In [1]:

```
from matplotlib import pyplot as plt
import numpy as np
%matplotlib inline
```

1. Исследовать ряд на сходимость, используя признак д'Аламбера:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$

$a_n = \frac{n^n}{n!^2}$

$a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!^2}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n!^2}{(n+1)!^2 \cdot n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

Ряд сходится

2. Исследовать ряд на сходимость, используя радикальный признак Коши:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2}$

Ряд сходится

3. Исследовать ряд на сходимость, используя признак Лейбница:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+ln(n)}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n+ln(n)} = 0$

$|a_n| \geq |a_{n+1}|$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n+ln(n)} \right| = 0$

Ряд сходится абсолютно

4. Исследовать ряд на сходимость, используя признак Раабе:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n}$

$a_n = \frac{3^n}{2^n}$

$a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{2^{n+1}}$

$\lim_{n\to\infty} (n \cdot (\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1)) = \lim_{n\to\infty} n \cdot (\frac{3^n \cdot 2^{n+1}}{2^n \cdot 3^{n+1}} - 1) = \lim_{n\to\infty} n \cdot (\frac{2}{3} - 1) = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{3}n = -\infty$

Ряд расходится

5. Разложить функцию по Тейлору в единице:

$f(x) = ln(16x^2)$

$f(x) = ln(16x^2), \quad f(1) = ln(16)$

$f'(x) = \frac{1}{16x^2} \cdot 32x = \frac{2}{x}, \quad f'(1) = 2$

$f''(x) = -\frac{2}{x^2}, \quad f''(1) = -2$

$f'''(x) = \frac{4}{x^3}, \quad f'''(1) = 4$

$f^{(IV)}(x) = -\frac{12}{x^4}, \quad f^{(IV)}(1) = -12$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!} \cdot (x-a)^3 + \frac{f^{(IV)}(a)}{4!} \cdot (x-a)^4 + \ldots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k$

$f(x) = ln(16) + 2 \cdot (x-1) + \frac{-2}{2!} \cdot (x-1)^2 + \frac{4}{3!} \cdot (x-1)^3 + \frac{-12}{4!} \cdot (x-1)^4 + \ldots$

$f(x) = ln(16) + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2 \cdot (-1)^n}{n!} \cdot (x-1)^n$

6. * Дана функция

$f(x) = x^2$

a. Разложить функцию в ряд Фурье по косинусам на отрезке

$x \in [-\pi; \pi]$

$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot cos(nx) + b_n \cdot sin(nx))$

$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}$

$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot cos(nx)dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cdot cos(nx)dx = -\frac{4}{n^2}$

$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot sin(nx)dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cdot sin(nx)dx = 0$

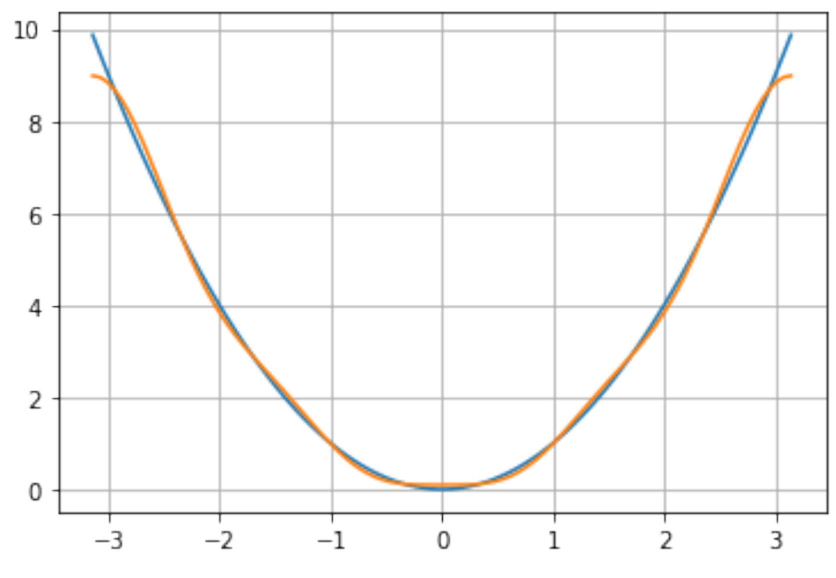
$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{n^2} cos(nx)$

b. Построить график функции и ее разложения

In [2]:

```
x = np.linspace(-np.pi, np.pi, 100)
f1 = x**2
f2 = (np.pi**2)/3 - 4 * np.cos(x) + np.cos(2 * x) - 0.4444 * np.cos(3 * x) + 0.25 * np.cos(4 * x)
plt.grid()
plt.plot(x, f1)
plt.plot(x, f2)

plt.show()
```



In [ ]: