Universidad Simón Bolívar
Matemáticas para la Computación
Tarea II

Fabiola Di Bartolo
Carnet: 09-87324

26 de mayo de 2010

**Ejercicio 1** Calcular la suma $\sum_{1\leq k\leq n}\lfloor log_2 k\rfloor$, donde $\lfloor a\rfloor$ es la parte entera por debajo de $a$

$\sum_{k=1}^{n}\lfloor log_2 k\rfloor$

$= \langle$ Utilizando $\lfloor x\rfloor = \sum[1\leq j\leq x]$ $\rangle$

$\sum_{j,k}[1\leq j\leq log_2 k][1\leq k\leq n]$

$= \langle$ Tomando $log_2$ ($k\geq 1$ y la función $log$ es creciente) $\rangle$

$\sum_{j,k}[1\leq j\leq log_2 k][log_2(1)\leq log_2(k)\leq log_2(n)]$

$= \langle$ Manipulando rangos y potencia de 2 $\rangle$

$\sum_{j,k}[1\leq j\leq log_2(n)][2^j\leq k\leq n]$

$= \langle$ Separando rangos $\rangle$

$\sum_{1\leq j\leq log_2(n)}\sum[2^j\leq k\leq n]$

$= \langle$ Resolviendo la sumatoria $\rangle$

$\sum_{1\leq j\leq log_2(n)}(n+1-2^j)$

$= \langle$ Separando términos $\rangle$

$(n+1)\sum_{1\leq j\leq log_2(n)}1-\sum_{1\leq j\leq log_2(n)}2^j$

$= \langle$ Resolviendo la sumatoria y $j$ toma valores discretos $\rangle$

$(n+1)\lfloor log_2 n\rfloor - \sum_{1\leq j\leq log_2(n)} 2^j$

$= \langle$ Modificando límites de la sumatoria $\rangle$

$(n+1)\lfloor log_2 n\rfloor - [(\sum_{0\leq j\leq log_2(n)} 2^j) - 1]$

$= \langle$ Resolviendo la sumatoria y $j$ toma valores discretos $\rangle$

$(n+1)\lfloor log_2(n)\rfloor - [\frac{2^{\lfloor log_2(n)\rfloor+1}-1}{2-1} - 1]$

$= \langle$ Operaciones aritméticas $\rangle$

$(n+1)(\lfloor log_2(n)\rfloor) - [2^{\lfloor log_2(n)\rfloor+1} - 2]$

$= \langle$ Factor común $\rangle$

$(n+1)\lfloor log_2(n)\rfloor - 2(2^{\lfloor log_2(n)\rfloor} - 1)$ $\diamond$

**Ejercicio 2** Evaluar $⧈_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$ por el Método 5 del libro de la siguiente manera: Primero escribir $⧈_n + \Box_n = 2\sum_{1\leq j\leq k\leq n} jk$ y luego aplicar el teorema 2.33.

Partiendo de la primera igualdad de la propiedad:

$⧈_n + \Box_n$

$= \langle$ Sustituyendo valores de $⧈_n$ y $\Box_n$ $\rangle$

$\sum_{k=1}^{n} k^3 + \sum_{k=1}^{n} k^2$

$= \langle$ Propiedad asociativa de sumas $\rangle$

$\sum_{k=1}^{n}(k^3 + k^2)$

$= \langle$ Factor común $\rangle$

$\sum_{k=1}^{n} k[k(k+1)]$

$= \langle$ Aplicando $k(k+1) = 2\sum_{j=1}^{k} j$ $\rangle$

$\sum_{k=1}^{n} k2\sum_{j=1}^{k} j$

$= \langle$ Propiedad de sumas múltiples $\rangle$

$2\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} jk$

$= \langle$ Propiedad de sumas múltiples (2.32) $\rangle$

$2\sum_{1\leq j\leq k\leq n} jk$

$= \langle$ Propiedad (2.33) $\sum_{1\leq j\leq k\leq n} a_j a_k = \frac{1}{2}[(\sum_{1\leq k\leq n} a_k)^2 + (\sum_{1\leq k\leq n} a_k^2)]$ $\rangle$

$[\sum_{1\leq k\leq n} k]^2 + \sum_{1\leq k\leq n} k^2$

$= \langle$ Sustituyendo por $\square_n$ $\rangle$

$[\sum_{1\leq k\leq n} k]^2 + \square_n$

$= \langle$ Aplicando $\frac{n(n+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} k$ $\rangle$

$[\frac{n(n+1)}{2}]^2 + \square_n$

$= \langle$ Operaciones aritméticas $\rangle$

$\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \square_n$

Por lo tanto,

$\cube_n + \square_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \square_n$

$\equiv \langle$ Eliminando los $\square_n$ $\rangle$

$\cube_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ $\diamond$

**Ejercicio 3** Evalúe la suma $\sum_{k=1}^{n} \frac{(2k+1)}{k(k+1)}$ utilizando suma por partes.

Hallando una fórmula genérica:

$\sum_x \frac{(2x+1)}{x(x+1)} \delta x$

Aplicando la propiedad de sumas por partes:

$\sum_x f(x) \Delta g(x) \delta x = f(x)g(x) - \sum_x g(x+1) \Delta f(x) \delta x$

con:

- $\star$ $f(x) = 2x + 1$ , $\Delta f(x) = (2(x+1)+1) - (2x+1) = 2$
- $\star$ $\Delta g(x) = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = -\frac{1}{x+1} - (-\frac{1}{x}) = g(x+1) - g(x)$
- $\star$ Por lo tanto, $g(x) = -\frac{1}{x} = -(x-1)^{\underline{-1}}$ y $g(x+1) = -\frac{1}{x+1} = -(x)^{\underline{-1}}$

Entonces,

$\sum_x \frac{(2x+1)}{x(x+1)} \delta x$

$= \langle$ Sumas por partes $\rangle$

$(2x+1)(-\frac{1}{x}) - \sum_x -(x)^{\underline{-1}} 2\delta x$

$= \langle$ Operaciones aritméticas $\rangle$

$-2 - \frac{1}{x} + 2\sum_x (x)^{\underline{-1}} \delta x$

$= \langle$ Aplicando $\sum_x (x)^{\underline{-1}} \delta x = H_x$ para $x \geq 0$ $\rangle$

$-2 - \frac{1}{x} + 2H_x$

Por lo tanto,

$\sum_{k=1}^{n} \frac{(2k+1)}{k(k+1)}$

$=$

$\sum_{x=1}^{n+1} \frac{(2x+1)}{x(x+1)} \delta x$

$=$

$-2 - \frac{1}{x} + 2H_x \mid_1^{n+1}$

$= \langle$ Evaluando $\rangle$

$(-2 - \frac{1}{n+1} + 2H_{n+1}) - (-2 - 1 + 2H_1)$

$= \langle$ Operaciones aritméticas $\rangle$

$-\frac{1}{n+1} + 2H_{n+1} + 1 - 2H_1$

$= \langle$ Definición de números armónicos $\rangle$

$-\frac{1}{n+1} + 2H_{n+1} + 1 - 2$

$= \langle$ Operaciones aritméticas $\rangle$

$-\frac{1}{n+1} + 2H_{n+1} - 1$

$= \langle$ Definición de números armónicos $\rangle$

$-\frac{1}{n+1} + 2(H_n + \frac{1}{n+1}) - 1$

$= \langle$ Operaciones aritméticas $\rangle$

$2H_n + \frac{1}{n+1} - 1$

$= \langle$ Operaciones aritméticas $\rangle$

$2H_n - \frac{n}{n+1}$ $\diamond$

**Ejercicio 4** Determine una fórmula cerrada para $\sum_{0 \leq i \leq n} \frac{i^2 4^{i-1}}{(i+1)(i+2)}$

$\sum_{0 \leq i \leq n} \frac{i^2 4^{i-1}}{(i+1)(i+2)}$

$= \langle$ Fracciones parciales $\rangle$

$\frac{1}{4} \sum_{0 \leq i \leq n} (\frac{i+2}{i+1} - \frac{4}{i+2}) 4^i$

$= \langle$ Propiedades de la suma $\rangle$

$\frac{1}{4}(\sum_{0\leq i\leq n} \frac{(i+2)4^i}{i+1}) - \frac{1}{4}(\sum_{0\leq i\leq n} \frac{4^{i+1}}{i+2})$

$= \langle$ Cambio de variable i:= i+1 en el segundo termino $\rangle$

$\frac{1}{4}(\sum_{0\leq i\leq n} \frac{(i+2)4^i}{i+1}) - \frac{1}{4}(\sum_{1\leq i\leq n+1} \frac{4^{i}}{i+1})$

$= \langle$ Manipulando la última suma (extracción del último término)$\rangle$

$\frac{1}{4}(\sum_{0\leq i\leq n} \frac{(i+2)4^i}{i+1}) - \frac{1}{4}((\sum_{1\leq i\leq n} \frac{4^{i}}{i+1}) + \frac{4^{n+1}}{n+2})$

$= \langle$ Ampliando el rango de la última suma para incluir el 0$\rangle$

$\frac{1}{4}(\sum_{0\leq i\leq n} \frac{(i+2)4^i}{i+1}) - \frac{1}{4}((\sum_{0\leq i\leq n} \frac{4^{i}}{i+1}) + \frac{4^{n+1}}{n+2} - 1)$

$= \langle$ Operaciones aritméticas $\rangle$

$\frac{1}{4}(\sum_{0\leq i\leq n} \frac{(i+2)4^i}{i+1}) - \frac{1}{4}(\sum_{0\leq i\leq n} \frac{4^{i}}{i+1}) - \frac{4^n}{n+2} + \frac{1}{4}$

$= \langle$ Combinando sumas $\rangle$

$\frac{1}{4}(\sum_{0\leq i\leq n} \frac{(i+2)4^i-4^i}{i+1}) - \frac{4^n}{n+2} + \frac{1}{4}$

$= \langle$ Sacando factor común $\rangle$

$\frac{1}{4}(\sum_{0\leq i\leq n} \frac{(i+2-1)4^i}{i+1}) - \frac{4^n}{n+2} + \frac{1}{4}$

$= \langle$ Operaciones aritméticas $\rangle$

$\frac{1}{4}(\sum_{0\leq i\leq n} \frac{(i+1)4^i}{i+1}) - \frac{4^n}{n+2} + \frac{1}{4}$

$= \langle$ Operaciones aritméticas $\rangle$

$\frac{1}{4}(\sum_{0\leq i\leq n} 4^i) - \frac{4^n}{n+2} + \frac{1}{4}$

$= \langle$ Aplicando: $\sum_{0\leq k\leq n} ax^k = \frac{a(x^{n+1}-1)}{x-1}$ para $x \neq 1$ $\rangle$

$\frac{1}{4}(\frac{4^{n+1}-1}{3}) - \frac{4^n}{n+2} + \frac{1}{4}$

$= \langle$ Sacando factor común $\rangle$

$\frac{1}{4}(\frac{4^{n+1}-1}{3} - \frac{4^{n+1}}{n+2} + 1)$

$= \langle$ Sacando factor común $\rangle$

$\frac{1}{4}(4^{n+1}(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+2}) - \frac{1}{3} + 1)$ $\diamond$