Μέθοδοι Αλγεβρικής Γεωμετρίας με Έμφαση στις Διοφαντικές Εξισώσεις

Δραζιώτης Κωνσταντίνος

27 Ιανουαρίου 2009

Ερευνητικά Ενδιαφέροντα

- Αριθμητική Γεωμετρία.

Ερευνητικά Ενδιαφέροντα

- Αριθμητική Γεωμετρία.
- Θεωρία Αριθμών (Διοφαντικές Εξισώσεις, Αναγωγικές Ακολουθίες, Ελλειπτικές καμπύλες)

Αριθμητική Γεωμετρία.

- Έχω ασχοληθεί με ένα βασικό θεώρημα της Αριθμητικής γεωμετρίας, το θεώρημα των Chevalley-Weil. Το θεώρημα αυτό αφορά μη διακλαδιζόμενους μορφισμούς επί κανονικών αλγεβρικών πολλαπλοτήτων. Δίνουμε μια ποσοτική εκδοχή του για την περίπτωση όπου οι πολλαπλότητες έχουν διάσταση 1, δηλ. για την περίπτωση ομαλών καμπύλων.

Αριθμητική Γεωμετρία.

- Έχω ασχολήθει με ένα βασικό θεώρημα της Αριθμητικής γεωμετρίας, το θεώρημα των Chevalley-Weil. Το θεώρημα αυτό αφορά μη διακλαδιζόμενους μορφισμούς επί κανονικών αλγεβρικών πολλαπλοτήτων. Δίνουμε μια ποσοτική εκδοχή του για την περίπτωση όπου οι πολλαπλότητες έχουν διάσταση 1, δηλ. για την περίπτωση ομαλών καμπύλων.
- **Θεώρημα των Chevalley-Weil** Ας είναι $\Phi : \bar{C} \to C$ ένας μη διακλαδιζόμενος μορφισμός αφφινικών ανάγωγων και ομαλών καμπύλων ορισμένων επί ενός σώματος αριθμών K. Τότε υπάρχει πεπερασμένη επέκταση L του K τέτοια ώστε $\Phi^{-1}(C(O_K)) \subset \bar{C}(L)$.

Αριθμητική Γεωμετρία.

- Έχω ασχολήθει με ένα βασικό θεώρημα της Αριθμητικής γεωμετρίας, το θεώρημα των Chevalley-Weil. Το θεώρημα αυτό αφορά μη διακλαδιζόμενους μορφισμούς επί κανονικών αλγεβρικών πολλαπλοτήτων. Δίνουμε μια ποσοτική εκδοχή του για την περίπτωση όπου οι πολλαπλότητες έχουν διάσταση 1, δηλ. για την περίπτωση ομαλών καμπύλων.
- **Θεώρημα των Chevalley-Weil** Ας είναι $\Phi : \bar{C} \to C$ ένας μη διακλαδιζόμενος μορφισμός αφφινικών ανάγωγων και ομαλών καμπύλων ορισμένων επί ενός σώματος αριθμών K. Τότε υπάρχει πεπερασμένη επέκταση L του K τέτοια ώστε $\Phi^{-1}(C(O_K)) \subset \bar{C}(L)$.
- Το Θεώρημα αυτό έχει εφαρμογές στις διοφαντικές εξισώσεις και στην μελέτη ελλειπτικών καμπύλων (Θεώρημα των Mordell-Weil).

Θεώρημα των Chevalley-Weil

Το Θεώρημα των Chevalley-Weil.
Έστω K σώμα αριθμών βαθμού d_K. Με $\mathbb{O}_K$ συμβολίζουμε τον δακτύλιο των ακεραίων του K και με $\bar{K}$ μια αλγεβρική θήκη του K. Υπενθυμίζουμε ότι μια αλγεβρική πολλαπλότητα V ονομάζεται κανονική αν ο δακτύλιος των κανονικών συναρτήσεων της είναι ακέραια κλειστός. Ας είναι $V, \bar{V}$ δύο αλγεβρικές κανονικές αφφινικές πολλαπλότητες. Έστω ο μορφισμός $\Phi : \bar{V} \to V$, μη διακλαδιζόμενος και Zariski-πυκνός μέσα στην V. Τότε υπάρχει πεπερασμένη επέκταση L του σώματος K τέτοια ώστε $\Phi^{-1}(C(\mathbb{O}_K)) \subset \bar{C}(L)$.

Θεώρημα των Chevalley-Weil

Η ποσοτική εκδοχή που δώσαμε, για την περίπτωση των καμπύλων, για το Θεώρημα των Chevalley-Weil είναι η παρακάτω.
Ας είναι $C, \bar{C}$ δύο ανάγωγες αφφινικές ομαλές καμπύλες ορισμένες επί του σώματος αριθμών K. Ας είναι $\Phi : \bar{C} \to C$, ένας μη διακλαδιζόμενος μορφισμός βαθμού n. Αν $P \in C(\mathbb{O}_K)$, $Q \in \Phi^{-1}(P)$ και $L = K(Q)$, τότε η απόλυτη διακρίνουσα D_L του L είναι

$$|D_L| \leq \Omega(H_{af}(\bar{F})H_{af}(F)H(R)|D_K| \deg F)^{7\omega^{12}(2\deg F)^{15}},$$

όπου $\omega = \max(\deg F, \deg \bar{F}, \deg \Phi, \deg \Phi_1, \deg \Phi_2)$, και Ω σταθερά που εξαρτάται από το σώμα K και τις καμπύλες $C, \bar{C}$.

Εφαρμογές

- Έστω η καμπύλη που ορίζεται από την εξίσωση $y^{2k} = x(Ax + Bx^n y^r),\ A, B \in \mathbb{O}_K$. Με χρήση του θεωρήματος Chevalley-Weil μπορούμε να βρούμε ένα φράγμα για τα σημεία της πάνω στο δακτύλιο των ακεραίων.

Εφαρμογές

- Έστω η καμπύλη που ορίζεται από την εξίσωση $y^{2k} = x(Ax + Bx^n y^r),\ A, B \in \mathbb{O}_K$. Με χρήση του θεωρήματος Chevalley-Weil μπορούμε να βρούμε ένα φράγμα για τα σημεία της πάνω στο δακτύλιο των ακεραίων.
- Η καμπύλη είναι ανάγωγη και ομαλή.

Εφαρμογές

- Έστω η καμπύλη που ορίζεται από την εξίσωση $y^{2k} = x(Ax + Bx^n y^r),\ A, B \in \mathbb{O}_K$. Με χρήση του θεωρήματος Chevalley-Weil μπορούμε να βρούμε ένα φράγμα για τα σημεία της πάνω στο δακτύλιο των ακεραίων.
- Η καμπύλη είναι ανάγωγη και ομαλή.
- Η απεικόνιση $\Phi : \bar{C} \to C,\ \bar{C} : \bar{F} = \bar{y}^{2k} - B\bar{x}^{2kn+r}\bar{y}^r - A = 0.$ $\Phi(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}^{2k}, \bar{x}\bar{y})$, είναι μη διακλαδιζόμενος μορφισμός.

Εφαρμογές

- Έστω η καμπύλη που ορίζεται από την εξίσωση $y^{2k} = x(Ax + Bx^n y^r),\ A, B \in \mathbb{O}_K$. Με χρήση του θεωρήματος Chevalley-Weil μπορούμε να βρούμε ένα φράγμα για τα σημεία της πάνω στο δακτύλιο των ακεραίων.
- Η καμπύλη είναι ανάγωγη και ομαλή.
- Η απεικόνιση $\Phi : \bar{C} \to C,\ \bar{C} : \bar{F} = \bar{y}^{2k} - B\bar{x}^{2kn+r}\bar{y}^r - A = 0$. $\Phi(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}^{2k}, \bar{x}\bar{y})$, είναι μη διακλαδιζόμενος μορφισμός.
- Κάθε $K-$ακέραιο σημείο της C προκύπτει απο κάποιο $L-$ακέραιο σημείο της $\bar{C}$.

Εφαρμογές

- Έστω η καμπύλη που ορίζεται από την εξίσωση $y^{2k} = x(Ax + Bx^n y^r)$, $A, B \in \mathbb{O}_K$. Με χρήση του θεωρήματος Chevalley-Weil μπορούμε να βρούμε ένα φράγμα για τα σημεία της πάνω στο δακτύλιο των ακεραίων.
- Η καμπύλη είναι ανάγωγη και ομαλή.
- Η απεικόνιση $\Phi : \bar{C} \to C$, $\bar{C} : \bar{F} = \bar{y}^{2k} - B\bar{x}^{2kn+r}\bar{y}^r - A = 0$. $\Phi(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}^{2k}, \bar{x}\bar{y})$, είναι μη διακλαδιζόμενος μορφισμός.
- Κάθε $K-$ακέραιο σημείο της C προκύπτει απο κάποιο $L-$ακέραιο σημείο της $\bar{C}$.
- Απο την ποσοτική εκδοχή του θεωρήματος Chevalley-Weil βρίσκουμε $|\Delta_L| < (10 d_K |\Delta_K| \deg F)^{(2 \deg F)^{30}}$.

Εφαρμογές

- Έστω η καμπύλη που ορίζεται από την εξίσωση $y^{2k} = x(Ax + Bx^n y^r)$, $A, B \in \mathbb{O}_K$. Με χρήση του θεωρήματος Chevalley-Weil μπορούμε να βρούμε ένα φράγμα για τα σημεία της πάνω στο δακτύλιο των ακεραίων.
- Η καμπύλη είναι ανάγωγη και ομαλή.
- Η απεικόνιση $\Phi : \bar{C} \to C$, $\bar{C} : \bar{F} = \bar{y}^{2k} - B\bar{x}^{2kn+r}\bar{y}^r - A = 0$. $\Phi(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}^{2k}, \bar{x}\bar{y})$, είναι μη διακλαδιζόμενος μορφισμός.
- Κάθε $K-$ακέραιο σημείο της C προκύπτει απο κάποιο $L-$ακέραιο σημείο της $\bar{C}$.
- Απο την ποσοτική εκδοχή του θεωρήματος Chevalley-Weil βρίσκουμε $|\Delta_L| < (10 d_K |\Delta_K| \deg F)^{(2 \deg F)^{30}}$.
- Τα $L-$ακέραια της $\bar{C}$, μπορούν να βρεθούν με την μέθοδο του Baker, επομένως και τα $K-$ακέραια σημεία της C.

Διοφαντικές Εξισώσεις

- Έχω ασχοληθεί με την μελέτη των ακέραιων σημείων επί ελλειπτικών καμπύλων $C : y^2 = x^3 + Ax + B$, και γενικότερα με διοφαντικές εξισώσεις της μορφής $F(x, y) = 0$.

Διοφαντικές Εξισώσεις

- Έχω ασχοληθεί με την μελέτη των ακέραιων σημείων επί ελλειπτικών καμπύλων $C : y^2 = x^3 + Ax + B$, και γενικότερα με διοφαντικές εξισώσεις της μορφής $F(x, y) = 0$.

Ελλειπτικές Καμπύλες

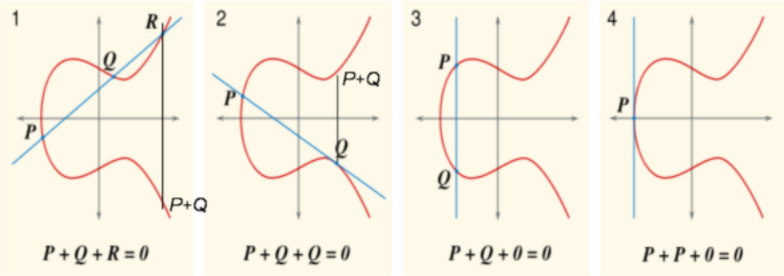
Έστω K ένα σώμα αριθμών και $\overline{K}$ μια αλγεβρική του θήκη. Ας είναι E η αλγεβρική καμπύλη που ορίζεται από την εξίσωση

$$E : y^2 = x^3 + Ax + B, \quad A, B \in K, \quad 4A^3 + 27B^2 \neq 0.$$

Ελλειπτική καμπύλη επί του K είναι το σύνολο των σημείων της E με συντεταγμένες από το K μαζί με το σημείο $[0 : 1 : 0]$, στο άπειρο του προβολικού της μοντέλου.

Ελλειπτικές Καμπύλες

Επί των $K-$σημείων της μπορούμε να ορίσουμε μια πράξη ως εξής :

- 

Σχήμα: Το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης είναι το σημείο στο άπειρο, το οποίο σε προβολικές συν/νες είναι το σημείο $\mathbf{0} = [0 : 1 : 0]$.

Ελλειπτικές Καμπύλες

- Η πράξη αυτή είναι αβελιανή. Ο Mordell απέδειξε ότι αν $K = \mathbb{Q}$ τότε είναι πεπερασμένα παραγόμενη και ο Neron γενίκευσε για την περίπτωση όπου $K \neq \mathbb{Q}$. Άρα

$$E(K) \simeq E_{torsion}(K) \oplus \mathbb{Z}^r.$$

Το r ονομάζεται τάξη (rank) της ελλειπτικής πάνω στο K.

Ελλειπτικές Καμπύλες

- Η πράξη αυτή είναι αβελιανή. Ο Mordell απέδειξε ότι αν $K = \mathbb{Q}$ τότε είναι πεπερασμένα παραγόμενη και ο Neron γενίκευσε για την περίπτωση όπου $K \neq \mathbb{Q}$. Άρα

$$E(K) \simeq E_{torsion}(K) \oplus \mathbb{Z}^r.$$

  Το r ονομάζεται τάξη (rank) της ελλειπτικής πάνω στο K.
- Το σύνολο $E_{torsion}(\mathbb{Q})$ ελέγχεται από το θέωρημα των Lutz-Nagel :
  Αν $(a, b) \in E_{torsion}(\mathbb{Z})$ τότε είτε $b = 0$ είτε $b | \Delta_E$ όπου $\Delta_E = -16(4A^3 + 27B^2)$.
  Ellisabeth Lutz (1937). Sur L'equation $y^2 = x^2 - Ax - B$ dans les corps p-adiques. J. Reine Angew. Math. 177: $237 - 247$.

Ελλειπτικές Καμπύλες

- Η εύρεση της τάξης μιας ελλειπτικής επί του $\mathbb{Q}$ είναι, στην πράξη, τις περισσότερες φορές εύκολος. Γενικά όμως, δεν υπάρχει αλγόριθμος για την εύρεση της τάξης μιας ελλειπτικής καμπύλης. Η διαδικασία αυτή είναι ακόμη δυσκολότερη επί ενός σώματος αριθμών αν ο βαθμός του είναι μεγάλος. Ακόμη όμως και αν έχουμε βρεί την τάξη η εύρεση μιας βάσης δηλ. r ανεξάρτητων σημείων, άπειρης τάξης, επί της ελλειπτικής δεν είναι εύκολο πρόβλημα. Ειδικότερα, δεν υπάρχει αλγόριθμος που να μας δίνει αυτή την βάση στους ρητούς. Στην πράξη όμως συνήθως μπορούμε να τη βρούμε (2-descend method).

Ελλειπτικές Καμπύλες

- Αν η καμπύλη μας έχει τάξη μηδέν, τότε ο προσδιορισμός των ακέραιων (και ρητών) σημείων του είναι πολύ απλός (εφαρμογή του Lutz-Nagel θεωρήματος). Το πλήθος των ακέραιων σημείων μιας ελλειπτικής (επί ενος τυχαίου σώματος αριθμών) είναι πάντα πεπερασμένο (θεώρημα του Siegel). Τα ρητά είναι απείρου πλήθους, με την προυπόθεση ότι έχει τάξη τουλάχιστον ένα (επί του σώματος αριθμών).

Ελλειπτικές Καμπύλες

- Η μελέτη των ακέραιων σημείων μιας ελλειπτικής γίνεται με αρκετές μεθόδους. Η πιο γενική είναι αυτή των Tzanakis-Stroker και Gebel-Petho-Zimmer- η οποία ονομάζεται *μέθοδος των ελλειπτικών λογαρίθμων*. Η μέθοδος αυτή είναι γνώστη από παλαιότερα για παραδειγμα από τον Serge Lang. Το μειονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι απαιτεί την εύρεση μιας βάσης της ελλειπτικής. Κατόπιν, υπάρχεί η *μέθοδος Thue* η οποία τελικά χρησιμοποιεί την μέθοδο του Baker. Αυτή η μέθοδος δεν δουλευει πάντα. Μέτα υπάρχουν μέθοδοι ad hoc που χρησιμοποίουν στοιχειώδη θεωρία αριθμών (σύμβολο Legendre, αναγωγή $\mod p$ κ.α.).

Ελλειπτικές Καμπύλες

- Έχουμε αναπτύξει μια "νέα" τεχνική για την επίλυση των ελλειπτικών επί των ακεραίων την μέθοδο διπλασιασμού σημείου του Chabauty. Η μέθοδος αύτη πρώτη φορά εμφανίζεται στην εργασία του Chabauty *Démonstration de quelques lemmes de rehaussement. (French) C. R. Acad. Sci. Paris 217, (1943)* 413 – 415.

Τετράγωνα στους αριθμούς Pell

- Θα εφαρμόσουμε την μέθοδο του Chabauty για να βρούμε τα ακέραια σημεία της ελλειπτικής $y^2 = x^3 - 2x$. Η επίλυσή της μας δίνει τους όρους της ακολουθίας P_n, των *Pell* αριθμών, που είναι τετράγωνα.

Τετράγωνα στους αριθμούς Pell

- Η ακολουθία *Pell* ορίζεται από τον αναγωγικό τύπο :

$$P_0 = 0, \; P_1 = 1, \; P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}.$$

Μερικοί όροι αυτής της ακολουθίας είναι :

$$0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, 13860, \ldots$$

Ελλειπτικές Καμπύλες

- Ο γενικός όρος γράφεται

$$P_n = \frac{\epsilon^n - \bar{\epsilon}^n}{2\sqrt{2}}, \ \epsilon = 1 + \sqrt{2}.$$

Επίσης παρατηρούμε ότι

$$\epsilon^n = S_n + P_n\sqrt{2},$$

όπου

$$S_n = \frac{\epsilon^n + \bar{\epsilon}^n}{2},$$

Οι αριθμοί S_n/P_n είναι τα συγκλίνωντα κλάσματα του αριθμού $\sqrt{2}$. Το πρόβλημα με το οποίο θα ασχοληθούμε είναι η εύρεση τετραγώνων των αριθμών *Pell*.

Ελλειπτικές Καμπύλες

Δηλ. ενδιαφερόμαστε για την λύση της διοφαντικής εξίσωσης :

$$P_n = x^2 \quad (x > 0).$$

Εφόσον $S_n^2 - 2P_n^2 = \pm 1$, και $P_n = x^2$ προκύπτει η διοφαντική εξίσωση $L : y^2 = 2x^4 \pm 1$. Για να λύσουμε την εξίσωση $L : y^2 = 2x^4 - 1$ είναι αρκετό να λύσουμε την ελλειπτική $C : y^2 = x^3 - 2x$. Πράγματι, αν (x, y) ακέραια λύση της L, τότε το ακέραιο σημείο

$$P = (a, b) = (2x^2, 2xy)$$

ανήκει στην C. Υποθέτουμε ότι $|a| \geq 2$. Έστω $R = (s, t)$ σημείο της C τέτοιο ώστε $2R = P$. Τότε

$$a = \frac{(s^2 + 2)^2}{4s(s^2 - 2)} \text{ (duplication formula)}$$

Ελλειπτικές Καμπύλες

Επομένως το s είναι ρίζα του πολυωνύμου

$$\Theta_a(S) = S^4 - 4aS^3 + 4S^2 + 8aS + 4.$$

Οι ρίζες του $\Theta_a(S)$ είναι:

$$a \pm \sqrt{a^2 - 2} \pm \sqrt{2a^2 \pm 2a\sqrt{a^2 - 2}},$$

όπου το πρώτο $\pm$ συμπίπτει με το τρίτο.

Ελλειπτικές Καμπύλες

Θα υπολογίσουμε τα πιθανά σώματα $L = \mathbb{Q}(s)$. Κατόπιν τα στοιχεία (του L)

$$u = \frac{s+\sqrt{2}}{2}, \;\; v = \frac{\sqrt{2}-s}{2},$$

θα αποδείξουμε ότι είναι μονάδες στο σώμα L και ικανοποιουν την εξίσωση των μονάδων $X + Y = \sqrt{2}$. Μετά θα κάνουμε χρήση του αλγορίθμου του Wildanger, που είναι υλοποιημένος στο αλγεβρικό υπολογιστικό σύστημμα *Magma* καθώς και στο *Kash*, για να λύσουμε τις εξισώσεις των μονάδων. Επομένως θα βρούμε τα s και αυτές τις τιμές θα τις αντικαταστήσουμε στη σχέση

$$\frac{(s^2+2)^2}{4s(s^2-2)}$$

και θα πάρουμε τα ακέραια σημεία της καμπύλης C.

Ελλειπτικές Καμπύλες

Το σώμα $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})$. Αυτό μπορεί να υπολογιστεί από τις ιδιότητες που έχει το σώμα L.

- Από το κριτήριο $Neron - Ogg - Shafarevich$ έχουμε ότι το σώμα L είναι μη διακλαδιζόμενο έξω από το σύνολο $S = \{2, \infty\}$.

Ελλειπτικές Καμπύλες

Το σώμα $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})$. Αυτό μπορεί να υπολογιστεί από τις ιδιότητες που έχει το σώμα L.

- Από το κριτήριο $Neron - Ogg - Shafarevich$ έχουμε ότι το σώμα L είναι μη διακλαδιζόμενο έξω από το σύνολο $S = \{2, \infty\}$.
- Εφόσον το $\Theta_a(S)$ είναι ανάγωγο τετάρτου βαθμού αναζητούμε όλα τα σώματα που είναι τετάρτου βαθμού και μη διακλαδιζόμενα έξω από το S.

Ελλειπτικές Καμπύλες

Το σώμα $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})$. Αυτό μπορεί να υπολογιστεί από τις ιδιότητες που έχει το σώμα L.

- Από το κριτήριο *Neron* − *Ogg* − *Shafarevich* έχουμε ότι το σώμα L είναι μη διακλαδιζόμενο έξω από το σύνολο $S = \{2, \infty\}$.
- Εφόσον το $\Theta_a(S)$ είναι ανάγωγο τετάρτου βαθμού αναζητούμε όλα τα σώματα που είναι τετάρτου βαθμού και μη διακλαδιζόμενα έξω από το S.
- Μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε ότι το σώμα L είναι $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})$.

Ελλειπτικές Καμπύλες

Κάνοντας χρήση του πολυωνύμου

$$\lambda(S) = \frac{1}{256} res_W(\Theta_a(2S \mp W), W^2 - 2) =$$

$$S^8 - 4aS^7 + 4a^2S^6 + 4aS^5 + 2S^4(1 - 5a^2) + 4aS^3 + 4a^2S^2 - 4aS + 1,$$

βρίσκουμε ότι η νόρμα (επί του L) των στοιχείων

$$u = \frac{s + \sqrt{2}}{2}, \; v = \frac{\sqrt{2} - s}{2},$$

διαιρεί το 1, επομένως είναι μονάδες του L. Συνεπώς ικανοποιούν την εξίσωση των μονάδων (στο σώμα L)

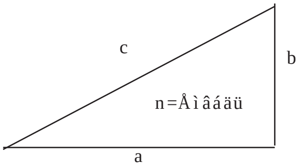
$$X + Y = \sqrt{2}$$

Ελλειπτικές Καμπύλες

Με χρήση του αλγεβρικού υπολογιστικού πακέτου $\mathtt{Kant - Kash}$ βρίσκουμε ότι $a = 2$ ή 338. Επειδή $a = 2x^2$ παίρνουμε ότι $|x| = 1$ ή 13. Επομένως τα τετράγωνα των Pell αριθμών είναι $P_1 = 1,\ P_7 = 169.$

Άλλες εφαρμογές της μεθόδου του Chabauty

Έστω n ένας φυσικός αριθμός. Αν υπάρχει ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές ρητού μήκους εμβαδού n, τότε ο n ονομάζεται ορθογώνιος αριθμός. Από την ιστορία του Dickson μαθαίνουμε ότι το πρόβλημα αυτό εμφανίζεται πρώτη φορά στο χειρόγραφο ένος Άραβα το 962 μ.χ.



Για παράδειγμα αν $n = 1131$, τότε

$$a = 104, \ \ b = \frac{87}{4}, \ \ c = \frac{425}{4}.$$

Δηλαδή ο n είναι ορθογώνιος αριθμός.

Άλλες εφαρμογές της μεθόδου του Chabauty

- Ενώ, αν $n = 469409$, τότε

$$a = \frac{89880}{29}, \; b = \frac{127223}{420}, \; c = \frac{37929467}{12180}.$$

Άλλες εφαρμογές της μεθόδου του Chabauty

- Ενώ, αν $n = 469409$, τότε
$$a = \frac{89880}{29}, \quad b = \frac{127223}{420}, \quad c = \frac{37929467}{12180}.$$
- Το πρόβλημα εύρεσης ορθογώνιων αριθμών συνδέεται άμεσα με την ελλειπτική καμπύλη $y^2 = x^3 - n^2x$. Ισχύει $c^2 = a^2 + b^2, \quad n = \frac{ab}{2}$. Αν θέσουμε
$$x = n(a+c)/2, \quad y = 2n^2(a+c)/b^2$$
παρατηρούμε ότι το $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ ικανοποιει την εξίσωση: $y^2 = x^3 - n^2x$.

Άλλες εφαρμογές της μεθόδου του Chabauty

- Ενώ, αν $n = 469409$, τότε
$$a = \frac{89880}{29}, \ b = \frac{127223}{420}, \ c = \frac{37929467}{12180}.$$
- Το πρόβλημα εύρεσης ορθογώνιων αριθμών συνδέεται άμεσα με την ελλειπτική καμπύλη $y^2 = x^3 - n^2x$. Ισχύει $c^2 = a^2 + b^2, \quad n = \frac{ab}{2}$. Αν θέσουμε
$$x = n(a+c)/2, \quad y = 2n^2(a+c)/b^2$$
παρατηρούμε ότι το $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ ικανοποιει την εξίσωση: $y^2 = x^3 - n^2x$.
- Και αντίστροφα αν (x, y) με $y \neq 0$ ρητή λύση της $y^2 = x^3 - n^2x$, τότε οι αριθμοί
$$a = (x^2 - n^2)/y, \ b = 2n/y, \ c = (x^2 + n^2)/y,$$
είναι πλευρές ορθογωνίου τριγώνου εμβαδού n.

Άλλες εφαρμογές της μεθόδου του Chabauty

- Οι καμπύλες της μορφής $E_n : y^2 = x^3 - n^2x$ μπορούν να μελετηθούν με την μέθοδο του Chabauty.

Άλλες εφαρμογές της μεθόδου του Chabauty

- Οι καμπύλες της μορφής $E_n : y^2 = x^3 - n^2x$ μπορούν να μελετηθούν με την μέθοδο του Chabauty.
- Για παράδειγμα υπολογίσαμε για τις παρακάτω τιμές του n τα ακέραια σημεία της E_n.

Άλλες εφαρμογές της μεθόδου του Chabauty

- Οι καμπύλες της μορφής $E_n : y^2 = x^3 - n^2x$ μπορούν να μελετηθούν με την μέθοδο του Chabauty.
- Για παράδειγμα υπολογίσαμε για τις παρακάτω τιμές του n τα ακέραια σημεία της E_n.
- $E_6 = \{(0,0), (\pm 6, 0), (-3, \pm 9), (-2, \pm 8),$
  $(12, \pm 36), (18, \pm 72), (294, \pm 5040)\}$
  $E_{30} =$
  $\{(0,0), (\pm 30, 0), (-6, \pm 72), (-20, \pm 100), (45, \pm 225), (150, \pm 1800)\}$
  $E_{255} =$
  $\{(0,0), (\pm 255, 0), (-225, \pm 1800), (289, \pm 2312), (4080, \pm 260100)\}$

Άλλες εφαρμογές της μεθόδου του Chabauty

- Επίσης με την μέθοδο του Chabauty μπορούμε να βρούμε αριθμούς *Pell* της μορφής px^2, όπου p πρώτος αριθμός

Άλλες εφαρμογές της μεθόδου του Chabauty

- Επίσης με την μέθοδο του Chabauty μπορούμε να βρούμε αριθμούς *Pell* της μορφής px^2, όπου p πρώτος αριθμός
- Για παράδειγμα υπολογίσαμε ότι για όλους τους πρώτους $1 < p < 2000$ οι μόνοι αριθμοί *Pell* της μορφής px^2 είναι $P_3 = 5,\ P_4 = 3 \cdot 2^2,\ P_5 = 29.$

Προβλήματα υπό έρευνα

- Επίσης έχω ασχοληθεί με το πρόβλημα της εύρεσης φραγμάτων για το πλήθος των ακέραιων σημείων μιας Ελλειπτικής καμπύλης και μελέτησα την συνάφεια του προβλήματος με την εικασία του *Schimdt*.

Προβλήματα υπό έρευνα

- Επίσης έχω ασχοληθεί με το πρόβλημα της εύρεσης φραγμάτων για το πλήθος των ακέραιων σημείων μιας Ελλειπτικής καμπύλης και μελέτησα την συνάφεια του προβλήματος με την εικασία του *Schimdt*.
- Επίσης υπό έρευνα (σε συνεργασία με τον Κ.Τζανάκη) είναι η μελέτη καμπύλων της μορφής $y^2 = Ax^{2m} + B$. Καθώς και η μελέτη (σε συνεργασία με τον Κ.Πουλάκη) των αριθμών *Fibonacci* της μορφής px^2.

Προβλήματα υπό έρευνα

- Επίσης έχω ασχοληθεί με το πρόβλημα της εύρεσης φραγμάτων για το πλήθος των ακέραιων σημείων μιας Ελλειπτικής καμπύλης και μελέτησα την συνάφεια του προβλήματος με την εικασία του *Schimdt*.
- Επίσης υπό έρευνα (σε συνεργασία με τον Κ.Τζανάκη) είναι η μελέτη καμπύλων της μορφής $y^2 = Ax^{2m} + B$. Καθώς και η μελέτη (σε συνεργασία με τον Κ.Πουλάκη) των αριθμών *Fibonacci* της μορφής px^2.
- Τέλος εξίσώσεις της μορφής $y^n + x^{kn} = r, \ (r \in \mathbb{Z})$, μελετώνται με παραλαγή της μεθόδου του *Runge*.

Προβλήματα υπό έρευνα

- Επίσης έχω ασχοληθεί με το πρόβλημα της εύρεσης φραγμάτων για το πλήθος των ακέραιων σημείων μιας Ελλειπτικής καμπύλης και μελέτησα την συνάφεια του προβλήματος με την εικασία του *Schimdt*.
- Επίσης υπό έρευνα (σε συνεργασία με τον Κ.Τζανάκη) είναι η μελέτη καμπύλων της μορφής $y^2 = Ax^{2m} + B$. Καθώς και η μελέτη (σε συνεργασία με τον Κ.Πουλάκη) των αριθμών *Fibonacci* της μορφής px^2.
- Τέλος εξίσώσεις της μορφής $y^n + x^{kn} = r, \ (r \in \mathbb{Z})$, μελετώνται με παραλαγή της μεθόδου του *Runge*.
- Ευχαριστώ!