0} \right) \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pm g/l & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta v \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dobbiamo distinguere tra il caso in cui nella matrice vi è il segno positivo da quello in cui nella matrice vi è il segno negativo, per entrambi i casi si studia il sistema e si ottengono i seguenti risultati:

- Segno + ( $x_0 = (2n+1)\pi$ ):  
 $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0 \implies$  Punto sella.
- Segno - ( $x = 2n\pi$ ):  
–  $\gamma^2/4 > g/(4l)$ :  
 $\lambda_1, \lambda_2 < 0 \implies$  Nodo stabile.  
–  $\gamma^2/4 < g/(4l)$ :  
 $\lambda_{1,2}$  C.C.  $\implies$  Spirale stabile.

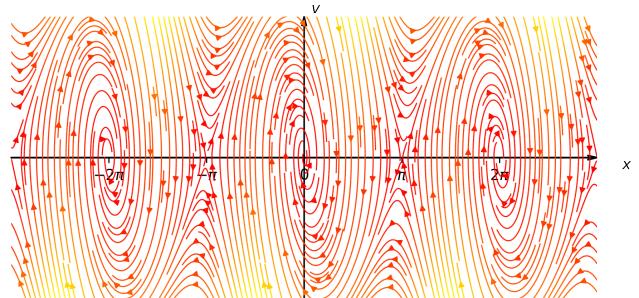


Figura 2.5: Rappresentazione del pendolo smorzato nello spazio delle fasi, grossolanamente si riescono a distinguere le spirali ed i punti sella. I colori indicano la "velocità" nello spazio delle fasi ( $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{v}^2}$ ), il giallo indica zone con tale quantità minore, il rosso le zone in cui gli oggetti si muovono più "velocemente".

Interessante notare come viene "rotta" la spirale all'aumentare del parametro  $\gamma$ :

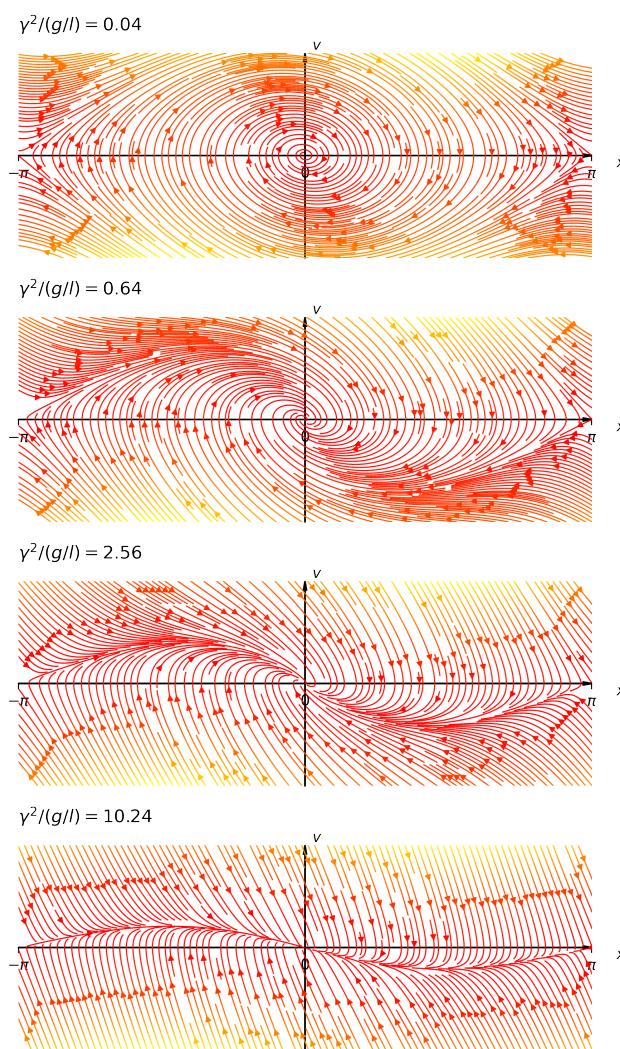


Figura 2.6: Forma del flusso attorno all'origine al variare del rapporto  $\gamma/(g/l)$ , si nota come la spirale sparisca all'aumentare di  $\gamma$ . Le linee di flusso tendono a collassare in modo anticipato su una curva oscillante.

**Esempio 15.3.3** (Equazioni di Lotka-Volterra).

$$\begin{cases} \dot{x} = x - xy \\ \dot{y} = -y + xy \end{cases}$$

In cui  $x, y > 0$ .

I punti stazionari per queste equazioni sono (quando si annullano sia  $\dot{x}$  che  $\dot{y}$ ):

$$\begin{aligned} P_0 &= (0, 0) \\ P_1 &= (1, 1). \end{aligned}$$

Le nurk lines invece sono le quattro rette:

$$\begin{aligned} x &= 0 & x &= 1 \\ y &= 0 & y &= 1. \end{aligned}$$

Passiamo direttamente al sistema linearizzato:

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{x} \\ \delta\dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-y & -x \\ y & -1+x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix}.$$

Si tratta adesso di valutare i due punti fissi singolarmente per vedere di che tipo sono.

Per l'origine degli assi si ha che la matrice  $M$  è:

$$M_{00} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice è già in forma diagonale, quindi si ha un autovalore positivo ed uno negativo: l'origine è un punto iperbolico.

Per quanto riguarda il punto  $x = y = 1$  si ha

$$M_{11} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

gli autovalori sono  $\pm i$ , quindi il punto è ellittico.

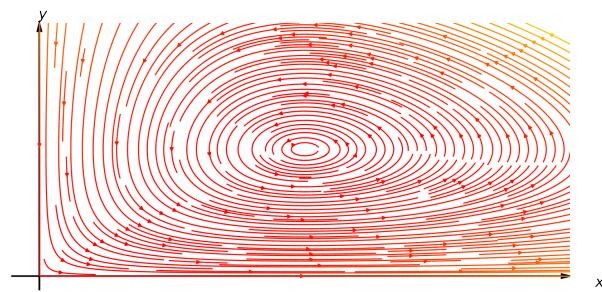


Figura 2.7: Flusso nello spazio delle fasi per il sistema di Lotka-Volterra.

Questa equazione è studiata nel contesto della dinamica delle popolazioni, come già accennato nella primissima lezione.

**Esempio 15.3.4** (Equazione non lineare incasinata). Prendiamo il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = -x + y - y(x^2 + y^2) \end{cases}.$$

Non è chiaro dalle equazioni se vi è un punto fisso, una strategia vincente di soluzione è cambiare variabile.

$$R^2 = x^2 + y^2.$$

Così facendo si ha che:

$$\frac{dR^2}{dt} = R^2 - R^4.$$

Quindi adesso cambiando nuovamente variabili si ottiene:

$$\dot{z} = z - z^2.$$

Questa è l'unica equazione che dobbiamo studiare, stiamo infatti risolvendo il sistema in coordinate "radiali".

I punti fissi in  $z$  sono:

$$\begin{aligned} z &= 0 \\ z &= 1. \end{aligned}$$

Valutare gli autovalori è più semplice in una dimensione:

$$\delta\dot{z} = (1 - 2z)\delta z.$$

Quindi nel caso di  $z = 0$  abbiamo  $\lambda = 1$ , quindi abbiamo un punto instabile. Nel caso di  $z = 1$  abbiamo  $\lambda = -1$  e quindi un punto stabile.

La grossa differenza dai sistemi visti in precedenza è che il punto  $z = 1$  è in realtà una varietà:  $x^2 + y^2 = 1$ , di conseguenza non è semplicemente un punto stabile ma una intera varietà stabile.

In altri termini tutti i punti del piano  $x, y$  tenderanno a cadere sulla circonferenza di raggio unitario.

## 16 Lezione 16

### 16.1 Trasformazioni canoniche

Una trasformazione canonica è un cambio di variabili generalizzate tale che:

$$H(p_i, q_i) = H'(P_i(p_i, q_i), Q_i(p_i, q_i)).$$

Le nuove variabili devono rispettare le regole di commutazione canoniche:

$$\dot{Q}_i = -[Q_i, H] \quad \dot{P}_i = [P_i, H].$$

Spesso nello studio dei sistemi Hamiltoniani è necessario trovare delle trasformazioni che permettano di integrare  $H$ .

Integrare l'Hamiltoniana significa trovare le  $P_i, Q_i$  tali che:

$$H(p_i, q_i) \rightarrow H'(P_i).$$

Quindi per le equazioni di Hamilton-Jacoby anche:

$$\begin{aligned} \dot{P}_i &= -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} = 0 \\ \dot{Q}_i &= \frac{\partial H'}{\partial P_i} = f_i(P_i). \end{aligned}$$

Questo ci permette di trovare una equazione del moto come:

$$\dot{Q}_i = f_i(P_i)t + Q_i(0).$$

Per ottenere una trasformazione canonica è necessario passare dalle **Funzioni generatrici**.

Per trovare queste funzioni partiamo dalla considerazione che  $H$  conserva il volume nello spazio delle fasi, quindi anche  $H'$  deve conservare tale volume:

$$\int \int dp dq = \int \int dP dQ.$$

Quindi possiamo sfruttare il teorema di Stokes:

$$\begin{aligned} \oint pdq &= \oint QdP. \\ \oint [pdq - QdP] &= 0 \end{aligned} \tag{16.1}$$

Grazie a questo integrale possiamo riscrivere tutto in funzione di  $q$  e  $P$ .

La quantità nell'integrale di linea 16.1 è il differenziale di una qualche funzione  $F_2$ :

$$\oint dF_2(q, P) = \oint \frac{\partial F_2}{\partial q} dq + \frac{\partial F_2}{\partial P} dP = 0.$$

Quindi:

$$\begin{aligned} p &= \partial_q F_2(q, P) \\ Q &= -\partial_P F_2(q, P). \end{aligned}$$

Notiamo che aver scritto tutto in funzione della coppia  $(q, P)$  è una scelta (che conduce al funzionale chiamato storicamente  $F_2$ ), si potevano effettuare altre scelte ottenendo lo stesso formalismo con funzionali dipendenti dalle coppie scelte.

Quello che interessa a noi è trovare la trasformazione furba che ci permetta di integrare l'Hamiltoniana.

### 16.2 Ricerca della trasformazione che integra $H$

Supponiamo che la trasformazione ideale sia  $S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha})$ , con  $\boldsymbol{\alpha}$  nuovi momenti conservati (quelli che prima erano  $P$ ). Analogamente definiamo le  $Q$  ideali per la trasformazione come  $\beta$ .

Explicitiamo le equazioni del cambio di variabili in questo caso:

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad \beta_i = -\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}.$$

Explicitando queste trasformazioni nella dipendenza da  $p_i$  di  $H$  si ottiene:

$$H(\mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}) = H'(\boldsymbol{\alpha}).$$

Quindi questa equazione ci permette di esprimere delle Equazioni di HJ, tramite tali equazioni possiamo invertire e trovare  $\partial_q S$ , infine di integrare per trovare la  $S$  ideale.

In generale risolvere il problema è molto complicato, per semplificare il calcolo dobbiamo considerare il fatto che gli  $\boldsymbol{\alpha}$  sono delle costanti del moto<sup>1</sup>. Tenendo conto di questo il differenziale della derivata di  $S$  ( $dS'$ ) si esprime come:

$$dS' = \sum \frac{\partial S}{\partial q_i} dq_i = \sum P_i dq_i.$$

ed integrando si ha direttamente:

$$S = \int_{q_0}^{q_t} \sum_i P_i dq_i.$$

**Esempio 16.2.1** (Hamiltoniana 1D). Prendiamo una trasformazione nello spazio unidimensionale tale che:

$$H(q, \partial_q S) = H'(\alpha) = \alpha.$$

Le coordinate dipendenti possono essere espresse tramite la trasformazione (ignota) come:

$$\begin{aligned} p &= \partial_q S(q, \alpha) \\ \beta &= \partial_\alpha S(q, \alpha). \end{aligned}$$

Le equazioni HJ sono:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -\partial_\beta H' = 0 \\ \dot{\beta} &= \partial_\alpha H' = 1. \end{aligned}$$

Possiamo integrare quindi per  $\beta$  (imponiamo che  $\beta(t=0) = 0$ ):

$$\beta = t - t_0.$$

Quindi abbiamo che:

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \int dt \dot{\beta} = \int_{q_0}^{q_t} d\beta(q) \\ &= \int_{q_0}^{q_t} \partial_q \beta dq = \int \partial_q \partial_\alpha S dq = \\ &= \int \partial_\alpha \partial_q S dq = \int_{q_0}^{q_t} \partial_\alpha P(q, \alpha) dq. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Per definizione della trasformazione che cerchiamo si ha che  $\dot{\alpha}_i = -\partial_\beta H' = 0$

In definitiva possiamo scrivere il  $t - t_0$  in funzione di quell'ultimo integrale:

$$t - t_0 = \int_{q_0}^{q_t} \partial_\alpha P(q, \alpha) dq.$$

**Esempio 16.2.2** (Moto in potenziale a energia fisica). Prendiamo l'Hamiltoniana unidimensionale con un potenziale:

$$H = \frac{p^2}{2} + V(q) = \alpha.$$

In questo caso il nuovo momento della trasformazione è l'energia del sistema.

Explicitiamo  $P(q, \alpha)$  in funzione delle variabili selezionate:

$$P(q, \alpha) = \sqrt{2(\alpha - V(q))}.$$

Quindi otteniamo un tempo  $t - t_0$  che rappresenta il periodo del moto:

$$t - t_0 = \int_{q_0}^{q_t} \frac{1}{\sqrt{2(\alpha - V(q))}} dq.$$

**Esempio 16.2.3** (Moto in campo centrale).

$$H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\phi^2}{2r^2} + V(r).$$

In questo caso abbiamo un momento conservato:  $p_\phi$ , quindi abbiamo una quantità per il moto  $\alpha_\phi$  che si conserva. Possiamo scrivere in tal caso:

$$S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) = \alpha_\phi \phi + S_1(r, \alpha_1).$$

In questo modo sappiamo che derivando rispetto a  $\phi$  si ottiene la quantità conservata.

Riscriviamo l'Hamiltoniana:

$$H' = \frac{1}{2} \left[ (\partial_r S_1)^2 + \frac{\alpha_\phi^2}{r^2} \right] + V(r) = \alpha_1.$$

Scriviamo l'equazione per l'incognita:  $\partial_r S_1$ :

$$\partial_r S_1 = \sqrt{2[\alpha_1 - V(r)] - \frac{\alpha_\phi^2}{r^2}}.$$

Questa equazione può essere integrata, si ottiene immediatamente che:

$$S = \alpha_\phi \phi + \int dr \sqrt{2[\alpha_1 - V(r)] - \frac{\alpha_\phi^2}{r^2}}.$$

A questo punto si fanno i passaggi dell'esempio precedente (c'è un cambio di notazione:  $-t_0 \rightarrow \beta_1$ ), quindi si ha:

$$\beta_1 + t = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \int \frac{dr}{\sqrt{2(\alpha_1 - V(r)) - \alpha_\phi^2/r^2}}.$$

$$\beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_\phi} = \int \frac{d\phi}{\sqrt{2(\alpha_1 - V(r)) - \alpha_\phi^2/r^2}} + \phi.$$

Notiamo che non aver inserito la dipendenza dal tempo per  $\beta_2$  è una conseguenza di tutto il meccanismo utilizzato: deriva direttamente dalle equazioni di Hamilton:

$$H' = \alpha_1 \implies \frac{\partial H'}{\partial \alpha_\phi} = 0 = \dot{\beta}_2.$$

### 16.3 Variabili azione-angolo in una dimensione

Partiamo con la seguente:

Per Hamiltoniane limitate in 1D il moto nello spazio delle fasi avviene sempre su traiettorie chiuse.

Di conseguenza potremmo cercare una variabile angolo  $\theta$  che aumenti di  $2\pi$  dopo un giro. Definiamo il momento coniugato di questa variabile come  $I$ <sup>2</sup>. La trasformazione canonica cercata è  $S(q, I)$ .

$$p = \partial_q S(q, I) \quad \theta = \partial_I S(q, I).$$

Inoltre dobbiamo fare in modo che la trasformazione permetta di integrare l'Hamiltoniana, serve quindi che:

$$H(q, \partial_q S) = \alpha = H'(I).$$

Il fatto che la variabile  $\theta$  sia periodica porta con sé il vantaggio di poter fare teoria delle perturbazioni, come approfondiremo nella prossima lezione. Procediamo supponendo  $\alpha$  costante e fissato.

$$\partial_q \theta = \partial_q \partial_I S = \partial_I \partial_q S (= \partial_I P(I)).$$

Visto che dopo un giro si ha che:  $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$ .

$$2\pi = \oint_c d\theta = \frac{\partial}{\partial I} \oint \frac{\partial S}{\partial q} dq = \frac{\partial}{\partial I} \oint pdq.$$

Questo implica un importante teorema:

$$\oint pdq = 2\pi I.$$

quindi abbiamo una azione (fissata una curva chiusa nello spazio delle fasi):

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_c pdq.$$

Operativamente quello che si fa per risolvere è:

- Si risolve l'Hamiltoniana nel cambio di variabili:

$$H(q, \partial_q S) = \alpha.$$

- Si calcola l'azione  $I$  con la formula sopra sulle curve  $c$  che hanno  $\alpha$  costante.

<sup>2</sup>Il motivo per il quale storicamente è di interesse proprio questa trasformazione è che venne studiata per valutare la stabilità del sistema solare

Le equazioni canoniche per le nuove variabili  $I, \theta$  sono:

$$\dot{I} = -\partial_\theta H'(I) = 0 \quad \dot{\theta} = \partial_I H'(I) = \omega(I).$$

Visto che la  $I$  è costante nel tempo integriamo l'equazione per  $\dot{\theta}$  ottenendo:

$$\theta(t) = \omega(I)t + \theta_0.$$

La cosa importante è che tutta la fisica del problema è inclusa nella dipendenza di  $\omega$  dall'azione  $I$ .

**Esempio 16.3.1** (Oscillatore armonico). Prendiamo l'equazione per un oscillatore armonico unidimensionale:

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega_0^2 q^2}{2}.$$

Abbiamo come sempre che

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}.$$

Quindi l'Hamiltoniana si esprime come:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 q^2 = \alpha.$$

Passiamo direttamente alla ricerca della azione  $I$ :

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq = \frac{1}{2\pi} \oint_c \sqrt{2(\alpha - \frac{1}{2} \omega_0^2 q^2)} dq = \frac{\alpha}{\omega_0}.$$

Possiamo trovare anche il periodo del moto e sfruttarlo per valutare la  $I$ :

$$T = \oint_c \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} p \right) dq = \frac{\partial}{\partial \alpha} \oint_c p dq = \frac{\partial}{\partial \alpha} 2\pi I.$$

Abbiamo quindi:

$$I = \frac{T}{2\pi} \alpha = \frac{\alpha}{\omega_0}.$$

In conclusione abbiamo ad esempio:

$$\alpha = \omega_0 I = H'.$$

In generale ci si aspetta una Hamiltoniana trasformata del tipo:

$$H' = \omega(I)I.$$

Possiamo esplicitare anche la trasformazione  $S$  in modo da ottenere delle equazioni per il moto:

$$S(q, I) = \int \sqrt{2(\omega_0 I - \frac{\omega_0^2 q^2}{2})} dq.$$

Per tornare indietro ed ottenere  $q(t)$  è necessario fare un bel calcolo, bisogna tornare indietro passando per la definizione di  $\theta$ :

$$\theta = \partial_I S(I, q).$$

Quindi derivando all'interno dell'integrale si ottiene:

$$\theta = \sqrt{\frac{2\omega_0}{I}} \int dq \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{2I} q^2}}.$$

Oltre ad effettuare la derivata si è raccolto un termine per esplicitare l'integrale, l'integrale può essere risolto con un cambio di variabili trigonometrico e conduce all'inverso del seno:

$$\theta = \sqrt{\frac{2\omega_0}{I}} \frac{\sin^{-1}(\sqrt{\frac{\omega_0}{2I}} q)}{\sqrt{\frac{2\omega_0}{I}}} + c.$$

Se ne conclude che:

$$\begin{cases} q = \sqrt{2I/\omega_0} \sin(\theta + \delta_0) \\ \theta = \omega_0 t \end{cases} \quad (16.2)$$

## 16.4 Variabili azione-angolo in dimensioni $D \geq 2$ .

Nel caso di Hamiltoniane separabili il problema si risolve in modo semplice: basta trovare  $n$  costanti del moto (in  $n$  dimensioni).

Se si trovano tali costanti allora il moto è confinato ad una varietà  $n$  dimensionale nello spazio delle fasi ( $2n$  dimensionale).

### Teorema di Poincaré

Data una Hamiltoniana  $n$  dimensionale a variabili separabili.

Consideriamo la trasformazione canonica che integra l'Hamiltoniana, la varietà su cui giacciono le traiettorie è un **Toro** ( $M$ )  $n$ -dimensionale.

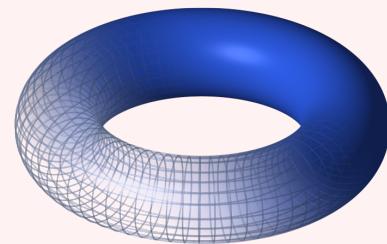


Figura 2.8: Toro in 3 dimensioni, ricordiamo che generalmente si parla di toro  $n$  dimensionale.

La dimostrazione è complicata, possiamo immaginarla visivamente pensando che il toro è l'unica varietà che, se considerata letteralmente pelosa, può essere pettinata. Una qualunque altra varietà, come una sfera ad esempio, presenterà delle stizze durante la pettinatura.



Figura 2.9: Un toro perfettamente pettinato

Formalmente se  $\dot{\xi}$  è il campo di "velocità" che descrive il flusso di  $H$  su  $M$  il toro è l'unica varietà che permette di avere questo campo sempre tangente alla varietà stessa.

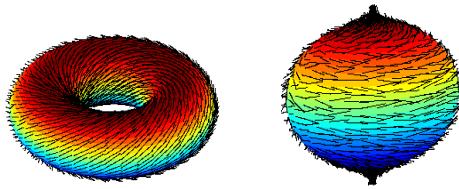


Figura 2.10: Un toroide pettinato ed una sfera non pettinabile (fonte: Wikipedia.)

Nel caso 2-dimensionale ad esempio si ha che

La coppia di variabili azione-angolo è ben definita, infatti il toro è il prodotto di  $n$  oggetti periodici.

Tornando alle  $n$  dimensioni si ha che:

$$I_k = \frac{1}{2\pi} \oint_{c_k} \sum_{i=1}^n p_i dq_i.$$

Dove le  $c_k$  sono traiettorie circuitate attorno al toro.

**Esempio 16.4.1** (Oscillatore armonico bidimensionale.).

$$H = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{\omega_1^2}{2}q_1^2 + \frac{\omega_2^2}{2}q_2^2.$$

l'Hamiltoniana è separabile, quindi possiamo procedere definendo  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  come:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{\omega_1^2}{2}q_1^2 \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{\omega_2^2}{2}q_2^2.$$

Abbiamo anche una coppia di azioni  $I_{1,2}$ :

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \oint p_1 dq_1 \quad I_2 = \frac{1}{2\pi} \oint p_2 dq_2.$$

Mettendo tutto insieme nella Hamiltoniana trasformata finale si ottiene:

$$H'(I_1, I_2) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2.$$

## 16.5 Scrittura compatta del moto sul Toro

Il moto sul toro ha una struttura generale, possiamo riesprimerlo usando la periodicità nelle variabili azione-angolo.

Il nostro obiettivo finale è esprimere il moto della coordinata spaziale  $q_i$  in funzione del tempo ( $q_i(t)$ ). Nel sistema azione-angolo abbiamo che:

$$q_i(t) = q_i(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta}).$$

Possiamo allora cercare la decomposizione di Fourier di questa variabile nello spazio delle  $I, \theta$  (essendo il moto periodico).

I pesi della trasformata sono:

$$\mathcal{A}_{\mathbf{k}}^{(i)}(\mathbf{I}) = \int_0^{2\pi} \theta_1 \dots \int_0^{2\pi} \theta_n q_i(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta}) e^{i(k_1 \theta_1 + \dots + k_n \theta_n)}.$$

In cui  $i$  è l'indice associato alla coordinata  $i$ -esima,  $k$  è il pedice associato al  $\theta$ .

La decomposizione spettrale invece si esprime come:

$$\begin{aligned} q_i(t) &= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{k_n=-\infty}^{\infty} \mathcal{A}_{k_1 \dots k_n}^{(i)} e^{i(k_1 \theta_1 + \dots + k_n \theta_n)} = \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{A}_{\mathbf{k}}^{(i)} e^{i(\mathbf{k}\boldsymbol{\omega}t + \mathbf{k}\delta)}. \end{aligned}$$

A questo punto la differenza tra il caso unidimensionale può esser vista in quest'ultima espressione: se gli  $\omega_i$  stanno tra loro in rapporti razionali allora il moto sarà periodico chiuso, viceversa le orbite non si chiudono (nello spazio dei  $q_i$ ).

In particolare per avere delle orbite chiuse servono  $n - 1$  relazioni del tipo:

$$\sum_{i=1}^n k_i \omega_i = 0.$$

## 17 Lezione 17

### 17.1 Sistemi quasi integrabili: teoria delle perturbazioni

I sistemi studiati nelle ultime due lezioni sono tutti integrabili, possiamo domandarci cosa succede nel caso di sistemi che non presentano questa caratteristica. In particolare per poter studiare tali sistemi in modo perturbativo ci concentriamo su situazioni "quasi integrabili".

Supponiamo di avere una Hamiltoniana del tipo:

$$H(I, \theta) = H_0(I) + \epsilon H_1(I, \theta).$$

La parte  $H_0$  è integrabile,  $H_1$  è la perturbazione.

In questo caso le equazioni di HJ sono:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\frac{\partial}{\partial \theta} H(I, \theta) \\ \dot{\theta} &= \frac{\partial}{\partial I} H(I, \theta). \end{aligned}$$

Vedremo che la  $\dot{I}$  sarà proporzionale solo a  $\epsilon$  perché la  $\theta$  compare solo nella Hamiltoniana di perturbazione.

All'ordine zero in  $\epsilon$  si ha l'Hamiltoniana imperturbata:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\frac{\partial H_0(I)}{\partial \theta} = 0 \\ \dot{\theta} &= \frac{\partial H_0(I)}{\partial I} = \omega_0(I). \end{aligned}$$

Al primo ordine invece:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\frac{\partial}{\partial \theta} H(I, \theta) = -\epsilon \frac{\partial}{\partial \theta} H_1 + O(\epsilon^2) \\ \dot{\theta} &= \frac{\partial}{\partial I} H(I, \theta) = \omega_0(I) + \epsilon \frac{\partial H_1}{\partial I}. \end{aligned}$$

Cerchiamo una trasformazione canonica che integra al primo ordine in  $\epsilon$ .

$$\theta, I \rightarrow \varphi, J.$$

$$I = \frac{\partial}{\partial \theta} S(\theta, J) \quad \varphi = \frac{\partial}{\partial J} S(\theta, J).$$

Visto che siamo al primo ordine supponiamo che la  $S$  stessa sia formata dall'identità  $S_0$  sommata ad un termine di perturbazione lineare in  $\epsilon$ .

Riscriviamo in questo sistema trasformato le equazioni di Hamilton Jacoby (facendo la sostituzione  $I = \partial_\theta S$ ):

$$H_0\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right) + \epsilon H_1\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}, \theta\right) \simeq K(J) \quad (17.1)$$

Con  $K(J)$  la nuova Hamiltoniana che, avendo fatto l'integrazione, non dipende da  $\varphi$ . Anche questa Hamiltoniana mi aspetto possa essere sviluppata in serie di  $\epsilon$ .

$$K(J) = K_0(J) + \epsilon K_1(J) + \dots$$

Esplicitando l'equazione 17.1 all'ordine zero e uno:

$$\begin{aligned} H_0(J) &= K_0(J) \\ \frac{\partial S_1}{\partial \theta} \frac{\partial H_0}{\partial J} + H_1(J, \theta) &= K_1(J). \end{aligned}$$

Il primo termine della seconda equazione deriva dal fatto che abbiamo sviluppato in serie di  $\epsilon$  anche la nostra trasformazione, gli ordini successivi al primo contengono ancora la variabile  $\theta$ .

Possiamo riscrivere il primo ordine in modo da esplcitare la  $K_1(J)$  introducendo anche la "frequenza"  $\omega_0$ :

$$K_1(J) = \omega_0(J) \frac{\partial}{\partial \theta} S_1(\theta, J) + H_1(J, \theta) \quad (17.2)$$

A questo punto dobbiamo trovare due cose:

- $K_1 = K_1(J)$
- $S_1$

Riprendendo l'equazione per  $K_1(J)$  (eq 17.2) possiamo integrare in  $\theta$  tra 0 e  $2\pi$ , così facendo il termine  $\partial_\theta S_1$  si annulla poiché la variabile  $\theta$  è periodica (per definizione di variabili azione-angolo).

Di conseguenza rimane soltanto:

$$K_1(J) = \frac{1}{2\pi} \bar{H}_1(J, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_1(J, \theta) d\theta.$$

Questa espressione risolve il problema per  $K_1(J)$  poiché nei problemi l'Hamiltoniana di perturbazione è nota.

Nota l'espressione di  $K_1$  possiamo sostituirla nella equazione differenziale per  $S_1$  (che si ottiene invertendo la 17.2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} S_1(J, \theta) &= \frac{1}{\omega_0(J)} (K_1(J) - H_1(J, \theta)) = \\ &= -\frac{1}{\omega_0(J)} (H_1(J, \theta) - \bar{H}_1(J, \theta)). \end{aligned} \quad (17.3)$$

Di conseguenza abbiamo trovato anche la  $S_1$ : basta integrare quest'ultima equazione in  $\theta$ .

Fino a qui sembra tutto relativamente semplice, in maniera astratta sembra che siamo in grado di risolvere al primo ordine il sistema, tuttavia questo procedimento presenta un problema di fondo che andremo ad analizzare tra poco...

Proseguiamo andando in trasformata di Fourier:

$$H_1 = \sum A_k e^{ik\theta}$$

$$S_1 = \sum B_k e^{ik\theta}.$$

Inseriamo nella equazione per la  $\partial_\theta S_1$ :

$$\partial_\theta S_1(J, \theta) = i \sum k B_k e^{ik\theta} = -\frac{1}{\omega_0(J)} \sum_{k=1} A_k e^{ik\theta}.$$

L'ultima sommatoria parte da 1 poiché abbiamo rimosso il valor medio che era presente nella equazione a sottrarre.

La struttura della  $S_1$  è definita dai  $B_k$ , questi possiamo esplicitarli in funzione degli  $A_k$ :

$$B_k = \frac{i A_k}{k \omega_0(J)} \quad (17.4)$$

Quindi in conclusione:

$$S_1(J, \theta) = \sum_k \frac{i A_k e^{ik\theta}}{k \omega_0(J)}.$$

A questo punto noi sappiamo che la  $S$  al primo ordine si scrive come:

$$S = J\theta + \epsilon S_1.$$

Quindi siamo in grado di trovare tutte le quantità utili allo studio del moto:

$$\begin{aligned}\phi &= \theta + \epsilon \partial_J S_1(J, \theta) \\ J &= I - \epsilon \partial_\theta S_1(J, \theta) \\ \omega(J) &= \omega_0(J) + \epsilon \partial_J K_1(J).\end{aligned}$$

In una dimensione è quindi tutto integrabile e risolubile.

**Esempio 17.1.1** (Oscillatore armonico perturbato).

$$H(p, q) = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 q^2 + \epsilon H_1.$$

**Caso  $H_1 = q^4$ .**

Possiamo partire dalla soluzione alla Hamiltoniana imperturbata (è stata risolta esplicitamente, vedi come si deriva la 16.2):

$$H_0 = \omega_0 I \quad q = \sqrt{\frac{2I}{\omega_0}} \sin(\theta) \quad \theta = \omega_0 t.$$

Quindi inserendo nel termine di perturbazione la  $q$  si ha:

$$H_1(I, \theta) = \left( \frac{2I}{\omega_0} \right)^2 \sin^4(\theta).$$

A questo punto possiamo procedere con due metodi:

- Calcolare la trasformata di  $H_1$ , i coefficienti di tale espansione in serie di Fourier saranno legati a quelli della  $S_1$  dalla relazione 17.4.
- Trovare la  $K_1$ , esprimere la  $S_1$  tramite l'equazione differenziale 17.3.

In entrambi i casi si raggiunge il medesimo risultato, proviamo ad applicare il secondo metodo "più esplicito".

Procediamo con l'espansione della  $H$  al primo ordine effettuando la trasformazione:

$$H_0(\partial_\theta S) + \epsilon H_1(\partial_\theta S, \theta) = K(J).$$

La trasformazione può anch'essa essere sviluppata, esplicitiamo anche la derivata (ricordando che il termine perturbato dipende da  $\theta$ ):

$$S = \theta J + \epsilon S_1 \implies \partial_\theta S = J + \epsilon \partial_\theta S_1.$$

Reinseriamo il tutto nella  $H$  al primo ordine:

$$\omega_0 \partial_\theta S + \epsilon \left( \frac{2 \partial_\theta S}{\omega_0} \right)^2 \sin^4 \theta = K(J).$$

$$\omega_0(J + \epsilon \partial_\theta S_1) + \epsilon \left( \frac{2J}{\omega_0} \right)^2 \sin^4 \theta = K(J).$$

Visto che ci interessa soltanto il primo ordine in  $\epsilon$  si butta il termine dipendente da  $\epsilon$  nella parentesi del secondo termine.

Possiamo riscrivere quest'ultima equazione in termini della  $H_1$ :

$$\omega_0 \partial_\theta S_1(\theta, J) = K_1(J) - H_1(J, \theta).$$

Quindi si trova la  $K_1$  come valor medio di  $H_1$  su un periodo:

$$\begin{aligned}K_1(J) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_1(\theta, J) d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{2J}{\omega_0} \right)^2 \sin^4(\theta) d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{2J}{\omega_0^2} \right) \left[ \frac{3}{8}\theta - \frac{1}{2}\sin(2\theta) + \frac{1}{32}\sin(4\theta) \right]_0^{2\pi} = \\ &= \frac{3}{8} \left( \frac{2J}{\omega_0} \right)^2.\end{aligned}$$

Quindi inseriamo nella equazione differenziale per  $S_1$ :

$$\omega_0 \partial_\theta S_1(\theta, J) = \left( \frac{2J}{\omega_0} \right)^2 \left[ \frac{3}{8} - \sin^4 \theta \right].$$

Effettuiamo un integrale indefinito:

$$\begin{aligned}S_1(\theta, J) &= \\ &= \frac{4J^2}{\omega_0^3} \left[ \frac{3}{8}\theta - \left( \frac{3}{8}\theta - \frac{1}{2}\sin(2\theta) + \frac{1}{32}\sin(4\theta) \right) \right] = \\ &= \frac{4J^2}{\omega_0^3} \left( \frac{1}{2}\sin(2\theta) - \frac{1}{32}\sin(4\theta) \right).\end{aligned}$$

Notiamo che le due funzioni rimaste in  $S_1$  sono entrambe periodiche in  $\theta$ .

A questo punto abbiamo tutto, la nuova Hamiltoniana ad esempio:

$$K(J) = K_0 + \epsilon K_1 = \omega_0 J + \epsilon \frac{3}{8} \left( \frac{2J}{\omega_0} \right)^2.$$

Il vecchio momento:

$$I = \frac{\partial}{\partial \theta} (S_0 + \epsilon S_1) = J + \frac{\epsilon}{\omega_0} \left( \frac{2J}{\omega_0} \right)^2 \left[ \frac{3}{8} - \sin^4 \theta \right].$$

la frequenza:

$$\omega(J) = \frac{\partial}{\partial J} K(J) = \omega_0 + \epsilon \frac{3J}{\omega_0^2}.$$

La nuova variabile angolo:

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{\partial}{\partial J} (S_0 + \epsilon S_1) = \\ &= \theta + \epsilon \frac{8J^2}{\omega_0^3} \left( \frac{1}{2}\sin(2\theta) - \frac{1}{32}\sin(4\theta) \right).\end{aligned}$$

Notiamo che la perturbazione in questo caso "irrigidisca" il potenziale che era in precedenza armonico, infatti la frequenza di oscillazione al primo ordine che abbiamo ottenuto aumenta all'aumentare dell'energia

$(J)$  linearmente.

**Caso**  $H_1 = q^3$ .

In questo caso, effettuando i medesimi passaggi, ci si rende conto che la correzione al primo ordine in  $\epsilon$  si annulla ( $K_1 \propto \bar{H}_1 = 0$ ).

Dobbiamo quindi espandere perturbativamente al secondo ordine, i risultati che si ottengono sono:

$$K_2(J) = -\frac{15\pi J^2}{2\omega_0^4}.$$

$$\omega(J) = \omega_0 - \epsilon^2 \frac{15\pi J}{\omega_0^4}.$$

In una dimensione il problema è sempre risolubile perturbativamente. Sarà così anche in dimensioni maggiori?

## 17.2 Sviluppo perturbativo in due dimensioni

Prendiamo i due vettori per le variabili azione-angolo:

$$\mathbf{I} = (I_1, I_2) \quad \boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2).$$

l'Hamiltoniana al primo ordine perturbativo è sempre:

$$H(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta}) = H_0(\mathbf{I}) + \epsilon V(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta}).$$

Con  $V$  termine di perturbazione. Possiamo decomporre la perturbazione nella base dei  $\boldsymbol{\theta}$  facendo una trasformata di Fourier:

$$H(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta}) = H_0(\mathbf{I}) + \epsilon \sum_{n_1} \sum_{n_2} V_{n_1, n_2} \cos(n_1 \theta_1 + n_2 \theta_2).$$

Con  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ . Scriviamo in notazione vettoriale anche  $(n_1, n_2)$ :

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2) \quad n_1 \theta_1 + n_2 \theta_2 = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\theta}.$$

Chiamiamo questa volta la trasformazione  $G$  anziché  $S$ :

$$G(\mathbf{J}, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\theta} + \epsilon \sum_{n_1} \sum_{n_2} g_{n_1, n_2}(\mathbf{J}) \sin(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\theta}).$$

Con  $g_{n_1, n_2}$  coefficienti non (ancora) fissati per la trasformazione.

Possiamo esprimere anche la componente  $i$ -esima di  $I$ :

$$I_i = \frac{\partial G}{\partial \theta_i} = J_i + \epsilon \sum_{n_1} \sum_{n_2} n_i g_{n_1, n_2}(\mathbf{J}) \cos(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\theta}).$$

Allo stesso modo per il nuovo angolo  $\varphi$ :

$$\varphi_i = \frac{\partial G}{\partial J_i} = \theta_i + \epsilon \sum_{n_1} \sum_{n_2} \frac{\partial}{\partial J_i} (g_{n_1, n_2}(\mathbf{J})) \sin(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\theta}).$$

A questo punto si scrive la nuova Hamiltoniana  $H'(\mathbf{J}, \varphi)$ , per farlo sfruttiamo la scrittura del primo ordine perturbativo data dalla 17.2 generalizzata in due dimensioni:

$$K_1(\mathbf{J}) = \frac{\partial S_1}{\partial \boldsymbol{\theta}} \cdot \boldsymbol{\omega} + H_1(\mathbf{J}, \boldsymbol{\theta}).$$

Con la frequenza data da:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\partial H_0(\mathbf{J})}{\partial \mathbf{J}}.$$

Notiamo che si tratta proprio della Hamiltoniana  $H_0$ , per trovare queste frequenze operativamente (all'ordine 0) basta sostituire il simbolo  $\mathbf{J}$  a quello  $\mathbf{I}$  e derivare, deriva dalla definizione della trasformazione canonica che vogliamo fare!

Quindi in conclusione:

$$\begin{aligned} H'(\mathbf{J}, \varphi) &= H_0(\mathbf{J}) + \epsilon \sum \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} g_{\mathbf{n}}(\mathbf{J}) \cos(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\theta}) + \\ &+ \epsilon \sum V_{\mathbf{n}}(\mathbf{J}) \cos(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\theta}) + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Salta all'occhio che possiamo far sparire il termine in  $\epsilon$  scegliendo un set opportuno di  $g_{\mathbf{n}}$ :

$$g_{\mathbf{n}} = -\frac{V_{\mathbf{n}}(\mathbf{J})}{n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2}.$$

Se si scelgono questi  $g$  si rende l'Hamiltoniana di partenza integrabile.

$$H'(\mathbf{J}, \varphi) = H_0(\mathbf{J}).$$

Inoltre, per completezza, esplicitiamo anche la forma della vecchia variabile  $\mathbf{I}$ :

$$\mathbf{I} = \mathbf{J} - \epsilon \sum \frac{\mathbf{n} V_{\mathbf{n}} \cos(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\theta})}{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega}}.$$

Notiamo che sorge subito un problema: se il prodotto scalare  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega}$  si annulla la teoria perturbativa si rompe.

Il fatto è che  $g_{\mathbf{n}}$  è il coefficiente di uno sviluppo di Fourier bidimensionale, nel quale si somma sui numeri  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ .

In generale quindi succederà che un termine della sommatoria romperà lo sviluppo se le due frequenze  $\omega_1$  e  $\omega_2$  sono numeri razionali.

## 17.3 Esempio di rottura della teoria perturbativa

Prendiamo ad esempio una Hamiltoniana bidimensionale del tipo:

$$H = H_0(\mathbf{I}) + \epsilon V_{\mathbf{n}}(\mathbf{I}) \cos(n_1 \theta_1 - n_2 \theta_2) = E.$$

Con  $E$  costante. Per una  $H$  di questo tipo abbiamo che esiste un integrale del moto  $c_2$  tale che:

$$c_2 = n_1 I_2 + n_2 I_1.$$

Questo perché, dalle equazioni di Hamilton:

$$\begin{aligned} \partial_t I_1 &= -\partial_{\theta_1} H = \epsilon n_1 V_{\mathbf{n}} \sin(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\theta}) \\ \partial_t I_2 &= -\partial_{\theta_2} H = -\epsilon n_2 V_{\mathbf{n}} \sin(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\theta}). \end{aligned}$$

Quindi si ha banalmente che:

$$\dot{c}_2 = \partial_t (n_1 I_2 + n_2 I_1) = 0.$$

Sfruttiamo questo integrale per studiare il caso con un esempio concreto.

### Caso particolare

$$H = H_0(\mathbf{I}) + \alpha I_1 I_2 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2) = E \quad (17.5)$$

Con  $E$  costante. In questo caso abbiamo  $n_1 = -n_2 = 2$  per essere esplicativi. L'Hamiltoniana imperturbata è definita da:

$$H_0(\mathbf{I}) = I_1 + I_2 - I_1^2 - 3I_1 I_2 + I_2^2.$$

Per risolvere conviene prima fare un cambio di variabili:

$$J_1 = I_1 + I_2 \quad J_2 = I_2.$$

$$\varphi_1 = \theta_2 \quad \varphi_2 = \theta_2 - \theta_1.$$

Le equazioni di Hamilton del sistema sono:

$$\dot{J}_1 = 0$$

$$\dot{J}_2 = 2\alpha J_2(J_1 - J_2) \sin(2\varphi_2)$$

$$\dot{\varphi}_1 = 1 - 2J_1 - J_2 + \alpha J_2 \cos(2\varphi_2)$$

$$\dot{\varphi}_2 = -J_1 + 6J_2 + \alpha(J_1 - 2J_2) \cos(2\varphi_2).$$

Quindi partendo dalla prima equazione possiamo ricavare gli andamenti temporali di tutte le quantità:  $J_1(t), \varphi_2(t), J_2(t), \varphi_1(t)$ .

Applichiamo adesso il meccanismo perturbativo per integrare l'Hamiltoniana. Sappiamo che la trasformazione dovrebbe essere della forma:

$$G(\mathbf{L}, \boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \alpha g_{22}(\mathbf{L}) \sin(2\varphi_1 - 2\varphi_2).$$

Il coefficiente dell'sviluppo  $g$  (anche detto termine di perturbazione):

$$g_{22} = -\frac{L_1 L_2}{2\omega_1 - 2\omega_2}.$$

Le vecchie variabili  $\mathbf{J}$  possono essere ottenute dalle nuove come:

$$J_1(\boldsymbol{\theta}) = L_1 - \frac{2\alpha L_1 L_2 \cos(2\omega_1 t - 2\omega_2 t)}{2\omega_1 - 2\omega_2}$$

$$J_2(\boldsymbol{\theta}) = L_2 - \frac{2\alpha L_1 L_2 \cos(2\omega_1 t - 2\omega_2 t)}{2\omega_1 - 2\omega_2}.$$

Possiamo ottenere le frequenze nelle nuove variabili (all'ordine più basso) effettuando la derivata della Hamiltoniana imperturbata:

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{L}) = \frac{\partial H_0(\mathbf{L})}{\partial \mathbf{L}}.$$

Dove  $H_0(\mathbf{L})$  è l'Hamiltoniana di partenza (sostituendo  $\mathbf{I} \rightarrow \mathbf{L}$ ). In componenti si ottiene:

$$\omega_1(L_1, L_2) = 1 - 2L_1 - 3L_2$$

$$\omega_2(L_1, L_2) = 1 - 3L_1 + 2L_2.$$

Non è ovvio quindi che, al variare di  $L_1, L_2$ , il denominatore del termine di perturbazione resti sempre molto maggiore di zero.

Se tale termine dovesse diventare molto più piccolo del numeratore la teoria perturbativa si rompe.

La condizione per il quale vale la teoria perturbativa è:

$$|2\omega_1 - 2\omega_2| = |2L_1 - 10L_2| \gg 2\alpha L_1 L_2.$$

Con  $\alpha$  coefficiente sul quale si sviluppa la teoria perturbativa. La domanda adesso è: visto che non possiamo sapere a priori come sono fatte le  $\omega$  come facciamo a capire quando si applica la teoria perturbativa?

### 17.4 Teorema KAM

Il teorema KAM ci dice quando è possibile costruire una teoria perturbativa per un sistema Hamiltoniano. Data una Hamiltoniana del tipo:

$$H(I, \theta) = H_0(I) + H_1(I, \theta).$$

Con  $H_1$  "piccola" e

$$H_1(J, \theta + 2\pi) = H_1(J, \theta).$$

Consideriamo un Toro  $T_0$  nello spazio delle fasi (per il problema senza perturbazione) caratterizzato da un set di frequenze  $\boldsymbol{\omega}^*$  irrazionali:

$$\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}^* \neq 0 \quad \forall \mathbf{k}.$$

Sappiamo che valgono le seguenti espressioni che caratterizzano il flusso sul toro  $T_0$ :

$$\begin{aligned} I &= I^* = \text{costante} \\ \dot{\theta} &= \omega^*. \end{aligned}$$

Inoltre, sempre per ipotesi, assumiamo che l'Hessiano della trasformazione sia non nullo:

$$\frac{\partial^2 H_0}{\partial J_i \partial J_j} \neq 0.$$

Se l'Hamiltoniana di perturbazione  $H_1$  è sufficientemente piccola allora esiste un toro invariante  $T(\boldsymbol{\omega}^*)$  del sistema perturbato vicino al toro non perturbato  $T_0(\boldsymbol{\omega}^*)$ , il Toro  $T(\boldsymbol{\omega}^*)$  è una piccola deformazione del toro precedente.

Quindi, come già accennato, questo vale per frequenze di risonanza tra loro irrazionali.

Nella dimostrazione del teorema si scopre che i tori, al variare delle costanti del moto, si spaccano uno dietro l'altro. I primi a rompersi sono proprio quelli con  $\boldsymbol{\omega}$  "più" razionali tra loro.

Nella seguente sezione analizziamo cosa significa essere più meno razionali per un numero.

### Frazioni continue e most irrational number

Un qualunque numero irrazionale può essere espresso come frazione continua:

$$\omega = [a_0, a_1, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}.$$

Un numero razionale  $\bar{\omega}$  è un numero che tronca la serie ad un termine finito, troncare la serie al termine  $j$ -esimo implica che  $a_j = \infty$ :

$$\bar{\omega} = [a_1, \dots, a_{j-1}, \infty].$$

Possiamo chiederci quale sia il numero più irrazionale possibile, ovvero un numero composto da una infinita serie di  $a_i$  tale che:

$$x = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}.$$

I coefficienti sono tutti unitari, infatti se un termine  $a_i$  ad un certo punto fosse maggiore degli altri allora sarebbe possibile troncare la serie approssimandola (come se fosse un  $\infty$ ).

Il numero  $x$  presenta un comportamento di self similarità, quindi possiamo troncare il suo denominatore reintroducendo se stesso:

$$x \simeq \frac{1}{1+x} \implies x^2 + x - 1 = 0.$$

La soluzione di questa equazione di secondo grado è il rapporto aureo:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Quindi il toro più duro, ovvero quello che si rompe per ultimo, è quello avente rapporto tra le frequenze dato dal rapporto aureo.

## 18 Lezione 18

### 18.1 Visualizzare la dinamica: mappa di Poincare

Siamo interessati a capire come visualizzare il caos quando andiamo in dimensioni superiori a 1, questo perché vorremmo studiare almeno il caso 2D, però non siamo in grado di plottare uno spazio delle fasi a quattro dimensioni.

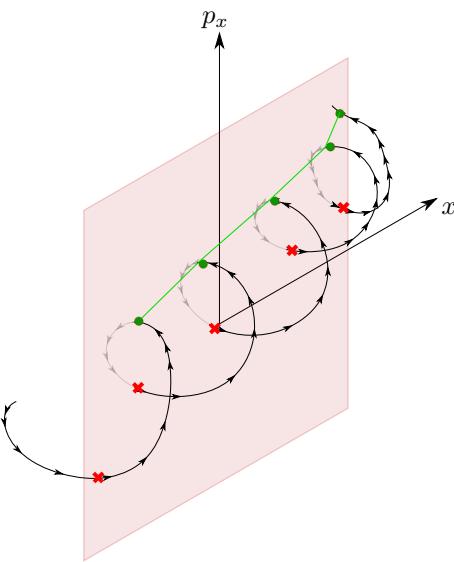
Un metodo molto popolare è quello di sfruttare le **mappe di Poincare**.

Prendiamo una Hamiltoniana del seguente tipo:

$$H = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + V(x, y).$$

L'idea di fondo delle mappe di Poincare è quella di catturare il moto in 4 dimensioni su una sezione, la sezione che si sceglie è:

$$\begin{aligned} p_y &> 0 \\ y &= 0. \end{aligned}$$



**Figura 2.11:** Le traiettorie nello spazio delle fasi a quattro dimensioni, essendo su dei tori, possono essere immaginate come delle curve che girano su loro stesse. La proiezione che cerchiamo sono i punti che intersecano il piano rosso ( $y = 0$ ) ed allo stesso tempo entrano nel foglio (vogliamo  $p_y > 0$ ). In questo modo si ottiene una traiettoria descritta dai punti verdi scuri, uniti dalla linea verde chiara. Le croci rosse sono i punti che arrivano in  $y = 0$  ma vanno esclusi poiché hanno  $p_y < 0$  (il segno di  $p_y$  è espresso dalla direzione della freccia quando entra nel piano  $y = 0$ ).

Non è facile da spiegare, è più facile da vedere: ti lascio il link all'indiano che te lo spiega (clicca QUI). Vediamo un esempio pratico riprendendo un sistema già analizzato nella lezione precedente (17.5).

### 18.2 Mappa di Poincare per sistema con una costante del moto

$$H = H_0(\mathbf{I}) + \alpha I_1 I_2 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2) = E.$$

Con  $E$  costante e:

$$H_0(\mathbf{I}) = I_1 + I_2 - I_1^2 - 3I_1 I_2 + I_2^2.$$

Il cambio di variabili effettuato per applicare il metodo perturbativo è:

$$J_1 = I_1 + I_2; \quad J_2 = I_2; \quad \varphi_1 = \theta_2; \quad \varphi_2 = \theta_2 - \theta_1.$$

In questo modo appare la costante del moto  $J_1$ , le equazioni di HJ sono:

$$\begin{aligned} \dot{J}_1 &= 0 \\ \dot{J}_2 &= 2\alpha J_2(J_1 - J_2) \sin(2\varphi_2) \\ \dot{\varphi}_1 &= 1 - 2J_1 - J_2 + \alpha J_2 \cos(2\varphi_2) \\ \dot{\varphi}_2 &= -J_1 + 6J_2 + \alpha(J_1 - 2J_2) \cos(2\varphi_2). \end{aligned}$$

E quindi l'Hamiltoniana:

$$H(\mathbf{J}, \boldsymbol{\varphi}) = J_1 - J_1^2 - J_1 J_2 + 3J_2^2 + \alpha J_2(J_1 - J_2) \cos(2\varphi_2).$$

Ormai siamo abituati a scrivere l'Hamiltoniana in termine delle variabili azione-angolo  $I, \theta$  (oppure  $J, \varphi$ ), per visualizzare la dinamica dobbiamo tornare indietro nelle variabili  $p, q$ .

Per farlo dobbiamo applicare passaggi analoghi a quelli di 16.2, in tal caso si è esplicitato come trovare  $q$ , per trovare  $p$  basta fare  $\partial_q S(q, J)$ . In questo caso si assume inoltre  $\omega_0 = 1$ .

$$\begin{aligned} p_i &= -\sqrt{2J_i} \sin \varphi_i \\ q_i &= \sqrt{2J_i} \cos \varphi_i. \end{aligned} \tag{18.1}$$

Si può esprimere le variabili  $J_i, \varphi_i$  in funzione delle  $q_i$  e delle  $p_i$  per poi reinserirle nella Hamiltoniana.

$$J_1 = \frac{p_1^2 + q_1^2}{2} \quad J_2 = \frac{p_2^2 + q_2^2}{2}.$$

$$\begin{aligned} \cos(2\varphi_2) &= \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \\ &= -\left(\frac{p_2^2 - q_2^2}{2J_2}\right) = -\left(\frac{p_2^2 - q_2^2}{2(p_2^2 + q_2^2)}\right). \end{aligned}$$

Giusto per referenza l'Hamiltoniana in termini di  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  sarebbe:

$$\begin{aligned} H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \frac{p_1^2 + q_1^2}{2} - \left(\frac{p_1^2 + q_1^2}{2}\right)^2 + \\ &\quad - \left(\frac{p_1^2 + q_1^2}{2}\right) \left(\frac{p_2^2 + q_2^2}{2}\right) + 3 \left(\frac{p_2^2 + q_2^2}{2}\right)^2 + \\ &\quad - \frac{(p_2^2 - q_2^2)}{4} (p_1^2 - p_2^2 + q_1^2 - q_2^2). \end{aligned}$$

**Ottenere la mappa** In questo caso particolare conviene risolvere il problema nelle variabili  $J_i, \phi_i$ , successivamente applicare le trasformazioni 18.1 per tornare nello spazio  $p, q$ .

Possiamo notare che, fissando l'energia  $E$  del sistema ed avendo un'integrale del moto ( $J_1$ ), il problema è completamente risolto: non c'è bisogno di fissare alcun piano (tipo  $y = 0$ ) come detto nel caso generale della sezione precedente.

Infatti senza alcun integrale del moto si hanno 4 gradi di libertà, la presenza di  $E$  e  $J_1$  ne lascia soltanto 2 a disposizione. Nel seguito si sceglie di lasciare liberi soltanto  $J_2$  e  $\phi_2$  (quindi si plotta  $p_y$  in funzione di  $y$ ). Si elencano operativamente i passaggi da seguire per ottenere la mappa:

1. Selezionare energia e  $\alpha$  iniziali.
2. Selezionare un parametro  $J_1$  iniziale e farlo variare in un intervallo ragionevole (vedere Linda Reichl, pag. 28-31).
3. Sulla base della scelta di  $J_1$  fissare  $J_2$  e  $\phi_2$  in modo da conservare l'energia. Per far questo è necessario invertire l'Hamiltoniana per trovare  $J_2$ :  

$$[3 - \alpha \cos(2\phi_2)] J_2^2 +$$
  

$$[(\alpha \cos(2\phi_2) - 1) J_1] J_2 + [J_1 - J_1^2 - E] = 0.$$
 Per trovare un intervallo dove le soluzioni esistono è necessario che il discriminante  $\Delta$  di questa equazione sia positivo, imponendo  $\Delta > 0$  si fissa quindi un possibile  $\phi_2$ .
4. Integrare le equazioni 18.1 con un metodo appropriato, io ho scelto integratore di Heun (senza parte stocastica) come il professore.
5. Tornare nelle variabili  $y, p_y$  con la trasformazione canonica.
6. Plottare  $p_y$  vs  $y$ .

Vi assicuro che i punti (2) e (3) non sono affatto divertenti: il dominio di esistenza di questi parametri non è molto vasto, fatevi guidare dal libro sopra citato, dallo script di Fortran del professore (mapH22.f) e dal notebook caricato su Github.

Se sarete pazienti otterrete la seguente mappa:

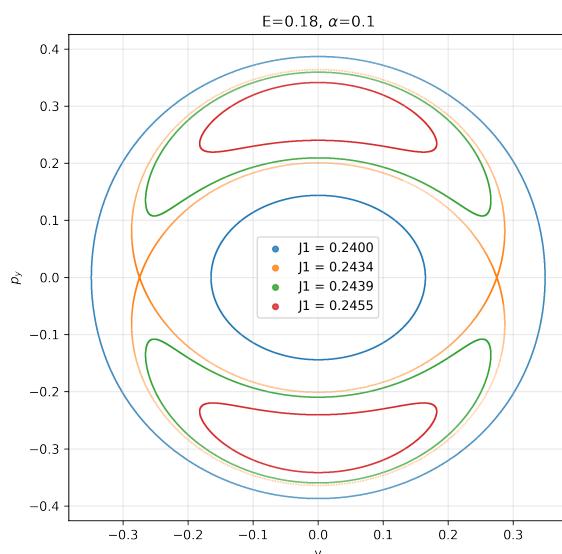


Figura 2.12: Mappa di Poincaré per il sistema bidimensionale di questa sezione, notiamo la risonanza in  $J_1 = 0.24$ . Per  $\alpha \ll 1$  si dovrebbe avere la risonanza a  $I_1 \simeq 5I_2$ . Numericamente questa non è esattamente rispettata, probabilmente  $\alpha = 0.1$  non basta.

### 18.3 Sistema di Henon e Heiles: sono stabili le stelle delle galassie?

Nel 1964 era noto che, il moto di una stella nella galassia presentava due integrali del moto: l'energia ed una componente del momento angolare.

Analiticamente nessuno riusciva a capire se fosse presente un altro integrale del moto, tuttavia le osservazioni del rapporto tra la velocità parallela al centro della galassia e quella ortogonale ne suggerivano la presenza (tale rapporto risultava circa 2:1). Henon e Heiles ci riuscirono nell'intento modellizzando con una semplice Hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2y - \frac{1}{3}y^3.$$

Quello che fecero è studiare la mappa: se si fosse presentata una terza costante del moto sarebbe apparsa nel numero di tori invarianti del sistema.

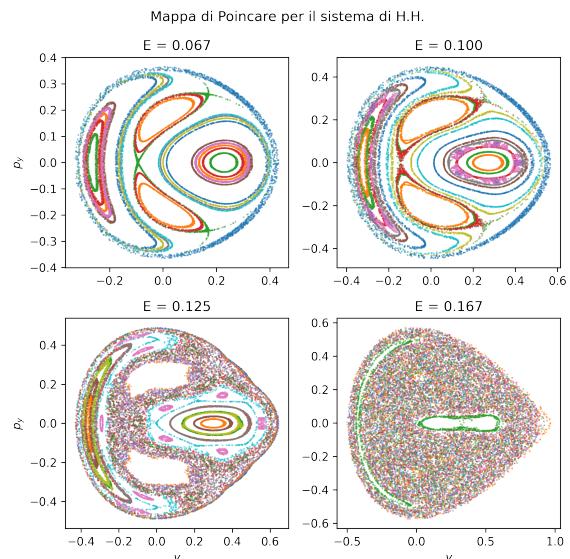


Figura 2.13: Mappa di Poincaré per il sistema di Henon-Heiles: notiamo come a bassa energia è evidente la presenza di tori invarianti: c'è un terzo integrale del moto.

Si vede bene che, all'aumentare della energia, i tori invarianti si rompono. In particolare si ha che i primi tori a rompersi sono proprio quelli passanti per il punto fisso: quelli corrispondenti a delle frequenze di H tra loro razionali.

#### Tentativo di costruire una teoria perturbativa per Henon-Heiles

Il motivo per il quale non è stato possibile trovare un terzo integrale del moto analiticamente è il fallimento della teoria perturbativa. Andiamo in variabili azione-angolo:

$$\frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}x^2 = \omega_x I_x.$$

$$\frac{1}{2}p_y^2 + \frac{1}{2}y^2 = \omega_y I_y.$$

Le trasformazioni canoniche associate sono:

$$x = \sqrt{2I_x} \sin \theta_x \quad y = \sqrt{2I_y} \sin \theta_y.$$

In conclusione possiamo scrivere l'Hamiltoniana imperturbata come:

$$H_0 = \omega_x I_x + \omega_y I_y.$$

Mentre la perturbazione:

$$\begin{aligned} H_I = & \frac{(2I_x)(2I_y)^{1/2}}{2} \times \\ & \times \left[ \sin \theta_y - \frac{1}{2} \sin(\theta_x + \theta_y) - \frac{1}{2} \sin(\theta_x - 2\theta_x) \right] + \\ & - \frac{1}{3} (2I_y)^{3/2} \left[ \frac{3}{2} \sin \theta_y - \frac{1}{2} \sin(3\theta_y) \right]. \end{aligned}$$

In conclusione si dovrebbe trovare la trasformazione che integra la seguente  $H$ :

$$H = H_0 + H_I.$$

Il grosso problema è che possiamo trovarne una che elimini una delle due risonanze in  $\theta_y \pm 2\theta_x$ <sup>3</sup>, non è tuttavia possibile eliminarle entrambe. La teoria perturbativa quindi fallisce in questo caso e vediamo i tori nello spazio delle fasi rompersi all'aumentare dell'energia.

Nel seguito ci focalizzeremo su delle mappe che siano **"Area preserving"**, ovvero quelle che derivano da sistemi Hamiltoniani.

Una mappa, per essere area preserving deve avere uno Jacobiano unitario, in due dimensioni ad esempio dovrà essere:

$$\frac{\partial(x_{i+1}, y_{i+1})}{\partial(x_i, y_i)} = 1.$$

La logica di questo cambio di punto di vista è la seguente: se studiamo degli insiemi generici di mappe (Area preserving) allora dato un qualunque sistema Hamiltoniano potremmo pensare di ricondurlo ad una determinate classi di mappe.

Questo approccio ci permette di risolvere generalizzando molti più problemi Hamiltoniani.

## 18.4 Twist Map

Supponiamo di avere un toro bidimensionale avente frequenze tra di loro incommensurabili (rapporto irrazionale). Supponiamo inoltre che le due frequenze  $\omega_1, \omega_2$  varino debolmente con l'azione  $I$ .

Dalla definizione di variabili azione angolo sappiamo che:

$$\theta_1(t) = \omega_1 t + \theta_1(0) \quad \theta_2(t) = \omega_2 t + \theta_2(0).$$

E anche:

$$\omega_1 = \partial_{I_1} H \quad \omega_2 = \partial_{I_2} H.$$

<sup>3</sup>Il problema di questi termini deriva dalla **interazione** delle due variabili angolo: tale interazione potrebbe distruggere la teoria perturbativa per la scelta di determinati valori iniziali ad esempio.

Sia  $t_2$  il periodo per avere  $\theta_2 \rightarrow \theta_2 + 2\pi$ , sempre per definizione di pulsazione  $\omega$  si ha:

$$t_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}.$$

Cosa possiamo dire sulla traslazione temporale di  $t_2$  per  $\theta_1$ ?

$$\begin{aligned} \theta_1(t + t_2) &= \theta_1(t) + \omega_1 t_2 = \\ &= \theta_1(t) + 2\pi \frac{\omega_1}{\omega_2} = \\ &= \theta_1(t) + 2\pi \frac{\omega_1}{\omega_2} (I_1). \end{aligned}$$

Attenzione al fatto che  $\omega_1/\omega_2$  è una funzione di variabile  $I_1$  (non è una moltiplicazione).

Operativamente una twist map ha una struttura sulla superficie di Poincaré del seguente tipo:

### Twist map

$$x_i \equiv (\theta_1(t + it_2), I_1) \equiv (\theta_i, r_i).$$

in cui la dipendenza da  $r_i$  compare nel fattore  $\omega_1/\omega_2 \equiv \alpha(r_i)$ .

**Esempio 18.4.1** (Twist map semplice).

$$\begin{cases} \theta_{i+1} = \theta_i + 2\pi\alpha(r_i) \\ r_{i+1} = r_i \end{cases}.$$

Possiamo visualizzare la mappa nello spazio  $x, y$ :

$$x_i = r_i \cos(\theta_i) \quad y_i = r_i \sin(\theta_i).$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

In queste coordinate si ha che, se  $\alpha$  non dipende da  $r$ , iterando la mappa i punti  $x, y$  giacciono tutti sulla stessa circonferenza. Visto che in generale abbiamo una dipendenza da  $\alpha$  allora i punti con  $r$  maggiore ruotano di più o di meno rispetto a quelli con  $r$  minore, formando quindi una specie di rotazione-dilatazione dello spazio  $(x, y)$ .

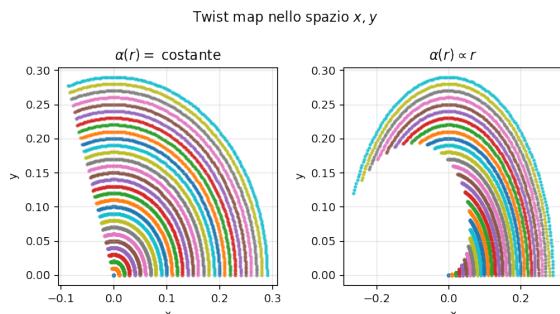


Figura 2.14: Twist map nello spazio  $x, y$ , le condizioni iniziali utilizzate sono  $\theta_0 = 0$ . Per  $r_0$  sono stati selezionati diversi valori tra 0 e 0.3 che danno origine alle curve rotanti (un colore corrisponde alla singola traiettoria, dopo il celeste la mappa di colori si ripete).

**Esempio 18.4.2** (Twist map in cartesiane). Un esempio di Twist map in coordinate cartesiane è:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + y_i \\ y_{i+1} = y_i \end{cases}$$

Notiamo che la struttura delle equazioni è identica al caso precedente (in coordinate polari).

Questa mappa è area preserving, infatti:

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}.$$

Partendo con dei punti aventi tutti la stessa coordinata  $x$  si osserva che, per iterate successive, i punti con la  $y$  maggiore vengono mandati in  $x$  maggiori rispetto a quelli con una  $x$  minore. La coordinata  $y$  resta invece inalterata.

Abbiamo quindi una rotazione + dilatazione nello spazio  $x, y$ : una Twist map.

## 19 Lezione 19

### 19.1 Mappa di Henon

La mappa di Henon è stata al centro di numerose ricerche sui sistemi caotici e non lineari. Henon ebbe l'idea di modellizzare con questa mappa il moto degli oggetti celesti. Secondo il suo modello, per determinati parametri iniziali, il moto sfocia nel caos.

Costruiamo la mappa in due step, un primo step è un "twist" con un termine  $-x^2$ , chiamiamo questa trasformazione  $T_1$ :

$$T_1 : \begin{cases} x' = x_i \\ y' = y_i - x_i^2 \end{cases} .$$

Mentre il secondo step ( $T_2$ ) è una rotazione del primo:

$$T_2 : \begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} .$$

In conclusione abbiamo  $T = T_1 \cdot T_2$ :

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i \cos \alpha - (y_i - x_i^2) \sin \alpha \\ y_{i+1} = x_i \sin \alpha + (y_i - x_i^2) \cos \alpha \end{cases} .$$

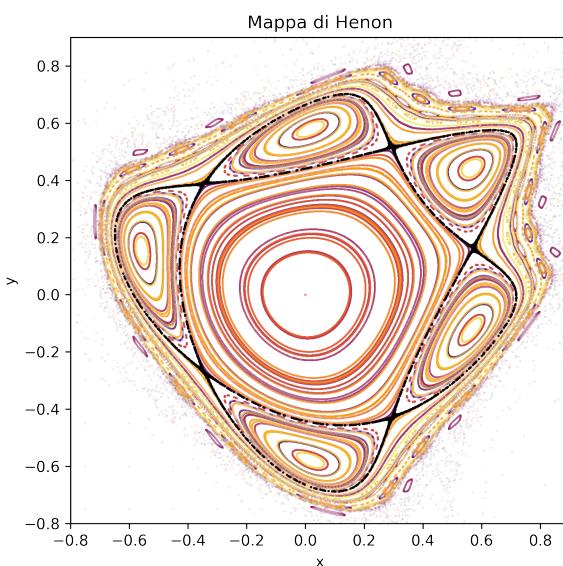


Figura 2.15: Mappa di Henon al variare dei parametri iniziali di  $x$  e  $y$  con  $\alpha = 1.328$ . Si è messa enfasi sulla traiettoria passante per il punto fisso (in nero). Notiamo come le traiettorie esterne sfocino già nel caos. Realizzata in Fortran e Python.

In questa immagine c'è molto di più di quel che si vede, provando a valutare il moto negli intorni dei punti fissi appaiono strutture di vario genere, piccoli tori circondati da caos (provare a giocare con le condizioni iniziali per vedere).

Possiamo chiederci se questa mappa sia Area preserving.

Per quanto riguarda la rotazione  $T_2$  non ci sono problemi, sappiamo che ogni rotazione ha un Jacobiano unitario.

La mappa  $T_1$  invece (usiamo la notazione di sopra con  $x', y'$ ):

$$\frac{\partial x'}{\partial x_i} = 1 \quad \frac{\partial x'}{\partial y_i} = 0$$

$$\frac{\partial y'}{\partial x_i} = 0 \quad \frac{\partial y'}{\partial y_i} = 1.$$

Quindi abbiamo che il determinante della matrice delle derivate miste è unitario anche per  $T_1$ , di conseguenza la trasformazione è Area preserving e potrebbe essere attribuita ad una qualche Hamiltoniana. Quale Hamiltoniana genera questa mappa?

### 19.2 Legare una mappa ad una Hamiltoniana

Prendiamo una Hamiltoniana del tipo:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum \frac{1}{2} p_i^2 + V(\mathbf{q}) \quad (19.1)$$

**L'integrazione di Eulero non è Area preserving**  
Possiamo provare a discretizzare le equazioni del moto in questo modo:

$$\begin{cases} q_{i+1} = q_i + h p_i \\ p_{i+1} = p_i - h \frac{\partial V}{\partial q_i} \end{cases} \quad h = \Delta t.$$

Possiamo scrivere la mappa in forma di matrice (in questo modo si isola lo Jacobiano):

$$\begin{pmatrix} q_{i+1} \\ p_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & h \\ -h V'' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_i \\ p_i \end{pmatrix} .$$

Dove la derivata seconda  $V''$  appare perché si scrive:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_i^2} \partial q_i.$$

Per rendere proporzionale a  $q$  il termine con la derivata parziale di  $V$ .

Il determinante della trasformazione non è unitario:

$$\det = 1 + h^2 V'' \neq 1.$$

Quindi la mappa che si ottiene da una integrazione con Eulero non è area preserving. Integrando con questo metodo l'Hamiltoniana perderemo molto rapidamente le caratteristiche del nostro sistema fisico.

**Eulero "a due step" è Area preserving** Prendiamo la seguente variante dell'integrazione con Eulero:

$$\begin{cases} q_{i+1} = q_i + h p_i \\ p_{i+1} = p_i - h V'_{i+1} \end{cases} .$$

In cui il termine  $V'_{i+1}$  è la derivata del potenziale rispetto a  $q_{i+1}$ .

Così facendo il termine in basso a sinistra nello Jacobiano descritto sopra non c'è:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Ed il determinante di questa matrice è 1: abbiamo una integrazione AP (Area preserving).

Il problema è che, a differenza delle equazioni agli incrementi di Eulero, questa integrazione non deriva direttamente dalle equazioni di Hamilton discretezzate dell'Hamiltoniana 19.1. Da quale Hamiltoniana derivano?

Si può dimostrare che questa H deve esser della forma:

$$H = \frac{p^2}{2} + hV(q)\delta(t - ih) \quad i \in \mathbb{N} \quad (19.2)$$

Per un tempo  $h'$  abbiamo una equazione per particella libera ( $H = p^2/2$ ), tale Hamiltoniana si sa integrare (equazioni del moto lineari).

$$\begin{aligned} q_{i+1} &= q_i + hp_i \\ p_{i+1} &= p_i. \end{aligned}$$

Quindi lontano dalle  $\delta$  abbiamo una specie di twist map. Ai tempi  $t = ih$  il nostro oggetto prende un colpo dal potenziale.

Immaginiamo di iniziare l'integrazione in un tempo tra  $[ih, (i+1)h]$ , in tal caso si ha per  $q$  l'equazione scritta sopra, mentre per  $p$  abbiamo una sorpresa:

$$\dot{p} = -\frac{\partial V}{\partial q}.$$

Se la integriamo nel tempo sopravvivono soltanto dei pezzi negli intorni di  $(i+1)h$  (il tempo  $ih$  è già passato):

$$p_{i+1} - p_i = - \int_{(i+1)h-\epsilon}^{(i+1)h+\epsilon} V' dt = -hV'_i.$$

Notiamo che si potrebbe anche invertire il ruolo di  $p$  e  $q$ , effettuando prima il "calcio" e successivamente l'evoluzione:

$$\begin{aligned} q_{i+1} &= q_i + p_{i+1}h \\ p_{i+1} &= p_i - V'_i h. \end{aligned}$$

**Analogia con le mappe di Poincare** La questione del passaggio dall'Hamiltoniana di partenza ad una mappa (e viceversa) è quindi risolta? Cosa significa fisicamente risolvere per una Hamiltoniana come quella di equazione 19.2?

Sorprendentemente significa che stiamo studiando una mappa di Poincare: fissare degli istanti di "osservazione" del sistema con la  $\delta$  significare fissare dei piani a tempi fissi nello spazio  $(q, p, t)$ , esattamente quello che si fa con una mappa di Poincare.

Infatti fissare un piano di osservazione <sup>4</sup> significa aspettare gli istanti in cui l'oggetto passerà nuovamente da tale piano, quindi è esattamente l'analogico di quello che stiamo facendo adesso.

### 19.3 Introduzione alla mappa standard

La maggior parte degli studi sul caos è stato effettuato sulla mappa standard. Tale mappa ha la seguente struttura:

<sup>4</sup>ad esempio  $y = 0$  come nell'esempio della lezione scorsa

#### Mappa standard

$$\begin{aligned} q_{i+1} &= q_i + p_{i+1} \\ p_{i+1} &= p_i + \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi q_i). \end{aligned}$$

In cui si sceglie  $\text{mod}(q) = \text{mod}(p) = 1$  <sup>5</sup>.

Notiamo anche che il potenziale in questione è quello di un pendolo.

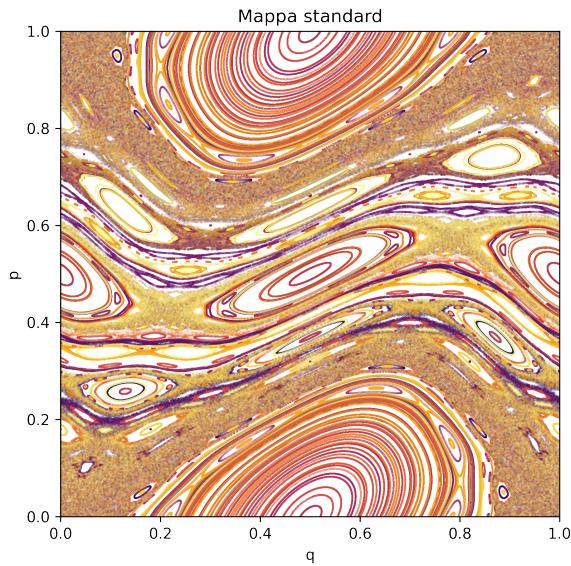


Figura 2.16: Mappa standard integrata con  $k = 0.97$ . Si nota la presenza di strutture che ricordano tori invarianti, in altre zone è invece evidente la presenza di caos.

Questa mappa è sicuramente Hamiltoniana, infatti si ha uno Jacobiano:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k \cos(2\pi q_i) & 1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo un termine non lineare in basso a sinistra, tuttavia ai fini del determinante questo non ha importanza.

### 19.4 Studio dei punti fissi per un mappa Hamiltoniana

Definiamo la mappa come la trasformazione  $T$ , cerchiamo di capire cosa avviene nella mappa nei punti  $x^*$  tali per cui:

$$x^* = T(x^*).$$

In particolare ci concentriamo su un intorno di questi cercando di linearizzare il problema:

$$x = x^* + \delta x.$$

<sup>5</sup>Su wikipedia si dice che solitamente  $p, q$  sono presi modulo  $2\pi$  (perché non si divide per  $2\pi$  l'incremento con  $k$ ), quindi si divide  $p$  e  $q$  per  $2\pi$  ogni step e se ne prende il resto. Nel caso di modulo 1 il resto è il numero stesso.

$$\begin{aligned}\implies \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}_{n+1} = T(\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}_n) = \\ &\simeq T(\mathbf{x}^*) + \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^*} \delta\mathbf{x}_n.\end{aligned}$$

Abbiamo quindi che il comportamento al punto fisso è determinato dalla matrice delle derivate miste:

$$\delta\mathbf{x}_{n+1} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^*} \delta\mathbf{x}_n \delta\mathbf{x}_n.$$

Esplicitamente:

$$\begin{pmatrix} \delta x_{n+1} \\ \delta y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_x}{\partial x} & \frac{\partial T_x}{\partial y} \\ \frac{\partial T_y}{\partial x} & \frac{\partial T_y}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_n \\ \delta y_n \end{pmatrix}.$$

Essendo la mappa per ipotesi Hamiltoniana si ha che matrice al centro (che chiamiamo  $M$ ) ha determinante unitario, gli autovalori di questa matrice possono essere ricavati tramite l'equazione secolare:

$$\begin{aligned}\det(M - \lambda \mathbb{I}) &= \lambda^2 - \lambda \text{tr}(M) + \det(M) = \\ &= \lambda^2 - \lambda \text{tr}(M) + 1.\end{aligned}$$

$$\lambda_{\pm} = \frac{\text{tr}(M) \pm \sqrt{(\text{tr}(M))^2 - 4}}{2}.$$

ci sono allora due possibilità per gli autovalori:

- $|\text{tr}(M)| < 2$ : autovalori complessi coniugati.
- $|\text{tr}(M)| > 2$ : autovalori reali.

Il fatto che il determinante di  $M$  sia unitario comporta anche che il prodotto tra i due autovalori faccia 1:

$$\lambda_+ \cdot \lambda_- = 1.$$

Quindi possiamo definire  $\lambda_+ = \lambda$ , di conseguenza:

$$\lambda_+ = \lambda \quad \lambda_- = \frac{1}{\lambda}.$$

**Autovalori reali** Consideriamo il caso in cui gli autovalori sono reali con autovettori corrispondenti  $\omega$ , l'evoluzione di questi vettori avrà la seguente forma per definizione:

$$\delta\omega_{n+1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix} \delta\omega_n.$$

Quindi l'evoluzione degli autovettori si distingue in due casi:

1.  $\lambda > 0$ : Allora abbiamo le due evoluzioni per gli autovettori:

$$\omega_n^{(+)} = \lambda^n \omega_0; \quad \omega_n^{(-)} = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^n \omega_0.$$

Quindi in una direzione abbiamo una espansione, nell'altra una contrazione.

2.  $\lambda < 0$ : In questo caso si ha l'analogo del caso precedente però ad ogni step gli assi invertono la loro direzione

$$\omega_n^{(+)} = (-1)^n \lambda^n \omega_0; \quad \omega_n^{(-)} = (-1)^n \left(\frac{1}{\lambda}\right)^n \omega_0.$$

Nel caso (1) possiamo anche dire qualcosa in più sul nostro sistema: scriviamo l'equazione di  $\omega_n$  in termini di esponenziali

$$\omega_n = \omega_0 \exp(n \ln \lambda).$$

In questa equazione il termine  $n$  gioca il ruolo di un tempo, in questo modo si scopre che la scala di evoluzione del sistema  $\tau$  è:

$$\tau \sim \frac{1}{\ln \lambda}.$$

Questa è la scala con la quale gli oggetti si allontanano/collassano su un punto fisso.

Questo studio dei punti fissi ci serve per capire cosa succede in un sistema quando si rompe il teorema KAM.

## 19.5 Caos e rottura del teorema KAM

Prendiamo la seguente mappa in coordinate azione angolo:

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1} &= \varphi_n + \frac{\partial}{\partial I_{n+1}} S_0(I_{n+1}) \\ I_{n+1} &= I_n.\end{aligned}$$

Questa è molto simile ad una Twist map. A destra della prima equazione abbiamo il termine  $\partial_{I_{n+1}} S_0$ , questo può essere associato al rapporto tra le frequenze della Hamiltoniana predetto in generale per le twist map nella lezione precedente.

$$\partial_{I_{n+1}} S_0 \sim 2\pi \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

Nel seguito supponiamo che il termine  $\alpha(I) = \omega_1/\omega_2(I)$  proporzionale a  $I$ , quindi abbiamo una specie di twist map come nella seconda figura di Figura 2.14.

Il teorema KAM ci assicura che i primi tori che si rompono sono quelli per il quale il rapporto  $\omega_1/\omega_2$  è un numero razionale.

Prendiamo una situazione in cui alcuni tori previsti dal teorema KAM sono preservati mentre si rompe un singolo toro di quelli razionali, cerchiamo di capire cosa si vede nello spazio delle fasi in questo caso. L'idea per far questo è sempre quella di scrivere una teoria perturbativa su  $S$ :

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1} &= \varphi_n + \frac{\partial}{\partial I_{n+1}} S_0 + \epsilon \frac{\partial}{\partial I_{n+1}} S_1(I_{n+1}, \varphi_n) \\ I_{n+1} &= I_n + \epsilon \frac{\partial}{\partial \phi_n} S_1(I_{n+1}, \varphi_n).\end{aligned}$$

Come sappiamo sono i termini perturbativi introdotti in queste equazioni a rompere il toro. Possiamo vedere cosa avviene alle curve che si rompono.

Partiamo dai tori imperturbati, questi nello spazio  $I, \varphi$  faranno delle circonferenze poiché  $I$  si conserva. Prendiamo allora 3 di questi tori aventi  $I$  crescente (che chiamiamo  $C_+, C, C_-$ ), questi formeranno 3 circonferenze concentriche come in figura 2.17. Scegliamo il toro centrale  $C$  tale che la sua frequenza

sia razionale, quindi ci aspettiamo che sia un toro che si rompe prima degli altri due limitrofi.

Si effettua un cambio di sistema di riferimento in modo tale da rendere i punti del toro centrale fermi, gli altri due tori avranno la caratteristica (nel nuovo sistema) di ruotare uno in senso orario e l'altro in senso antiorario poiché  $\omega \propto I$ .

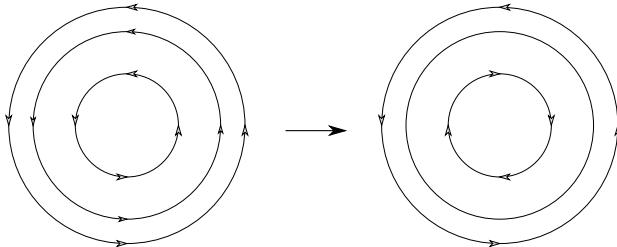


Figura 2.17: Cambio di sistema di riferimento, i punti del toro al centro sono fermi poiché siamo in un sistema rotante con la  $\omega$  di quel toro.

Il toro più grande aveva una  $\omega$  più grande, il toro più piccolo invece una  $\omega$  più piccola rispetto al centrale. Per questo motivo il primo gira in senso orario ed il secondo in senso antiorario dopo la trasformazione.

A questo punto possiamo accendere la perturbazione (si reinserisce nelle equazioni i termini con  $\epsilon$ ). In questo modo i nuovi tori  $C_{-, \epsilon}$ ,  $C_{+, \epsilon}$  subiscono una piccola perturbazione rispetto alle loro posizioni iniziali, il toro centrale  $C$  invece si rompe e cessa di esistere.

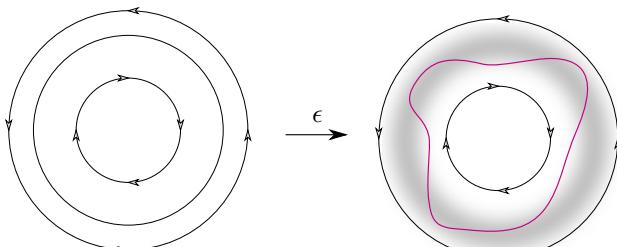


Figura 2.18: Il toro  $C$  si rompe in seguito alla accensione della perturbazione, ciò che resta di lui è l'alone nero al centro a rappresentare il caos. In magenta abbiamo la varietà di punti fermi tra i due tori che deve esistere necessariamente per la continuità di  $\varphi$  ed  $I$ .

Dopo la rottura del toro  $C$  tra i due tori dovrà necessariamente esistere una varietà di punti aventi  $\omega = 0$ . Questo perché il toro esterno ed il toro interno hanno  $\omega$  di segno opposto in questo sistema, tracciando una linea che passa per i due tori necessariamente deve esistere un punto in mezzo che annulla la  $\omega$ .

Chiamando la mappa  $T_\epsilon$  abbiamo che, per i punti appartenenti alla varietà rimasta fissa:

$$\varphi^* = T_\epsilon(\varphi^*).$$

Sicuramente la varietà rossa dei punti fermi non è invariante, quindi evolverà negli step successivi. L'unico modo per cui può evolvere questa varietà è quello di variare la componente radiale poiché quella angolare è fissata per definizione di questa curva.

La cosa importante è che i punti fissi dovranno appartenere per ogni step a tale varietà, per tali punti deve

valere sempre:

$$I^* = T_\epsilon(I^*).$$

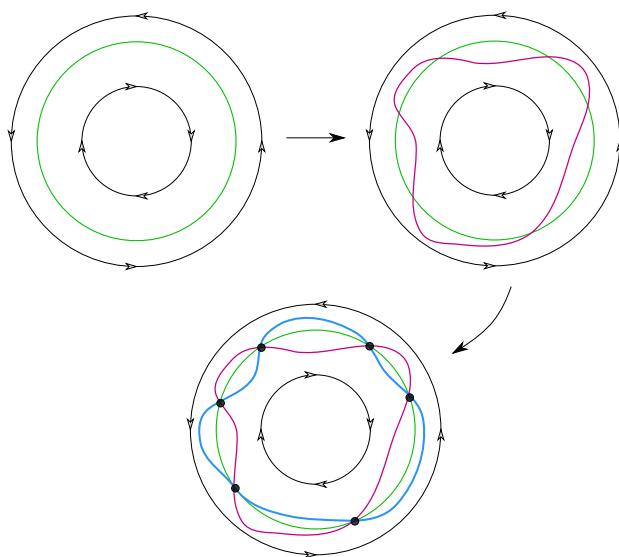


Figura 2.19: Andamento della varietà con i punti aventi  $\omega = 0$  al variare degli step della mappa, nella prima figura in alto a sinistra si mostra la mappa imperturbata, in tal caso la varietà dei punti fermi corrisponde con il toro invariante per costruzione. Le due figure successive corrispondono all'avere acceso la perturbazione, le curve magenta e blu pertanto non sono tori poiché in questa zona c'è il caos. In nero sono presenti i punti fissi.

La cosa interessante da capire è la struttura dei punti fissi, questa ci dirà in che modo i tori si stanno spaccando.

Guardiamo da vicino una zona della figura precedente:

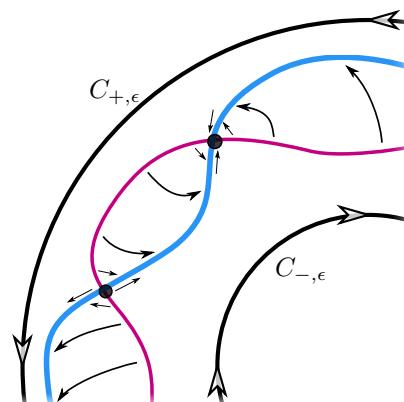


Figura 2.20: Ingrandimento su zona con punti fissi, le frecce indicano la direzione di variazione della varietà fissa o isocrona.

Possiamo vedere che tra la varietà del primo step e quella del secondo i punti devono necessariamente avvicinarsi/allontanarsi dal punto fisso. Questo è dovuto al fatto che  $\omega \propto I$ , quindi per passare da zone con  $I$  maggiore/minore c'è bisogno di accelerare/rallentare. Questa particolarità ci dice che i punti fissi sono un alternanza di punti iperbolici ed ellittici. Tutti questi punti fissi vivono tra i due tori quasi conservati  $C_{\pm, \epsilon}$ . Prendiamo in considerazione il punto iperbolico in figura (quello in basso) e cerchiamo di capire cosa viene in un suo intorno.

Sappiamo che un punto iperbolico è caratterizzato da due curve instabili (che si allontanano esponenzialmente dal punto) e da due curve stabili (che cadono esponenzialmente nel punto), tali curve vengono chiamate Manifold.

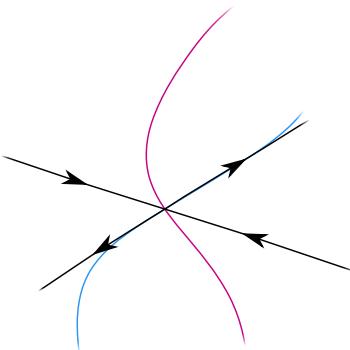


Figura 2.21: Curve stabili ed instabili per il punto iperbolico. Notiamo che non devono necessariamente coincidere con le curve isocrone, l'importante è che siano consistenti con le direzioni di figura 2.20.

Dobbiamo anche precisare che le curve colorate siano delle varietà stabili mentre le linee con le frecce sono delle possibili mappe di Poincaré.

Può succedere che le due curve nere, nelle vicinanze del punto fisso, si incrocino in un punto (diverso dal punto iperbolico). L'intersezione è quasi inevitabile visto che il punto iperbolico è schiacciato tra due tori: i manifold (curve nere) sono costretti a "piegarsi" prima o poi per non oltrepassare il toro.

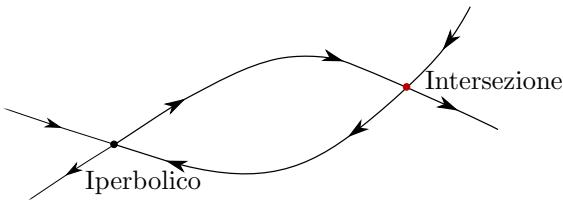


Figura 2.22: Intersezione dei Manifold nei pressi di un punto fisso.

Immaginiamo adesso di far evolvere le traiettorie nella direzione del punto di incrocio del manifold. Iterando la mappa si avrà una situazione del tipo:

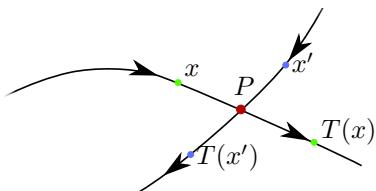


Figura 2.23: Iterazioni della mappa per punti attorno al punto di incrocio dei manifold.

Adesso se si prova ad iterare la mappa per il punto  $P$  si ottiene un paradosso: l'iterazione  $T(P)$  dovrebbe stare davanti sia a  $T(x)$  che a  $T(x')$ . L'unica situa-

zione possibile è che i manifold si incrocino ancora in un punto  $T(P)$ .

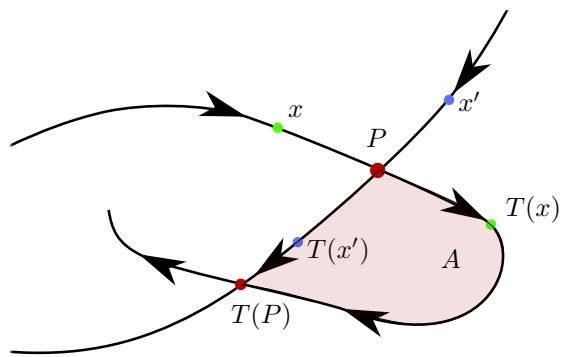


Figura 2.24: Iterazione della mappa nei pressi del punto di intersezione dei manifold: si genera un ulteriore punto di intersezione dei manifold.

Abbiamo quindi generato una zona chiusa tra le intersezioni dei manifold di area  $A$ . Per una iterazione successiva il punto  $T(P)$  dovrà andare in un punto  $T^2(P)$  che è ancora un'altra intersezione di manifold, quindi le due curve nere si intersecheranno ancora, generando un'altra superficie separata di area  $A$  (la stessa di prima perché la mappa è area preserving). Adesso dobbiamo ricordare che i manifold si allontanano/avvicinano esponenzialmente al punto fisso. Possiamo notare nella figura 2.24 che al momento della prima iterata della mappa (quando creo  $T(P)$ ) il manifold uscente ha fatto più strada del manifold entrante.

Tenendo di conto di questo nelle iterate successive lo spostamento dal punto  $T(P)$  per il punto  $T^2(P)$  sarà maggiore nella direzione di allontanamento dal punto fisso rispetto a quella di avvicinamento.

Come conseguenza oltre a preservare l'area le curve generate saranno sempre più allungate e schiacciate come in figura

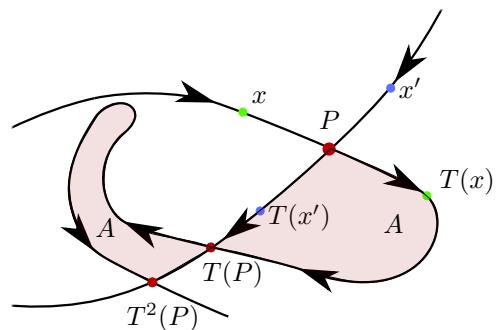


Figura 2.25: Seconda iterazione della mappa: si genera un secondo punto di intersezione. Notiamo come la seconda "area" generata sia stata rappresentata piegata, questo perché i manifold sono linee separatorie dello spazio delle fasi: non si possono attraversare.

Iterando la procedura ancora e ancora nello spazio delle fasi succederà un gran casino, i manifold oscillatoranno su loro stessi generando altre intersezioni dal quale potrebbero nascere altre oscillazioni... è caos.

Queste strutture oscillanti possono generarsi da uno stesso punto fisso (**strutture omocliniche**) oppure a partire dalla intersezione di manifold provenienti da punti fissi diversi (**strutture eterocliniche**)

### Strutture autosimilari nei punti ellittici

Nei pressi dei punti ellittici invece abbiamo delle isole invarianti, infatti all'interno di queste strutture non può penetrare il caos generatosi attorno ai punti iperbolici circostanti.

In pratica si ha che "ingrandendo" la zona di un punto ellittico si osserva una struttura del tutto analoga a quella originale: anche all'interno dell'isola invariante ci saranno punti fissi iperbolici ed ellittici a formare quindi una struttura self similare.