

Statement

4. Sejam A uma matriz quadrada e $\alpha \in \mathbb{C}$. Prove que v é um autovetor de A se e somente se v é um autovetor de $A - \alpha I$.

Solution

Queremos provar que

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} \text{ t.q. } Av = \lambda v \iff \exists \beta \in \mathbb{C} \text{ t.q. } (A - \alpha I)v = \beta v$$

Provando \Rightarrow

$$Av = \lambda v \Rightarrow Av - \alpha v = \lambda v - \alpha v \Rightarrow (A - \alpha I)v = (\lambda - \alpha)v$$

Logo, tome $\beta = \lambda - \alpha$

Provando \Leftarrow

$$(A - \alpha I)v = \beta v \Rightarrow Av - \alpha v = \beta v \Rightarrow Av = \beta v + \alpha v$$

$$\Rightarrow Av = (\beta + \alpha)v \text{ logo, tome } \lambda = \beta + \alpha \quad \square$$

Reference