Statement

9. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalizável. Prove que $\rho(A) < 1$ se e somente se $\lim_{k \to \infty} A^k = 0$.

Solution

A diagonalizável $\iff$ A é não-defectiva

Assim, podemos escrever A como $A = VDV^{-1}$, onde

$V = [v_1 \dots v_n]$, $v_1 \dots v_n$ são os autovetores de A, LI, e

$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$, $\lambda_1 \dots \lambda_n$ os autovalores associados.

<u>Provando a ida:</u>

Dessa forma, $\begin{cases} A^2 = VD\underbrace{V^{-1}V}_{I}DV^{-1} = VD^2V^{-1}; \\ A^k = VD^kV^{-1} \end{cases}$

$D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$. Portanto, $\lim_{k\to\infty} A^k = \lim_{k\to\infty} VD^kV^{-1} = V\lim_{k\to\infty} D^k V^{-1}$

$= V \begin{bmatrix} \lim_{k\to\infty}\lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lim_{k\to\infty}\lambda_n^k \end{bmatrix} V^{-1}$. Como $\lambda_i < 1$, $1 \le i \le n$, $\lim_{k\to\infty}\lambda_i^k = 0$.

$\Rightarrow V \, 0 \, V = 0 = A$

<u>Provando a volta:</u>

Aqui, vamos utilizar a seguinte notação:

$V = \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix}$, $v_i \in \mathbb{R}^n \Rightarrow v_i^T \in \mathbb{R}^{1\times n}$

$V^{-1} = [v_1^* \cdots v_n^*]$, $v_i^* \in \mathbb{R}^n$

Repare que $VV^{-1} = \begin{bmatrix} v_1^T v_1^* & \cdots & v_1^T v_n^* \\ \vdots & & \vdots \\ v_n^T v_1^* & & v_n^T v_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_1^T v_1^* = 1 \\ \vdots \\ v_n^T v_n^* = 1 \end{cases}$

Seja $\lim_{k\to\infty} A^k = 0 \Rightarrow V \begin{bmatrix} \lim_{k\to\infty} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lim_{k\to\infty} \lambda_n^k \end{bmatrix} V^{-1} = 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix} \underbrace{\overset{D}{\begin{bmatrix} \lim \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lim \lambda_n^k \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} v_1^* & \cdots & v_n^* \end{bmatrix}} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lim \lambda_1^k v_1^* & \cdots & \lim \lambda_n^k v_n^* \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} D v_1^* & \cdots & D v_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lim \lambda_1^k v_1^* & \cdots & \lim \lambda_n^k v_n^* \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \lim \lambda_1^k \overbrace{v_1^T v_1^*}^{1} & \cdots & \lim \lambda_n^k \overbrace{v_n^T v_n^*}^{1} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \lambda_i^k = 0 \ \forall \ 1 \leq i \leq n$$

Reference

Link: [MS512_2024S1 Lista de Autopares]()
Exercise: 9