5 Esempi di processi di Markov

5.1 Processo di Wiener

Un processo di Wiener è modellato dall'equazione di Fokker-Plank così definita:

$$\frac{\partial}{\partial t}P(\omega,t|\omega_0,t_0)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}P(\omega,t|\omega_0,t_0).$$

Questa corrisponde alla forma differenziale di Chapman-Kolmogorov in 1D con $A=0$, $B=$const, $\Phi=0$.
Inoltre si impone la seguente condizione iniziale:

$$P(\omega,t_0|\omega_0,t_0)=\delta(\omega-\omega_0).$$

Il processo si può risolvere utilizzando la funzione caratteristica:

$$\phi(s,t)=\int d\omega P(\omega,t|\omega_0,t_0)e^{is\omega}.$$

Sfruttando le regole della trasformata possiamo riscrivere l'equazione del processo come:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=-\frac{1}{2}s^2\phi.$$

$$\phi(s,t_0)=\exp(is\omega_0).$$

La soluzione è nota:

$$\begin{aligned}\phi(s)=&\exp\left(-\frac{1}{2}s^2\left(t-t_0\right)\right)\phi(s,t_0)=\\=&\exp\left(-\frac{1}{2}s^2\left(t-t_0\right)+is\omega_0\right).\end{aligned}$$

Visto che l'antitrasformata di una Gaussiana è una Gaussiana abbiamo la soluzione nello spazio reale:

Soluzione del processo di Wiener

$$P(\omega,t|\omega_0,t_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\left(t-t_0\right)}}\exp\left(-\frac{\left(\omega-\omega_0\right)^2}{2\left(t-t_0\right)}\right)$$

Il processo che abbiamo ottenuto è Gaussiano:

$$\langle\omega\rangle=\omega_0 \tag{5.1}$$

$$\left\langle\left(\omega-\omega_0\right)^2\right\rangle=t-t_0. \tag{5.2}$$

Proprietà dei processi di Wiener

- É continuo.
- Non è differenziabile, $\forall k$:

  $$\begin{aligned}&\text{Prob}\left(\frac{|\omega(t+h)-\omega(t)|}{h}>k\right)=\\&=2\int_{kh}^{\infty}d\omega\frac{1}{\sqrt{2\pi h}}e^{-\omega^2/2h}=\\&=1-\text{erf}\left(k\sqrt{\frac{k}{2}}\right)=\\&=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left[k\sqrt{\frac{h}{2}}\right]^{2n+1}}{n!(2n+1)}\xrightarrow{h\to0}1.\end{aligned}$$

  Quindi $\forall k$ grande a piacere quando $h\to0$ si ha che:
  $$\frac{\omega(t+h)-\omega(t)}{h}>k.$$
  Questo implica la non differenziabilità del processo.

- Gli incrementi sono indipendenti:

  $$\begin{aligned}&P(\omega_2,t_2;w_1,t_1;\omega_0,t_0)=\\&\quad=P(\omega_2,t_2|\omega_1,t_1)P(\omega_1,t_1|\omega_0,t_0)P(\omega_0,t_0).\end{aligned}$$

  Il primo termine dopo l'uguale non dipende da (ω_0,t_0) perché il processo è Markoviano.

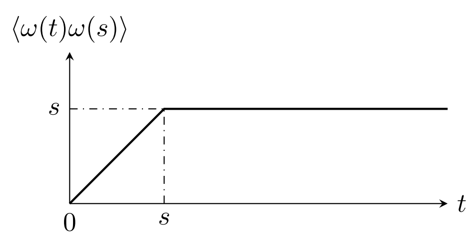
- La correlazione:
  Ipotizziamo di avere $t>s$:

  $$\begin{aligned}\langle\omega(t)\omega(s)\rangle&=\langle(\omega(t)-\omega(s))\,\omega(s)\rangle+\left\langle\omega^2(s)\right\rangle=\\&=\langle(\omega(t)-\omega(s))\rangle\,\langle\omega(s)\rangle+s=s.\end{aligned}$$

  In cui nel primo passaggio si somma e si sottrae $\omega(s)$, nel secondo passaggio si ha che l'incremento $\omega(t)-\omega(s)$ è indipendente da $\omega(s)$, quindi la media del prodotto corrisponde al prodotto delle medie. Tuttavia l'incremento è distribuito come una gaussiana a media nulla, quindi il primo termine si annulla. Il secondo termine invece è pari a s per l'equazione 5.2.
  Nel caso generale si ha che:

  $$\langle\omega(t)\omega(s)|\left[\omega_0t_0\right]\rangle=\min(t-t_0,s-t_0)+\omega_0^2.$$

  Che nel caso particolare in cui $\omega_0=t_0=0$ si ricongiunge a quello visto sopra $\langle\omega(t)\omega(s)\rangle=s$ se $t>s$.



5.2 Processo di Ornstein - Uhlenback

Prendiamo in considerazione altri esempi di processi di Markov.

Equazione di Ornstein - Uhlenback

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(kxP) + \frac{1}{2}D\frac{\partial^2}{\partial x^2}P.$$

Soluzione stazionaria

Cerchiamo intanto la soluzione con ($\partial_t P = 0$):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(kxP + \frac{1}{2}D\frac{\partial}{\partial x}P\right) = 0 \implies$$

$$\implies \left[kxP + \frac{1}{2}D\frac{\partial}{\partial x}P\right]_{-\infty}^{x} = J.$$

Se ipotizziamo che:

1. $\lim_{|x|\to\infty} P(x,t|x_0,t_0) = 0$
2. $\lim_{|x|\to\infty} xP(x,t|x_0,t_0) = 0.$

Allora possiamo affermare che nel limite di $x \to \infty$ la corrente J vale 0. Essendo J costante allora questo fissa il valore di $J = 0$. Si risolve allora l'equazione differenziale:

$$\frac{1}{2}D\frac{\partial P_s}{\partial x} = -kxP_s.$$

Soluzione stazionaria

$$P_s(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi D/k}}e^{-kx^2/D} \tag{5.3}$$

Si nota subito che, a differenza del processo di Wiener in cui il moto Browniano si allargava sempre di più (la larghezza della gaussiana dipende da t), adesso si ha una $\sigma^2 \propto D/k$ costante.
Il termine aggiuntivo rispetto a Wiener in questo processo funziona come una forza armonica per la P (una molla) che la richiama in $x = 0$.

Soluzione dipendente dal tempo.

Per la dipendenza temporale sfruttiamo la funzione caratteristica $\phi(s)$.

$$\phi(s) = \int e^{isx}P(x,t|x_0,t_0)dx.$$

L'equazione del processo diventa:

$$\partial_t\phi = -ks\partial_s\phi - \frac{1}{2}Ds^2\phi.$$

Questa equazione alle derivate parziali può essere risolta tramite il metodo delle caratteristiche (5.A).
L'unico ostacolo all'utilizzo del metodo è il secondo termine dopo l'uguale (contiene la soluzione), vorremmo ricondurci all'equazione in forma standard.
Facciamo allora il cambio di variabile:

$$g = \ln\phi.$$

Visto che:

$$\partial_t g = \frac{\partial_t\phi}{\phi} \qquad \partial_s g = \frac{\partial_s\phi}{\phi}.$$

Si ha una equazione in g più maneggevole:

$$\partial_t g + ks\partial_s g = -\frac{1}{2}Ds^2.$$

Questa è risolubile con il metodo delle caratteristiche:

$$(a,b,c) \to (1, ks, -\frac{1}{2}Ds^2).$$

Parametrizzando con η abbiamo le equazioni caratteristiche:

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\eta} = 1 \qquad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\eta} = ks \qquad \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\eta} = -\frac{1}{2}Ds^2.$$

Facendo dell'algebra (da fisici) si ha:

$$\begin{cases} dt = d\eta \\ \frac{ds}{ks} = d\eta \\ \frac{dg}{1/2Ds^2} = -d\eta \end{cases}.$$

Possiamo risolvere per rimuovere η:

$$\begin{cases} 1. \quad dt = \dfrac{ds}{ks} \\ 2. \quad \dfrac{ds}{ks} = -\dfrac{dg}{1/2Ds^2} \end{cases}$$

Integrando queste equazioni escono fuori delle costanti, ridefinendo tali costanti come funzioni (u_1, u_2) saremo in grado di risalire alla ϕ.
Risolviamo la 1:

$$c_1 = t - \frac{1}{k}\ln(s).$$

Visto che c_1 è una costante possiamo applicarvi qualsiasi operatore (purché non vi siano presenti le variabili del sistema), quindi:

$$c_1 = -kt + \ln(s) \implies c_1'' = se^{-kt}.$$

Quindi definiamo la prima costante del moto come u_1:

$$u_1(t,s) = se^{-kt} \tag{5.4}$$

L'equazione alle derivate parziali che stiamo risolvendo deve mantenere costante nel tempo la u_1.
Passiamo alla equazione 2 del sistema, integrando si ottiene:

$$c_2 = \frac{s^2D}{4k} + g.$$

Ricordando che $g = \ln\phi$ possiamo definire anche un'altra funzione a partire dalla costante c_2 (si fa l'esponenziale della 2):

$$u_2(t,s) = \phi\exp\left(\frac{Ds^2}{4k}\right) \tag{5.5}$$

Riscrivendo la 5.5 isolando ϕ si ha:

$$\phi = u_2 \exp\left(-\frac{Ds^2}{4k}\right).$$

Visto che u_1 e u_2 sono entrambe costanti collegate dalle equazioni caratteristiche sarà sempre possibile esprimere una in funzione dell'altra:

$$u_2 = f(u_1).$$

Dove la f è una funzione generica dettata dalle condizioni al contorno.

Soluzione dipendente dal tempo per ϕ

$$\phi = f\left(se^{-kt}\right) \exp\left(-\frac{Ds^2}{4k}\right) \tag{5.6}$$

Condizioni al contorno

Prendiamo il caso più semplice, l'oggetto in analisi si trova inizialmente nel punto x_0:

$$P(x,0|x_0,0) = \delta(x - x_0) \implies \phi(s,0) = e^{ix_0 s}.$$

Prendiamo l'equazione 5.6 ed invertiamola per trovare la $f(s)$ $(t = 0)$ inserendo anche la condizione iniziale:

$$e^{ix_0 s} = f(se^0) \exp\left(\frac{-Ds^2}{4k}\right) \implies$$
$$\implies f(s) = e^{ix_0 s} \exp\left(\frac{Ds^2}{4k}\right).$$

Per reinserire il tempo e trovare la soluzione con queste condizioni iniziali basta fare la sostituzione (solo in $f(s)$):

$$s \to se^{-kt}.$$

Soluzione con condizione iniziale δ

$$\phi(s,t) = \exp\left[-\frac{Ds^2}{4k}\left(1 - e^{-2kt}\right) + isx_0 e^{-kt}\right] \tag{5.7}$$

A questo punto possiamo tornare indietro con una trasformata inversa, altrimenti possiamo ricavare i momenti sfruttando le proprietà di ϕ:

$$\langle x(t)\rangle = i\frac{\partial\phi}{\partial s}\bigg|_{s=0} = x_0 e^{-kt}.$$

$$\begin{aligned}\mathrm{var(x(t)\ )} &= \left\langle x^2(t)\right\rangle - \langle x(t)\rangle^2 = \\ &= -1\frac{\partial^2\phi}{\partial s^2}\bigg|_{s=0} - \langle x\rangle^2 = \\ &= \frac{D}{2k}\left(1 - e^{-2kt}\right).\end{aligned}$$

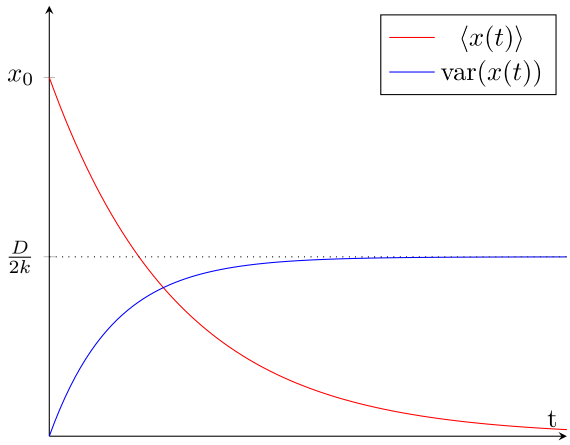


Figura 1.4: Andamento della media e della varianza per il processo di Ornstein-Uhlenback.

I risultati ottenuti sono conformi con le condizioni iniziali inserite.

Media all'istante iniziale tutti i camminatori sono in x_0 (grazie alla δ).
Quando il processo fa evolvere le posizioni dei camminatori allora i camminatori si allontanano da x_0 andando verso l'origine, questo è conforme con quanto visto per la soluzione stazionaria: una Gaussiana centrata nello 0.

Varianza Nell'istante iniziale, quando tutti i camminatori sono nel punto x_0, la varianza è nulla, questa si stabilizza nel tempo al valore dato dalla Gaussiana nelle condizioni stazionarie.

Calcolo delle correlazioni

$$\begin{aligned}&\langle x(t_1)x(t_2)\ |\,[x_0,t_0]\rangle = \\ &\qquad = \int dx_1 dx_2 P(x_1,t_1;x_2,t_2;x_0,t_0)x_1 x_2 = \\ &\qquad = \int dx_1 dx_2 x_1 x_2 P(\overline{x}_1,\overline{x}_2)P(\overline{x}_2,\overline{x}_0).\end{aligned}$$

In cui si è assunto il processo Markoviano e la gerarchia temporale: $t_1 > t_2 > t_0$.
Se il processo ha raggiunto la stazionarietà $(t_0 \to \infty)$ allora conosciamo la forma del propagatore:

$$P(x_2|x_0) \sim \exp\left(-k\frac{x_2^2}{D}\right).$$

Risolvendo con questa si ottiene:

Correlazione temporale a due

$$\langle x(t)x(s)\rangle \sim \frac{D}{2k}\exp\left(-k\,|t-s|\right).$$

La correlazione temporale delle posizioni decade esponenzialmente.

Ornstein-Uhlenback come modello per rumore realistico.

Facendo la trasformata di Fourier della funzione di Correlazione si ottiene una Lorenziana:

$$\begin{aligned} S_{OU}(\omega) =& \mathcal{F}\left(\langle x(t)x(s)\rangle\right) = \\ =& \frac{1}{\omega^2/k^2+1}. \end{aligned}$$

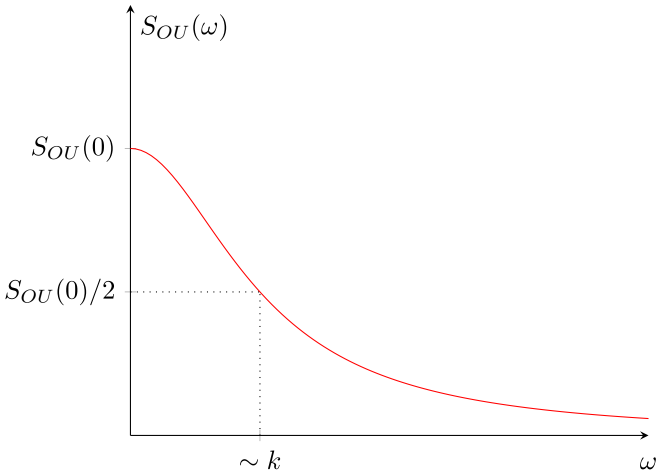


Figura 1.5: Andamento della trasformata della correlazione per il processo di Ornstein-Uhlenback.

Questo è esattamente quello che ci aspettiamo da un rumore realistico: il rumore ha una frequenza di cut-off dettata da una Lorenziana.
Il cut-off è dovuto al fatto che le cose non possono muoversi infinitamente veloci, l'inerzia dei corpi che partecipano al moto stocastico fissa la frequenza di cut-off.
C'è quindi un tempo caratteristico di osservazione del fenomeno

$$\tau = \frac{1}{k}.$$

Se osserviamo il moto su scale temporali di quest'ordine allora lo spettro degli urti tra i corpi va a zero, questo comporta che il moto oltre queste scale temporali non è più ben descritto dal processo di Wiener.

Esercizio 5.2.1. Modifica all'equazione di OU Risolvere l'equazione di Ornstein-Uhlenback con l'aggiunta di un termine nella ∂_x:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(kx+\alpha\right)P\right) + \frac{1}{2}D\frac{\partial^2}{\partial x^2}P.$$

Soluzione: Il moto dovrebbe andare a stazionarietà nel punto $-\alpha/k$.

Appendice

5.A Metodo delle Caratteristiche.

Supponiamo di avere una PDE della forma:

PDE per metodo delle caratteristiche

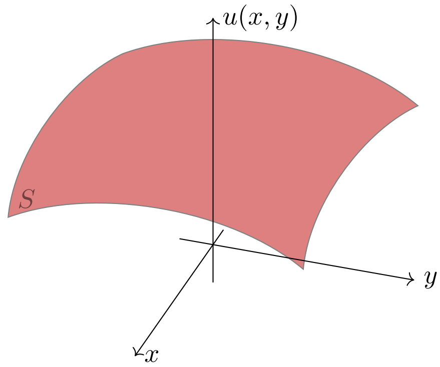
$$a(x,y)\partial_x u + b(x,y)\partial_y u - c(x,y) = 0.$$

Scrivibile anche come:

$$(a,\ b,\ c)\cdot(\partial_x u,\ \partial_y u,\ -1) = 0 \tag{5.8}$$

Ed una superficie parametrizzata con la soluzione della PDE ($u(x,y)$):

$$S \equiv (x,y,u(x,y)).$$



Vettore tangente a S

Il vettore $(a,\ b,\ c)$ appartiene al piano tangente di S in ogni punto (x,y,z).

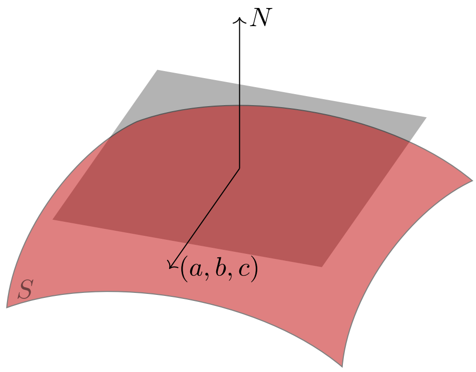
La normale $\boldsymbol{N}$ alla superficie S la si trova facendo il gradiente di:

$$\overline{S} = u(x,y) - z.$$

Si ottiene quindi:

$$\boldsymbol{N} = \left(\partial_x u,\ \partial_y u,\ -1\right).$$

Visto che $\boldsymbol{N}$ è il secondo termine nella 5.8 si vede che la soluzione è il luogo dei vettori (a,b,c) ortogonali a $\boldsymbol{N}$, quindi tangenti al piano S.



Quindi la soluzione della PDE è tale per cui il vettore (a,b,c) sta sul piano tangente.

Curva caratteristica

Per mappare la soluzione si introduce una curva C detta curva caratteristica che descrive la superficie.

$$C: \quad C \equiv (x(\eta), y(\eta), z(\eta)) \,.$$

C è una curva parametrica in η localmente tangente a (a, b, c).
La condizione di parallelismo implica il seguente sistema:

Equazioni Caratteristiche

Sono curve integrali per il campo vettoriale (a, b, c)

$$\begin{cases} a(x(\eta), y(\eta)) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\eta} \\ \\ b(x(\eta), y(\eta)) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\eta} \\ \\ c(x(\eta), y(\eta)) = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\eta} \end{cases}$$

Queste equazioni risolvono la PDE.

Esempio 5.A.1 (Equazione del trasporto.)**.**

$$u_t + a \cdot u_x = 0.$$

In questo caso si ha $(a, b, c) \to (a, 1, 0)$, quindi:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\eta} = a \qquad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\eta} = 1 \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\eta} = 0$$

Passiamo alla risoluzione:

$$\begin{cases} x(\eta) = a\eta + c_1 \\ t(\eta) = c_2 + \eta \\ z(\eta) = c_3 \end{cases} \implies \begin{cases} x - at = x_0 \\ z = k \end{cases}$$

In cui si è effettuata dell'algebra per eliminare η nel primo sistema.

- La funzione che risolve il sistema di destra è la soluzione dell'equazione del trasporto.
- Graficamente le funzioni che risolvono sono delle rette con z costante, l'unione di queste rette rappresenta S.
- Abbiamo ottenuto un fascio di soluzioni poiché non abbiamo imposto alcuna soluzione al contorno.

In conclusione z dovrà essere funzione di $x - at$, quindi la soluzione generale sarà una funzione del tipo:

$$z(x, t) = f(x - at) \equiv u(x, t).$$

Supponiamo che all'istante iniziale la soluzione fosse una gaussiana:

$$f(x, t = 0) = e^{-x^2}.$$

Quindi si ha che anche la soluzione a $t = 0$ è una gaussiana:

$$u(x, t = 0) = e^{-x^2}.$$

Ed introducendo il tempo la soluzione diventa semplicemente:

$$u(x, t) = e^{-(x-at)^2}.$$