

Statement

5. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ com elementos $a_{ii} = n$ e $a_{ij} = 1$ para $i \neq j$. Prove que A não tem autovalores nulos e, portanto, é não singular.

Solution

Vamos provar usando Gershgorin e indução.

Para $n=1$, $Av = \lambda v \Rightarrow [1][v_1] = \lambda[v_1] \Rightarrow \lambda = 1 \neq 0$
onde $\lambda=1$ é o único autovalor.

Para $n > 1$, $A = \begin{bmatrix} n & \overbrace{1 \ 1 \ \dots \ 1}^{n-1} \\ 1 & n & 1 \ \dots \ 1 \\ & 1 & n & \dots \ 1 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & n \end{bmatrix}$, onde há n discos

de Gershgorin com centro em n e raio $n-1$.

Logo, 0 não pertence a nenhum deles, não podendo, assim, ser um autovalor.

Reference

Link: [MS512_2024S1 Lista de Autopares](#)

Exercise: 5