Table des matières

1 Intégration de Lebesgue

On note $\mathcal{C}_c(\Omega)$ les fonctions continues à support compact sur $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert.

Définition 1: Intégrale sur $\mathcal{C}_c(\Omega)$.
Pour $f \in \mathcal{C}_c(\Omega)$, $\displaystyle\int_\Omega f := \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{2^N} \sum_{p\in\mathbb{Z}^N} f\left(\frac{p}{2^k}\right)$

Définition 2: Classe de Levi.

- Une suite $(f_n) \in \mathcal{C}_c(\Omega)^{\mathbb{N}}$ est une suite de Levi si elle est croissante, et $\displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n < +\infty$
- La classe de Levi est $L^+(\Omega) := \left\{ f \in F(\Omega, \overline{\mathbb{R}}_+) \mid \exists (f_n) \text{ de Levi} : f_n \xrightarrow{\text{CVS}} f \right\}$

Définition 3: Ensembles Négligeables.

- $Z \subset \Omega$ est négligeable si $\exists f \in L^+(\Omega) : \forall x \in Z, f(x) = +\infty$
- Oui si $\forall \varepsilon > 0, \exists (C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des cubes : $Z \subset \bigcup_{i\in I} C_i$, et $\displaystyle\sum_{i\in I} \mathcal{V}(C_i) \leq \varepsilon$

Définition 4: $L^1(\Omega)$.
$f \in F(\Omega, \mathbb{R})$ est dans $L^1(\Omega)$ si $f = g - h$, avec $g, h \in L^+(\Omega)$. On pose $\displaystyle\int_\Omega f = \int_\Omega g - \int_\Omega h$

Théorème 1: Convergence Monotone.
Soit $(f_n) \in L^1(\Omega)^{\mathbb{N}}$, croissante p.p. avec $\displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n < +\infty$.

Alors $\exists f \in L^1(\Omega) : f_n \xrightarrow[\text{p.p.}]{\text{CVS}} f$, avec $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n = \int_\Omega f$

Théorème 2: Lemme de Fatou.
Soit $(f_n) \in L^1(\Omega)^{\mathbb{N}}$ positive, avec $\displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n < +\infty$.

Alors $\underline{\lim} f_n \in L^1(\Omega)$ et $\displaystyle\int_\Omega \underline{\lim} f_n \leq \underline{\lim} \int_\Omega f_n$

Théorème 3: Convergence Dominée.
Soit $(f_n) \in L^1(\Omega)^{\mathbb{N}}$, avec $f_n \xrightarrow[\text{p.p.}]{\text{CVS}} f$, et p.p. $|f_n| \leq F \in L^1(\Omega)$.

Alors $f \in L^1(\Omega)$, et $\displaystyle\lim_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n = \int_\Omega f$

Théorème 4: Continuité sous l'intégrale.
Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et $f : I \times \Omega \to \mathbb{C}$ telle que :

- $\forall t \in I, f(t, \cdot) \in L^1(\Omega)$
- $\underline{\forall} x \in \Omega, f(\cdot, x)$ est continue en $t_0 \in I$
- $\exists \Phi \in L^1(\Omega) : \underline{\forall} x \in \Omega, \forall t \in I, |f(x,t)| \leq \Phi(x)$

Alors $F : t \longmapsto \displaystyle\int_\Omega f(t,x)\mathrm{d}x$ est continue en t_0, avec $\displaystyle\lim_{t\to t_0} \int_\Omega f(t,x)\mathrm{d}x = \int_\Omega \lim_{t\to t_0} f(t,x)\mathrm{d}x$

Théorème 5: Dérivation sous l'intégrale.
Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et $f : I \times \Omega \to \mathbb{C}$ telle que :

— $\forall t \in I, f(t, \cdot) \in L^1(\Omega)$

— $\underline{\forall} x \in \Omega, f(\cdot, x) \in D^1(I, \mathbb{C})$ (resp. $\mathcal{C}^1$)

— $\exists \Phi \in L^1(\Omega) : \underline{\forall} x \in \Omega, \forall t \in I, \left|\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq \Phi(x)$

Alors $F : t \longmapsto \displaystyle\int_\Omega f(t,x)\mathrm{d}x \in D^1(I, \mathbb{C})$ (resp. $\mathcal{C}^1$), avec $\forall t \in I, F'(t) = \displaystyle\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\mathrm{d}x$

Théorème 6: Changement de variable.

Soit $\varphi : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, et $f \in L^1(\Omega_2)$. $\displaystyle\int_{\Omega_2} f(y)\mathrm{d}y = \int_{\Omega_1} f(\varphi(x))|\det J_\varphi(x)|\mathrm{d}x$

2 Théorie de la mesure

Ce cours part de l'intégration pour définir la mesure, en disant que $A \subset \Omega$ est mesurable si la fonction $\mathbb{1}_A$ est mesurable. En particulier, la mesure de Lebesgue $\lambda(A)$ de A mesurable est $\int_\Omega \mathbb{1}_A$.

Définition 5: Fonctions Mesurables.
$f \in F(\Omega, \overline{\mathbb{R}})$ est mesurable (noté $\in \mathbb{m}(\Omega)$) si $\exists (f_n) \in \mathcal{C}_c(\Omega)^\mathbb{N}$ telle que $f_n \xrightarrow[\text{p.p.}]{\text{CVS}} f$.
La mesurabilité est stable par limite simple et opération. Si une fonction mesurable est dominée, elle est dans L^1.

Théorème 7: Inégalité de Markov.

Soit $f \in L^1(\Omega)$ et $\alpha > 0$. On a $\lambda(\{x \in \Omega \mid f(x) \geq \alpha\}) \leq \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_\Omega |f|$

Théorème 8: Théorème de Comparaison.
Soit $f \in \mathbb{m}(\Omega)$. On a $f \in L^1(\Omega) \iff \exists F \in L^+(\Omega) : |f| \leq F$ p.p.

Théorème 9: Inégalités.

— **Jensen** : $f, g \in \mathbb{m}(\Omega)$, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe, avec $g \geq 0$ p.p., $\displaystyle\int_\Omega g = 1$,
Si $fg, \varphi(f)g \in L^1(\Omega)$, alors : $\varphi\left(\displaystyle\int_\Omega fg\right) \leq \displaystyle\int_\Omega (\varphi \circ f).g$

— **Hölder** : Soit $p, q \in]0, +\infty]$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$,
Alors $fg \in L^1(\Omega)$, avec $\displaystyle\int_\Omega |fg| \leq \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}$

— **Minkowski** $p > 1$ et $f, g \in L^p(\Omega)$: $\left(\displaystyle\int_\Omega |f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

Théorème 10: Convergence Monotone de Beppo Levi.

— Soit $(f_n) \in \mathbb{m}(\Omega, \mathbb{R}_+)$ croissante : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n = \int_\Omega \lim_{n\to+\infty} f_n$

— Soit $(f_n) \in \mathbb{m}(\Omega, \mathbb{R}_+)$: $\displaystyle\int_\Omega \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_\Omega f_n$

Théorème 11: Fubini.
Soit $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Alors :

— $\underline{\forall} x_2 \in \Omega_2, f(\cdot, x_2) \in L^1(\Omega_1)$ et $I : x_2 \longmapsto \int\limits_{\Omega_1} f(\cdot, x_2) \in L^1(\Omega_2)$

— $\iint\limits_{\Omega_1 \times \Omega_2} f = \int\limits_{\Omega_1} \left(\int\limits_{\Omega_2} f(x_1, x_2) \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1 = \int\limits_{\Omega_2} \left(\int\limits_{\Omega_1} f(x_1, x_2) \mathrm{d}x_1 \right) \mathrm{d}x_2$

Théorème 12: Tonelli.
Soit $f \in \mathbb{m}(\Omega_1 \times \Omega_2, \overline{\mathbb{R}}_+)$. Alors :

— $\underline{\forall} x_2 \in \Omega_2, f(\cdot, x_2) \in \mathbb{m}(\Omega_1)$ et $I : x_2 \longmapsto \int\limits_{\Omega_1} f(\cdot, x_2) \in \mathbb{m}(\Omega_2)$

— $\iint\limits_{\Omega_1 \times \Omega_2} f = \int\limits_{\Omega_1} \left(\int\limits_{\Omega_2} f(x_1, x_2) \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1 = \int\limits_{\Omega_2} \left(\int\limits_{\Omega_1} f(x_1, x_2) \mathrm{d}x_1 \right) \mathrm{d}x_2$