# Universidad Simón Bolívar
# Matemáticas para la Computación
# Tarea V

Fabiola Di Bartolo
Carnet: 09-87324

12 de julio de 2010

**Ejercicio 1.** Ejercicio 35 del capítulo 7 del Concrete Mathematics 2da. Edición:

Evaluar la suma $\sum_{0<k<n} \frac{1}{k(n-k)}$ de dos maneras:

a) Expanda el sumando en fracciones parciales.

$$\sum_{0<k<n} \frac{1}{k(n-k)}$$

$= \langle$ Separación por fracciones parciales $\rangle$

$$\frac{1}{n} \sum_{0<k<n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}$$

$= \langle$ Separación de la sumatoria $\rangle$

$$\frac{1}{n} \sum_{0<k<n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n} \sum_{0<k<n} \frac{1}{n-k}$$

$= \langle\ H_n = \sum_{0<k\leq n} \frac{1}{k}$ y cambio de variable $u := n-k\ \rangle$

$$\frac{1}{n} H_{n-1} + \frac{1}{n} \sum_{0<u<n} \frac{1}{u}$$

$= \langle\ H_n = \sum_{0<k\leq n} \frac{1}{k}\ \rangle$

$$\frac{1}{n} H_{n-1} + \frac{1}{n} H_{n-1}$$

$= \langle$ Aritmética $\rangle$

$$\frac{2}{n} H_{n-1} \diamond$$

b) Trate la suma como una convolución y use funciones generatrices.

$$\sum_{0<k<n} \frac{1}{k(n-k)}$$

$= \langle$ Covolusión: $f(k) := \frac{1}{k}$ y $g(n-k) := \frac{1}{n-k}$ y $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n} = ln\frac{1}{1-z}$ $\rangle$

$$[z^n](ln\frac{1}{1-z})^2$$

$= \langle$ $(ln\frac{1}{1-z})^m = m! \sum_{n\geq 0} \left[{n \atop m}\right] \frac{z^n}{n!}$, sólo necesitamos el n-ésimo $\rangle$

$$2! \sum_{n\geq 0} \left[{n \atop 2}\right] \frac{1}{n!}$$

$= \langle$ $\left[{n+1 \atop 2}\right] = n! H_n$ $\rangle$

$$\frac{2!(n-1)!}{n!} H_{n-1}$$

$= \langle$ Aritmética $\rangle$

$$\frac{2}{n} H_{n-1} \diamond$$

**Ejercicio 2.** Sea $U(n, m)$ el número de maneras distintas de sentar n alumnos en una fila de m pupitres dejando al menos un pupitre vacío entre alumnos.

a) Determine la función genetratriz de la secuencia $U(n, 0), U(n, 1), U(n, 2), ...$

b) Halle una forma cerrada para U(n,m).

Ayuda: Para (a) establezca una ecuación de recurrencia sobre los U(n,m). Las maneras de sentar n alumnos en m pupitres (todos los objetos son distinguibles, tanto los alumnos como los pupitres) las podemos dividir en las maneras en que el último pupitre está ocupado por uno de los n alumnos y las maneras en que el último pupitre está ocupado.

Separando los patrones donde el último pupitre queda vacío y donde el último pupitre esta ocupado, nos queda esta recurrencia:

$$U(n, m) = nU(n - 1, m - 2) + U(n, m - 1)$$

El primer término de la recurrencia corresponde al número de formas que se tienen para llenar la fila, tal que el último pupitre esté lleno, y se cuenta ocupando el último pupitre que esto se puede hacer de $\binom{n}{1}$ o $n$ formas, y luego ocupando con el resto de los estudiantes $(n - 1)$ los $m - 2$ pupitres (ya que el último está ocupado y el penúltimo no puede ocuparse porque violaría la condición de dejar un puesto de por medio).

El segundo término de la recurrencia corresponde al número de formas en que se pueden ocupar los pupitres dejando el último puesto vacío, es decir se reparten los $n$ estudiantes en los $m - 1$ (se descuenta el pupitre vacío) pupitres $(U(n, m - 1))$.

Definamos los casos bases:

- ⋆ $U(x, 0) = 0$ para todo $x$. No importa el número de estudiantes que exista, si hay 0 pupitres, no hay forma de sentarlos.

- ⋆ $U(0, x) = 0$ para todo $x$. No importa el número de pupitres que exista, si hay 0 estudiantes, no hay forma de ocupar los pupitres.

- ⋆ $U(1, 1) = 1$, sólo existe una forma de sentar un estudiante en un pupitre.

- ⋆ Sin embargo, la recurrencia para $U(1, 2)$, $U(1, 3)$, $U(1, 4)$ genera los valores 1, 1 y 1, y sus valores correctos son 2, 3 y 4 por lo que se debe agregar un uno a la recurrencia para los casos en los que se tenga $n = 1$.

Entonces, la recurrencia queda de la siguiente forma:

$U(n, m) = nU(n-1, m-2) + U(n, m-1) + [n = 1]$

Para hallar la función generatriz de la secuencia $U(n, 0), U(n, 1), U(n, 2)...$ dejamos el $n$ fijo y sumamos todos los términos con $m$ variando, de la siguiente forma:

$F_n(X) = \sum_m U(n, m)X^m = n\sum_m U(n-1, m-2)X^m + \sum_m U(n, m-1)X^m + \sum_m [n = 1]X^m$

$G_{n-1}(X) = \sum_m U(n-1, m-2)X^{m-2} = (n-1)\sum_m U(n-2, m-4)X^{m-2} + \sum_m U(n-1, m-3)X^{m-2} + \sum_m [n = 1]X^{m-2}$

Sustituyendo,

$F_n(X) = nX^2 G_{n-1}(X) + XF_n(X) + 1$

$G_{n-1}(X) = nX^2F_{n-2}(X) + XG_{n-1}(X) + 1$

Despejando,

$F_n(X) = \frac{1+nX^2G_{n-1}(X)}{1-X}$

$G_{n-1}(X) = \frac{1+(n-1)X^2F_{n-2}(X)}{1-X}$

Sustituyendo $G_{n-1}(X)$ en la primera formula,

$F_n(X) = \frac{(1-X)+nX^2(1+(n-1)X^2F_{n-2}(X))}{(1-X)^2}$

**Ejercicio 3.** Ejercicio 15 del capítulo 9 del Concrete Mathematics 2da. Edición:

Dar una fórmula asintóntica para el coeficiente trinomial "central" $\binom{3n}{n,n,n}$, con error relativo $O(n^{-3})$.

$\binom{3n}{n,n,n}$

$= \langle$ Definición de coeficiente trinomial "central" $\rangle$

$\dfrac{3n!}{n!n!n!}$

$= \langle\ e^{ln(x)} = x\ \rangle$

$e^{ln(\frac{3n!}{n!n!n!})}$

$= \langle$ Propiedades de logaritmos $\rangle$

$e^{ln(3n!)-ln(n!)-ln(n!)-ln(n!)}$

$= \langle$ Aritmética $\rangle$

$e^{ln(3n!)-3ln(n!)}$

$= \langle\ lnn! = nlnn - n + \frac{lnn}{2} + \sigma + \frac{1}{12n} + O(n^{-3})\ \rangle$

$e^{[3nln3n-3n+\frac{ln3n}{2}+\sigma+\frac{1}{12,3n}+O(n^{-3})]-3[nlnn-n+\frac{lnn}{2}+\sigma+\frac{1}{12n}O(n^{-3})]}$

$= \langle$ Aritmética $\rangle$

$e^{[3nln3n+\frac{ln3n}{2}+\sigma+\frac{1}{36n}+O(n^{-3})]-3[nlnn+\frac{lnn}{2}+\sigma+\frac{1}{12n}+O(n^{-3})]}$

$= \langle\ O(f) \pm O(g) = O(\mid f \mid + \mid g \mid) = O(max(\mid f \mid, \mid g \mid))\ \rangle$

$e^{3n[ln3n - lnn] + \frac{1}{2}[ln3n - 3lnn] - 2\sigma + \frac{1}{n}[\frac{1}{36} - \frac{1}{4}] + O(n^{-3})}$

$= \langle$ Propiedades de logaritmos $\rangle$

$e^{3nln(\frac{3n}{n}) + \frac{1}{2}ln(\frac{3n}{n^3} - 2\sigma - \frac{1}{n}\frac{8}{36} + O(n^{-3})}$

$= \langle$ Aritmética $\rangle$

$e^{3nln3 + \frac{1}{2}ln(\frac{3}{n^2}) - 2\sigma - \frac{1}{n}\frac{2}{9} + O(n^{-3})}$

$= \langle$ Propiedades de logaritmos $\rangle$

$e^{ln(3^{3n}) + ln((\frac{3}{n^2})^{1/2}) - 2\sigma - \frac{2}{9n} + O(n^{-3})}$

$= \langle$ Propiedades de logaritmos y aritmética $\rangle$

$e^{ln(3^{3n}) + ln(3^{1/2}) - lnn - 2\sigma - \frac{2}{9n} + O(n^{-3})}$

$= \langle$ Propiedades de logaritmos y aritmética $\rangle$

$e^{ln(\frac{3^{3n+1/2}}{n}) - 2\sigma - \frac{2}{9n} + O(n^{-3})}$

$= \langle\ e^{ln(x)} = x$ y $e^{\sigma} = \sqrt{2\Pi}\ \rangle$

$\frac{3^{3n+1/2}}{2\Pi n} e^{-\frac{2}{9n}} e^{O(n^{-3})}$

$= \langle\ e^{O(f(n))} = 1 + O(f(n))\ \rangle$

$\frac{3^{3n+1/2}}{2\Pi n} e^{-\frac{2}{9n}} (1 + O(n^{-3}))$

$= \langle\ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2! + O(x^3)}\ \rangle$

$$\frac{3^{3n+1/2}}{2\Pi n}(1 - \frac{2}{9n} + \frac{4}{2{,}81n^2} + O((\frac{-2}{9n})^3)(1 + O(n^{-3}))$$

$= \langle$ Aritmética $\rangle$

$$\frac{3^{3n+1/2}}{2\Pi n}(1 - \frac{2}{9n} + \frac{2}{81n^2} + O(\frac{-2^3}{9^3n^3}))(1 + O(n^{-3}))$$

$= \langle$ Aritmética $\rangle$

$$\frac{3^{3n+1/2}}{2\Pi n}(1 - \frac{2}{9n} + \frac{2}{81n^2} + O(\frac{-2^3}{9^3n^3}) + O(n^{-3}) + \frac{2}{9n}O(n^{-3}) + \frac{2}{81n^2}O(n^{-3}) + O(\frac{-2^3}{9^3n^3})O(n^{-3})$$

$= \langle\ O(f) \pm O(g) = O(\mid f \mid + \mid g \mid) = O(max(\mid f \mid, \mid g \mid))$ y $fO(g) = O(fg)\ \rangle$

$$\frac{3^{3n+1/2}}{2\Pi n}(1 - \frac{2}{9n} + \frac{2}{81n^2} + O(n^{-3}))\ \diamond$$