3) a) Como $A = U\Sigma V^T$ e $\underbrace{VV^T = V^TV = I}_{}$ (V é ortogonal), então

$$AV = U\Sigma \Rightarrow [Av_1 \cdots Av_q] = [u_1\sigma_1 \cdots u_q\sigma_q]$$

$$\Rightarrow Av_i = \sigma_i u_i, \quad i = 1, 2, \ldots, q$$

b) $$(AV)^T = (U\Sigma)^T \Rightarrow V^TA^T = \Sigma^TU^T \Rightarrow \overset{I}{\widetilde{VV^T}}A^TU = V\Sigma^T\overset{I}{\widetilde{U^TU}} \Rightarrow A^TU = V\Sigma^T = V\Sigma$$

$$\Rightarrow [A^Tu_1 \cdots A^Tu_q] = [v_1\sigma_1 \cdots v_q\sigma_q]$$

$$\Rightarrow A^Tu_i = \sigma_i v_i, \quad i = 1, 2, \ldots, q$$

c) $$AV = U\Sigma \Rightarrow A^TAV = \overset{V\Sigma\ [\text{ver item b})]}{\widetilde{A^TU}}\Sigma \Rightarrow A^TAV = V\Sigma^2$$

$$\Rightarrow [A^TAv_1 \cdots A^TAv_q] = [v_1\sigma_1^2 \cdots v_q\sigma_q^2]$$

$$\Rightarrow (A^TA)v_i = \sigma_i^2 v_i$$

d) $$A^TU = V\Sigma \Rightarrow AA^TU = \overset{U\Sigma \to \text{item a)}}{\widetilde{AV}}\Sigma = U\Sigma^2$$

$$\Rightarrow [AA^Tu_1 \cdots AA^Tu_q] = [\sigma_1^2u_1 \cdots \sigma_q^2u_q]$$

$$\Rightarrow AA^Tu_i = \sigma_i^2u_i, \quad i = 1, \ldots, q$$

e) Vamos usar o seguinte fato.

Seja A, B matrizes t.q. A é invertível. Assim,

$posto(B) = posto(AB) = posto(BA)$.

Portanto, como U e V são invertíveis, $posto(A) = posto(U\Sigma V^T) = posto(\Sigma)$

O posto de uma matriz diagonal é dado pelo número de elementos (dessa diagonal) que são diferentes de 0.

Assim, $posto(A) = posto(\Sigma) =$ número de $\sigma_i > 0$.

f) $A = U\Sigma V^T = [\sigma_1 u_1 \cdots \sigma_p u_p]\begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_p^T \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{p} \sigma_i u_i v_i^T$

↳ isso não é bem uma prova. Acho que teríamos que abrir todas as matrizes para poder provar isso corretamente.

g) $||A||_2 = ||U\Sigma V^T||_2 \overset{U \text{ e } V \text{ ortogonais}}{=} ||\Sigma||_2$

Σ é diagonal. Vamos provar que $||D||_2 = \max_i |d_{ii}|$,

onde D é uma matriz diagonal genérica.

$$||D||_2 = \max_{||x||_2=1} ||Dx||_2 = \max_{''} \left(\sum_{i=1}^{n} d_{ii}^2 x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \max_{||x||_2=1} \max_i |d_{ii}| \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = \max_i |d_{ii}| \cdot \overbrace{\max_{||x||_2} ||x||_2}^{1}$$

Portanto, $||D||_2 \leq \max_i |d_{ii}|$

Sem perda de generalidade, seja $d_{11} = \max_i |d_{ii}|$, e tome $x = [1 \; 0 \cdots 0]$, $||x||_2 = 1$

Logo, $||Dx||_2 = (d_{11}^2 1^2 + d_{22}^2 \cdot 0 + \cdots + d_{nn}^2 \cdot 0)^{\frac{1}{2}} = |d_{11}| = \max_{||x||_2=1} ||Dx||_2 = ||D||_2$

Assim, $\|\Sigma\|_2 = \max\limits_i |\sigma_i| = \sigma_1$

Pelos itens c) e d), temos que $\sigma_1^2, \dots, \sigma_q^2 \in \Lambda(A^TA) = \Lambda(AA^T)$

Dessa forma, $\max \Lambda(A^TA) = \sigma_1^2 \Rightarrow \|A\|_2 = \sqrt{\max \Lambda(A^TA)}$

U e V ortogonais

3) h) $\|A\|_F^2 = \|U\Sigma V^T\|_F^2 = \|\Sigma\|_F^2 = \sum_{i=1}^{p} \sigma_i^2$

i) $K_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$.

V e U ortogonais

$\|A^{-1}\|_2 = \|V\Sigma^{-1}U^T\|_2 = \|\Sigma^{-1}\|_2 = 1/\sigma_n$.

$K_2(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n} \geq 1$

não tenho certeza dessa

j) $R(A) = I(A) = \{ Ax \in \mathbb{R}^m \mid x \in \mathbb{R}^n \}$

Sabemos que $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é ortogonal. Logo, $u_1, \dots, u_m$ são LI e formam uma base em $\mathbb{R}^m$. Além disso, por construção, $u_i^T u_i = 1$.

Assim, $u_1, \dots, u_n$ formam uma base ortonormal pra $I(A)$.

k) $N(A) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0 \}$

$A = U\Sigma V^T \Rightarrow AV = U\Sigma$

$$\Rightarrow \begin{cases} Av_i = \sigma_i u_i, & i = 1, \dots, p \\ Av_i = 0, & i = p+1, \dots, n \end{cases}$$

Ou seja $v_{p+1}, \ldots, v_n \in N(A)$, $v_i^T v_i = 1$ por construção

Seja $y = \sum_{i=p+1}^{n} c_i v_i$, onde $c_i \in \mathbb{R}$.

Assim, $Ay = A \sum c_i v_i = \sum c_i \underbrace{Av_i}_{0} = 0$.

Portanto, $v_{p+1}, \ldots, v_n$ formam uma base ortogonal p/ $N(A)$

Reference

Link: MS512_2024S1 Lista de SVD

Exercise: 3