TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN - ĐHQG HCM

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

BÀI LÀM GIỮA KỲ

Phạm Hải Dương - 19120490

TP.HCM, ngày 28 tháng 4 năm 2022

Bài 1

a. Tính giá trị lớn nhất của lợi nhuận bằng phương pháp đơn hình trong quy hoạch tuyến tính

- Ta có:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 2x_2 + 3x3 \to max$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$b^T = \begin{bmatrix} 14 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- Ta lập được hệ các ràng buộc:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 14 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 16 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 16 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

- Đầu tiên ta thêm biến để có các đẳng thức:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 14 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 16 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_6 = 16 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

- Bảng đơn hình:

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
CS	HS	PA	2	2	3	0	0	0
x_4	0	14	1	2	-1	1	0	0
x_5	0	16	2	-2	3	0	1	0
x_6	0	16	-1	4	2	0	0	1
max	$\Delta_0 = 0$		-2	-2	-3	0	0	0

Nhận xét: x_3 vào, x_5 ra, số 3 là phần tử xoay. Thực hiện phép biến đổi:

$$d_2 \leftarrow \frac{d_2}{3}, d_1 \leftarrow d_1 + \frac{1}{3}d_2, d_3 = d_3 - \frac{2}{3}d_2$$

- Ta tính lại được bảng đơn hình mới:

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
CS	HS	PA	2	2	3	0	0	0
x_4	0	$\frac{58}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	0
x_3	3	$\frac{16}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0
x_6	0	$\frac{16}{3}$	$-\frac{7}{3}$	$\frac{16}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	1
max	$\Delta_0 = 16$		0	-4	0	0	0	0

Nhận xét: x_2 vào, x_6 ra, số $\frac{16}{3}$ là phần tử xoay. Thực hiện phép biến đổi:

$$d_3 \leftarrow \frac{d_3}{\frac{16}{3}}, d_1 \leftarrow d_1 - \frac{4}{3}d_3, d_2 \leftarrow d_2 + \frac{2}{3}d_3$$

- Ta tính lại được bảng đơn hình mới:

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
CS	HS	PA	2	2	3	0	0	0
x_4	0	18	$\frac{9}{4}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$
x_3	3	6	$\frac{3}{8}$	0	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
x_2	2	1	$-\frac{7}{16}$	1	0	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$
max	$\Delta_0 = 20$		$-\frac{7}{4}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$

Nhận xét: x_1 vào, x_4 ra, số $\frac{9}{4}$ là phần tử xoay. Thực hiện phép biến đổi:

$$d_1 \leftarrow \frac{d_1}{\frac{9}{4}}, d_2 \leftarrow d_2 - \frac{3}{8}d_1, d_3 \leftarrow d_3 + \frac{7}{16}d_1$$

- Ta tính lại được bảng đơn hình mới:

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
CS	HS	PA	2	2	3	0	0	0
x_1	2	8	1	0	0	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$-\frac{1}{9}$
x_3	3	3	0	0	1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
x_2	2	$\frac{9}{2}$	0	1	0	$\frac{7}{36}$	$-\frac{1}{36}$	$\frac{5}{36}$
max	$\Delta_0 = 34$		0	0	0	$\frac{7}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{5}{9}$

Kết luận: max là 34, đạt được khi $x_1 = 8, x_2 = \frac{9}{2}, x_3 = 3$.

b. Sử dụng thư viện scipy của Python để giải lại bài toán trên

```
from scipy.optimize import linprog

c = [2, 2, 3]
c_max = [-i for i in c]
b = [14, 16, 16]
A = [[1, 2, -1], [2, -2, 3], [-1, 4, 2]]

x1_bnds = (0, None)
x2_bnds = (0, None)
x3_bnds = (0, None)

res = linprog(c_max, A_ub=A, b_ub=b, bounds=(x1_bnds, x2_bnds, x3_bnds),
    method='simplex')

print('Optimal value:', res.fun * -1, '\nX:', res.x)
```

Kết quả:

```
Optimal value: 34.0
X: [8.  4.5 3. ]
```

Bài 2

$$f(x_1, x_2, x_3) = 29x + 4y \rightarrow max$$

Mã số sinh viên: 19120490 $\rightarrow (a, b, c, d) = (9, 9, 4, 2)$

a. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính bằng cách thích hợp

$$\begin{cases} 9x - 2y \leq 23 \\ 4x - 9y \geq -22 \\ x + y \geq 5 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Thêm lần lượt ba biến z, t, u để được các đẳng thức. Sau đó thêm biến giả v vào ràng buộc và hàm mục tiêu.

$$f(x_1, x_2, x_3) = 29x + 4y - Mv \rightarrow max$$

$$\begin{cases} 9x - 2y + z = 23 \\ -4x + 9y + t = 22 \\ x + y - u + v = 5 \end{cases}$$

- Bảng đơn hình:

			x	y	z	t	u	v
CS	HS	PA	29	4	0	0	0	$-M$
z	0	23	9	-2	1	0	0	0
t	0	22	-4	9	0	1	0	0
v	$-M$	5	1	1	0	0	-1	1
max	$\Delta_0 = -5M$		$-M-29$	$-M-4$	0	0	M	0

Nhận xét: x vào, z ra, số 9 là phần tử xoay. Thực hiện phép biến đổi:

$$d_1 \leftarrow \frac{1}{9}d_1, d_2 \leftarrow d_2 + 4d_1, d_3 \leftarrow d_3 - d_1$$

- Ta tính lại được bảng đơn hình mới:

			x	y	z	t	u	v
CS	HS	PA	29	4	0	0	0	$-M$
x	29	$\frac{23}{9}$	1	$-\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	0	0
t	0	$\frac{290}{9}$	0	$\frac{73}{9}$	$\frac{4}{9}$	1	0	0
v	-M	$\frac{22}{9}$	0	$\frac{11}{9}$	$-\frac{1}{9}$	0	-1	1
max	$\Delta_0 = \frac{667}{9} - \frac{22}{9}M$		0	$-\frac{11}{9}M - \frac{94}{9}$	$-\frac{1}{9}M + \frac{29}{9}$	0	M	0

Nhận xét: y vào, v ra, số $\frac{11}{9}$ là phần tử xoay. Thực hiện phép biến đổi:

$$d_3 \leftarrow \frac{d_3}{\frac{11}{9}}, d_1 \leftarrow d_1 + \frac{2}{9}d_3, d_2 \leftarrow d_2 - \frac{73}{9}d_3$$

- Ta tính lại được bảng đơn hình mới:

			x	y	z	t	u	v
CS	HS	PA	29	4	0	0	0	$-M$
x	29	3	1	0	$\frac{1}{11}$	0	$-\frac{2}{11}$	$\frac{2}{11}$
t	0	16	0	0	$\frac{13}{11}$	1	$\frac{73}{11}$	$\frac{73}{11}$
y	4	2	0	1	$-\frac{1}{11}$	0	$-\frac{9}{11}$	$\frac{9}{11}$
max	$\Delta_0 = 95$		0	0	$\frac{25}{11}$	0	$-\frac{94}{11}$	$\frac{94}{11} + M$

Nhận xét: u vào, t ra, số $\frac{73}{11}$ là phần tử xoay. Thực hiện phép biến đổi:

$$d_2 \leftarrow \frac{d_2}{\frac{73}{11}}, d_1 \leftarrow d_1 + \frac{2}{11}d_2, d_3 \leftarrow d_3 + \frac{9}{11}d_2$$

- Ta tính lại được bảng đơn hình mới:

			x	y	z	t	u	v
CS	HS	PA	29	4	0	0	0	$-M$
x	29	$\frac{251}{73}$	1	0	$\frac{9}{73}$	$\frac{2}{73}$	0	0
u	0	$\frac{176}{73}$	0	0	$\frac{13}{73}$	$\frac{11}{73}$	1	-1
y	4	$\frac{290}{73}$	0	1	$\frac{4}{73}$	$\frac{9}{73}$	0	0
max	$\Delta_0 = \frac{8439}{73}$		0	0	$\frac{277}{73}$	$\frac{94}{73}$	0	M

Kết luận: $\max = \frac{8439}{73}$, đạt được khi $x = \frac{251}{73}, y = \frac{290}{73}$.

b. Xác định tất cả các bộ (a, b, c, d) (lấy từ MSSV) có thể có, làm cho bài toán vô nghiệm

Dùng Python vét cạn tất cả các trường hợp có thể có.

```
import itertools
from scipy.optimize import linprog

stuff = [1, 9, 1, 2, 0, 4, 9, 0]

combinations_set = set()

for subset in itertools.combinations(stuff, 4):
  element = sorted(subset, reverse=True)
  combinations_set.add(tuple(element))

while len(combinations_set) != 0:
  element = combinations_set.pop();

  a_coef = element[0]
  b_coef = element[1]
  c_coef = element[2]
  d_coef = element[3]

  c = [29, 4]
  c_max = [-i for i in c]
  b = [23, 22, -5]
  A = [[a_coef, -d_coef], [-c_coef, b_coef], [-1, -1]]

  x1_bnds = (0, None)
  x2_bnds = (0, None)
  x3_bnds = (0, None)

  res = linprog(c_max, A_ub=A, b_ub=b, bounds=(x1_bnds, x2_bnds),
      method='simplex')

  if res.success == False:
    print(element)
```

Kết quả: không tìm được bộ (a, b, c, d) nào làm cho bài toán vô nghiệm.

Bài 3

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - x_2 + 4x_3 \to min$$

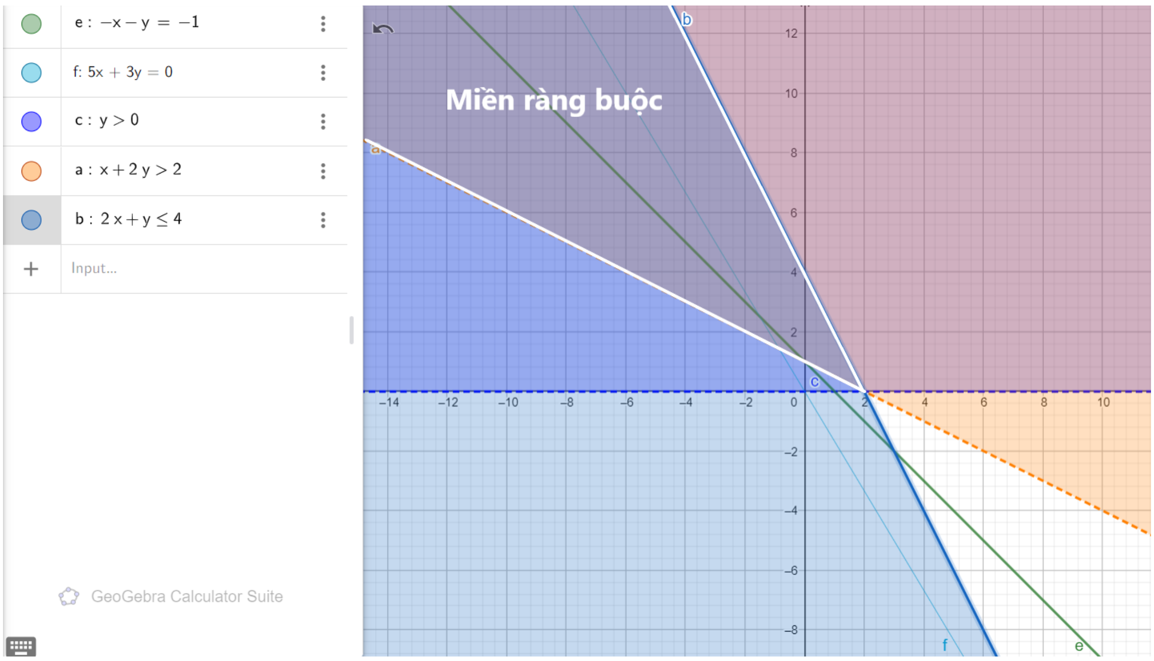
$$(P)\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 & (1) \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \geq 3 & (2) \\ x_1 \leq 0, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

a. Bài toán đối ngẫu của bài toán (P)

$$f(y_1, y_2) = 5y_1 + 3y_2 \to max$$

$$(D)\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 2 & (1) \\ -y_1 - y_2 = -1 & (2) \\ 2y_1 + y_2 \leq 4 & (3) \\ y_1 \in \mathbb{R}, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Nếu dùng phương pháp hình học thì việc giải (D) sẽ dễ dàng hơn so với (P), vì (D) chỉ gồm hai biến, dễ dàng biểu diễn trực quan trong mặt phẳng tọa độ Oxy.



Hình 1: Miền ràng buộc cho bài toán (D)

b. Người ta đã tính được phương án tối ưu của (D) ứng với hai số 0 và 1 nhưng chưa rõ giá trị nào ứng với biến nào. Không giải trực tiếp bài toán (P) hãy mô tả rõ các bước xác định phương án tối ưu cho bài toán (P) từ (D)

- Giả sử $y_1 = 0, y_2 = 1$, thay vào điều kiện (1) của (D) $\to$ thỏa mãn, vậy $y_1 = 0, y_2 = 1$.

- Theo định lý độ lệch bù:
  - Có $y_1 = 0$ nên không xét ràng buộc (1) của x.
  - Có $y_2 = 1 \neq 0$ nên dấu $=$ trong ràng buộc (2) của x phải xảy ra, tức là $2x_1 - x_2 + x_3 = 3$.
  - Thay bộ (0, 1) vào ràng buộc (1), (2) của y, thấy có dấu $=$ xảy ra nên không xét x_1, x_2.
  - Thay bộ (0, 1) vào ràng buộc (3) của y, thấy không có dấu $=$ xảy ra nên $x_3 = 0$.
  - Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

  - Giải hệ phương trình ta được: $x_1 = -2, x_2 = -7$, suy ra $min = 3$.

Hết./.