Statement

Solution

3) a) Como $A = U\Sigma V^T$ e $\underbrace{VV^T = V^TV = I}_{V \text{ é ortogonal}}$, então

$AV = U\Sigma \Rightarrow [Av_1 \cdots Av_q] = [u_1\sigma_1 \cdots u_q\sigma_q]$

$\Rightarrow Av_i = \sigma_i u_i \ , \ i = 1, 2, \dots, q$

b) $(AV)^T = (U\Sigma)^T \Rightarrow V^TA^T = \Sigma^TU^T \Rightarrow \underbrace{VV^T}_{I} A^TU = V\Sigma^T \underbrace{U^TU}_{I} \Rightarrow A^TU = V\Sigma^T = V\Sigma$

$\Rightarrow [A^Tu_1 \cdots A^Tu_q] = [v_1\sigma_1 \cdots v_q\sigma_q]$

$\Rightarrow A^Tu_i = \sigma_i v_i \ , \ i = 1, 2, \dots, q$

c) $AV = U\Sigma \Rightarrow A^TAV = \underbrace{A^TU}_{V\Sigma \text{ [ver item b)]}}\Sigma \Rightarrow A^TAV = V\Sigma^2$

$\Rightarrow [A^TAv_1 \cdots A^TAv_q] = [v_1\sigma_1^2 \cdots v_q\sigma_q^2]$

$\Rightarrow (A^TA)v_i = \sigma_i^2 v_i$

d) $A^TU = V\Sigma \Rightarrow AA^TU = \underbrace{AV}_{U\Sigma \ \to \text{item a)}}\Sigma = U\Sigma^2$

$\Rightarrow [AA^Tu_1 \cdots AA^Tu_q] = [\sigma_1^2u_1 \cdots \sigma_q^2u_q]$

$\Rightarrow AA^Tu_i = \sigma_i^2 u_i \ , \ i = 1, \dots, q$

e) Vamos usar o seguinte fato.

Seja A, B matrizes t.q. A é invertível. Assim,

posto(B) = posto(AB) = posto(BA).

Portanto, como U e V são invertíveis, posto(A) = posto$(U\Sigma V^T)$ = posto(Σ)

O posto de uma matriz diagonal é dado pelo número de elementos (dessa diagonal) que são diferentes de 0.

Assim, posto(A) = posto(Σ) = número de $\sigma_i > 0$.

f) $A = U\Sigma V^T = [\sigma_1 u_1 \cdots \sigma_p u_p]\begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_p^T \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^T$

↳ isso não é bem uma prova. Acho que teríamos que abrir todas as matrizes para poder provar isso corretamente.

g) $\|A\|_2 = \|U\Sigma V^T\|_2 \overset{U \text{ e } V \text{ ortogonais}}{=} \|\Sigma\|_2$

Σ é diagonal. Vamos provar que $\|D\|_2 = \max_i |d_{ii}|$,

onde D é uma matriz diagonal genérica.

$$\|D\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Dx\|_2 = \max_{''} \left(\sum_{i=1}^{n} d_{ii}^2 x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \max_{\|x\|_2=1} \max_i |d_{ii}| \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = \max_i |d_{ii}| \cdot \overbrace{\max_{\|x\|_2} \|x\|_2}^{1}$$

Portanto, $\|D\|_2 \leq \max_i |d_{ii}|$

Sem perda de generalidade, seja $d_{11} = \max_i |d_{ii}|$, e tome $x = [1\ 0 \cdots 0]$, $\|x\|_2 = 1$

Logo, $\|Dx\|_2 = (d_{11}^2 1^2 + d_{22}^2 \cdot 0 + \cdots + d_{nn}^2 \cdot 0)^{\frac{1}{2}} = |d_{11}| = \max_{\|x\|_2=1} \|Dx\|_2 = \|D\|_2$

Assim, $\|\Sigma\|_2 = \max_i |\sigma_i| = \sigma_1$

Pelos itens c) e d), temos que $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_q^2 \in \Lambda(A^T A) = \Lambda(A A^T)$

Dessa forma, $\max \Lambda(A^T A) = \sigma_1^2 \Rightarrow \|A\|_2 = \sqrt{\max \Lambda(A^T A)}$

$$3)\ h)\quad \|A\|_F^2 = \|U\Sigma V^T\|_F^2 \overset{U \text{ e } V \text{ ortogonais}}{=} \|\Sigma\|_F^2 = \sum_{i=1}^{p} \sigma_i^2$$

$$i)\quad K_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$$

$$\|A^{-1}\|_2 = \|V\Sigma^{-1}U^T\|_2 \overset{V \text{ e } U \text{ ortogonais}}{=} \|\Sigma^{-1}\|_2 = 1/\sigma_n$$

$$K_2(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n} \geq 1$$

→ não tenho certeza dessa

$$j)\quad R(A) = I(A) = \{Ax \in \mathbb{R}^m \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$

Sabemos que $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é ortogonal. Logo, $u_1, \dots, u_m$ são LI e formam uma base em $\mathbb{R}^m$. Além disso, por construção, $u_i^T u_i = 1$.

Assim, $u_1, \dots, u_n$ formam uma base ortonormal pra $I(A)$.

$$k)\quad N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$$

$$A = U\Sigma V^T \Rightarrow AV = U\Sigma$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Av_i = \sigma_i u_i, & i = 1, \dots, p \\ Av_i = 0, & i = p+1, \dots, n \end{cases}$$

Ou seja $v_{p+1}, \dots, v_n \in N(A)$, $v_i^T v_i = 1$ por construção

Seja $y = \sum_{i=p+1}^{n} c_i v_i$, onde $c_i \in \mathbb{R}$.

Assim, $Ay = A \sum c_i v_i = \sum c_i \overbrace{A v_i}^{0} = 0$.

Portanto, $v_{p+1}, \dots, v_n$ formam uma base ortogonal p/ $N(A)$

Reference

Link: MS512_2024S1 Lista de SVD

Exercise: 3