

# Sistemi complessi

Edoardo Gabrielli

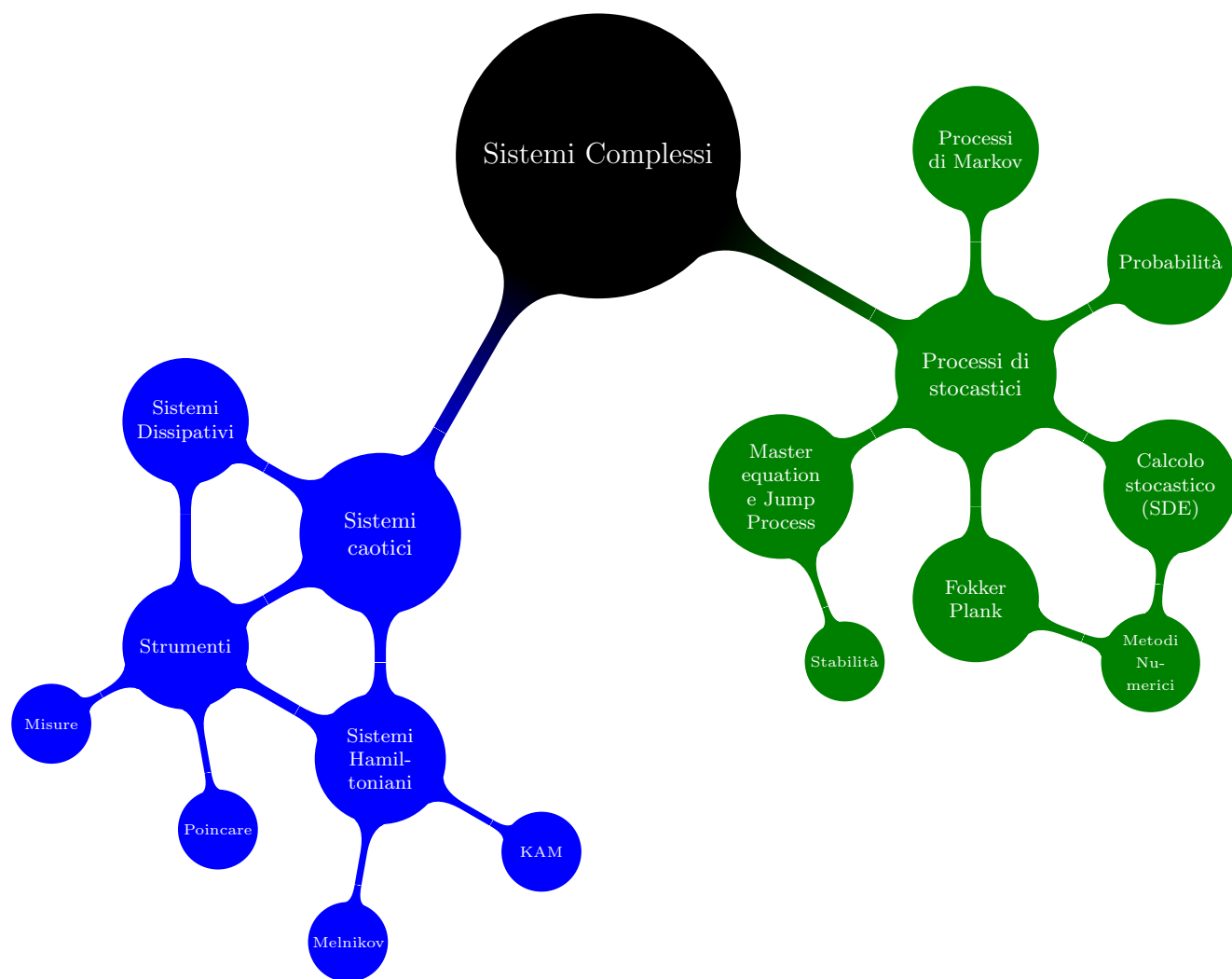
24 dicembre 2020

# Indice

<b>1</b>	<b>Processi stocastici</b>	<b>4</b>
1	Lezione 1 . . . . .	4
1.1	Moto Browniano . . . . .	4
1.2	Dinamica mesoscopica: Langevin . . . . .	4
1.3	Nascita-Morte: Master equation . . . . .	5
2	Lezione 2 . . . . .	6
2.1	Esempi di Master equation . . . . .	6
2.2	Metodo della funzione generatrice . . . . .	6
2.3	Correlazione e densità spettrale . . . . .	7
2.4	Probabilità . . . . .	7
2.5	Funzione caratteristica . . . . .	8
3	Lezione 3 . . . . .	9
3.1	Limiti con variabili stocastiche . . . . .	9
3.2	Cumulanti della funzione caratteristica. . . . .	10
3.3	Teorema del limite centrale . . . . .	10
3.4	Momenti fattoriali . . . . .	11
3.5	Processi stazionari e processi di Markov . . . . .	11
3.6	Equazione di Chapman - Kolmogorov . . . . .	12
4	Lezione 4 . . . . .	13
4.1	Continuità dei processi stocastici . . . . .	13
4.2	Forma differenziale di Chapman - Kolmogorov . . . . .	13
4.3	Processo di Wiener . . . . .	14
5	Lezione 5 . . . . .	15
5.1	Processo di Ornstein - Uhlenback . . . . .	15
5.A	Metodo delle Caratteristiche. . . . .	17
6	Lezione 6 . . . . .	19
6.1	Modelli semplici di Random Walk . . . . .	19
6.2	Random Walk di Weierstrass . . . . .	20
6.3	Random Telegraph . . . . .	21
6.4	Integrali stocastici . . . . .	22
6.5	Integrale di Îto e di Stratonovich . . . . .	22
6.6	Relazione tra l'incremento stocastico e l'incremento temporale. . . . .	23
6.7	Formula di Îto . . . . .	23
7	Lezione 7 . . . . .	24
7.1	Integrale di una SDE . . . . .	24
7.2	Algoritmo di Heun . . . . .	25
8	Lezione 8 . . . . .	26
8.1	Legame tra SDE e Fokker-Plank . . . . .	26
8.2	Ornstein-Uhlenback dipendente dal tempo . . . . .	28
9	Lezione 9 . . . . .	29
9.1	Oltre il teorema del limite centrale . . . . .	29
9.2	Distribuzioni stabili . . . . .	29
9.3	Teorema di Levy-Kintchine . . . . .	30
9.4	Bacino di attrazione di una distribuzione . . . . .	31
9.5	Cambio di scala . . . . .	31
9.6	SDE con variabili stocastiche con distrib. di Levy . . . . .	32
10	Lezione 10 . . . . .	33
10.1	Random Walk di Weierstrass nel dettaglio . . . . .	33

**2 Sistemi caotici****34**

# MindMap del corso



# Capitolo 1

## Processi stocastici

### 1 Lezione 1

#### 1.1 Moto Browniano

Il conte Brown nel 1827 pensò di aver scoperto la vita osservando particelle di polline in acqua che si muovevano in modo casuale, ne concluse che le particelle fossero vive. Successivamente fu Einstein a dare una descrizione collisionale con i seguenti punti chiave:

- Impatti frequenti.
- Descrizione probabilistica.
- Dinamica discreta (tempo discretizzato).

Mettiamoci in un sistema unidimensionale e ipotizziamo che il tempo caratteristico di impatto tra due palline sia  $\tau$  e che  $n(t)$  sia il numero delle palline. Sempre per ipotesi per ogni pallina si ha la proprietà:

$$x(t=0) = x \implies x(t=\tau) = x + \Delta.$$

Dove  $\Delta$  varia da pallina a pallina, possiamo definire una distribuzione pari di questi  $\Delta$ :  $f(\Delta)$

$$\int f(\Delta)d\Delta = 1; \quad f(\Delta) = f(-\Delta).$$

#### Primo esempio di equazione di Fokker-Plank

Possiamo trovare il numero  $dn$  di palline che si muovono di una quantità  $\xi$ :  $\Delta < \xi < \Delta + d\Delta$ .

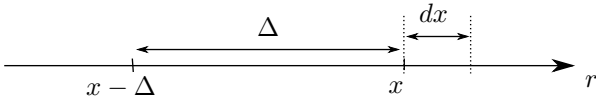


Figura 1.1: Particelle che si muovono di  $\xi$ , dove  $\Delta$  è la variabile stocastica per le palline.

$$dn = n f(\Delta) d\Delta.$$

La probabilità che una pallina si trovi nel punto  $x$  al tempo  $t + \tau$  per  $dx$  è:

#### Equazione di Chapman-Kolmogorov

$$P(x, t + \tau) dx = dx \int P(x - \Delta, t) f(\Delta) d\Delta \quad (1.1)$$

L'equazione rappresenta il fatto che il processo in questione è markoviano. Se così non fosse avremmo dovuto mettere a destra più di un tempo (anticipazione di argomento del corso).

Espandendo in serie (di Kramers-Moyal) le probabilità:

$$P(x, t + \tau) = P(x, t) + \frac{\partial P}{\partial t} \tau$$
$$P(x - \Delta, t) = P(x, t) - \frac{\partial P}{\partial x} \Delta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \Delta^2.$$

Si ottiene reinserendo nella 1.1:

#### Equazione del tipo di Fokker-Plank

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \quad (1.2)$$

Nella quale  $D$  vale:

$$D = \frac{1}{2\tau} \langle \Delta^2 \rangle.$$

Integrando la 1.2 si ottiene, con le condizioni iniziali:  $P(x, t=0) = \delta(x)$

$$P(x, t) = \frac{n}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right).$$

#### 1.2 Dinamica mesoscopica: Langevin

Possiamo scrivere una equazione del moto per le palline tenendo di conto di:

- Attrito:  $-6\pi\eta d\dot{x}$  (Approccio alla Stokes)
- Impatti random tra le altre particelle:  $\xi$ .

$$m\ddot{x} = -6\pi\eta d\dot{x} + \xi \quad (1.3)$$

Che è un primo esempio di equazione differenziale stocastica.

Se moltiplichiamo a destra e sinistra per  $x$  possiamo riscriverla nel seguente modo:

$$\frac{1}{2} m \frac{d^2}{dt^2} \langle x^2 \rangle - m \dot{x}^2 = -3\pi\eta d \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle + \xi x.$$

Possiamo mediare su tutte le possibili realizzazioni della  $\xi$ :

$$\frac{m}{2} \frac{d^2}{dt^2} \langle x^2 \rangle - kT = -3\pi\eta d \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle.$$

Si risolve con metodi noti:

$$\frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = \frac{kT}{3\pi\eta d} + C \exp\left(\frac{-6\pi\eta dt}{m}\right).$$

Possiamo buttare il secondo termine ottenendo:

#### Equazione di diffusione

$$\langle x^2 \rangle_t - \langle x^2 \rangle_0 = \frac{kT}{3\pi\eta d} \cdot t \quad (1.4)$$

Andando a vedere l'equazione di Fokker-Plank vista sopra si scopre che c'è una relazione tra  $D$  ed i coefficienti di questa equazione:

#### Coefficiente di Einstein

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta d}.$$

Detto anche coefficiente di diffusione.

### 1.3 Nascita-Morte: Master equation

Ipotizziamo di avere due specie di animali:

- Conigli:  $x$
- Volpi:  $y$

Tali animali possono essere modellizzati con il seguente modello di nascite/morti:

#### Sistema di Lotka-Volterra

$$\begin{cases} x + \text{food} \rightarrow 2x \\ x + y \rightarrow 2y \\ y \rightarrow \text{death} \end{cases}.$$

Possiamo tradurre questo sistema con due equazioni differenziali (ad intuito):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k_1 xc - k_2 xy \\ \frac{dy}{dt} = k_2 xy - k_3 y \end{cases}.$$

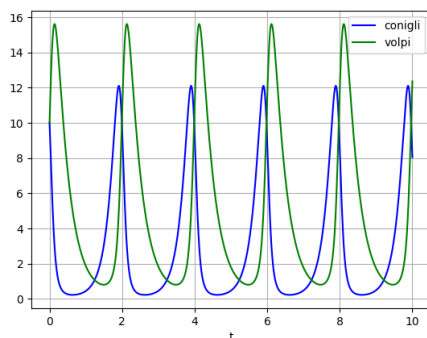


Figura 1.2: Andamento delle soluzioni (Link al codice)

Come possiamo tener di conto delle fluttuazioni presenti in natura? (domanda aperta)

In realtà dovremmo utilizzare un modello discreto essendo il numero di volpi/conigli appartenente ai naturali. Prendiamo la probabilità di avere  $(x, y)$  (lepri, volpi) al tempo  $t$ :  $P(x, y, t)$  (dove adesso  $x, y$  sono discreti). Valgono le seguenti uguaglianze per un certo tempo  $\Delta t$ :

$$P_r(x \rightarrow x+1, y) \Delta t = k_1 cx \Delta t$$

$$P_r(x \rightarrow x-1, y \rightarrow y+1) \Delta t = k_2 xy \Delta t$$

$$P_r(x \rightarrow x, y \rightarrow y-1) \Delta t = k_3 y \Delta t$$

$$P(x \rightarrow x, y \rightarrow y) \Delta t = \Delta t [1 - (k_1 cx + k_2 xy + k_3 y)].$$

Dove  $P_r$  è la probabilità di fare la transizione (indipendente da  $t$  per ipotesi). Possiamo trovare l'evoluzione temporale come:

#### Esempio di Master Equation

$$\begin{aligned} \frac{P(x, y, t + \Delta t) - P(x, y, t)}{\Delta t} = & \\ & P_r(x-1 \rightarrow x, y) \cdot P(x-1, y, t) + \\ & P_r(x+1 \rightarrow x, y-1 \rightarrow y) \cdot P(x+1, y, t) + \\ & P(x \rightarrow x, y+1 \rightarrow y) P(x, y+1, t) + \\ & [P_r(x \rightarrow x, y \rightarrow y) - 1] \cdot P(x, y, t) \end{aligned} \quad (1.5)$$

## 2 Lezione 2

### 2.1 Esempi di Master equation

- Rumore shot.
- Rumore Jonshon

**Rumore shot** La corrente è composta da elettroni che si spostano, le fluttuazioni del numero di elettroni generano rumore.

Chiamiamo  $t_k$  il tempo di arrivo di un elettrone su una certa sezione ortogonale alla direzione del flusso, si sceglie il seguente modello per la corrente:

$$I(t) = \sum_{t_k} F(t - t_k).$$

$F(t - t_k)$  ha la forma di una scarica di condensatore:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ q \exp(-\alpha t) & t \geq 0 \end{cases}$$

Cerchiamo la Master equation per questo sistema:

$$P(n \rightarrow n+1, \text{in } \Delta t) = \lambda \Delta t P_n(t).$$

Visto che possiamo riscrivere la probabilità di avere  $n$  elettroni al tempo  $t + \Delta t$  come:

$$P_n(t + \Delta t) = (1 - \lambda \Delta t) P_n(t) + \lambda \Delta t \implies$$

$$\frac{P(n, t + \Delta t) - P(n, t)}{\Delta t} = \lambda [P(n-1, t) - P(n, t)].$$

### 2.2 Metodo della funzione generatrice

Per risolvere il problema introduciamo la funzione generatrice  $G(s, t)$ :

$$G(s, t) = \sum_n s^n P(n, t).$$

Sostituendo nella master si ha:

$$\frac{\partial G(s, t)}{\partial t} = \lambda(s-1)G(s, t).$$

$$\implies G(s, t) = \exp(\lambda(s-1)t) G(s, 0).$$

Gli elettroni arrivano per  $t \geq 0$ , infatti si deve avere che:

$$\begin{cases} P(0, 0) = 1 \\ P(n, 0) = 0 \end{cases} \forall n \implies G(s, 0) = 1.$$

$$G(s, t) = e^{\lambda(s-1)t} = \sum_n s^n P(n, t) \implies$$

$$\sum_n e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t s)^n}{n!} = \sum_n s^n P(n, t).$$

In cui si è sfruttato la serie dell'esponenziale  $e^{\lambda s t}$ .

#### Distribuzione di Poisson

$$P(n, t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Dove  $P(n, t)$  è la probabilità che al tempo  $t$  ci siano  $N(t) = n$  elettroni nel sistema.

Tornando alla corrente dobbiamo trovare un modo per contare gli elettroni:

$$\mu(t) \equiv \frac{dN}{dt} = \delta(t - t_k)$$

Dove  $t_k$  è il tempo (random) in cui arriva un elettrone. Passiamo al continuo nei tempi di arrivo degli elettroni e riscriviamo la corrente come:

$$\begin{aligned} I(t) &= \int dx F(t-x) \mu(x) = \\ &= \int_{-\infty}^t q \exp(-\alpha(t-x)) \frac{dN}{dx} dx. \end{aligned}$$

La difficoltà dell'espressione sta nel fatto che  $N(t)$  è una funzione a salti irregolari.

Differenziando rispetto al tempo  $I(t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= q \exp(-\alpha(t-x)) \dot{N} \Big|_{x=t} + \\ &+ \int_{-\infty}^t (-\alpha q) \exp(-\alpha(t-x)) \dot{N} dx = \\ &= q\mu(t) - \alpha I(t). \end{aligned}$$

#### Equazione stocastica differenziale

$$\frac{dI}{dt} = -\alpha I(t) + q\mu(t).$$

Il termine in  $\mu$  dipende dalla sequenza casuale di  $\delta$ , ognuna di queste può dare soluzioni differenti.

L'idea per risolvere il problema è di interpolare l'andamento di  $N$  con un moto browniano, prendendo la media e le fluttuazioni del termine stocastico. Essendo il termine in  $\mu$  la derivata di un processo poissoniano abbiamo le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} \langle \mu dt \rangle &= \langle dN \rangle = \lambda dt \\ \langle (\lambda dt - \mu dt)^2 \rangle &= \lambda dt. \end{aligned}$$

Si ha un termine di fluttuazioni  $d\eta$  tale che:

$$dN = \lambda dt + d\eta.$$

Il differenziale della corrente si scrive come:

$$dI(t) = (\lambda q - \alpha I) dt + q d\eta(t).$$

Prendendo la media di questa equazione abbiamo che il termine di fluttuazione ( $I d\eta$ ) media a zero per ipotesi:

$$\frac{d}{dt} \langle I \rangle = \lambda q - \alpha \langle I \rangle.$$

Il risultato stazionario per l'equazione è:

$$\langle I \rangle_{\infty} = \frac{\lambda q}{\alpha}.$$

Procediamo con una ipotesi sbagliata: trascurare le fluttuazioni nel seguente termine

$$(I + dI)^2 \approx I^2 + 2IdI \quad (2.1)$$

Quindi con il risultato che dovrebbe esser noto sui differenziali:  $d(I^2) = 2IdI$ , se assumiamo questo e moltiplichiamo a destra e sinistra per  $\langle I \rangle$  nella equazione per la corrente otteniamo:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle I^2 \rangle = \lambda q \langle I \rangle - \alpha \langle I^2 \rangle.$$

Che ci porta a concludere che:

$$\langle I^2 \rangle_{\infty} = \frac{\lambda q}{\alpha} \langle I \rangle_{\infty} = (\langle I \rangle_{\infty})^2.$$

Otteniamo quindi un paradosso, la corrente ha varianza nulla:

$$\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2 = 0.$$

Questo significherebbe che la "larghezza" del moto Browniano è nulla, quindi la corrente sarebbe costante e continua.

L'errore è dovuto al differenziale 2.1, infatti il termine trascurato vale:

$$\langle dI^2 \rangle = \langle q^2 d\eta^2 \rangle = q^2 \lambda dt.$$

Che è anch'esso di prim'ordine nel tempo! L'equazione corretta sarebbe allora:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle I^2 \rangle = \lambda q \langle I \rangle - \alpha \langle I^2 \rangle + q^2 \lambda + O(dt).$$

## 2.3 Correlazione e densità spettrale

Si rimembrano definizioni utili ai fini del corso.

### Correlazione

$$G(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t+s) x(s) ds.$$

Se il sistema è ergodico questa definizione è equivalente a quella mediata sull'Ensemble:

$$G(t) = \langle x(t+s) \cdot x(s) \rangle.$$

### Densità spettrale

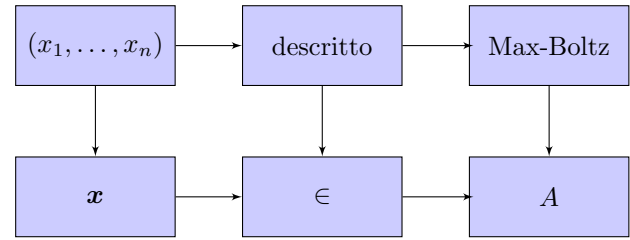
$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} \left| \int_0^T x(t) e^{-i\omega t} dt \right|.$$

Le due definizioni sono legate da una trasformata di Fourier:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int G(\omega) e^{-i\omega t} dt.$$

## 2.4 Probabilità

Possiamo ripensare una definizione assiomatica della probabilità.



Nella quale  $x$  è un evento,  $A$  è un set di eventi possibili appartenente ad  $\Omega$ : l'insieme di tutti gli eventi possibili ( $A \in \Omega$ ).

### Proprietà di $P$

- $P(A) \geq 0$ .
- $P(\Omega) = 1$ .
- $P(\cup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$  con  $A_i$  collezione di insiemi disgiunti numerabile.
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ .
- Se  $\omega \in A \cup B$  con  $A \cap B = \emptyset \implies \omega \in A \cap \omega \in B$ .

**Probabilità condizionata** La probabilità che avvenga l'evento  $A$  sapendo che è già avvenuto un evento  $B$  è data da:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Ovviamente si ha anche che:

$$P(A|B) P(B) = P(A) P(B|A).$$

Prendiamo adesso un insieme  $B_i$  di set di eventi:

$$B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i, j$$

$$\bigcup_i B_i = \Omega.$$

Da queste ne deriva che, per il set  $A$ :

$$\begin{aligned} \bigcup_i (A \cap B_i) &= A \cap (\bigcup_i B_i) = A \cap \Omega = A. \\ \sum_i P(A \cap B_i) &= P(\bigcup_i (A \cap B_i)) = P(A) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\sum_i} \right\} \text{ Utile per}$$

Per la probabilità congiunta si ha in generale che:

$$\sum_i P(A|B_i) P(B_i) = \sum_i P(A \cap B_i) = P(A).$$



**Eventi indipendenti** Due eventi  $x_A, x_B$  si dicono indipendenti se i set a cui appartengono  $(A, B)$  rispettano la seguente:

$$P(B)P(A|B) = P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Questa fattorizzazione è valida in generale per eventi indipendenti:

$$P\left(\bigcap_i A_i\right) = \prod_i P(A_i).$$

**Valor medio e distribuzione di probabilità** Sia  $R$  una variabile random funzione di un evento  $\omega$ , il valor medio di  $R$  sarà:

$$\langle R \rangle = \sum_{\omega} P(\omega) R(\omega).$$

Possiamo facilmente estendere la definizione al caso continuo, definiamo il set  $A(\omega_0, d\omega_0)$  come l'insieme degli eventi  $\omega$  tali che:

$$\omega \in [\omega_0, \omega_0 + d\omega_0].$$

La densità di probabilità di trovare un evento nel set  $A(\omega_0, d\omega_0)$  è data da:

$$P(\omega_0)d\omega_0 \equiv P[A(\omega_0, d\omega_0)] = P(\omega_0, d\omega_0).$$

Quindi il valor medio di  $R$  nel continuo:

**Valor medio nel continuo**

$$\langle R \rangle = \int_{\omega \in \Omega} R(\omega) P(\omega).$$

## 2.5 Funzione caratteristica

Sia  $\mathbf{x}$  una variabile random con distribuzione di probabilità  $P(\mathbf{x})$ , la funzione caratteristica della distribuzione è:

$$\phi(\mathbf{s}) = \int d\mathbf{x} P(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{x} \cdot \mathbf{s}}.$$

**Esempio 2.5.1** (Distribuzione Gaussiana).

$$P(x) = \frac{e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \implies \phi(s) = e^{-\sigma^2 s^2/2}.$$

**Esempio 2.5.2** (Distribuzione uniforme).

$$P(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{Altrimenti} \end{cases}$$

$$\phi(s) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{ixs} dx = \frac{2}{s} \sin\left(\frac{s}{2}\right).$$

### Proprietà della funzione caratteristica

1.  $|\phi(s)| = 1$ .
2.  $\phi(s)$  è continua.
3. Se  $\exists \langle x^n \rangle$  allora:

$$\langle x^n \rangle = (-i)^n \left. \frac{\partial^n}{\partial s^n} \phi(s) \right|_{s=0}.$$

4. Una sequenza di distribuzioni converge ad una distribuzione limite  $\iff$  converge la sequenza di funzioni caratteristiche.

5. Dato  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  con  $x_i$  indipendenti  $\forall i$  allora:

$$\phi(s_1, s_2, \dots) = \prod_{i=1}^n \phi(s_i)$$

6. Se  $y = \sum_i x_i$  con  $x_i$  indipendenti, allora:

$$\phi(s) = \langle e^{isy} \rangle = \prod_i \phi_i(s).$$

**Esempio 2.5.3.** Se  $y = x_1 + x_2$  ho che:

$$P(y) = \int P(x_1) P(y - x_1) dx_1.$$

Allora per le proprietà della trasformata di una convoluzione:

$$\phi(s) = \phi_1(s) \phi_2(s).$$

### 3 Lezione 3

#### 3.1 Limiti con variabili stocastiche

Un problema al limite con una variabile stocastica  $x$  è un problema del seguente tipo:

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad x_n \in \Omega.$$

Dove  $x_n$  è una serie di funzioni di variabile stocastica  $\omega$ , indicizzata da  $n$  intero.

La variabile stocastica  $\omega$  appartiene all'insieme degli eventi possibili  $\Omega$

**Definizione 3.1.1 (Almost Certain Limit).**

$$\lim_{n \rightarrow \infty}^{\text{ac}} x_n = x \quad \text{se } \forall \omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(\omega) = x.$$

Tale limite rispetta la proprietà:

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(\omega) = x\right) = 1.$$

**Esempio 3.1.1 (Farfalle).** Alcune specie di farfalle vivono mediamente un giorno, prendiamo tutte le farfalle viventi che appartengono a questa specie (ed escludiamo quelle che devono ancora nascere).

Se misuriamo la media del cibo consumato da questo campione ogni ora otteniamo una sequenza di numeri casuali. Tuttavia possiamo essere quasi sicuri che tale sequenza dopo 30 ore sarà 0 e rimarrà 0 per sempre.

In questo esempio si hanno:

- $x_n$  la sequenza di medie del cibo.
- $\omega$  Il cibo che una farfalla della specie mangia in un'ora.
- $x = 0$ .

**Esempio 3.1.2 (Equazione stocastica).** Prendiamo una equazione stocastica differenziale così costruita:

$$dx = -\alpha x dt + b x d\omega.$$

In cui il termine  $d\omega$  è un termine stocastico.

I passi degli  $x_n$  saranno definiti dalla equazione sopra:

$$x_{n+1} = x_n - \alpha x_n \Delta t + b x_n \Delta \omega_n.$$

Se ipotizziamo che la  $x_n$  (variabile composta da termine stocastico e termine temporale) nell'evoluzione si avvicini all'origine ( $x_n = 0$ ) allora il termine stocastico in  $\omega$  non può più contribuire alla equazione, in tal caso la convergenza avviene.

**Definizione 3.1.2 (Mean Square Limit).** Se si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle (x_n(\omega) - x(\omega))^2 \rangle &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int d\omega P(\omega) [x_n(\omega) - x(\omega)]^2 = 0. \end{aligned}$$

Allora:

$$\lim_{n \rightarrow \infty}^{\text{ms}} x_n = x.$$

**Definizione 3.1.3 (Limite in probabilità).**

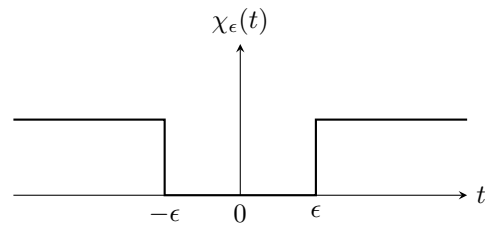
$$\lim_{n \rightarrow \infty}^{\text{P}} x_n = x.$$

se vale che,  $\forall \epsilon > 0$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|x_n - x| > \epsilon) = 0.$$

Per capire cosa rappresenta il termine  $P(|x_n - x| > \epsilon)$  introduciamo la funzione caratteristica:

$$\chi_\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & |t| < \epsilon \\ 1 & |t| > \epsilon \end{cases}.$$



Il termine di probabilità in questione è valutato proprio nel supporto di questa funzione:

$$P(|x_n - x| > \epsilon) = \int d\omega P(\omega) \chi_\epsilon(|x_n - x|).$$

**Definizione 3.1.4 (Limite in distribuzione).** Data una funzione di  $x_n$ :  $f(x_n)$  si ha che questa converge a  $f(x)$  in distribuzione se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty}^{\text{dist}} : \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f(x_n) \rangle = \langle f(x) \rangle.$$

**Esempio 3.1.3 (Moto Browniano e moto a step).** Prendiamo due moti con regole stocastiche differenti: un moto Browniano (passo del moto random) ed un moto casuale di passo unitario. Ipotizziamo che il corpo che effettua il moto (nei due casi) parta dall'origine.

Le distribuzioni di probabilità dei fenomeni sono diverse, il valor medio del moto è invece nullo in entrambi i casi. Per questo motivo entrambi i moti tendono a 0 in distribuzione.

Quest'ultimo limite è usato spesso "simulativamente", ovvero per la soluzione di equazioni differenziali stocastiche.

I limiti elencati in questa sezione non sono tutti indipendenti, infatti ( $\implies$  = "implica") :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty}^{\text{ac}} &\implies \lim_{n \rightarrow \infty}^{\text{P}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty}^{\text{ms}} &\implies \lim_{n \rightarrow \infty}^{\text{P}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty}^{\text{P}} &\implies \lim_{n \rightarrow \infty}^{\text{dist}}. \end{aligned}$$

### 3.2 Cumulanti della funzione caratteristica.

#### Funzione generatrice dei cumulanti

$$\Phi(s) = \ln(\phi(s)).$$

Si potrebbe dimostrare che la funzione generatrice si esprime in modo generale in funzione di quantità definite come cumulanti:

$$\Phi = \sum_{r=1}^{\infty} i^r \sum_{\{m\}} \langle\langle x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots \rangle\rangle \prod_{i=1}^{\infty} \frac{s_i^{m_i}}{m_i!} \delta(r - \sum_{i=1}^{\infty} m_i).$$

Dove i termini tra le parentesi  $\langle\langle x_i^{m_i} \rangle\rangle$  sono i cumulanti. Prendiamo ad esempio lo sviluppo dei primi due:

$$\begin{aligned} \langle\langle x_1 \rangle\rangle &= \langle x_1 \rangle \sim \text{Media} \\ \langle\langle x_1 x_2 \rangle\rangle &= \langle x_1 x_2 \rangle - \langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle \sim \text{Covarianza}. \end{aligned}$$

Consideriamo adesso i cumulanti per una stessa variabile stocastica ( $x_i = x_j \forall i, j$ ), che chiameremo in questo contesto anche **Momenti**.

#### Cumulanti di processo Gaussiano.

I cumulanti per un processo Gaussiano sono tutti nulli per  $n \geq 3$ .

$$\langle\langle x^n \rangle\rangle = 0 \quad \forall n \geq 3.$$

**Esempio 3.2.1** (Cumulante quarto per Gaussiana).

$$\begin{aligned} \langle\langle x^4 \rangle\rangle &= \langle x^4 \rangle - 4 \langle x^3 \rangle \langle x \rangle + \\ &\quad - 3 \langle x^2 \rangle^2 + 12 \langle x^2 \rangle \langle x \rangle^2 - 6 \langle x \rangle^4. \end{aligned}$$

Possiamo dimostrare che questo è nullo valutando la derivata del cumulante terzo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} \left\{ x^3 \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \right\} dx = 0.$$

Questa si azzerà perché la Gaussiana si annulla per  $x = \pm\infty$ , rendendo esplicita la derivata:

$$\int \left( 3x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) - \frac{x^4}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \right) dx = 0.$$

$$\langle x^4 \rangle = 3\sigma^2 \langle x^2 \rangle = 3(\sigma^2)^2.$$

Inserendo nella equazione per il cumulante quarto si annullano tutti i termini (per semplicità abbiamo preso una gaussiana a media nulla  $\langle x \rangle = 0$ ).

In generale questa cosa non funziona, non è possibile esprimere i cumulanti in funzione di altri cumulanti di ordine inferiore per ogni distribuzione.

### 3.3 Teorema del limite centrale

#### Teorema del limite centrale

La somma di variabili stocastiche aventi media e varianza definita tende ad una Gaussiana.

Sia  $\{x_i\}$  una variabile random con distribuzione di probabilità  $P_i(x_i)$  tale che:

$$\langle x_i \rangle = 0; \quad \text{var} \{x_i^2\} = b_i^2.$$

Il teorema richiede che i primi due momenti siano definiti:

$$s_n = \sum_{i=1}^n x_i; \quad \sigma_n^2 = \sum_{i=1}^n b_i^2.$$

Inoltre le code della  $s_n$  si devono annullare in modo rapido:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=1}^n \int_{|x| > t\sigma_n} dx x_i^2 P_i(x) \right] = 0 \quad \forall t > 0.$$

Se ne conclude che

$$\tilde{s}_n = s_n / \sigma_n \rightarrow G.$$

Con  $G$  Gaussiana di media 0 e varianza 1.

#### Teorema di Chebyshev

Si cerca di quantificare quanto velocemente una distribuzione tenda alla Gaussiana.

Definiamo la funzione:

$$F_n(t) \equiv \int_{-\infty}^t \tilde{P}(\tilde{s}_n) d\tilde{s}_n; \quad \phi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(t).$$

Dove  $\tilde{P}$  è la distribuzione dei  $\tilde{s}_n$ , che tiene di conto che ad ogni step  $n$  cambia la normalizzazione necessaria per essere una probabilità.

#### Teorema di Chebyshev

$$F_n - \phi(t) \sim \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{Q_1(t)}{n^{1/2}} + \frac{Q_2(t)}{n} + \dots \right].$$

In cui i  $Q_i$  sono i polinomi di Chebyshev-Hermite, legati ai momenti di  $\{x_i\}$ .

Prendiamo ad esempio  $Q_1(t)$ :

$$Q_1(t) \propto \frac{\langle (x - \langle x \rangle)^3 \rangle}{\sigma^3}.$$

la quantità a destra è legata al momento terzo di  $\{x_i\}$ , di conseguenza è nulla nel caso gaussiano (e lo sono anche tutte le restanti  $Q_i$ ).

In conclusione le distribuzioni tendono ad una Gaussiana nelle ipotesi del teorema del limite centrale come  $1/\sqrt{n}$ .

### 3.4 Momenti fattoriali

Momenti fattoriali della distribuzione di Poisson

$$P(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}.$$

#### Momenti fattoriali

$$\langle x^r \rangle_f = \langle x \cdot (x-1) \cdot \dots \cdot (x-r+1) \rangle.$$

**Esempio 3.4.1** (Poisson con  $r = 2$ ).

$$\begin{aligned} \langle x(x-1) \rangle &= \left\langle x(x-1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \right\rangle = \\ &= \lambda^2 \left\langle e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} \right\rangle = \lambda^2. \end{aligned}$$

Iterando questa procedura si ottiene:

#### Momenti fattoriali per distribuzione di Poisson

$$\langle x^r \rangle_f = \lambda^r.$$

**Funzione generatrice generalizzata.**

#### Funzione generatrice

$$G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n P(n) = \langle s^n \rangle.$$

Possiamo ottenere la  $G(s)$  a partire dalla funzione caratteristica:

$$G(s) = \phi(-i \ln s).$$

Grazie a questa possiamo esprimere i cumulanti fattoriali nel seguente modo:

$$\langle x^n \rangle_f = \left[ \frac{\partial^n}{\partial s^n} G(s) \right].$$

#### Funzione generatrice dei cumulanti fattoriali

$$g(s) \equiv \ln(G(s)) = \sum_{r=1}^{\infty} \langle \langle x^r \rangle \rangle_f \frac{(s-1)^r}{r!}.$$

**Esempio 3.4.2** (Funzione generatrice per Poissoniana).

$$\begin{aligned} G(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} s^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = \\ &= e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s\lambda)^n}{n!} = e^{\lambda(s-1)}. \end{aligned}$$

Per Poisson si ha quindi che:

$$\langle \langle x^r \rangle \rangle_f = 0 \quad \forall r \geq 2.$$

### 3.5 Processi stazionari e processi di Markov

#### Probabilità di un processo

Prendiamo un oggetto vittima di un processo stocastico dipendente dal tempo e mettiamoci in un sistema di coordinate spaziali  $x$ .

Possiamo descrivere completamente il processo con:

$$P_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n).$$

Ovvero la densità di probabilità che l'oggetto si trovi in  $x_1$  al tempo  $t_1$ ,  $x_2$  al tempo  $t_2$  etc...

Scegliamo una base spazio temporale ( $\bar{x} = (x, t)$ ), le proprietà di cui gode questa quantità sono:

- $P_n \geq 0$ .
- Simmetria:  $P_n(\bar{x}_1; \bar{x}_2; \dots) = P_n(\bar{x}_2; \bar{x}_1)$ .
- Completezza:

$$\int P_n(\bar{x}_1; \dots; \bar{x}_n) dx_n = P_{n-1}(\bar{x}_1; \dots; \bar{x}_{n-1}).$$

- Norma:  $\int P_1(\bar{x}_1) dx_1 = 1$

Possiamo calcolare il valor medio di una quantità nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \langle x(t_1) \cdot \dots \cdot x(t_n) \rangle &= \\ &= \int_{R^n} dx_1 \dots dx_n P_n(\bar{x}_1; \dots; \bar{x}_n) x_1 \dots x_n. \end{aligned}$$

#### Processi stazionari

Un processo si dice stazionario se  $\forall n$ :

$$\begin{aligned} P_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) &= \\ &= P_n(x_1, t_1 + \Delta t; \dots; x_n, t_n + \Delta t). \end{aligned}$$

#### Probabilità condizionata

Ipotizziamo che all'istante  $t_i$  l'oggetto si trovi in  $x \in [x_i, x_i + \Delta x]$  (con  $i \in [1, k]$ ).

Allora la probabilità che l'oggetto si trovi in un istante successivo  $t_{k+l}$  in un intervallo  $[x_{k+l}, x_{k+l} + \Delta x]$  è:

$$\begin{aligned} P_{k+l}(\bar{x}_1; \dots; \bar{x}_{k+l}) &= \\ &= P_k(\bar{x}_1; \dots; \bar{x}_k) \cdot P_{l|k}(\bar{x}_{k+1}; \dots; \bar{x}_{k+l} | \bar{x}_1; \dots; \bar{x}_k). \end{aligned}$$

Con  $P_{l|k}$  probabilità di trovarsi in un intorno di  $x_{k+l}$  condizionata dai primi  $k$  step.

**Esempio 3.5.1** (Prob. condizionata dal primo step).

$$P_2(\bar{x}_1; \bar{x}_2) = P_{1|1}(\bar{x}_2 | \bar{x}_1) \cdot P_1(\bar{x}_1).$$

#### Processi di Markov

Un processo si dice Markoviano se:

$$P_{1|n-1}(\bar{x}_n | \bar{x}_1; \dots; \bar{x}_{n-1}) = P_{1|1}(\bar{x}_n | \bar{x}_{n-1}).$$

Nel caso dei processi di Markov basta conoscere  $P_1$  e  $P_{1|1}$  per conoscere l'intero processo.

### 3.6 Equazione di Chapman - Kolmogorov

L'idea per l'equazione è data dall'identità:

$$\sum_B^\Omega P(A \cap B \cap C) = P(A \cap C).$$

Prendiamo un processo Markoviano, l'equazione per la  $P_3$  è:

$$P_3(\bar{x}_1; \bar{x}_2; \bar{x}_3) = P_{1|1}(\bar{x}_3|\bar{x}_2)P_{1|1}(\bar{x}_2|\bar{x}_1)P_1(\bar{x}_1).$$

Integrando rispetto alla coord.  $x_2$  otteniamo a sinistra la  $P_2(\bar{x}_1; \bar{x}_3)$  (per la completezza delle  $P_n$ ), che può essere riscritta come:

$$P_2(\bar{x}_1; \bar{x}_3) = P_{1|1}(\bar{x}_3|\bar{x}_1)P_1(\bar{x}_1).$$

Il risultato è l'equazione di Chapman-Kolmogorov.

$$P_{1|1}(x_3|x_1) = \int P_{1|1}(x_3|x_2)P_{1|1}(x_2|x_1)dx_2.$$

## 4 Lezione 4

### 4.1 Continuità dei processi stocastici

**Definizione 4.1.1** (Processo continuo). Un processo stocastico si dice continuo se  $\forall \epsilon > 0$ :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Sigma_\epsilon} dx_1 P_{1|1}(x_1, t + \Delta t | x_2, t) = 0.$$

$$\Sigma_\epsilon : \{|x_1 - x_2| > \epsilon\}.$$

In pratica serve che il cammino descritto dal processo sia continuo, la distanza tra due punti del processo deve andare a 0 più rapidamente di  $\Delta t$ .

I processi Markoviani non sono necessariamente continui:

**Esempio 4.1.1** (Pollaio). Il numero di uova prodotte in un pollaio in un giorno può essere schematizzato come processo markoviano: dipende soltanto dal numero di galline presenti nel pollaio il giorno prima. Questo processo non può essere continuo: è possibile mandare il  $\Delta t$  a 0 ma non possiamo fare altrettanto con  $x$ , ovvero il numero di uova. Infatti in questo caso il numero di uova è discreto.

In generale i processi a salti discreti non possono essere continui.

**Esempio 4.1.2** (Moto Browniano). Calcoliamo l'equivalente della  $P_{1|1}$  nel moto Browniano, nella lezione 1 abbiamo visto che:

$$P(x, t + \Delta t) = \int P(x - \Delta, t) f(\Delta) d\Delta.$$

Con  $f(\Delta)$ : probabilità di fare un salto lungo  $\Delta$  nell'intervallo di tempo  $\Delta t$ .

Definendo la quantità  $y = x - \Delta$  intuitivamente la  $f(\Delta)$  corrisponde alla probabilità condizionata:

$$f(\Delta) = P_{1|1}(x, t + \Delta t | y, t).$$

Essendo un oggetto Gaussiano la  $f(\Delta)$  avrà la seguente struttura:

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D \Delta t}} \exp\left(-\frac{1}{4D \Delta t} (x - y)^2\right).$$

In altre parole  $f(\Delta)$  è proprio un propagatore.

Inserendo questo oggetto nella definizione di processo continuo si vede che l'uguaglianza al limite è soddisfatta, quindi il moto Browniano è un processo continuo.

**Esempio 4.1.3** (Moto di Cauchy). Il moto di Cauchy presenta una struttura per la probabilità di salto (condizionata) del seguente tipo:

$$P_{1|1}(x, t + \Delta t | z, t) = \frac{\Delta t}{\pi} \frac{1}{(x - z)^2 + (\Delta t)^2}.$$

E si può dimostrare che:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Sigma_\epsilon} \frac{\Delta t dx}{\pi [(x - z)^2 + (\Delta t)^2]} = \infty.$$

Di conseguenza il moto di Cauchy non è continuo.

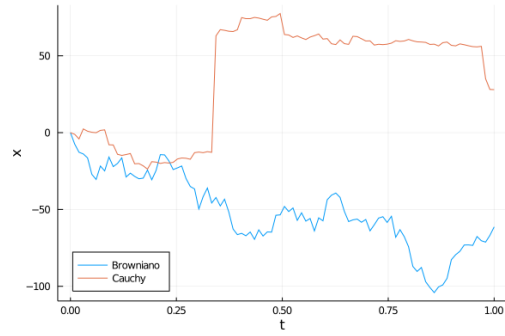


Figura 1.3: Processo di Brown e Processo di Cauchy a confronto (Ottenuto in Julia).

### 4.2 Forma differenziale di Chapman - Kolmogorov

Prendiamo un processo stocastico scomponibile <sup>1</sup> in una parte continua ed una non continua.

Si può dimostrare che un processo di questo tipo è descritto dalla seguente forma differenziale:

#### Forma di Chapman-Kolmogorov

$$\partial_t P(\mathbf{z}, t | \mathbf{y}, t') = -\Gamma + \Phi \quad (4.1)$$

In cui  $\Gamma$  è la parte contenente il processo continuo:

$$\Gamma = \sum_i \partial_{z_i} [A_i(\mathbf{z}, t) P(\mathbf{z}, t | \mathbf{y}, t')] + \sum_{i,j} \frac{1}{2} \partial_{z_i z_j}^2 [B_{ij}(\mathbf{z}, t) P(\mathbf{z}, t | \mathbf{y}, t')].$$

Qui abbiamo un primo termine "deterministico" (con la  $A$ ) che determina soltanto uno spostamento dell'oggetto ed un termine di diffusione (quello in  $B$ ).

Nella  $\Phi$  abbiamo invece il processo discontinuo:

$$\Phi = \int d\mathbf{x} [\omega(\mathbf{z} | \mathbf{x}, t) P(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, t') - \omega(\mathbf{x} | \mathbf{z}, t) P(\mathbf{z}, t | \mathbf{y}, t')].$$

Il termine  $\Phi$  somiglia molto al termine della equazione di Volterra che abbiamo visto nella prima lezione (prob. di trovarsi in  $\mathbf{z}$  è data dalla probabilità di finire in  $\mathbf{z}$  da una posizione  $\mathbf{x}$  diminuito la prob. di scappare in  $\mathbf{x}$  dalla posizione  $\mathbf{z}$ ).

La potenza della equazione è la sua generalità: se sappiamo che un processo è Markoviano (magari per la fisica che ci sta dietro) allora l'equazione di evoluzione delle prob. nel tempo sarà necessariamente quella sopra.

**Esempio 4.2.1** ( $A = B = 0$ , quindi  $\Gamma = 0$ ).

$$\partial_t P = \Phi.$$

Considerando il rapporto incrementale con passo  $\Delta t$ :

$$P(\mathbf{z}, t + \Delta t | \mathbf{y}, t) = P(\mathbf{z}, t | \mathbf{y}, t) + \Delta t \cdot \Phi.$$

<sup>1</sup>Ipotesi per cui si può scomporre sul Gardiner

Sfruttiamo la proprietà ovvia:

$$P(\mathbf{z}, t | \mathbf{t}, t) = \delta(\mathbf{y} - \mathbf{z}).$$

Allora possiamo sviluppare l'espressione con  $\Delta t$  che tende a 0 (mettiamoci in una dimensione per semplicità):

**Soluzione della forma diff. con termini continui**

$$\begin{aligned} P(z, t + \Delta t | y, t) &= \\ &= \delta(z - y) \left[ 1 - \Delta t \int dx \omega(x|z) \right] + \Delta t \cdot \omega(z|y). \end{aligned}$$

### 4.3 Processo di Wiener

Un processo di Wiener è modellato dalla seguente equazione:

**Equazione per processo di Wiener**

L'equazione che regola il processo di Wiener è una Fokker-Planck:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\omega, t | \omega_0, t_0) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} P(\omega, t | \omega_0, t_0).$$

Inoltre deve esser rispettata la condizione iniziale:

$$P(\omega, t_0 | \omega_0, t_0) = \delta(\omega - \omega_0).$$

Il processo si può risolvere utilizzando la funzione caratteristica:

$$\phi(s, t) = \int d\omega P(\omega, t | \omega_0, t_0) e^{is\omega}.$$

Sfruttando le regole della trasformata possiamo riscrivere l'equazione del processo come:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{1}{2} s^2 \phi.$$

$$\phi(s, t_0) = \exp(is\omega_0).$$

La soluzione è nota:

$$\begin{aligned} \phi(s) &= \exp\left(-\frac{1}{2} s^2 (t - t_0)\right) \phi(s, t_0) = \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} s^2 (t - t_0) + is\omega_0\right). \end{aligned}$$

Visto che l'antitrasformata di una Gaussiana è una Gaussiana abbiamo la soluzione nello spazio reale:

**Soluzione del processo di Wiener**

$$P(\omega, t | \omega_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}} \exp\left(-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2(t-t_0)}\right)$$

Il processo che abbiamo ottenuto è Gaussiano:

$$\begin{aligned} \langle \omega \rangle &= \omega_0. \\ \langle (\omega - \omega_0)^2 \rangle &= t - t_0. \end{aligned}$$

### Proprietà dei processi di Wiener

- È continuo.
- Non è differenziabile,  $\forall k$ :

$$\begin{aligned} \text{Prob}\left(\frac{|\omega(t+h) - \omega(t)|}{h} > k\right) &= \\ &= 2 \int_{kh}^{\infty} d\omega \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} e^{-\omega^2/2h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1. \end{aligned}$$

- Gli incrementi sono indipendenti:

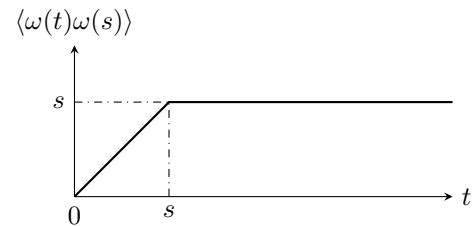
$$\begin{aligned} P(\omega_2, t_2; \omega_1, t_1; \omega_0, t_0) &= \\ &= P(\omega_2, t_2 | \omega_1, t_1) P(\omega_1, t_1 | \omega_0, t_0) P(\omega_0, t_0). \end{aligned}$$

Il primo termine dopo l'uguale non dipende da  $(\omega_0, t_0)$  perché il processo è Markoviano.

- La correlazione:

$$\langle \omega(t)\omega(s) | [\omega_0, t_0] \rangle = \min(t - t_0, s - s_0) + \omega_0^2.$$

Che nel caso particolare in cui  $\omega_0 = t_0 = 0$  si ha  $\langle \omega(t)\omega(s) \rangle = s$  se  $t > s$ .



## 5 Lezione 5

### 5.1 Processo di Ornstein - Uhlenback

Prendiamo in considerazione altri esempi di processi di Markov.

#### Equazione di Ornstein - Uhlenback

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(kxP) + \frac{1}{2}D \frac{\partial^2}{\partial x^2}P.$$

#### Soluzione stazionaria

Cerchiamo intanto la soluzione con  $(\partial_t P = 0)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( kxP + \frac{1}{2}D \frac{\partial}{\partial x}P \right) &= 0 \implies \\ \implies \left[ kxP + \frac{1}{2}D \frac{\partial}{\partial x}P \right]_{-\infty}^x &= J. \end{aligned}$$

Se ipotizziamo che:

1.  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} P(x, t|x_0, t_0) = 0$
2.  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} xP(x, t|x_0, t_0) = 0.$

Allora possiamo affermare che la corrente  $J = 0$  per  $x \rightarrow \infty$ . Si risolve allora l'equazione differenziale:

#### Soluzione stazionaria

$$P_s(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi D/k}} e^{-kx^2/D}.$$

#### Soluzione dipendente dal tempo.

Per la dipendenza temporale sfruttiamo la funzione caratteristica  $\phi(s)$ .

$$\phi(s) = \int e^{isx} P(x, t|x_0, t_0) dx.$$

L'equazione del processo diventa:

$$\partial_t \phi = -ks \partial_s \phi - \frac{1}{2}Ds^2 \phi.$$

Questa equazione alle derivate parziali può essere risolta tramite il metodo delle caratteristiche (5.A).

L'unico ostacolo all'utilizzo del metodo è il secondo termine dopo l'uguale (contiene la soluzione), vorremmo ricondurci all'equazione in forma standard.

Facciamo allora il cambio di variabile:

$$g = \ln \phi.$$

Visto che:

$$\partial_t g = \frac{\partial_t \phi}{\phi} \quad \partial_s g = \frac{\partial_s \phi}{\phi}.$$

Si ha una equazione in  $g$  più maneggevole:

$$\partial_t g + ks \partial_s g = -\frac{1}{2}Ds^2.$$

Questa è risolvibile con il metodo delle caratteristiche:

$$(a, b, c) \rightarrow (1, ks, -\frac{1}{2}Ds^2).$$

Parametrizzando con  $\eta$  abbiamo le equazioni caratteristiche:

$$\frac{dt}{d\eta} = 1 \quad \frac{ds}{d\eta} = ks \quad \frac{dg}{d\eta} = -\frac{1}{2}Ds^2.$$

Possiamo risolvere per rimuovere  $\eta$ :

$$\begin{cases} 1. & dt = \frac{ds}{ks} \\ 2. & \frac{ds}{ks} = -\frac{dg}{1/2Ds^2} \end{cases}$$

Integrando queste equazioni escono fuori delle costanti, ridefinendo tali costanti come funzioni  $(u_1, u_2)$  saremo in grado di risalire alla  $\phi$ .

Risolviamo la 1:

$$c_1 = t - \frac{1}{k} \ln(s) \implies c'_1 = \exp \left( t - \frac{1}{k} \ln(s) \right) = se^{-kt}.$$

Quindi definiamo la prima soluzione come  $u_1$ :

$$u_1(t, s) = se^{-kt} \quad (5.1)$$

Passiamo alla equazione 2 del sistema, integrando si ottiene:

$$c_2 = \frac{s^2 D}{4k} + g.$$

Ricordando che  $g = \ln \phi$  possiamo definire anche un'altra funzione a partire dalla costante  $c_2$  (si fa l'esponenziale della 2):

$$u_2(t, s) = \phi \exp \left( \frac{Ds^2}{4k} \right) \quad (5.2)$$

Riscrivendo la 5.2 isolando  $\phi$  si ha:

$$\phi = u_2 \exp \left( -\frac{Ds^2}{4k} \right).$$

Visto che  $u_1$  e  $u_2$  sono entrambe costanti collegate dalle equazioni caratteristiche sarà vero che:

$$u_2 = f(u_1).$$

#### Soluzione dipendente dal tempo per $\phi$

$$\phi = f(se^{-kt}) \exp \left( -\frac{Ds^2}{4k} \right) \quad (5.3)$$

#### Condizioni al contorno

$$P(x, 0|x_0, 0) = \delta(x - x_0) \implies \phi(s, 0) = e^{ix_0 s}.$$

Prendiamo l'equazione 5.3 ed invertiamola per trovare la  $f(s)$  ( $t = 0$ ) inserendo anche la condizione iniziale:

$$f(s) = e^{ix_0 s} \exp \left( \frac{Ds^2}{4k} \right).$$



Per reinserire il tempo e trovare la soluzione con queste condizioni iniziali basta fare la sostituzione:

$$s \rightarrow se^{-kt}.$$

#### Soluzione con condizione iniziale $\delta$

$$\phi(s, t) = \exp \left[ -\frac{Ds^2}{4k} (1 - e^{-2kt}) + isx_0 e^{-kt} \right] \quad (5.4)$$

A questo punto possiamo tornare indietro con una antitrasformata, altrimenti possiamo ricavare i momenti sfruttando le proprietà di  $\phi$ :

$$\langle x(t) \rangle = i \frac{\partial \phi}{\partial s} \Big|_{s=0} = x_0 e^{-kt}.$$

$$\begin{aligned} \text{var}(x(t)) &= \langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2 = \\ &= -1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} \Big|_{s=0} - \langle x \rangle^2 = \\ &= \frac{D}{2k} (1 - e^{-2kt}). \end{aligned}$$

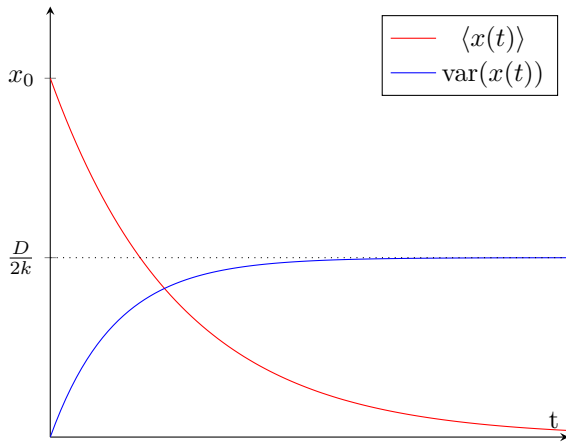


Figura 1.4: Andamento della media e della varianza per il processo di Ornstein-Uhlenback.

I risultati ottenuti sono conformi con le condizioni iniziali inserite.

**Media** all'istante iniziale tutti i camminatori sono in  $x_0$  (grazie alla  $\delta$ ).

Quando il processo fa evolvere le posizioni dei camminatori allora i camminatori si allontanano da  $x_0$  andando verso l'origine, questo è conforme con quanto visto per la soluzione stazionaria: una Gaussiana centrata nello 0.

**Varianza** Nell'istante iniziale, quando tutti i camminatori sono nel punto  $x_0$ , la varianza è nulla, questa si stabilizza nel tempo al valore dato dalla Gaussiana nelle condizioni stazionarie.

#### Calcolo delle correlazioni

$$\begin{aligned} \langle x(t_1)x(t_2) \mid [x_0, t_0] \rangle &= \\ &= \int dx_1 dx_2 P(x_1, t_1; x_2, t_2; x_0, t_0) x_1 x_2 = \\ &= \int dx_1 dx_2 x_1 x_2 P(\bar{x}_1, \bar{x}_2) P(\bar{x}_2, \bar{x}_0). \end{aligned}$$

In cui si è assunto il processo Markoviano e la gerarchia temporale:  $t_1 > t_2 > t_0$ .

Se il processo ha raggiunto la stazionarietà ( $t_0 \rightarrow \infty$ ) allora conosciamo la forma del propagatore:

$$P(x_2|x_0) \sim \exp \left( -k \frac{x_2^2}{D} \right).$$

Risolvendo con questa si ottiene:

#### Correlazione temporale a due

$$\langle x(t)x(s) \rangle \sim \frac{D}{2k} \exp(-k|t-s|).$$

La correlazione temporale delle posizioni decade esponenzialmente.

#### Ornstein-Uhlenback come modello per rumore realistico.

Facendo la trasformata di Fourier della funzione di Correlazione si ottiene una Lorenziana:

$$\begin{aligned} S_{OU}(\omega) &= \mathcal{F}(\langle x(t)x(s) \rangle) = \\ &= \frac{1}{\omega^2/k^2 + 1}. \end{aligned}$$

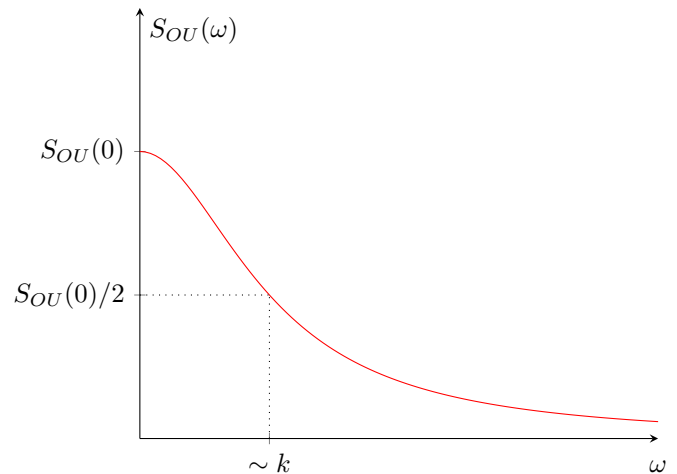


Figura 1.5: Andamento della trasformata della correlazione per il processo di Ornstein-Uhlenback.

Questo è esattamente quello che ci aspettiamo da un rumore realistico: il rumore ha una frequenza di cut-off dettata da una Lorenziana.

Il cut-off è dovuto al fatto che le cose non possono muoversi infinitamente veloci, l'inerzia dei corpi che partecipano al moto stocastico fissa la frequenza di cut-off.

C'è quindi un tempo caratteristico di osservazione del fenomeno

$$\tau = \frac{1}{k}.$$

Se osserviamo il moto su scale temporali di quest'ordine allora lo spettro degli urti tra i corpi va a zero, questo comporta che il moto oltre queste scale temporali non è più ben descritto dal processo di Wiener.

**Esercizio 5.1.1.** Modifica all'equazione di OU Risolvere l'equazione di Ornstein-Uhlenback con l'aggiunta di un termine nella  $\partial_x$ :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}((kx + \alpha)P) + \frac{1}{2}D \frac{\partial^2}{\partial x^2}P.$$

**Soluzione:** Il moto dovrebbe andare a stazionarietà nel punto  $-\alpha/k$ .

## Appendice

### 5.A Metodo delle Caratteristiche.

Supponiamo di avere una PDE della forma:

**PDE per metodo delle caratteristiche**

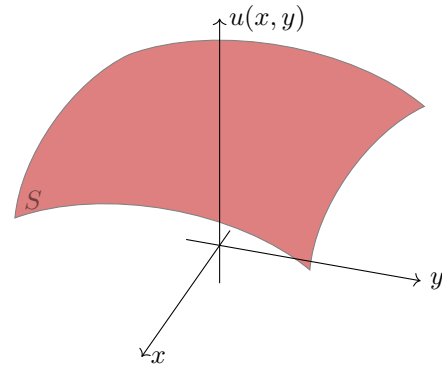
$$a(x, y)\partial_x u + b(x, y)\partial_y u - c(x, y) = 0.$$

Scrivibile anche come:

$$(a, b, c) \cdot (\partial_x u, \partial_y u, -1) = 0 \quad (5.5)$$

Ed una superficie parametrizzata con la soluzione della PDE ( $u(x, y)$ ):

$$S \equiv (x, y, u(x, y)).$$



#### Vettore tangente a S

Il vettore  $(a, b, c)$  appartiene al piano tangente di  $S$  in ogni punto  $(x, y, z)$ .

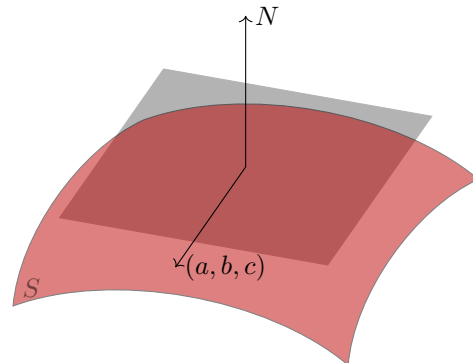
La normale  $\mathbf{N}$  alla superficie  $S$  la si trova facendo il gradiente di:

$$\bar{S} = u(x, y) - z.$$

Si ottiene quindi:

$$\mathbf{N} = (\partial_x u, \partial_y u, -1).$$

Visto che  $\mathbf{N}$  è il secondo termine nella 5.5 si vede che la soluzione è il luogo dei vettori  $(a, b, c)$  ortogonali a  $\mathbf{N}$ , quindi tangenti al piano  $S$ .



Quindi la soluzione della PDE è tale per cui il vettore  $(a, b, c)$  sta sul piano tangente.

**Curva caratteristica**

Per mappare la soluzione si introduce una curva  $C$  detta curva caratteristica che descrive la superficie.

$$C : C \equiv (x(\eta), y(\eta), z(\eta)).$$

$C$  è una curva parametrica in  $\eta$  localmente tangente a  $(a, b, c)$ .

La condizione di parallelismo implica il seguente sistema:

**Equazioni Caratteristiche**

Sono curve integrali per il campo vettoriale  $(a, b, c)$

$$\begin{cases} a(x(\eta), y(\eta)) = \frac{dx}{d\eta} \\ b(x(\eta), y(\eta)) = \frac{dy}{d\eta} \\ c(x(\eta), y(\eta)) = \frac{dz}{d\eta} \end{cases}$$

Queste equazioni risolvono la PDE.

**Esempio 5.A.1** (Equazione del trasporto.).

$$u_t + a \cdot u_x = 0.$$

In questo caso si ha  $(a, b, c) \rightarrow (a, 1, 0)$ , quindi:

$$\frac{dx}{d\eta} = a \quad \frac{dt}{d\eta} = 1 \quad \frac{dz}{d\eta} = 0$$

Passiamo alla risoluzione:

$$\begin{cases} x(\eta) = a\eta + c_1 \\ t(\eta) = c_2 + \eta \\ z(\eta) = c_3 \end{cases} \implies \begin{cases} x - at = x_0 \\ z = k \end{cases}$$

In cui si è effettuata dell'algebra per eliminare  $\eta$  nel primo sistema.

- La funzione che risolve il sistema di destra è la soluzione dell'equazione del trasporto.
- Graficamente le funzioni che risolvono sono delle rette con  $z$  costante, l'unione di queste rette rappresenta  $S$ .
- Abbiamo ottenuto un fascio di soluzioni poiché non abbiamo imposto alcuna soluzione al contorno.

In conclusione  $z$  dovrà essere funzione di  $x - at$ , quindi la soluzione generale sarà una funzione del tipo:

$$z(x, t) = f(x - at) \equiv u(x, t).$$

Supponiamo che all'istante iniziale la soluzione fosse una gaussiana:

$$f(x, t = 0) = e^{-x^2}.$$

Quindi si ha che anche la soluzione a  $t = 0$  è una gaussiana:

$$u(x, t = 0) = e^{-x^2}.$$

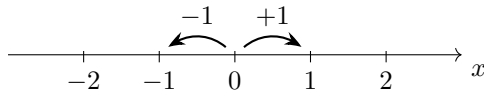
Ed introducendo il tempo la soluzione diventa semplicemente:

$$u(x, t) = e^{-(x-at)^2}.$$

## 6 Lezione 6

### 6.1 Modelli semplici di Random Walk

Mettiamoci in una situazione unidimensionale, con un oggetto che può fare salti di ampiezza unitaria.



Possiamo analizzare due modelli di RW:

1. Salto di  $\pm 1$  ad un tempo casuale.
2. Salto di  $\pm 1$  ad un tempo  $\tau$  fissato.

Entrambi i casi descrivono processi Markoviani.

#### 1. Salto ad un tempo random.

L'equazione di Chapman-Kolmogorov in forma differenziale per il processo si scrive come:

$$\partial_t P(n, t|n', t') = [\omega(n|n+1, t) P(n+1, t|n', t') + \omega(n|n-1, t) P(n-1, t|n', t') - 2P(n, t|n', t')].$$

Facciamo chiarezza sui termini in equazione, prendiamo il primo nella parentesi quadra dopo l'uguale:

$$\omega(n|n+1, t) P(n+1, t|n', t').$$

Questo indica la probabilità di essere in  $n+1$  (descritta dal termine  $P$ ) e di fare un salto all'indietro (descritta dalla probabilità corrispondente  $\omega$ ).

L'ultimo termine in parentesi indica la probabilità di essere in  $n$  al tempo  $t$ , se ci troviamo in tal punto allora allo step successivo usciamo sicuramente fuori per costruzione del moto.

Imponendo che il rate di salto in avanti sia uguale a quello di salto all'indietro:

$$\omega(n+1|n, t) = \omega(n-1|n, t) \equiv d \quad (6.1)$$

Possiamo semplificare l'equazione del processo:

#### Chapman-Kolmogorov per RW 1.

$$\partial_t P(n, t|n', t') = d [P(n+1, t|n', t') + P(n-1, t|n', t') - 2P(n, t|n', t')]. \quad (6.2)$$

Si risolve in trasformata:

$$G(s, t) = \langle e^{isn} \rangle = \sum_n P(n, t|n', t') e^{isn}.$$

Quando abbiamo un termine del tipo  $P(n \pm 1|n', t')$  basta scrivere:

$$e^{isn} P(n \pm 1, t|n', t') = e^{\mp is} e^{is(n \pm 1)} P(n \pm 1, t|n', t').$$

Quindi inserendo nella equazione di CK:

$$\partial_t G(s, t) = d (e^{-is} + e^{is} - 2) G(s, t).$$

Si risolve per  $G(s, t)$ :

$$G(s, t) = \exp[(e^{-is} + e^{is} - 2)td] G(s, 0).$$

Andando a cercare la soluzione stazionaria si ha che:

$$t \rightarrow \infty \implies s \rightarrow 0.$$

Questo per le relazioni tra spazio reale e trasformata: in sostanza stiamo assumendo i camminatori come oggetti reali, quindi se  $\omega \rightarrow 0$  dev'essere necessariamente che  $s \rightarrow 0$ :

$$\omega \sim sc.$$

Tornando alla  $G$  sviluppando si ottiene una Gaussiana:

$$G(s, t) = \exp(-s^2 td).$$

#### 2. Salto ad un tempo $\tau$ fissato

In questo caso il tempo è una variabile discreta di passo  $\tau$ .

##### Equazione per il propagatore nel RW 2

$$P(n, (N+1)\tau | n', N'\tau) = \frac{1}{2} [P(n+1, N\tau | n', N'\tau) + P(n-1, N\tau | n', N'\tau)]. \quad (6.3)$$

##### RW1 e RW2 equivalenti per scale piccole.

Se  $\tau$  è piccolo rispetto a  $N\tau$  il caso (2) diventa equivalente al caso (1).

Definiamo il tempo  $t' = N'\tau$ :

$$P(n, (N+1)\tau | n', N'\tau) \simeq P(n, N\tau | n', t') + \tau \partial_t P(n, N\tau | n', t'). \quad (6.4)$$

Si procede definendo:

$$d \equiv 1/2\tau.$$

Possiamo ottenere l'equazione 6.2 sostituendo al primo termine della 6.3 il secondo della 6.4.

Risolviamo adesso la 6.3 con il metodo della funzione caratteristica ( $G(s, t) = \langle e^{isn} \rangle$ ):

$$G(s, (N+1)\tau) = \frac{1}{2} (e^{is} + e^{-is}) G(s, N\tau).$$

Come condizione iniziale si impone che  $G(s, 0) = 1$ .

In questo modo l'equazione in  $G$  è una ricorsiva in  $N$  che ha soluzione:

$$G(s, N\tau) = \left( \frac{1}{2} (e^{is} + e^{-is}) \right)^N.$$

A questo punto possiamo vedere che se  $N \rightarrow \infty$  si ottiene una soluzione Gaussiana come nell'RW1 (mandare  $N \rightarrow \infty$  significa limite stazionario).

$$\begin{cases} \tau N = t \\ d = \frac{1}{2\tau} \end{cases} \implies \frac{td}{N} = \frac{1}{2}.$$

$$G(s, N\tau) = \left[ 1 + \frac{td}{N} (e^{is} + e^{-is} - 2) \right]^N.$$

Sfruttando il limite notevole:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{\alpha}{x} \right)^x = e^\alpha.$$

Si ottiene:

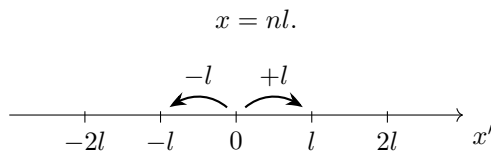
$$G(s, N\tau) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} G(s, t) = \exp [td (e^{is} + e^{-is} - 2)].$$

In conclusione è come se, aspettando abbastanza a lungo, la caoticità sul salto di  $\pm 1$  contagiassse il clock di salto  $\tau$  rendendo anch'esso caotico come nel caso RW1.

Nel proseguo distingueremo i due casi solo dove necessario vista la loro equivalenza a stazionarietà.

### Limite al continuo nei salti

Definiamo lo spazio percorso dal camminatore dopo  $n$  step in un reticolo di passo  $l$ :



Quello che faremo sarà far il limite per  $l \rightarrow 0$ . La trasformata si modifica per questo caso nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \phi(s, t) &= \langle e^{isx} \rangle = G(ls, t) = \\ &= \exp [(e^{ils} + e^{-ils} - 2) td]. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Dove ricordiamo che  $d$  è il rate del processo definito dalla 6.1.

Si studia adesso anche il caso stazionario, quindi dobbiamo effettuare entrambi i limiti:

$$\begin{aligned} l &\rightarrow 0 \\ \tau &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Sviluppando nell'esponenziale della 6.5 ci si rende conto che sopravvive solo il termine:

$$\sim \exp (-s^2 l^2 td).$$

Per questo è necessario che:

$$D = \lim_{\substack{l \rightarrow 0 \\ d \rightarrow \infty}} l^2 d = \text{Finito}.$$

Fare il limite per il Rate  $d \rightarrow \infty$  è lo stesso che fare il limite per  $\tau \rightarrow 0$  poiché per definizione  $d = 1/2\tau$ .

In conclusione otteniamo un andamento per  $\phi$  Gaussiano:

### Funzione caratteristica per RW nel limite continuo

$$\phi(s, t) = \exp (-s^2 t D).$$

Quindi abbiamo anche che:

$$\langle x^2 \rangle \sim 2tD \quad (6.6)$$

### Random Walk e processi di Wiener

Si può dimostrare che per  $l \rightarrow 0$  l'equazione che regola il propagatore  $P$  è una Fokker-Plank (che regola anche i processi di Wiener).

Partiamo dalla Master Equation già scritta sopra:

$$\partial_t P(n) = d(P(n+1) + P(n-1) - 2P(n)).$$

Sviluppando in  $l = 0$  si ha:

$$P(n+1) = P(n) + \partial_x P(n)l + \frac{1}{2} \partial_{x^2}^2 l^2 P(n)$$

$$P(n-1) = P(n) - \partial_x P(n)l + \frac{1}{2} \partial_{x^2}^2 l^2 P(n).$$

E reinserendo nella equazione per  $P$  si ha:

$$\partial_t P(n) = dl^2 \partial_{x^2}^2 P(n).$$

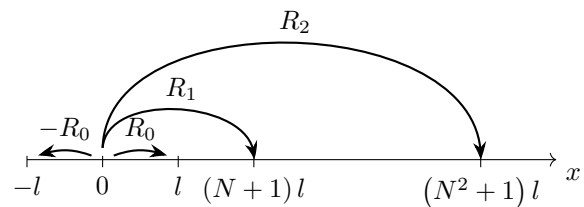
Che è appunto una Fokker-Plank.

## 6.2 Random Walk di Weierstrass

Questo RW è più complesso dei primi due, si basa su alcuni parametri che ne determinano il passo ed il rate:  $(N, b)$ .

Adesso anziché fare salti fissi di  $l$  si fanno salti  $J_n$  con rate  $R_n$  che variano al variare dell'intero  $n$ .  $J_n$  e  $R_n$  sono così definiti:

$$\begin{aligned} J_n &= (N^n + 1)l & R_n &= \frac{\gamma}{b^n} & b, N &> 1. \\ n &\in [0 \dots \infty]. \end{aligned}$$



Possiamo considerare  $\gamma$  come il parametro corrispondente a  $d$  della sezione precedente. Quindi ad esempio si può avere:

- Salto di  $l$  con rate  $\gamma$ .
- Salto di  $(N+1)l$  con rate  $\gamma/b$ .
- Salto di  $(N^2+1)l$  con rate  $\gamma/b^2$ .

Come conseguenza salti più lunghi avranno rate più bassi (quindi saranno meno frequenti).

**Master Equation per il RW di Weierstrass**

$$\partial_t P(n, t|n', t') = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\gamma}{b^i} [P(n + (N^i + 1), t|n', t') + P(n - (N^i + 1), t|n', t')] - 2 \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{1}{b^i} \right) P(n, t|n', t').$$

La prima sommatoria tiene conto di tutti i punti che possono arrivare da distanze diverse. La seconda sommatoria invece tiene conto di quelli che sono già nel punto e scappano via.

L'equazione descrive un processo a salti, di conseguenza il moto in questione è Markoviano. Come per gli altri RW risolviamo con la funzione caratteristica.

$$G(s, t) = \langle e^{isn} \rangle = \sum_n e^{isn} P(n, t|n', t').$$

La master equation si riscrive come:

$$\partial_t G(s, t) = \gamma \left[ e^{is} \left( 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{isN^n}}{b^n} \right) + e^{-is} \left( 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-isN^n}}{b^n} \right) - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b^n} \right] G(s, t).$$

Possiamo compattare la scrittura con la notazione:

$$f(s) \equiv \left[ e^{is} \left( 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{isN^n}}{b^n} \right) + C.C - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b^n} \right].$$

Che ci permette di esprimere direttamente il risultato:

**Funzione caratteristica per il RW di Weierstrass**

$$G(s, t) = \exp(t f(s)) G(s, 0).$$

**Limite stazionario**

Vediamo se anche in questo caso mandando  $t \rightarrow \infty$  si ottiene una Gaussiana come nei casi RW1 e RW2. Sviluppando la  $G$  per  $s \rightarrow 0$  si ottiene che molti termini polinomiali si ammazzano a vicenda, rimane soltanto la seguente:

$$G(s, t) = \exp \left( -ts^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{N^2}{b} \right)^k \right).$$

All'esponente notiamo che il coefficiente di diffusione  $D$  è una sommatoria:

$$D \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{N^2}{b} \right)^k.$$

Quello che si scopre è quindi che il parametro  $N^2/b$  decide se il processo sarà Gaussiano o no, infatti:

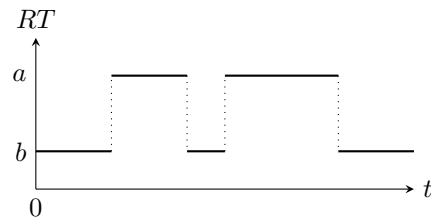
- Se  $N^2/b < 1$  abbiamo una serie geometrica all'esponenziale che ci riconduce ad una forma Gaussiana.
- Se  $N^2/b > 1$  la sommatoria diverge, il processo resta Markoviano ma non vale più il teorema del limite centrale.

Visto che il momento secondo è proporzionale a  $D$  (eq. 6.6) se ne conclude un processo con  $N^2/b > 1$  ha varianza infinita.

La cosa interessante è che abbiamo scoperto un processo random che al limite non diventa una Gaussiana <sup>2</sup>

**6.3 Random Telegraph**

Il RT è un processo random che coinvolge un sistema a due stati (o livelli):



Il processo è descritto dalle equazioni differenziali:

$$\begin{aligned} \partial_t P(a, t|x, t_0) &= -\lambda P(a, t|x, t_0) + \mu P(b, t|x, t_0) \\ \partial_t P(b, t|x, t_0) &= \lambda P(a, t|x, t_0) - \mu P(b, t|x, t_0). \end{aligned}$$

In cui  $x$  può essere  $a$  oppure  $b$ .

In questo caso c'è anche una terza equazione per la normalizzazione del processo:

$$P(a, t|x, t_0) + P(b, t|x, t_0) = 1.$$

Si scelgono le condizioni iniziali:

$$P(x, t_0|x', t_0) = \delta_{xx'}.$$

E quello che si ottiene risolvendo le equazioni differenziali è:

$$P(x', t|x, t_0) = \frac{\omega(x')}{R} + e^{-R(t-t_0)} \left( \frac{\lambda}{R} \delta_{ax} + \frac{\mu}{R} \delta_{bx} \right) \quad (6.7)$$

In cui  $R$  è la somma dei due rate:

$$R = \mu + \lambda.$$

Mentre la funzione  $\omega(x')$  differenzia i casi con  $x' = a$  e  $x' = b$ :

$$\omega(x') = \begin{cases} \lambda & \text{se } x' = a \\ \mu & \text{se } x' = b \end{cases}.$$

Il primo termine nella 6.7 è il termine stazionario. Il secondo termine invece decade esponenzialmente

<sup>2</sup>il momento secondo deve essere definito nelle ipotesi per il teorema del limite centrale...

in  $t$ , il termine con le  $\delta$  a moltiplicare deriva dalle condizioni iniziali inserite.

$$\begin{aligned}\langle x(t) | [x_0, t_0] \rangle &= \sum_{x=a,b} x P(x, t | x_0, t_0) = \\ &= \mathcal{R} + (x - \mathcal{R}) e^{-R(t-t_0)}.\end{aligned}$$

Dove  $\mathcal{R}$  è il Rate ridotto:

$$\mathcal{R} = \frac{a\mu + b\lambda}{\lambda + \mu}; \quad R = \mu + \lambda.$$

Si può anche calcolare la varianza di  $x(t)x(s)$ , senza esplicitare i conti si ha:

$$\begin{aligned}\text{var}(x(t)x(s)) &= \langle x(s)x(t) \rangle - \langle x(s) \rangle \langle x(t) \rangle = \\ &= \frac{(a-b)^2 \lambda \mu}{\mu + \lambda} e^{-R(t-t_0)}.\end{aligned}$$

### RT e OU

Le dipendenze dal tempo di media e varianza calcolate per il processo di Ornstein-Uhlenback sono le stesse che per il processo di Random Telegraph.

Per questo motivo spesso si preferisce studiare alcuni processi con il random telegraph che, analiticamente, permette di trovare la soluzione in modo più semplice.

## 6.4 Integrali stocastici

Sia  $x$  una variabile stocastica, il differenziale di questa variabile lo definiamo come:

$$dx = d\omega(t) \quad (6.8)$$

Ipotizziamo che il processo stocastico sia un processo di Wiener, in tal caso:

$$P(d\omega) \sim \exp\left(-\frac{(d\omega)^2}{dt}\right).$$

Con  $dt$  differenziale temporale.

Prendiamo allora una funzione  $G(s)$ , vogliamo definire cosa significa calcolare l'integrale di  $G(s)$  se la misura è stocastica.

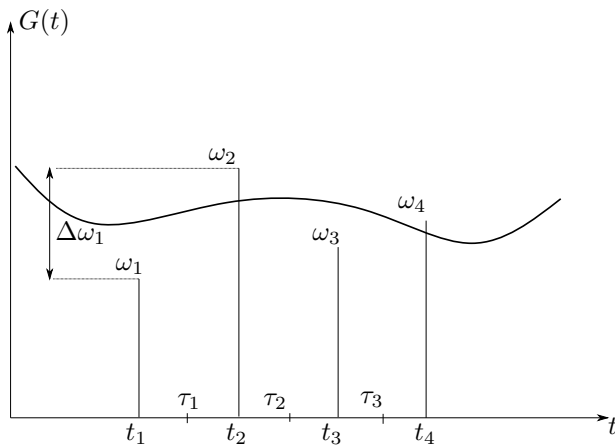


Figura 1.6: Funzione  $G(t)$  con punti stocastici  $\omega_i$ ,  $\Delta\omega_i$  è la distanza sull'asse  $y$  tra il punto  $\omega_{i-1}$  e  $\omega_i$ .

Definiamo allora l'integrale come:

### Integrale stocastico

$$\int_{t_0}^{t_n} G(s) d\omega(s) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty}^{\text{ms}} \sum_i G(\tau_i) [\omega(t_i) - \omega(t_{i-1})]$$

Il valore dell'integrale dipende dalla scelta dei  $\tau_i$ .

È interessante utilizzare come  $G(t)$  il processo di Wiener stesso per vedere cosa succede:

$$G(t) = \omega(t).$$

Inoltre definiamo gli step  $\tau_i$  come:

$$\tau_i = t_{i-1} + \alpha(t_i - t_{i-1}) \quad 0 < \alpha < 1.$$

Valutiamo la sommatoria all'interno della definizione:

$$\begin{aligned}\langle S_n \rangle &= \sum_{i=0}^n \langle \omega(\tau_i) [\omega(t_i) - \omega(t_{i-1})] \rangle = \\ &= \sum_{i=0}^n \langle \omega(t_{i-1} + \alpha(t_i - t_{i-1})) \omega(t_i) \rangle + \\ &\quad - \langle \omega(t_{i-1} + \alpha(t_i - t_{i-1})) \omega(t_{i-1}) \rangle.\end{aligned}$$

Ricordando che nei processi di Wiener vale:

$$\langle \omega(t)\omega(s) \rangle = \min(s, t).$$

Rimane soltanto:

$$\begin{aligned}\langle S_n \rangle &= \sum_{i=0}^n t_{i-1} + \alpha(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=0}^n t_{i-1} = \\ &= \alpha(t_n - t_0).\end{aligned}$$

Di conseguenza con la scelta 6.4 per i  $\tau_i$  contano solo l'istante finale ed iniziale.

Inoltre quando  $\alpha = 0$  l'integrale si annulla, mentre quando  $\alpha = 1$  l'integrale è l'intervallo temporale.

La vera domanda da porsi è quale sia il giusto valore di  $\alpha$ ...

## 6.5 Integrale di Îto e di Stratonovich

### Integrale di Îto

Îto è un matematico Giapponese, integrare con Îto implica scegliere  $\tau_i$  all'inizio dell'intervallo.

### Integrale di Îto

$$\alpha = 0.$$

$$\tau_i = t_{i-1}.$$

Le somme parziali con questo integrale si scrivono come:

$$S_n = \sum_i \omega(t_{i-1}) [\omega(t_i) - \omega(t_{i-1})].$$

L'integrazione di Îto forma una **Martingala**.

**Martingala** Dato un set di variabili stocastiche:

$$\{x_i\} : E(|x_i|) < \infty.$$

$$\{x_i\} \text{ è marting. } \iff E(x_{n+1}|x_1, \dots, x_n) = x_n.$$

Con  $E$ : valore di aspettazione.

Possiamo notare che il processo di Wiener realizza una martingala perché rispetta questa proprietà.

Il calcolo di  $\hat{\text{Ito}}$  è anche non anticipante:

#### Funzione non anticipante

$G(t)$  è non anticipante se è indipendente dall'incremento  $\omega(t) - \omega(s) \forall t, s$ .

**Esempio 6.5.1** (Esempi di funzioni non anticipanti). Dato un processo di Wiener  $\omega(t)$  tutte le seguenti funzioni sono non anticipanti:

- $\omega(t)$ .
- $\int dt f(\omega(t))$ .
- $\int d\omega f(\omega(t))$ .

#### Integrale di Stratonovich

Stratonovich era un fisico russo, integrare con Stratonovich implica scegliere il centro dell'intervallo.

#### Integrale di Stratonovich

$$\alpha = \frac{1}{2}.$$

$$\tau_i = \frac{1}{2} (\tau_{i-1} + \tau_i).$$

Le somme parziali in questo caso si scrivono come:

$$S_n = \sum_i \omega \left( \frac{t_i + t_{i-1}}{2} \right) [\omega(t_i) - \omega(t_{i-1})].$$

L'integrale di Stratonovich ha caratteristiche analoghe a quello che si usa normalmente in fisica, infatti si applica bene con funzioni "morbide".

**Esempio 6.5.2.**

$$\int_0^t \omega(t) dt = \begin{cases} \frac{\omega^2(t)}{2} - \frac{\omega^2(0)}{2} = \frac{t}{2} & \text{Strato} \\ \sum \omega_{i-1} (\omega_i - \omega_{i-1}) = 0 & \hat{\text{Ito}} \end{cases}$$

## 6.6 Relazione tra l'incremento stocastico e l'incremento temporale.

La relazione tra i due differenziali è la seguente:

$$(d\omega)^2 \sim dt.$$

Questo significa che  $d\omega$  è continuo ma non è differenziabile. Abbiamo già accennato alla non differenziabilità dei processi di Wiener, ecco un'altra riprova. Tutti gli ordini più alti dell'incremento si annullano:

$$d\omega^{N+2} \sim 0 \quad \forall N > 0.$$

Più formalmente, consideriamo il seguente integrale:

$$\int (d\omega)^{2+N} G(t) = \lim_{n \rightarrow \infty}^{\text{ms}} \sum_{i=0}^n G_{i-1} (\Delta\omega_i)^{2+N}.$$

Quello che si può dimostrare è che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty}^{\text{ms}} \sum_{i=0}^n G_{i-1} (\Delta\omega_i)^{2+N} = \begin{cases} \int dt G(t) & N = 0 \\ 0 & N > 0 \end{cases}$$

Quindi anche che:

$$\int (d\omega)^2 G(t) = \int dt G(t).$$

$$d\omega \sim O(dt^{1/2}) \quad (6.9)$$

#### Applicazione: Differenziale di una funzione

Prendiamo una funzione del tempo e del processo di Wiener:  $f[\omega, t]$ . Visto che si ha la 6.9 il differenziale  $df$  all'ordine più basso è:

#### Differenziale di una funzione

$$df[\omega, t] = \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2} \right] dt + \frac{\partial f}{\partial \omega} d\omega.$$

Questa struttura per il differenziale di una funzione è profondamente legata alla formula di  $\hat{\text{Ito}}$ .

## 6.7 Formula di $\hat{\text{Ito}}$

Supponiamo di avere una SDE della seguente forma:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)d\omega.$$

La soluzione formale è del seguente tipo:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t a(x, s)ds + \int_{t_0}^t b(x, s)d\omega(s).$$

Supponiamo che esista una ed una sola soluzione non anticipante<sup>3</sup>.

Allora se ho una  $f(x, t)$  con  $x$  soluzione della SDE scrivendone il differenziale all'ordine più basso si ha:

#### Formula di $\hat{\text{Ito}}$

$$df(x, t) = \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + a \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right] dt + b \frac{\partial f}{\partial x} d\omega.$$

$$\text{con } dx = a dt + b d\omega.$$

L'utilità della formula è che ci permette di fare cambi di variabili con funzioni dipendenti da una variabile casuale.

<sup>3</sup>Le ipotesi per cui vale sono negli appunti



## 7 Lezione 7

### 7.1 Integrale di una SDE

Prendiamo una SDE (Stochastic Differential Equation) del seguente tipo:

$$dx = f(x)dt + g(x)d\omega.$$

Con  $\omega$  processo di Wiener.

Nell'equazione abbiamo una parte deterministica ( $f(x)dt$ ) ed una stocastica ( $g(x)d\omega$ ).

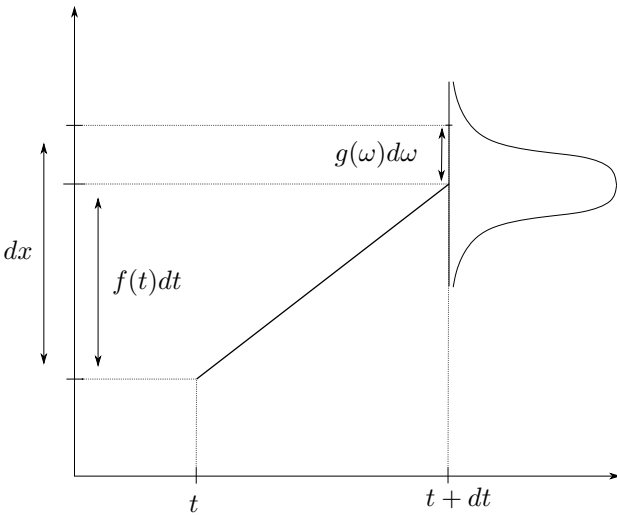


Figura 1.7: La linea rappresenta l'incremento della parte deterministica, in alto abbiamo invece il processo stocastico che discosta la  $x$  dalla parte di funzione deterministica (come un rumore sovrapposto al segnale).

Abbiamo detto che formalmente possiamo integrare nel seguente modo (con  $h$  passo di integrazione):

$$x_h - x_0 = \int_0^h f(x(s))ds + \int_0^h g(x(s))d\omega.$$

La formalità dell'espressione deriva dal fatto che le funzioni  $f$  e  $g$  dipendono da  $x$ , quindi non possiamo semplicemente risolvere questo integrale.

#### Soluzione perturbativa

Se prendiamo un passo di integrazione  $h$  piccolo, possiamo sviluppare  $f$  e  $g$  attorno al punto  $x_0$ :

$$\begin{aligned} f(x_s) &= f_0 + f'_0 \delta x_s + \frac{1}{2} f''_0 (\delta x_s)^2 \\ g(x_s) &= g_0 + g'_0 \delta x_s + \frac{1}{2} g''_0 (\delta x_s)^2. \end{aligned}$$

Con  $\delta x_s = x_s - x_0$ . Sostituendo nella equazione per la soluzione formale e tenendo solo l'ordine più basso si ha:

$$\delta x_h = \int_0^h f_0 ds + \int_0^h g_0 d\omega = f_0 h + g_0 \int_0^h d\omega.$$

Al secondo termine abbiamo un integrale stocastico. Questo indica che, operativamente, per effettuare una integrazione numerica e calcolare il punto successivo  $x_{n+1}$  si deve:

- Valutare la  $f$  nel punto  $x_n$ .
- Valutare la  $g$  nel punto  $x_n$  (la  $g$  di per se è solo una funzione, se la variabile è deterministica anche la  $g$  da un risultato deterministico).
- Ipotizzare una distribuzione per  $\omega$ .
- Estrarre ogni volta un valore  $Z_n$  secondo tale distribuzione <sup>4</sup> facendo in modo che, alla fine del processo, i valori siano distribuiti secondo la distribuzione di  $\omega$ .
- $x_{n+1} = f(x_n)h + g(x_n)Z_n$

Il procedimento funziona perché l'integrale:

$$\int_0^h d\omega.$$

È la somma di variabili Gaussiane, di conseguenza è anch'esso un processo con distribuzione Gaussiana:

$$Z_1(h) \equiv \int_0^h d\omega.$$

Vediamo le proprietà di  $Z_1$ :

$$\langle Z_1(h) \rangle = \int_0^h \langle d\omega \rangle = 0.$$

Poiché il processo di Wiener ha media nulla.

$$\begin{aligned} \langle Z^2(h) \rangle &= \left\langle \int_0^h d\omega_s \int_0^h d\omega_t \right\rangle = \\ &= \left\langle \sum_i (\omega_i - \omega_{i-1}) \sum_J (\omega_J - \omega_{J-1}) \right\rangle = \\ &= \sum_i \sum_J \Delta t \delta_{iJ} = h. \end{aligned}$$

Dove per risolvere si è usato che:

$$\langle \Delta \omega^2 \rangle = \Delta t.$$

Se ne conclude che la variabile  $Z_1$  è una Gaussiana a media nulla e con varianza  $\sqrt{h}$ :

$$Z_1 \in G(0, \sqrt{h}).$$

Operativamente possiamo generare un numero random tra 0 e 1:

$$Y_1(i) \in G(0, 1).$$

Ed ottenere la variabile da moltiplicare a  $g_0$  con:

$$Z_1(h) = \sqrt{h} Y_1(i).$$

In conclusione si ha che:

$$\delta x_h = f_0 h + g_0 Z_1(h).$$

<sup>4</sup>caratterizzeremo meglio tale distribuzione sotto

Guardando l'espressione notiamo che il primo termine è di ordine  $h$  mentre il secondo è di ordine  $\sqrt{h}$  poiché è un processo di Wiener.

Risulta quindi necessario capire se ci siamo persi dei termini di ordine  $h$  nella parte di sviluppo stocastico. Possiamo prendere la soluzione perturbativa al primo ordine e inserirla nuovamente all'interno dello sviluppo.

Ci limitiamo inoltre ad inserire solo il termine all'ordine più basso ( $g_0 Z_1(h)$ ) poiché il termine con  $f_0$  darebbe sicuramente contributi di ordine superiore.

$$\delta x_s^{(1/2)} = g_0 Z_1(h) = g_0 \int_0^h d\omega.$$

$$\begin{aligned} \delta x_t = & \int_0^t \left( f_0 + f'_0 g_0 \int_0^s d\omega_r \right) ds + \\ & + \int_0^h \left( g_0 + g'_0 g_0 \int_0^s d\omega_r \right) d\omega_s. \end{aligned}$$

L'unico contributo di ordine  $h$  deriva dal secondo integrale, che ci dà un termine del tipo:

$$\int_0^t \int_0^s d\omega_r d\omega_s = \int_0^t \omega_s d\omega_s.$$

Quindi adesso dobbiamo decidere quale calcolo utilizzare: Îto oppure Stratonovich.

L'evoluzione dell'equazione differenziale stocastica dipende dalla scelta del metodo di integrazione.

$$\int_0^t \omega_s d\omega_s = \begin{cases} \frac{\omega_t^2}{2} & \text{Strato} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_t^2}{2} - t \right) & \text{Îto} \end{cases}$$

In entrambi i casi si ottiene un termine  $O(h)$ , quindi:

$$\delta x_h = g_0 Z_1(h) + f_0 h + \frac{g_0 g'_0}{2} \cdot \alpha(\hat{I}, S)$$

Con  $\alpha(\hat{I}, S)$  data da:

$$\alpha(\hat{I}, S) = \begin{cases} Z_1^2(h) & \text{Strato} \\ Z_1^2(h) - h & \text{Îto} \end{cases}$$

## Uguaglianza tra i due metodi

Effettuando il seguente cambio di variabili:

$$dx = \left( f - \frac{1}{2} g g' \right) dt + g d\omega.$$

si ha che i due  $\delta x_h$  (Îto e Stratonovich) si eguagliano poiché il termine aggiunto va a compensare il termine che subentra con l'integrale di Îto.

L'importanza di questo "cambio di variabili" è che ci autorizza ad utilizzare l'approccio di Stratonovich

anche per sistemi che fisicamente andrebbero trattati con Îto<sup>5</sup>.

## 7.2 Algoritmo di Heun

Operativamente (per davvero) si usa spesso l'algoritmo di Heun per l'integrazione di SDE: si tratta di un algoritmo a 3 step:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= x_0 + Z_1 g_0 + f_0 h + \frac{1}{2} g_0 g'_0 Z_1^2 \\ x_1 &= x_0 + Z_1 g(\tilde{x}_0) + f(\tilde{x}_0) + \frac{1}{2} g(\tilde{x}_0) g'(\tilde{x}_0) Z_1^2 \\ x_h &= \frac{1}{2} (x_1 + \tilde{x}_1). \end{aligned}$$

Sostanzialmente equivale a fare un primo step di predizione ed un successivo step di correzione.

<sup>5</sup>Stratonovich permette algoritmi di integrazione più potenti.

## 8 Lezione 8

### 8.1 Legame tra SDE e Fokker-Plank

Prendiamo una equazione differenziale stocastica del tipo:

$$dx = a dt + b d\omega.$$

Possiamo immaginare che questa SDE dia luogo ad una distribuzione di probabilità Markoviana, quindi che soddisfi l'equazione di Chapman-Kolmogorov (4.1).

Il problema è che la forma differenziale di CK è molto generale, cerchiamo di capire quale forma assume per soddisfare la SDE sopra.

Prendiamo una generica funzione  $f(x(t))$ , il suo differenziale è dato dalla formula di  $\hat{I}to$ :

$$df = \left( a \partial_x f + \frac{1}{2} b^2 \partial_{x^2}^2 f \right) dt + b \partial_x f d\omega.$$

Consideriamo la derivata di  $f$  rispetto al tempo mediata sulle realizzazioni di  $\omega$ :

$$\left\langle \frac{df}{dt} \right\rangle_\omega = \frac{d}{dt} \langle f(x(t)) \rangle.$$

Essendo  $\langle d\omega \rangle_\omega = 0$  si ha che:

$$\frac{d \langle f \rangle}{dt} = \left\langle a \partial_x f + \frac{1}{2} b^2 \partial_{x^2}^2 f \right\rangle \quad (8.1)$$

L'equazione di CK ci dava una condizione sul propagatore  $P(x, t | x_0, t_0)$ , tale propagatore entra in gioco nel calcolo del valor medio di  $f$ :

$$\langle f(x(t)) \rangle = \frac{d}{dt} \int dx f(x) P(x, t | x_0, t_0).$$

In tale espressione la dipendenza temporale entra soltanto all'interno del propagatore.

Sostituendo la 8.1 si ha:

$$\int dx \left[ a \partial_x f + \frac{1}{2} b^2 \partial_{x^2}^2 f \right] P = \int dx f(x) \partial_t P.$$

Integrando per parti a destra dell'uguale e supponendo che la  $P(x, t | x_0, t_0)$  non diverga al bordo:

$$\int dx f(x) \partial_t P = \int dx f(x) \left[ -\partial_x (aP) + \partial_{x^2}^2 \left( \frac{1}{2} b^2 P \right) \right].$$

Visto che si è isolata la  $f$  a destra e sinistra l'equazione per  $P$  che si ottiene ha la forma di una CK come anticipato:

#### Chapman-Kolmogorov per SDE

$$\partial_t P(x, t) = \left( -\partial_x a + \frac{1}{2} \partial_{x^2}^2 b^2 \right) P(x, t).$$

**Esempio 8.1.1.** Prendiamo i seguenti valori per i parametri della SDE:

- $a(x, t) = a(t)$
- $b(x, t) = b(t)$

$$dx = a(t)dt + b(t)d\omega.$$

Integrando si ha:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)d\omega_s.$$

Mediando sulle realizzazioni di  $\omega$  l'ultimo termine va via:

$$\langle x(t) \rangle_\omega = \langle x_0 \rangle + \int_0^t a(s)ds.$$

Calcoliamo anche la varianza:

$$\begin{aligned} \langle x(t)x(s) \rangle &= \langle (x(t) - \langle x(t) \rangle)(x(s) - \langle x(s) \rangle) \rangle = \\ &= \left\langle \int_0^t b(t')d\omega(t') \int_0^s b(s')d\omega(s') \right\rangle. \end{aligned}$$

Sfruttando le proprietà della varianza per un processo di Wiener:

$$\langle x(t)x(s) \rangle = \int_0^{\min(t,s)} b^2(t')dt'.$$

Nel caso più semplice in cui  $a, b$  costanti:

- $\langle x(t) \rangle = x_0 + at$
- $\langle x(t)x(s) \rangle = b^2 \min(t, s)$

#### Esempio 8.1.2.

$$dx = cx d\omega(t).$$

Potremmo procedere con l'approccio di Stratonovich:

$$\frac{dx}{x} = dy = cd\omega(t).$$

Il problema è che non è detto che l'oggetto a sinistra sia mordibito, quindi questo approccio è in generale sbagliato (non è rispettata la seconda uguaglianza). Dobbiamo utilizzare la formula di  $\hat{I}to$  per effettuare il cambio di variabili. Prendiamo il seguente:

$$f = y = \ln x.$$

La formula ci dice che:

$$df = \left( af' + \frac{1}{2} b^2 f'' \right) dt + bf' d\omega.$$

Nel nostro caso:

- $a = 0$
- $b = cx$
- $f = 1/x$
- $f'' = -1/x^2$

Quindi in conclusione si ha una equazione differenziale per  $y$  che non è quella che ci saremmo aspettati:

$$dy = -\frac{c^2}{2}dt + cd\omega.$$

Abbiamo in più il primo termine. Integrando:

$$y(t) = y_0 + cd\omega(t) - \frac{c^2}{2}t.$$

A questo punto il problema è risolto per  $x$ :

$$x(t) = \exp(y) = x_0 \exp\left(c\omega(t) - \frac{c^2}{2}t\right).$$

Possiamo calcolare  $\langle x \rangle$  sfruttando il fatto che il valor medio di un processo gaussiano è nullo.

$$z \in G(0, 1) \implies \langle z \rangle = 0.$$

Nella nostra equazione abbiamo una espressione del tipo  $\langle \exp(z) \rangle$ , sfruttando le proprietà dei momenti di un processo Gaussiano si ha che:

$$\langle \exp(z) \rangle = \exp\left(\frac{\langle z^2 \rangle}{2}\right) \quad (8.2)$$

Per dimostrarlo è necessario utilizzare lo sviluppo dell'esponenziale, i momenti maggiori del secondo si annullano e rimane soltanto quello.

Otteniamo in conclusione che:

$$\begin{aligned} \langle x(t) \rangle &= \langle x_0 \rangle \exp\left(-\frac{c^2}{2}t\right) \langle \exp(c\omega(t)) \rangle = \\ &= \langle x_0 \rangle \exp\left(-\frac{c^2}{2}t\right) \exp\left(\frac{c^2}{2}t\right) = \langle x_0 \rangle. \end{aligned}$$

Analogamente si può fare con la correlazione:

$$\begin{aligned} \langle x(t)x(s) \rangle &= \langle x_0^2 \rangle e^{-\frac{c^2}{2}(t+s)} \langle e^{c(\omega(t)+\omega(s))} \rangle = \\ &= \langle x_0^2 \rangle e^{-\frac{c^2}{2}(t+s)} e^{\frac{c^2}{2}(\omega^2(t)+\omega^2(s))} = \\ &= \langle x_0^2 \rangle e^{c^2 \min(t,s)}. \end{aligned}$$

Se avessimo fatto il conto con Stratonovich avremmo ottenuto delle quantità divergenti:

$$\begin{aligned} \langle x(t) \rangle &= \langle x_0 \rangle \exp\left(\frac{1}{2}c^2t\right) \\ \langle x_tx_s \rangle &= \langle x_0^2 \rangle \exp\left(\frac{1}{2}c^2(t+s+2\min(t,s))\right). \end{aligned}$$

Quindi i due metodi di integrazione portano a dinamiche completamente differenti, è necessario stare attenti ad usare di volta in volta il metodo più opportuno.

**Esempio 8.1.3** (Oscillatore Kubo). Si studia la precessione di uno spin attorno ad un campo magnetico  $\omega$ :

$$dz = i(\omega dt + \sqrt{2\gamma}d\omega_t)z.$$

Il secondo termine indica che il campo magnetico non è costante, contiene fluttuazioni  $d\omega$ . Come conseguenza vedremo che il pacchetto di spin inizierà a sparpagliarsi.

Visto che le fluttuazioni del campo devono avere un Cut-Off ad alte frequenze è opportuno usare l'integrazione "fisica" di Stratonovich.

Possiamo valutare il valor medio di  $z$  integrando nel modo a noi noto:

$$\frac{dz}{z} = i\omega t + i\sqrt{2\gamma}d\omega_t.$$

La soluzione per  $z$  è ovviamente l'esponenziale del termine di destra, facendo il valor medio e sfruttando la 8.2 si ottiene:

$$\frac{d}{dt} \langle z \rangle = (i\omega - \gamma) \langle z \rangle.$$

Come accennato il primo termine fa girare lo spin, il secondo lo sparpaglia.

$$\langle z_t \rangle = \langle z_0 \rangle \exp((i\omega - \gamma)t).$$

Essendo in questo caso  $z$  una quantità complessa possiamo calcolare una correlazione del tipo:

$$\langle z_t z_s^* \rangle = \dots = \langle z_0^2 \rangle e^{i\omega(t-s) - \gamma|t-s|}.$$

La funzione di correlazione decade esponenzialmente con un tempo  $1/\gamma$ , legato alla fluttuazione del campo magnetico.

#### Esempio 8.1.4.

$$dx = -kxdt + \sqrt{D}d\omega_t.$$

Questa è "parente" del processo di Ornstein-Uhlenback:

$$dx = f(x)dt + \sqrt{D}d\omega_t.$$

Per risolverla si parte dalla omogenea:

$$dx = fdt = -kxdt.$$

Visto che il termine di rumore è costante:

$$g = \sqrt{D} \implies \begin{cases} g = \text{cost} \\ g' = 0 \end{cases}.$$

Allora in questo caso Îto e Stratonovich conducono allo stesso risultato.

Utilizziamo il calcolo di Îto, la prima cosa da fare è cercare il giusto cambio di variabile. Scegliamo:

$$y = xe^{kt}.$$

La formula di Îto per funzioni dipendenti dal tempo si scrive come:

$$df = \left[ a\partial_x f + \frac{b^2}{2}\partial_{x^2}^2 f + \partial_t f \right] dt + b\partial_x f d\omega.$$

Sviluppando le derivate si ottiene che:

$$dy = \sqrt{D}e^{kt}d\omega.$$

E quindi tornando indietro abbiamo anche la  $x$ :

$$x(t) = x_0 e^{-kt} + \sqrt{D} \int_0^t e^{-k(t-t')} d\omega_{t'}.$$

Mediando nel tempo nuovamente i termini con  $d\omega$  si cancellano:

$$\langle x(t) \rangle = \langle x_0 \rangle e^{-kt}.$$

Per la varianza il calcolo è più elaborato, riportiamo la conclusione:

$$\begin{aligned} \text{var} \{x(t)\} &= \\ &= \left\langle \left[ (x_0 - \langle x_0 \rangle) e^{-kt} + \sqrt{D} \int_0^t e^{-k(t-t')} d\omega_{t'} \right]^2 \right\rangle = \\ &= e^{-2kt} \left[ \text{var} \{x_0\} - \frac{D}{2k} \right] + \frac{D}{2k}. \end{aligned}$$

Quindi la varianza ha un valore stazionario ed un termine che decade esponenzialmente.

## 8.2 Ornstein-Uhlenback dipendente dal tempo

Prendiamo la seguente SDE:

$$dx = -a(t)xdt + b(t)d\omega.$$

L'algebra da seguire è simile a quella dell'esempio precedente, risolviamo l'omogenea (senza  $\omega$ ):

$$x(t) = \exp \left( - \int_0^t a(s) ds \right) x_0.$$

Si inserisce adesso la parte disomogenea:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \exp \left( - \int_0^t a_s ds \right) + \\ &+ \int_0^t \exp \left( - \int_{t'}^t a(s) ds \right) b(t') d\omega_{t'}. \end{aligned}$$

Al solito si può mediare in  $\omega$  per mandare via il secondo integrale:

$$\langle x(t) \rangle = \langle x_0 \rangle \exp \left( - \int_0^t a(s) ds \right).$$

Mentre per la covarianza si ha che:

$$\begin{aligned} \langle x(t), x(t) \rangle &= \exp \left( -2 \int_0^t a(s) ds \right) \langle x_0, x_0 \rangle + \\ &+ \int_0^t dt' \exp \left( -2 \int_{t'}^t a(s) ds \right) b^2(t'). \end{aligned}$$

## 9 Lezione 9

### 9.1 Oltre il teorema del limite centrale

Abbiamo visto che, per variabili stocastiche con media e deviazione standard definite, vale:

$$S_n = \sum_i x_i \rightarrow G.$$

Ci chiediamo se esista solo questa possibilità, ovvero se non esistano altre distribuzioni che possono far da limite per le variabili stocastiche.

Vediamo che succede se prendiamo una somma di variabili stocastiche estratte da una qualunque distribuzione:

$$S_2 = x_1 + x_2 \implies P_2(S_2) = \sum_{x_1} P_1(x_1)P_1(x_2).$$

Si somma solo su  $x_1$  poiché  $x_2 = S_2 - x_1$ :

$$P_2(S_2) = \int P_1(x_1)P_1(S_2 - x_1)dx_1.$$

Quindi si ha che:

$$P_2(S_2) = P_1(x_1) * P_1(x_2).$$

L'idea è che una distribuzione per essere stabile non deve cambiare sotto questa trasformazione (convoluzione).

**Esempio 9.1.1** (Distribuzione di Lorentz - Bright - Wigner).

$$P_L(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Le proprietà di questa distribuzione sono:

$$\begin{aligned} \int P_L dx &= 1 \\ \int x P_L dx &= 0 \\ \int x^2 P_L dx &\rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Per via della terza equazione non sono soddisfatte le condizioni del teorema del limite centrale.

Sviluppando la convoluzione si ha:

$$P_2(S_2) = \int P_1(x_1)P_1(S_2 - x_1)dx_1 = \frac{1}{2\pi \left[1 + \left(\frac{S_2}{2}\right)^2\right]}.$$

La forma della distribuzione è rimasta invariata, l'unica differenza rispetto alla distribuzione di singola variabile è il fattore di scala  $1/2$ .

**Esempio 9.1.2** (Gaussiana).

$$P_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Valutando l'integrale per la  $P_2$  si ha:

$$P_2(S_2) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp\left(-\frac{(S_2)^2}{4}\right).$$

Abbiamo una struttura nuovamente Gaussiana con la  $\sigma^2$  raddoppiata.

**Esempio 9.1.3** (Distribuzione uniforme).

$$P_1(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{Fuori} \end{cases}$$

In questo caso la forma della distribuzione cambia:

$$P_2(S_2) = \dots = 1 - |S_2|.$$

Prendiamo adesso la somma di  $n$  variabili sotto una certa distribuzione:

$$S_n = \sum_i^n x_i \implies P(S_n) = P_1(x_1) * \dots * P_n(x_n).$$

Nel caso di Lorentz e Gauss la procedura è generalizzabile:

$$\text{Gauss : } S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_i^n x_i \implies P_n(S_n) \in G$$

$$\text{Lorentz : } S_n = \frac{1}{n} \sum_i^n x_i \implies P_n(S_n) \in L.$$

### 9.2 Distribuzioni stabili

#### Definizione di Distrib. Stabile

Una distribuzione si dice stabile se è invariante sotto convoluzione.

$$\begin{aligned} P(a_1 z + b_1) * P(a_2 z + b_2) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy P(a_1(z-y) + b_1) P(a_2 y + b_2) = \\ &= P(az + b). \end{aligned}$$

con  $a_i > 0$ ,  $b_i \in R$ .

Andiamo in trasformata, chiamiamo la funzione caratteristica  $P(k)$ :

$$P(k) = \mathcal{F}[P(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} P(x) dx.$$

È noto che per convoluzione si ha:

$$\mathcal{F}[P_1 * P_2] = \mathcal{F}[P_1] \cdot \mathcal{F}[P_2].$$

Quindi nel caso visto sopra:

$$S_n = \sum_i^n x_i \implies P_n(k) = [P_1(k)]^n.$$

Nei due casi interessanti discussi nella sezione precedente la trasformata diventa:

$$P_G(k) \sim e^{-\frac{k^2}{2}}$$

$$P_L(k) \sim e^{-|k|}.$$

In particolare nel caso della lorenziana:

$$P_2(k) = e^{-2|k|} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2}.$$

### 9.3 Teorema di Levy-Kintchine

#### Teorema limite $\iff$ stabile

Una distribuzione di probabilità  $L(x)$  può essere la distribuzione limite di  $S_n = \sum_i x_i$  se e solo se  $L(x)$  è stabile.

Abbiamo dimostrato l'esistenza di due distribuzioni limite: Gauss e Lorentz.

Il teorema di Levy-Kintchine ( o della rappresentazione canonica ) serve a generalizzare la forma di una distribuzione limite.

#### Il teorema LK

Data una distribuzione di probabilità  $L_{\alpha,\beta}(x)$  con  $\alpha, \beta$  parametri. Tale distribuzione è stabile se e solo se il logaritmo della sua funzione caratteristica

$$L_{\alpha,\beta}(k) = \langle e^{ikx} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} L_{\alpha,\beta}(x).$$

ha la forma generale:

$$\ln(L_{\alpha,\beta}(k)) =$$

$$= \begin{cases} i\mu k - \gamma |k|^\alpha \left[ 1 - i\beta \frac{k}{|k|} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right]; & \alpha \neq 1 \\ i\mu k - \gamma |k| \left[ 1 + i\beta \frac{k}{|k|} \frac{2}{\pi} \ln |k| \right]; & \alpha = 1 \end{cases}$$

Con  $\alpha, \mu, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  e

- $0 \leq \alpha \leq 2$
- $-1 \leq \beta \leq 1$
- $\gamma \geq 0$

Il motivo dei vincoli per  $\alpha$  e  $\beta$  e che, antitrasformando per la distribuzione nello spazio reale, devono essere rispettate le proprietà delle distribuzioni.

**Esempio 9.3.1** (Gaussiana). Ritroviamo la Gaussiana se

- $\alpha = 2$
- $\beta$  qualunque
- $\mu$  qualunque

- $\gamma = 1$

**Esempio 9.3.2** (Lorentz). Ritroviamo la distribuzione di Lorentz se

- $\alpha = 1$
- $\beta = 0$
- $\mu = 0$
- $\gamma = 1$

Gli indici  $\alpha$  e  $\beta$  definiscono la forma e le proprietà della distribuzione mentre  $\mu$  e  $\gamma$  sono fattori di scala.

#### Caratteristiche del funzionale di LK

**Il ruolo di  $\alpha$**  Il parametro  $\alpha$  controlla la forma della  $L_{\alpha,\beta}$  per valori  $|x| \rightarrow \infty$ . Ipotizziamo infatti di avere solo il termine:

$$\ln(L_{\alpha,\beta}(k)) \sim -|k|^\alpha \implies L_{\alpha,\beta}(k) \sim e^{-|k|^\alpha}.$$

Antitrasformando si ottiene che:

$$\int dk e^{-|k|^\alpha} e^{-kx} \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} \sim \frac{1}{|x|^{\alpha+1}}.$$

Quindi si ha che:

#### Andamento asintotico di $L_{\alpha,\beta}(x)$

$$L_{\alpha,\beta}(x) \sim \frac{1}{|x|^{\alpha+1}} \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Con  $0 \leq \alpha \leq 2$

Sfruttando questo andamento asintotico possiamo vedere per quali  $\alpha$  convergono i momenti di ordine  $\delta$  con  $0 < \delta < \alpha$ :

$$\langle |x|^\delta \rangle = \int dx |x|^\delta L_{\alpha,\beta}(x) =$$

$$= \int dx \frac{|x|^\delta}{|x|^{\alpha+1}}.$$

Per avere un momento di ordine  $\delta$  finito l'integrale deve convergere. Se ne conclude che

- per  $\alpha < 2$  la varianza non è definita
- per  $\alpha < 1$  non è definita nemmeno la media.

Studiando un fenomeno fisico quello che abbiamo sempre fatto è stato cercare una scala del problema, quindi il momento secondo.

Per tutte le distribuzioni di Levy (tranne la Gaussiana) il momento secondo non è definito, questo le rende distribuzioni controintuitive.

**Il ruolo di  $\beta$**  Il parametro  $\beta$  controlla la simmetria della distribuzione:

- $\beta = 0 \implies L_{\alpha,\beta}(x)$  simmetrica
- $\beta = \pm 1 \implies L_{\alpha,\beta}$  molto asimmetrica al variare del parametro  $\alpha$ .

Se  $0 < \alpha < 1$  e  $\beta = 1$  allora il supporto della distribuzione è  $[\mu, \infty)$ .

**Esempio 9.3.3** (Lorentziana).  $\beta = 0, \alpha = 1$

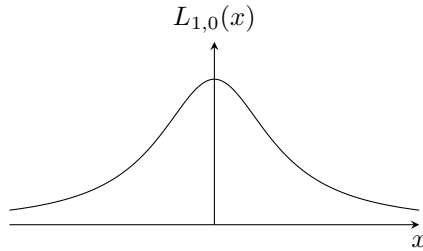


Figura 1.8: Distribuzione di Lorentz-Bright-Wigner.

**Esempio 9.3.4** (Levy-Smirnov).  $\beta = 1, \alpha = 1/2$ , si ha in tal caso:

$$L_{\alpha,\beta}(x) \sim \left( \frac{\gamma^{1/\alpha}}{2\pi} \right) \frac{1}{(x - \mu)^{3/2}} e^{-\frac{\gamma^{1/\alpha}}{2(x - \mu)}} \Theta(\mu).$$

Con  $\Theta(\mu)$  funzione di Heayside.

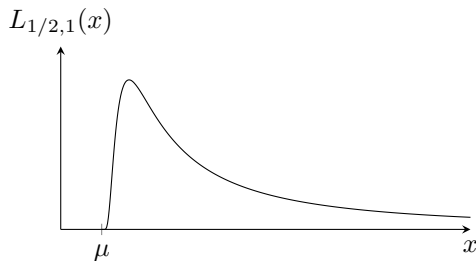


Figura 1.9: Distribuzione di Levy-Smirnov

## 9.4 Bacino di attrazione di una distribuzione

Data una  $P(x)$  possiamo vedere a quale  $L_{\alpha,\beta}(x)$  converge con il seguente teorema:

### Teorema del bacino di attrazione

$P(x)$  appartiene al bacino di attrazione di una distribuzione stabile  $L_{\alpha,\beta}(x)$  con  $0 < \alpha < 2$  se e solo se:

$$P(x) \sim \frac{\alpha a^\alpha c_\pm}{|x|^{1+\alpha}} \quad x \rightarrow \pm\infty.$$

Le costanti  $c_\pm \geq 0, a > 0$  sono legate ai coefficienti di  $L_{\alpha,\beta}(x)$  da relazioni semplici (che non si riescono a leggere negli appunti).

Notiamo che anche i momenti di  $P(x)$  sono definiti per  $\delta < \alpha$  esattamente come quelli di  $L_{\alpha,\beta}(x)$ .

## 9.5 Cambio di scala

Le distribuzioni di Levy sono Self-simili.

Consideriamo una distribuzione di Levy e prendiamo nuovamente:

$$S_n = \sum_i^n x_i.$$

Un cambio di scala che lascia invariata la forma della distribuzione mandando  $n \rightarrow \infty$  è:

$$\tilde{S}_N = \frac{1}{B_N} \sum_i^N x_i - A_N.$$

Con

$$B_N = aN^{1/\alpha} \quad A_N = \begin{cases} 0 & 0 < \alpha < 1 \\ \frac{N \langle x \rangle}{B_N} & 1 \leq \alpha \leq 2 \end{cases}.$$

Questo cambio di scala può essere utilizzato come riprova una volta individuata una espressione per la distribuzione di Levy: se aumentando i termini della sommatoria si ha che  $\tilde{S}_N$  va in se stessa allora abbiamo indovinato i coefficienti.

**Esempio 9.5.1** (Gaussiana).

$$B_N = N^{1/2} \sigma \quad A_N = \frac{N \langle x \rangle}{B_N}.$$

### ”Perché troviamo sempre Gaussiane?”

Possiamo chiederci perché le Gaussiane spiccano in fama e diffusione nei processi fisici, la risposta arriva dal fatto che:

$$P(x) \sim \frac{1}{x^{3+\epsilon}} \implies P(x) \rightarrow G \quad \forall \epsilon > 0.$$

Quindi tutte le distribuzioni aventi questa proprietà tendono a delle gaussiane. Quando questa condizione non è rispettata si ottiene una distribuzione di Levy.

### Probabilità di tornare nell'origine

Possiamo estrarre informazioni sulla distribuzione di Levy di un processo andando a cercare la probabilità di tornare nell'origine. Prendiamo ad esempio:

$$L_{\alpha,0}(x) \implies L_{\alpha,0}(k) \sim e^{-\gamma|k|^\alpha}.$$

Considerando l'ennesima iterata abbiamo visto che:

$$S_n \sim e^{-n\gamma|k|^\alpha}.$$

Adesso possiamo trovare la probabilità di rientrare in  $x = 0$  all'ennesima iterata semplicemente antitrasformando:

$$L_{\alpha,0}^n(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos(0) e^{-n\gamma|k|^\alpha} dk = \frac{\Gamma(1/\alpha)}{\pi \alpha (\gamma n)^{1/\alpha}}.$$

Quindi la probabilità di tornare nell'origine in funzione di  $n$  scala come una potenza di  $\alpha$ . Questo ci permette di determinare il valore di  $\alpha$ .

$$L_{\alpha,0}^n(0) = \frac{P(S_n)}{n^{1/\alpha}}.$$



## 9.6 SDE con variabili stocastiche con distrib. di Levy

Prendiamo una SDE del tipo:

$$dx(s) = dL_{\alpha,\beta}(s).$$

### Integrale un processo di Levy

Definiamo l'integrale di una funzione  $f(s)$  secondo un processo di Levy come:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t f(s) dL_{\alpha,\beta}(s) &= \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N f(\Delta s(i-1)) M_{\alpha,\beta}([\Delta s(i-1), \Delta s(i)]). \end{aligned}$$

In cui si è usata l'abbreviazione:

$$M_{\alpha,\beta}(x, y) = L_{\alpha,\beta}(x) - L_{\alpha,\beta}(y).$$

Sostanzialmente è l'integrale di Ito.

### Algoritmo di Weron

Per risolvere è necessario inventare una tecnologia per valutare le variabili stocastiche secondo una distribuzione di Levy generale.

L'algoritmo di Weron si occupa proprio di come generare questi numeri casuali  $\xi$  (Vedi appendice), secondo tale algoritmo l'integrale di una funzione si può scrivere come:

$$\int_{t_0}^t f(s) dL_{\alpha,\beta}(s) = \sum_i^N f(\Delta s(i-1)) (\Delta s)^{1/\alpha} \xi_i.$$

Con  $\Delta s = (t - t_0)/N$ , ovvero l'ampiezza di ogni intervallo temporale, facendo una integrazione elementare si prende ad esempio  $N = 1$ .

Come anticipato il numero  $\xi_i$  è generato tramite una distribuzione di Levy con alcuni parametri:

$$\xi_i \in L_{\alpha,\beta} \left( Z, \gamma = \frac{1}{(2)^{1/2\alpha}}, \mu = 0 \right).$$

Quindi operativamente si ha:

$$x_{n+1} = x_n + h^{1/\alpha} \xi_n.$$

### Che devo fare per generare la $\xi$ ?

Mentre per generare numeri gaussiani possiamo utilizzare una infinità di librerie per generare un numero secondo una distribuzione di Levy non è detto che vi sia un qualche pacchetto.

Quindi se non conosci Python devi riscrivere una funzione di 2 pagine per generare un set di numeri random, se conosci python invece esiste una libreria di Scipy che si occupa di generare numeri secondo una qualunque distribuzione di Levy.

## 10 Lezione 10

### 10.1 Random Walk di Weierstrass nel dettaglio

Abbiamo visto che per un camminatore di Weierstrass la forma della distribuzione poteva non essere Gaussiana al variare del parametro  $N^2/b$  (Vedi sezione 6.2). Cerchiamo la distribuzione invariante per il camminatore di Weierstrass. La probabilità di fare un salto  $l$  abbiamo visto essere:

$$P(l) = \frac{M-1}{2M} \sum_{J=0}^{\infty} \frac{1}{M^J} [\delta(l - b^J a) + \delta(l + b^J a)].$$

In generale la probabilità di fare un salto  $ba$  è soppressa di un fattore  $1/M$  rispetto a quella di saltare  $a$ , questo comporta che:

- Occorrono  $\sim M$  salti di  $\pm a$  prima di saltare  $ba$ .
- Occorrono  $\sim M$  salti di  $\pm ba$  ( $M^2$  salti lunghi  $a$ ) prima di saltare  $b^2 a$ .
- etc ...

Queste caratteristiche fanno sì che il sistema esibisca dei cluster di camminatori attorno alle posizioni dei salti lunghi.

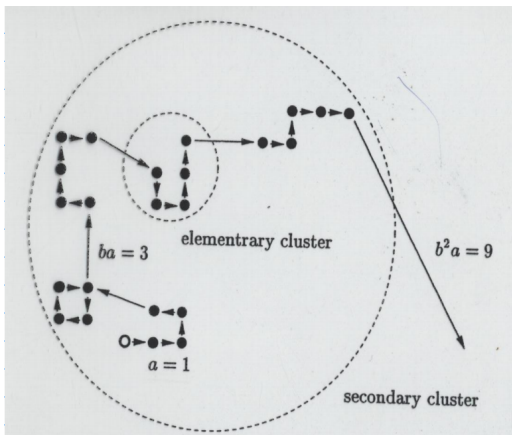


Figura 1.10: Random Walk di Weierstrass ( $b = 3$ ,  $M = 4$ ): formazione dei Cluster (Paul and Baschangel: Stochastic Process, Springer).

Proprio per la formazione di questi cluster su scale spaziali diverse il sistema può presentare un comportamento auto-similare.

Possiamo notare anche come cambiano i risultati al variare dei parametri  $M$  e  $b$ :

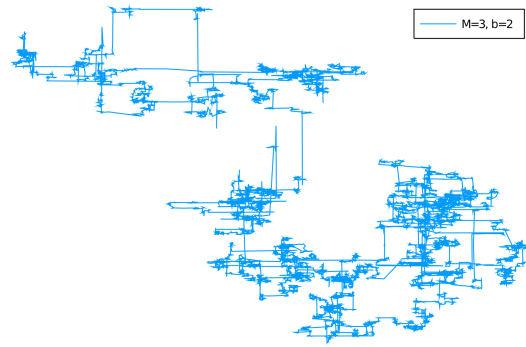


Figura 1.11: Rapporto  $M^2/b = 4.5$ .

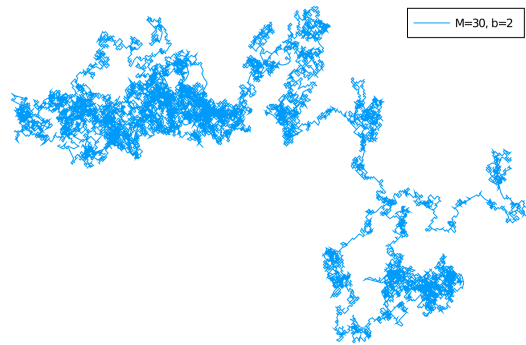


Figura 1.12: Rapporto  $M^2/b = 450$ , notiamo come i cluster che si formano siano diversi nei due casi.

Risolviamo per  $\langle l^2 \rangle \rightarrow 0$ , quindi il caso in cui la distribuzione  $P(l)$  non può tendere ad una Gaussiana.

$$\langle l^2 \rangle = \frac{(M-1)a^2}{M} \sum \left( \frac{b^2}{M} \right)^J; \quad \frac{b^2}{M} > 1.$$

## Capitolo 2

# Sistemi caotici