

Metode Numerik 1



Imam Fachruddin

Departemen Fisika, Universitas Indonesia

Untuk dipakai dalam kuliah Komputasi Fisika

Dapat diunduh dari <http://staff.fisika.ui.ac.id/imamf/>

Metode Numerik 1

Imam Fachruddin

Departemen Fisika, Universitas Indonesia

Daftar Pustaka:

- P. L. DeVries, *A First Course in Computational Physics* (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994)
- W. H. Press, et. al., *Numerical Recipes in Fortran 77*, 2nd Ed. (Cambridge University Press, New York, 1992)

(online / free download: <http://www.nrbook.com/a/bookfpdf.php>)

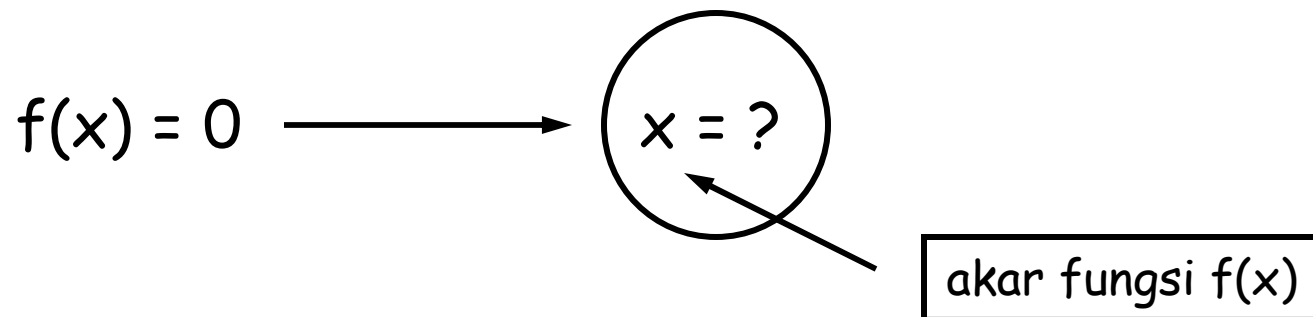
ii

Isi

• akar fungsi	1
• solusi sistem persamaan linear	17
• fitting dengan least square	29
• interpolasi	39
• integrasi	49
• persamaan differensial	61

iv

Akar Fungsi



Contoh: $x - \frac{1}{x} = 0 \longrightarrow x^2 = 1 \longrightarrow \textcircled{x = 1 \text{ dan } -1}$

$3x^2 = 6 - 7x \longrightarrow 3x^2 + 7x - 6 = (3x - 2)(x + 3) = 0$

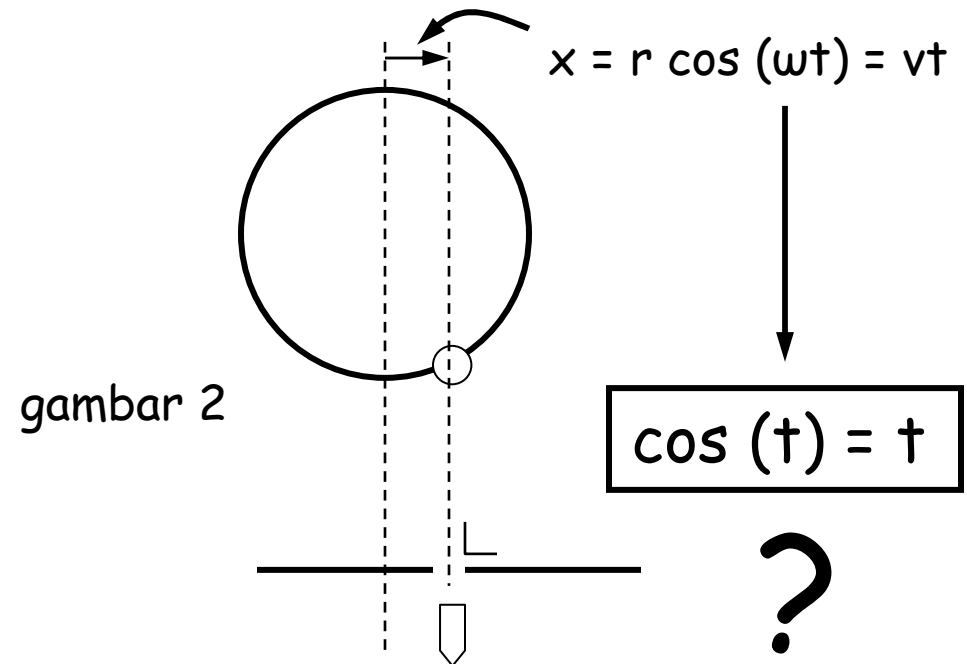
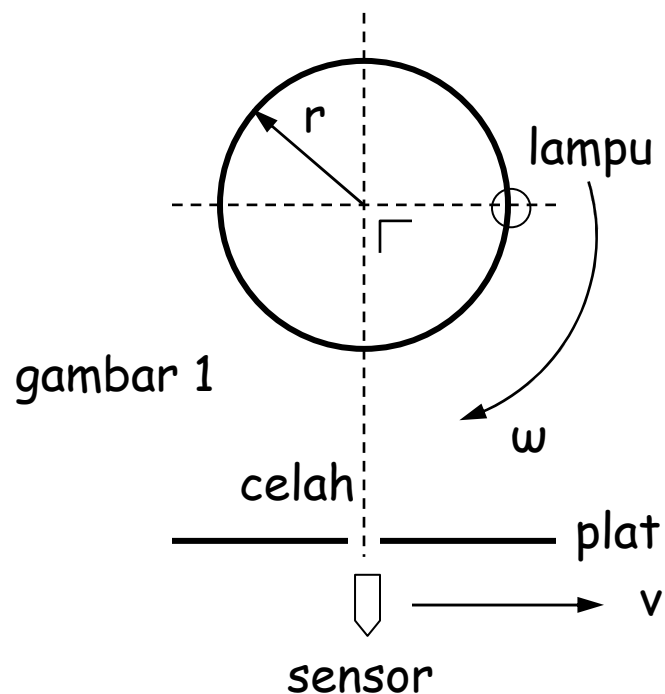
\downarrow
 $\textcircled{x = 2/3 \text{ dan } -3}$

Pada dua contoh di atas akar fungsi dapat dicari secara analitik.

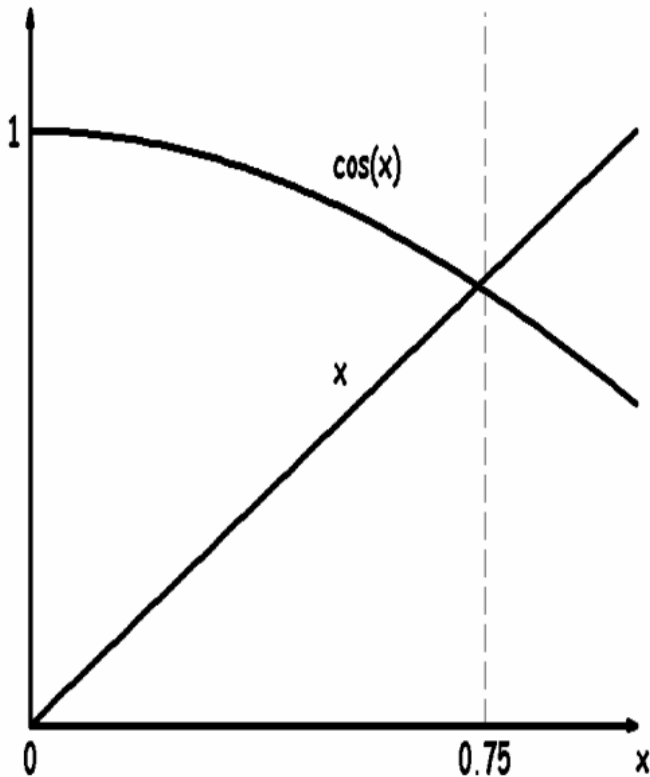
Secara umum, tidak selalu begitu keadaannya.

Problem:

Sebuah lampu dipasang di pinggir sebuah piringan berjari-jari 10 cm. Sebuah plat bercelah sempit diletakkan di dekat piringan itu. Tepat di belakang celah itu dipasang sebuah sensor cahaya yang menghadap tegak lurus ke celah. Piringan diputar konstan 1 rad/s dan plat beserta sensor digeser lurus konstan 10 cm/s. Saat ini posisi celah dan lampu seperti pada gambar 1. Kapan sensor cahaya menerima cahaya terbanyak? Sensor menerima cahaya terbanyak pada saat posisi lampu dan celah membentuk garis tegak lurus terhadap plat, seperti pada gambar 2.



Plot $\cos(x)$ dan x :



Grafik ini menunjukkan bahwa $\cos(x) = x$ pada x sedikit kurang dari 0.75.

Bisakah lebih akurat lagi?

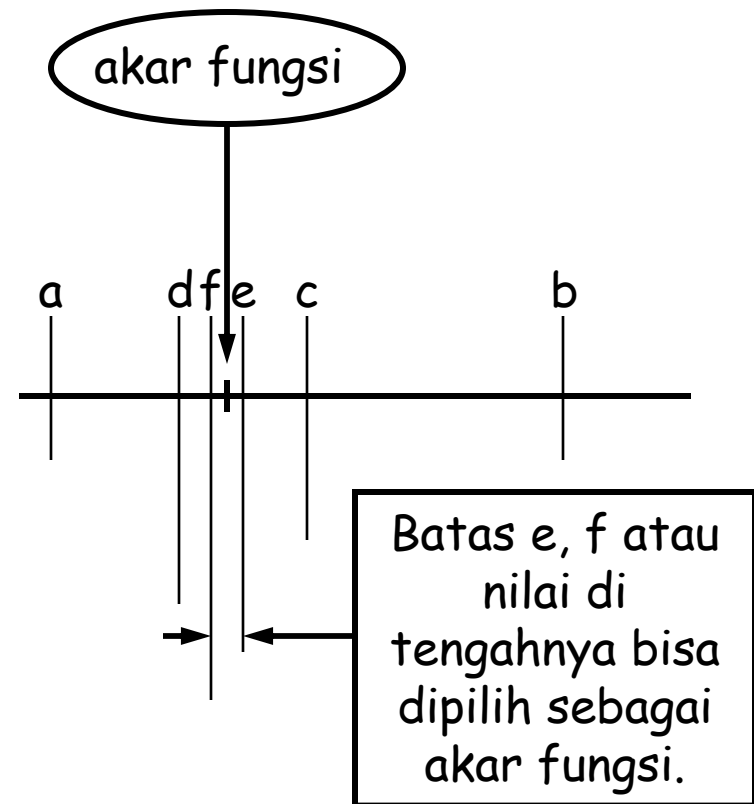
Cari secara numerik akar fungsi dari $f(x) = \cos(x) - x$

Bisection

Prinsip: Kurung akar fungsi di antara dua batas, lalu paruh batas itu terus menerus sampai batas itu sedemikian sempit dan dengan demikian lokasi akar fungsi diketahui dengan keakuratan tertentu.

Langkah:

1. Perkirakan akar fungsi (bisa dengan cara memplot fungsi).
2. Tentukan batas awal yang mengurung akar fungsi.
3. Belah dua daerah berisi akar fungsi itu.
4. Tentukan daerah yang berisi akar fungsi.
5. Ulangi langkah 3 dan 4 sampai dianggap cukup.
6. Tentukan akar fungsi.

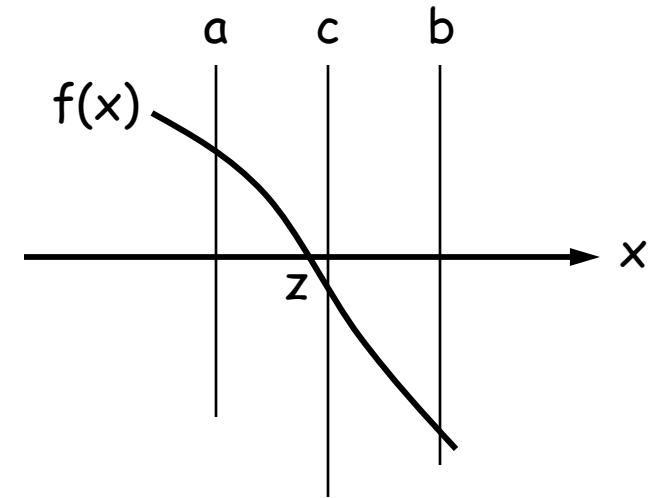


- Menentukan daerah yang berisi akar fungsi:

Jika z merupakan akar fungsi, maka $f(x < z)$ dan $f(x > z)$ saling berbeda tanda.

$f(a) \cdot f(c)$ negatif, berarti di antara a & c ada akar fungsi.

$f(b) \cdot f(c)$ positif, berarti di antara b & c tidak ada akar fungsi



- Menentukan kapan proses pencarian akar fungsi berhenti:

Proses pencarian akar fungsi dihentikan setelah keakuratan yang diinginkan dicapai, yang dapat diketahui dari kesalahan relatif semu.

$$\text{kesalahan relatif semu} = \left| \frac{\text{perkiraan sebelum} - \text{perkiraan berikut}}{\text{perkiraan berikut}} \right|$$

Kesalahan

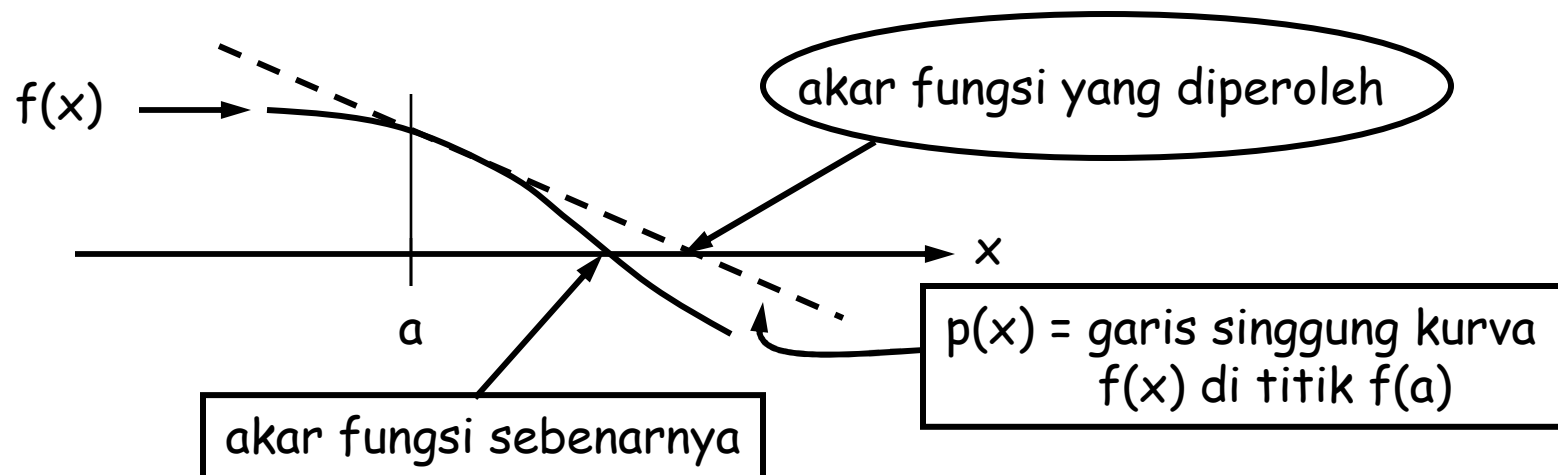
$$\text{kesalahan mutlak} = | \text{perkiraan} - \text{nilai sebenarnya} |$$
$$\text{kesalahan relatif} = \left| \frac{\text{perkiraan} - \text{nilai sebenarnya}}{\text{nilai sebenarnya}} \right|$$

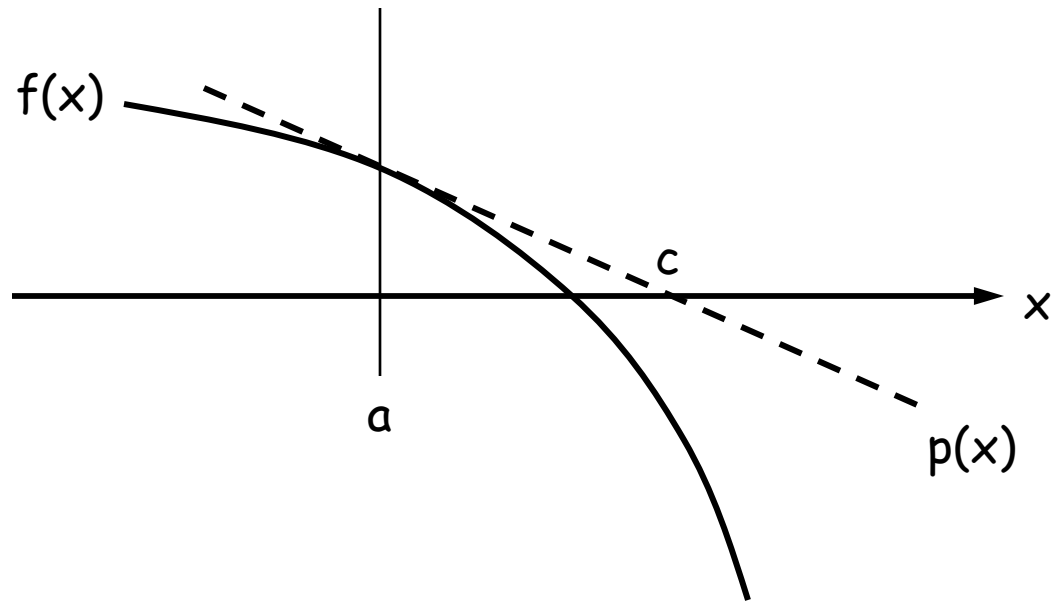
Dalam perhitungan numerik, nilai sebenarnya justru sering tidak diketahui, yang didapat hanya perkiraan terbaik. Karena perkiraan langkah berikut dianggap lebih akurat, yaitu lebih mendekati nilai sebenarnya, maka kesalahan yang dihitung yaitu:

$$\text{kesalahan mutlak semu} = | \text{perkiraan sebelum} - \text{perkiraan berikut} |$$
$$\text{kesalahan relatif semu} = \left| \frac{\text{perkiraan sebelum} - \text{perkiraan berikut}}{\text{perkiraan berikut}} \right|$$

Newton-Raphson

Prinsip: Buat garis singgung kurva $f(x)$ di titik di sekitar akar fungsi. Titik tempat garis singgung itu memotong garis nol ditentukan sebagai akar fungsi.





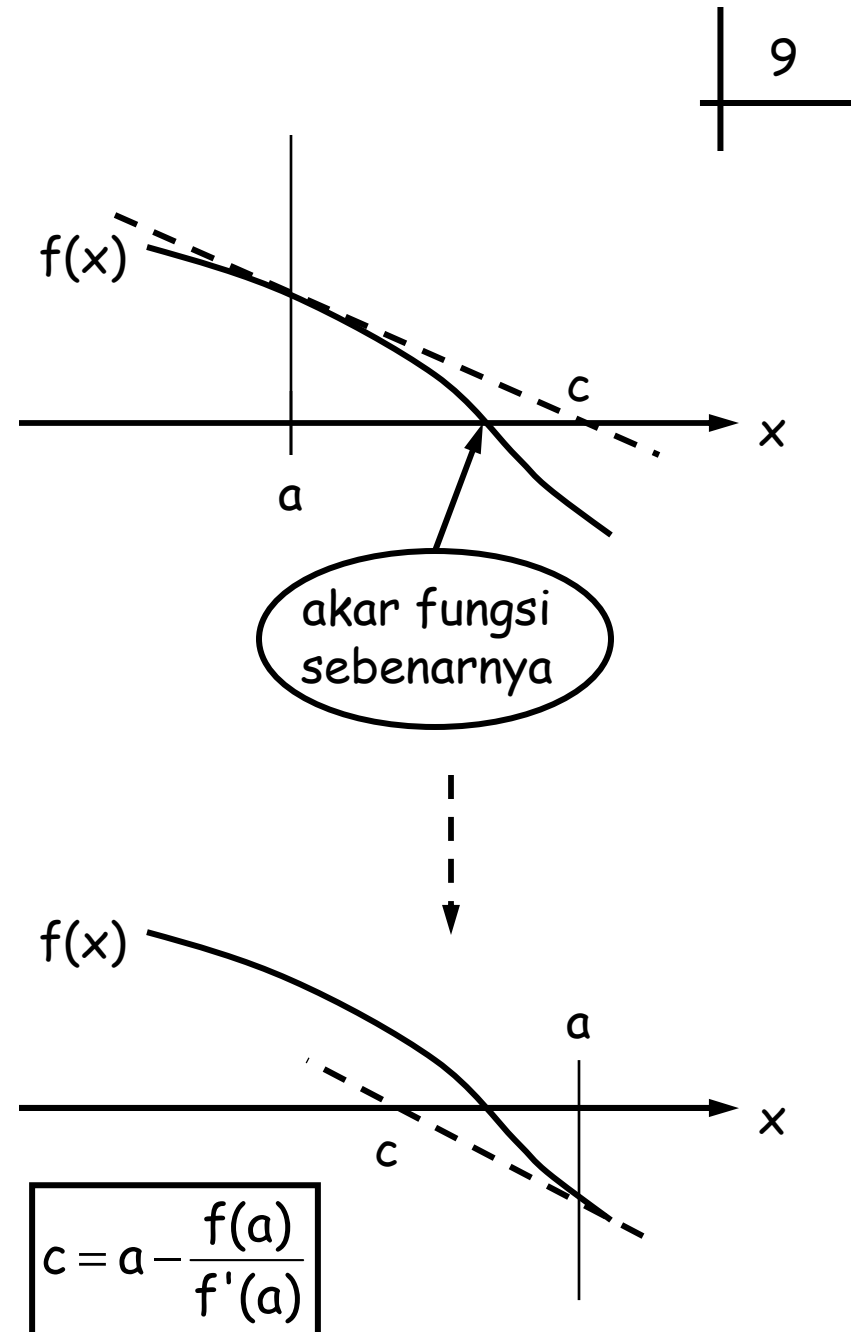
Diperoleh: $p(x) = f(a) + (x - a)f'(a)$

($f'(a)$ turunan pertama $f(x)$ pada $x = a$)

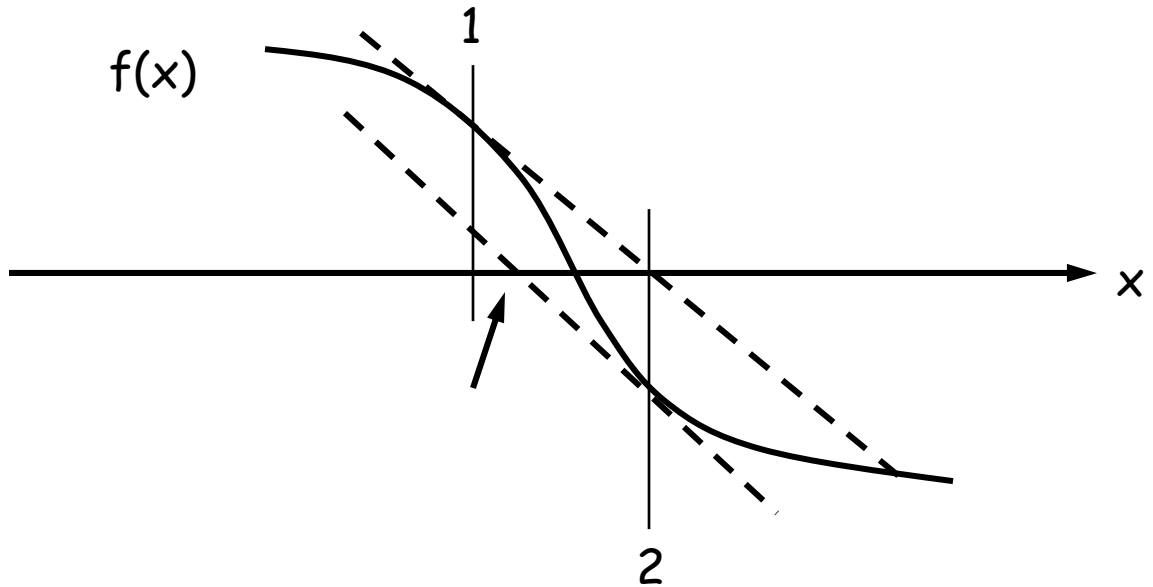
$$p(c) = 0 \longrightarrow \boxed{c = a - \frac{f(a)}{f'(a)}}$$

Langkah:

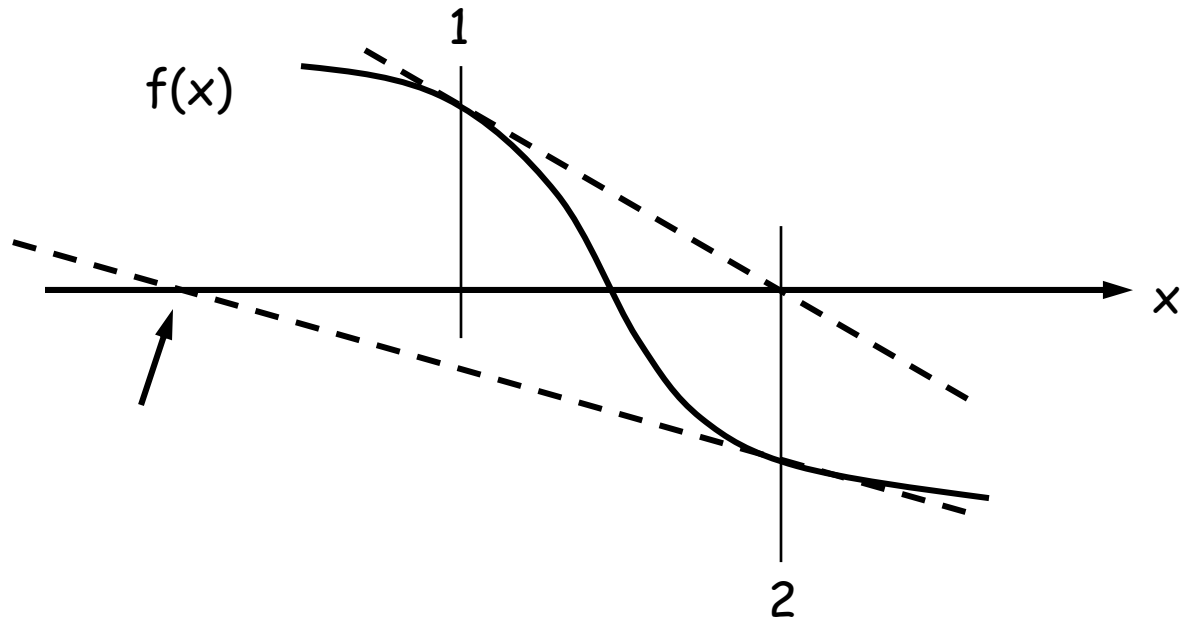
1. Perkirakan akar fungsi.
2. Buat garis singgung pada titik sesuai akar fungsi yang diperkirakan itu, lalu cari titik potongnya dengan garis nol.
3. Titik potong itu merupakan perkiraan akar fungsi baru.
4. Ulangi langkah 2 dan 3 sampai dianggap cukup.
5. Titik potong garis nol dan garis singgung kurva yang terakhir dinyatakan sebagai akar fungsi.



Contoh perkiraan akar fungsi awal yang baik
→ perkiraan akar fungsi makin mendekati akar fungsi sebenarnya.



Contoh perkiraan akar fungsi awal yang buruk
→ perkiraan akar fungsi makin menjauhi akar fungsi sebenarnya.



Menghitung akar fungsi dengan metode Newton-Raphson:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (i = 0, 1, 2, \dots; x_0 = a)$$

kesalahan relatif semu:

$$\Delta_{rel} = \left| \frac{x_i - x_{i+1}}{x_{i+1}} \right|$$

Penghitungan dihentikan jika kesalahan relatif semu sudah mencapai / melampaui batas yang diinginkan.

Kecepatan Konvergensi

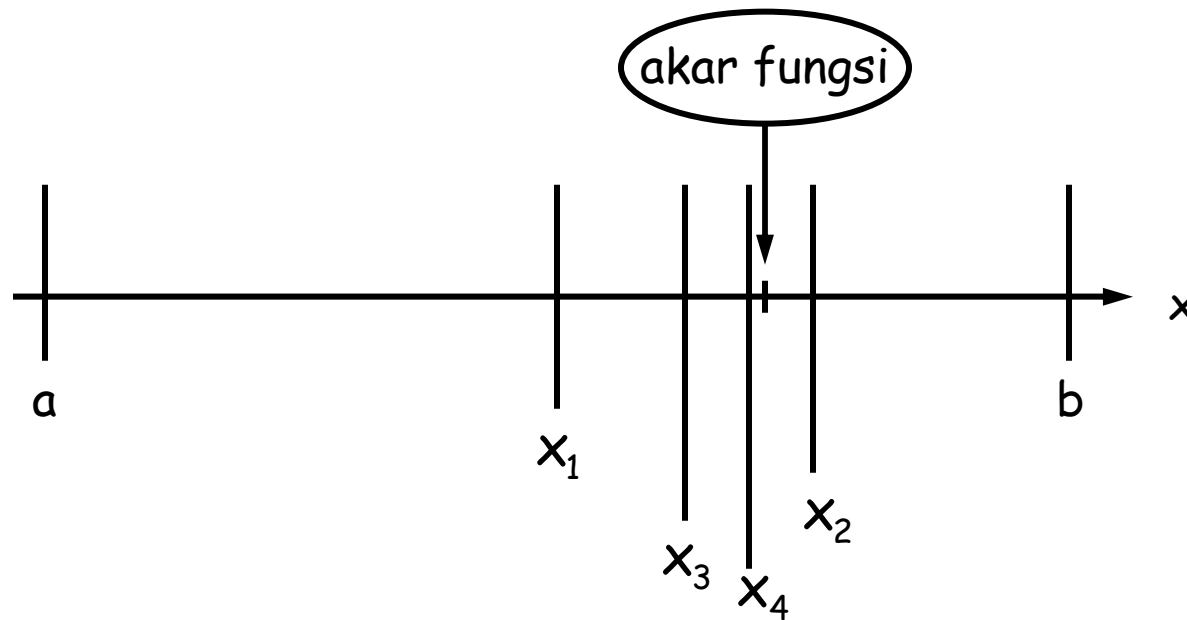
Pencarian akar fungsi dimulai dengan perkiraan akar fungsi yang pertama, lalu diikuti oleh perkiraan berikutnya dan seterusnya sampai perkiraan yang terakhir, yang kemudian dinyatakan sebagai akar fungsi hasil perhitungan tersebut. Proses itu harus bersifat konvergen yaitu, selisih perkiraan sebelum dari yang setelahnya makin lama makin kecil. Setelah dianggap cukup, proses pencarian akar fungsi berhenti.

$$|x_2 - x_1| > |x_3 - x_2| > |x_4 - x_3| \dots |x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon$$

(ε = bilangan kecil)

Kecepatan konvergensi sebuah proses yaitu, kecepatan proses itu untuk sampai pada hasil akhir.

Contoh pencarian akar fungsi dengan metode Bisection:



Jika $\epsilon_i \equiv |x_{i+1} - x_i|$, maka dari gambar diperoleh:

$$\epsilon_1 = |x_2 - x_1|, \quad \epsilon_2 = |x_3 - x_2|, \quad \epsilon_3 = |x_4 - x_3|$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{2} \epsilon_1, \quad \epsilon_3 = \frac{1}{2} \epsilon_2$$

Kecepatan konvergensi bersifat linear:

$$\boxed{\epsilon_{i+1} = \frac{1}{2} \epsilon_i}$$

Pada metode Newton-Raphson:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \longrightarrow \varepsilon_i \equiv x_i - x_{i+1} = \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \longrightarrow \varepsilon_{i+1} = \frac{f(x_{i+1})}{f'(x_{i+1})} = ?$$

ekspansi deret Taylor: $f(x_{i+1}) = f(x_i - \varepsilon_i) = f(x_i) - \varepsilon_i f'(x_i) + \frac{1}{2} \varepsilon_i^2 f''(x_i) - \dots$

$$f'(x_{i+1}) = f'(x_i - \varepsilon_i) = f'(x_i) - \varepsilon_i f''(x_i) + \dots$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow \varepsilon_{i+1} &= \frac{f(x_i) - \varepsilon_i f'(x_i) + \frac{1}{2} \varepsilon_i^2 f''(x_i) - \dots}{f'(x_i) - \varepsilon_i f''(x_i) + \dots} \\ &\cong \frac{f(x_i) - \varepsilon_i f'(x_i) + \frac{1}{2} \varepsilon_i^2 f''(x_i)}{f'(x_i)} \\ &\cong \frac{f''(x_i)}{2f'(x_i)} \varepsilon_i^2 \end{aligned}$$

Kecepatan konvergensi pada metode Newton-Raphson bersifat kurang lebih kuadratik:

$$\boxed{\varepsilon_{i+1} \cong \frac{f''(x_i)}{2f'(x_i)} \varepsilon_i^2}$$

Dengan begitu, metode Newton-Raphson lebih cepat dari metode Bisection.

Contoh hasil pencarian akar fungsi untuk soal $\cos(x) = x$:

metode	akar	f(akar)	jumlah langkah
Bisection	0.7390795	9.3692161E-06	12
Newton-Raphson	0.7390851	-7.7470244E-09	4

- Keterangan:
- Pencarian akar berhenti jika kesalahan relatif semu sama atau kurang dari $1.0E-05$.
 - Batas awal kiri dan kanan untuk metode Bisection 0.72 dan 0.75.
 - Perkiraan akar fungsi pertama untuk metode Newton-Raphson 0.72.

16

Solusi Sistem Persamaan Linear

Sistem persamaan linear:

$$\begin{array}{cccccc}
 a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & + a_{13}x_3 & \cdots & + a_{1n}x_n & = b_1 \\
 a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & + a_{23}x_3 & \cdots & + a_{2n}x_n & = b_2 \\
 a_{31}x_1 & + a_{32}x_2 & + a_{33}x_3 & \cdots & + a_{3n}x_n & = b_3 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 a_{n1}x_1 & + a_{n2}x_2 & + a_{n3}x_3 & \cdots & + a_{nn}x_n & = b_n
 \end{array}$$

n buah
persamaan
dengan n buah
unknown
 x_j

a_{ij} dan b_i
diketahui

$i, j = 1, 2, \dots, n$

$x_j = ?$

Soal:

$$2x - 3y + 2z = -6 \quad (1)$$

$$-x + 2y - 3z = 2 \quad (2)$$

$$x + y - z = 0 \quad (3)$$

3 persamaan dan
3 unknown

Jawab: $2x - 3y + 2z = -6 \quad (1)$

$$0.5y - 2z = -1 \quad (2)$$

$$2.5y - 2z = 3 \quad (3)$$

eliminasi x:
pers. (2) + 0.5 pers. (1)
pers. (3) - 0.5 pers. (1)

$$2x - 3y + 2z = -6 \quad (1)$$

$$0.5y - 2z = -1 \quad (2)$$

$$8z = 8 \quad (3)$$

eliminasi y:
pers. (3) - 5 pers. (2)

$$z = 1$$

$$y = \frac{-1 + 2z}{0.5} = 2$$

$$x = \frac{-6 + 3y - 2z}{2} = -1$$

substitusi mundur:
pers. (3) → mencari z
pers. (2) → mencari y
pers. (1) → mencari x

Dalam bentuk matriks:

Soal:
$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jawab:
$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0.5 & -2 \\ 0 & 2.5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0.5 & -2 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$z = 1$$

$$y = \frac{-1 + 2z}{0.5} = 2$$

$$x = \frac{-6 + 3y - 2z}{2} = -1$$

Eliminasi Gauss

Metode Eliminasi Gauss mencari solusi sebuah sistem persamaan linear dengan cara seperti ditunjukkan pada contoh sebelum ini:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(0)} \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 a_{ij}^{(0)} &= a_{ij}, \quad b_i^{(0)} = b_i \\
 a_{ij}^{(k)} &= a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} a_{kj}^{(k-1)} \\
 b_i^{(k)} &= b_i^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} b_k^{(k-1)} \\
 (k &= 1, \dots, n-1; \\
 i &= k+1, \dots, n; j = k, \dots, n)
 \end{aligned}$$

$$a_{ij}^{(m)}, b_i^{(m)} \equiv a_{ij}, b_i$$

pada langkah ke m

→ halaman berikut

Substitusi mundur:

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(0)} \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned} x_n &= \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}} \\ x_{n-j} &= \frac{b_{n-j}^{(n-j-1)} - \sum_{k=n-j+1}^n a_{n-j,k}^{(n-j-1)} x_k}{a_{n-j,n-j}^{(n-j-1)}} \quad (j=1, \dots, n-1) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} & \\ & \\ & \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} \quad \text{atau} \quad AX = B$$

Jadi, metode Eliminasi Gauss terdiri dari dua tahap:

1. triangulasi: mengubah matriks A menjadi matriks segitiga (matriks B dengan begitu juga berubah)

$$\begin{pmatrix} \square & \\ & \\ & \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \triangle & \\ & \\ & \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

2. substitusi mundur: menghitung x mengikuti urutan terbalik, dari yang terakhir (x_n) sampai yang pertama (x_1)

Kasus Beberapa Sistem Persamaan Linear

23

Pada kasus yang lebih umum bisa saja terdapat beberapa sistem persamaan linear dengan nilai B yang berlainan, namun memiliki nilai A yang sama.

Dalam bentuk matriks sistem seperti ini dituliskan sebagai:


$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} \text{ atau } AX = B$$

- Keterangan:
- A matriks $n \times n$, X dan B matriks $n \times m$, dengan m = jumlah sistem persamaan linear, n = jumlah persamaan / unknown dalam tiap sistem persamaan tersebut
 - Tiap kolom matriks X merupakan solusi untuk kolom yang sama pada matriks B.

Langkah dan rumus pada metode Eliminasi Gauss berlaku sama untuk kasus ini. Hanya saja, di sini matriks X dan B terdiri dari beberapa kolom, bukan hanya satu.

Contoh dua sistem persamaan linear yang memiliki nilai A sama tapi B berbeda.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \\ \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} \end{pmatrix}$$

Metode Eliminasi Gauss:

- rumus triangulasi:

$$a_{ij}^{(0)} = a_{ij}, \quad b_{ir}^{(0)} = b_{ir} \quad (i, j = 1, \dots, n; r = 1, \dots, m)$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} a_{kj}^{(k-1)} \quad (k = 1, \dots, n-1; i = k+1, \dots, n;$$

$$b_{ir}^{(k)} = b_{ir}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} b_{kr}^{(k-1)} \quad j = k, \dots, n; r = 1, \dots, m)$$

$a_{ij}^{(m)}, b_{ir}^{(m)} \equiv a_{ij}, b_{ir}$
pada langkah ke m

- rumus substitusi mundur:

$$x_{nr} = \frac{b_{nr}^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}} \quad (r = 1, \dots, m)$$

$$x_{n-j,r} = \frac{b_{n-j,r}^{(n-j-1)} - \sum_{k=n-j+1}^n a_{n-j,k}^{(n-j-1)} x_{kr}}{a_{n-j,n-j}^{(n-j-1)}} \quad (j = 1, \dots, n-1; r = 1, \dots, m)$$

Catatan:

Dalam rumus-rumus metode Eliminasi Gauss terdapat pembagian oleh elemen diagonal matriks yaitu, oleh elemen diagonal matriks A .

Jika secara kebetulan elemen diagonal itu nol, maka akan timbul error.

Karena itu, pada setiap langkah dalam proses triangulasi matriks A perlu dilakukan pemeriksaan, apakah elemen matriks A yang bersangkutan sama dengan nol.

Jika bernilai nol, maka baris berisi elemen diagonal nol itu harus ditukar dengan salah satu baris setelahnya, sehingga elemen diagonal menjadi bukan nol. Perubahan baris pada matriks A harus disertai perubahan baris yang sama pada matriks B .

Soal:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

baris 2 ditukar
dengan baris 3

Jawab:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{0} & 3.5 & -0.5 \\ 0 & 2 & -0.5 & -2.5 \\ 0 & -1 & -1.5 & 3.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -0.5 & -2.5 \\ 0 & 0 & 3.5 & -0.5 \\ 0 & -1 & -1.5 & 3.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -0.5 & -2.5 \\ 0 & 0 & 3.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -0.5 & -2.5 \\ 0 & 0 & 3.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & -1.75 & 2.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$x_4 = 1$$

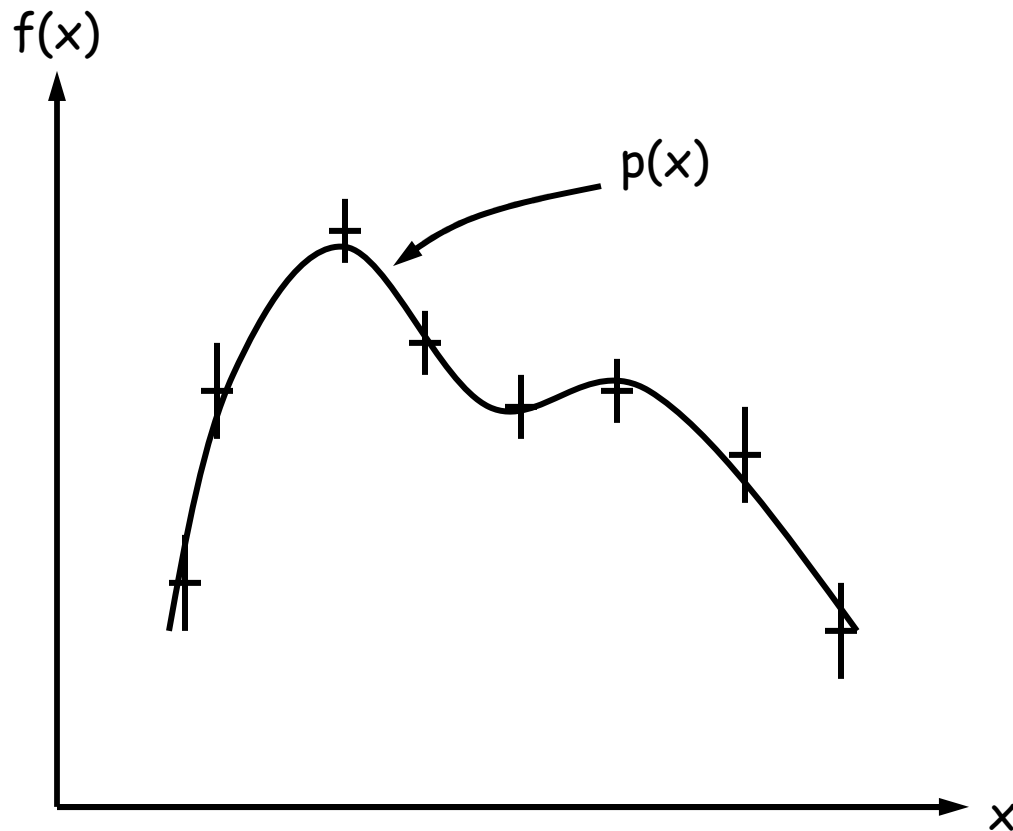
$$x_3 = \frac{3 + 0.5x_4}{3.5} = 1$$

$$x_2 = \frac{-1 + 0.5x_3 + 2.5x_4}{2} = 1$$

$$x_1 = \frac{2 + 4x_2 - x_3 - 3x_4}{2} = 1$$

28

Data Fitting dengan Metode Least Square



Keterangan:

- $f(x_i)$ mewakili data;
 $i = 1, \dots, N$;
 N = jumlah data
- $p(x)$ merupakan fungsi yang dicocokkan (fitted) terhadap data $f(x_i)$

Sifat fitting:

tidak selalu $p(x_i) = f(x_i)$
untuk semua x_i .

Prinsip penentuan fungsi $p(x)$:

- $p(x)$ merupakan polinomial orde m :

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_mx^m = \sum_{j=0}^m a_jx^j$$

(Secara umum, $p(x)$ juga bisa merupakan polinomial bentuk yang lain seperti, polinomial Legendre.)

- Selisih antara $p(x)$ dan $f(x)$ untuk titik data tertentu:

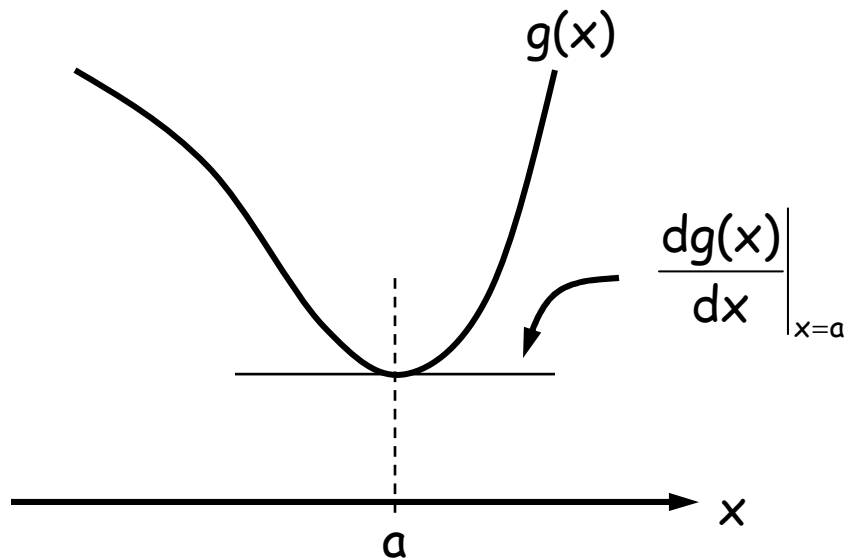
$$\Delta_i = f(x_i) - p(x_i) = f(x_i) - \sum_{j=0}^m a_jx_i^j \quad (i = 1, \dots, N)$$

- Jumlah kuadrat selisih antara $p(x)$ dan $f(x)$ untuk semua titik data:

$$S = \sum_{i=1}^N \Delta_i^2 = \sum_{i=1}^N (f(x_i) - p(x_i))^2 = \sum_{i=1}^N \left(f(x_i) - \sum_{j=0}^m a_jx_i^j \right)^2$$

Fungsi $p(x)$ ditentukan dengan mencari nilai a_j ($j = 0, \dots, m$) yang membuat S bernilai minimum.

Titik Minimum



$g(a)$ merupakan titik minimum jika:

$$\left. \frac{dg(x)}{dx} \right|_{x=a} = 0 \quad \text{dan} \quad \left. \frac{d^2g(x)}{dx^2} \right|_{x=a} > 0$$

Spesial: fungsi kuadrat $g(x) = ax^2 + bx + c$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dg(x)}{dx} = 2ax + b \\ \frac{d^2g(x)}{dx^2} = 2a \end{array} \right\} \begin{array}{l} g(x) \text{ memiliki satu titik minimum jika } a > 0 \text{ atau} \\ \text{sebaliknya satu titik maksimum jika } a < 0. \end{array}$$

S merupakan fungsi kuadrat dalam a_j ($j = 0, \dots, m$):

$$S(a_0, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^N \left(f(x_i) - \sum_{j=0}^m a_j x_i^j \right)^2 = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^m (a_j^2 x_i^{2j} + \dots) + f^2(x_i) \right)$$

$$\frac{\partial S(a_0, \dots, a_m)}{\partial a_k} = -2 \sum_{i=1}^N \left(f(x_i) - \sum_{j=0}^m a_j x_i^j \right) x_i^k \quad (k = 0, \dots, m)$$

$$\frac{\partial^2 S(a_0, \dots, a_m)}{\partial a_k^2} = 2 \sum_{i=1}^N x_i^{2k} > 0 \quad (k = 0, \dots, m)$$

S memiliki satu titik minimum pada nilai a_j ($j = 0, \dots, m$) tertentu.

Mencari a_j ($j = 0, \dots, m$):

$$\frac{\partial S(a_0, \dots, a_m)}{\partial a_k} = -2 \sum_{i=1}^N \left(f(x_i) - \sum_{j=0}^m a_j x_i^j \right) x_i^k = 0 \quad (k = 0, \dots, m)$$

$$\longrightarrow \sum_{j=0}^m \left(\sum_{i=1}^N x_i^{j+k} \right) a_j = \sum_{i=1}^N f(x_i) x_i^k \quad (k = 0, \dots, m)$$

Definisikan:

$$c_{kj} \equiv \sum_{i=1}^N x_i^{j+k} \quad b_k \equiv \sum_{i=1}^N f(x_i) x_i^k$$

maka diperoleh sebuah sistem persamaan linear: $\sum_{j=0}^m c_{kj} a_j = b_k \quad (k = 0, \dots, m)$

dalam bentuk matrik: $\begin{bmatrix} C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \end{bmatrix}$ atau $CA = B$

Jadi, a_j ($j = 0, \dots, m$) diperoleh sebagai solusi persamaan linear $CA = B$.

Contoh: Terdapat tiga data $f(x)$ yaitu, $f(1) = 30$, $f(2) = 70$ dan $f(3) = 120$.
Cari fungsi $p(x)$ yang dapat melukiskan data itu.

Dari data itu jelas $p(x)$ bukan fungsi linear.
Jadi, dicoba fungsi kuadratik:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

Sistem persamaan linier untuk mencari a_j :

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 14 \\ 6 & 14 & 36 \\ 14 & 36 & 98 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 220 \\ 530 \\ 1390 \end{pmatrix}$$

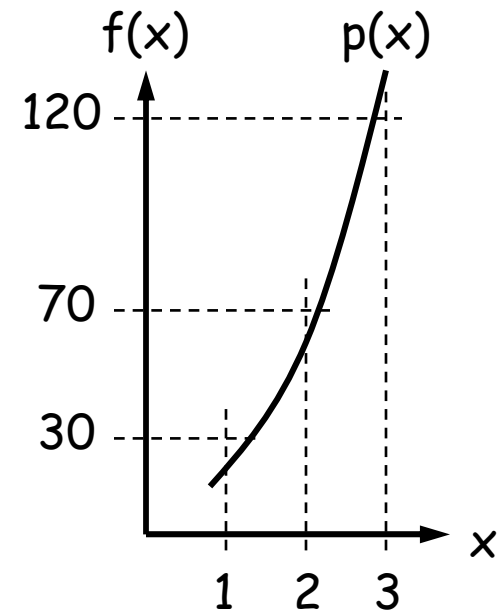
$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 14 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 220 \\ 45 \\ 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 25 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Jadi,

$$\boxed{p(x) = 5x(x+5)}$$

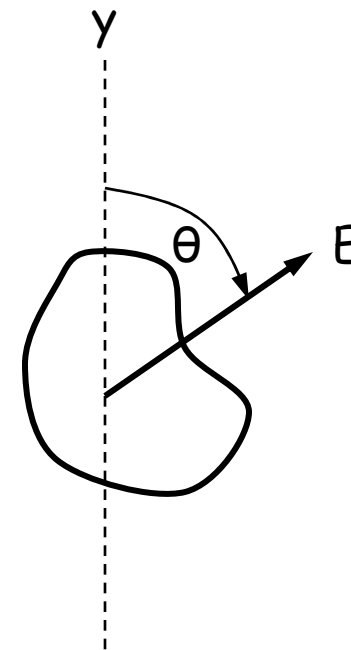
Cek: $p(1) = 30$, $p(2) = 70$,
 $p(3) = 120$

OK!



Contoh: Kuat medan listrik E di sekitar sebuah benda berbentuk lempeng diukur pada jarak 10 cm dari pusat massanya dan arah yang bervariasi. Arah dinyatakan dalam sudut θ terhadap sumbu y yang ditetapkan sebelum pengukuran. Diperoleh data sebagai berikut:

θ [derajat]	E [V/cm]
10	0.01794775
15	0.03808997
20	0.05516225
25	0.05598281
30	0.04795629
35	0.04807485
40	0.06273566
45	0.07853982
50	0.07395442
55	0.04201338



Cari fungsi $p(x)$ yang dapat melukiskan data itu.

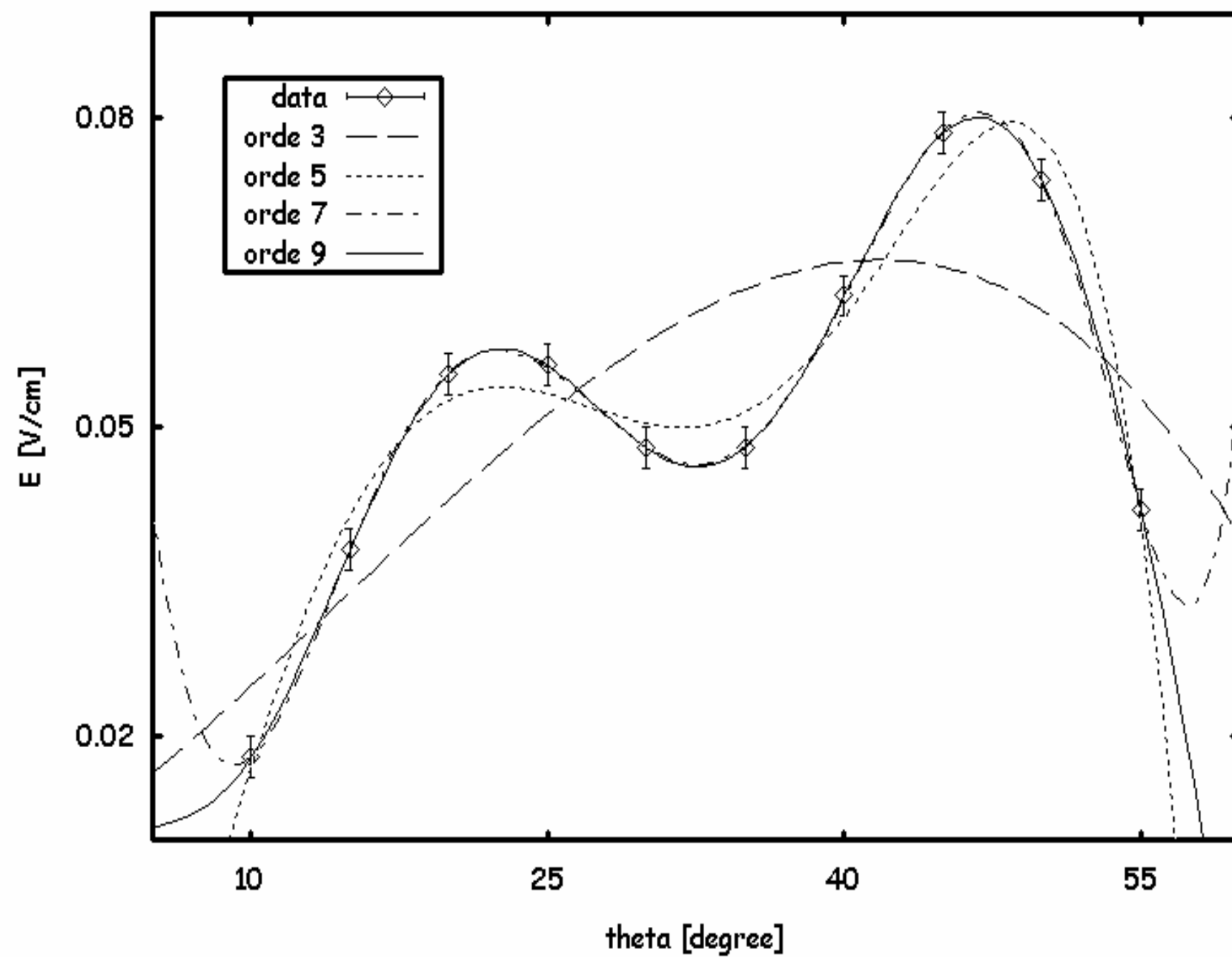
Dicoba beberapa polinomial dengan orde berbeda, diperoleh:

$$\begin{aligned}
 & a_0 = 8.983713484853211E-03 \\
 & a_1 = 1.324478388111303E-03 \\
 m = 3: & a_2 = 3.487808787880805E-05 \\
 & a_3 = -8.085809790211842E-07 \\
 & S = 1.0339E-03
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & a_0 = -3.557800654975570E-02 \\
 & a_1 = 1.061996221844471E-03 \\
 & a_2 = 8.802185976358352E-04 \\
 m = 5: & a_3 = -5.862332690401015E-05 \\
 & a_4 = 1.362046192596346E-06 \\
 & a_5 = -1.063951754163944E-08 \\
 & S = 8.1573E-05
 \end{aligned}$$

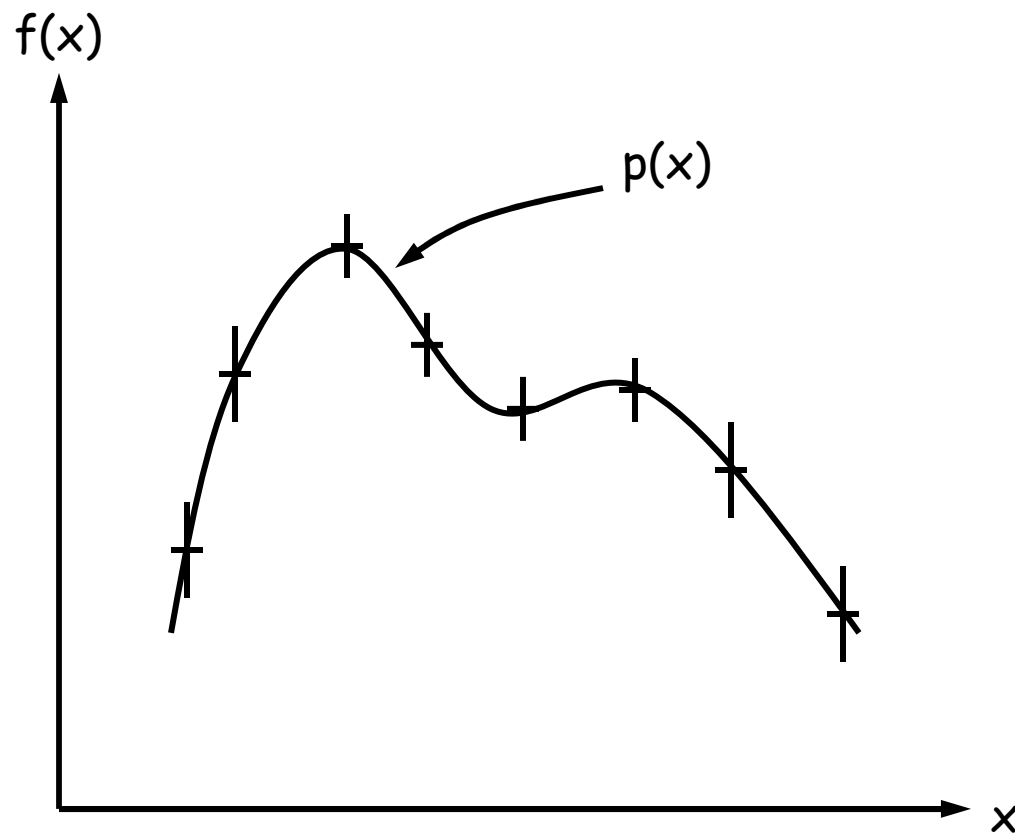
$$\begin{aligned}
 & a_0 = -1.757260839248139E-02 \\
 & a_1 = 1.596300085173997E-02 \\
 & a_2 = -3.402768734407800E-03 \\
 & a_3 = 3.358961098305538E-04 \\
 & a_4 = -1.368895999268855E-05 \\
 m = 9: & a_5 = 1.132254508386570E-07 \\
 & a_6 = 8.262829873458547E-09 \\
 & a_7 = -2.741786330789355E-10 \\
 & a_8 = 3.317446724324134E-12 \\
 & a_9 = -1.459511835946927E-14 \\
 & S = 1.7528E-11
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & a_0 = 1.864754537649403E-01 \\
 & a_1 = -4.631839872868015E-02 \\
 & a_2 = 4.007658091692495E-03 \\
 & a_3 = -8.985715636865594E-05 \\
 m = 7: & a_4 = -3.230489224228010E-06 \\
 & a_5 = 1.912806006890119E-07 \\
 & a_6 = -3.252863805243949E-09 \\
 & a_7 = 1.876184315740421E-11 \\
 & S = 3.1629E-07
 \end{aligned}$$



38

Interpolasi



Keterangan:

- $f(x_i)$ mewakili data;
 $i = 1, \dots, N$;
 $N = \text{jumlah data}$
- $p(x)$ merupakan fungsi interpolasi berdasarkan data $f(x_i)$

Sifat interpolasi:

$$p(x_i) = f(x_i) \\ \text{untuk semua } x_i.$$

Interpolasi Lagrange

Digunakan $p(x)$, suatu polinomial berorde $m = N - 1$, dengan $N =$ jumlah data:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{N-1}x^{N-1} \cong f(x)$$

Nilai a_i ($i = 0, \dots, N-1$) ditentukan dengan menetapkan bahwa untuk semua titik data:

$$p(x_i) = f(x_i) \quad (i = 1, \dots, N)$$

Jadi, diperoleh persamaan linear:

$$p(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_{N-1}x_1^{N-1} = f(x_1)$$

$$p(x_2) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_{N-1}x_2^{N-1} = f(x_2)$$

$$p(x_3) = a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + \dots + a_{N-1}x_3^{N-1} = f(x_3)$$

...

$$p(x_N) = a_0 + a_1x_N + a_2x_N^2 + \dots + a_{N-1}x_N^{N-1} = f(x_N)$$

dan a_i ($i = 0, \dots, N-1$) diperoleh sebagai solusi dari persamaan linear itu.

$N = 2$:

$$p(x_1) = a_0 + a_1 x_1 = f(x_1)$$

$$p(x_2) = a_0 + a_1 x_2 = f(x_2)$$

$$a_0 = -\frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_1 - x_2} \quad a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$p(x) = \left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \right) f(x_1) + \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) f(x_2)$$

$N = 3$:

$$p(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = f(x_1)$$

$$p(x_2) = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = f(x_2)$$

$$p(x_3) = a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 = f(x_3)$$

$$a_0 = \frac{(x_2 - x_3)x_2 x_3 f(x_1) + (x_3 - x_1)x_3 x_1 f(x_2) + (x_1 - x_2)x_1 x_2 f(x_3)}{(x_2 - x_3)x_1^2 + (x_3 - x_1)x_2^2 + (x_1 - x_2)x_3^2}$$

$$a_1 = -\frac{(x_2^2 - x_3^2)f(x_1) + (x_3^2 - x_1^2)f(x_2) + (x_1^2 - x_2^2)f(x_3)}{(x_2 - x_3)x_1^2 + (x_3 - x_1)x_2^2 + (x_1 - x_2)x_3^2}$$

$$a_2 = \frac{(x_2 - x_3)f(x_1) + (x_3 - x_1)f(x_2) + (x_1 - x_2)f(x_3)}{(x_2 - x_3)x_1^2 + (x_3 - x_1)x_2^2 + (x_1 - x_2)x_3^2}$$

$$p(x) = \left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \right) \left(\frac{x - x_3}{x_1 - x_3} \right) f(x_1) + \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) \left(\frac{x - x_3}{x_2 - x_3} \right) f(x_2) + \left(\frac{x - x_1}{x_3 - x_1} \right) \left(\frac{x - x_2}{x_3 - x_2} \right) f(x_3)$$

Secara umum, untuk N data
rumus interpolasi Lagrange:

$$p(x) = \sum_{i=1}^N l(x, x_i) f(x_i)$$

$$l(x, x_i) = \prod_{j \neq i} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

Untuk $x = x_k$ ($k = 1, \dots, N$):

$$l(x_k, x_i) = \prod_{j \neq i} \left(\frac{x_k - x_j}{x_i - x_j} \right) = \begin{cases} \prod_{j \neq i} \left(\frac{x_i - x_j}{x_i - x_j} \right) & = 1, \quad (i = k) \\ \dots \left(\frac{x_k - x_k}{x_i - x_j} \right) \dots & = 0, \quad (i \neq k) \end{cases}$$

$$\longrightarrow l(x_k, x_i) = \delta_{ik} \quad p(x_k) = f(x_k)$$

Perluah memakai semua N data yang ada?

Pada bagian sebelum ini interpolasi menggunakan seluruh N data $f(x_i)$ yang tersedia, yang berarti menggunakan polinomial $p(x)$ berorde N-1.

Kini, misal $N = 4$ dan x berada di sekitar x_4 , maka diperoleh:

$$l(x, x_1) = \left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \right) \left(\frac{x - x_3}{x_1 - x_3} \right) \left(\frac{x - x_4}{x_1 - x_4} \right) \quad l(x, x_2) = \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) \left(\frac{x - x_3}{x_2 - x_3} \right) \left(\frac{x - x_4}{x_2 - x_4} \right)$$

$$l(x, x_3) = \left(\frac{x - x_1}{x_3 - x_1} \right) \left(\frac{x - x_2}{x_3 - x_2} \right) \left(\frac{x - x_4}{x_3 - x_4} \right) \quad l(x, x_4) = \left(\frac{x - x_1}{x_4 - x_1} \right) \left(\frac{x - x_2}{x_4 - x_2} \right) \left(\frac{x - x_3}{x_4 - x_3} \right)$$

Dapat dilihat bahwa, $l(x, x_1) < l(x, x_2) < l(x, x_3) < l(x, x_4)$.

Ini berarti, semakin jauh dari x pengaruh data $f(x_i)$ semakin kecil dalam menentukan nilai $p(x)$. Data yang penting yaitu yang berada di sekitar titik x . Karena itu, cukup data-data di sekitar titik x yang digunakan.

Dengan kata lain, untuk interpolasi cukup digunakan polinomial $p(x)$ berorde rendah, contoh berorde 3 (fungsi kubik).

Interpolasi Lagrange Kubik

Interpolasi Lagrange Kubik menggunakan polinomial $p(x)$ berorde 3 sebagai fungsi interpolasi:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \cong f(x)$$

Untuk mencari nilai a_j ($j = 0, 1, 2, 3$) diperlukan 4 data $f(x_i)$ di sekitar x :

$$f(x_0), f(x_1), f(x_2), f(x_3) \quad (x_i \leq x \leq x_{i+1}; x_0 = x_{i-1}, x_1 = x_i, x_2 = x_{i+1}, x_3 = x_{i+2})$$

untuk membentuk sistem persamaan linear:

$$a_0 + a_1x_j + a_2x_j^2 + a_3x_j^3 = f(x_j) \quad (j = 0, 1, 2, 3)$$

Langkah pertama dengan begitu, menentukan x_j ($j = 0, 1, 2, 3$) dengan melihat posisi x di antara titik data x_i ($i = 1, \dots, N$).

Diperoleh

$$p(x) = \sum_{j=0}^3 l(x, x_j) f(x_j) \quad l(x, x_j) = \prod_{k \neq j} \left(\frac{x - x_k}{x_j - x_k} \right)$$

Interpolasi Multidimensi

Jika data bergantung pada lebih dari satu variabel, maka dilakukan interpolasi multidimensi. Metode interpolasi yang telah disampaikan bisa dipakai untuk melakukan interpolasi multidimensi. Sebagai contoh di sini ditunjukkan interpolasi 2 dimensi. Untuk dimensi lebih tinggi berlaku cara yang sama.

$$p(x, y) = \sum_{i=1}^n S(x, x_i) \sum_{j=1}^m S(y, y_j) f(x_i, y_j)$$

Pada contoh di atas, interpolasi menggunakan $(n \times m)$ data $f(x, y)$. Interpolasi dilakukan per dimensi: Untuk satu titik data x tertentu dilakukan interpolasi di sepanjang sumbu y , hal yang sama dilakukan untuk semua titik data x yang lain. Prinsip yang sama berlaku untuk interpolasi berdimensi lebih tinggi.

Contoh, interpolasi Lagrange kubik:

$$p(x, y) = \sum_{i=0}^3 l(x, x_i) \sum_{j=0}^3 l(y, y_j) f(x_i, y_j)$$

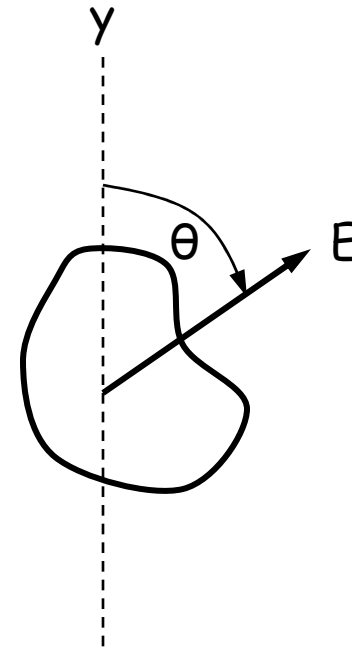
$$l(x, x_i) = \prod_{k \neq i} \left(\frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right)$$

$$l(y, y_j) = \prod_{s \neq j} \left(\frac{y - y_s}{y_j - y_s} \right)$$

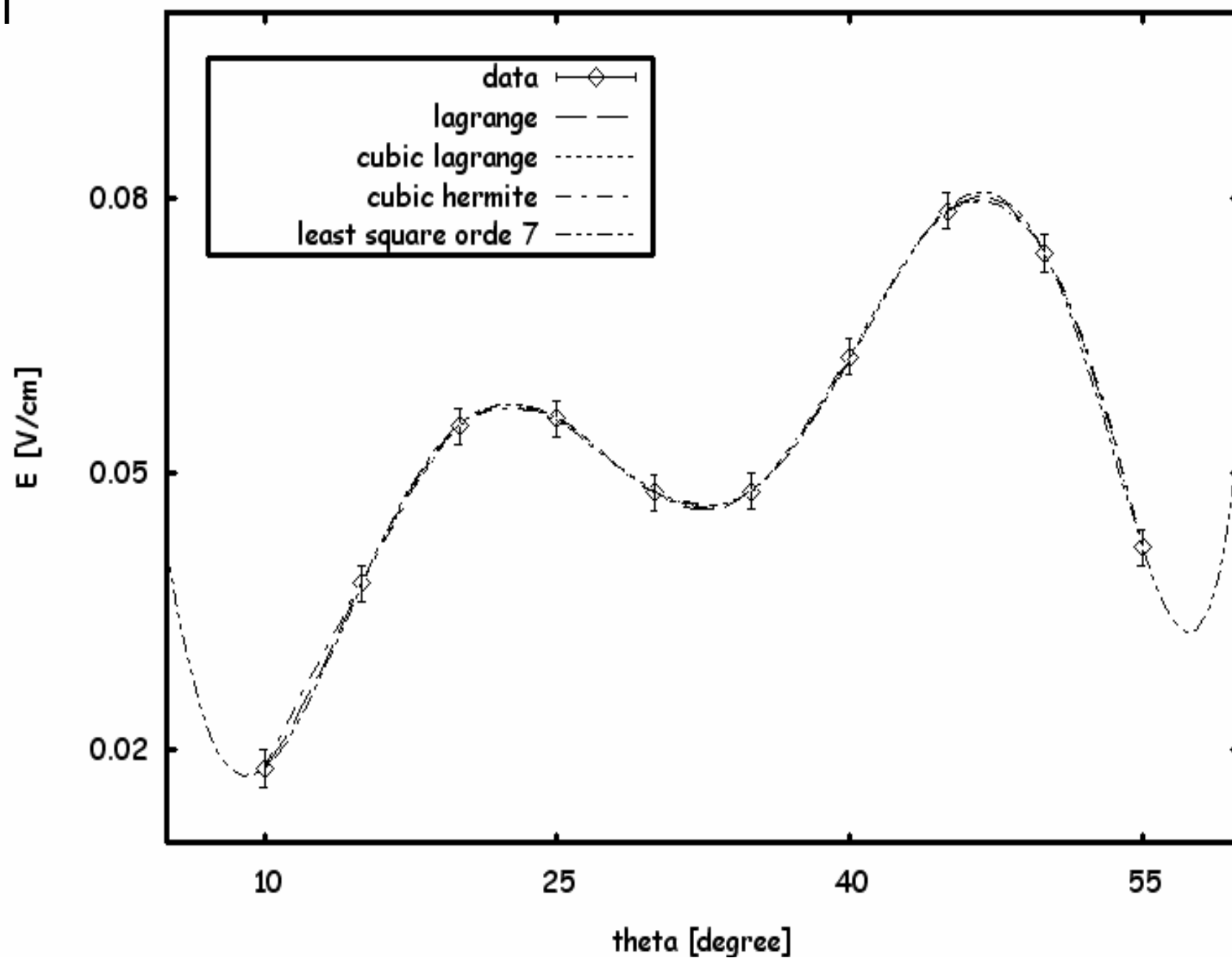
Kembali ke contoh problem least square:

Kuat medan listrik E di sekitar sebuah benda berbentuk lempeng diukur pada jarak 10 cm dari pusat massanya dan arah yang bervariasi. Arah dinyatakan dalam sudut θ terhadap sumbu y yang ditetapkan sebelum pengukuran. Diperoleh data sebagai berikut:

θ [derajat]	E [V/cm]
10	0.01794775
15	0.03808997
20	0.05516225
25	0.05598281
30	0.04795629
35	0.04807485
40	0.06273566
45	0.07853982
50	0.07395442
55	0.04201338



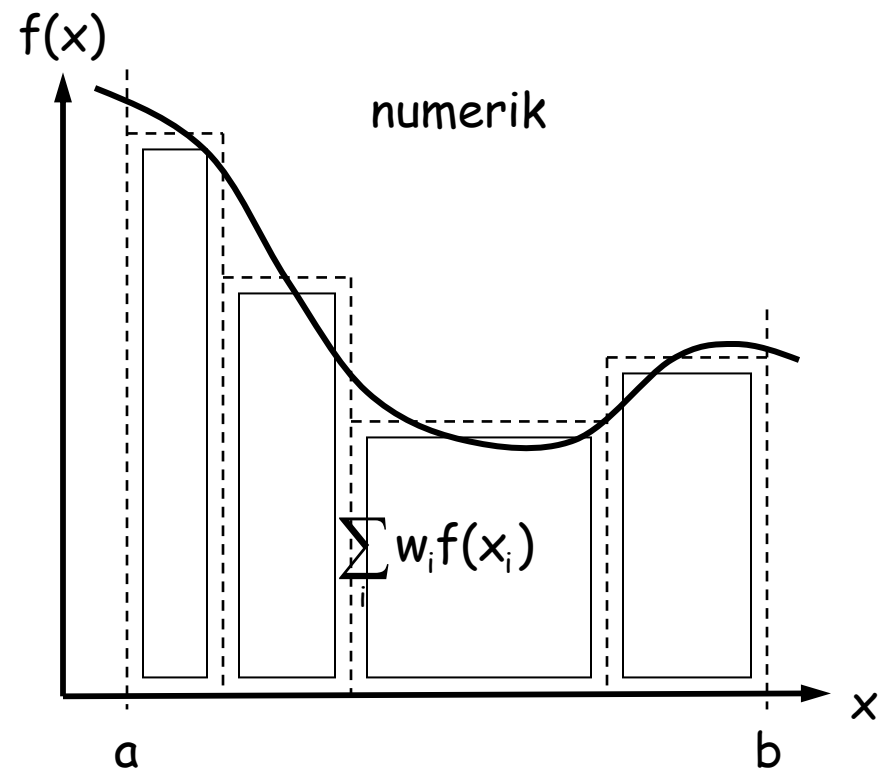
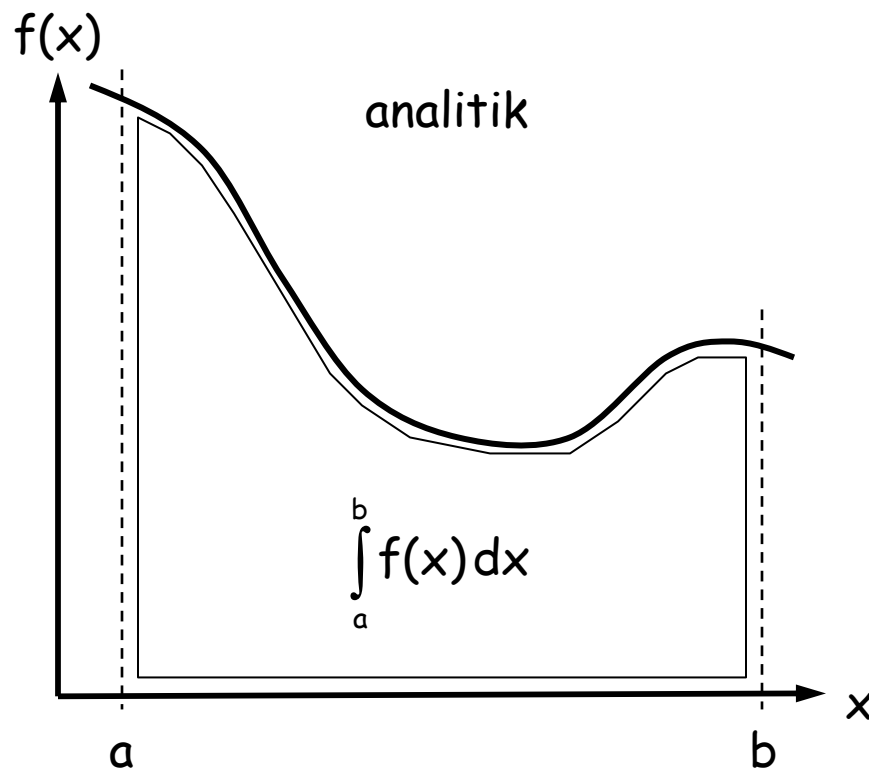
Dengan interpolasi, cari nilai $p(x)$ di sepanjang titik data.



Integrasi

49

Menghitung luas daerah di bawah kurva:



$$I = \int_a^b f(x) dx \cong \sum_{i=1}^N w_i f(x_i)$$

Integral numerik sering disebut juga sebagai quadrature; integrasi numerik disebut sebagai integrasi dgn menjumlah quadrature.

Meski tidak terlihat pada rumus akhir, pada integrasi numerik integrand $f(x)$ diinterpolasi dengan suatu polinomial:

$$I = \int_a^b f(x) dx \cong \sum_{i=1}^N w_i f(x_i)$$

$$f(x) \cong p(x) \longleftarrow \text{polinomial}$$

Akan dibahas:

- quadrature trapezoid
- quadrature Simpson

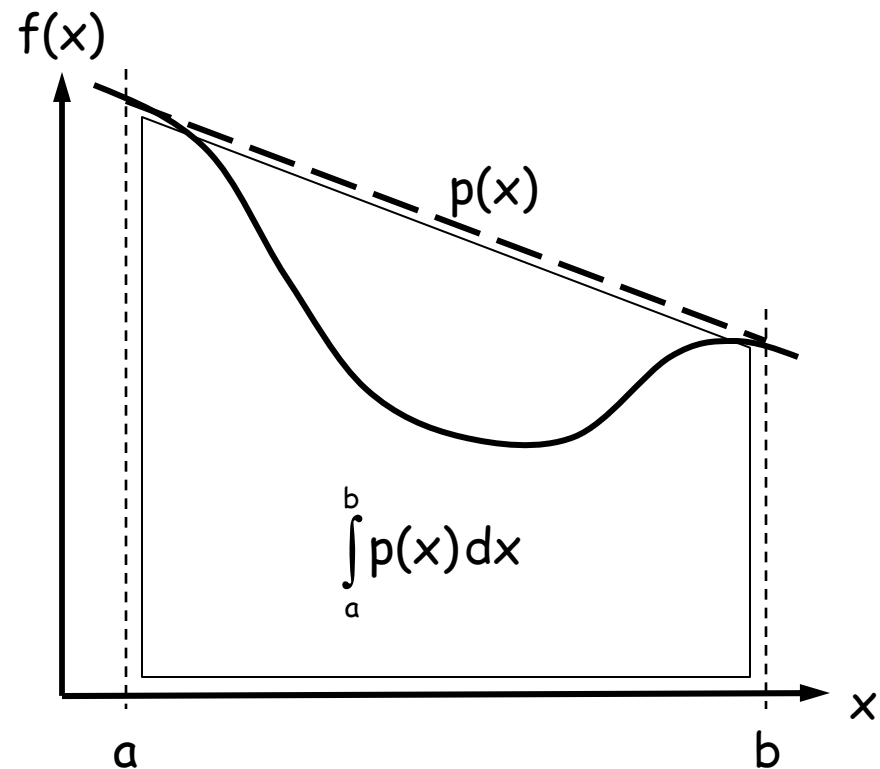
Quadrature Trapezoid

Kurva integrand $f(x)$ diinterpolasi dengan sebuah garis lurus ($f(x)$ diinterpolasi dengan fungsi linier / polinomial orde 1):

$$I = \int_a^b f(x) dx \cong \int_a^b p(x) dx = \sum_{i=1}^N w_i p(x_i), \quad p(x) = r + sx$$

Untuk menarik garis lurus diperlukan minimal 2 titik, dipilih titik $f(a)$ dan $f(b)$:

$$p(a) = f(a), \quad p(b) = f(b)$$



Dengan diketahui hanya $p(a)$ dan $p(b)$ (r dan s tidak dicari), maka integrasi numerik dikerjakan untuk $N = 2$:

$$\int_a^b p(x) dx = \sum_{i=1}^2 w_i p(x_i) = w_1 p(x_1) + w_2 p(x_2) = w_1 p(a) + w_2 p(b) \longrightarrow w_1, w_2 = ?$$

Mencari w_1 dan w_2 :

$$p(x) = r + sx \longrightarrow \int_a^b (r + sx) dx = w_1(r + sa) + w_2(r + sb)$$

$$r(b-a) + \frac{1}{2}s(b^2 - a^2) = r(w_1 + w_2) + s(aw_1 + bw_2)$$

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= b - a \\ aw_1 + bw_2 &= \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \end{aligned} \longrightarrow w_1 = w_2 = \frac{1}{2}(b - a)$$

Rumus quadrature trapezoid:

$$I = \int_a^b f(x) dx \cong \frac{h}{2} (f(a) + f(b)) \quad (h = b - a)$$

luas trapezoid (lihat gambar)

Quadrature Simpson & Boole

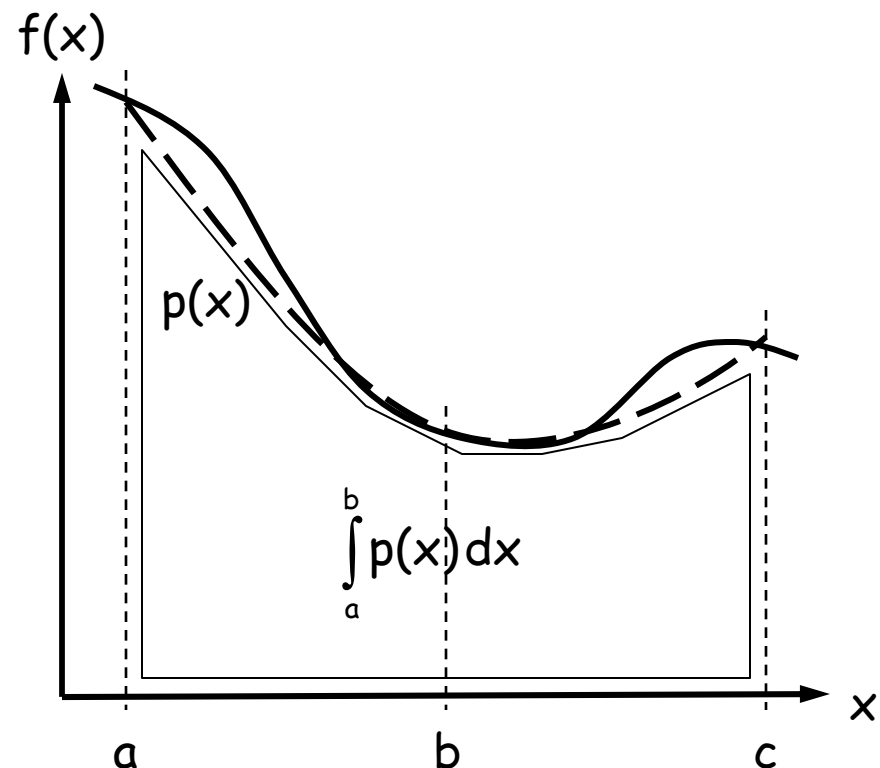
Cara yang sama seperti pada quadrature trapezoid bisa dipakai untuk polinomial $p(x)$ orde lebih tinggi. Contoh, quadrature Simpson memakai $p(x)$ fungsi kuadrat / polinomial orde 2 untuk menginterpolasi integrand $f(x)$:

$$I = \int_a^c f(x) dx \cong \int_a^c p(x) dx = \sum_{i=1}^N w_i p(x_i), \quad p(x) = r + sx + tx^2$$

Untuk membuat kurva kuadratik diperlukan minimal 3 titik, dipilih titik $f(a)$, $f(b)$ dan $f(c)$:

$$\begin{aligned} p(a) &= f(a), & p(b) &= f(b), \\ p(c) &= f(c) \end{aligned}$$

dengan $b = \frac{a+c}{2}$



Integrasi numerik dikerjakan untuk $N = 3$:

$$\int_a^c p(x) dx = \sum_{i=1}^3 w_i p(x_i) = w_1 p(a) + w_2 p(b) + w_3 p(c) \longrightarrow w_1, w_2, w_3 = ?$$

Mencari w_1, w_2, w_3 :

$$p(x) = r + sx + tx^2 \longrightarrow \int_a^c (r + sx + tx^2) dx = w_1(r + sa + ta^2) + w_2(r + sb + tb^2) + w_3(r + sc + tc^2)$$

$$r(c-a) + \frac{1}{2}s(c^2 - a^2) + \frac{1}{3}t(c^3 - a^3) = r(w_1 + w_2 + w_3) + s(aw_1 + bw_2 + cw_3) + t(a^2w_1 + b^2w_2 + c^2w_3)$$

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 + w_3 &= c - a \\ aw_1 + bw_2 + cw_3 &= \frac{1}{2}(c^2 - a^2) \\ a^2w_1 + b^2w_2 + c^2w_3 &= \frac{1}{3}(c^3 - a^3) \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} w_1 &= w_3 = \frac{1}{6}(c - a) \\ w_2 &= \frac{2}{3}(c - a) \end{aligned}$$

Diperoleh Rumus quadrature Simpson:

$$I = \int_a^c f(x) dx \cong \frac{h}{3} (f(a) + 4f(b) + f(c))$$

dengan $h = \frac{c-a}{2}$ yaitu jarak antar titik x_i tempat $f(x)$ dihitung: $h = b-a = c-b$

Dengan cara yang sama, menggunakan $p(x)$ polinomial orde 3 diperoleh rumus quadrature Simpson $\frac{3}{8}$:

$$I = \int_a^d f(x) dx \cong \frac{3h}{8} (f(a) + 3f(b) + 3f(c) + f(d)) \quad \left(h = \frac{d-a}{3} = b-a = c-b = d-c \right)$$

dan dengan $p(x)$ polinomial orde 4 rumus quadrature Boole:

$$I = \int_a^e f(x) dx \cong \frac{2h}{45} (7f(a) + 32f(b) + 12f(c) + 32f(d) + 7f(e)) \quad \left(\begin{array}{l} h = \frac{e-a}{4} = b-a \\ \quad \quad \quad = c-b \\ \quad \quad \quad = d-c \\ \quad \quad \quad = e-d \end{array} \right)$$

Integrasi Komposit

Polinomial orde rendah memadai untuk menginterpolasi sebuah fungsi dalam daerah yang sempit. Untuk daerah yang lebar diperlukan orde yang lebih tinggi. Alternatif lain yaitu, membagi daerah fungsi yang lebar itu dalam beberapa daerah yang sempit, lalu di tiap daerah yang sempit itu digunakan polinomial orde rendah untuk interpolasi.

Quadrature trapezoid dan Simpson pada dasarnya memadai untuk daerah integrasi yang sempit, namun dengan membagi daerah integrasi dalam beberapa daerah yang sempit, maka quadrature trapezoid dan Simpson bisa dipakai juga untuk daerah integrasi yang lebar. Integral total merupakan jumlah semua integral untuk daerah yang sempit. Integrasi seperti ini disebut integrasi komposit.

Bergantung pada integrand $f(x)$, daerah integrasi yang lebar bisa dibagi dalam beberapa daerah sempit yang sama atau berbeda panjang. Juga, semua integral untuk daerah yang sempit bisa dihitung menurut rumus quadrature yang sama, misal semuanya trapezoid, atau berbeda-beda, sesuai kurva di tiap daerah sempit itu. Kasus sederhana yaitu, bila daerah integrasi dibagi sama panjang dan untuk tiap daerah digunakan rumus quadrature yang sama.

Contoh, daerah integrasi $[a,b]$ dibagi dalam N bagian sama panjang.

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^{a+d} f(x) dx + \int_{a+d}^{a+2d} f(x) dx + \dots + \int_{b-2d}^{b-d} f(x) dx + \int_{b-d}^b f(x) dx \quad \left(d = \frac{b-a}{N} \right)$$

- integrasi komposit menggunakan quadrature trapezoid

$$I = \int_a^b f(x) dx \cong h \left[\frac{1}{2} (f_0 + f_N) + f_1 + f_2 + \dots + f_{N-1} \right]$$

$$h = \frac{b-a}{N}, \quad f_i = f(a+ih), \quad i = 0, \dots, N$$

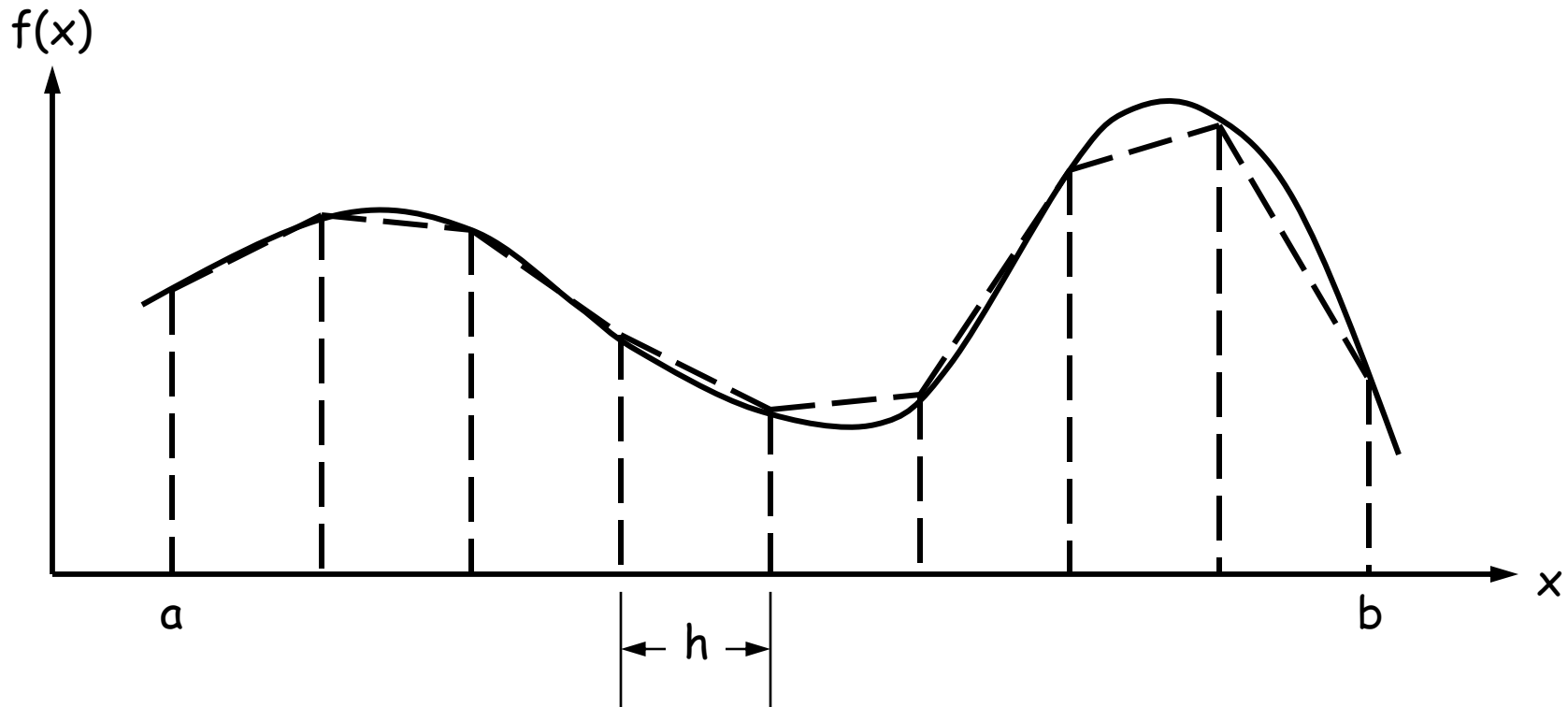
- integrasi komposit menggunakan quadrature Simpson

$$I = \int_a^b f(x) dx \cong \frac{2h}{3} \left[\frac{1}{2} (f_0 + f_{2N}) + 2(f_1 + f_3 + \dots + f_{2N-1}) + f_2 + f_4 + \dots + f_{2N-2} \right]$$

$$h = \frac{b-a}{2N}, \quad f_i = f(a+ih), \quad i = 0, \dots, 2N$$

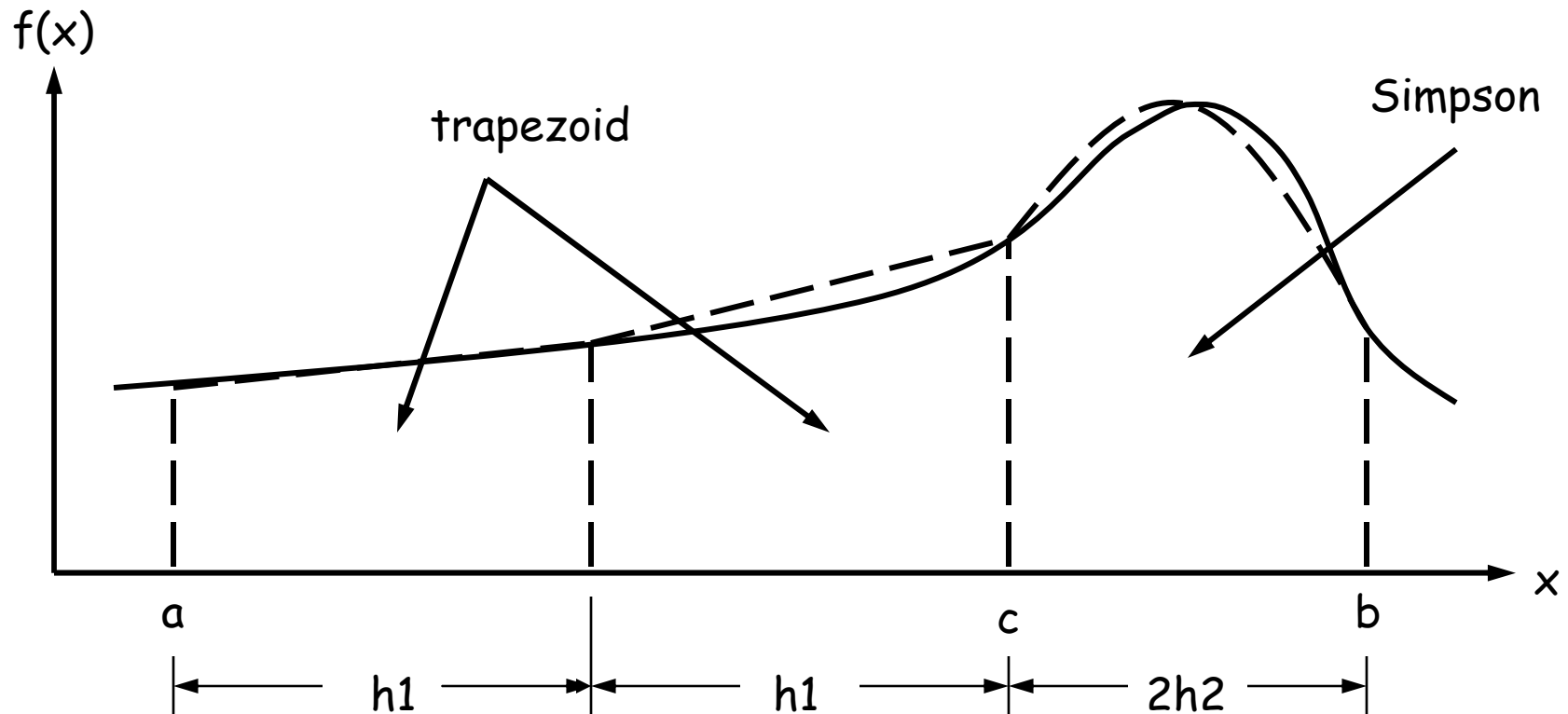
Integrasi komposit trapezoid untuk daerah integrasi $[a,b]$ yang dibagi 8 sama panjang:

$$I = \int_a^b f(x) dx \cong h \left[\frac{1}{2} (f_0 + f_8) + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 \right]$$



Integrasi komposit yang menggunakan quadrature trapezoid dan Simpson;
daerah integrasi $[a,b]$ yang dibagi 3:

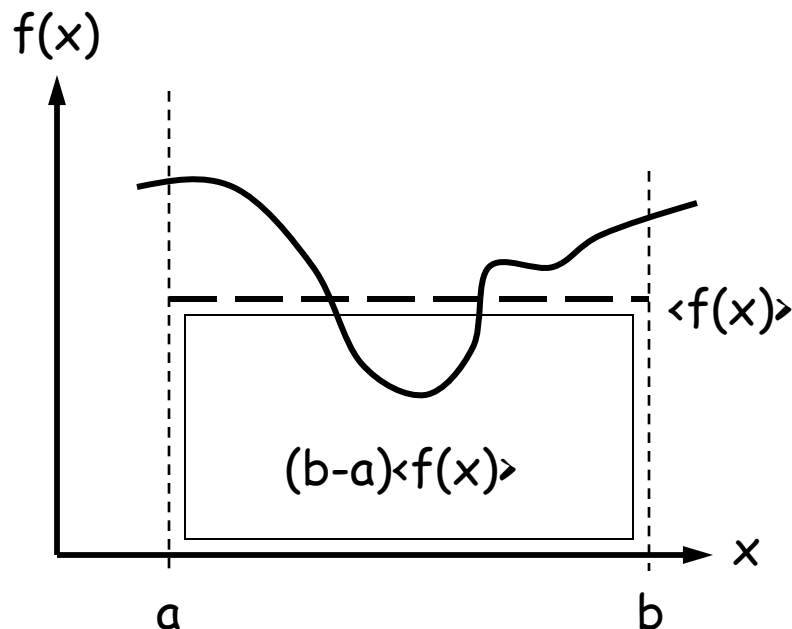
$$I = \int_a^b f(x) dx \cong \frac{h_1}{2} (f_a + 2f_{a+h_1} + f_c) + \frac{h_2}{3} (f_c + 4f_{c+h_2} + f_b)$$



Integrasi Monte Carlo

Mungkin saja cara-cara integrasi numerik yang sudah disampaikan sulit atau tidak bisa diterapkan untuk mengevaluasi suatu integral. Pada keadaan ini, integrasi Monte Carlo dapat dipilih.

Integrasi Monte Carlo tidak menggunakan interpolasi seperti pada cara-cara integrasi numerik sebelum ini. Integral dianggap sebagai satu persegi panjang, dengan lebar daerah integrasi dan tinggi nilai rata-rata integrand $f(x)$, yang diperoleh melalui statistik dengan memanfaatkan bilangan acak:



$$\langle f(x) \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

$$x_i = \text{bilangan acak: } a \leq x_i \leq b$$

$$I = \int_a^b f(x) dx \cong (b-a) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

Persamaan Differensial

Persamaan differensial (PD) yang dimaksud yaitu persamaan differensial biasa, bukan persamaan differensial parsial, untuk orde 1 dan 2.

Dua masalah yang akan dibahas yaitu:

- PD dengan syarat awal
- PD dengan syarat batas

PD dengan Syarat Awal

Bentuk umum PD orde 1: $y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y)$

Diketahui: $y(x_0) = y_0 \longrightarrow y(x) = ?$

Integrasi: $\int_{y_0}^y dy = \int_{x_0}^x f(x, y) dx$

$$\downarrow$$

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx$$

Masalah persamaan differensial berubah menjadi masalah persamaan integral.

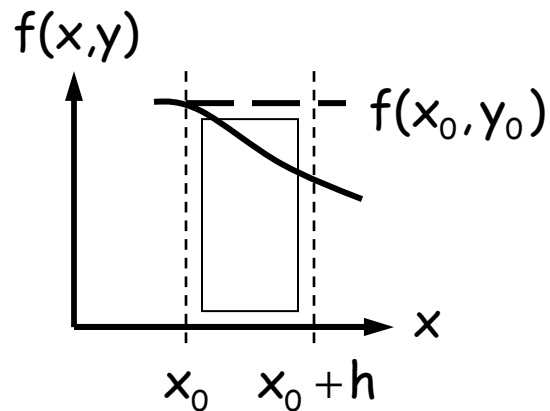
Dicari $y(x)$ pada titik $x = x_0 + h$:

$$y(x_0 + h) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y) dx$$

Setelah $y(x_0 + h)$ didapat, selanjutnya dicari $y(x_0 + 2h)$. Demikian seterusnya.

Metode Euler

Menurut metode Euler:

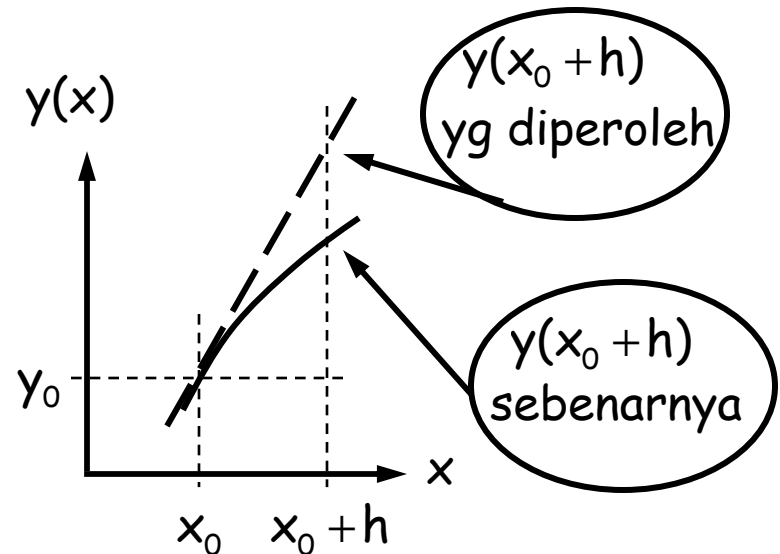


$f(x,y)$ dianggap konstan dan dihitung pada $x = x_0$.

Diperoleh:

$$y(x_0 + h) \cong y_0 + f(x_0, y_0) \int_{x_0}^{x_0 + h} dx$$

$$\cong y_0 + hf(x_0, y_0)$$



Metode Euler yang Dimodifikasi

Modifikasi dilakukan dalam memilih nilai $f(x,y)$ yang dianggap konstan. Dipilih $f(x,y)$ pada titik $x = x_0 + \frac{1}{2}h$:

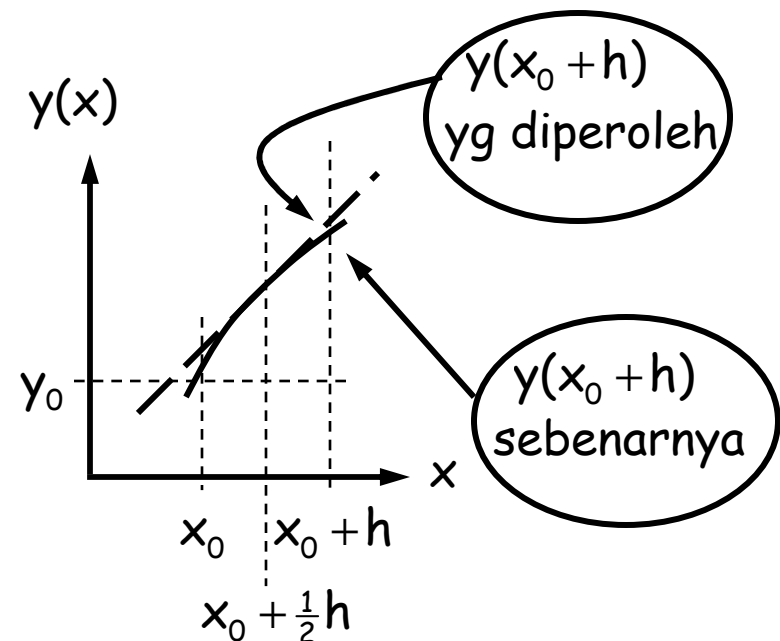
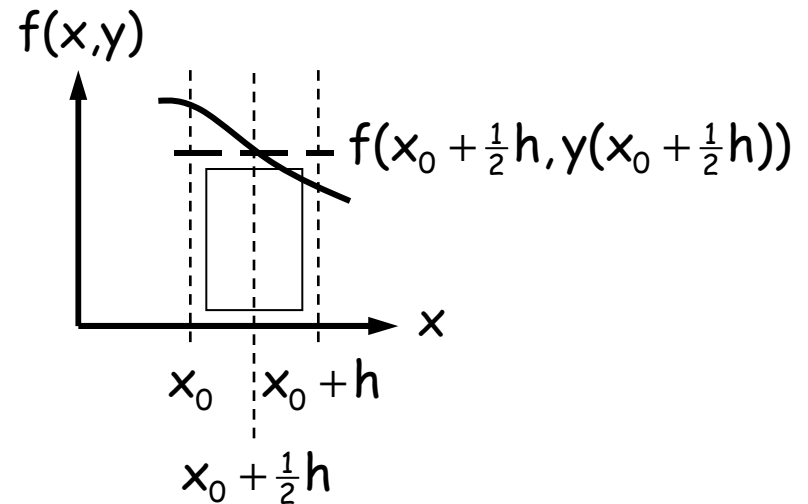
$$f(x_0 + \frac{1}{2}h, y(x_0 + \frac{1}{2}h))$$

dengan $y(x_0 + \frac{1}{2}h)$ dihitung memakai metode Euler:

$$y(x_0 + \frac{1}{2}h) \cong y_0 + \frac{1}{2}hf(x_0, y_0)$$

Diperoleh:

$$\begin{aligned} y(x_0 + h) &\cong y_0 + hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y(x_0 + \frac{1}{2}h)) \\ &\cong y_0 + hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}hf(x_0, y_0)) \end{aligned}$$



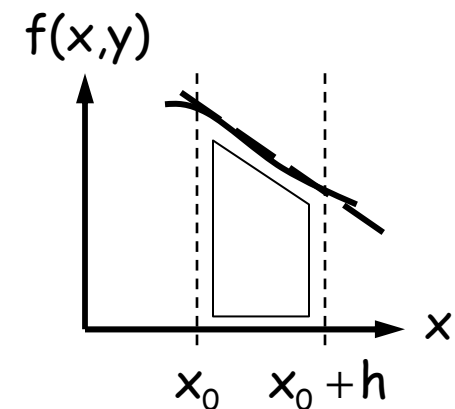
Metode Euler yang Lebih Baik (Improved)

Kali ini dipakai nilai $f(x,y)$ yang merupakan rata-rata dari dua nilai $f(x,y)$, masing-masing pada titik x_0 dan $x_0 + h$:

$$\frac{1}{2} [f(x_0, y_0) + f(x_0 + h, y(x_0 + h))]$$

Ini sama dengan menggunakan quadrature trapezoid untuk mengevaluasi integral:

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x,y) dx \cong \frac{1}{2} h [f(x_0, y_0) + f(x_0 + h, y(x_0 + h))]$$



dengan $y(x_0 + h)$ dihitung memakai metode Euler:

$$y(x_0 + h) \cong y_0 + hf(x_0, y_0)$$

Diperoleh:

$$\begin{aligned} y(x_0 + h) &\cong y_0 + \frac{1}{2} h [f(x_0, y_0) + f(x_0 + h, y(x_0 + h))] \\ &\cong y_0 + \frac{1}{2} h [f(x_0, y_0) + f(x_0 + h, y_0 + hf(x_0, y_0))] \end{aligned}$$

PD Orde 2

Bentuk umum PD orde 2:

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, y')$$

Diketahui:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0 \longrightarrow y(x) = ?$$

Definisikan fungsi baru u :

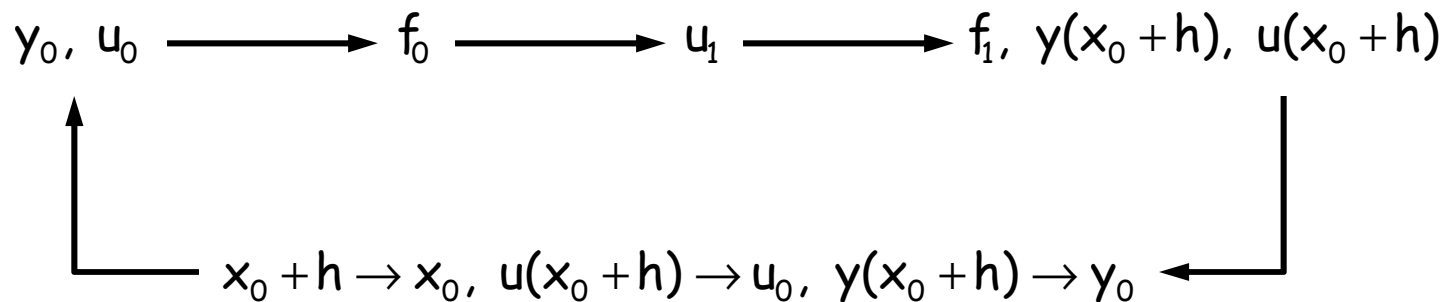
$$\begin{array}{ccc} u = y' & \longrightarrow & y' = u(x, y) \\ u_0 = y'_0 & & u' = f(x, y, u) \end{array}$$

Masalah PD orde 2
berubah menjadi
masalah PD orde 1.

Contoh penyelesaian dengan metode Euler yang lebih baik (improved):

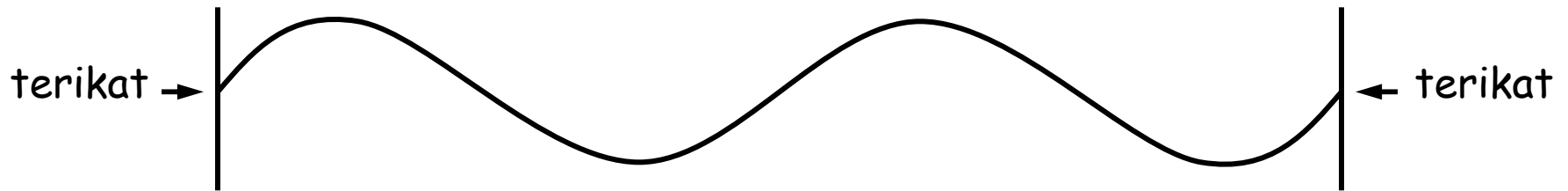
$u' = f(x, y, u)$	$y' = u(x, y)$
$u(x_0 + h) = u_0 + \frac{1}{2}h(f_0 + f_1)$	$y(x_0 + h) = y_0 + \frac{1}{2}h(u_0 + u_1)$
$f_0 = f(x_0, y_0, u_0)$	$u_0 = y'_0$
$f_1 = f(x_0 + h, y_0 + hu_0, u_1)$	$u_1 = u_0 + hf_0$

Alur perhitungan:



PD dengan Syarat Batas

Contoh, gelombang yang merambat di sepanjang tali bisa digambarkan dengan PD orde 2. Jika ujung-ujung tali itu diikat sehingga tidak bisa bergerak, maka kita temui kasus PD dengan syarat batas.



Bentuk umum PD orde 1 & 2 linear: (1) $y' = f(x, y) = d(x) - e(x)y$
 (2) $y'' = g(x, y, y') = a(x) - b(x)y - c(x)y'$

Diketahui:

$$x_0 \leq x \leq x_n$$

$$y(x_0) = y_0 \longrightarrow y(x) = ?$$

$$y(x_n) = y_n$$

Dicari $y_i = y(x_i)$ pada titik $x_i = x_0 + ih$ ($i = 1, \dots, n-1$) dengan $h = \frac{x_n - x_0}{n}$.

Metode Finite Differences

69

$$(1) y' + e(x)y = d(x)$$

$$(2) y'' + c(x)y' + b(x)y = a(x)$$

$$y'_i \cong \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

$$y''_i \cong \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

$$(1) y'_i + e_i y_i = d_i$$

$$(2) y''_i + c_i y'_i + b_i y_i = a_i$$

$$(1) \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + e_i y_i \cong d_i$$

$$(2) \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + c_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + b_i y_i \cong a_i$$

Jadi, pada akhirnya ditemui masalah sistem persamaan linear:

$$(1) -y_{i-1} + 2e_i h y_i + y_{i+1} \cong 2d_i h$$

$$(2) \left(1 - \frac{c_i h}{2}\right) y_{i-1} - (2 - b_i h^2) y_i + \left(1 + \frac{c_i h}{2}\right) y_{i+1} \cong a_i h^2$$

yang dapat diselesaikan menggunakan metode, contoh, Eliminasi Gauss.