Universidad Simón Bolívar
Matemáticas para la Computación
Tarea III

Fabiola Di Bartolo
Carnet: 09-87324

15 de junio de 2010

Ejercicio 1.a. Halle una interpretación combinatoria del factorial ascendente $m^{\overline{n}} = m(m+1)...(m+n-1)$

Sean A y B dos conjuntos, tales que $\mid A \mid= n$ y $\mid A \mid= m$, y sus elementos son distinguibles. El factorial ascendente $m^{\overline{n}}$ corresponde al número de formas distintas en que se pueden asociar uno o más elementos de A con un elemento de B, donde importa el orden en que se están asociando los elementos de A con el elemento de B.

Por ejemplo, si se tienen n CDs que se quieren organizar en m porta CDs (supongamos que cada porta CD tiene suficientes bolsillos para guardar al menos n CDs), $m^{\overline{n}}$ cuenta la cantidad de formas en que esos CDs pueden ser colocados consecutivamente (sin dejar bolsillos de por medio, lo que importa es el orden no el bolsillo donde son insertados) en los porta CDs, sin importar que queden porta CDs vacíos, y con la restricción que sean colocados todos. Nótese que el orden importa en cada porta CD.

Ejercicio 1.b. Determinar el número de patrones correspondientes a las funciones de un conjunto A de n elementos del tipo $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}...n^{\lambda_n}$ a un conjunto B de m elementos del tipo 1^m. Aplique los prinicipios elementales de conteo para determinar a qué otro tipo de configuración equivale un patrón y luego determinar el número de esas configuraciones.

Nota: que A sea del tipo $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}...n^{\lambda_n}$, significa que hay λ_i subconjuntos de elementos de A con i elementos indistinguibles entre sí.

La idea es contar las m-particiones generalizadas ordenadas de A, ya que esto genera los posibles patrones que se pueden tener asociando los elementos de A con los de B, como A es del tipo $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}...n^{\lambda_n}$, implica que puede tener elementos indistinguibles.

Tomando un subconjunto A_i de A donde todos sus elementos sean indistinguibles, tal que $\mid A_i \mid = i$, el número de configuraciones que se pueden formar viene dado por las distintas asignaciones que se pueden tener de $i^1 en 1^m$, lo cual corresponde a $\frac{m^{\bar{i}}}{i!}$ m-particiones generalizadas ordenadas.

Considerando que puede existir más de un subconjunto de elementos indistinguibles de tamaño i, y el número de estos subconjuntos esta denotado por λ_i, el número de m-particiones generalizadas ordenadas que se pueden tener con estos subconjuntos de tamaño i, es $(\frac{m^{\bar{i}}}{i!})^{\lambda_i}$, es decir el número de configuraciones para uno de esos subconjuntos multiplicado λ_i veces, ya que si estos existen en A, el número de m-particiones posibles para estos elementos, es el producto de estas porque deben ser combinadas todas estas configuraciones.

Este mismo principio se puede aplicar para el resto de los subconjuntos de elementos indistinguibles, por lo que, para hallar el número de patrones correspondientes a la funciones de A en B, se tienen que considerar las configuraciones generadas por todos los subconjuntos de elementos indistinguibles a la vez, por lo tanto, agrupando todos los patrones, este número es la multiplicación de todas estas configuraciones, es decir: $\prod_{1 \leq i \leq n} (\frac{m^{\bar{i}}}{n!})^{\lambda_i}$

Ejercicio 2.a.1 (5.37 Concrete Mathematics) Muestre que existe un teorema análogo al del binomio para potencias factoriales. Esto es, pruebe las identidades:

$$(x+y)^{\underline{n}} = \sum_k \binom{n}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k}} \tag{1}$$

$$(x+y)^{\overline{n}} = \sum_k \binom{n}{k} x^{\overline{k}} y^{\overline{n-k}} \tag{2}$$

Para todos los enteros no negativos.

Para la primera ecuación, se tienen dos casos: $n = 0$ y $n > 0$.

Para $n = 0$:
$(x+y)^{\underline{0}} = \sum_k \binom{0}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{-k}}$

$\equiv \langle$ Aplicando $\forall m[\binom{m}{0} = 1]$, $\forall k < 0[\binom{n}{k} = 0]$ y para $k = 0$, $n^{\underline{k}} = 1\rangle$

$1 = \binom{0}{0} x^{\underline{0}} y^{\underline{0}}$

$\equiv \langle$ Aplicando $\forall m[\binom{m}{0} = 1]$ y para $k = 0$, $n^{\underline{k}} = 1\rangle$

$1 = 1$ $\diamond$

Para $n > 1$:
$(x+y)^{\underline{n}} = \sum_k \binom{n}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k}}$

$\equiv \langle$ Definición de coeficiente binomial $\rangle$

$(x+y)^{\underline{n}} = \sum_k \frac{n!}{(n-k)!k!} x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k}}$

$\equiv \langle$ Pasando $n!$ dividiendo $\rangle$

$$\frac{(x+y)^{\underline{n}}}{n!} = \sum_k \frac{x^{\underline{k}}}{k!} \frac{y^{\underline{n-k}}}{(n-k)!}$$

$\equiv \langle$ Definición de factorial descendente $\rangle$

$$\frac{(x+y)...(x+y-n+1)}{n!} = \sum_k \frac{x...(x-k+1)}{k!} \frac{y...(y-n+k+1)}{(n-k)!}$$

$\equiv \langle$ Reorganizando términos $\rangle$

$$\frac{(x+y)!}{n!(x+y-n)!} = \sum_k \frac{x!}{k!(x-k)!} \frac{y!}{(n-k)!(y-n+k)!}$$

$\equiv \langle$ Definición de coeficiente binomial $\rangle$

$$\binom{x+y}{n} = \sum_k \binom{x}{k}\binom{y}{n-k}$$

$\equiv \langle$ Convolución de Vandermonde $\rangle$

$True$ $\diamond$

La segunda igualdad puede ser demostrada utilizando la primera, para esto, primero se demostrará una propiedad útil para pasar de factoriales descendentes a ascendentes:

$$(x+y)^{\overline{n}} = (-1)^n(-x-y)^{\underline{n}}$$

$\equiv \langle$ Definición de factorial ascendente y descendente $\rangle$

$$(x+y)...(x+y+n-1) = (-1)^n(-x-y)...(-x-y-n+1)$$

$\equiv \langle$ Sacando (-1) de todos los n términos (parte derecha) $\rangle$

$(x+y)...(x+y+n-1) = (-1)^n(-1)^n(x+y)...(x+y+n-1)$

$\equiv \langle$ Multiplicación de negativos $\rangle$

$(x+y)...(x+y+n-1) = (x+y)...(x+y+n-1)$

$\equiv$

$True$ $\diamond$

Partiendo de la segunda igualdad:
$(x+y)^{\overline{n}} = \sum_k \binom{n}{k} x^{\overline{k}} y^{\overline{n-k}}$

$\equiv \langle$ Utilizando la propiedad anterior $\rangle$

$(-1)^n(-x-y)^{\underline{n}} = \sum_k \binom{n}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k}} (-1)^k (-1)^{n-k}$

$\equiv \langle$ Suma de exponentes $\rangle$

$(-1)^n(-x-y)^{\underline{n}} = \sum_k \binom{n}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k}} (-1)^n$

$\equiv \langle$ Extracción de constante en la suma $\rangle$

$(-1)^n(-x-y)^{\underline{n}} = (-1)^n \sum_k \binom{n}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k}}$

$\equiv \langle$ Eliminación de los (-1) $\rangle$

$(-x-y)^{\underline{n}} = \sum_k \binom{n}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k}}$

$\equiv \langle$ Identidad de factorial ascendente $\rangle$

$True$ $\diamond$

Ejercicio 2.a.2 (5.67 Concrete Mathematics). Encuentre una forma cerrada para:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\binom{k}{2}}{2} \binom{2n-k}{n} \quad \text{, entero } n \geq 0$$

Para hacer mas sencilla la demostración primero se demostrará la siguiente igualdad:

$$\binom{\binom{k}{2}}{2} = 3\binom{k+1}{4}$$

$\equiv \langle$ Definición de coeficiente binomial: $\binom{k}{2} = \frac{k!}{(k-2)!2} = \frac{k(k-1)}{2}$ $\rangle$

$$\binom{\frac{k(k-1)}{2}}{2} = 3\frac{(k+1)!}{4!(k-3)!}$$

$\equiv \langle$ Definición de coeficiente binomial $\rangle$

$$\frac{(\frac{k(k-1)}{2})!}{(\frac{k(k-1)}{2}-2)!2} = 3\frac{(k+1)(k)(k-1)(k-2)(k-3)!}{4!(k-3)!}$$

$\equiv \langle$ Desarollando el factorial $\rangle$

$$\frac{(\frac{k(k-1)}{2})(\frac{k(k-1)}{2}-1)(\frac{k(k-1)}{2}-2)!}{(\frac{k(k-1)}{2}-2)!2} = \frac{(k+1)(k)(k-1)(k-2)}{8}$$

$\equiv \langle$ Resolviendo $\rangle$

$$\frac{(\frac{k(k-1)}{2})(\frac{k(k-1)}{2}-1)}{2} = \frac{(k+1)(k)(k-1)(k-2)}{8}$$

$\equiv \langle$ Resolviendo $\rangle$

$\frac{1}{8}(k(k-1))((k(k-1)-2) = \frac{(k+1)(k)(k-1)(k-2)}{8}$

$\equiv \langle$ Resolviendo $\rangle$

$((k(k-1)-2) = (k+1)(k-2)$

$\equiv \langle$ Resolviendo $\rangle$

$k^2 - k - 2 = k^2 - k - 2$

$\equiv$

$True$ $\diamond$

Utilizando esta igualdad, y la regla 5.26:
(enteros $l, m \geq 0$ y $n \geq q \geq 0$) $\sum_{0 \leq k \leq l} \binom{l-k}{m}\binom{q+k}{n} = \binom{l+q+1}{m+n+1}$
Se realiza la demostración:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\binom{k}{2}}{2}\binom{2n-k}{n}$$

$= \langle$ Utilizando la igualdad anterior $\rangle$

$$\sum_{k=0}^{n} 3\binom{k+1}{4}\binom{2n-k}{n}$$

$= \langle$ Agregando un termino (igual a 0, ya que $2n-k < n$ para $k > n$) y así aplicar la regla 5.26 $\rangle$

$$\sum_{k=0}^{n} 3\binom{k+1}{4}\binom{2n-k}{n} + \sum_{k=n+1}^{2n} 3\binom{k+1}{4}\binom{2n-k}{n}$$

$= \langle$ Agrupando las sumas $\rangle$

$$\sum_{k=0}^{2n} 3\binom{k+1}{4}\binom{2n-k}{n}$$

$= \langle$ Aplicando 5.26 con $l := 2n$, $k := k$, $q := 1$, $m := n$, $n := 4$ $\rangle$

$$3\binom{2n+1+1}{n+4+1}$$

$=$

$$3\binom{2n+2}{n+5} \diamond$$

Ejercicio 2.b. Ecuación (5.24) de la Tabla 169 del Concrete Mathematics:

$$\sum_{k} \binom{l}{m+k}\binom{s+k}{n}(-1)^k = (-1)^{l+m}\binom{s-m}{n-l} \quad \text{entero } l \geq 0, \text{ enteros } m, n$$

Se demostrará por inducción sobre l.

Caso base $l = 0$:

$$\sum_{k} \binom{0}{m+k}\binom{s+k}{n}(-1)^k = (-1)^{m}\binom{s-m}{n}$$

$\equiv \langle$ Separando la suma $\rangle$

$$[\sum_{k \neq -m} \binom{0}{m+k}\binom{s+k}{n}(-1)^k] + \binom{0}{m-m}\binom{s-m}{n}(-1)^{-m} = (-1)^m\binom{s-m}{n}$$

$\equiv \langle$ $\binom{0}{m+k} = 0$ para $k \neq -m$ y $\binom{0}{m+k} = 1$ para $k = -m$ $\rangle$

$$\binom{s-m}{n}(-1)^{-m} = (-1)^m\binom{s-m}{n}$$

$\equiv$

True $\diamond$

Caso inductivo $l > 0$: se asume que se cumple la hipótesis para todos los valores menores que l.

$$\sum_k \binom{l}{m+k}\binom{s+k}{n}(-1)^k$$

$= \langle$ Aplicando adición $\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}$ (k y m son enteros) $\rangle$

$$\sum_k [\binom{l-1}{m+k} + \binom{l-1}{m+k-1}]\binom{s+k}{n}(-1)^k$$

$= \langle$ Propiedad distributiva de sumas $\rangle$

$$\sum_k \binom{l-1}{m+k}\binom{s+k}{n}(-1)^k + \sum_k \binom{l-1}{m+k-1}\binom{s+k}{n}(-1)^k$$

$= \langle$ Hipótesis se cumple para $l-1$ $\rangle$

$$(-1)^{l-1+m}\binom{s-m}{n-l+1} + (-1)^{l+m-2}\binom{s-m+1}{n-l+1}$$

$=$

$$(-1)^{l+m}\binom{s-m+1}{n-l+1} - (-1)^{l+m}\binom{s-m}{n-l+1}$$

$= \langle$ Aplicando adición y despejando: $\binom{r}{k} - \binom{r-1}{k} = \binom{r-1}{k-1}$ (n y l son enteros) $\rangle$

$(-1)^{l+m}\binom{s-m}{n-l}$ $\diamond$

Por lo tanto, tomando el caso base y el inductivo, queda demostrado que se cumple para todo l entero no negativo.

Ejercicio 2.c. Mostrar que $\forall n$ entero se cumple:

$$\sum_{k\geq 0}\binom{r-tk}{k}\binom{s-t(n-k)}{n-k}\frac{r}{r-tk} = \binom{r+s-tn}{n}$$

Se reescribe la igualdad para que quede mas sencilla y se pueda demostrar por inducción noetheriana. Se realiza el cambio de variable $s := m+n-r+tn$, resultando.

$$A(r,m,n,t) = \sum_{k\geq 0}\binom{r-tk}{k}\binom{m+n-r+tk}{n-k}\frac{r}{r-tk} = \binom{m+n}{n}$$

Antes de hacer la inducción noetheriana, demostraremos la igualdad para $n<0$ y m cualquiera:

$$\sum_{k\geq 0}\binom{r-tk}{k}\binom{m+n-r+tk}{n-k}\frac{r}{r-tk} = \binom{m+n}{n}$$

$\equiv \langle$ $n<0$, sumatoria es sobre $k\geq 0$ y para $x<0$ $\binom{s}{x} = 0$ $\rangle$

$0 = 0$

$\equiv$

$True$ $\diamond$

Para demostrar la igualdad con $n \geq 0$, se realizará inducción noetheriana, donde la relación de orden es lexicográfico sobre pares de números naturales (que represtarán las variables n y m) $(A, \preceq)$ donde $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Esta relación de orden es un CPO, ya que evidentemente se cumple la propiedad reflexiva $(\forall (x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (x,y) \preceq (x,y))$, la propiedad antisimétrica $(\forall (x,y),(w,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (x,y) \preceq (w,z) \wedge (w,z) \preceq (x,y) \rightarrow (x,y) = (w,z))$ y la transitiva $(\forall (x,y),(u,v),(w,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (x,y) \preceq (u,v) \wedge (u,v) \preceq (w,z) \rightarrow\rightarrow (x,y) \preceq (w,z))$, por lo tanto es un CPO.

Así como también, cada subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ posee un mínimal o lo que es lo mismo, no existen cadenas descendientes infinitas, ya que a lo más estaría acotado por el mínimo, el cual es (0,0).

Base inducción:

Si $n = 0$ y $m = 0$:

$$\sum_{k \geq 0} \binom{r-tk}{k} \binom{-r+tk}{-k} \frac{r}{r-tk} = \binom{0}{0}$$

$\equiv \langle$ Separando el rango de la sumatoria $\rangle$

$$\binom{r}{0}\binom{-r}{0}\frac{r}{r} + [\sum_{k>0} \binom{r-tk}{k} \binom{-r+tk}{-k} \frac{r}{r-tk}] = \binom{0}{0}$$

$\equiv \langle$ $\binom{s}{0} = 1$ y $x < 0$ $\binom{s}{x} = 0$ $\rangle$

$1 + 0 = 1$

$\equiv$

$True$ $\diamond$

Es decir, se cumple la propiedad $A(r, 0, 0, t)$ para el elemento minimal.

Inducción: $\forall(n,m)$ no minimal $(\forall(n',m')((n',m') \preceq (n,m) \Rightarrow A(r,m',n,t)\wedge$ $A(r,m,n',t)) \Rightarrow A(r,m,n,t))$ para cualquier r y t.

Sean (n,m) no minimal, se quiere probar la igualdad, teniendo en cuenta que se cumple la propiedad para cualquier $(n',m') \preceq (n,m)$.

$$\sum_{k\geq n}\binom{r-tk}{k}\binom{m+n-r+tk}{n-k}\frac{r}{r-tk}$$

$= \langle$ Aplicando adición $\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}$ (k y n son enteros) $\rangle$

$$\sum_{k\geq n}\binom{r-tk}{k}[\binom{m+n-r+tk-1}{n-k}+\binom{m+n-r+tk-1}{n-k-1}]\frac{r}{r-tk}$$

$= \langle$ Propiedad distributiva de las sumas $\rangle$

$$[\sum_{k\geq n}\binom{r-tk}{k}\binom{m+n-r+tk-1}{n-k}\frac{r}{r-tk}]+[\sum_{k\geq n}\binom{r-tk}{k}\binom{m+n-r+tk-1}{n-k-1}\frac{r}{r-tk}]$$

$= \langle$ Hipótesis: $'m = m-1$ y $n' = n-1$, se cumple $A(r,m',n,t)$ y $A(r,m,n',t)$ $\rangle$

$$A(r,m-1,n,t) + A(r,m,n-1,t)$$

$= \langle$ Sustituyendo $\rangle$

$$\binom{m-1+n}{n}+\binom{m+n-1}{n-1}$$

$= \langle$ Aplicando adición $\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}$ (n es enteros) $\rangle$

$$\binom{m+n}{n} \diamond$$

Como se pudo demostrar $A(r,m,n,t)$ en términos de $A(r,m-1,n,t)$ y $A(r,m,n-1,t)$ utilizando el orden noetheriano definido anteriormente y se demostró la propiedad para el elemento minimal, por inducción noetheriana queda demostrada la propiedad $A(r, m, n, t)$ para $n \geq 0$. El caso $n < 0$ también fue demostrado.

Para demostrar que $A(r, m, n, t)$ es válido para cualquier m, entero o no, se hace por argunmento polinomial, observando la propiedad, vemos que se mantiene la igualdad para todos los valores de m, porque ambos lados, son polinomios en n de orden $m + n$, y los términos de la propiedad son iguales en un número infinito de valores, por lo tanto se cumple para todo m.

$$\sum_{k \geq 0} \binom{r - tk}{k} \binom{s - t(n-k)}{n-k} \frac{r}{r - tk} = \binom{r + s - tn}{n}$$

se cumple para todo n entero.