

Sistemi complessi

Edoardo Gabrielli

24 settembre 2020

Indice

0.1	Lezione 1: Introduzione	1
0.1.1	Moto Browniano	1
0.1.2	Primo esempio di equazione di Fokker-Plank	1
0.1.3	Introduzione ad una dinamica mesoscopica: Langevin	2
0.1.4	Nascita-Morte: Master equation	3

0.1 Lezione 1: Introduzione

24-09-2020

0.1.1 Moto Browniano

Il conte Brown nel 1827 pensò di aver scoperto la vita osservando particelle di polline in acqua che si muovevano in modo casuale, ne concluse che le particelle fossero vive. Successivamente fu Einstein a dare una descrizione collisionale con i seguenti punti chiave:

- Impatti frequenti. $x - \Delta$ ξ
- Descrizione probabilistica.
- Dinamica discreta (tempo discretizzato) Δ

Mettiamoci in un sistema unidimensionale e ipotizziamo che il tempo caratteristico di impatto tra due palline sia τ e che $n(t)$ sia il numero delle palline.

Sempre per ipotesi per ogni pallina si ha la proprietà:

$$x(t=0) = x \implies x(t=\tau) = x + \Delta.$$

Dove Δ varia da pallina a pallina, di conseguenza possiamo definire una distribuzione pari di questi Δ : $f(\Delta)$

$$\int f(\Delta) d\Delta = 1; \quad f(\Delta) = f(-\Delta).$$

0.1.2 Primo esempio di equazione di Fokker-Plank

Possiamo trovare il numero di palline che si muovono di una quantità ξ : $\Delta < \xi < \Delta + d\Delta$, chiamiamo tale numero dn .

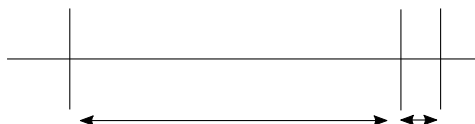


Figura 1: Particelle che si muovono di ξ .

$$dn = n f(\Delta) d\Delta.$$

La probabilità che una pallina si trovi nel punto x al tempo $t + \tau$ per dx è:

Equazione di Chapman-Kulmogorov

$$P(x, t + \tau) dx = dx \int P(x - \Delta, t) f(\Delta) d\Delta \quad (0.1.1)$$

Rappresenta il fatto che il processo è markoviano. Se tale processo non fosse stato di questo tipo avremmo dovuto mettere a destra più di un tempo.

Espandendo in serie (di Kramers-Moyal) le probabilità:

$$P(x, t + \tau) = P(x, t) + \frac{\partial P}{\partial t} \tau$$
$$P(x - \Delta, t) = P(x, t) - \frac{\partial P}{\partial x} \Delta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \Delta^2.$$

Si ottiene reinserendo nella 0.1.1:

Equazione del tipo di Fokker-Plank

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \quad (0.1.2)$$

Nella quale D vale:

$$D = \frac{1}{2\tau} \langle \Delta^2 \rangle.$$

Integrando la 0.1.2 si ottiene, con le condizioni iniziali: $P(x, t = 0) = \delta(x)$

$$P(x, t) = \frac{n}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right).$$

0.1.3 Introduzione ad una dinamica mesoscopica: Langevin

Possiamo scrivere una equazione del moto per le palline tenendo di conto di:

- Attrito: $-6\pi\eta d\dot{x}$ (Approccio alla Stokes)
- Impatti random tra le altre particelle: ξ .

$$m\ddot{x} = -6\pi\eta d\dot{x} + \xi \quad (0.1.3)$$

Che è un primo esempio di equazione differenziale stocastica.

Se moltiplichiamo a destra e sinistra per x possiamo riscriverla nel seguente modo:

$$\frac{1}{2} m \frac{d^2}{dt^2} \langle x^2 \rangle - m \dot{x}^2 = -3\pi\eta d \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle + \xi x.$$

Possiamo mediare su tutte le possibili realizzazioni della ξ :

$$\frac{m}{2} \frac{d^2}{dt^2} \langle x^2 \rangle - kT = -3\pi\eta d \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle.$$

Si risolve con metodi noti:

$$\frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = \frac{kT}{3\pi\eta d} + C \exp\left(\frac{-6\pi\eta d t}{m}\right).$$

Possiamo buttare il secondo termine ottenendo:

Equazione di diffusione

$$\langle x^2 \rangle_t - \langle x^2 \rangle_0 = \frac{kT}{3\pi\eta d} \cdot t \quad (0.1.4)$$

Andando a vedere l'equazione di Fokker-Plank vista sopra si scopre che c'è una relazione tra D ed i coefficienti di questa equazione:

Relazione tra coefficienti

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta d}.$$

0.1.4 Nascita-Morte: Master equation

Ipotizziamo di avere due specie di animali:

- Conigli: x
- Volpi: y

Tali animali possono essere modellizzati con il seguente modello di nascite/morti:

Sistema di Lotka-Volterra

$$\begin{cases} x + \text{food} \rightarrow 2x \\ x + y \rightarrow 2y \\ y \rightarrow \text{death} \end{cases}.$$

Possiamo tradurre questo sistema con due equazioni differenziali (ad intuito):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k_1 x c - k_2 x y \\ \frac{dy}{dt} = k_2 x y - k_3 y \end{cases}.$$

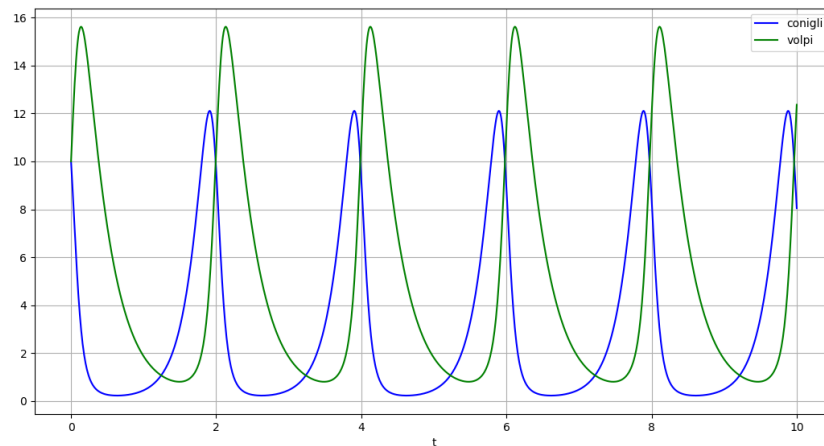


Figura 2: Andamento delle soluzioni

```
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
def func(y,t, c, k1, k2, k3):
    r,s = y
    drds = [k1*c*r-k2*r*s, k2*r*s - k3*s]
    return drds
k1 = 1
k2 = 5
k3 = 1
c = 3
t0 = [10, 10]
t = np.linspace(0,10,1000)
sol = odeint(func, t0, t, args=(k1, k2, k3, c))
plt.plot(t, sol[:, 0], 'b', label='conigli')
plt.plot(t, sol[:, 1], 'g', label='volpi')
plt.legend(loc='best')
plt.xlabel('t')
plt.grid()
plt.show()
```

Come possiamo tener di conto delle fluttuazioni presenti in natura?

In realtà dovremmo utilizzare un modello discreto, quindi possiamo migliorare il metodo visto in precedenza. Prendiamo la probabilità di avere (x, y) (lepri, volpi) al tempo t : $P(x, y, t)$ (dove adesso x, y sono discreti). Valgono le seguenti uguaglianze per un certo tempo Δt :

$$P_r(x \rightarrow x + 1, y) \Delta t = k_1 c x \Delta t$$

$$P_r(x \rightarrow x - 1, y \rightarrow y + 1) \Delta t = k_2 x y \Delta t$$

$$P_r(x \rightarrow x, y \rightarrow y - 1) \Delta t = k_3 y \Delta t$$

$$P(x \rightarrow x, y \rightarrow y) \Delta t = \Delta t [1 - (k_1 c x + k_2 x y + k_3 y)].$$

Dove P_r è la probabilità di fare la transizione (indipendente da t per ipotesi). Possiamo trovare l'evoluzione temporale come:

Esempio di Master Equation

$$\begin{aligned} \frac{P(x, y, y + \Delta t) - P(x, y, t)}{\Delta t} = & P_r(x - 1 \rightarrow x, y) \cdot P(x - 1, y, t) + \\ & P_r(x + 1 \rightarrow x, y - 1 \rightarrow y) \cdot P(x + 1, y, t) + \\ & P(x \rightarrow x, y + 1 \rightarrow y) P(x, y + 1, t) + \\ & [P_r(x \rightarrow x, y \rightarrow y) - 1] \cdot P(x, y, t) \end{aligned} \quad (0.1.5)$$