Statement

3. Sejam A uma matriz, λ um autovalor de A, $c \in \mathbb{C}$ e $k \in \mathbb{N}$. Prove que:

   (a) λ é um autovalor de A^T.

   (b) $c\lambda$ é um autovalor de cA.

   (c) λ^r é um autovalor de A^r.

   (d) $\lambda + c$ é um autovalor de $A + cI$.

   (e) Se A é não singular então $1/\lambda$ é um autovalor de A^{-1}.

Solution

(a) Queremos provar que $A\lambda = v\lambda \Rightarrow \exists\, u$ t.q. $A^T u = \lambda u$

Sabemos que, para qualquer matriz B,

$\det(B) = \det(B^T)$. Assim,

$\det(A - I\lambda) = \det(A^T - I^T\lambda) \Rightarrow p_A(\lambda) = p_{A^T}(\lambda)$ □

b) $Av = \lambda v \Rightarrow (cA)v = (c\lambda)v$ □

c) Provar que se $Av = \lambda v$, então $A^r v = \lambda^r v$

Vamos provar por indução:

$K = 1$

$Av = \lambda v \Rightarrow$ o que é verdade pela hipótese do exercício

Assumindo que a relação vale para K. Dessa forma,

para $K+1$:

$A^{K+1}v = AA^K v = A\lambda^K v = \lambda^K Av = \lambda^K \lambda v = \lambda^{K+1} v$ □

d) Para isso, basta provar que $\exists\, u$ t.q. $(A + cI)u = (\lambda + c)u$

Tome u t.q. $Au = \lambda u$. Assim,

$(A + cI)u = Au + cIu = \lambda u + cu = (\lambda + c)u$ □

e) Dado que (λ, v) é um autopar de A, queremos provar que $\exists u$ t.q. $A^{-1}u = \frac{1}{\lambda} u$.

$Av = \lambda v \Rightarrow A^{-1}Av = \lambda A^{-1}v \Rightarrow v = \lambda A^{-1} v \Rightarrow \frac{1}{\lambda} v = A^{-1} v$

Logo, tome $u = v$ $\square$

Reference

Link: MS512_2024S1 Lista de Autopares
Exercise: 3