Combinadores

Base SK

Prof. Edson Alves

Campus UnB Gama: Faculdade de Ciências e Tecnologias em Engenharia

Base SK

Base SK

Estorninho (*starling*)

Base SK

Estorninho (*starling*)

Cernícalo americano (*kestrel*)

Combinador I

Combinador I

- $\star$ Das definições de I e K, segue que

$$Ix = x = Kxy$$

Combinador I

- Das definições de I e K, segue que

$$Ix = x = Kxy$$

- Como y é arbitrário, ele pode ser substituído por Kx:

$$Ix = Kx(Kx)$$

Combinador I

- $\star$ Das definições de I e K, segue que

$$Ix = x = Kxy$$

- $\star$ Como y é arbitrário, ele pode ser substituído por Kx:

$$Ix = Kx(Kx)$$

- $\star$ Da definição de S, temos que

$$I = SKK$$

Combinador I

- $\star$ Das definições de I e K, segue que

$$Ix = x = Kxy$$

- $\star$ Como y é arbitrário, ele pode ser substituído por Kx:

$$Ix = Kx(Kx)$$

- $\star$ Da definição de S, temos que

$$I = SKK$$

- $\star$ Note que o segundo K pode ser subsituído por uma

função arbitrária

Combinador I

- $\star$ Das definições de I e K, segue que

$$Ix = x = Kxy$$

- $\star$ Como y é arbitrário, ele pode ser substituído por Kx:

$$Ix = Kx(Kx)$$

- $\star$ Da definição de S, temos que

$$I = SKK$$

- $\star$ Note que o segundo K pode ser subsituído por uma

função arbitrária

Albatroz de cauda curta (*'idiot bird'*)

Combinador B

Combinador B

Tordo-azul-oriental (*bluebird*)

Combinador B

Tordo-azul-oriental (*bluebird*)

- ⋆ Representado por Schönfinkel pela letra Z

Combinador B

Tordo-azul-oriental (*bluebird*)

- Representado por Schönfinkel pela letra Z
- Pela definição,

$$Bfgx = f(gx)$$

Combinador B

Tordo-azul-oriental (*bluebird*)

- Representado por Schönfinkel pela letra Z
- Pela definição,

$$Bfgx = f(gx)$$

- Observe que

$$f(gx) = (Kfx)(gx) = S(Kf)gx = (KSf)(Kf)gx$$

Combinador B

Tordo-azul-oriental (*bluebird*)

- Representado por Schönfinkel pela letra Z

- Pela definição,

$$Bfgx = f(gx)$$

- Observe que

$$f(gx) = (Kfx)(gx) = S(Kf)gx = (KSf)(Kf)gx$$

- Uma nova fusão em f nos leva a

$$f(gx) = S(KS)Kfgx$$

Combinador B

Tordo-azul-oriental (*bluebird*)

- Representado por Schönfinkel pela letra Z

- Pela definição,

$$Bfgx = f(gx)$$

- Observe que

$$f(gx) = (Kfx)(gx) = S(Kf)gx = (KSf)(Kf)gx$$

- Uma nova fusão em f nos leva a

$$f(gx) = S(KS)Kfgx$$

- Portanto, $B = S(KS)K$

Combinador C

Combinador C

- ⋆ Corresponde ao combinador T de Schönfinkel

Cardeal-do-norte (*cardinal*)

Combinador C

- ⋆ Corresponde ao combinador T de Schönfinkel

- ⋆ Vale a seguinte sequência de transformações:

$$
\begin{aligned}
fxy = fx(Kyx) &= (fx)(Kyx) = Sf(Ky)x \\
&= (Sf)(Ky)y = B(Sf)Kyx = (Sf)(Ky)y \\
&= B(Sf)Kyx = BBSfKyx = (BBSf)Kyx \\
&= (BBSf)(KKf)yx = S(BBS)(KK)fyx
\end{aligned}
$$

Cardeal-do-norte (*cardinal*)

Combinador C

- Corresponde ao combinador T de Schönfinkel

- Vale a seguinte sequência de transformações:

$$
\begin{aligned}
fxy = fx(Kyx) = (fx)(Kyx) = Sf(Ky)x \\
= (Sf)(Ky)y = B(Sf)Kyx = (Sf)(Ky)y \\
= B(Sf)Kyx = BBSfKyx = (BBSf)Kyx \\
= (BBSf)(KKf)yx = S(BBS)(KK)fyx
\end{aligned}
$$

- Portanto, $C = S(BBS)(KK)$

Cardeal-do-norte (*cardinal*)

Função de incompatibilidade U

Funções de incompatibilidade

O conectivo fundamental de Schönfinkel

$$fx \mid^{x} gx,$$

depende de duas funções proposicionais de um argumento f e g, logo tem forma $U(f,g)$. Assim, usando a transformação de funções de múltiplos argumentos,

$$Ufg = fx \mid^{x} gx,$$

é a equação que define a função de incompatibilidade U.

Principais resultados do artigo

Principais resultados do artigo

$\star$ Schönfinkel afirma que qualquer fórmula lógica de primeira ordem pode ser expressa em termos das funções particulares I, C, T, Z, S e U.

Principais resultados do artigo

$\star$ Schönfinkel afirma que qualquer fórmula lógica de primeira ordem pode ser expressa em termos das funções particulares I, C, T, Z, S e U.

$\star$ Dadas as reduções já apresentadas, de fato qualque fórmula lógica de primeira ordem pode ser expressa em termos C, S e U.

Principais resultados do artigo

- $\star$ Schönfinkel afirma que qualquer fórmula lógica de primeira ordem pode ser expressa em termos das funções particulares I, C, T, Z, S e U.

- $\star$ Dadas as reduções já apresentadas, de fato qualque fórmula lógica de primeira ordem pode ser expressa em termos C, S e U.

- $\star$ Schönfinkel enuncia, mas não prova, este resultado. Ele dá apenas exemplos destas representações.

Principais resultados do artigo

⋆ Schönfinkel afirma que qualquer fórmula lógica de primeira ordem pode ser expressa em termos das funções particulares I, C, T, Z, S e U.

⋆ Dadas as reduções já apresentadas, de fato qualque fórmula lógica de primeira ordem pode ser expressa em termos C, S e U.

⋆ Schönfinkel enuncia, mas não prova, este resultado. Ele dá apenas exemplos destas representações.

⋆ Ele esteve muito próximo de um resultado fundamental, mas não enunciou: "Qualquer combinador pode ser expresso em termos de S e K apenas (base SK)".

Principais resultados do artigo

Principais resultados do artigo

- $\star$ Na útlima seção, Schönfinkel introduz a função J, definida pelas igualdades

$$JC = U, \quad JS = C, \quad \text{e} \quad Jx = S,$$

onde x é qualquer termo diferente de C e S.

Principais resultados do artigo

⋆ Na útlima seção, Schönfinkel introduz a função J, definida pelas igualdades

$$JC = U, \quad JS = C, \quad \text{e} \quad Jx = S,$$

onde x é qualquer termo diferente de C e S.

⋆ Ele argumenta que J é diferente de C e S, pois tem apenas 3 valores, enquanto que C s S tem infinitos.

Principais resultados do artigo

⋆ Na útlima seção, Schönfinkel introduz a função J, definida pelas igualdades

$$JC = U, \quad JS = C, \quad \text{e} \quad Jx = S,$$

onde x é qualquer termo diferente de C e S.

⋆ Ele argumenta que J é diferente de C e S, pois tem apenas 3 valores, enquanto que C s S tem infinitos.

⋆ Daí ele apresenta as seguintes reduções:

$$JJ = S, \quad J(JJ) = JS = C \quad \text{e} \quad J[J(JJ)] = JC = U$$

Principais resultados do artigo

$\star$ Na útlima seção, Schönfinkel introduz a função J, definida pelas igualdades

$$JC = U, \quad JS = C, \quad \text{e} \quad Jx = S,$$

onde x é qualquer termo diferente de C e S.

$\star$ Ele argumenta que J é diferente de C e S, pois tem apenas 3 valores, enquanto que C s S tem infinitos.

$\star$ Daí ele apresenta as seguintes reduções:

$$JJ = S, \quad J(JJ) = JS = C \quad \text{e} \quad J[J(JJ)] = JC = U$$

$\star$ Portanto, qualquer forma lógica pode ser expressão apenas por J e parêntesis.

Combinadores

Definição de combinador

Sejam $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N$ termos sem quaisquer restrições. Um combinador $\mathcal{C}$ é uma função destas variáveis tal que seu valor depende única e exclusivamente de aplicação destes termos e de combinadores previamente definidos.

Cálculo SK

Cálculo SK

- $\star$ É um sistema computacional minimalista

Cálculo SK

- $\star$ É um sistema computacional minimalista
- $\star$ Todos os objetos são funções unárias

Cálculo SK

- $\star$ É um sistema computacional minimalista
- $\star$ Todos os objetos são funções unárias
- $\star$ Há apenas duas primitivas: S e K

Cálculo SK

- $\star$ É um sistema computacional minimalista
- $\star$ Todos os objetos são funções unárias
- $\star$ Há apenas duas primitivas: S e K
- $\star$ Os parêntesis, que completam a sintaxe, são usados apenas para alterar a ordem de avaliação das expressões

Cálculo SK

- ⋆ É um sistema computacional minimalista
- ⋆ Todos os objetos são funções unárias
- ⋆ Há apenas duas primitivas: S e K
- ⋆ Os parêntesis, que completam a sintaxe, são usados apenas para alterar a ordem de avaliação das expressões
- ⋆ A avaliação é feita da esquerda para a direita (formalmente, redução beta)

Redução beta

Redução beta

- Inicia aplicando a subexpressão mais à esquerda, se houverem argumentos suficiente

Redução beta

- ⋆ Inicia aplicando a subexpressão mais à esquerda, se houverem argumentos suficiente
- ⋆ Subexpressões à direita não são avaliadas (*lazy evaluation*)

Redução beta

- ⋆ Inicia aplicando a subexpressão mais à esquerda, se houverem argumentos suficiente

- ⋆ Subexpressões à direita não são avaliadas (*lazy evaluation*)

- ⋆ Isto ocorre para evitar que termos que seriam descartados não se expandam infinitamente ou que não terminem

Redução beta

⋆ Inicia aplicando a subexpressão mais à esquerda, se houverem argumentos suficiente

⋆ Subexpressões à direita não são avaliadas (*lazy evaluation*)

⋆ Isto ocorre para evitar que termos que seriam descartados não se expandam infinitamente ou que não terminem

⋆ Por exemplo, a redução beta de $SII(SII)$ não termina, mas

$$KS(SII(SII)) = S$$

Combinador M

Combinador M

Tordo-imitador (*mockingbird*)

Combinador M

- $\star$ Por definição, $Mx = xx$

Tordo-imitador (*mockingbird*)

Combinador M

- $\star$ Por definição, $Mx = xx$

- $\star$ Observe que:

$$Ma = aa = Ia(Ia) = SIIa$$

Tordo-imitador (*mockingbird*)

Combinador M

- ⋆ Por definição, $Mx = xx$

- ⋆ Observe que:

$$Ma = aa = Ia(Ia) = SIIa$$

- ⋆ Portanto, $M = SII$

Tordo-imitador (*mockingbird*)

Combinador M

- Por definição, $Mx = xx$
- Observe que:

$$Ma = aa = Ia(Ia) = SIIa$$

- Portanto, $M = SII$
- A redução beta de MM não termina

Tordo-imitador (*mockingbird*)

To Mock a Mockingbird

To Mock a Mockingbird

Definições:

To Mock a Mockingbird

Definições:

- $\star$ As letras maiúsculas $(A, B, \ldots)$ são pássaros

To Mock a Mockingbird

Definições:

$\star$ As letras maiúsculas ($A, B, \ldots$) são pássaros

$\star$ Quando o pássaro A ouve o nome do pássaro B, ele responde o nome do pássaro AB

To Mock a Mockingbird

Definições:

$\star$ As letras maiúsculas ($A, B, \ldots$) são pássaros

$\star$ Quando o pássaro A ouve o nome do pássaro B, ele responde o nome do pássaro AB

$\star$ Em geral, $AB \neq BA$

To Mock a Mockingbird

Definições:

⋆ As letras maiúsculas ($A, B, \ldots$) são pássaros

⋆ Quando o pássaro A ouve o nome do pássaro B, ele responde o nome do pássaro AB

⋆ Em geral, $AB \neq BA$

⋆ Para três pássaros quaisquer A, B, C, temos que $(AB)C$ e $(AB)C$ não são, necessariamente, iguais

The Significance of the Mockinbird

The Significance of the Mockinbird

- ⋆ Se, ao ouvir o nome do pássaro B, a responde B, dizemos que A gosta de B

The Significance of the Mockinbird

- ⋆ Se, ao ouvir o nome do pássaro B, a responde B, dizemos que A gosta de B
- ⋆ Em notação simbólica, A gosta de B se $AB = B$

The Significance of the Mockinbird

$\star$ Se, ao ouvir o nome do pássaro B, a responde B, dizemos que A gosta de B

$\star$ Em notação simbólica, A gosta de B se $AB = B$

$\star$ Assuma que, na floresta, para quaisquer dois pássaros A e B existe um pássaro C tal que, para qualquer pássaro x, $Cx = A(Bx)$

The Significance of the Mockinbird

- $\star$ Se, ao ouvir o nome do pássaro B, a responde B, dizemos que A gosta de B
- $\star$ Em notação simbólica, A gosta de B se $AB = B$
- $\star$ Assuma que, na floresta, para quaisquer dois pássaros A e B existe um pássaro C tal que, para qualquer pássaro x, $Cx = A(Bx)$
- $\star$ Assuma também que o tordo-imitador M mora na floresta

The Significance of the Mockinbird

- $\star$ Se, ao ouvir o nome do pássaro B, a responde B, dizemos que A gosta de B
- $\star$ Em notação simbólica, A gosta de B se $AB = B$
- $\star$ Assuma que, na floresta, para quaisquer dois pássaros A e B existe um pássaro C tal que, para qualquer pássaro x, $Cx = A(Bx)$
- $\star$ Assuma também que o tordo-imitador M mora na floresta
- $\star$ Há dois rumores na floresta: (a) que todo pássaro da floresta gosta de alguém; e (b) que existe ao menos um pássaro que não gosta de ninguém

The Significance of the Mockinbird

- ⋆ Se, ao ouvir o nome do pássaro B, a responde B, dizemos que A gosta de B

- ⋆ Em notação simbólica, A gosta de B se $AB = B$

- ⋆ Assuma que, na floresta, para quaisquer dois pássaros A e B existe um pássaro C tal que, para qualquer pássaro x, $Cx = A(Bx)$

- ⋆ Assuma também que o tordo-imitador M mora na floresta

- ⋆ Há dois rumores na floresta: (a) que todo pássaro da floresta gosta de alguém; e (b) que existe ao menos um pássaro que não gosta de ninguém

- ⋆ Qual dos dois rumores é verdadeiro?

Solução

Solução

- $\star$ Seja C o pássaro que compõem A e M, isto é, $Cx = A(Mx)$ para qualquer pássaro x

Solução

$\star$ Seja C o pássaro que compõem A e M, isto é, $Cx = A(Mx)$ para qualquer pássaro x

$\star$ Quando C escuta seu próprio nome, qual é o pássaro que ele responde?

Solução

- $\star$ Seja C o pássaro que compõem A e M, isto é, $Cx = A(Mx)$ para qualquer pássaro x

- $\star$ Quando C escuta seu próprio nome, qual é o pássaro que ele responde?

- $\star$ Temos que $CC = A(MC)$, o que equivale a $A(MC) = CC$

Solução

- $\star$ Seja C o pássaro que compõem A e M, isto é, $Cx = A(Mx)$ para qualquer pássaro x

- $\star$ Quando C escuta seu próprio nome, qual é o pássaro que ele responde?

- $\star$ Temos que $CC = A(MC)$, o que equivale a $A(MC) = CC$

- $\star$ Quando ouve C, o tordo-imitador responde $MC = CC$

Solução

$\star$ Seja C o pássaro que compõem A e M, isto é, $Cx = A(Mx)$ para qualquer pássaro x

$\star$ Quando C escuta seu próprio nome, qual é o pássaro que ele responde?

$\star$ Temos que $CC = A(MC)$, o que equivale a $A(MC) = CC$

$\star$ Quando ouve C, o tordo-imitador responde $MC = CC$

$\star$ Assim, quando ouve o nome do pássaro MC, o pássaro A responde

$$A(MC) = CC = MC$$

Solução

- $\star$ Seja C o pássaro que compõem A e M, isto é, $Cx = A(Mx)$ para qualquer pássaro x

- $\star$ Quando C escuta seu próprio nome, qual é o pássaro que ele responde?

- $\star$ Temos que $CC = A(MC)$, o que equivale a $A(MC) = CC$

- $\star$ Quando ouve C, o tordo-imitador responde $MC = CC$

- $\star$ Assim, quando ouve o nome do pássaro MC, o pássaro A responde

$$A(MC) = CC = MC$$

- $\star$ Portanto, o primeiro rumor é o verdadeiro

Referências

- ⋆ **USDA.** *Operational Activities: Starlings and Blackbirds.* Acesso em 07/04/2025.
- ⋆ **CornellLab.** *American Kestrel: Identification.* Acesso em 07/04/2025.
- ⋆ **HAYASHI**, Tobias. *The rare 'idiot bird'.* Acesso em 07/04/2025.
- ⋆ **Wikipédia.** *Bluebird.* Acesso em 07/04/2025.
- ⋆ **Tucson Bird Alliance.** *Northern Cardinal.* Acesso em 08/04/2025.

Referências

⋆ **Wikipédia.** *Combinatory Logic*. Acesso em 08/04/2025.

⋆ **AMIKO**, Komi. *Large Numbers in the SKI combinador calculus*. Acesso em 10/04/2025.

⋆ **CornellLab.** *Northern Mockingbird*. Acesso em 11/04/2025.

⋆ **SMULLYAN**, Raymond M. *To Mock a Mockingbird and Other Logic Puzzles*. Oxford Press, 2000.