In [1]:
```
import numpy as np
import scipy
import scipy.linalg
import scipy.optimize
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
```

Задача 1.

Найти собственные векторы и собственные значения для линейного оператора, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -6 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(-1-\lambda)(6-\lambda)+12=0,$$

$$\lambda^2 - 5\cdot\lambda = -6,$$

$$\lambda_1 = 2.\ \lambda_2 = 3.$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

1.

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} -x_1 - 6\cdot x_2 = 2x_1, \\ 2\cdot x_1 + 6\cdot x_2 = 2x_2. \end{cases}$$

$$x_1 = -2x_2.$$

$$\begin{cases} x_1 = -2, \\ x_2 = 1. \end{cases}$$

2.

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} -x_1 - 6\cdot x_2 = 3x_1, \\ 2\cdot x_1 + 6\cdot x_2 = 3x_2. \end{cases}$$

$$x_1 = -3\cdot x_2.$$

$$\begin{cases} x_1 = -3, \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

Собственное значение $\lambda_1 = 2$, собственный вектор (-2,1)

Собственное значение $\lambda_2 = 3$, собственный вектор (-3,2)

Задача 2.

Дан оператор поворота на 180 градусов, задаваемый матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Показать, что любой вектор является для него собственным.

Решение

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda = -1,$$

$$\begin{cases} -x_1 + 0 \cdot x_2 = -1 \cdot x_1, \\ 0 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 = -1 \cdot x_2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 = -x_1, \\ -x_2 = -x_2. \end{cases}$$

Равенство верно при любых x_1 и x_2

Любой вектор является собственным вектором линейного оператора, заданного матрицей A

In [ ]:

```

```

Задача 3.

Пусть линейный оператор задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Установить, является ли вектор $x = (1, 1)$ собственным вектором этого линейного оператора.

Решение

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} 1 + 1 = 1 \cdot \lambda \\ -1 + 3 = 1 \cdot \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

$x = (1, 1)$ является собственным вектором этого линейного оператора при $\lambda = 2$

Задача 4.

Пусть линейный оператор задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Установить, является ли вектор $x = (3, -3, -4)$ собственным вектором этого линейного оператора.

Решение

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} -9 = 3 \cdot \lambda \\ 9 = -3 \cdot \lambda \\ -12 = -4 \cdot \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = -3 \\ \lambda = -3 \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

Такая система не имеет смысла, значит вектор x не является собственным вектором данного линейного оператора

```
In [ ]:
```

```
In [ ]:
```