Universidad Simón Bolívar
Matemáticas para la Computación
Tarea I

Fabiola Di Bartolo
Carnet: 09-87324

12 de mayo de 2010

Ejercicio 1 Sea V un alfabeto finito con al menos dos letras. Muestre que $(V^*, \leq)$, donde $\leq$ es el orden lexicográfico, no es Noetheriano.

Para probar que la relación de orden $(V^*, \leq)$ no es Noetheriano, se necesita demostrar que al menos un subconjunto de V^* no tiene minimal.

Sea A un subconjunto de V^*, donde los elementos (palabras) de A son de la forma x^*y con $x, y \in V$, entonces fácilmente se puede verificar que no existe un minimal en A, ya que para cada palabra en A, existe otra que la precede lexicográficamente y el número de palabras entre dos elementos cualesquiera de A que puede ser generado de esta forma es infinito, por lo que la cadena formada por la relación de orden entre los elementos de A es descendiente infinita, es decir, es de la forma $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 ...$ donde $a_i \in A$ y a_i es una palabra generada a partir de x^*y.

Por ejemplo: si se tiene el elemento xy, este está precedido por xxy y que a su vez, esta precedido por $xxxy$, etc...

Por lo tanto, como $\forall a_i \in A[\exists a_j \in A[a_j \leq a_i]$, es decir, A no tiene un elemento minimal, $(V^*, \leq)$ no es un orden Noetheriano.

Ejercicio 2 Muestre que el conjunto de secuencias finitas de ceros y unos es contable.

Sea B el conjunto de secuencias finitas de ceros y unos, como B no es vacío, se demuestra que es contable hallando una función sobreyectiva $f : N \rightarrow B$ y una inyectiva $g : B \rightarrow N$:

Para las siguientes funciones, se asume que los elementos de B serán listados en algún orden, por ejemplo, lexicográfico.

- ⋆ Si definimos f tal que $(\forall i : i \leq\mid B \mid \wedge x_i \in B : f(i) = x_i)$, entonces f será sobreyectiva porque todo elemento x_i en B tiene como preimagen un número natural i.
- ⋆ Si definimos g tal que $(\forall i : \wedge x_i \in B : g(x_i) = i)$, entonces g es inyectiva porque no existen dos elementos distintos en B cuyo índice de posición sea el mismo.

Debido a que existen las funciones f y g, el conjunto de secuencias finitas de ceros y unos es contable. Nótese que $\forall x \in B[f(g(x)) = x]$ y f es una función sobreyectiva y g es una función inyectiva, por lo tanto otra forma de demostrarlo, sería observando que f es biyectiva de N en B, y sólo con f biyectiva es suficiente para demostrar que el conjunto B es contable.

Ejercicio 3 Definamos inductivamente el siguiente conjunto de árboles A sobre un conjunto base de objetos E:

1 $< e, . >$ esta en A, para todo e en E. Decimos que e es la raíz de $< e, . >$, el numero de elementos de $< e, . >$ es 1, la altura es 0.

2 Si $a_1 =< e_1, A_1 >$ y $a_2 =< e_2, A_2 >$ son árboles en A y la altura de a_1 es menor o igual a la altura de a2 entonces $< e_2, A_2\{a_1\} >$ es un árbol de A. Decimos que e_2 es la raíz de este último árbol, su numero de elementos es el numero de elementos de a_1 más el número de elementos de a_2, y la altura es igual a 1 más el máximo de las alturas de los árboles en $A_2 \cup \{a_1\}$.

3 Todo árbol en A se obtiene de la aplicación de las reglas (1) y (2) un numero finito de veces.

3.1 Investigue si es verdad que la altura de un árbol con n elementos en A tiene altura a lo sumo $\lfloor log_2 n \rfloor$

3.2 ¿Si en la regla (2) cambiamos *la altura de* a_1 *es menor o igual a la altura de* a_2 por *el numero de elementos de* a_1 *es menor o* *igual al numero de elementos de* a_2, entonces se puede deducir un resultado parecido a (3.2)?.

(ayuda: utilice inducción estructural.)

Sea $a \in A$ un árbol cualquiera, se define:

- ⋆ La altura de a como $h(a)$.
- ⋆ La cantidad de nodos de a como $n(a)$.

Demostración por inducción estructural: $h(a) \leq \lfloor log_2 n(a) \rfloor$

Caso Base:

$\forall x$ minimal $\in A[P(x)]$ donde $P(x)$ indica que se satisface la condición $h(x) \leq \lfloor log_2 n(x) \rfloor$

Probamos con $a \in A$ tal que $a =< e_1, \oslash >$, que es el único minimal, evidentemente se satisface $P(\oslash)$, ya que $h(\oslash) = 0$ y $n(\oslash) = 1$ y $log_2 n(\oslash) = \lfloor log_2 1 \rfloor = 0$, por lo tanto se cumple $h(\oslash) \leq 0$.

Caso Inductivo:

Sean $a_1, a_2 \in A$, tal que $a_1 =< e_1, A_1 >$ y $a_2 =< e_2, A_2 >$ por hipótesis inductiva se cumple que: $h(a_1) \leq \lfloor log_2 n(a_1) \rfloor$, $h(a_2) \leq \lfloor log_2 n(a_2) \rfloor$ y $h(a_1) \leq h(a_2)$. Entonces, existe un árbol $a \in A$ tal que, $a =< e_2, A_2 \cup \{a_1\} >$.

Se demostrará que $h(a) \leq \lfloor log_2 n(a) \rfloor$ y como $n(a) = n(a_1) + n(a_2)$, es equivalente a demostrar que $h(a) \leq \lfloor log_2 (n(a_1) + n(a_2)) \rfloor$.

La demostración se separa en dos casos: suponiendo que $h(a_1) < h(a_2)$ y $h(a_1) = h(a_2)$.

⋆ **Caso 1:** $h(a_1) < h(a_2)$.

$h(a) = 1 + max(h(x) : x \in A_2 \cup \{a_1\})$

$\equiv \langle$ La altura de A_2 es $h(a_2) - 1$ porque no contiene la raíz e_2 $\rangle$

$h(a) = 1 + h(a_2) - 1$

$\equiv$

$h(a) = h(a_2)$

$\Rightarrow \langle$ Hipótesis inductiva de a_2 $\rangle$

$h(a) \leq \lfloor log_2 n(a_2) \rfloor$

$\Rightarrow \langle$ Definición de log_2 y porque $n(a_1), n(a_2) > 0$ $\rangle$

$h(a) \leq \lfloor log_2(n(a_1) + n(a_2)) \rfloor$

⋆ **Caso 2:** $h(a_1) = h(a_2)$, suponemos que $a =< e_2, A_2 \cup \{a_1\} >$, pero es análogo para $a =< e_1, A_1 \cup \{a_2\} >$.

$h(a) = 1 + max(h(x) : x \in A_2 \cup \{a_1\})$

$\equiv \langle h(A_2) = h(a_2) - 1$ y $h(a_1) = h(a_2) \Rightarrow h(a_2) - 1 < h(a_1)$ $\rangle$

$h(a) = 1 + h(a_1)$

$\Rightarrow \langle$ Hipótesis inductiva de a_1 $\rangle$

$h(a) \leq 1 + \lfloor log_2 n(a_1) \rfloor$

$\Rightarrow \langle$ Propiedad de la función piso $\rangle$

$h(a) \leq \lfloor 1 + log_2 n(a_1) \rfloor$

$\equiv \langle$ Definición de log_2 $\rangle$

$h(a) \leq \lfloor log_2(2) + log_2 n(a_1) \rfloor$

$\equiv \langle$ Propiedad de log $\rangle$

$h(a) \leq \lfloor log_2(2n(a_1)) \rfloor$

$\Rightarrow \langle$ Definición de log_2 y **sólo si** $n(a_2) \geq n(a_1)$ $\rangle$

$h(a) \leq \lfloor log_2(n(a_1) + n(a_2)) \rfloor$

Nótese que si $n(a_2) < n(a_1)$, la desigualdad no se cumple, y $h(a)$ podría no ser menor o igual a $\lfloor log_2(n(a_1) + n(a_2)) \rfloor$.

Demostración por inducción estructural (modificando la Regla 2): $h(a) \leq \lfloor log_2 n(a) \rfloor$.

Modificación de la Regla 2:

En lugar de asumir que $h(a_1) \leq h(a_2)$ se asume que $n(a_1) \leq n(a_2)$

Caso Base:

No afecta la modificación en la Regla 2, la demostración es igual a la del Caso Base anterior.

Caso Inductivo:

Asumiendo que $n(a_1) \leq n(a_2)$, se pueden tener 3 casos: $h(a_1) < h(a_2)$, $h(a_1) = h(a_2)$, $h(a_1) > h(a_2)$.

- ⋆ **Caso 1:** $h(a_1) < h(a_2)$. Demostración es igual a la del Caso 1 anterior.

- $\star$ **Caso 2:** $h(a_1) = h(a_2)$. Como $n(a_1) \leq n(a_2)$, la demostración es similar a la del Caso 2 anterior, sólo que en este caso siempre se cumplirá la condición $h(a) \leq \lfloor log_2(n(a_1) + n(a_2)) \rfloor$ porque $n(a_1) \leq n(a_2)$

- $\star$ **Caso 3:** $h(a_1) > h(a_2)$.

  $h(a) = 1 + max(h(x) : x \in A_2 \cup \{a_1\})$

  $\equiv \langle\ h(a_1) > h(a_2)\ \rangle$

  $h(a) = 1 + h(a_1)$

  $\Rightarrow \langle$ Pasos análogos a los del Caso 2 $\rangle$

  $h(a) \leq \lfloor log_2(n(a_1) + n(a_2)) \rfloor$

En conclusión, modificando la Regla 2, queda demostrado para todos los casos que $h(a) \leq \lfloor log_2(n(a_1) + n(a_2)) \rfloor$

Ejercicio 4 Sea A un conjunto de $n \geq 1$ elementos y $(P(A), \subseteq)$ el c.p.o. de sobre el conjunto $P(A)$ de todos los subconjutos de A respecto a la inclusion. Muestre utilizando inducción Noetheriana que para todo elemento B en $P(A)$, en el diagrama de Hasse, toda cadena (o camino) que va de ϕ (el menor elemento del c.p.o.) a B tiene largo $\mid B \mid$ y que el numero de esas cadenas es $\mid B \mid !$.

Por el principio de inducción Noetheriana, basta probar la base de la inducción y luego verificar que se cumple el predicado para los no minimales, para realizar la demostración.

- $\star$ Sea X un subconjunto de $P(A)$, se define el predicado $Q(X)$ de la siguiente forma: todos los caminos desde ϕ

hasta X ($Cam(\phi, X)$) son de tamaño $\mid X \mid$ y se tienen $\mid X \mid!$ caminos $Cam(\phi, X)$.

- ⋆ Base de la inducción: Todo minimal B de $(P(A), \subseteq)$ satisface $Q(B)$.

  Como el único minimal en la relación es ϕ, es evidente que se cumple este predicado, ya que los caminos $Cam(\phi, \phi)$ tienen largo 0 (porque ningún otro conjunto precede a ϕ), y existen 0! caminos $Cam(\phi, \phi)$, es decir, un camino $C(\phi, \phi)$, el cual es la cadena vacía.

- ⋆ Inducción: $\forall B$ no minimal $[\forall C[C \subseteq B \Rightarrow Q(C)] \Rightarrow Q(B)]$

  Asumimos $Q(C)$ para probar $Q(B)$, como $C \subseteq B$, entonces el tamaño de todos los caminos hasta B cumple con la condicion $\mid Cam(\phi, B) \mid = \mid Cam(\phi, C) \mid + \mid Cam(C, B) \mid$, sin embargo, esto puede ser visto de la siguiente manera, si $C \subseteq B$, entonces existe un conjunto $D \subseteq B$, tal que $B = C \cup D$, para el cual se satisface $Q(D)$, por lo tanto el tamaño de todos los caminos $Cam(\phi, B)$ es igual a la suma del tamaño de los caminos de B y C menos el tamaño de los tramos comunes (para no sumar tramos doblemente), definiendo $E = C \cap D$, la cardinalidad de los caminos desde ϕ hasta B queda de la siguiente forma:

  $\mid Cam(\phi, B) \mid = \mid Cam(\phi, C) \mid + \mid Cam(\phi, D) \mid - \mid Cam(\phi, E) \mid$.

  Nótese que $\mid Cam(\phi, B) \mid = \mid B \mid$ ya que por hipótesis se sabe que $\mid Cam(\phi, C) \mid = \mid C \mid$ y $\mid Cam(\phi, D) \mid = \mid D \mid$, como $B = C \cup D$, entonces:

  $\mid B \mid = \mid D \mid + \mid C \mid - \mid C \cap D \mid$.

Para demostrar que la cantidad de caminos que van desde ϕ hasta B es $n_B!$ donde $n_B = \mid B \mid$, se sigue un razonamiento similar al anterior, se saca a partir de los predecesores de B.

Nótese que $n_B!$ es la cantidad de permutaciones que se pueden obtener con los elementos de B. Si B se separa en dos conjuntos C y D (con cardinalidades n_C y n_D respectivamente) y se quiere lograr las mismas permutaciones con los mismos elementos, se debe permutar cada conjunto por separado y luego combinar las permutaciones de ambos, es por eso que se puede reescribir $n_B!$ como $n_C!n_D!\binom{n_C+n_D}{n_C}$ y resolviendo el número combinatorio queda $\frac{(n_C+n_D)!}{n_C!(n_C+n_D-n_C)!}n_C!n_D! = (n_C+n_D)!$ así que la cantidad de caminos $Cam(\phi, B)$ puede ser calculada como $(n_C+n_D)!$ donde $C \subseteq B$, $D \subseteq B$, $C \cup D = B$ y $C \cap D = \phi$.

Resulta interesante que la permutación de los elementos sea igual a la cantidad de caminos desde ϕ hasta ese conjunto, y la idea es análoga a la permutación de los tramos de esos caminos, una permutación distinta, genera un camino distinto.

Por lo tanto, como se puede hallar la cantidad de caminos hasta B y el tamaño de los mismos a partir de sus predecesores, se tiene que $Q(C) \Rightarrow Q(B)$.

Ejercicio 5 Mostrar por inducción constructiva que para todo k entero positivo, existen n_0 y d tales que para $n \geq n_0$, $t(n) \leq dn!$, donde:

$$t(n) = \begin{cases} a \text{ si } n = 1 \\ bn^k + nt(n-1) \text{ si } n \geq 2 \end{cases}$$

Trate una condición más fuerte: $t(n) \leq dn! - en^k$

Conjetura: $\exists c, d > 0[cn! \leq t(n) \leq dn!]$

Para demostrar la cota superior de la conjetura, se asume que se tiene n suficientemente grande y se prueba con una condición más fuerte, para ello se modifica la proposición a demostrar por la siguiente $\exists c, d > 0[cn! \leq t(n) \leq dn! - en^k]$.

Se toma como hipótesis inductiva para $m < n$, con m y n suficientemente grande, la siguiente proposición: $\exists c, d > 0[cm! \leq t(m) \leq dm! - em^k]$.

Partiendo de la definición de $t(n)$, la hipótesis parcialmente especificada y dado $n-1$ lo suficientemente grande, se tiene:

$t(n) = bn^k + nt(n-1)$

$\leq$ $\langle$Sustituyendo la hipótesis parcialmente especificada en $(n-1)\rangle$

$bn^k + n(d(n-1)! - e(n-1)^k)$

$=$

$bn^k + dn! - en(n-1)^k$

Por otro lado, utilizando la hipótesis:

$t(n) \leq dn! - en^k$

$\equiv \langle$ Sustituyendo $t(n)$ por el resultado anterior $\rangle$

$bn^k + dn! - en(n-1)^k \leq dn! - en^k$

$\equiv \langle$ Restando $dn!$ en ambos lados $\rangle$

$bn^k - en(n-1)^k \leq -en^k$

$\equiv \langle$ Multiplicando por -1 en ambos lados $\rangle$

$-bn^k + en(n-1)^k \geq en^k$

$\equiv \langle$ Restando en^k en ambos lados $\rangle$

$-bn^k + en(n-1)^k - en^k \geq 0$

$\equiv \langle$ Sacando factor común $n^k \rangle$

$en(n-1)^k - n^k(e+b) \geq 0$

De la condición anterior, se infiere que $e \geq 0$ para que la condición se cumpla para todo $n > n_0$.

Partiendo del caso base (n_0), se hallará el valor que debe tomar d:

$t(n_0) \leq dn_0! - en_0^k$

$\equiv \langle$ Despejando d y porque $n_0! > 0 \rangle$

$d \geq \frac{t(n_0)+en_0^k}{n_0!}$

Por lo tanto, $\forall n > n_0[\exists d, e > 0[t(n) \leq dn! - en^k]]$

Para demostrar la cota inferior, se parte de la hipótesis inductiva parcialmente especificada $\exists c > 0[cm! \leq t(m)]$ se halla el valor de c, para $m < n$ con valores suficientemente grandes.

Partiendo de la definición de t, la hipótesis parcialmente especificada y dado $n-1$ lo suficientemente grande :

$t(n) = bn^k + nt(n-1)$

$\geq$ $\langle$Sustituyendo la hipótesis parcialmente especificada con $t(n-1)\rangle$

$bn^k + n(c(n-1)!)$

$=$

$bn^k + cn!$

$\geq \langle$ Tomando $c \geq 0\rangle$

$cn!$

Para satisfacer el caso base: $t(1) = c1!$, se tiene que cumplir que $c \geq a$, ya que $t(1) = a$. Por lo tanto, $\forall n > n_0[\exists c > a[t(n) \geq cn!]]$

En conclusión, por inducción constructiva, se demostró que:
$\forall n \geq 1[\exists c, d[cn! \leq t(n) \leq dn!]]$

Ejercicio 6 Probar que para todos los enteros n y todos los enteros positivos m, se cumple que:
$\lceil \frac{n}{m} \rceil = \lfloor \frac{n+m-1}{m} \rfloor$

Para la demostración se utilizarán propiedades de las funciones techo, piso y módulo:

$\lceil \frac{n}{m} \rceil = \lfloor \frac{n+m-1}{m} \rfloor$

$\equiv \langle$ Restando en ambos lados: $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor\rangle$

$\lceil \frac{n}{m} \rceil - \lfloor \frac{n}{m} \rfloor = \lfloor \frac{n+m-1}{m} \rfloor - \lfloor \frac{n}{m} \rfloor$

$\equiv \langle$ Aplicando la propiedad: $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n\rangle$

$\lceil \frac{n}{m} - \lfloor \frac{n}{m} \rfloor \rceil = \lfloor \frac{n+m-1}{m} - \lfloor \frac{n}{m} \rfloor \rfloor$

$\equiv \langle$ Multiplicando por m el numerador y denominador$\rangle$

$\lceil \frac{n}{m} - \frac{m}{m} \lfloor \frac{n}{m} \rfloor \rceil = \lfloor \frac{n+m-1}{m} - \frac{m}{m} \lfloor \frac{n}{m} \rfloor \rfloor$

$\equiv \langle$ Reemplazando por el modulo: $n \mathsf{mod} m = n - m \lfloor n/m \rfloor \rangle$

$\lceil \frac{n \mathsf{mod} m}{m} \rceil = \lfloor \frac{(n \mathsf{mod} m)+m-1}{m} \rfloor$

$\equiv \langle$ Aplicando la propiedad: $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n \rangle$

$\lceil \frac{n \mathsf{mod} m}{m} \rceil = \lfloor \frac{(n \mathsf{mod} m)-1}{m} \rfloor + \frac{m}{m}$

$\equiv$

$\lceil \frac{n \mathsf{mod} m}{m} \rceil = \lfloor \frac{(n \mathsf{mod} m)-1}{m} \rfloor + 1 = [n \mathsf{mod} m > 0]$

Para probar que la proposición es equivalente a $[n \mathsf{mod} m > 0]$, se realiza el siguiente análisis, asumiendo que $0 \leq n \mathsf{mod} m < m$:

- $\star$ Si $n \mathsf{mod} m = 0$:

  $\lceil \frac{0}{m} \rceil = \lfloor \frac{0-1}{m} \rfloor + 1$

  $\equiv \langle$ Como $-1 \leq \frac{-1}{m} < 0 \rangle$

  $0 = -1 + 1$

  $\equiv$

  $0 = 0$

- $\star$ Si $0 < n \mathsf{mod} m < m$:

$1 = 0 + 1$

$\equiv$

$1 = 1$

Por lo tanto, la proposición es cierta.