Table des matières

On notera aussi souvent que possible φ des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, ψ les fonction $\mathcal{C}^\infty$, et ϕ les fonctions de la classe de Schwartz.
On note $|\alpha| := \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$ for $\alpha \in \mathbb{N}^N$
On note $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur Ω, et pour $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, si supp $\varphi \subset K$ compact, on écrira parfois $\varphi \in \mathcal{C}_K^\infty(\Omega)$
Enfin, on note $K \Subset \Omega$ pour dire que K est un compact inclus dans Ω.

1 Préliminaires

Définition 1: Fonctions Localement Intégrables.
$f \in \mathfrak{m}(\mathbb{R}^N)$ est dans $L^1(\text{loc})$ si $\forall K \Subset \Omega, \int_K |f| < +\infty$, ou si $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \int_\Omega |f\varphi| < +\infty$

Théorème 1: Formule de Leibniz.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}^N$ et $\psi, \chi \in \mathcal{C}^\infty$: $\partial^\alpha(\psi\xi) = \sum_{\beta \preceq \alpha} C_\alpha^\beta \; \partial^{\alpha-\beta}\psi \; \partial^\beta \chi$

Définition 2: Support de $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.
$$\text{supp } f := \bigcap_{\omega \text{ ouvert: } f=0 \text{ p.p. sur } \omega} \mathbb{R}^N \setminus \omega$$

Théorème 2: Inégalité de Hausdorff-Young.
Soit $p, q, r \in [1, +\infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \frac{1}{r}$, et $f \in L^p(\mathbb{R}^N), g \in L^q(\mathbb{R}^N)$.

Alors $f*g(x) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$ est une fonction de $L^r(\mathbb{R}^N)$, avec $\|f*g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$

Soit $f, g \in \mathfrak{m}(\mathbb{R}^N)$ convolables. Alors supp $(f * g) \subset \overline{\text{supp } f + \text{supp } g}$

Théorème 3: Suites Régularisantes.
Soit $\varepsilon > 0$, et $\zeta \in \mathcal{C}^\infty_{\overline{B}(0,1)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ avec $\int \zeta = 1$. Soit $\zeta_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-N}\zeta(\frac{x}{\varepsilon})$

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$. Alors $\zeta_\varepsilon * f \xrightarrow[\varepsilon \longrightarrow 0]{\text{CVU}} f$

Définition 3: Convergence dans $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.
On dit que $\varphi_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)} \varphi$ S'il existe $K \Subset \Omega$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \text{supp } \varphi_n \subset K$, et que :

$\forall \alpha \in \mathbb{N}^N, \partial^\alpha \varphi_n \xrightarrow{\text{CVU}} \partial^\alpha \varphi$

Définition 4: Convergence dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.
Soit $\psi_n, \psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. On a $\psi_n \xrightarrow{\mathcal{C}^\infty(\Omega)} \psi$ si : $\forall \alpha \in \mathbb{N}^N, \quad \partial^\alpha \psi_n \xrightarrow{\text{CVU loc.}} \partial^\alpha \psi$
Où "CVU loc." dénote la convergence uniforme locale, i.e., la CVU sur tout compact.

2 Distributions

Définition 5: Distributions.
Une distribution $T \in D'(\Omega)$ est une forme $\mathbb{R}$-linéaire (ou $\mathbb{C}$-linéaire) sur $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ continue au sens suivant :

$$\forall K \Subset \Omega, \exists C > 0, \exists p \in \mathbb{N} : \forall \varphi \in \mathcal{C}_K^\infty(\Omega), \quad |\langle T, \varphi \rangle| \leq C \max_{|\alpha| \leq p} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi|$$

S'il existe $p \in \mathbb{N}$ indépendant de K dans la définition plus haut, on dit que T est d'ordre p. Sinon, on dit que T est d'ordre infini.

Théorème 4: Plongement de $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ dans $D'(\Omega)$.

L'application $\begin{cases} L^1_{\text{loc}}(\Omega) & \longrightarrow & D'(\Omega) \\ f & \longmapsto & T_f(\varphi) = \int\limits_\Omega f\varphi \end{cases}$ est injective.

Théorème 5: Continuité à droite du crochet de dualité.
Si $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)} \varphi, \quad$ alors $\langle T, \varphi_n \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle$

Définition 6: Distributions Positives.
$T \in D'(\Omega)$ est positive si $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \langle T, \varphi \rangle \geq 0$

Toute distribution positive est d'ordre 0 (le p dans la continuité d'un $T \in D'(\Omega)$).

Définition 7: Convergence dans $D'(\Omega)$.
On a $T_n \xrightarrow[D'(\Omega)]{} T, \quad$ si $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \langle T_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle$

Théorème 6: Principe de la borne uniforme.
Soit $K \Subset \Omega, T_n \in D'(\Omega)$ tel que $\forall \varphi \in \mathcal{C}_K^\infty(\Omega)$, la suite (T_n, φ) est convergente.

Alors $\exists p \in \mathbb{N}, \exists C > 0 : \forall \varphi \in \mathcal{C}_K^\infty(\Omega) : \quad |\langle T_n, \varphi \rangle| \leq C \max_{|\alpha| \leq p} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi|$

En particulier, si $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), (T_n, \varphi)$ CV, $\quad$ alors : $\exists T \in D'(\Omega) : T_n \xrightarrow{D'(\Omega)} T$.

Par conséquent, aux sens de continuité respectifs, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est continue.

Définition 8: Dérivation dans $D'(\Omega)$.
On définit $\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle$

Pour f suffisamment régulière pour définir $\partial^\alpha f$, on a la compatibilité : $\partial^\alpha T_f = T_{\partial^\alpha f}$

Si jamais $T \in D'(I \subset \mathbb{R})$ est de dérivée nulle, elle est constante (au sens des distributions).

L'opérateur ∂^α est continu sur $D'(\Omega)$

Définition 9: Produit externe $\mathcal{C}^\infty(\Omega) - D'(\Omega)$.
Soit $a \in \mathcal{C}^\infty(\Omega), T \in D'(\Omega)$. Alors $aT \in D'(\Omega)$, et est défini par $\langle aT, \varphi \rangle := \langle T, a\varphi \rangle$.

L'opérateur de multiplication par a est continu sur $D'(\Omega)$.

Théorème 7: Recollement de Distributions.
Soit ω un ouvert de Ω. On définit $T|_\omega := \begin{cases} \mathcal{C}_c^\infty(\omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi & \longmapsto & \langle T, \varphi \rangle \end{cases} \in D'(\omega)$.

Si $\Omega = \bigcup\limits_{i \in I} \omega_i$ et que $T_i \in D'(\omega_i)$, avec $\forall i \neq j : \omega_i \cap \omega_j = \varnothing, \quad T_i|_{\omega_i \cap \omega_j} = T_j|_{\omega_i \cap \omega_j}$

Alors $\exists! T \in D'(\Omega) : \quad \forall i \in I, T|_{\omega_i} = T_i$

Théorème 8: Changement de Variables.
On s'inspire de la formule suivante pour $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega_1), \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega_2)$ et χ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de Ω_1 dans Ω_2 :

$$\int_{\Omega_1} f(\chi(x))\ \varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{\Omega_2} f(y)\ \varphi(\chi^{-1}(y))\ |\det J_\chi(\chi^{-1}(y))|^{-1}\mathrm{d}y$$

On définit $\langle T \circ \chi, \varphi\rangle := \langle T \chi_*(\varphi)\rangle, \quad$ où $\chi_*(\varphi)(y) = \varphi(\chi^{-1}(y))\ |\det J_\chi(\chi^{-1}(y))|^{-1}$

Cela définit bien une distribution, et $T \mapsto T \circ \chi$ est continue sur $D'(\Omega)$.

Théorème 9: Dérivation sous le crochet de dualité.
Soit $T \in D'(\Omega), \varphi \in \mathcal{C}^\infty_{K\times\mathbb{R}^n}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$.

Alors $y \longmapsto \langle T, \varphi(\cdot, y)\rangle\ \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \quad$ avec $\partial_y^\alpha \langle T, \varphi(\cdot, y)\rangle = \langle T, \partial_y^\alpha \varphi(\cdot, y)\rangle$

Théorème 10: Intégration sous le crochet de dualité.
Soit $T \in D'(\Omega), \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$. On a $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \langle T, \varphi(\cdot, y)\rangle \mathrm{d}y = \left\langle T, \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\cdot, y)\mathrm{d}y \right\rangle$

3 Supports de Distributions, Convolution

Définition 10: Support d'une Distribution.
Soit $T \in D'(\Omega)$. On définit son support comme le plus petit fermé $F \subset \Omega$ tel que $T|_{\Omega\setminus F} = 0$.

Autrement dit, $\displaystyle \text{supp } T = \bigcap_{F \text{ fermé: } T|_{\Omega\setminus F}=0} F$

— $T|_{\Omega\setminus\text{supp } T} = 0$
— $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) : \text{supp } \varphi \cap \text{supp } T = \varnothing, \quad \langle T, \varphi\rangle = 0$
— $\text{supp } (T + S) \subset \text{supp } T + \text{supp } S$
— Pour $a \in \mathcal{C}^\infty(\Omega), \quad \text{supp } (aT) \subset \text{supp } a \cap \text{supp } T$
— $\text{supp } (\partial^\alpha T) \subset T$

Attention, si $\varphi = 0$ sur supp T, on n'a pas $\langle T, \varphi\rangle = 0$, il faut que φ soit nulle sur un voisinage ouvert de supp T par exemple.

Définition 11: Distributions à Support Compact.
Si $T \in D'(\Omega)$ avec supp T compact, on note $T \in \varepsilon'(\Omega)$.

On peut alors définir $\langle T, \psi\rangle$ pour $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, par la valeur $\langle T, \chi\psi\rangle$, qui est indépendante de $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ telle que $\chi|_V = 1$, où V est un ouvert contenant supp T. On peut également prolonger T par 0 hors de son support pour la définir sur $\mathbb{R}^N$, mais cela est sans intérêt pratique.

Ainsi un élément $T \in \varepsilon'(\Omega)$ peut être vu comme une forme linéaire, continue au sens du théorème suivant.

Théorème 11: Continuité au sens $\varepsilon'(\Omega)$.

— Tout $T \in \varepsilon'(\Omega)$ est d'ordre fini.
— Soit $T \in \varepsilon'(\Omega)$. $\exists K \Subset \Omega, \exists p \in \mathbb{N}, \exists C > 0, \forall \psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) : \quad |\langle T, \psi\rangle| \leq C \max\limits_{|\alpha|\leq p} \sup\limits_{x\in K} |\partial^\alpha \psi|$
— Si $\psi_n \xrightarrow{\mathcal{C}^\infty(\Omega)} \psi$, alors $\langle T, \psi_n\rangle \longrightarrow \langle T, \psi\rangle$

Définition 12: Convolution $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega) * D'(\Omega)$.
Soit $T \in D'(\mathbb{R}^N), \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. On définit $T * \varphi(x) := \langle T, \varphi(x - \cdot)\rangle$

On a supp $(T * \varphi) \subset$ supp $T +$ supp φ.

De plus, $T * \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$, avec $\partial^\alpha(T * \varphi) = (\partial^\alpha T) * \varphi = T * (\partial^\alpha \varphi)$

Si (ζ_ε) est régularisante, $T_\varepsilon := T * \zeta_\varepsilon \xrightarrow{D'(\Omega)} T$, ainsi $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ est dense dans $D'(\Omega)$. On peut également montrer que c'est le cas de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.

Si $T_n \xrightarrow{D'(\Omega)} T$ et $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, alors $T_n * \varphi \xrightarrow{\mathcal{C}^\infty(\Omega)} T * \varphi$

Définition 13: Convolution $\varepsilon'(\Omega) * \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.
Pour $S \in \varepsilon'(\Omega)$ et $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$: $S * \psi(x) := \langle S, \psi(x - \cdot)\rangle$ vérifie les mêmes propriétés.

Définition 14: Produit Tensoriel de Distributions.
Soit $T \in D'(\Omega_1), S \in D'(\Omega_2)$. Pour $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$, on définit :

$\langle S \otimes T, \varphi\rangle := \langle S, x_1 \mapsto \langle T, \varphi(x_1, \cdot)\rangle\rangle = \langle T, x_2 \mapsto \langle S, \varphi(\cdot, x_2)\rangle\rangle$

Définition 15: Convolution $D'(\Omega) * \varepsilon'(\Omega)$.
Pour $T \in D'(\mathbb{R}^N)$, on note $\widetilde{T} := T \circ (-I)$, définie par $\langle \widetilde{T}, \varphi\rangle = \langle T, \varphi(-\cdot)\rangle$.

Pour $T \in D'(\mathbb{R}^N), S \in \varepsilon'(\mathbb{R}^N)$, $T * S \in D'(\mathbb{R}^N)$ tq $\langle T * S, \varphi\rangle := \langle T, \widetilde{S} * \varphi\rangle = \langle S, \widetilde{T} * \varphi\rangle$

Remarquons que $\widetilde{S} * \varphi$ est bien dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ comme convolution $\varepsilon'(\mathbb{R}^N) * \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$, puis à support compact car supp $(\widetilde{S} * \varphi) \subset$ supp $\widetilde{S}$+supp φ. Comme $D'(\Omega) * \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, $\widetilde{T} * \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Un exemple important est $T * \delta_a = T \circ \tau_{-a}$, avec $\tau_a(x) := x + a$

On a $T * S = S * T$ et pour $R \in \varepsilon'(\Omega), R * (S * T) = (R * S) * T$

On a $\partial^\alpha(T * S) = \partial^\alpha T * S = T * (\partial^\alpha S)$

Si $T_n \xrightarrow{D'(\mathbb{R}^N)} T$ et $S_n \xrightarrow{\varepsilon'(\mathbb{R}^N)} S$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, \text{supp } S_n \subset K \Subset \mathbb{R}^N$, Alors $T_n * S_n \xrightarrow{D'(\mathbb{R}^N)} T * S$

4 Distributions sur la Classe de Schwartz, Transformée de Fourier

4.1 Transformée de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$

Définition 16: Classe de Schwartz.
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est l'ensemble des $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ telles que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^N, \quad \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^N} |x^\alpha \partial^\beta \phi(x)| < +\infty$

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est muni de la topologie associée aux normes $\mathcal{N}_p(\phi) := \sum\limits_{|\alpha|,|\beta|\leq p} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^N} |x^\alpha \partial^\beta \phi(x)|$

On dit que $\phi_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)} \phi$ lorsque $\forall p \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{N}_p(\phi_n - \phi) \longrightarrow 0$

- $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ pour la topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.
- $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \Longrightarrow \partial^\alpha \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$
- Si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ est à croissance polynomiale : $f(x) \underset{x\to\infty}{=} O(\|x\|^n)$, alors $f\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.
- Soit $q \geq 1$. $\exists C > 0 : \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^N$ avec $p := \max(|\alpha|, |\beta|)$:
$$\|x^\alpha \partial^\beta \phi\|_{L^q} \leq C\mathcal{N}_p(\phi)^{1-\frac{1}{q}} \mathcal{N}_{p+N+1}(\phi)^{\frac{1}{q}}$$
- Pour $S \in \varepsilon'(\mathbb{R}^N)$, $S * \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Théorème 12: Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

- $\mathcal{F}\phi(\xi) := \int\limits_{\mathbb{R}^N} \phi(x) e^{-ix.\xi} \mathrm{d}x \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$
- $\partial_{\xi_j} \mathcal{F}\phi = \mathcal{F}(-ix_j\phi), \quad \mathcal{F}(\partial_{\xi_j}\phi) = i\xi_j \mathcal{F}\phi$
- $\mathcal{F}(\phi \circ \tau_a) = e^{-i\xi.a}\mathcal{F}\phi, \quad \mathcal{F}(e^{ia.x}\phi) = \mathcal{F}(\phi(\xi - a))$
- $\forall p \in \mathbb{N}$. $\exists C_p > 0 : \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $\mathcal{N}_p(\mathcal{F}\phi) \leq C_p \mathcal{N}_{p+N+1}(\phi)$, ainsi $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Pour $A \in S_N^{++}(\mathbb{R}), G_A(x) := \dfrac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det A}} e^{-\frac{1}{2}(A^{-1}x|x)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, avec $\mathcal{F}G_A(\xi) = e^{-\frac{1}{2}(A\xi|\xi)}$

$\mathcal{S}$ est un automorphisme de S, d'inverse $\mathcal{F}^{-1}\psi(x) = \dfrac{1}{(2\pi)^N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \psi(\xi) e^{ix.\xi} \mathrm{d}\xi$

4.2 Distributions Tempérées, Transformée de Fourier sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$

Définition 17: Distributions Tempérées.
Une distribution tempérée est une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, avec continuité au sens suivant :

$T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ si $\exists C > 0, p \in \mathbb{N} : \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N), \quad |\langle T, \phi \rangle| \leq C\mathcal{N}_p(\phi)$

On a $\varepsilon'(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \subset D'(\mathbb{R}^N)$.

Tout fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^N)$ à croissance polynomiale définit une distribution $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$

$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ est stable par ∂^α, et par multiplication par toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ pour laquelle tous les $\partial^\alpha f$ sont à croissance polynomiale.

Tout $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ s'écrit de la forme $\partial^\alpha\big((1 + \|x\|^2)^n f)\big)$ avec $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^N)$ bornée.

On dit que $T_n \xrightarrow{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)} T$ lorsque $\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N), \quad \langle T_n, \phi \rangle \longrightarrow \langle T, \quad \phi \rangle$

Au sens de la topologie de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, la dérivation ∂^α et la multiplication par $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ avec les $\partial^\alpha f$ à croissance polynomiale sont continues.

Théorème 13: Convolution $\varepsilon'(\mathbb{R}^N) * \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.
Pour $T \in \varepsilon'(\mathbb{R}^N), S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N), \quad$ on a $T * S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$

Théorème 14: Transformée de Fourier sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.
On définit $\mathcal{F}T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ par la formule $\langle \mathcal{F}T, \phi \rangle := \langle T, \mathcal{F}\phi \rangle$

— $\mathcal{F}(\partial_{x_k} T) = i\xi_k \mathcal{F}T, \quad \mathcal{F}(x_k T) = i\partial_{\xi_k}\mathcal{F}T$
— $\mathcal{F}(T \circ \tau_a) = e^{ia.\xi}\mathcal{F}T, \quad \mathcal{F}(e^{-ia.x}T) = \mathcal{F}T \circ \tau_a)$
— $\mathcal{F}$ est continue comme opérateur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$

Pour $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, la distribution T_f définie par $\langle T_f, \phi \rangle = \int_{R^N} f\phi$ est dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, ainsi on peut définir $\mathcal{F}f := \mathcal{F}T_f$.

Cette définition coïncide avec la définition $\hat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)e^{-ix.\xi}\mathrm{d}x$, car on a $\mathcal{F}T_f = T_{\hat{f}}$.

Théorème 15: Caractérisation des Transformées de Fourier sur $\varepsilon'(\mathbb{R})$.
Soit $T \in \varepsilon'(\mathbb{R})$. Sa transformée de fourier $\mathcal{F}T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est définie par la fonction $f : \xi \longmapsto \langle T, e_{-\xi} \rangle$, avec $e_{-\xi}(x) = e^{-i\xi.x}$.

$f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, toutes ses dérivées sont à croissance polynomiales, et elle se prolonge par $z = (\xi + i\eta) \longmapsto \langle T, e_{-(\xi+i\eta)} \rangle$ holomorphe sur $\mathbb{C}$.

$\mathcal{F}\delta_a$ est la distribution tempérée associée à $\xi \longmapsto \langle \delta_a, e_{-\xi} \rangle = e^{-i\xi.a}$

Théorème 16: Inversion de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.
$\mathcal{F}$ est un automorphisme de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, d'inverse $\mathcal{F}^{-1}T = (2\pi)^{-N}\widetilde{\mathcal{F}T}$

où $\widetilde{S} = S \circ (-I)$, ie $\langle \widetilde{S}, \phi \rangle = \langle S, \phi(-\cdot) \rangle$

Théorème 17: Transformée de Fourier et Convolution $\varepsilon'(\mathbb{R}^N) * \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.
Soit $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N), S \in \varepsilon'(\mathbb{R}^N)$. Alors :

— $\mathcal{F}T \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ avec toutes ses dérivées à croissance polynomiale
— $\mathcal{F}S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$
— Le produit $\mathcal{F}T.\mathcal{F}S$ est ainsi bien défini dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, et l'on a $\mathcal{F}(T * S) = \mathcal{F}T.\mathcal{F}S$

Théorème 18: Théorème de Plancherel.
$\mathcal{F}$ induit un isomorphisme $\left\{ \begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}^N) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}^N) \\ f & \longmapsto & \hat{f} \end{array} \right.$, avec $(f|g)_{L^2} = (2\pi^N)(\mathcal{F}f|\mathcal{F}g)_{L^2}$

Théorème 19: Formule de Poisson.
La distribution $T := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k$ est dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, avec $\mathcal{F}T = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{2k\pi}$

En particulier, pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}$, en appliquant l'identité à $\phi(x + \cdot)$, on a

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}(k) e^{ik.x} = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi(x + 2k\pi)$$

Définition 18: Distribution Périodiques, Séries de Fourier.
$T \in D'(\mathbb{R})$ est périodique de période a si $T \circ \tau_a = T$. On rappelle $\langle T \circ \tau_a, \varphi \rangle = \langle T, \varphi(\cdot - a) \rangle$

Tout distribution périodique est tempérée.

Soit $u \in D'(\mathbb{R})$ 1-périodique, et $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\sum_{k \in Z} \varphi(\cdot + k) = 1$.

Alors $\mathcal{F}u = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \delta_{2k\pi}, \quad$ avec $c_k = \mathcal{F}(\varphi u)(2\pi k)$.

En particulier, si $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et est 1-périodique, $c_k = \hat{u}(2k\pi)$ sont ses coefficients de Fourier.

Dans le même cadre, on a au sens des distributions $u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{2i\pi kx}$ par $\mathcal{F}^{-1}$.