

## 9 Distribuzioni di Levy

Oltre il teorema del limite centrale . . . . .	9.1, p. 31
Distribuzioni stabili . . . . .	9.2, p. 31
Teorema di Levy-Kintchine . . . . .	9.3, p. 32
Bacino di attrazione di una distribuzione . . . . .	9.4, p. 33
Cambio di scala . . . . .	9.5, p. 33
SDE con variabili stocastiche con distrib. di Levy . . . . .	9.6, p. 34

### 9.1 Oltre il teorema del limite centrale

Abbiamo visto che, per variabili stocastiche con media e deviazione standard definite, vale:

$$S_n = \sum_i x_i \rightarrow G.$$

Ci chiediamo se esista solo questa possibilità, ovvero se (una volta rilassate le ipotesi del teorema del limite centrale) non esistano altre distribuzioni limite per le variabili stocastiche.

Vediamo che succede se prendiamo una somma di variabili stocastiche estratte da una qualunque distribuzione:

$$S_2 = x_1 + x_2 \implies P_2(S_2) = \sum_{x_1} P_1(x_1)P_1(x_2).$$

Si somma solo su  $x_1$  poiché  $x_2 = S_2 - x_1$ :

$$P_2(S_2) = \int P_1(x_1)P_1(S_2 - x_1)dx_1.$$

Quindi si ha che:

$$P_2(S_2) = P_1(x_1) * P_1(x_2).$$

L'idea è che una distribuzione per essere stabile non deve cambiare sotto questa trasformazione (convoluzione).

**Esempio 9.1.1** (Distribuzione di Lorentz - Bright - Wigner).

$$P_L(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Le proprietà di questa distribuzione sono:

$$\begin{aligned} \int P_L dx &= 1 \\ \int x P_L dx &= 0 \\ \int x^2 P_L dx &\rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Per via della terza equazione non sono soddisfatte le condizioni del teorema del limite centrale. Sviluppando la convoluzione si ha:

$$P_2(S_2) = \int P_1(x_1)P_1(S_2 - x_1)dx_1 = \frac{1}{2\pi \left[1 + \left(\frac{S_2}{2}\right)^2\right]}.$$

La forma della distribuzione è rimasta invariata, l'unica differenza rispetto alla distribuzione di singola variabile è il fattore di scala  $1/2$ .

**Esempio 9.1.2** (Gaussiana).

$$P_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Valutando l'integrale per la  $P_2$  si ha:

$$P_2(S_2) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp\left(-\frac{(S_2)^2}{4}\right).$$

Abbiamo una struttura nuovamente Gaussiana con la  $\sigma^2$  raddoppiata.

**Esempio 9.1.3** (Distribuzione uniforme).

$$P_1(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{Fuori} \end{cases}$$

In questo caso la forma della distribuzione cambia:

$$P_2(S_2) = \dots = 1 - |S_2|.$$

Prendiamo adesso la somma di  $n$  variabili sotto una certa distribuzione:

$$S_n = \sum_i^n x_i \implies P(S_n) = P_1(x_1) * \dots * P_n(x_n).$$

Nel caso di Lorentz e Gauss la procedura è generalizzabile:

$$\text{Gauss : } S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_i^n x_i \implies P_n(S_n) \in G$$

$$\text{Lorentz : } S_n = \frac{1}{n} \sum_i^n x_i \implies P_n(S_n) \in L.$$

### 9.2 Distribuzioni stabili

#### Definizione di Distrib. Stabile

Una distribuzione si dice stabile se è invariante sotto convoluzione.

$$\begin{aligned} P(a_1 z + b_1) * P(a_2 z + b_2) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy P(a_1(z-y) + b_1) P(a_2 y + b_2) = \\ &= P(az + b). \end{aligned}$$

con  $a_i > 0, b_i \in R$ .

Andiamo in trasformata, chiamiamo la funzione caratteristica  $P(k)$ :

$$P(k) = \mathcal{F}[P(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} P(x) dx.$$

È noto che per convoluzione si ha:

$$\mathcal{F}[P_1 * P_2] = \mathcal{F}[P_1] \cdot \mathcal{F}[P_2].$$

Quindi nel caso visto sopra:

$$S_n = \sum_i^n x_i \implies P_n(k) = [P_1(k)]^n.$$

Nei due casi interessanti discussi nella sezione precedente la trasformata diventa:

$$P_G(k) \sim e^{-\frac{k^2}{2}}$$

$$P_L(k) \sim e^{-|k|}.$$

In particolare nel caso della lorentziana:

$$P_2(k) = e^{-2|k|} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2}.$$

### 9.3 Teorema di Levy-Kintchine

#### Teorema limite $\iff$ stabile

Una distribuzione di probabilità  $L(x)$  può essere la distribuzione limite di  $S_n = \sum_i x_i$  se e solo se  $L(x)$  è stabile.

Abbiamo dimostrato l'esistenza di due distribuzioni limite: Gauss e Lorentz.

Il teorema di Levy-Kintchine ( o della rappresentazione canonica ) serve a generalizzare la forma di una distribuzione limite.

#### Il teorema LK

Data una distribuzione di probabilità  $L_{\alpha,\beta}(x)$  con  $\alpha, \beta$  parametri. Tale distribuzione è stabile se e solo se il logaritmo della sua funzione caratteristica

$$L_{\alpha,\beta}(k) = \langle e^{ikx} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} L_{\alpha,\beta}(x).$$

ha la forma generale:

#### Teorema della rappresentazione canonica

$$\ln(L_{\alpha,\beta}(k)) =$$

$$= \begin{cases} i\mu k - \gamma |k|^\alpha \left[ 1 - i\beta \frac{k}{|k|} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right]; & \alpha \neq 1 \\ i\mu k - \gamma |k| \left[ 1 + i\beta \frac{k}{|k|} \frac{2}{\pi} \ln |k| \right]; & \alpha = 1 \end{cases}$$

Con  $\alpha, \mu, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  e

- $0 \leq \alpha \leq 2$
- $-1 \leq \beta \leq 1$
- $\gamma \geq 0$

Il motivo dei vincoli per  $\alpha$  e  $\beta$  è che, antitrasformando per la distribuzione nello spazio reale, devono essere rispettate le proprietà delle distribuzioni.

**Esempio 9.3.1** (Gaussiana). Ritroviamo la Gaussiana se

- $\alpha = 2$
- $\beta$  qualunque
- $\mu$  qualunque
- $\gamma = 1$

**Esempio 9.3.2** (Lorentz). Ritroviamo la distribuzione di Lorentz se

- $\alpha = 1$
- $\beta = 0$
- $\mu = 0$
- $\gamma = 1$

Gli indici  $\alpha$  e  $\beta$  definiscono la forma e le proprietà della distribuzione mentre  $\mu$  e  $\gamma$  sono fattori di scala.

#### Caratteristiche del funzionale di LK

**Il ruolo di  $\alpha$**  Il parametro  $\alpha$  controlla la forma della  $L_{\alpha,\beta}$  per valori  $|x| \rightarrow \infty$ . Ipotizziamo infatti di avere solo il termine:

$$\ln(L_{\alpha,\beta}(k)) \sim -|k|^\alpha \implies L_{\alpha,\beta}(k) \sim e^{-|k|^\alpha}.$$

Antitrasformando si ottiene che:

$$\int dk e^{-|k|^\alpha} e^{-kx} \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} \sim \frac{1}{|x|^{\alpha+1}}.$$

Quindi si ha che:

#### Andamento asintotico di $L_{\alpha,\beta}(x)$

$$L_{\alpha,\beta}(x) \sim \frac{1}{|x|^{\alpha+1}} \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Con  $0 \leq \alpha \leq 2$

Sfruttando questo andamento asintotico possiamo vedere per quali  $\alpha$  convergono i momenti di ordine  $\delta$  con  $0 < \delta < \alpha$ :

$$\langle |x|^\delta \rangle = \int dx |x|^\delta L_{\alpha,\beta}(x) =$$

$$= \int dx \frac{|x|^\delta}{|x|^{\alpha+1}}.$$

Per avere un momento di ordine  $\delta$  finito l'integrale deve convergere. Se ne conclude che

- per  $\alpha < 2$  la varianza non è definita
- per  $\alpha \leq 1$  non è definita nemmeno la media.

Studiando un fenomeno fisico quello che abbiamo sempre fatto è stato cercare una scala del problema, quindi il momento secondo.

Per tutte le distribuzioni di Levy (tranne la Gaussiana) il momento secondo non è definito, questo le rende distribuzioni controintuitive.

**Il ruolo di  $\beta$**  Il parametro  $\beta$  controlla la simmetria della distribuzione:

- $\beta = 0 \implies L_{\alpha,\beta}(x)$  simmetrica
- $\beta = \pm 1 \implies L_{\alpha,\beta}$  molto asimmetrica al variare del parametro  $\alpha$ .

Se  $0 < \alpha < 1$  e  $\beta = 1$  allora il supporto della distribuzione è  $[\mu, \infty)$ .

**Esempio 9.3.3** (Lorentziana).  $\beta = 0, \alpha = 1$

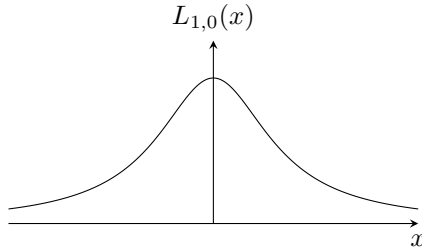


Figura 1.8: Distribuzione di Lorentz-Bright-Wigner.

**Esempio 9.3.4** (Levy-Smirnov).  $\beta = 1, \alpha = 1/2$ , si ha in tal caso:

$$L_{\alpha,\beta}(x) \sim \left( \frac{\gamma^{1/\alpha}}{2\pi} \right) \frac{1}{(x - \mu)^{3/2}} e^{-\frac{\gamma^{1/\alpha}}{2(x-\mu)}} \Theta(\mu).$$

Con  $\Theta(\mu)$  funzione di Heayside.

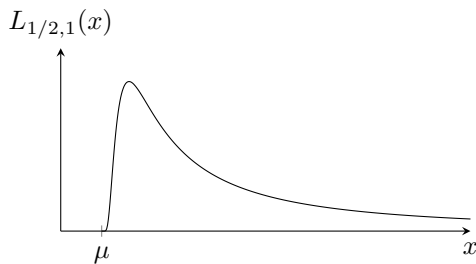


Figura 1.9: Distribuzione di Levy-Smirnov

## 9.4 Bacino di attrazione di una distribuzione

Data una  $P(x)$  possiamo vedere a quale  $L_{\alpha,\beta}(x)$  converge con il seguente teorema:

### Teorema del bacino di attrazione

$P(x)$  appartiene al bacino di attrazione di una distribuzione stabile  $L_{\alpha,\beta}(x)$  con  $0 < \alpha < 2$  se e solo se:

$$P(x) \sim \frac{a a^\alpha c_\pm}{|x|^{1+\alpha}} \quad x \rightarrow \pm\infty.$$

Le costanti  $c_\pm \geq 0, a > 0$  sono legate ai coefficienti di  $L_{\alpha,\beta}(x)$  da relazioni semplici:

$$\gamma = \begin{cases} \frac{\pi(c_+ - c_-)}{2\alpha\Gamma(\alpha)\sin(\pi\alpha/2)} & \alpha \neq 1 \\ (\pi/2)(c_+ + c_-) & \alpha = 1 \end{cases}.$$

$$\beta = \begin{cases} \frac{c_- - c_+}{c_+ + c_-} & \alpha \neq 1 \\ \frac{c_+ - c_-}{c_+ + c_-} & \alpha = 1 \end{cases}.$$

Notiamo che anche i momenti di  $P(x)$  sono definiti per  $\delta < \alpha$  esattamente come quelli di  $L_{\alpha,\beta}(x)$ .

## 9.5 Cambio di scala

Le distribuzioni di Levy sono Self-simili.

Consideriamo una distribuzione di Levy e prendiamo nuovamente:

$$S_n = \sum_i^n x_i.$$

Un cambio di scala che lascia invariata la forma della distribuzione mandando  $n \rightarrow \infty$  è:

$$\tilde{S}_N = \frac{1}{B_N} \sum_i^N x_i - A_N.$$

Con

$$B_N = aN^{1/\alpha} \quad A_N = \begin{cases} 0 & 0 < \alpha < 1 \\ \frac{N \langle x \rangle}{B_N} & 1 \leq \alpha \leq 2 \end{cases}.$$

Questo cambio di scala può essere utilizzato come riprova una volta individuata una espressione per la distribuzione di Levy: se aumentando i termini della sommatoria si ha che  $\tilde{S}_N$  va in se stessa allora abbiamo indovinato i coefficienti.

**Esempio 9.5.1** (Gaussiana).

$$B_N = N^{1/2}\sigma \quad A_N = \frac{N \langle x \rangle}{B_N}.$$

### ”Perché troviamo sempre Gaussiane?”

Possiamo chiederci perché le Gaussiane spiccano in fama e diffusione nei processi fisici, la risposta arriva dal fatto che:

$$P(x) \sim \frac{1}{x^{3+\epsilon}} \implies P(x) \rightarrow G \quad \forall \epsilon > 0.$$

Quindi tutte le distribuzioni aventi questa proprietà tendono a delle gaussiane. Quando questa condizione non è rispettata si ottiene una distribuzione di Levy.

### Probabilità di tornare nell'origine

Possiamo estrarre informazioni sulla distribuzione di Levy di un processo andando a cercare la probabilità di tornare nell'origine. Prendiamo ad esempio:

$$L_{\alpha,0}(x) \implies L_{\alpha,0}(k) \sim e^{-\gamma|k|^\alpha}.$$

Considerando l'ennesima iterata abbiamo visto che:

$$S_n \sim e^{-n\gamma|k|^\alpha}.$$

Adesso possiamo trovare la probabilità di rientrare in  $x = 0$  all'ennesima iterata semplicemente antitrasformando:

$$L_{\alpha,0}^n(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos(0) e^{-n\gamma|k|^\alpha} dk = \frac{\Gamma(1/\alpha)}{\pi\alpha(\gamma n)^{1/\alpha}}.$$

Quindi la probabilità di tornare nell'origine in funzione di  $n$  scala come una potenza di  $\alpha$ . Questo ci permette di determinare il valore di  $\alpha$ .

$$L_{\alpha,0}^n(0) = \frac{P(S_n)}{n^{1/\alpha}}.$$

## 9.6 SDE con variabili stocastiche con distrib. di Levy

Prendiamo una SDE del tipo:

$$dx(s) = dL_{\alpha,\beta}(s).$$

### Integrale un processo di Levy

Definiamo l'integrale di una funzione  $f(s)$  secondo un processo di Levy come:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t f(s) dL_{\alpha,\beta}(s) &= \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N f(\Delta s(i-1)) M_{\alpha,\beta}([\Delta s(i-1), \Delta s(i)]). \end{aligned}$$

In cui si è usata l'abbreviazione:

$$M_{\alpha,\beta}(x, y) = L_{\alpha,\beta}(x) - L_{\alpha,\beta}(y).$$

Sostanzialmente è l'integrale di Ito.

### Algoritmo di Weron

Per risolvere è necessario inventare una tecnologia per valutare le variabili stocastiche secondo una distribuzione di Levy generale.

L'algoritmo di Weron si occupa proprio di come generare questi numeri casuali  $\xi$ , secondo tale algoritmo l'integrale di una funzione si può scrivere come:

$$\int_{t_0}^t f(s) dL_{\alpha,\beta}(s) = \sum_i^N f(\Delta s(i-1)) (\Delta s)^{1/\alpha} \xi_i.$$

Con  $\Delta s = (t - t_0)/N$ , ovvero l'ampiezza di ogni intervallo temporale, facendo una integrazione elementare si prende ad esempio  $N = 1$ .

Come anticipato il numero  $\xi_i$  è generato tramite una distribuzione di Levy con alcuni parametri:

$$\xi_i \in L_{\alpha,\beta} \left( Z, \gamma = \frac{1}{(2)^{1/2\alpha}}, \mu = 0 \right).$$

Quindi operativamente si ha:

$$x_{n+1} = x_n + h^{1/\alpha} \xi_n.$$

L'algoritmo che si occupa di generare le  $\xi$  è chiamato algoritmo di Weron e viene utilizzato da molte librerie per risolvere questa tipologia di problemi.