Statement

2. Explique porque a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ tem pelo menos dois autovalores reais.

Solution

Theorem: If the union of k discs is disjoint from the union of the other $n - k$ discs then the former union contains exactly k and the latter $n - k$ eigenvalues of A, *when the eigenvalues are counted with their algebraic multiplicities*.

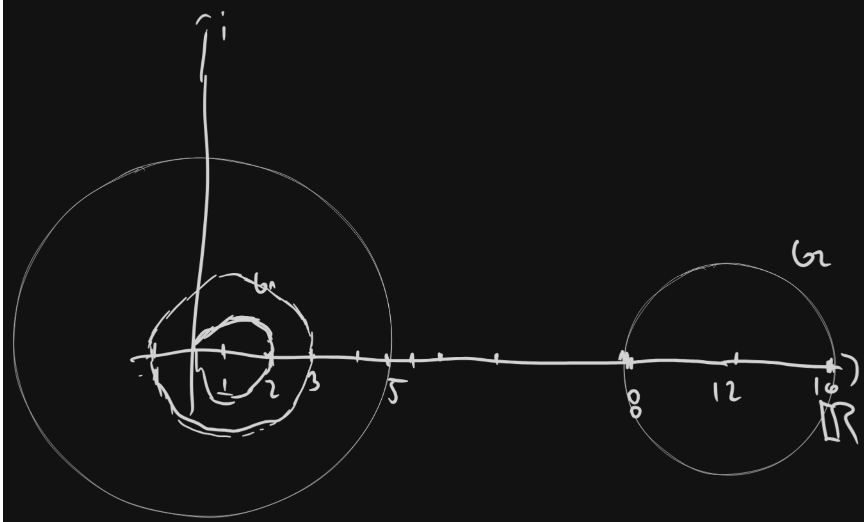
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$G_1 = |\lambda - 1| \leq 2$

$G_2 = |\lambda - 12| \leq 4$

$G_3 = |\lambda - 1| \leq 1$

$G_4 = |\lambda - 0| \leq 5$



Pelos teoremas de Geshgorin, sabemos 2 coisas:

1) Todos autovalores de A estarão em algum dos discos;

2) Se a união de K discos é disjunta da união do n-K discos restantes, então há K autovalores nessa primeira união, e n-k autovalores na segunda.

Além disso, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, o que implica que seu polinômio característico possui coeficientes reais, logo, sabemos que as raizes desse polinômio vem em pares: λ e $\bar{\lambda}$.

↳ que são os autovalores

Portanto, dado que G_2 contém apenas uma raiz, sabemos, então, que $\lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda$ é real.

No mais, para os discos G_1, G_3 e G_4, pela mesma idea, terá 3 raízes reais, ou 2 complexas (λ_1 e $\bar{\lambda}_1$) e uma real.

Pra finalizar, basta lembrar do teorema que diz que autovalores reais distintos de uma matriz real geram autovetores LI reais.

Reference

Link: MS512_2024S1 Lista de Autopares
Exercise: 2