



Erick Vargas

Club algoritmia (ESCOM)

Club algoritmia (ESCOM)

Contents

| | |
|------------------------------------|----------|
| 1 Programación dinámica | 2 |
| 1.1 Fibonacci | 2 |
| 1.2 Coeficiente binomial | 4 |
| 1.3 Problema | 4 |
| 1.3.1 Solución | 5 |
| 1.4 Problema | 6 |
| 2 Problemas clásicos de DP | 7 |
| 2.1 Mochilas | 7 |

Programación dinámica

Partimos de una solución recursiva bruta y podemos hacer uso de una función de memorización. El ejemplo más clásico es el de Fibonacci

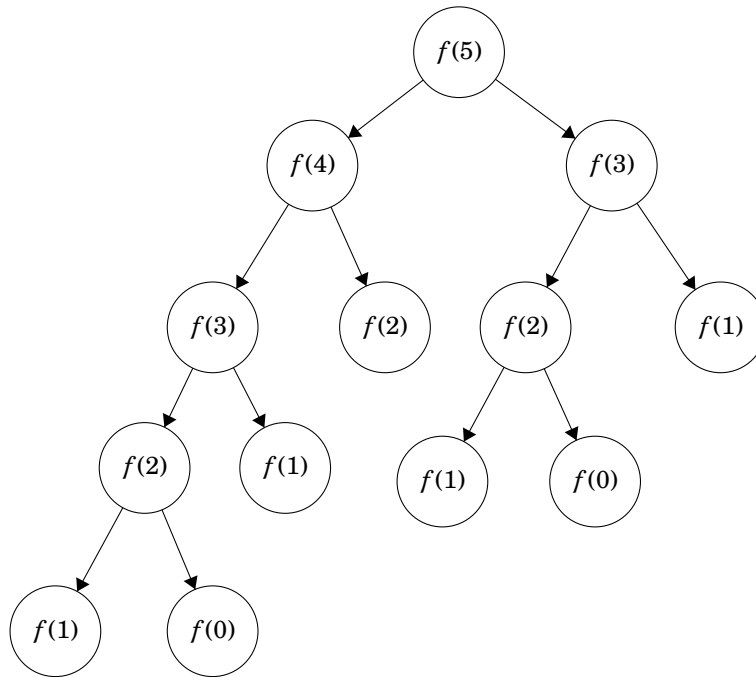
1.1 Fibonacci

$$fibonacci(n) = \begin{cases} 0 & , n = 0 \\ 1 & , n = 1 \\ fibonacci(n-1) + fibonacci(n-2) & , n \geq 2 \end{cases}$$

En código

```
int fibonacci( int n ){
    if( n == 0 )
        return 0;
    if( n == 1 )
        return 1;
    return fibonacci( n - 1 ) * fibonacci( n - 2 );
}
```

Si dibujamos las llamadas recursivas como un árbol tenemos lo siguiente



Como podemos observar hay llamadas recursivas que se repiten varias veces como ejemplo tenemos la llamada recursiva con un valor de 3, o 2. ¿Podemos evitar esto?

```

int memoria[ 100000 ];
.
.
.
int fibonacci( int n ){
    if( n == 0 )
        return 0;
    if( n == 1 )
        return 1;
    if( memoria[ n ] != -1 )
        return memoria[ n ];
    return memoria[ n ] = ( fibonacci( n - 1 ) * fibonacci(
        n - 2 ) );
}

int main(){
    memset( memoria, -1, sizeof(memoria) );
    .
    .
    .
}

```

La complejidad la podemos calcular viendo los estados, en nuestro caso es el tamaño de la memoria, por ejemplo si llamamos a fibonacci de 10 siempre ten-

emos el mismo resultado, por tanto multiplicamos los estados por la complejidad de la función en nuestro caso es $10^5 * constante$

1.2 Coeficiente binomial

$$Coef_Bin(n,k) = \begin{cases} 1 & , n = k \\ 1 & , k = 0 \\ Coef_Bin(n-1, k-1) + Coef_Bin(n-1, k) & , k \leq n \end{cases}$$

Si programamos esta función tenemos lo siguiente:

```
int coef_bin( int n, int k ){
    if( n == k || k == 0 )
        return 1;
    return ( coef_bin( n - 1, k - 1 ) + coef_bin( n - 1, k ) );
}
```

Si aplicamos DP

```
memoria[ 1000 ][ 1000 ];
.
.
.
int coef_bin( int n, int k ){
    if( n == k || k == 0 )
        return 1;
    if( mem[ n ][ k ] != -1 )
        return memoria[ n ][ k ];
    return memoria[ n ][ k ] = ( coef_bin( n - 1, k - 1 ) +
        coef_bin( n - 1, k ) );
}
```

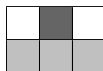
En complejidad tenemos $O(n * k)$ y sin la función de memorización tenemos $O(2^n)$

1.3 Problema

Dado un grid de $n \times m$, cada casilla tiene un número. Obtener un camino de la fila 1 a la fila n con suma máxima, ejemplo:

| | | |
|---|---|----|
| 3 | 5 | 10 |
| 6 | 4 | 3 |
| 2 | 1 | 0 |

Como restricciones tenemos que $n, m \leq 10^3$ y además $A_{i,j} \leq 10^6$ Además solo nos podemos mover de la siguiente manera. Supongamos que estamos en el recuadro con el color gris más oscuro, estando en esa posición podemos movernos a cualquiera de los tres rectangulos con color gris más claro, es decir, podemos movernos hacia $(f+1, c), (f+1, c-1), (f+1, c+1)$



1.3.1 Solución

```
int max_sum( int f, int c ){
    //Primero comprobamos si es un caso válido
    if( c < 0 || c >= m )
        return MIN_INT //MIN_INT es como un menos infinito
    //Caso base
    if( f == n )
        return grid[ f ][ c ];
    int A = max_sum( f + 1, c - 1 );
    int B = max_sum( f + 1, c );
    int C = max_sum( f + 1, c + 1 );
    //No existe una función max para 3 elementos, en dado
    //caso podemos usar vector es decir ponemos max({A, B,
    //C})
    return max( A, max(B, C) ) + grid[ f ][ c ];
}
```

Ahora bien ¿Cómo reducimos la complejidad de el código anterior? Debemos aplicar programación dinámica, primeramente ¿Cuál es el tamaño máximo de nuestra función de memoria? en nuestro caso es $1005 * 1005$

```
int memoria[ 1005 ][ 1005 ];
.
.
.
int max_sum( int f, int c ){
    //Primero comprobamos si es un caso válido (que no esté
    //fuera de rango)
    if( c < 0 || c >= m )
        return -1 //-1 es un valor bandera que identifica si
        //ya visitamos o no la casilla
    //Caso base
    if( f == n )
        return grid[ f ][ c ];

    if( memoria[ f ][ c ] != -1 )
        return memoria[ f ][ c ]

    int A = max_sum( f + 1, c - 1 );
    int B = max_sum( f + 1, c );
    int C = max_sum( f + 1, c + 1 );
    //No existe una función max para 3 elementos, en dado
    //caso podemos usar vector es decir ponemos max({A, B,
    //C})
    return memoria[ f ][ c ] = max( A, max(B, C) ) + grid[ f
    ][ c ];
}
```

1.4 Problema

Del ejercicio anterior que sucede si podemos añadir ¿números negativos? Podemos hacer uso de otro arreglo auxiliar de booleanos, en el que marcamos si ya visitamos o no una casilla

Problemas clásicos de DP

2.1 Mochilas

Vas a una tienda y quieres comprar algunos productos, digamos que hay n productos y cada producto tiene un precio y tenemos M pesos para gastar. Queremos comprar la mayor cantidad de productos gastando lo más posible.

Restricciones:

- N productos $N \leq 1000$
- M Pesos $M \leq 1000$
- $A_i \leq 1000$

Ejemplo:

$N = 3$, $M = 8$, y tenemos los productos $A = 3, 4, 6$ nuestra solución es comprar 3, 4 el precio es 7 y nos llevamos 4 productos.

Para poder solucionar este problema debemos de calcular el caso de probar y no probar el i -ésimo elemento.

```
int max_sum( int indice, int pesos_restantes ){
    //Validación, n es el número de elementos del arreglo A
    if( indice >= n )
        return 0;
    //Como no es una respuesta válida para descartarla
    regresamos un menos infinito
    if( pesos_restantes < 0 )
        return MIN_INT;
    //Recursivamente puedo tomar o no tomar un elemento
    int tomar = max_sum( indice + 1, pesos - A[ indice ] ) +
        A[ indice ];
    int no_tomar = max_sum( indice + 1, pesos );
    return max( tomar, no_tomar );
}
```


Esta solución es la más bruta si queremos aplicar programación dinámica ¿Cuáles son los estados que tenemos? En este caso tendremos los índices y la cantidad de pesos restantes. Es decir:

```

.
.
.
int memoria[ 1005 ][ 1005 ];
bool visitado[ 1005 ][ 1005 ];
.
.
.
int max_sum( int indice, int pesos_restantes ){
    //Validación, n es el número de elementos del arreglo A
    if( indice >= n )
        return 0;
    //Como no es una respuesta válida para descartarla
    regresamos un menos infinito
    if( pesos_restantes < 0)
        return MIN_INT;

    if( visitado[ indice ][ pesos_restantes ] )
        return memoria[ indice ][ pesos_restantes ];

    //Recursivamente puedo tomar o no tomar un elemento
    int tomar = max_sum( indice + 1, pesos - A[ indice ] ) +
        A[ indice ];
    int no_tomar = max_sum( indice + 1, pesos );
    //Como no se ha visitado el cálculo actual lo marcamos
    como visitado
    visitado[ indice ][ pesos_restantes ] = true;
    //Almacenamos el valor calculado en nuestra memoria
    return memoria[ indice ][ pesos_restantes ] = max( tomar
        , no_tomar );
}

```

Con esta solución tenemos una complejidad de $O(n^2)$ mientras que la solución bruta tiene una complejidad de $O(2^n)$