Universidad Simón Bolívar
Matemáticas para la Computación
Tarea IV

Fabiola Di Bartolo
Carnet: 09-87324

7 de julio de 2010

Ejercicio 1. Establecer las fórmulas de inversión de la tabla 264 del capítulo 6 del Concrete Mathematics 2da. Edición. Para $n, m \geq 0$.

$$\sum_k \left[n \atop k \right] \left\{ k \atop m \right\} (-1)^{n-k} = [m = n] \tag{1}$$

Antes de demostrar la fórmula, estudiaremos el comportamiento de la fórmula variando los valores de n y m. Para los valores de n y m se tienen 3 posibilidades, o $n = m$, $n < m$ o $n > m$.

⋆ Para $n = m$:

$$1 = \sum_k \left[n \atop k \right] \left\{ k \atop n \right\} (-1)^{n-k}$$

$\equiv \langle$ Separación de sumatorias por rangos $\rangle$

$$1 = \sum_{k \leq n-1} \left[n \atop k \right] \left\{ k \atop n \right\} (-1)^{n-k} + \left[n \atop n \right] \left\{ n \atop n \right\} + \sum_{k > n} \left[n \atop k \right] \left\{ k \atop n \right\} (-1)^{n-k}$$

$\equiv \langle$ Propiedades: $(k > n) \left[n \atop k \right] = 0$, $(k > n) \left\{ n \atop k \right\} = 0$, $\left[n \atop n \right] = \left\{ n \atop n \right\} = 1$ $\rangle$

$1 = 0 + 1 + 0$ ⋄

⋆ Para $n < m$:

$$0 = \sum_k \left[n \atop k \right] \left\{ k \atop m \right\} (-1)^{n-k}$$

$\equiv \langle$ Separación de sumatorias por rangos $\rangle$

$$0 = \sum_{k \leq n} \left[n \atop k \right] \left\{ k \atop m \right\} (-1)^{n-k} + \sum_{k > n} \left[n \atop k \right] \left\{ k \atop m \right\} (-1)^{n-k}$$

$\equiv \langle$ Propiedades: $(k > n)\left[{n \atop k}\right] = 0$, $(k > n)\left\{{n \atop k}\right\} = 0$ $\rangle$

$0 = 0 + 0$ $\diamond$

$\star$ Para $n > m$:

$$0 = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix} (-1)^{n-k}$$

$\equiv \langle$ Separación de sumatorias por rangos $\rangle$

$$0 = \sum_{k<m} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix} (-1)^{n-k} + \sum_{n \geq k \geq m} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix} (-1)^{n-k} + \sum_{k \geq n+1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix} (-1)^{n-k}$$

$\equiv \langle$ Propiedades: $(k > n)\left[{n \atop k}\right] = 0$, $(k > n)\left\{{n \atop k}\right\} = 0$ $\rangle$

$$0 = 0 + \sum_{n \geq k \geq m} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix} (-1)^{n-k} + 0$$

Sin embargo, de este último razonamiento no es evidente concluir que la sumatoria converge a 0, por lo tanto, se realiza la siguiente demostración.

Partiendo de la identidad 6.13 se demostrará esta fórmula de inversión.

$$x^{\underline{n}} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-k} x^{\underline{k}}$$

$\equiv \langle$ Sustitución x^k (6.10) $x^{\overline{n}} = \sum_k \left\{{n \atop k}\right\} x^{\underline{k}}$ $\rangle$

$$x^{\underline{n}} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-k} \sum_m \begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix} (-1)^{n-k} x^{\underline{m}}$$

$\equiv \langle$ Propiedades de sumatorias $\rangle$

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k,m} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix} (-1)^{n-k} x^{\underline{m}}$$

Como se cumple para todo x, y como $x^{\underline{i}}$ es un factorial descendente, éste genera un polinomio de grado i, y anteriormente se observó que para el caso $n \leq m$ la fórmula de inversión se cumple, pero si se tiene $n > m$, nunca se obtendrá el polinomio de grado i, así que los coeficientes de $x^{\underline{0}}, x^{\underline{1}}, ..., x^{\underline{n-1}}, x^{\underline{n+1}}, ...$ deben ser todos cero para que se cumpla la identidad. Sustituyendo x por 1 queda:

$$1 = \sum_{k,m} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix} (-1)^{n-k}$$

Nótese que para el único valor que los coeficientes de $x^{\underline{i}}$ son distintos de cero, es para $n = m$. Por lo tanto,

$$[n = m] = \sum_{k,m} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix} (-1)^{n-k} \diamond$$

Demostración de la segunda fórmula de inversión:

$$\sum_{k} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} (-1)^{n-k} = [m = n]. \tag{2}$$

Partiendo de la identidad 6.12 se demostrará esta fórmula de inversión.

$$x^n = \sum_{k} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} (-1)^{n-k} x^{\overline{k}}$$

$\equiv \langle$ Sustitución $x^{\overline{k}}$ (6.11) $x^{\overline{n}} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$ $\rangle$

$$x^n = \sum_{k} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} (-1)^{n-k} \sum_{m} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} (-1)^{n-k} x^m$$

$\equiv \langle$ Propiedades de sumatorias $\rangle$

$$x^n = \sum_{k,m} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} (-1)^{n-k} x^m$$

Como se cumple para todo x, los coeficientes de $x^0, x^1, ..., x^{n-1}, x^{n+1}, ...$ deben ser todos cero para que se cumpla la identidad. Sustituyendo x por 1 queda:

$$1 = \sum_{k,m} \left\{ {n \atop k} \right\} \left[{k \atop m} \right] (-1)^{n-k}$$

Nótese que para el único valor que los coeficientes de x^i son distintos de cero, es para $n = m$. Por lo tanto,

$$[n = m] = \sum_{k,m} \left\{ {n \atop k} \right\} \left[{k \atop m} \right] (-1)^{n-k} \diamond$$

Ejercicio 2. Establecer la igualdad (6.17) de la tabla 265 del capítulo 6 del Concrete Mathematics 2da. Edición. Para $m, n \geq 0$:

$$\left\{ {n \atop m} \right\} = \sum_k \binom{n}{k} \left\{ {k+1 \atop m+1} \right\} (-1)^{n-k}.$$

La demostraremos por inducción sobre n.

Caso base $n = 0$ y $m \geq 0$:

$$\left\{ {0 \atop m} \right\} = \sum_k \binom{0}{k} \left\{ {k+1 \atop m+1} \right\} (-1)^{n-k}$$

$\equiv \langle$ Propiedades: $(k > n)\left\{ {n \atop k} \right\} = 0$, $(k = n)\left\{ {n \atop k} \right\} = 1$ $\rangle$

$$\left\{ {0 \atop m} \right\} = [m = 0] \diamond$$

Asumimos que se cumple la identidad para n y $m \geq 0$:

$$\left\{ {n \atop m} \right\} = \sum_k \binom{n}{k} \left\{ {k+1 \atop m+1} \right\} (-1)^{n-k}$$

Utilizando la hipótesis demostraremos la identidad para $n+1$:

$$\sum_k \binom{n+1}{k} \left\{ {k+1 \atop m+1} \right\} (-1)^{n+1-k}$$

$= \langle$ Propiedad adición: $\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}$ k entero $\rangle$

$$\sum_k [\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}] \left\{ {k+1 \atop m+1} \right\} (-1)^{n+1-k}$$

$= \langle$ Propiedad distributiva sumatorias $\rangle$

$$\sum_k \binom{n}{k} \left\{ {k+1 \atop m+1} \right\} (-1)^{n+1-k} + \sum_k \binom{n}{k-1} \left\{ {k+1 \atop m+1} \right\} (-1)^{n+1-k}$$

$= \langle$ Hipótesis para n y m $\rangle$

$$-\left\{ {n \atop m} \right\} + \sum_k \binom{n}{k-1} \left\{ {k+1 \atop m+1} \right\} (-1)^{n+1-k}$$

$= \langle$ Propiedad recurrencia: $\left\{ {n \atop k} \right\} = k\left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$ $n \geq 0$ $\rangle$

$$-\left\{ {n \atop m} \right\} + \sum_k \binom{n}{k-1} [(m+1)\left\{ {k \atop m+1} \right\} + \left\{ {k \atop m} \right\}] (-1)^{n+1-k}$$

$= \langle$ Propiedad distributiva sumatorias $\rangle$

$$-\left\{ {n \atop m} \right\} + \sum_k \binom{n}{k-1} (m+1) \left\{ {k \atop m+1} \right\} (-1)^{n+1-k} + \sum_k \binom{n}{k-1} \left\{ {k \atop m} \right\} (-1)^{n+1-k}$$

$= \langle$ Aritmética $\rangle$

$$-\left\{ {n \atop m} \right\} + \sum_k \binom{n}{k-1} (m+1) \left\{ {k \atop m+1} \right\} (-1)^{n-(k-1)} + \sum_k \binom{n}{k-1} \left\{ {k \atop m} \right\} (-1)^{n-(k-1)}$$

$= \langle$ Cambio de variable $k := k-1$ e hipótesis con n y m; n y $m-1$ $\rangle$

$$-\left\{ n \atop m \right\} + (m+1)\left\{ n \atop m \right\} + \left\{ n \atop m-1 \right\}$$

$= \langle$ Aritmética $\rangle$

$$-\left\{ n \atop m \right\} + \left\{ n \atop m \right\} + m\left\{ n \atop m \right\} + \left\{ n \atop m-1 \right\}$$

$= \langle$ Aritmética $\rangle$

$$m\left\{ n \atop m \right\} + \left\{ n \atop m-1 \right\}$$

$= \langle$ Propiedad recurrencia: $\left\{ n \atop k \right\} = k\left\{ n-1 \atop k \right\} + \left\{ n-1 \atop k-1 \right\}$ $n \geq 0$ $\rangle$

$$\left\{ n+1 \atop m \right\} \diamond$$

Por inducción ha sido demostrado para todo $m, n \geq 0$:

$$\left\{ n \atop m \right\} = \sum_k \binom{n}{k} \left\{ k+1 \atop m+1 \right\} (-1)^{n-k}.$$

Ejercicio 3. Calcular cuántos m-subconjuntos de $\{1,\ 2,\ \ldots\ ,\ \text{n}\}$ hay, tales que no contienen dos enteros consecutivos. (Utilice inclusión-exclusión)

Definimos la propiedad p_i como los m-subconjuntos que contienen los números i e $i+1$, nótese que a lo más se pueden cumplir $n-1$ propiedades.

Sean $A(I)$ el conjunto de los elementos que cumplen con al menos i ($i = \mid I \mid$, $0 \leq i \leq n-1$) propiedades y $B(\phi)$ el conjunto de los elementos que no cumplen con ninguna propiedad, se define la siguiente fórmula de inclusión-exclusión:

$$| B(\phi) |= \sum_{0\leq k\leq n} (-1)^k \sum_{J\subseteq\{1,\ldots,n-1\},|J|=k} | A(J) |$$

Hallamos con el principio de inclusión y exclusión el número de m-subconjuntos que no contiene números consecutivos $| B(\phi) |$. Para ello, se deben considerar todas las posibilidades, es decir, los m-subconjuntos que cumplen con una propiedad, dos propiedades, hasta $n-1$ propiedades.

Se debe prestar particular atención a la la combinación de las propiedades en un m-subconjunto ya que pueden solaparse, esto es porque cada propiedad p_i esta definida sobre dos elementos del m-subconjunto. Por ejemplo: un m-subconjunto puede cumplir con las propiedades p_1 y p_2 indicando que el subconjunto tiene al menos 3 elementos consecutivos, pero puede existir otro m-subconjunto que cumpla con las propiedades p_1 y p_3 indicando que el subconjunto tiene al menos 4 elementos consecutivos. Es por esto, que parte del razonamiento de este problema se hace empleando Divide & Conquer.

Veamos como se calcula el número de m-subconjuntos que cumplen con al menos k propiedades:

- ⋆ $k = 0$, no hay restricciones con las propiedades, así que es el número de formas de escoger m elementos de n elementos: $\binom{n}{m}$.

- ⋆ $k = 1$, m-subconjuntos que cumplen con al menos una propiedad, esto se hace escogiendo los dos números consecutivos a ser colocados en el m-subconjunto, que es lo mismo que hacer que se cumpla una de las $n-1$ propiedades y luego escogiendo el resto de los $m-2$ elementos de los $n-2$ restantes: $\binom{n-1}{1}\binom{n-2}{m-2}$.

- ⋆ $k = 2$, m-subconjuntos que cumplen con al menos dos propiedades, estos se dividen los m-subconjuntos que cumplen con dos propiedades que se solapen, es decir, que garantizan que al menos 3 elementos son consecutivos en el m-subconjunto y los m-subconjuntos que cumplen con dos propiedades, pero disjuntas, es decir las que garantizan que 4 elementos son consecutivos en el m-subcojunto.

Para el primer caso, las propiedades deben tener índices consecutivos (p_i, p_j tal que $j = i + 1$), estas pueden ser escogidas de $\binom{n-2}{1}$ formas, con esto ya se están colocando 3 elementos consecutivos en el m-subconjunto, y los elementos restantes pueden ser escogidos de $\binom{n-3}{m-3}$ formas.

En el segundo caso, las propiedades no se solapan (p_i, p_j tal que $j \neq i+1$), estas pueden ser escogidas de $\binom{n-2}{2}$ formas, con esto ya se están colocando 4 elementos consecutivos en el m-subconjunto, y los elementos restantes pueden ser escogidos de $\binom{n-4}{m-4}$ formas.

Entonces, el número de m-subconjuntos que cumplen con al menos dos propiedades es: $\binom{n-2}{1}\binom{n-3}{m-3} + \binom{n-2}{2}\binom{n-4}{m-4}$.

- ⋆ $k = 3$, m-subconjuntos que cumplen con al menos tres propiedades, la combinación de estas propiedades puede producir m-subconjuntos con 4, 5 y 6 elementos consecutivos. Realizando el razonamiento Divide & Conquer anterior, el número de estos m-subconjuntos es: $\binom{n-3}{1}\binom{n-4}{m-4} + \binom{n-3}{2}\binom{n-5}{m-5} + \binom{n-3}{3}\binom{n-6}{m-6}$.

Generalizando, nos queda:

$$\mid B(\phi) \mid = \sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k \sum_{1 \leq i \leq k} \binom{n-k}{i}\binom{n-k-i}{m-k-i} + \binom{n}{m}$$

La cual puede ser simplificada de la siguiente forma:

$$\mid B(\phi) \mid = \sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k \sum_{1 \leq i \leq k} \binom{n-k}{i}\binom{n-k-i}{m-k-i} + \binom{n}{m}$$

$\equiv \langle$ Producto coef. binomial: $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$ $\rangle$

$$\mid B(\phi) \mid = \sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k \sum_{1 \leq i \leq k} \binom{n-k}{m-k}\binom{m-k}{i} + \binom{n}{m}$$

$\equiv \langle$ Aritmética $\rangle$

$$| B(\phi) |= \sum_{0\leq k\leq n} (-1)^k \binom{n-k}{m-k} \sum_{1\leq i\leq k} \binom{m-k}{i} + \binom{n}{m} \diamond$$

Ejemplo: Hallar los 4-subconjuntos de $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ que no tengan números consecutivos.

$$| B(\phi) |= \sum_{0\leq k\leq 8} (-1)^k \binom{8-k}{4-k} \sum_{1\leq i\leq k} \binom{4-k}{i} + \binom{8}{4}$$

$$| B(\phi) |= -105 + 45 - 5 + 70 = 5 \diamond$$

El valor anterior corresponde a los m-subconjuntos:

$\{1,3,6,8\}, \{1,3,5,7\}, \{1,3,5,8\}, \{2,4,6,8\}, \{1,4,6,8\}$

Ejercicio 4. Sea A un conjunto y $p_1, p_2, \ldots, p_n$, n propiedades sobre los elementos de A. Denotemos por$A_1, A_2, \ldots, A_n$, los subconjuntos de A que satisfacen las propiedades $p_1, p_2, \ldots, p_n$ respectivamente.

Sea S_m el número de elementos que cumplen por lo menos con m propiedades.

$$S_m = \sum_{\substack{J\subseteq\{1,2,\ldots,n\}\\ |J|=m}} | \cap_{j\in J} A_j|,$$

Sea e_m el número de objetos de A que satisfacen exactamente m propiedades.

a. Probar que:

$$e_m = \sum_{0 \leq i \leq n-m} (-1)^i \binom{m+i}{i} S_{m+i}$$

Para la demostración, reescribimos la fórmula de forma que quede en términos de S_i:

$$e_m = \sum_{0 \leq i \leq n-m} (-1)^i \binom{m+i}{i} S_{m+i}$$

$\equiv \langle$ Aritmética $\rangle$

$$e_m = \sum_{m \leq i+m \leq n} (-1)^i \binom{m+i}{i} S_{m+i}$$

$\equiv \langle$ Cambio de variable $j := i + m$ $\rangle$

$$e_m = \sum_{m \leq j \leq n} (-1)^{j-m} \binom{m+j-m}{j-m} S_{m+j-m}$$

$\equiv \langle$ Aritmética $\rangle$

$$e_m = \sum_{m \leq j \leq n} (-1)^{j-m} \binom{j}{j-m} S_j$$

Una vez reescrita la fórmula, la idea es demostrar que los objetos que tienen más de de m propiedades $(m+i)$ contribuyen con 0 en la fórmula de e_m, ya que estos son contados en los siguientes S_i haciendo que se anulen. En cambio, los que cumplen con exactamente m propiedades son contados sólo una vez, en S_m. No se consideran los S_i menores a m, porque se desea contar los objetos que cumplan con al menos m propiedades.

Si un objeto cumple con $m+i$ propiedades $(0 \leq i \leq n-m)$, aparecerá en S_m, $\binom{m+i}{m}$ veces, es decir, tantas veces como subconjuntos de tamaño m se pueden tomar de $m+i$ elementos, y aparecerá en S_{m+s}, $\binom{m+i}{m+s}$ veces, por lo que su contribución neta a la suma sería (desarrollando la fórmula anterior y teniendo en cuenta las veces que aparece contado el elemento en los S_j):

$$\binom{m}{0}\binom{m+i}{m} - \binom{m+1}{1}\binom{m+i}{m+1} + \binom{m+2}{2}\binom{m+i}{m+2} + ... + (-1)^i\binom{m+i}{i}\binom{m+i}{m+i}$$

$= \langle$ Producto coef. binomial: $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$ $\rangle$

$$\binom{m+i}{m} - \binom{m+i}{m}\binom{i}{1} + \binom{m+i}{m}\binom{i}{2} + ... + (-1)^i\binom{m+i}{m}\binom{i}{i}$$

$= \langle$ Propiedad distributiva $\rangle$

$$\binom{m+i}{m}[\binom{i}{0} - \binom{i}{1} + \binom{i}{2} + ... + (-1)^i\binom{i}{i}]$$

$= \langle$ $(x+y)^n = \sum_{0\leq k\leq n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$ con $x := 1, y := -1, n := i$ $\rangle$

$$\binom{m+i}{m}(0)$$

$= \langle$ Aritmética $\rangle$

0 $\diamond$

Por lo tanto, los objetos que cumplen con $m+i$ propiedades contribuyen con 0 en e_m, lo que quiere decir, que e_m cuenta sólo los objetos que cumplen con exactamente m propiedades.

b. Sea $E(x) = \displaystyle\sum_{0\leq i\leq n} e_i x^i$

b.1. Muestre que:

$$E(x) = \sum_{0\leq i\leq n} S_i(x-1)^i$$

$$\sum_{0\leq i\leq n} S_i(x-1)^i$$

$= \langle\ (x+y)^n = \sum_{0\leq k\leq n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$ con $x := x, y := -1, n := i\ \rangle$

$$\sum_{0\leq i\leq n} S_i \sum_{0\leq k\leq i}\binom{i}{k}x^k(-1)^{i-k}$$

$= \langle$ Aritmética $\rangle$

$$\sum_{0\leq i\leq n}\sum_{0\leq k\leq i}\binom{i}{k}x^k(-1)^{i-k}S_i$$

$= \langle$ Propiedad sumatorias $\rangle$

$$\sum_{0\leq k\leq i\leq n}\binom{i}{k}x^k(-1)^{i-k}S_i$$

$= \langle$ Restando k en el rango de la suma $\rangle$

$$\sum_{-k\leq 0\leq i-k\leq n-k}\binom{i}{k}x^k(-1)^{i-k}S_i$$

$= \langle$ Cambio de variable $u := i-k\ \rangle$

$$\sum_{-k\leq 0\leq u\leq n-k}\binom{u+k}{k}x^k(-1)^{u}S_{u+k}$$

$= \langle$ Sumando k en el rango de la suma $\rangle$

$$\sum_{0\leq k\leq u+k\leq n}\binom{u+k}{k}x^k(-1)^{u}S_{u+k}$$

$= \langle$ Propiedad sumatorias $\rangle$

$$\sum_{0\leq k\leq n}\sum_{k\leq u+k\leq n}\binom{u+k}{k}x^k(-1)^{u}S_{u+k}$$

$= \langle$ Restando k en el rango de la suma interna $\rangle$

$$\sum_{0\leq k\leq n} \sum_{0\leq u\leq n-k} \binom{u+k}{k} x^k (-1)^u S_{u+k}$$

$= \langle$ Aritmética $\rangle$

$$\sum_{0\leq k\leq n} x^k \sum_{0\leq u\leq n-k} \binom{u+k}{k} (-1)^u S_{u+k}$$

$= \langle$ Definición de e_k $\rangle$

$$\sum_{0\leq k\leq n} x^k e_k \diamond$$

b.2. Utilice (b.1) para mostrar que

$$\sum_{0\leq i\leq n, i\ par} e_i = \frac{1}{2}(S_0 + \sum_{0\leq i\leq n} (-2)^i S_i)$$

$$\sum_{0\leq i\leq n} S_i (x-1)^i = \sum_{0\leq i\leq n} x^i e_i$$

$\equiv \langle$ Sustituyendo para $x = -1$ $\rangle$

$$\sum_{0\leq i\leq n} S_i (-2)^i = \sum_{0\leq i\leq n} (-1)^i e_i$$

$\equiv \langle$ Propiedad de sumatorias $\rangle$

$$\sum_{0\leq i\leq n} S_i (-2)^i = \sum_{0\leq i\leq n, ipar} (-1)^i e_i + \sum_{0\leq i\leq n, iimpar} (-1)^i e_i$$

$\equiv \langle$ Propiedad de potencias pares e impares $\rangle$

$$\sum_{0\leq i\leq n} S_i (-2)^i = \sum_{0\leq i\leq n, ipar} e_i - \sum_{0\leq i\leq n, iimpar} e_i$$

$\equiv \langle$ Aritmética $\rangle$

$$\sum_{0\leq i\leq n} S_i(-2)^i + \sum_{0\leq i\leq n, iimpar} e_i = \sum_{0\leq i\leq n, ipar} e_i$$

$\equiv \langle$ Definición $E(x) = e_0 + \sum_{1\leq i\leq n} e_i x^i$ con $x = 1$ $\rangle$

$$\sum_{0\leq i\leq n} S_i(-2)^i + (E(1) - \sum_{0\leq i\leq n, ipar} e_i) = \sum_{0\leq i\leq n, ipar} e_i$$

$\equiv \langle$ Definición $E(x) = S_0 + \sum_{1\leq i\leq n} S_i(x-1)^i$ $\rangle$

$$\sum_{0\leq i\leq n} S_i(-2)^i + ((S_0 + \sum_{1\leq i\leq n} S_i(1-1)^i) - \sum_{0\leq i\leq n, ipar} e_i) = \sum_{0\leq i\leq n, ipar} e_i$$

$\equiv \langle$ Aritmética $\rangle$

$$\sum_{0\leq i\leq n} S_i(-2)^i + (S_0 + 0) = 2 \sum_{0\leq i\leq n, ipar} e_i$$

$\equiv \langle$ Aritmética $\rangle$

$$\frac{1}{2}[\sum_{0\leq i\leq n} S_i(-2)^i + S_0] = \sum_{0\leq i\leq n, ipar} e_i \diamond$$

c. Aplique (b.2) en el siguiente problema: determinar una forma cerrada del número de secuencias de largo n en el alfabeto $\{0, 1, 2\}$ que tienen un número par de ceros. Ayuda: considere las propiedades $p_i(x) \equiv$ la secuencia x tiene un cero en la posición i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Para hallar la fórmula cerrada, es necesario que definir S_i:

- $\star$ Sabemos que S_0 es el número de secuencias que cumplen con 0 o más propiedades, por lo tanto, como las secuencias son de largo n y el tamaño del alfabeto es 3, entonces $S_0 = 3^n$ ya que cada caracter del alfabeto puede estar en cualquier posición.

- $\star$ S_i $(1 \leq i \leq n)$ se cuenta escogiendo primero las i posiciones que serán ocupadas por el caracter cero multiplicado por el número de formas de colocar los caracteres del alfabeto (inclusive cero porque S_i cuenta los objetos que cumplen con al menos i propiedades) en los $n - i$ lugares restantes. Por lo tanto, $S_i = \binom{n}{i} 3^{n-i}$.

El número de secuencias con número par de ceros es obtenido por la sumatoria $\sum_{0 \leq i \leq n, ipar} e_i$, esto es porque únicamente interesa contar las secuencias que cumplen con exactamente i propiedades, tales que produzcan una cantidad par de ceros, es decir, que en cada secuencia se cumpla un número par de propiedades p_i.

Sustituyendo los valores en la fórmula demostrada anteriormente, la fórmula cerrada para este problema se muestra a continuación:

$$\frac{1}{2}[\sum_{0 \leq i \leq n} \binom{n}{i} 3^{n-i}(-2)^i + 3^n]$$

$= \langle\ (x+y)^n = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ con $x := -3, y := -2, n := i\ \rangle$

$$\frac{1}{2}[\sum_{0 \leq i \leq n} (3-2)^n + 3^n]$$

$= \langle$ Aritmética $\rangle$

$$\frac{1}{2}[1 + 3^n] \diamond$$

Ejercicio 5. Muestre que el número de palabras circulares de largo n y período n en un alfabeto de m letras, M(n), es igual a

$$M(n) = \frac{1}{n} \sum_{I \sqsubseteq \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}} (-1)^{|I|} m^{n / \prod_{i \in I} p_i},$$

donde $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k}$, es la descomposición en factores primos de n.

Para ello invierta la fórmula: $\sum_{d|n} dM(d) = m^n$.

El número de palabras de largo n de un alfabeto de m tiene una correspondencia con el número de palabras circulares de largo n y período n del mismo alfabeto, y esta dado por la formula anterior, la cual será utilizada para hallar $M(n)$.

Sean $f(d) = dM(d)$, $g(n) = m^n$, y sea $\mu(d,n) = (-1)^k$ si $\forall i\ n_i = 1$, es decir, $n = p_1 p_2 ... p_k d$ y $\mu(d,n) = 0$ en otro caso.

Utilizaremos el teorema de inversión por debajo para hallar $f(d)$:

$$\forall x \in X\ g(x) = \sum_{0 \leq y \leq x} f(y) \Longleftrightarrow f(x) = \sum_{0 \leq y \leq x} g(y)\mu(y,x)$$

Partiendo del lado izquierdo, se utilizará el lado derecho del teorema:

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d)\mu(d,n)$$

$\equiv \langle$ Si d divide a n, entonces $\frac{n}{d}$ divide a n. Cambio de variable $d := \frac{n}{d}$ $\rangle$

$$f(n) = \sum_{\frac{d}{n}|n} g(\frac{d}{n})\mu(\frac{d}{n}, n)$$

$\equiv \langle$ Sustitución de las funciones f, g y μ. $\mu(\frac{d}{n}, n) \neq 0$ sii $d = p_1 ... p_k$ $\rangle$

$$nM(n) = \sum_{I \subseteq \{p_1,...,p_k\}} m^{\frac{n}{\Pi_{i \in I} pi}} (-1)^I$$

$\equiv \langle$ Aritmética $\rangle$

$$M(n) = \frac{1}{n} \sum_{I \subseteq \{p_1,...,p_k\}} m^{\frac{n}{\Pi_{i \in I} pi}} (-1)^I \diamond$$

Ejercicio 6. Sea X el conjunto de la n-tuplas de números naturales y $\leq$ la relación de orden entre n-tuplas:

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sii $x_i \leq y_i$ para todo i. Determine la función de Möbius para el c.p.o. $(X, \leq)$.

Sea $X = \{(x_1, ..., x_n) \mid x_i \in N\}$ y la z-function $\varepsilon(x, y) = 1$ si $x \leq y$ y $\varepsilon(x, y) = 0$ si no, tenemos:

$\mu * \varepsilon(x, y) = \sum_{x \leq u \leq y} \mu(x, u)\varepsilon(u, y) = e(x, y)$

Si $x = y \Longrightarrow \mu * \varepsilon(x, y) = \mu(x, x) = 1$

Si $x \neq y \Longrightarrow \mu(x, y) = -\sum_{x \leq u < y} \mu(x, u)$

Calculando $\mu(x, y)$ a partir de los diagramas de Hasse de $(X, \leq)$ para tuplas de tamaño 1, 2, 3 y 4, se derivó la siguiente función de Möbius para el c.p.o. $(X, \leq)$.

- $\star$ $\mu((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = 0$ si existe una diferencia de 2 o mas entre algún y_i y un x_i ($\exists i \; y_i \geq x_i + 2$)
- $\star$ $\mu((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = (-1)^{\sum_{1 \leq i \leq n} y_i - \sum_{1 \leq i \leq n} x_i}$ en caso contrario.

A continuación se encuentra el diagrama de Hasse para $(X, \leq)$ con $n = 2$, el (x_1, x_2) es el elemento perteneciente a X y el valor de $\mu((0, 0), (x_1, x_2))$ está escrito debajo.

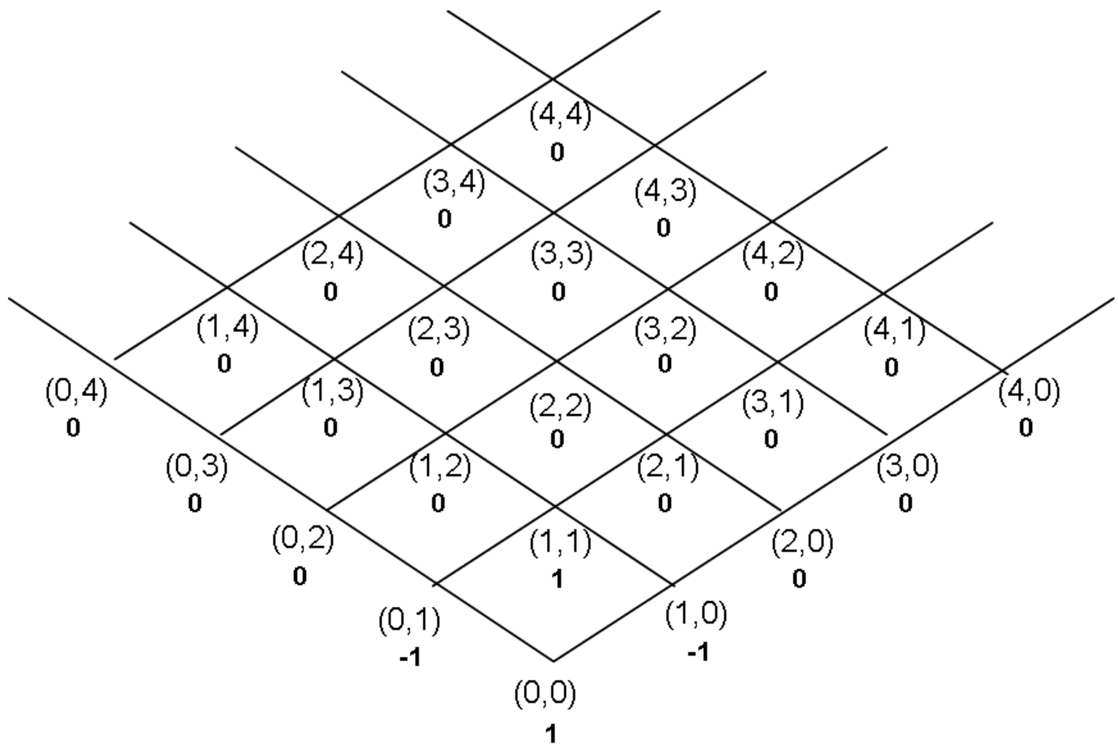

Diagrama de Hasse de (X,≤) para n=2