

$$\rightarrow A \in \mathbb{R}^{m \times m}, B \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ e } C \in \mathbb{R}^{n \times n}, T = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Seja (λ, v) um autôpar de T .

$$v = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, u_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}, u_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}. \text{ Assim,}$$

$$\lambda \in \Lambda(T) \Rightarrow \lambda \in \Lambda(A) \cup \Lambda(C)$$

$$Tv = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix} u_2 = \begin{bmatrix} Au_1 + Bu_2 \\ Cu_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{por hipótese}} \begin{bmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Cu_2 = \lambda u_2 \Rightarrow \lambda \in \Lambda(A) \cup \Lambda(C)$$

$$\lambda \in \Lambda(A) \cup \Lambda(C) \Rightarrow \lambda \in \Lambda(T)$$

Seja (λ, u_1) um autôpar de A .

Queremos provar que $\exists v \in \mathbb{R}^{m+n}$ t.q. $Tv = \lambda v$.

$$\text{ Tome } v = \begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \text{ Assim,}$$

$$Tv = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix} 0 = \begin{bmatrix} Au_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda u_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda v$$

Agora, seja (λ, u_2) um autôpar de C t.q. $\lambda \notin \Lambda(A)$ (repare que $[\lambda \in \Lambda(A) \text{ e } \lambda \in \Lambda(C)]$ já foi provado acima)

Queremos provar que $\exists v$ t.q. $Tv = \lambda v$.

$$\begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix} u_2 = \begin{bmatrix} Au_1 + Bu_2 \\ Cu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \end{bmatrix}$$

\rightarrow RASCUNHO

$$Au_1 + Bu_2 = \lambda u_1 \Rightarrow (A - \lambda I)u_1 = -Bu_2$$

Sabemos que $(A - \lambda I)^{-1}$ existe, pois $\lambda \notin \Lambda(A)$. (se λ torna a matriz $(A - \lambda I)$

$$\text{ Logo, } u_1 = -(A - \lambda I)^{-1} Bu_2.$$

singular, λ é autôpar de A por definição.)

$$\text{ Tome } v = \begin{bmatrix} -(A - \lambda I)^{-1} Bu_2 \\ u_2 \end{bmatrix}. \text{ Assim, } Tv = \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(A - \lambda I)^{-1} Bu_2 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix} u_2 =$$

$$= \begin{bmatrix} -A(A - \lambda I)^{-1} Bu_2 + Bu_2 \\ Cu_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -(A - \lambda I)^{-1} Bu_2 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \text{eu não consegui fazer esse passo} \quad \square.$$

Reference