(a) Queremos provar que $A\lambda = v\lambda \Rightarrow \exists\, u$ t.q. $A^{T}u = \lambda u$

Sabemos que, para qualquer matriz B,

$\det(B) = \det(B^{T})$. Assim,

$\det(A - I\lambda) = \det(A^{T} - I^{T}\lambda) \Rightarrow p_A(\lambda) = p_{A^T}(\lambda)$ □

b) $Av = \lambda v \Rightarrow (cA)v = (c\lambda)v$ □

c) Provar que se $Av = \lambda v$, então $A^{r}v = \lambda^{r}v$

Vamos provar por indução:

<u>$k=1$</u>

$Av = \lambda v \Rightarrow$ o que é verdade pela hipótese do exercício

Assumindo que a relação vale para k. Dessa forma,

<u>para $k+1$</u>:

$A^{k+1}v = AA^{k}v = A\lambda^{k}v = \lambda^{k}Av = \lambda^{k}\lambda v = \lambda^{k+1}v$ □

d) Para isso, basta provar que $\exists\, u$ t.q. $(A + cI)u = (\lambda + c)u$

Tome u t.q. $Au = \lambda u$. Assim,

$(A + cI)u = Au + cIu = \lambda u + cu = (\lambda + c)u$ □

e) Dado que (λ, v) é um autopar de A, queremos provar que $\exists\, u$ t.q. $A^{-1}u = \frac{1}{\lambda}u$.

$$Av = \lambda v \Rightarrow A^{-1}Av = \lambda A^{-1}v \Rightarrow v = \lambda A^{-1}v \Rightarrow \frac{1}{\lambda}v = A^{-1}v$$

Logo, tome $u = v$ $\square$

Reference

Link: MS512_2024S1 Lista de Autopares
Exercise: 3