

Statement

Solution

1)

$$\begin{aligned} a) \quad A + iB &= (A + iB)^H = A^H + (iB)^H = A^T + (\overline{iB})^T = \\ &= A^T - (iB)^T = A^T + i(-B)^T \Rightarrow A = A^T \text{ e } B = -B^T \\ &\quad \quad \quad \hookrightarrow \text{simétrica} \quad \quad \quad \hookrightarrow \text{anti-simétrica} \end{aligned}$$

b) Uma matriz será invertível se, e somente se, nenhum dos seus autovalores forem 0. Assim, vamos provar que $(C \pm iI)$ não tem autovalor nulo.

Como C é hermitiana, então todos seus autovalores são reais. Logo, $Cv = \lambda v$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\Rightarrow Cv + iv = \lambda v + iv$

$$\Rightarrow (C + iI)v = (\lambda + iI)v$$

Ou seja, os autovalores de $C + iI$ são da forma $(\lambda + iI) \neq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Fazer mesma coisa pra $(C - iI)$

c) Se $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ é unitária, então $AA^H = A^H A = I$

$$\text{Seja } A = (C \pm iI)^{-1} (C \mp iI)$$

$$\begin{aligned} AA^H &= A (C \mp iI)^H [(C \pm iI)^H]^{-1} = A (C^H \pm iI) (C^H \mp iI)^{-1} = \\ &= (C \pm iI)^{-1} (C \mp iI) (C \pm iI) (C \mp iI)^{-1} \end{aligned}$$

$$\text{Repare que } (C \mp iI)(C \pm iI) = C^2 \pm C iI \mp C iI + I = (C \pm iI)(C \mp iI)$$

$$\text{Portanto, } AA^H = (C \pm iI)^{-1} (C \pm iI) (C \mp iI) (C \mp iI)^{-1} = I$$

Reference

Link: [MS512_2024S1 Lista de SVD](#)

Exercise: 1