IKI10400 • Struktur Data & Algoritma: *Graph*

Fakultas Ilmu Komputer • Universitas Indonesia

Slide acknowledgments:
Suryana Setiawan, Ade Azurat, Denny, Ruli Manurung, Tisha Melia, Clara Vania

Materi

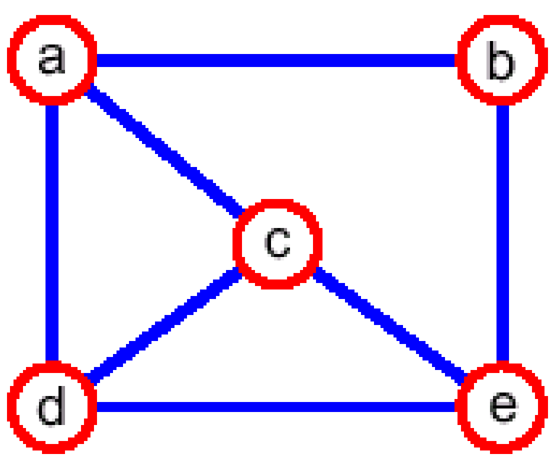
- Motivasi
- Definisi dan Istilah
- Representasi Graph
- Algoritma mencari shortest path
- Topological Sort
- Minimum spanning tree
  - Prim's Algoritma
  - Kruskal's Algoritma

Penggunaan Graph

- Jaringan
- Peta
  - Mencari jalur terpendek
- Penjadwalan (Perencanaan Proyek)

Definisi

- Sebuah graph G = (V, E) terdiri dari:
  - V: kumpulan simpul (*vertices/nodes)*
  - E: kumpulan *sisi/busur (edge)* yang menghubungkan simpul-simpul.
- Sebuah sisi e = (*a*, *b*) memiliki informasi dua simpul yang dihubungkannya.



V= {a,b,c,d,e}

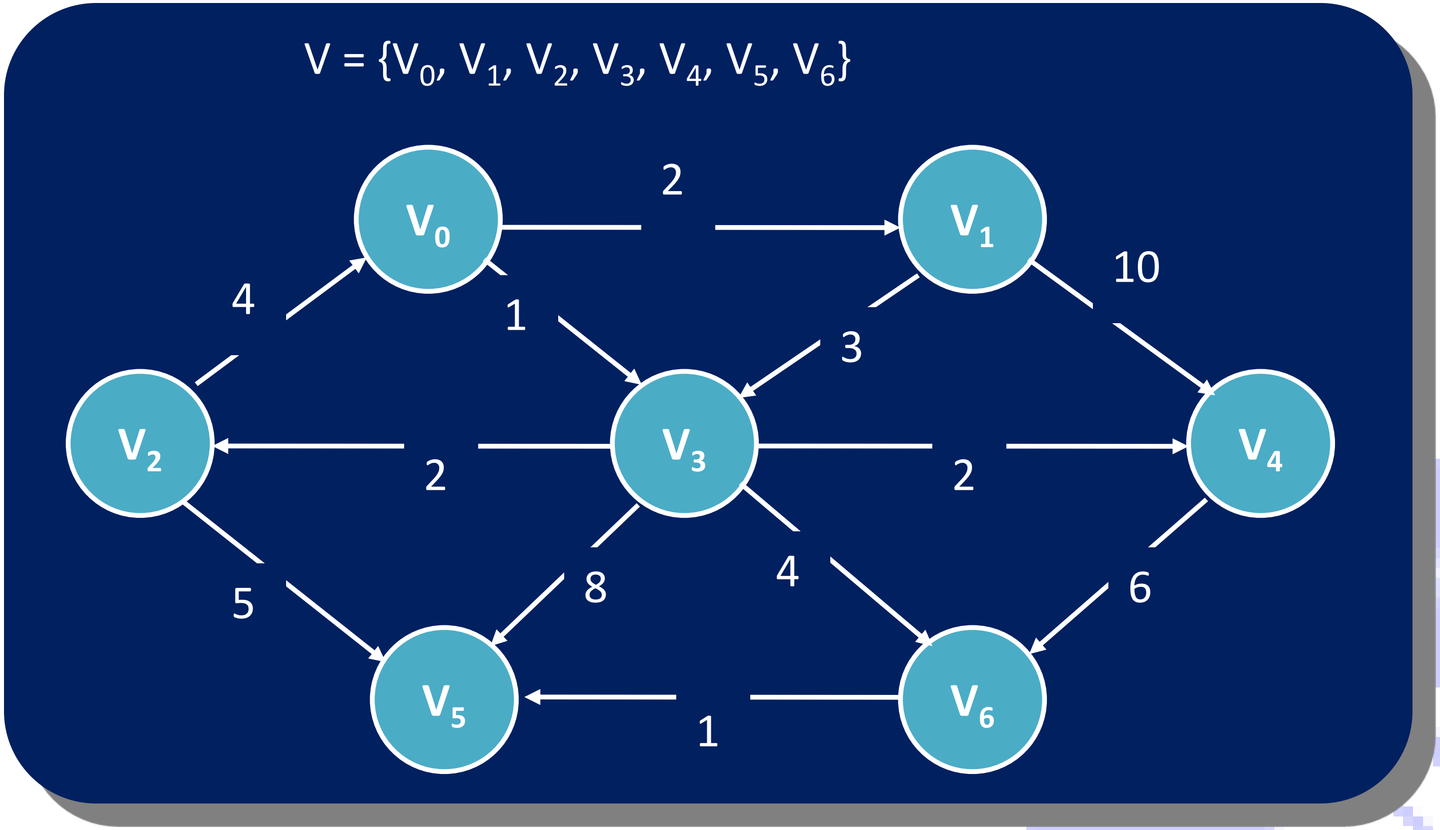
E= {(a,b),(a,c),(a,d), (b,e),(c,d),(c,e), (d,e)}

Istilah

- **undirected graph**
- **directed graph**
- **adjacent vertices**: adalah simpul-simpul yang dihubungkan oleh sebuah sisi *(edge)*
- **degree** (of a vertex): adalah jumlah simpul lain yang terhubung langsung melalui sebuah sisi.
  - Untuk kategori directed graph
    - in-degree
    - out-degree

Weighted Graph

- **weighted graph**: setiap sisi memiliki **bobot/nilai**.

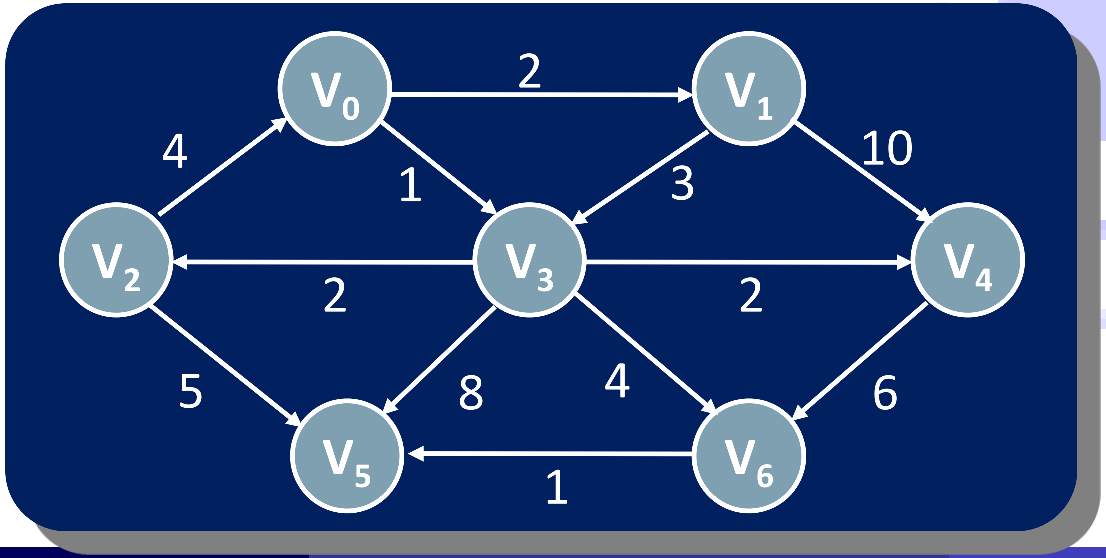


$$(V_0, V_1, 2), (V_0, V_3, 1), (V_1, V_3, 3), (V_1, V_4, 10)$$
$$(V_3, V_4, 2), (V_3, V_6, 4), (V_3, V_5, 8), (V_3, V_2, 2)$$
$$(V_2, V_0, 4), (V_2, V_5, 5), (V_4, V_6, 6), (V_6, V_5, 1)$$

- $|V| = 7; |E| = 12$

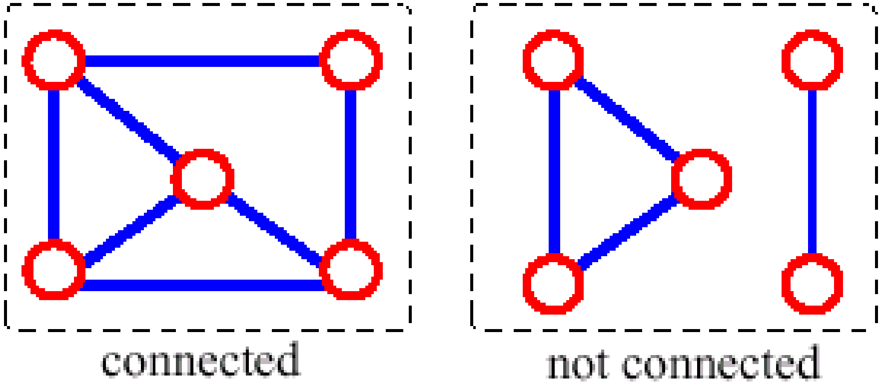
Istilah

- **Jalur/path**: urutan simpul (vertices) v_1, v_2 ,. . .v_k sedemikian sehingga simpul yang berurutan v_i dan v_{i+1} adalah simpul yang terhubung.
- **simple path**: tidak ada simpul yang diulang.
- **cycle**: simple path, dengan catatan simpul awal sama dengan simpul akhir
- **DAG** (**Directed Acyclic Graph**): Graph dengan busur/sisi yang memiliki arah dan tidak memiliki cycles.



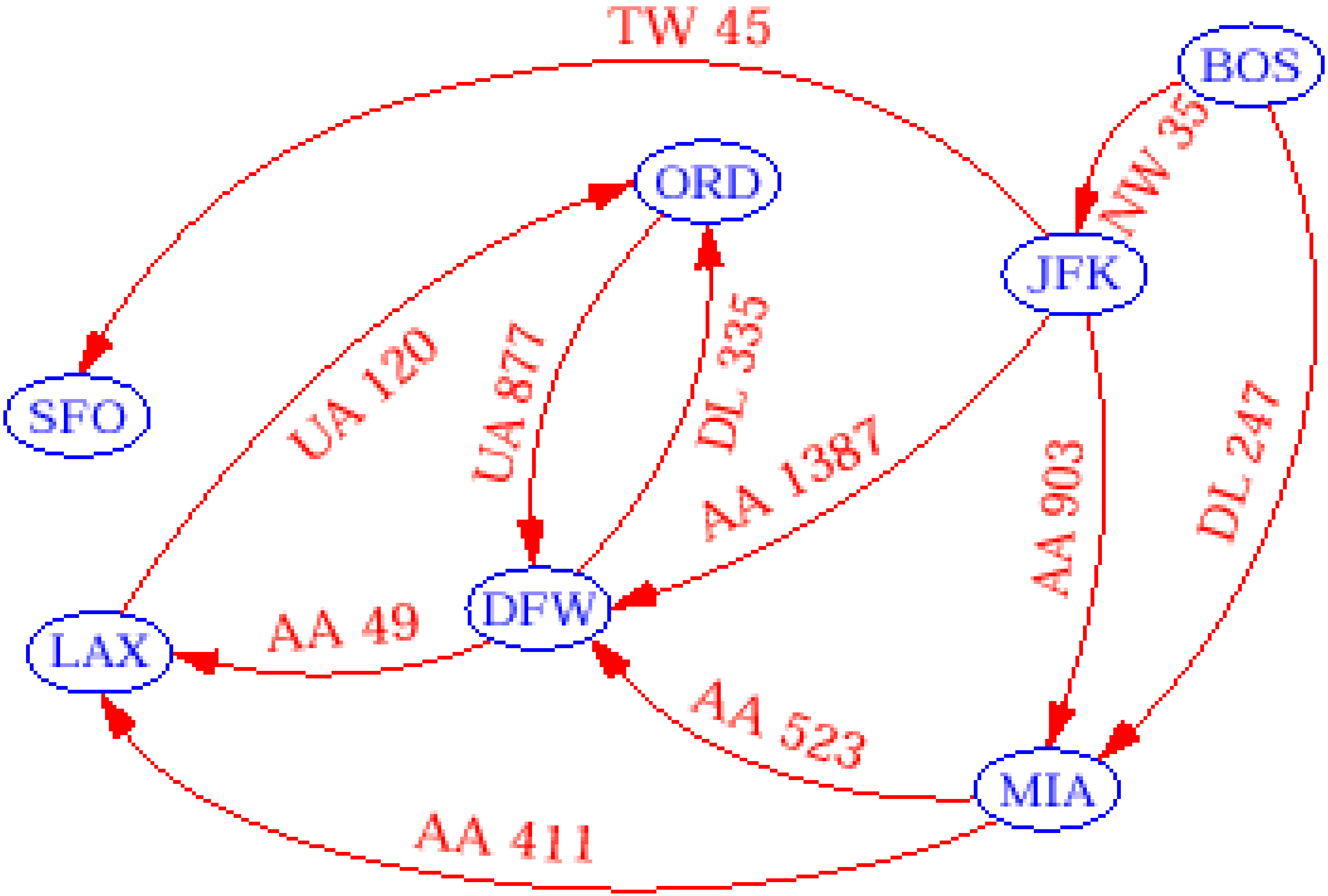
Istilah

- *connected graph*: tiap simpul terhubung dengan simpul lain



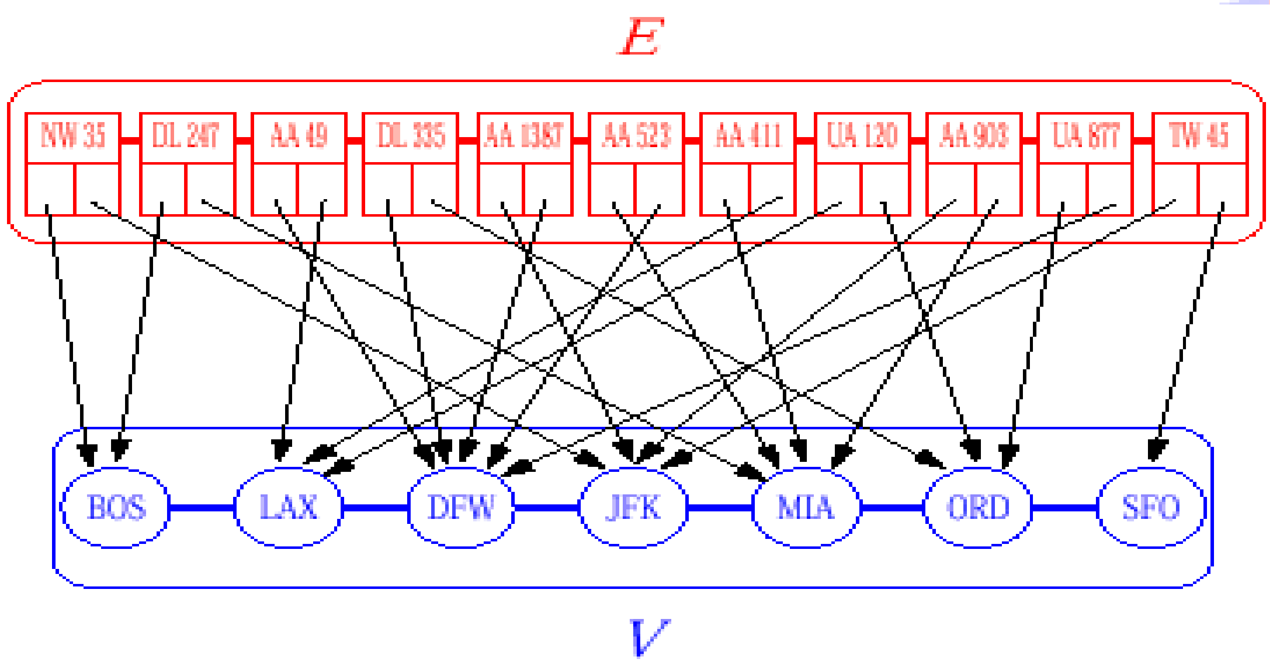
- *subgraph*: bagian simpul dan sisi yang dapat membentuk graph

Representasi



Representasi: *Edge List*

- Struktur ***edge list*** hanya menyimpan simpul dan sisi dalam sebuah list yang tidak terurut.
- Pada tiap sisi disimpan informasi simpul yang terhubung oleh sisi tersebut.
- mudah diimplementasikan.
- Tidak efisien dalam keperluan mencari sisi bila diketahui simpulnya.



Edge List: Representation

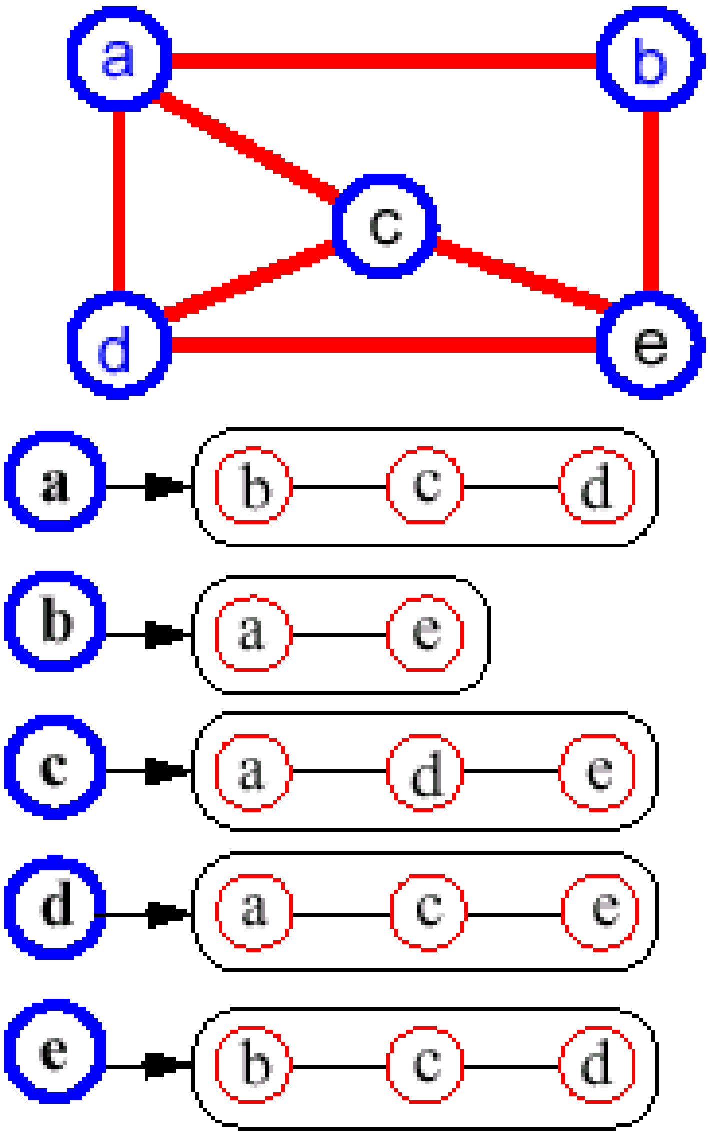
```
class Node
{
  String label;
}
```

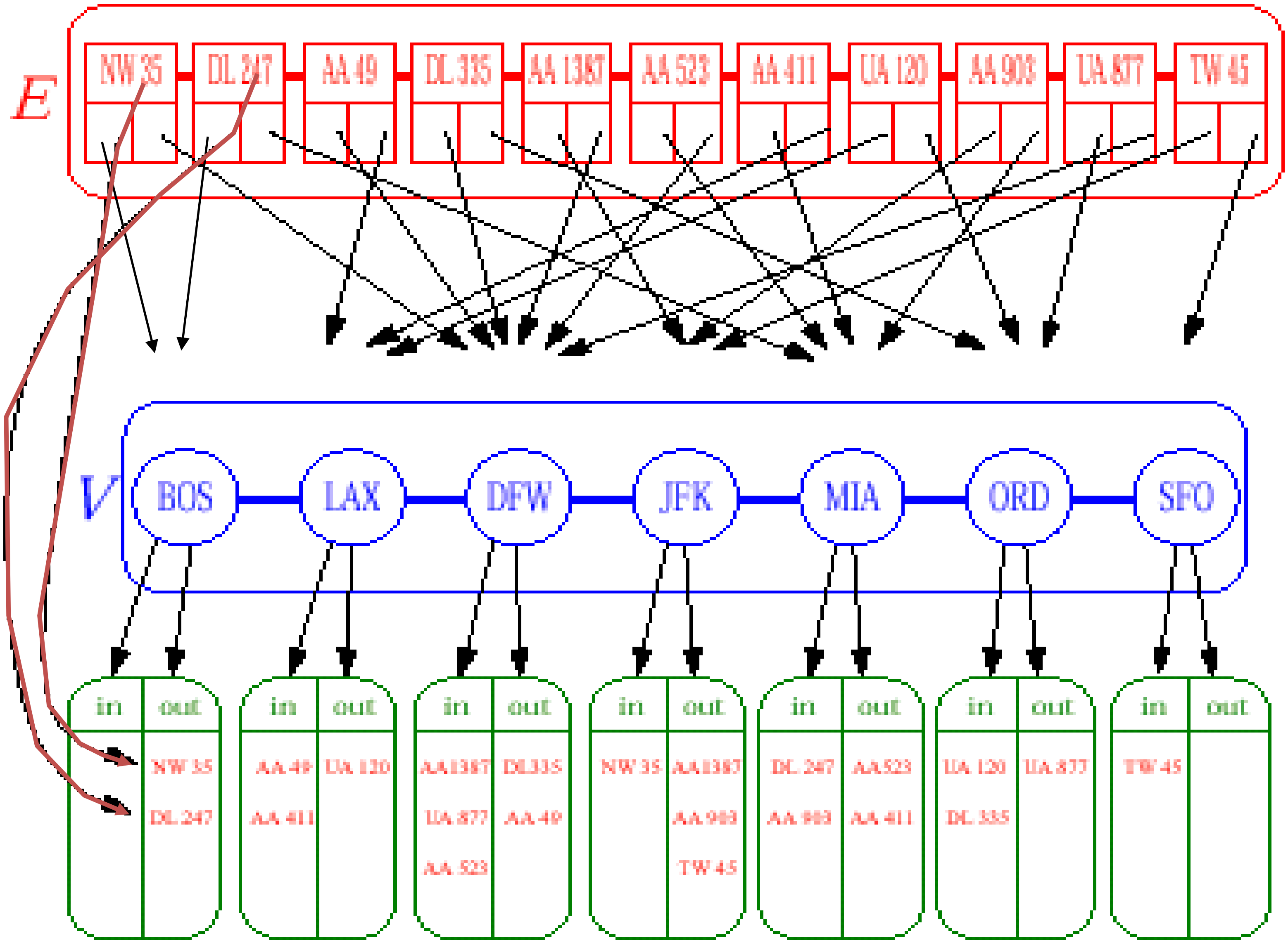
```
class Edge
{
  Node from;
  Node to;
  String label;
  int weight;
}
```

```
class Graph
{
  List<Edge> edgeList;
}
```

Representasi: *Adjancency List* (traditional)

- **Adjacency list** dari sebuah *vertex* ***v*** adalah sekumpulan *vertex* yang terhubung dengan ***v***
- Merepresentasikan graph, dengan menyimpan daftar *adjacency lists* dari seluruh *vertex*.
- struktur **adjacency list** dapat digabungkan dengan struktur edge list.




E
NW 35
DL 247
AA 49
DL 335
AA 1387
AA 523
AA 411
UA 120
AA 903
UA 877
TW 45
V
BOS
LAX
DFW
JFK
MIA
ORD
SFO
in
out

Adjacency List: Representation

```
class Node
{
  String label;
}
```

```
class Edge
{
  Node from;
  Node to;
  String label;
  int weight;
}
```

```
class AdjacencyList
{
  Node node;
  List<Edge> adjacent;
}
```

```
class Graph
{
  List<AdjacencyList> adjacencyLists;
}
```

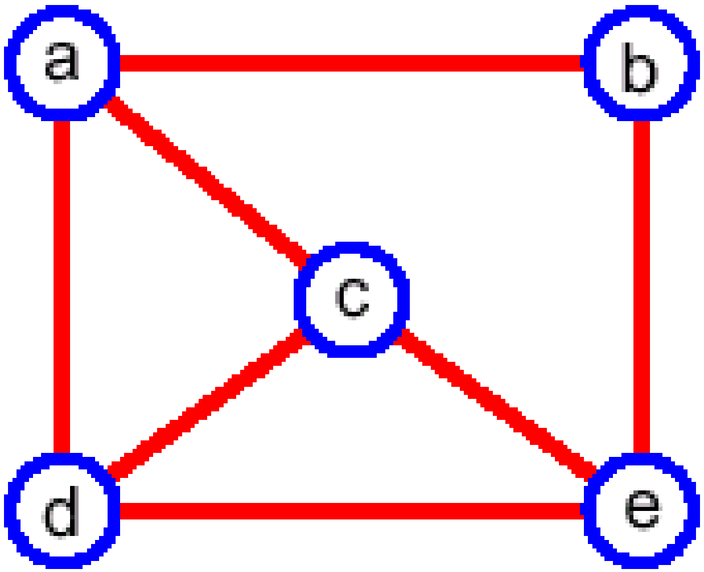
Adjacency List: Representation (alt.)

```
class Node
{
  String label;
}
```

```
class Edge
{
  Node from;
  Node to;
  String label;
  int weight;
}
```

```
class Graph
{
  Map<Node,List<Edge>> adjacencyLists;
}
```

Representasi: Adjacency Matrix (traditional)



	a	b	c	d	e
a	F	T	T	T	F
b	T	F	F	F	T
c	T	F	F	T	T
d	T	F	T	F	T
e	F	T	T	T	F

- matrix M dengan eleman setiap pasang simpul
  - M[i,j] = *true* artinya ada sisi dari simpul (i,j) di graph.
  - M[i,j] = *false* artinya tidak ada sisi dari simpul (i,j) di graph.

Representation: Adjancency Matrix

	0	1	2	3	4	5	6
0	Ø	Ø	NW 35	Ø	DL 247	Ø	Ø
1	Ø	Ø	Ø	AA 49	Ø	DL 335	Ø
2	Ø	AA 1387	Ø	Ø	AA 903	Ø	TW 45
3	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	UA 120	Ø
4	Ø	AA 523	Ø	AA 411	Ø	Ø	Ø
5	Ø	UA 877	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø
6	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø

BOS	DFW	JFK	LAX	MIA	ORD	SFO
0	1	2	3	4	5	6

Representation: Adjancency Matrix

```
class Node
{
  String label;
}
```

```
class Edge
{
  String label;
  int weight;
}
```

```
class Graph
{
  List<Node> nodeList;
  Edge[][] adjacencyMatrix;
}
```

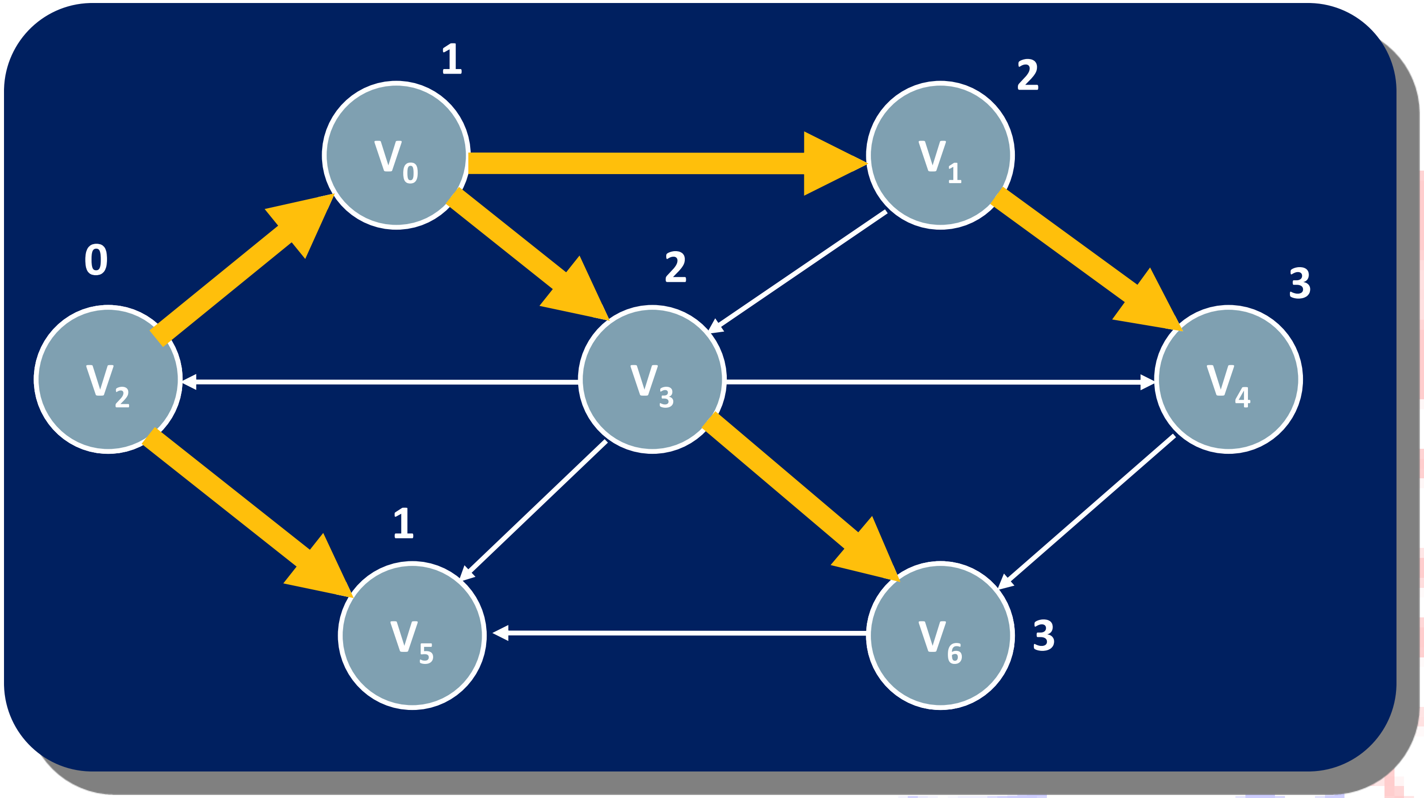
see the other slides

GRAPH TRAVERSAL

GRAPH ALGORITHMS

Shortest Path:

- Vertex awal: V_2
- Bila sisi tidak memiliki bobot, gunakan algoritma BFS (**Breadth First Search**).



Dijkstra's Algorithm

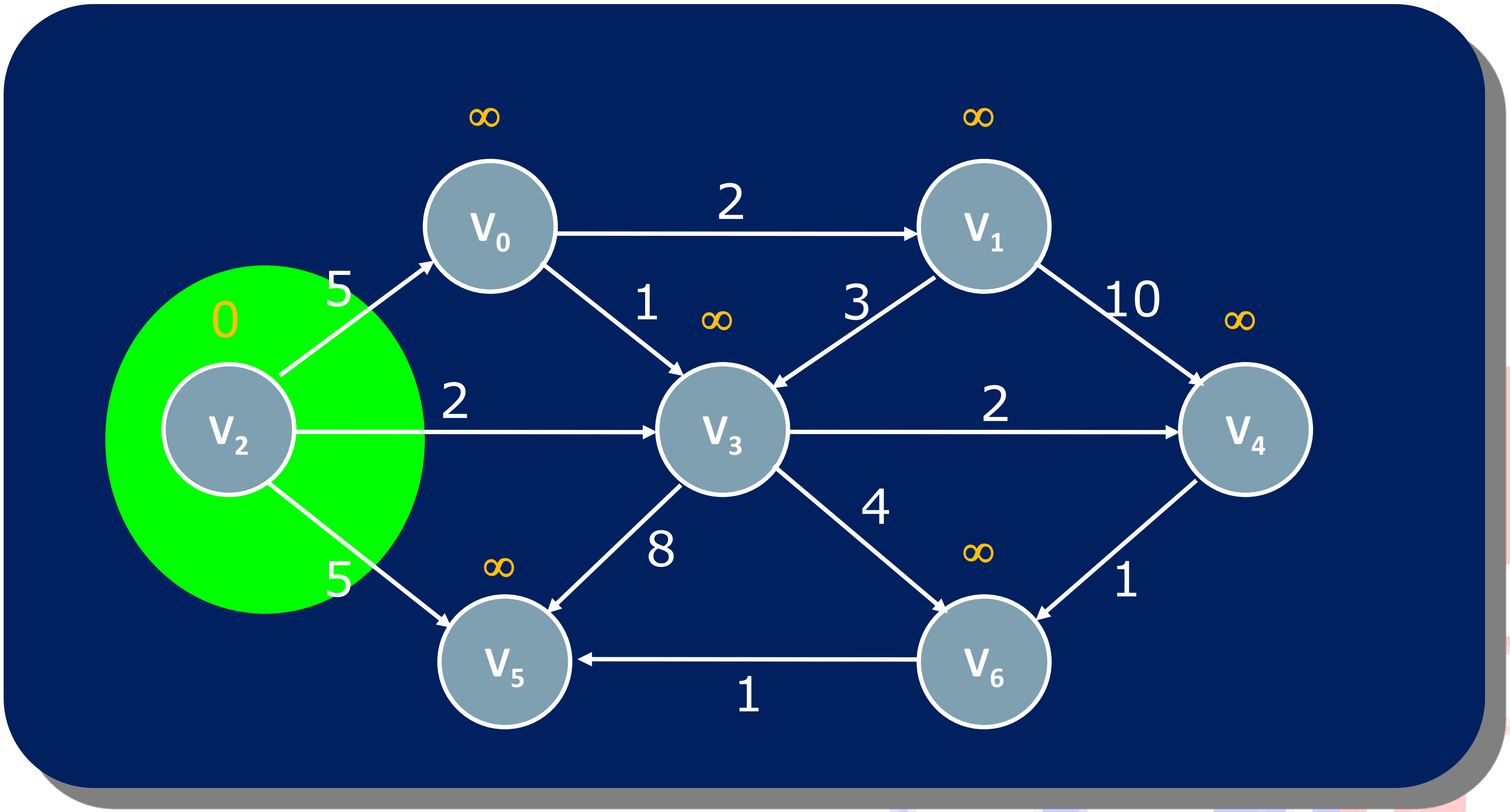
- Banyak masalah → weighted graph (mis: jaringan transport)
- Algoritma **Dijkstra** menghitung jarak tiap simpul dari simpul awal hingga akhirnya diketahui jarak terpendek simpul akhir yang diinginkan.
- Algoritma mengingat simpul mana saja yang telah dihitung jarak terpendeknya dan dinyatakan dalam kelompok hijau (pada literatur dinyatakan sebagai awan putih/white cloud).
- Untuk simpul yang baru sebagian dihitung jaraknya dan belum bisa dipastikan apakah itu jarak terpendek, dinyatakan dengan kelompok abu-abu.
- Untuk simpul yang sama sekali belum dihitung, dinyatakan dalam kelompok hitam.

Dijkstra's Algorithm

- Algoritma menggunakan label ***D[v]*** untuk menyimpan perkiraan jarak terpendek antara s dan v.
- Ketika sebuah simpul v ditambahkan kedalam kelompok aba-abu nilai D[v] sama dengan bobot antara s dan v.
- pada awalnya, nilai label D untuk setiap simpul adalah:
  – D[s] = 0
  – D[v] = ∞ untuk v $\neq$ s

Dijkstra's Algorithm: *stages*

- Awal: Tentukan simpul awal.



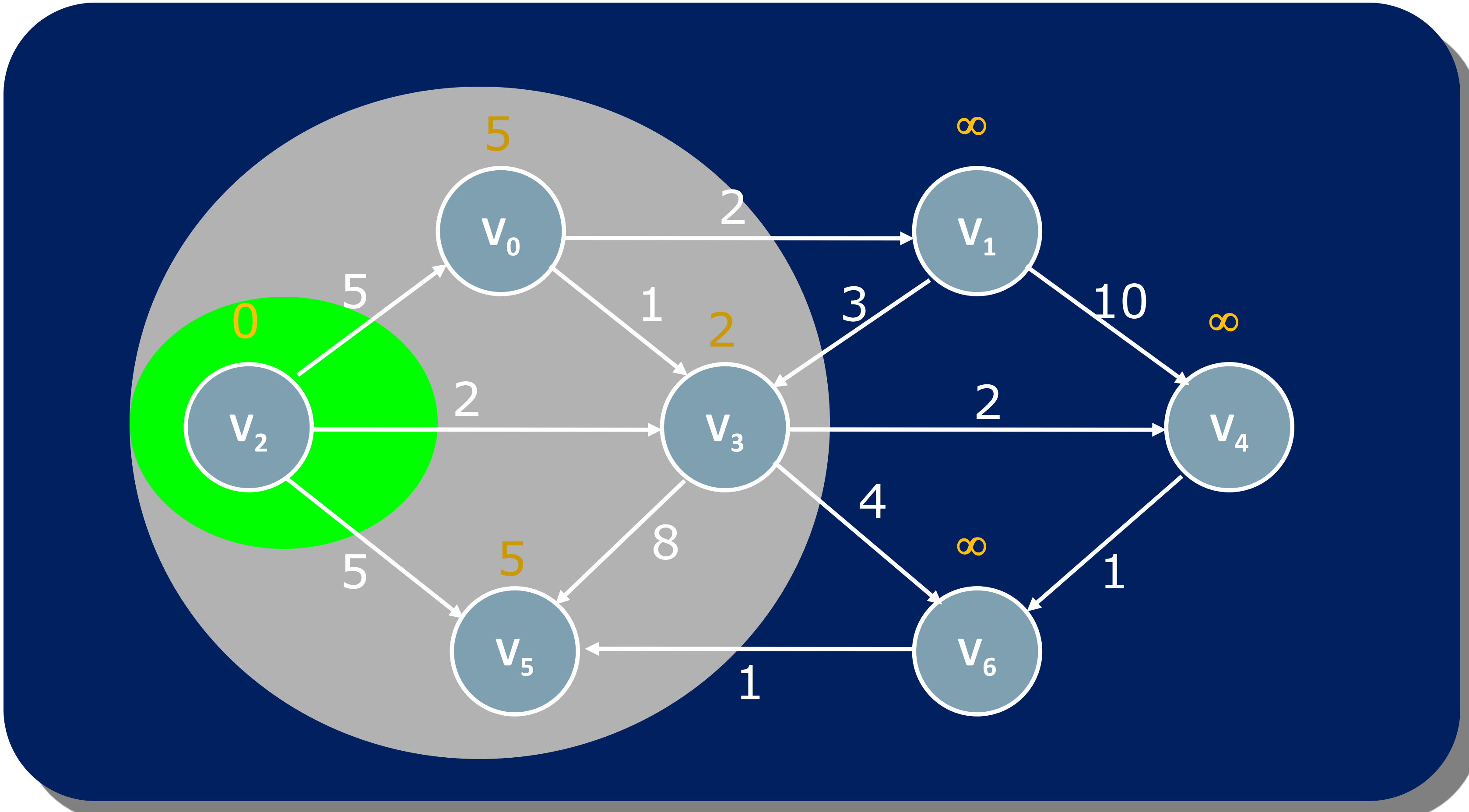
Expanding the White Cloud

- Setiap penambahan simpul, kita harus uji apakah jalur melalui *u* lebih baik.
- Misalkan **u** adalah sebuah simpul yang tidak berada di **kelompok hijau**, tapi sudah diketahui jarak terpendeknya dari s
  - tambahkan u ke dalam kelompok hijau
  - hitung jarak simpul lain dengan algoritma berikut:

```
Untuk tiap simpul z yang terhubung ke u
lakukan:
  jika z tidak di kelompok hijau maka
   if D[u] + bobot(u,z) < D[z] then
      D[z] = D[u] + bobot(u,z)
```

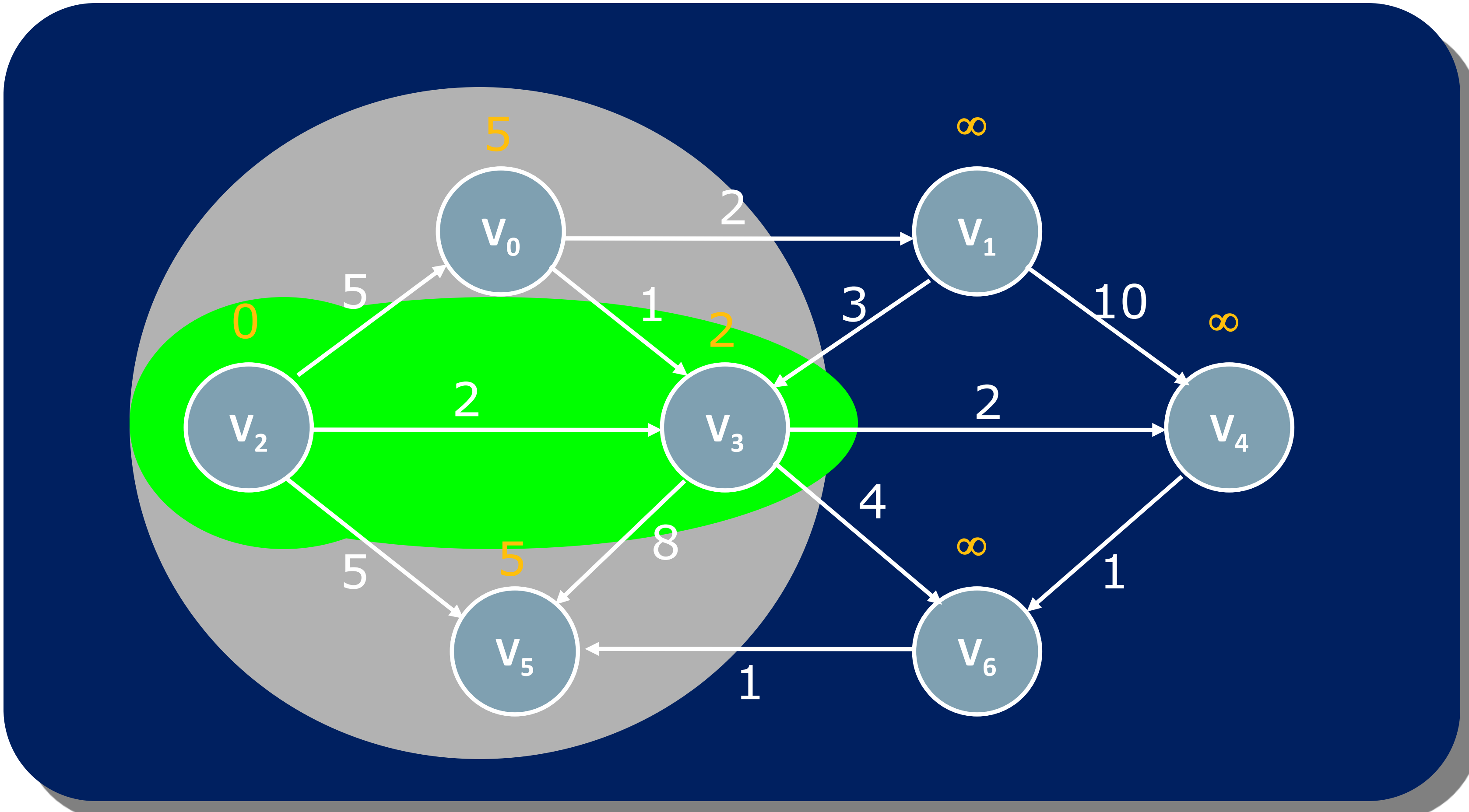
Dijkstra's Algorithm: *stages*

- setelah V_2 ditambahkan ke kelompok hijau, hitung $D[V_x]$ untuk setiap V_x yang terhubung ke V_2



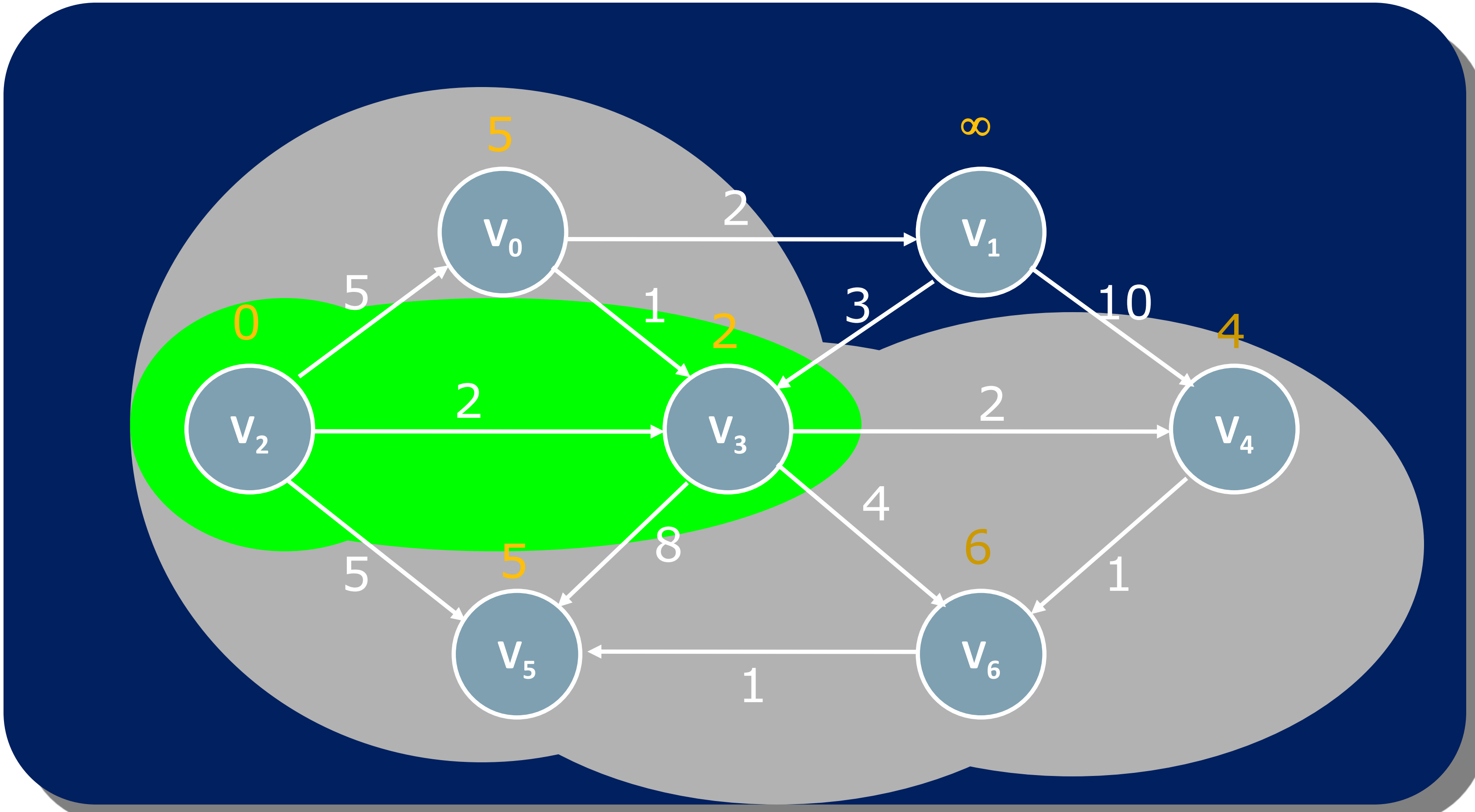
Dijkstra's Algorithm: stages

- Tambahkan ke dalam kelompok hijau simpul pada kelompok abu-abu yang memiliki nilai D[V] minimum.
- Pada contoh adalah simpul V_3



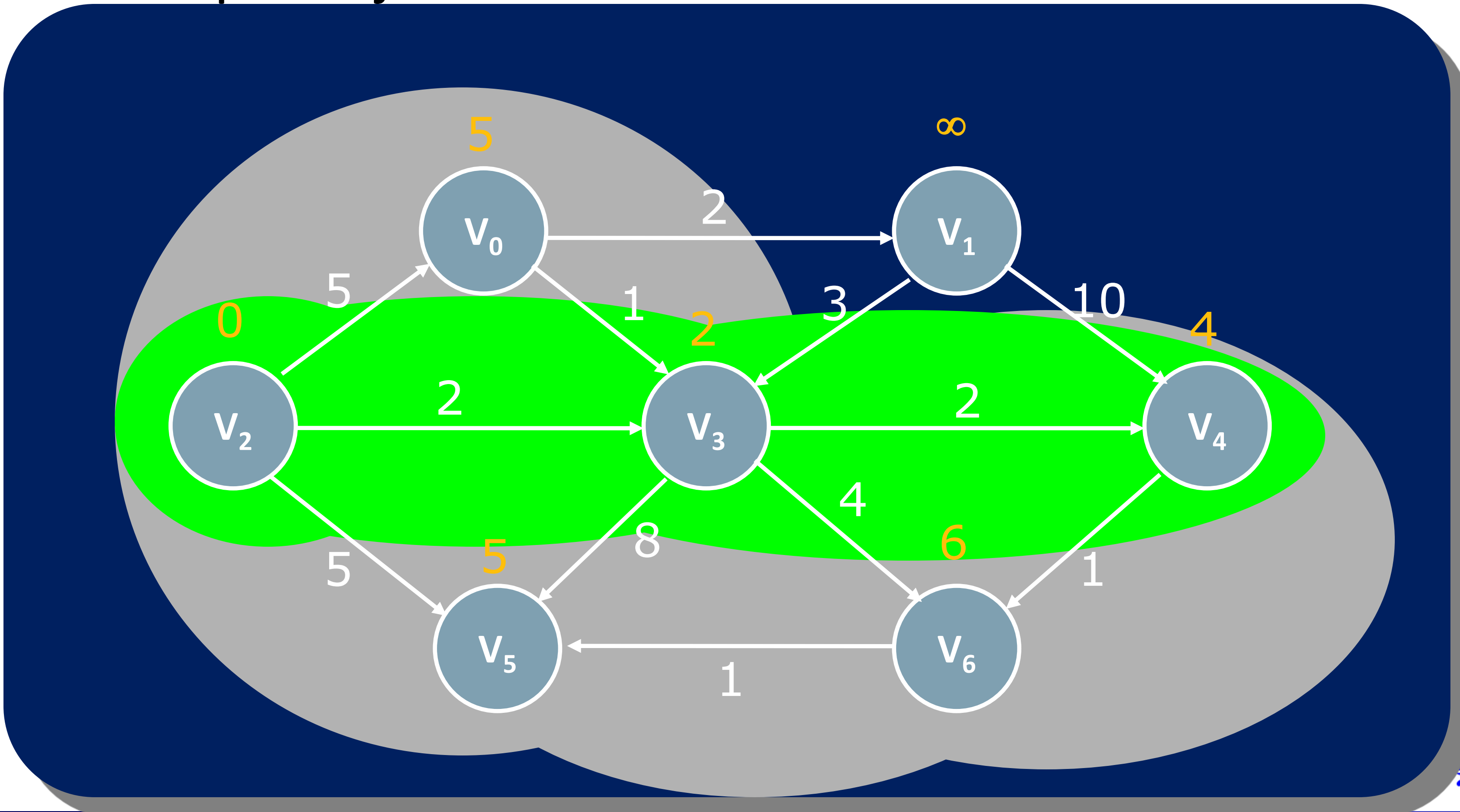
Dijkstra's Algorithm: stages

- Setelah V_3 ditambahkan ke kelompok hijau, hitung $D[V_x]$ untuk setiap V_x yang terhubung dengan V_3. Simpul-simpul tersebut menjadi kelompok abu-abu.



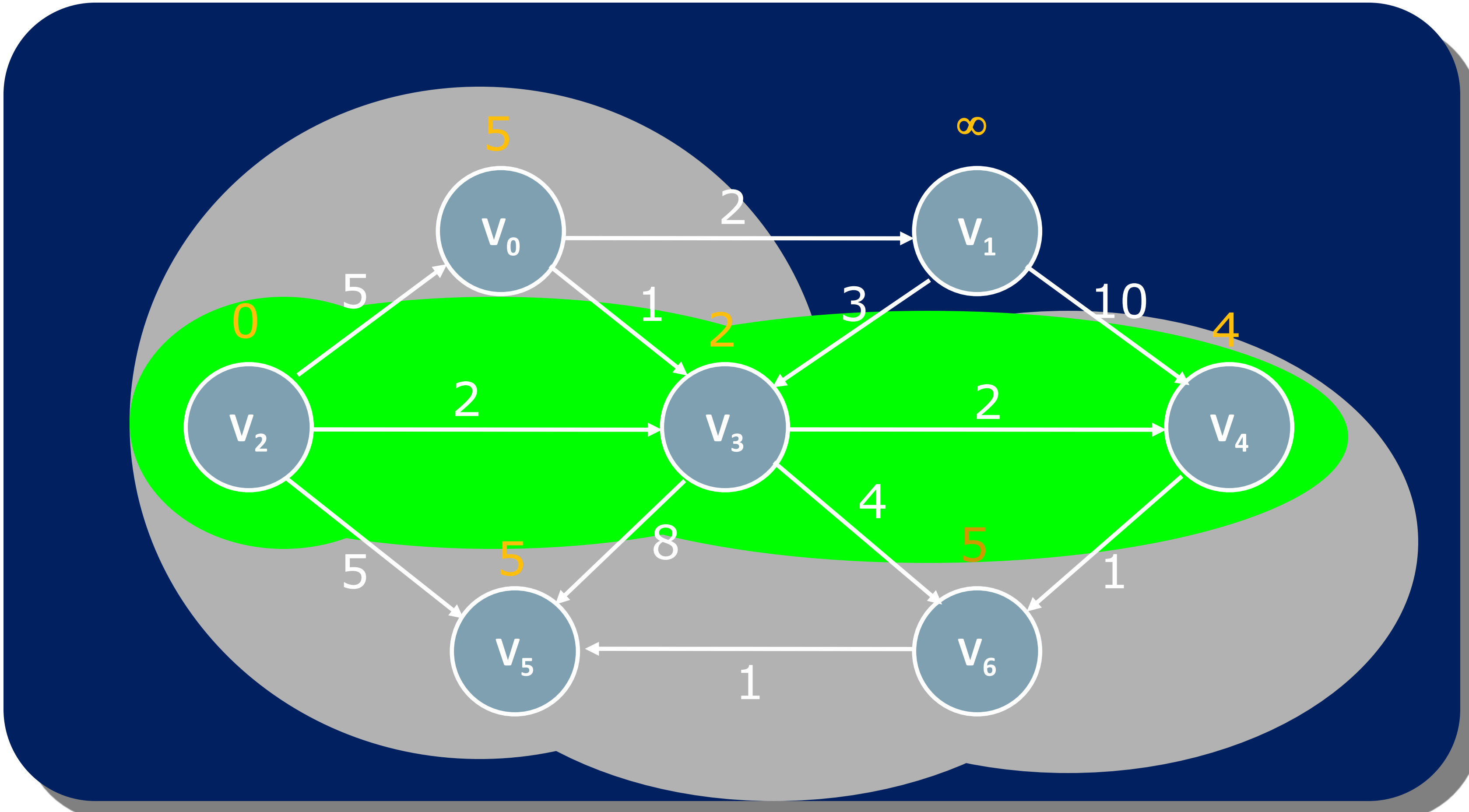
Dijkstra's Algorithm: stages

- Pilih dari kelompok abu-abu, simpul yang memiliki nilai D[V] paling minimum dan tambahkan pada kelompok hijau.



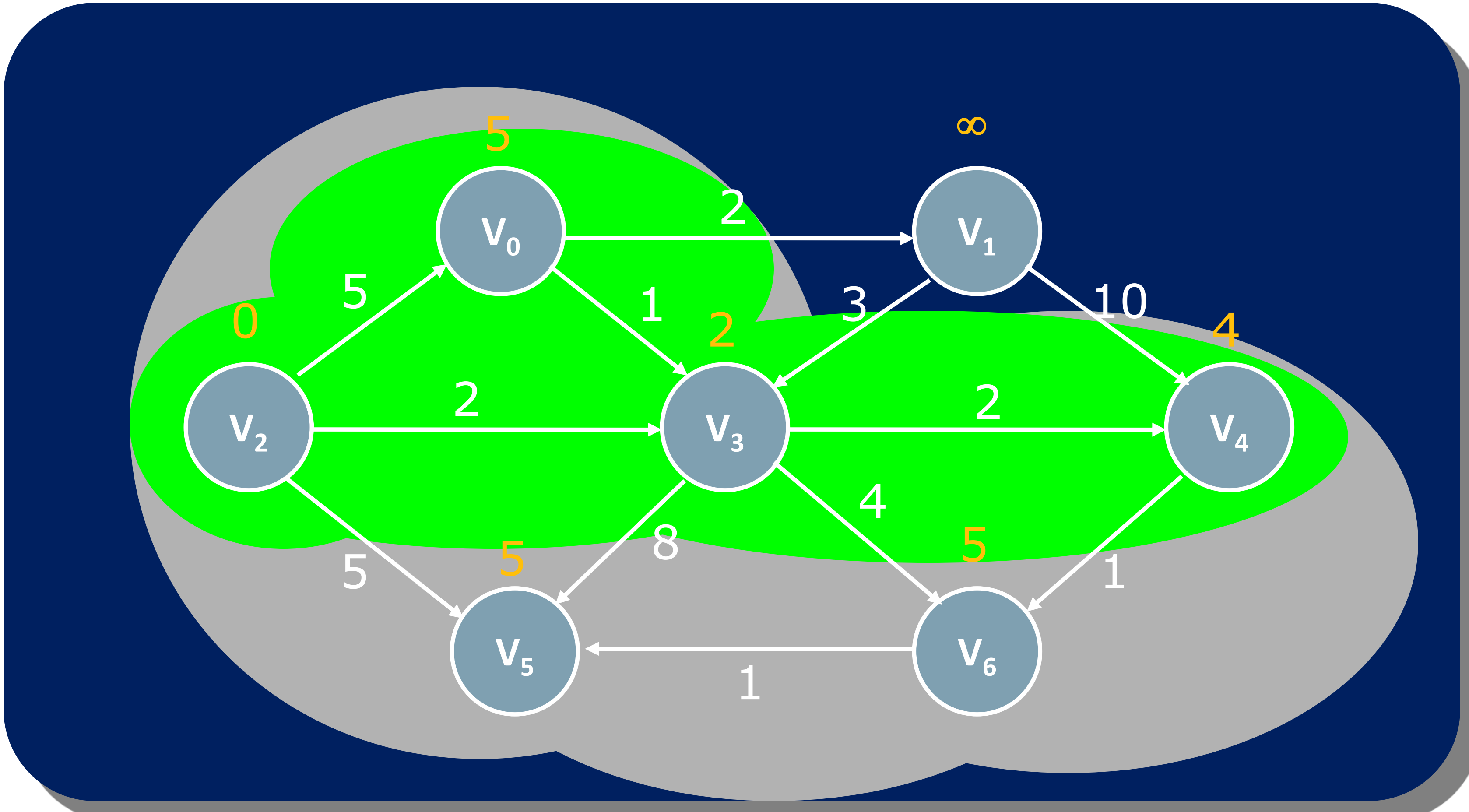
Dijkstra's Algorithm: stages

- Setelah V_4 ditambahkan ke kelompok hijau, hitung $D[V_x]$ untuk setiap V_x yang terhubung dengan $V_{4.}$ Simpul-simpul tersebut menjadi kelompok abu-abu.



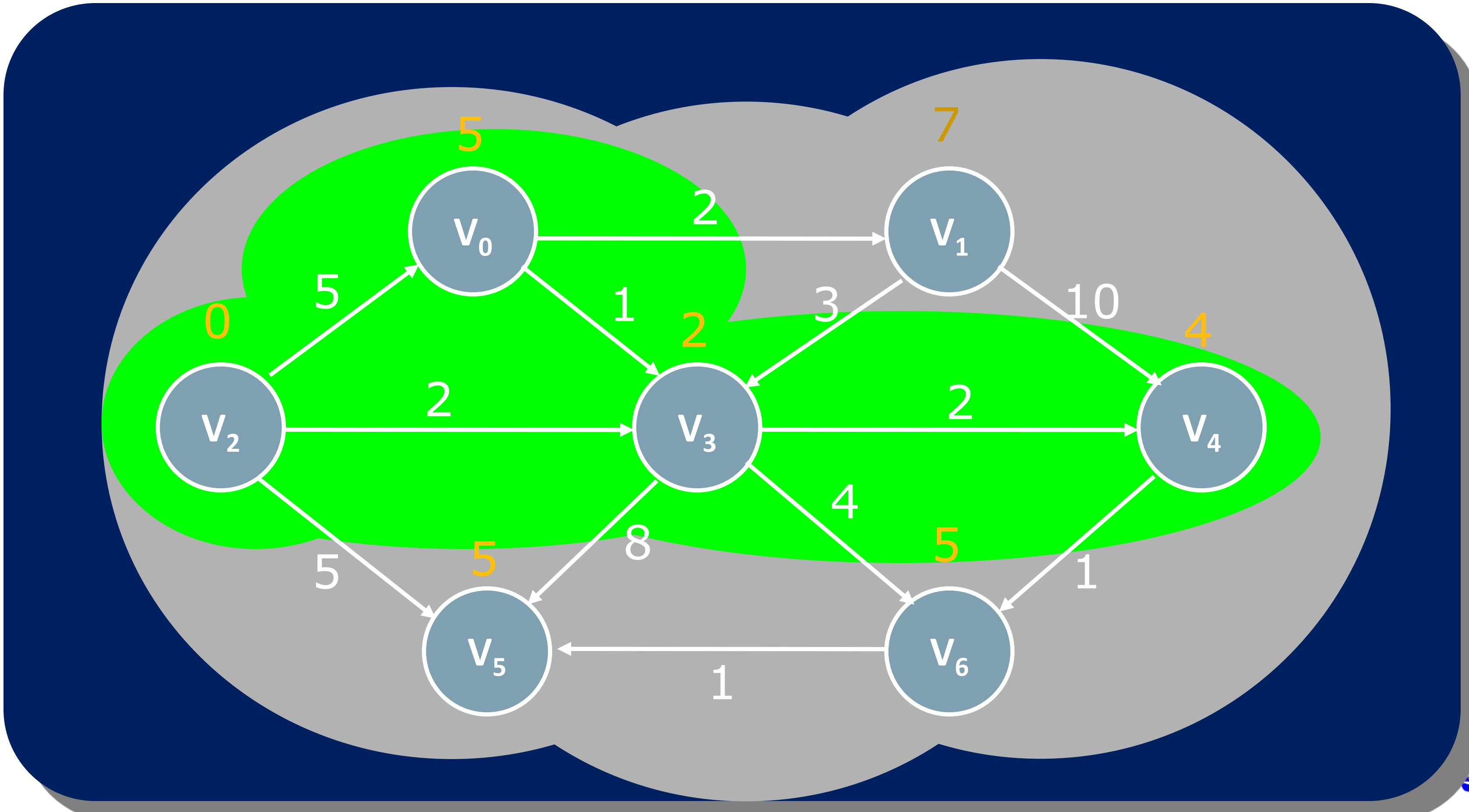
Dijkstra's Algorithm: stages

- Pilih dari kelompok abu-abu, simpul yang memiliki nilai D[V] paling minimum dan tambahkan pada kelompok hijau.

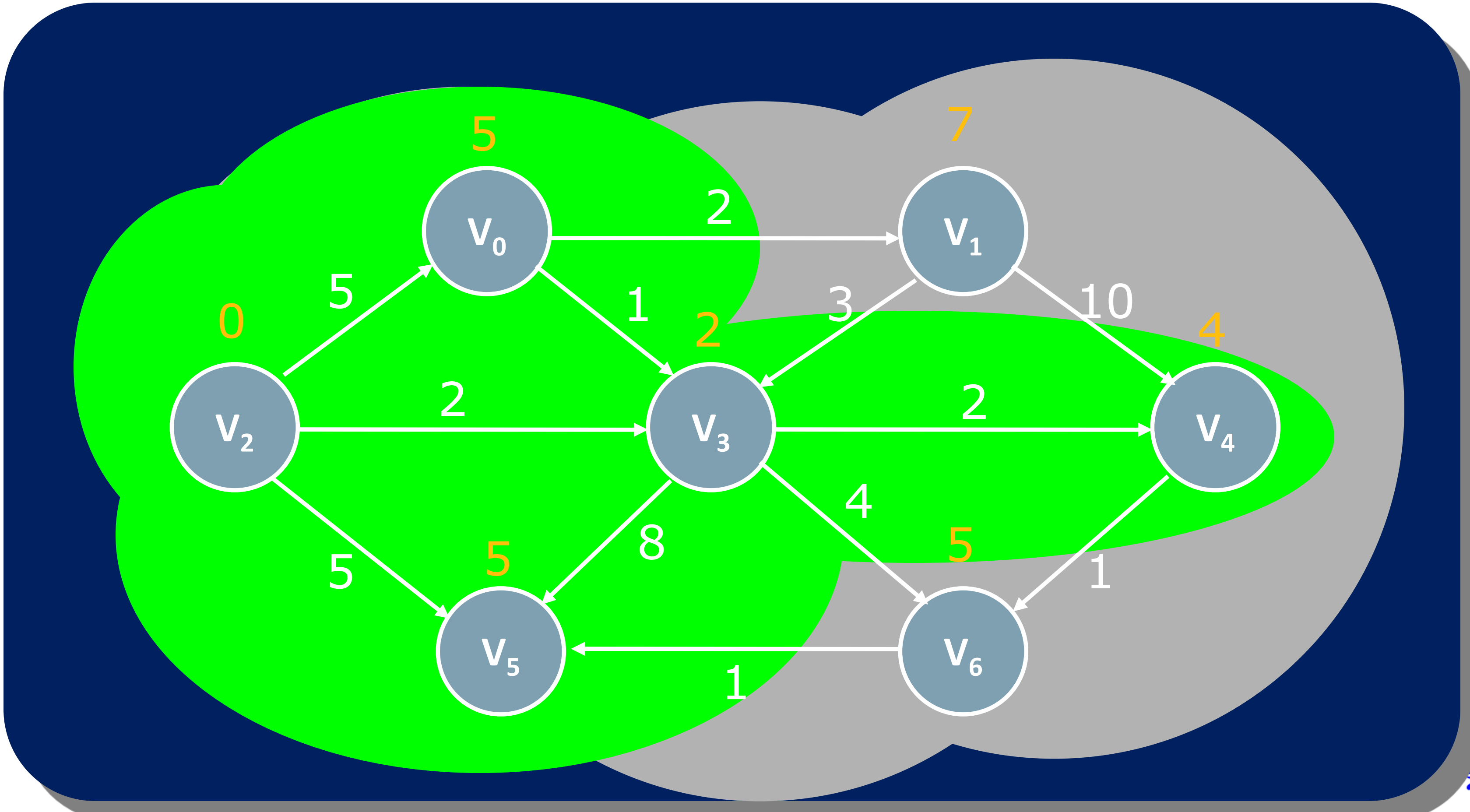


Dijkstra's Algorithm: stages

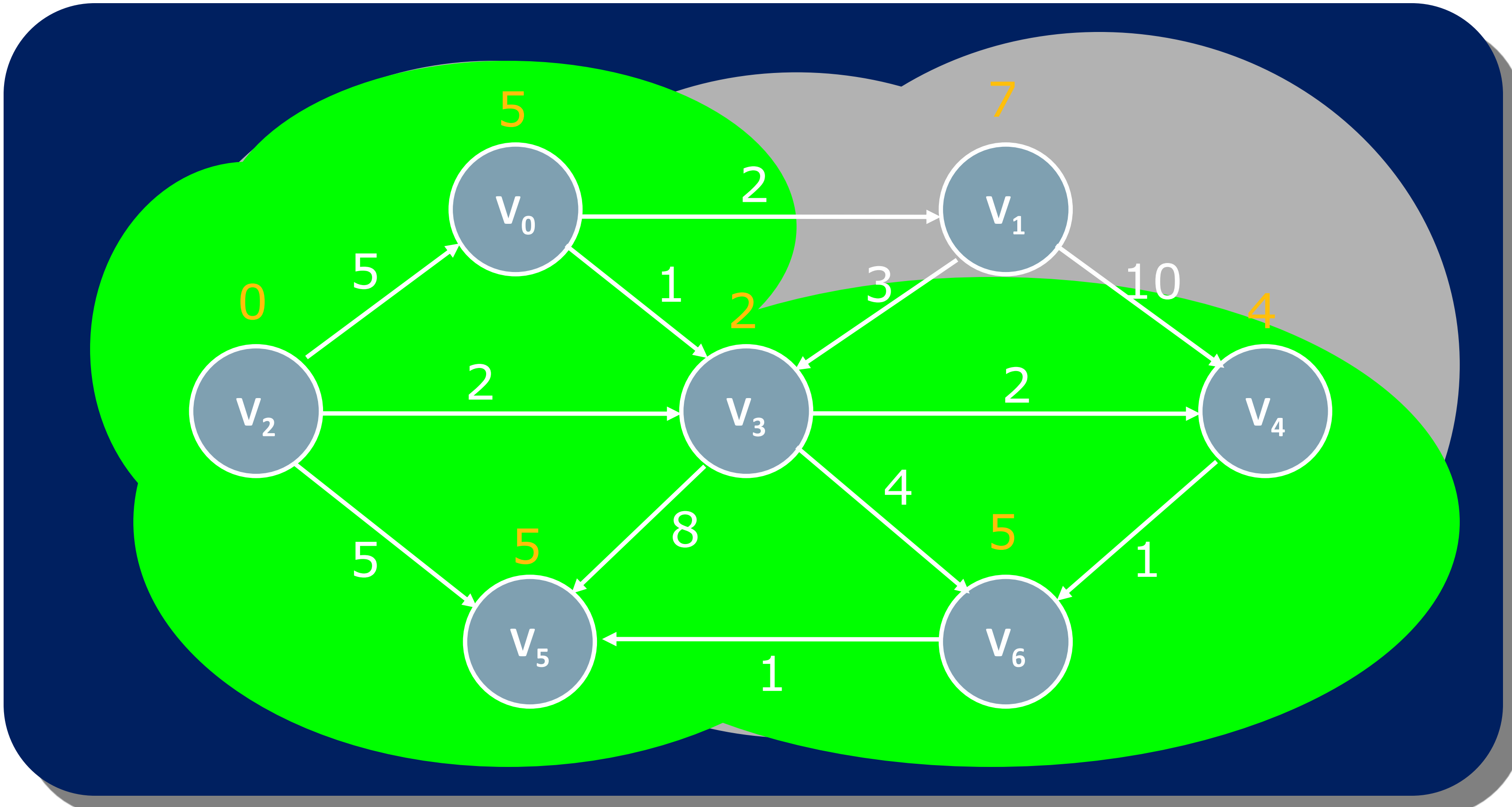
- Setelah V_4 ditambahkan ke kelompok hijau, hitung $D[V_x]$ untuk setiap V_x yang terhubung dengan $V_{4.}$ Simpul-simpul tersebut menjadi kelompok abu-abu.



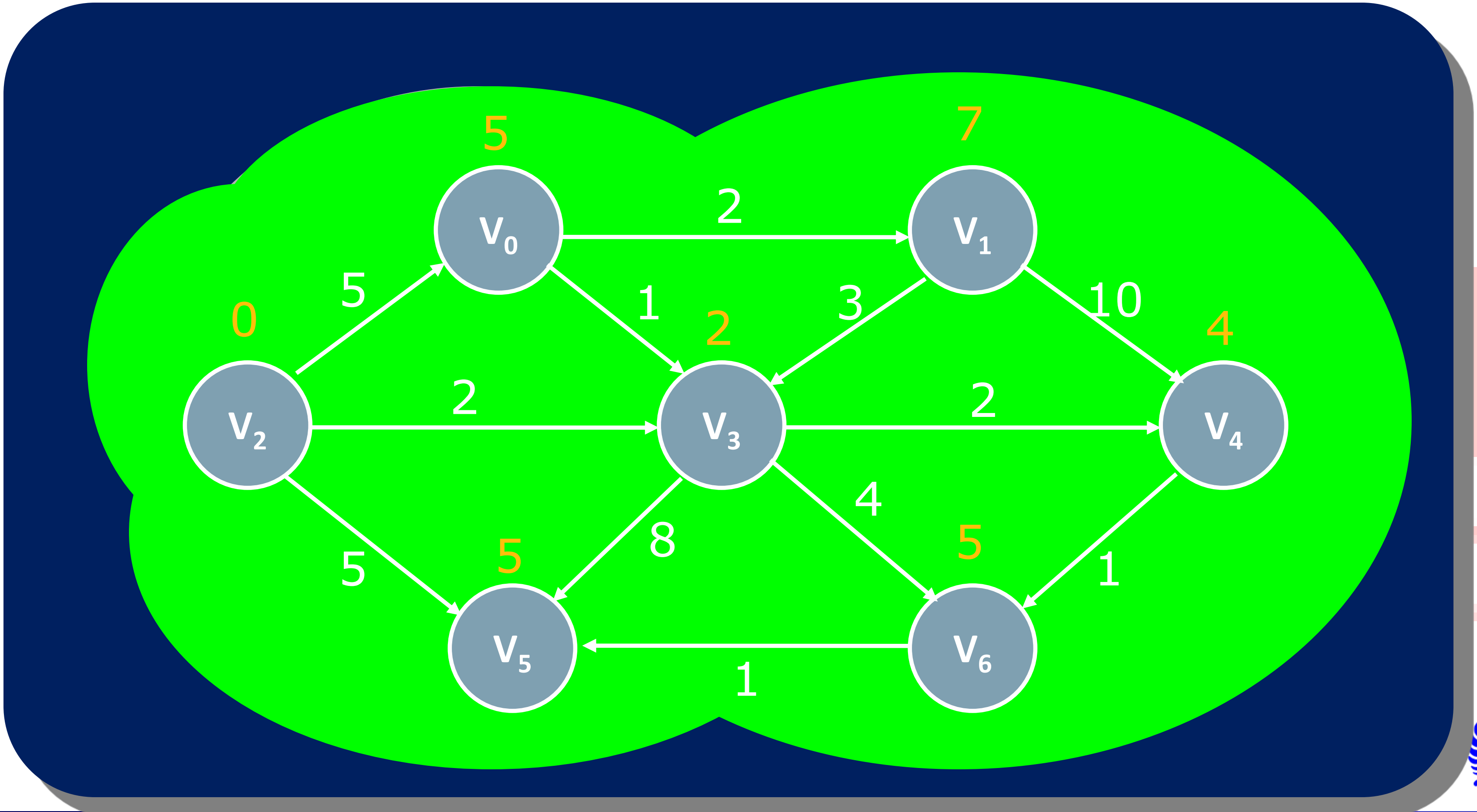
- Pilih dari kelompok abu-abu, simpul yang memiliki nilai D[V] paling minimum dan tambahkan pada kelompok hijau.
- Setelah V_5 ditambahkan ke kelompok hijau, hitung $D[V_x]$ untuk setiap V_x yang terhubung dengan V_5. Simpul-simpul tersebut menjadi kelompok abu-abu.



- Pilih dari kelompok abu-abu, simpul yang memiliki nilai D[V] paling minimum dan tambahkan pada kelompok hijau.
- Setelah V_6 ditambahkan ke kelompok hijau, hitung $D[V_x]$ untuk setiap V_x yang terhubung dengan V_6.

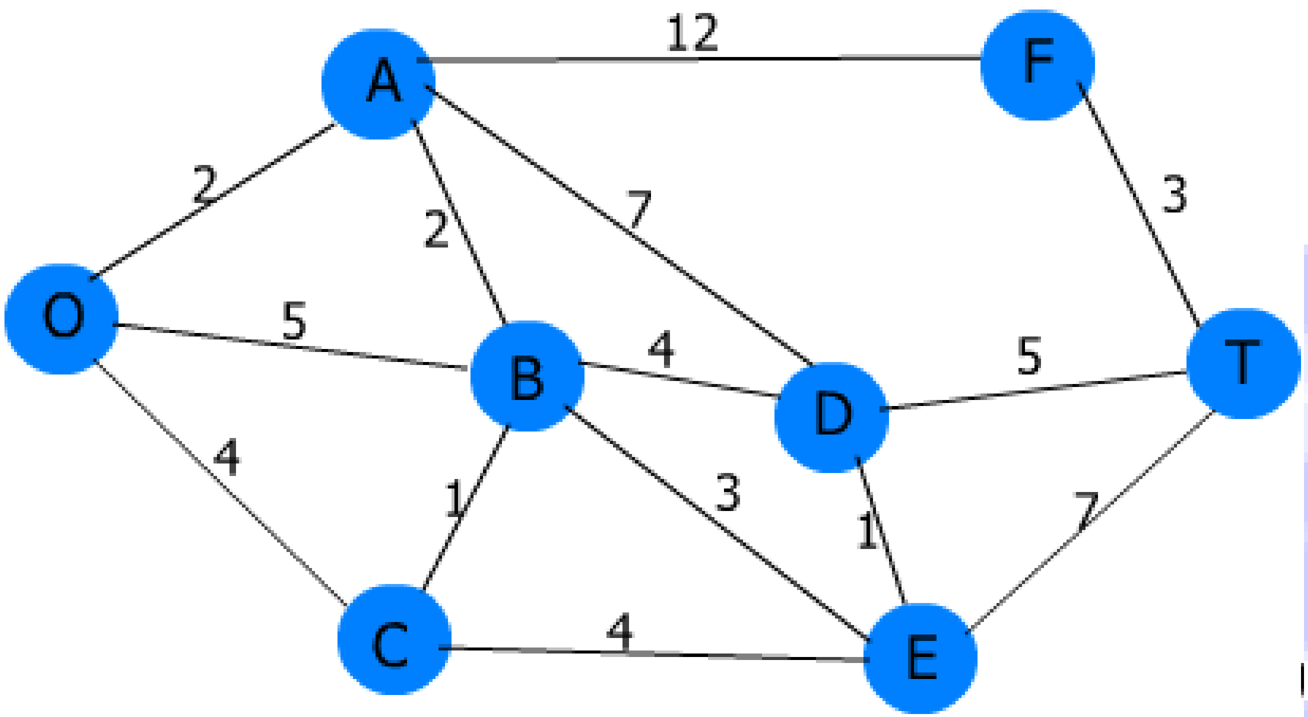


- Pilih dari kelompok abu-abu, simpul yang memiliki nilai D[V] paling minimum dan tambahkan pada kelompok hijau.
- Setelah V_1 ditambahkan ke kelompok hijau, hitung D[V_x] untuk setiap V_x yang terhubung dengan V_1.

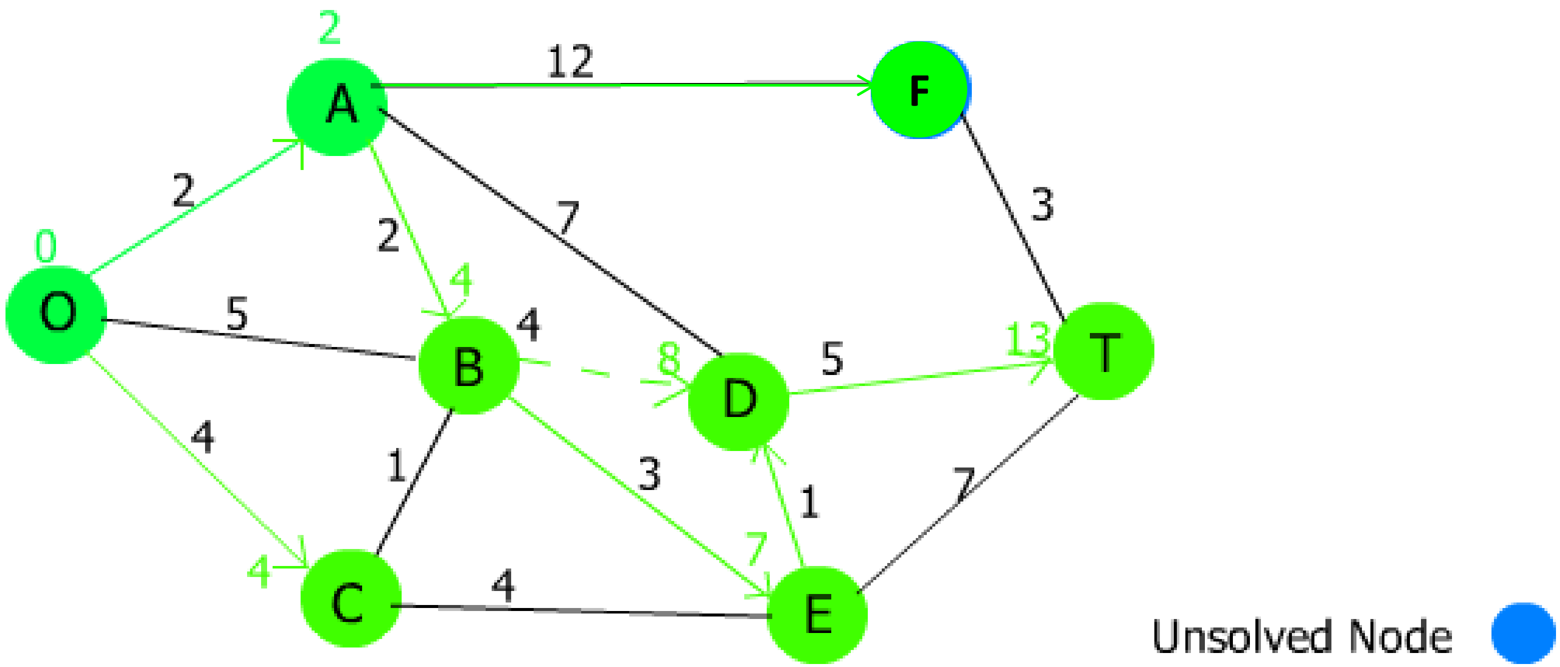


Latihan

- Tentukan jarak minimum dari verteks O ke setiap verteks pada graph!



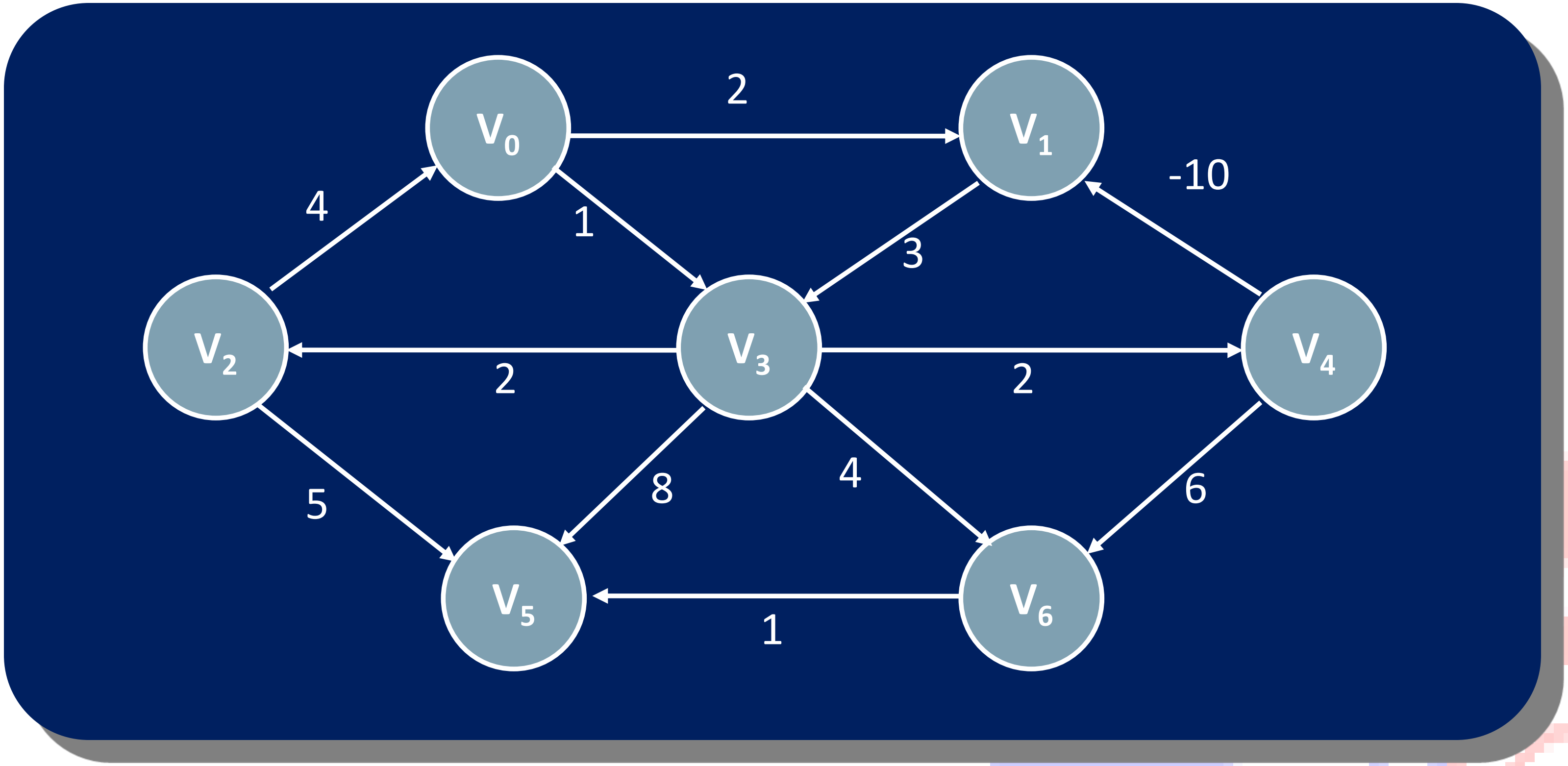
Jawaban



2
12
A
F
2
3
0
2
7
4
O
5
4
B
8
D
5
13
T
4
1
3
1
7
7
4
C
4
E
Unsolved Node
Solved Node

Variasi shortest path problem

- Negative-weighted Shortest-path



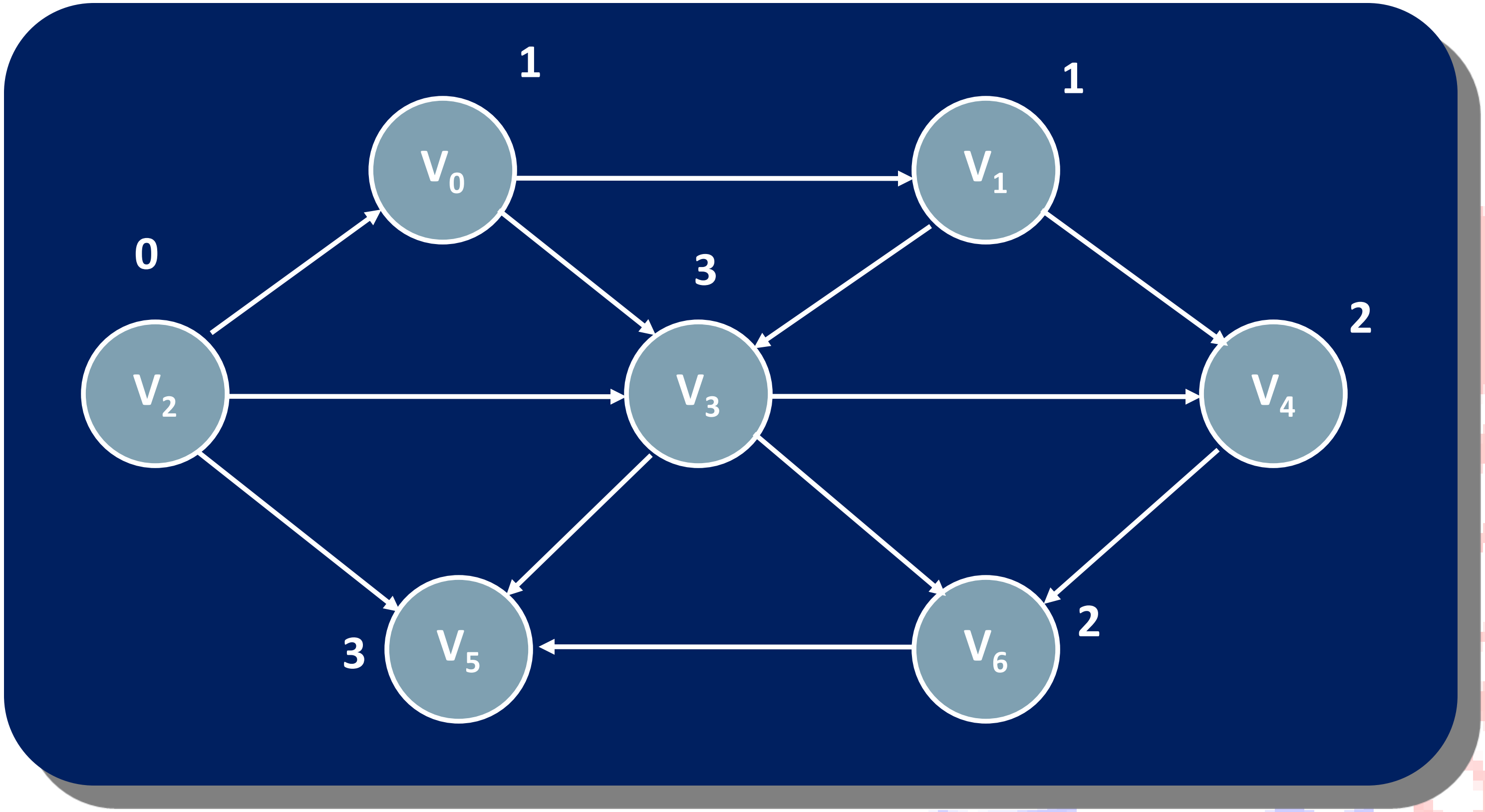
- All-Pair Shortest Path: Floyd

Topological Sorting

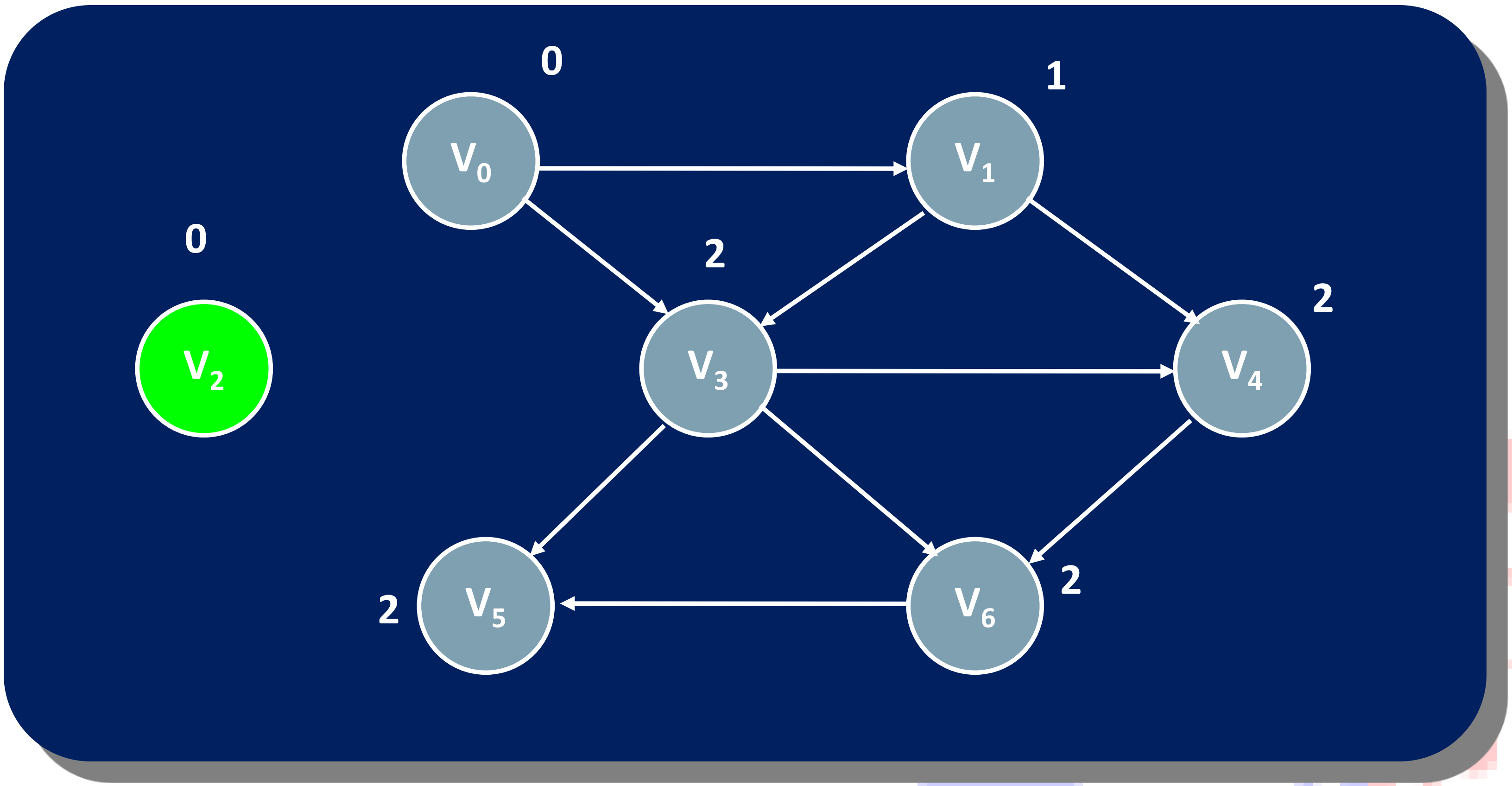
- Sebuah *topological sort* mengurutkan simpul-simpul dari sebuah *directed acyclic graph* (DAG) sedemikian hingga jika ada lintasan di dalam graf dari *u* ke *v*, maka *u* akan muncul sebelum *v* di dalam urutan tersebut.
- Setiap DAG memiliki minimal satu topological sort.
- Sebuah graph yang memiliki *cycle*, tidak memiliki *topological sort*, karena untuk simpul u dan v dalam cycle, maka akan ada lintasan dari u ke v, dan dari v ke u, sehingga setiap urutan simpul yang dibentuk pasti akan kontradiksi dengan salah satu dari lintasan tersebut.
- Contoh permasalahan:
  - Urutan pengerjaan proyek bangunan
  - Urutan pengambilan mata kuliah (dengan informasi prasyarat)

Topological Sorting: Algoritma

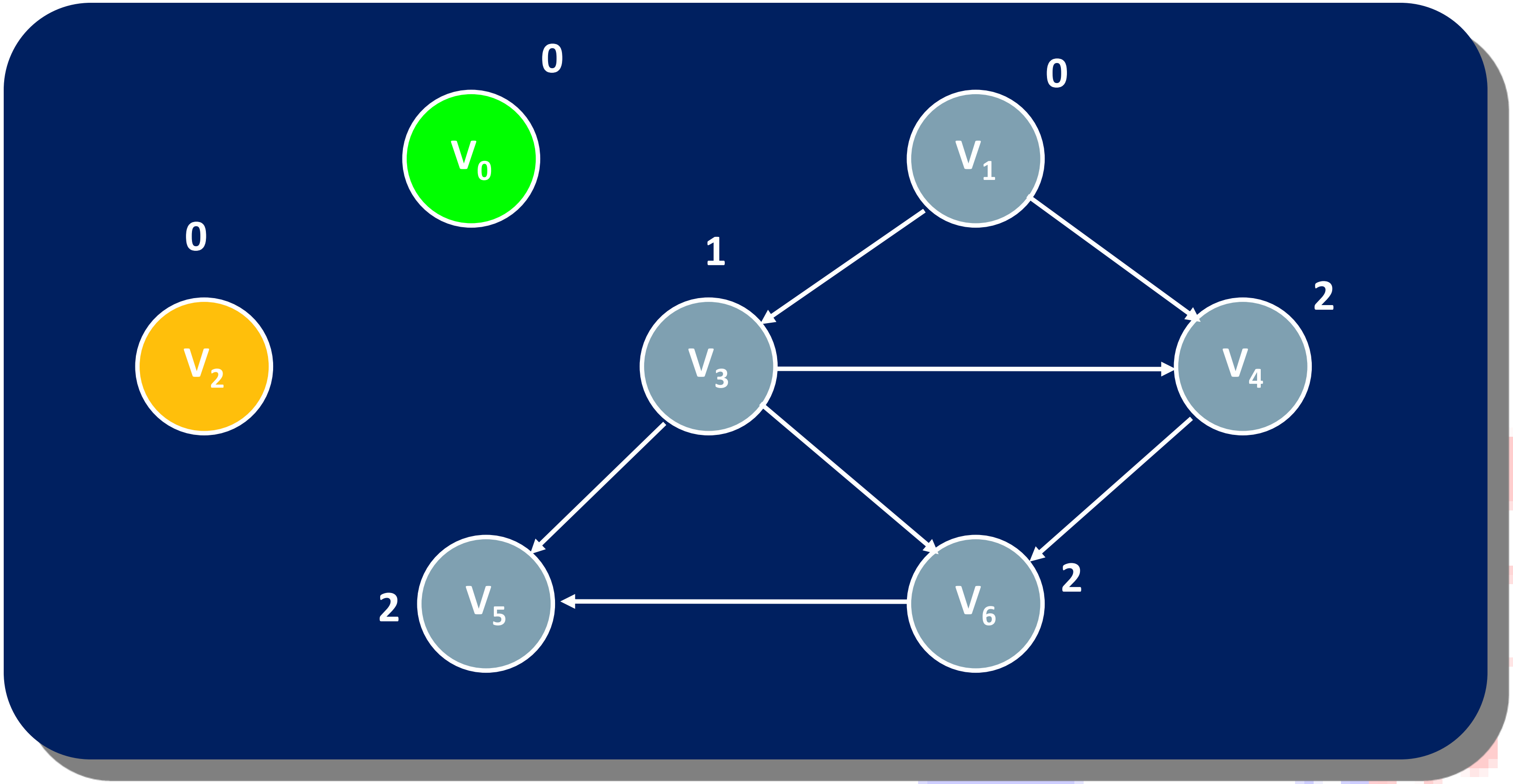
- Mulai dari sebuah simpul dengan in-degree = 0 (Tidak ada panah/sisi yang menuju simpul tersebut.)
- buang semua sisi yang berasal dari simpul tersebut.
- Sesuaikan nilai in-degree simpul lain-nya.



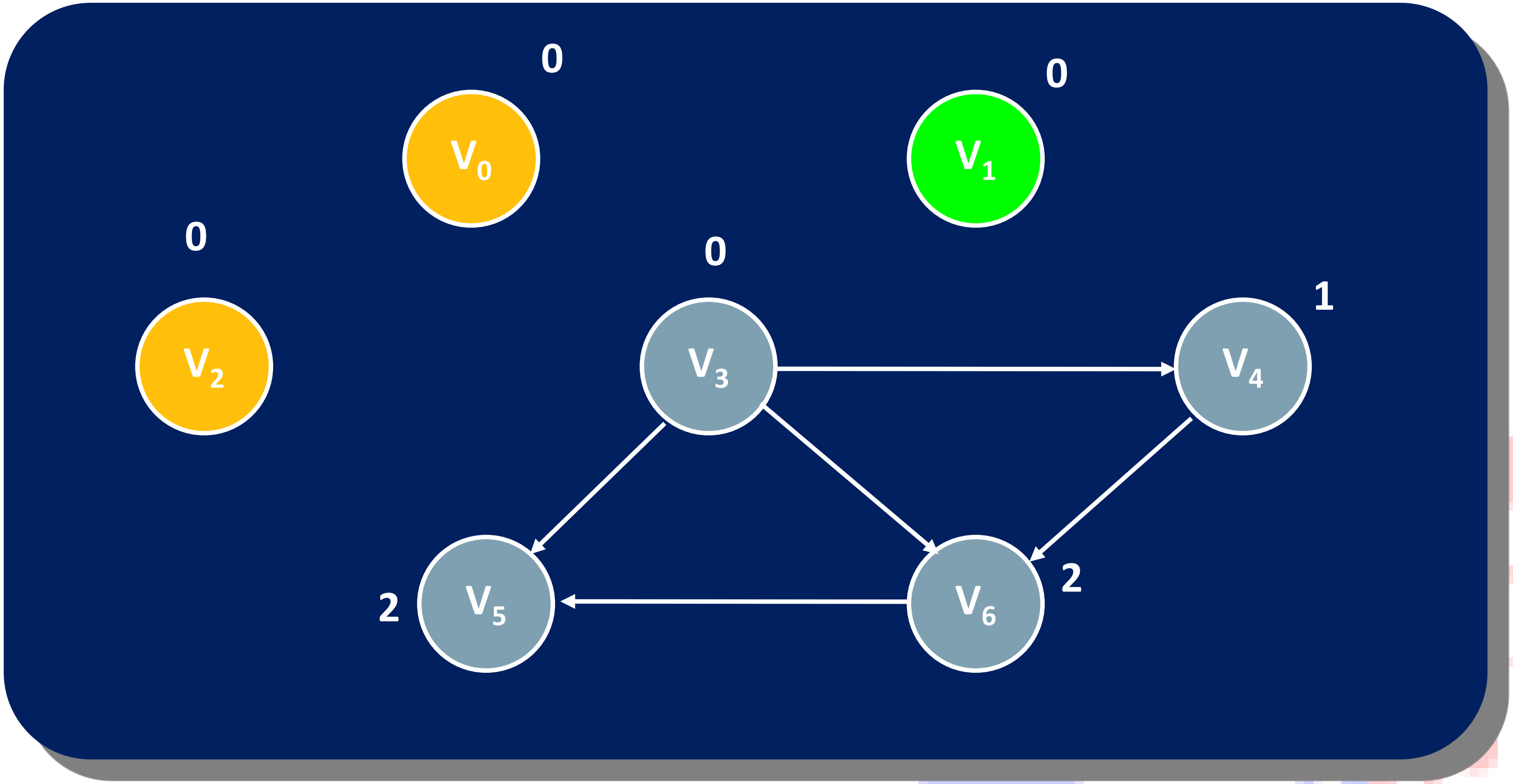
Topological Sorting



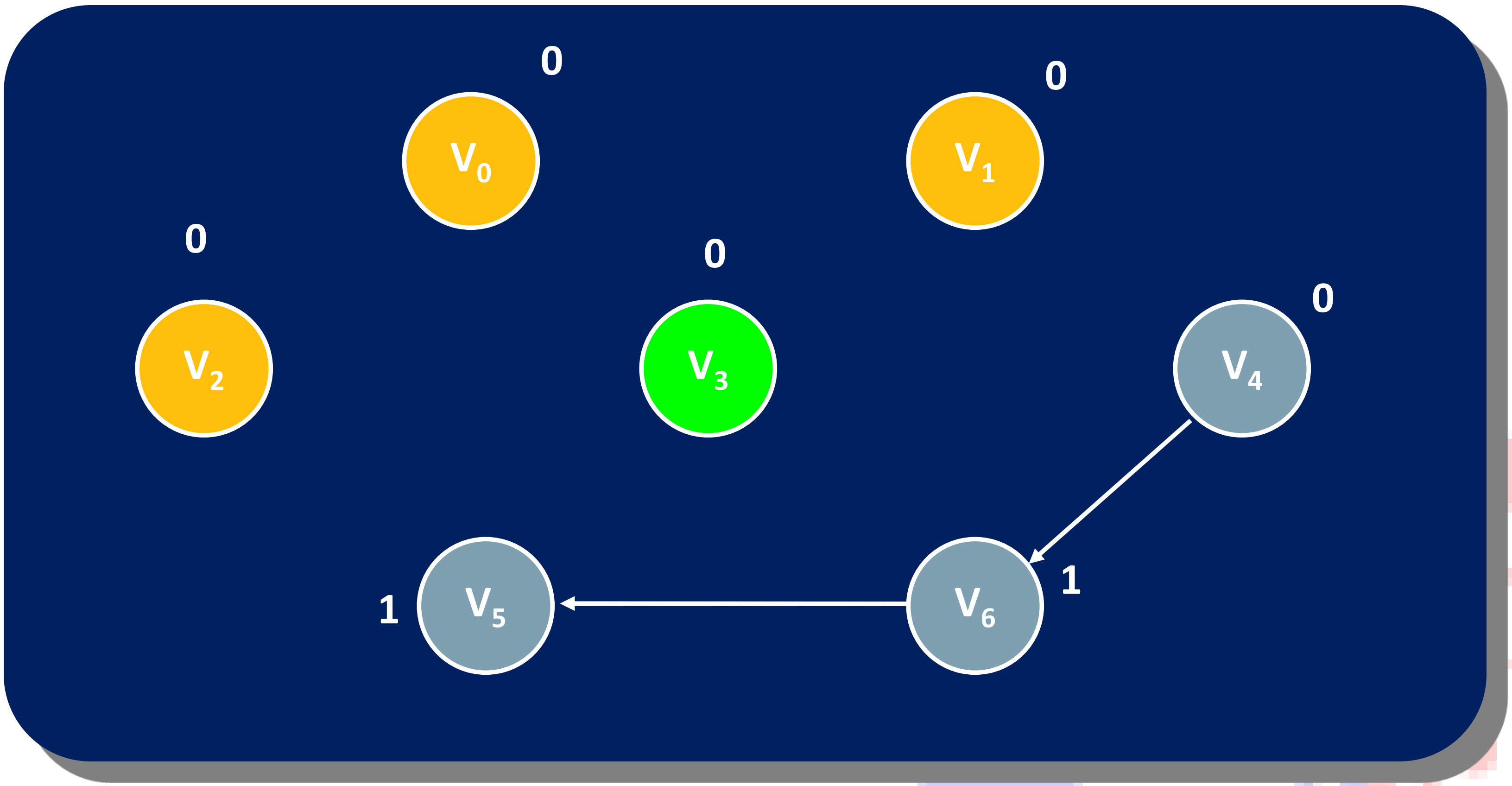
Topological Sorting



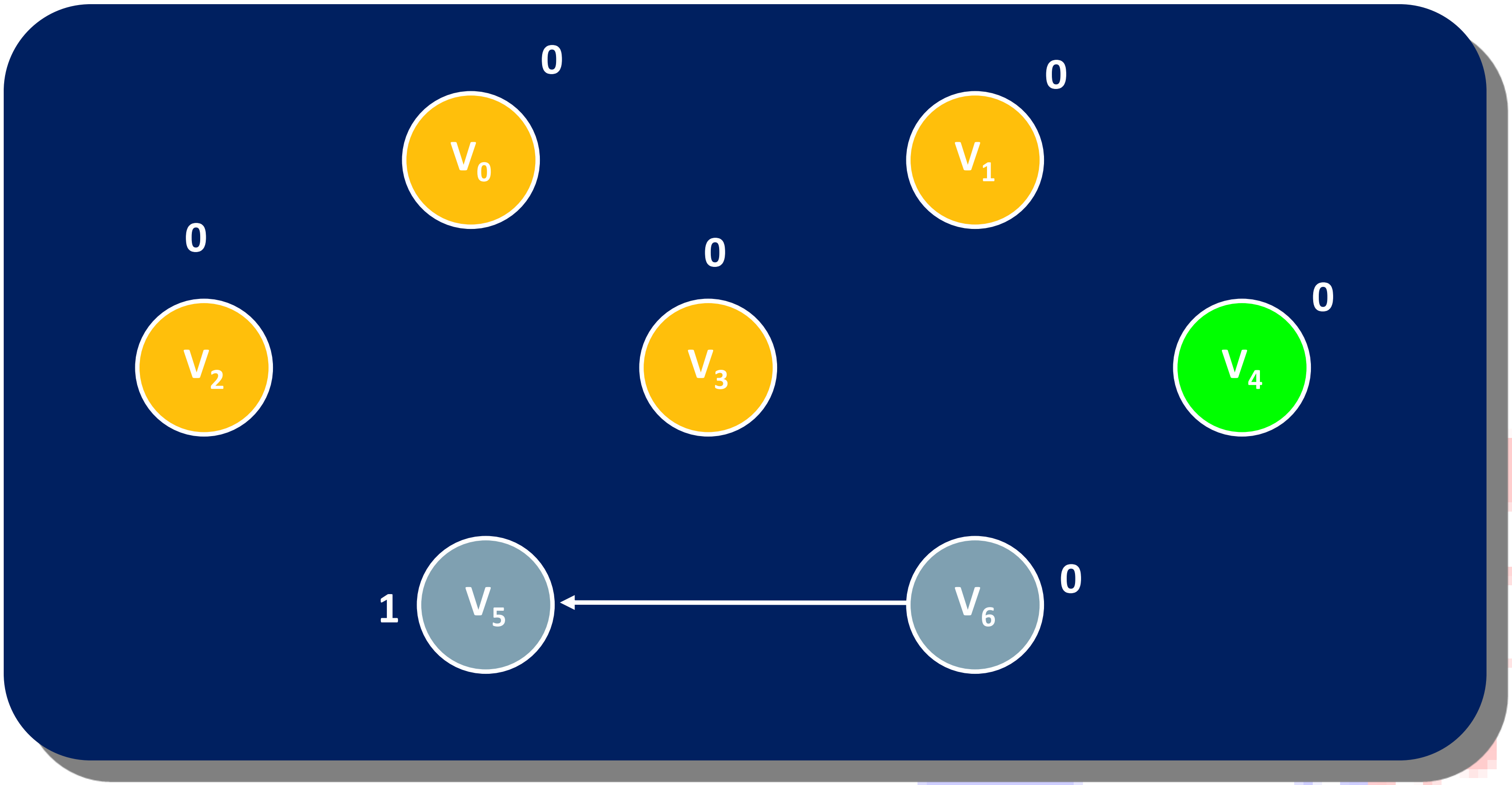
Topological Sorting



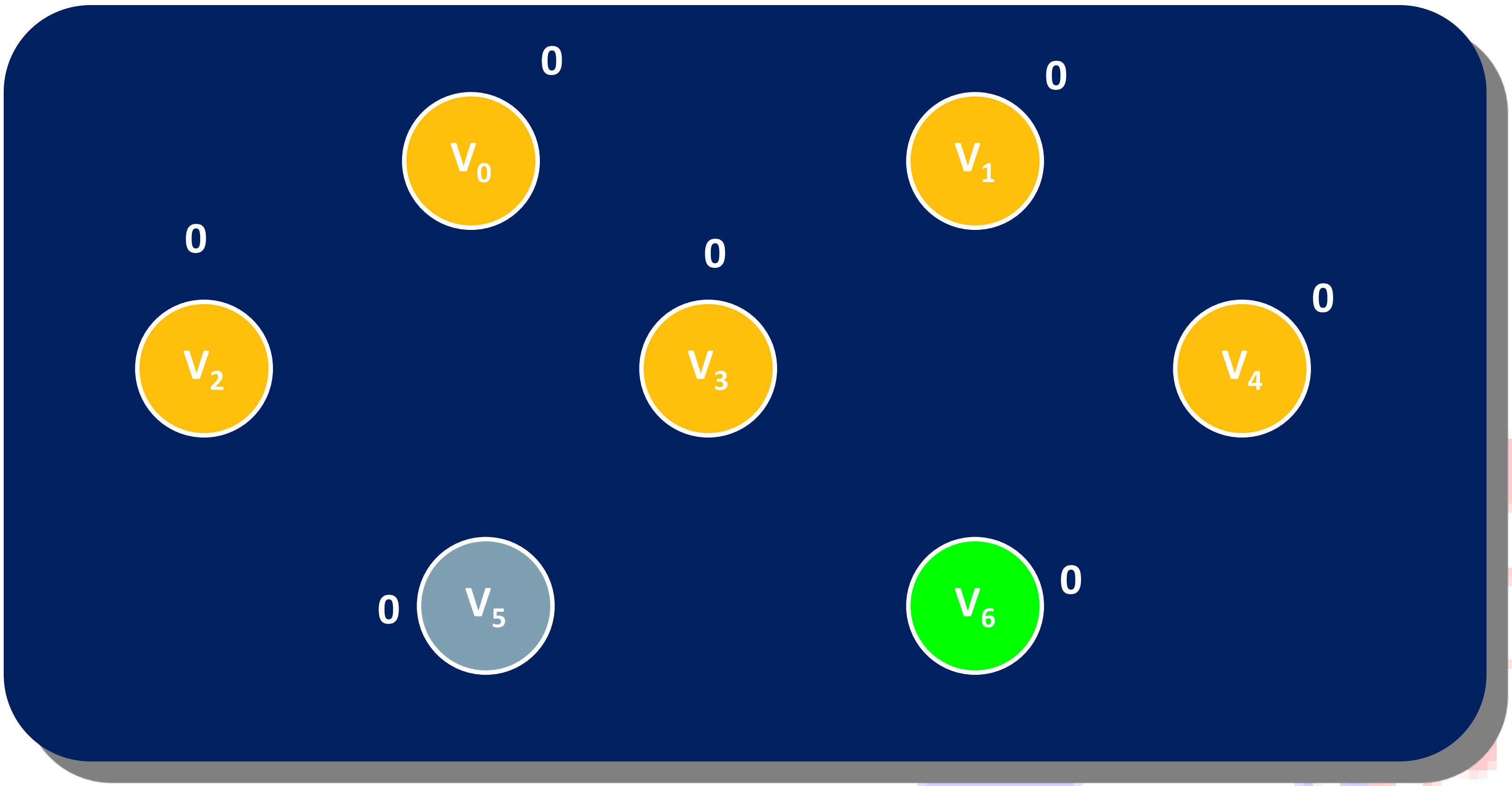
Topological Sorting



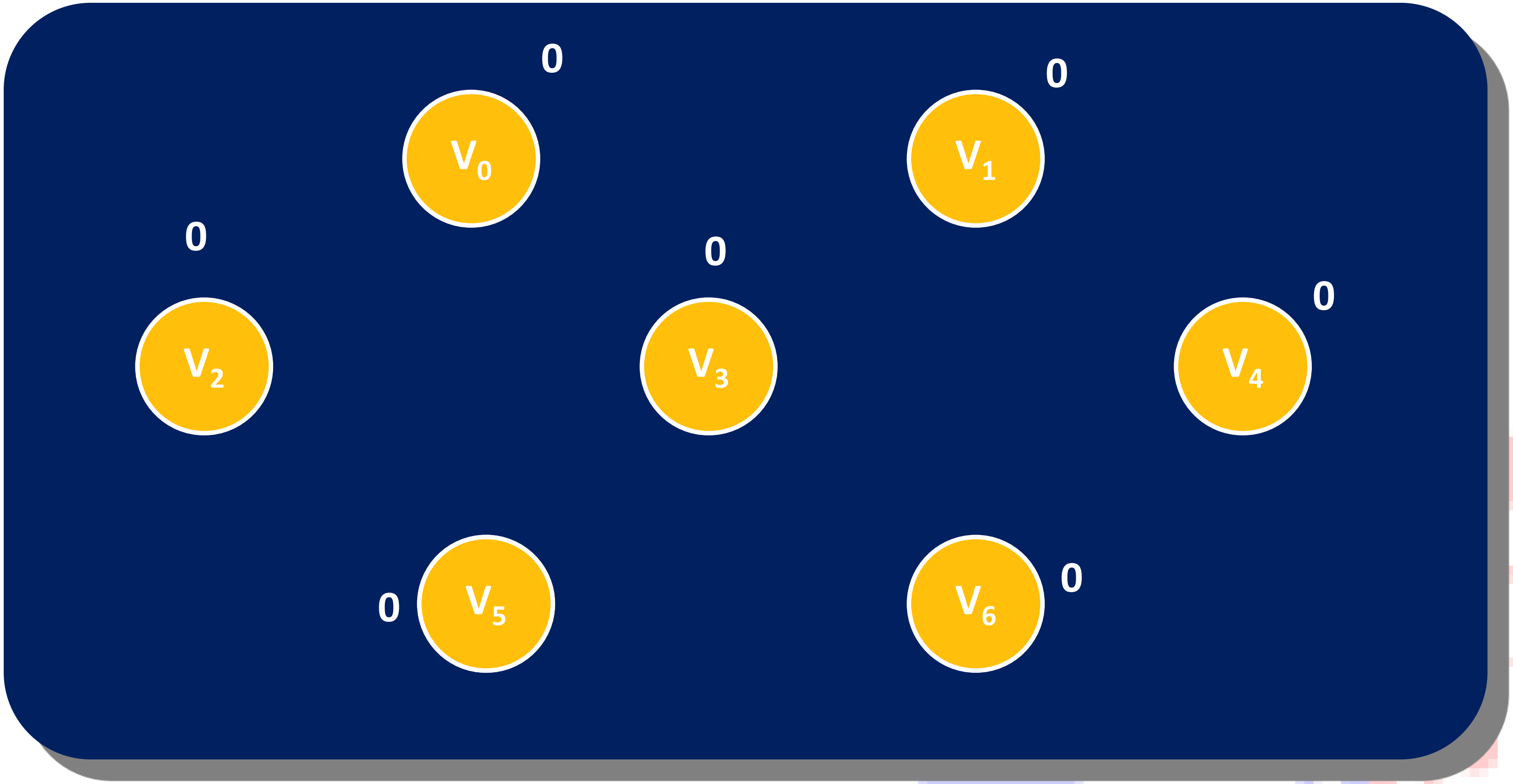
Topological Sorting



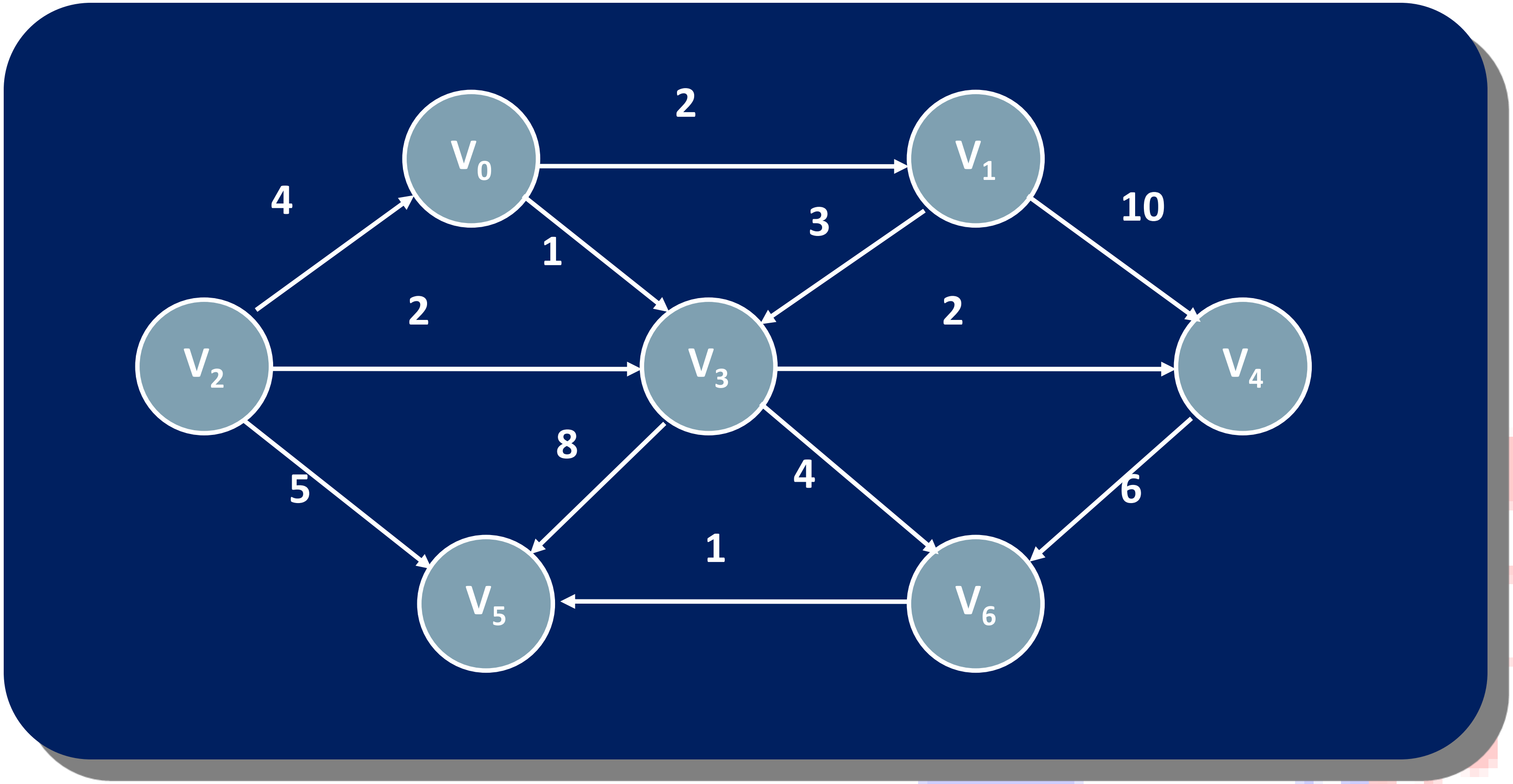
Topological Sorting



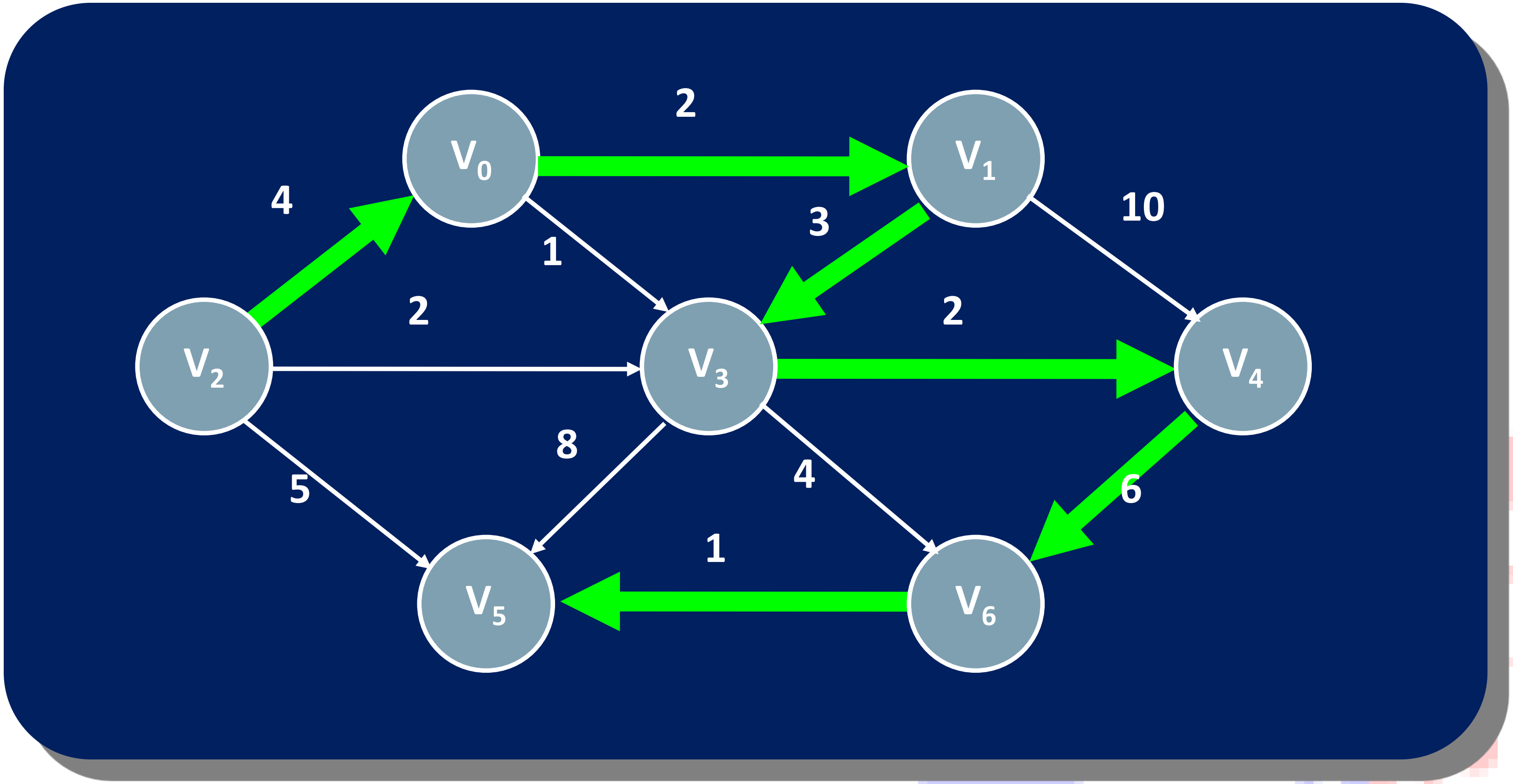
Topological Sorting



Topological Sorting

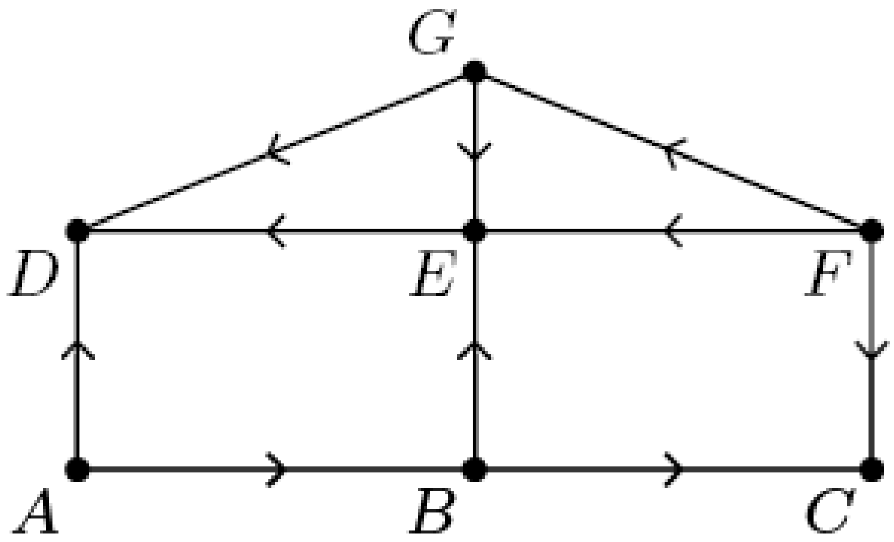


Topological Sorting



Latihan

- Lakukan topological sorting pada graph berikut ini, apabila ada pilihan node yang memiliki *in-degree* 0, pilih berdasarkan urutan alfabet.



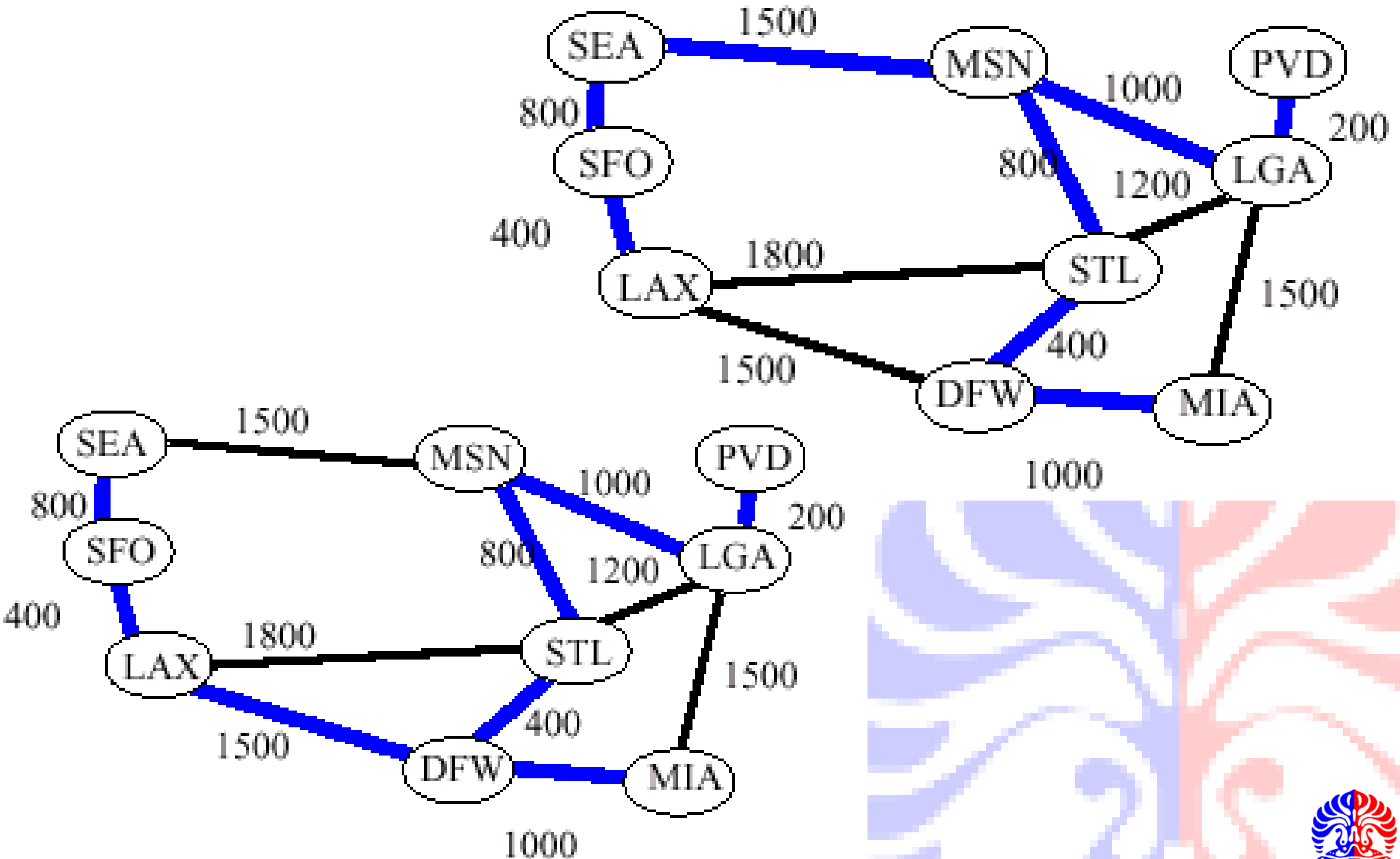
Jawaban

- Urutan pengerjaan:
  – A – B – F – C – G – E – D

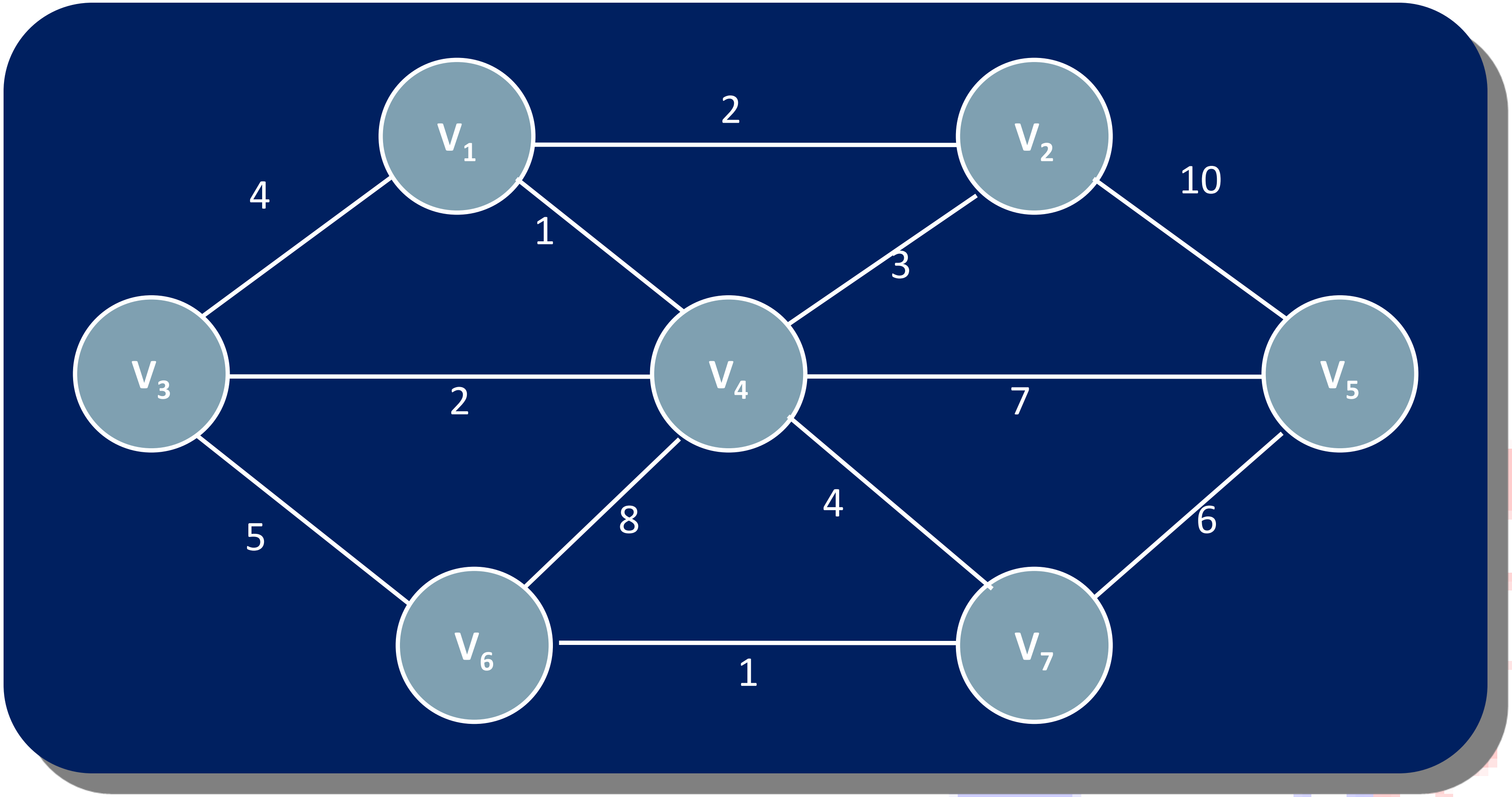
Minimum Spanning Tree (MST)

- Adalah sebuah struktur *tree* yang terbentuk dari graph, dimana sisi-sisi yang menghubungkan setiap simpul memiliki nilai total paling kecil.
- “Spanning tree” T = (V,F) dari graph G adalah graph dengan verteks yang sama dengan G dan memiliki |V|-1 buah edges, yang membentuk sebuah tree.
- Nilai total dari sebuah spanning tree, adalah jumlah total bobot tiap sisi dalam *tree* tersebut.
- Penerapan:
  - Mencari jumlah biaya kabel paling minimum untuk menghubungkan sebuah kelompok perumahan atau perkotaan.
  - Mencari biaya minimum terendah untuk menghubungkan jaringan komputer.
  - Mencari biaya produksi total terendah untuk pengerjaan proyek.

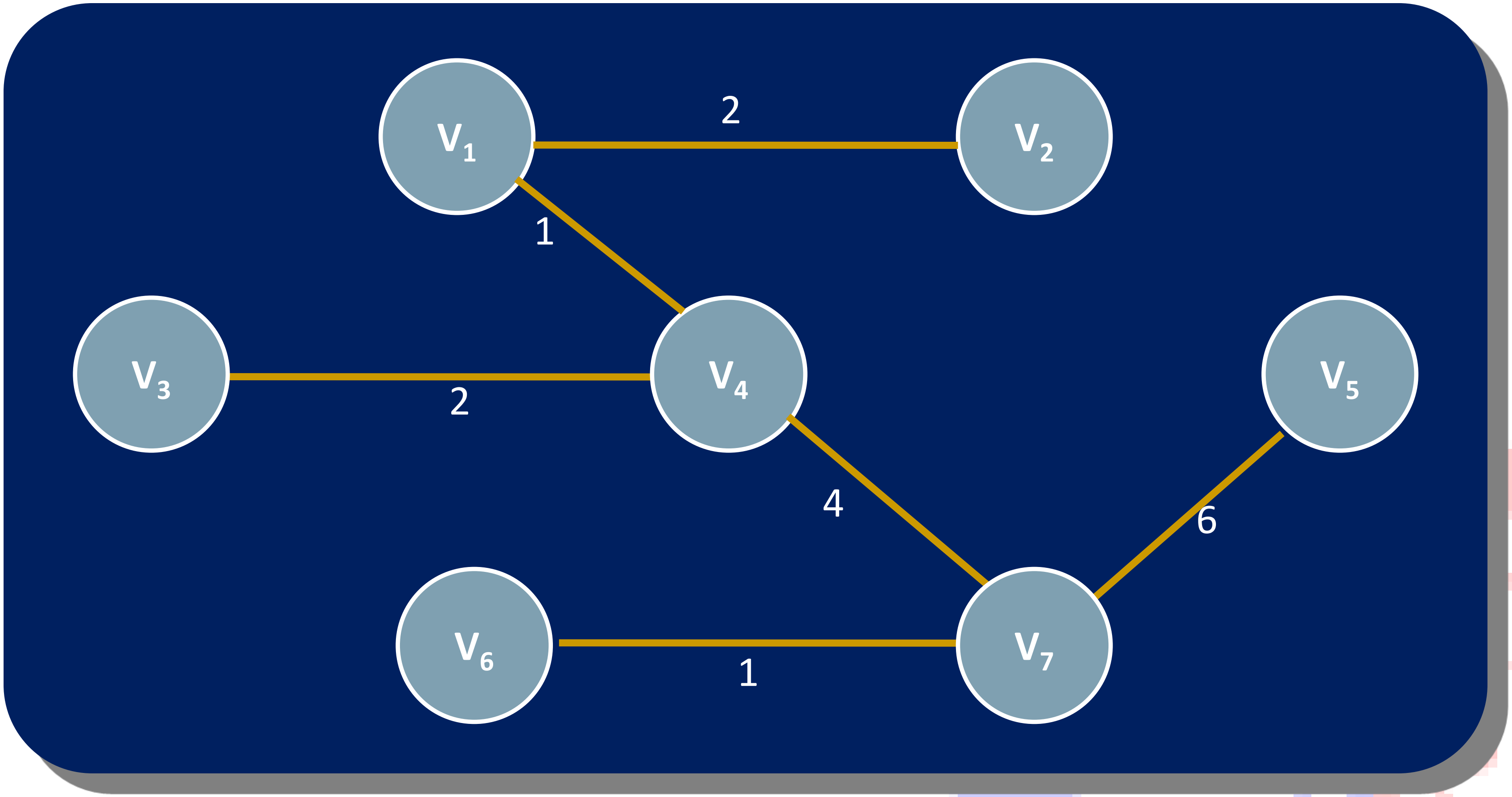
Minimum Spanning Tree (MST)



Minimum Spanning Tree: a graph



Minimum Spanning Tree

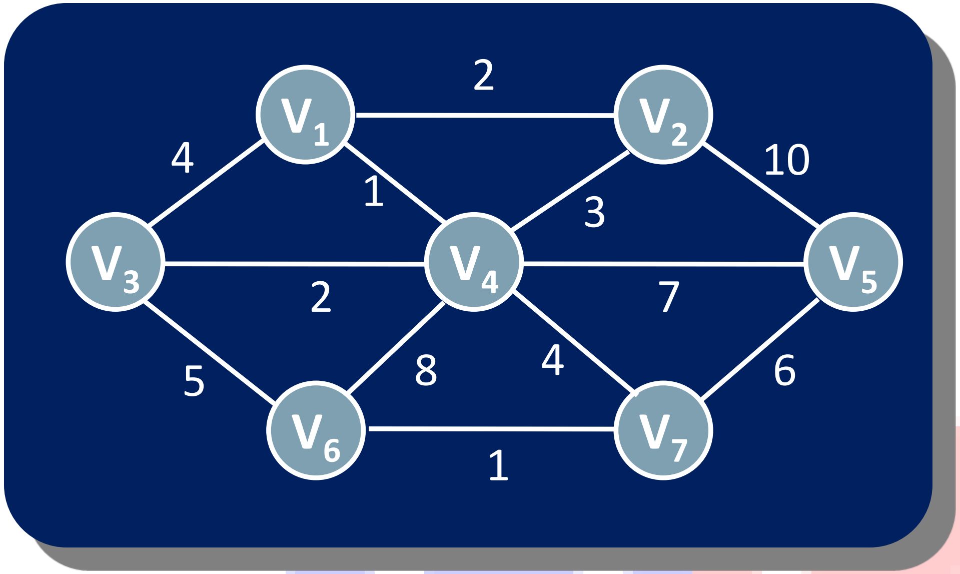


Prim's Algorithm

- mulai dari sebuah simpul
- bangun tree dengan menambahkan sebuah sisi/busur satu persatu.
  - secara berulang pilih sisi terkecil yang dapat menyambung tree.
- greedy algorithms:
  - Pilihan langkah diambil berdasarkan pilihan terbaik secara local tanpa memperhatikan pengaruhnya secara global.

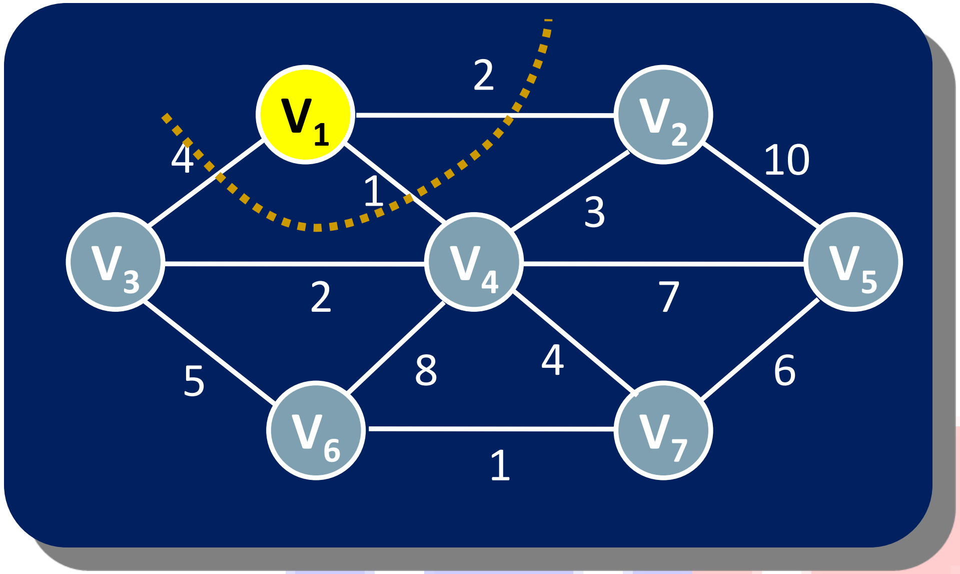
Prim's Algorithm

V	known	d_V	p_V
V_1	0	0	0
V_2	0	∞	0
V_3	0	∞	0
V_4	0	∞	0
V_5	0	∞	0
V_6	0	∞	0
V_7	0	∞	0



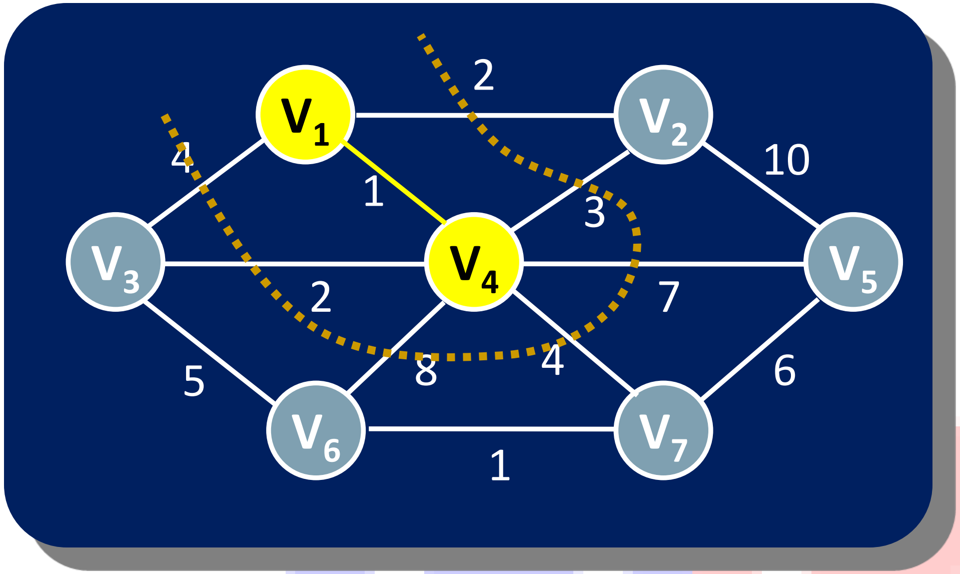
Prim's Algorithm

V	known	d_v	p_v
V_1	1	0	0
V_2	0	2	V_1
V_3	0	4	V_1
V_4	0	1	V_1
V_5	0	∞	0
V_6	0	∞	0
V_7	0	∞	0



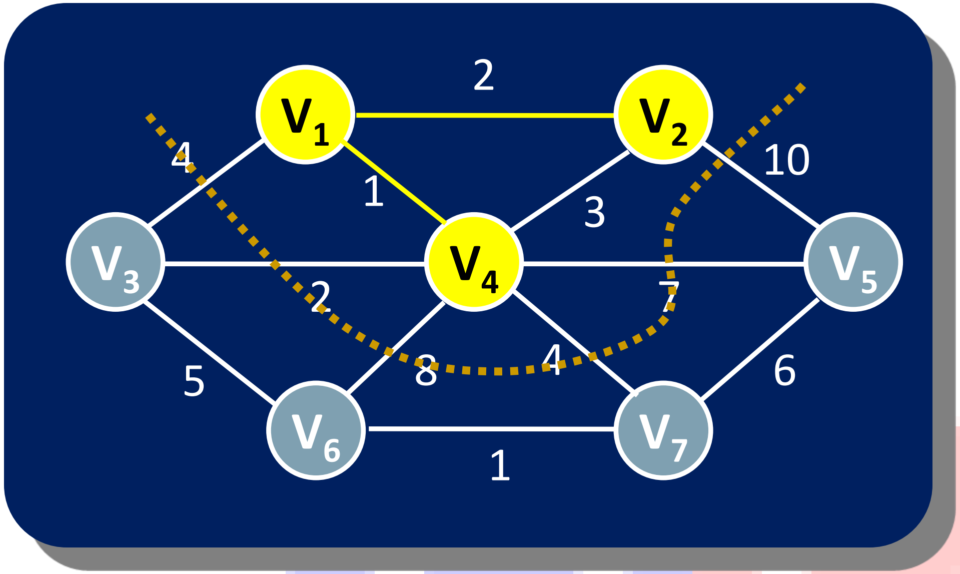
Prim's Algorithm

v	known	d_v	p_v
v_1	1	0	0
v_2	0	2	v_1
v_3	0	2	v_4
v_4	1	1	v_1
v_5	0	7	v_4
v_6	0	8	v_4
v_7	0	4	v_4



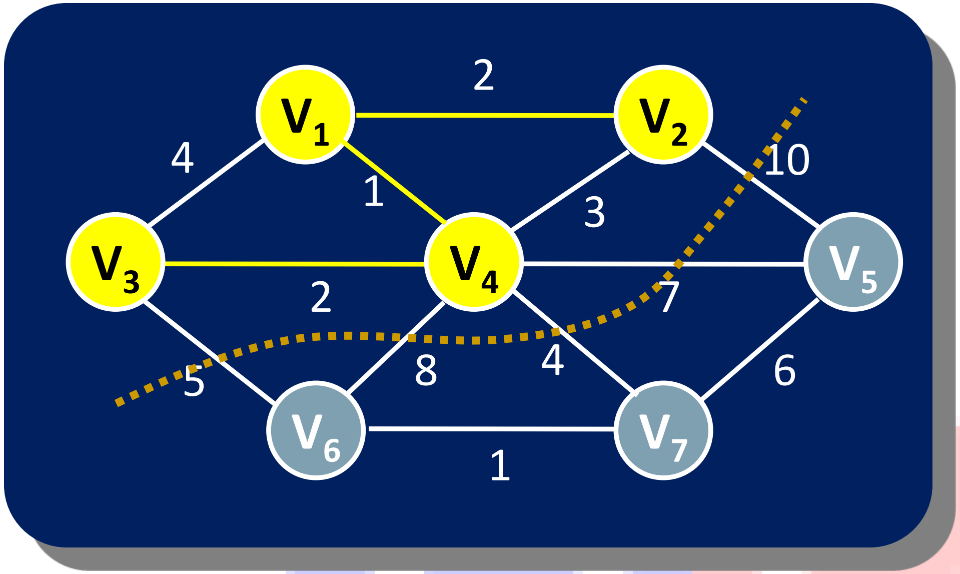
Prim’s Algorithm

v	known	d_v	p_v
v_1	1	0	0
v_2	1	2	v_1
v_3	0	2	v_4
v_4	1	1	v_1
v_5	0	7	v_4
v_6	0	8	v_4
v_7	0	4	v_4



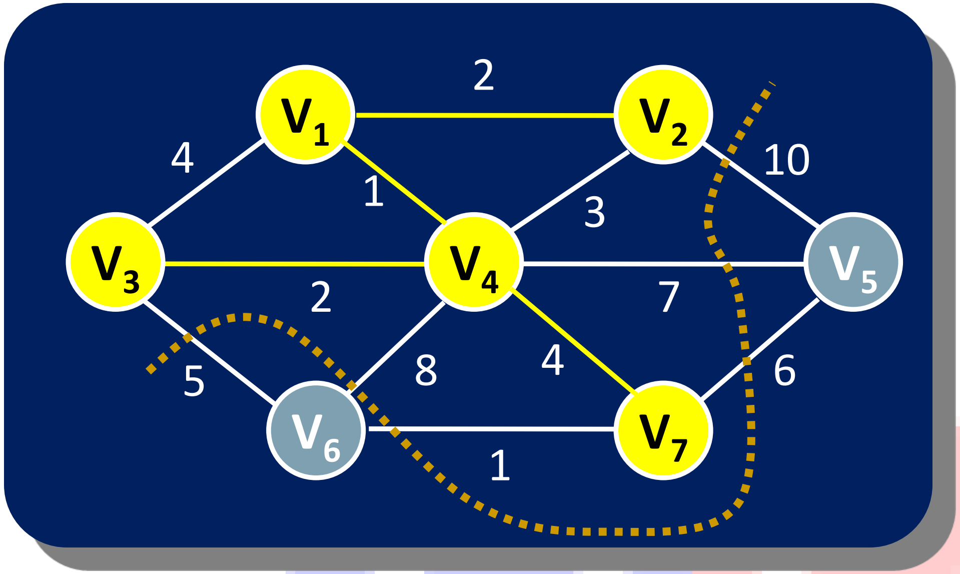
Prim's Algorithm

v	known	d_v	p_v
v_1	1	0	0
v_2	1	2	v_1
v_3	1	2	v_4
v_4	1	1	v_1
v_5	0	7	v_4
v_6	0	5	v_3
v_7	0	4	v_4



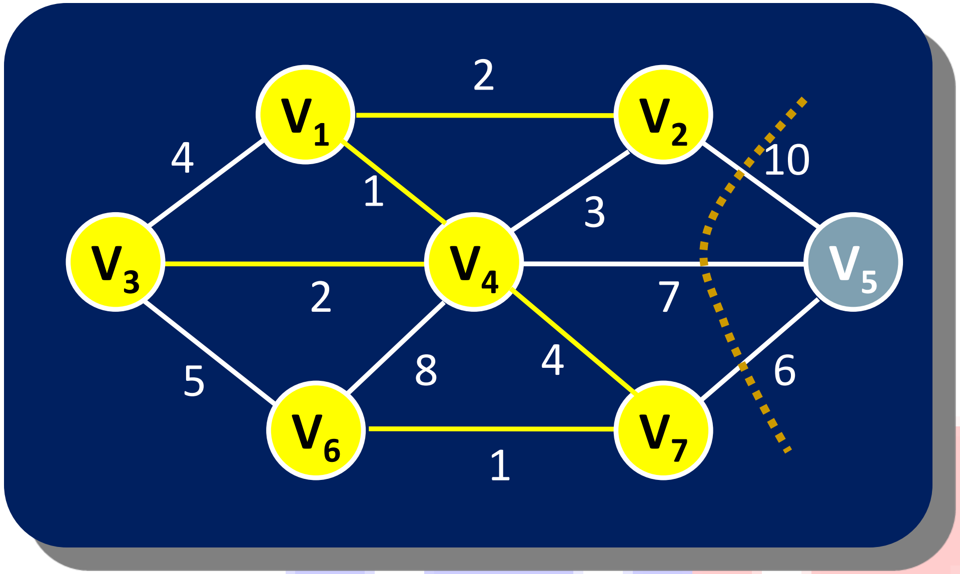
Prim's Algorithm

V	known	d_v	p_v
V_1	1	0	0
V_2	1	2	V_1
V_3	1	2	V_4
V_4	1	1	V_1
V_5	0	6	V_7
V_6	0	1	V_7
V_7	1	4	V_4



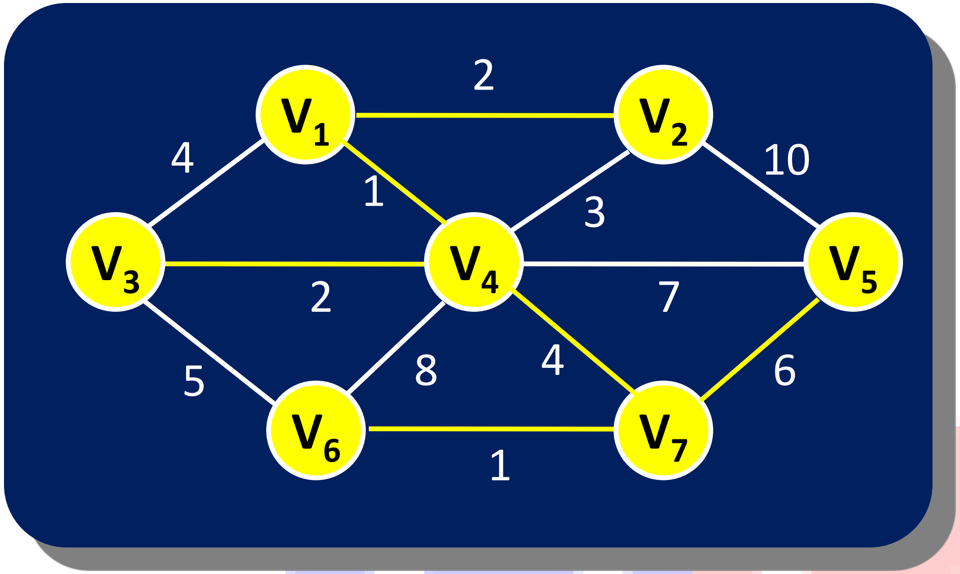
Prim’s Algorithm

V	known	d_v	p_v
V_1	1	0	0
V_2	1	2	V_1
V_3	1	2	V_4
V_4	1	1	V_1
V_5	0	6	V_7
V_6	1	1	V_7
V_7	1	4	V_4



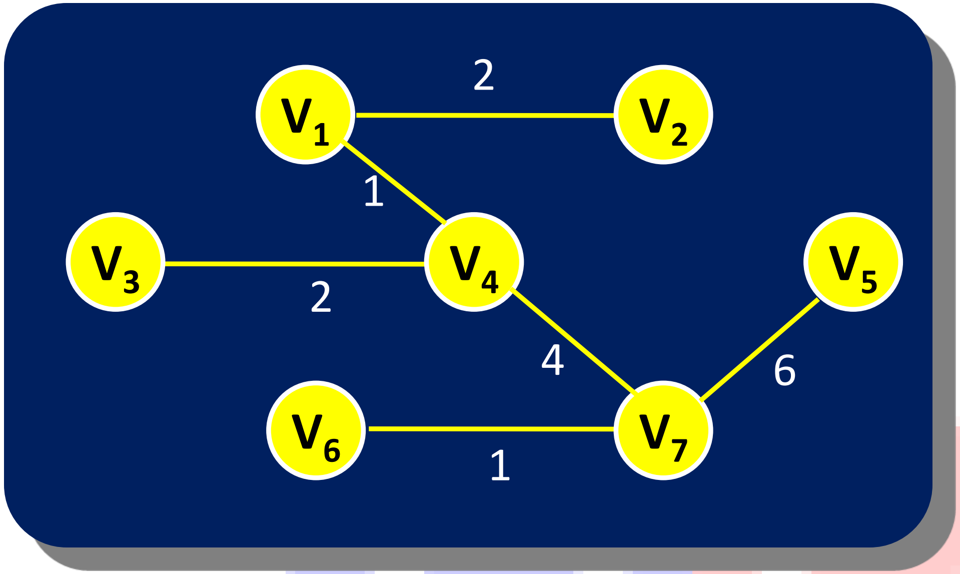
Prim's Algorithm

V	known	d_v	p_v
V_1	1	0	0
V_2	1	2	V_1
V_3	1	2	V_4
V_4	1	1	V_1
V_5	1	6	V_7
V_6	1	1	V_7
V_7	1	4	V_4



Prim's Algorithm

v	known	d_v	p_v
V_1	1	0	0
V_2	1	2	V_1
V_3	1	2	V_4
V_4	1	1	V_1
V_5	1	6	V_7
V_6	1	1	V_7
V_7	1	4	V_4



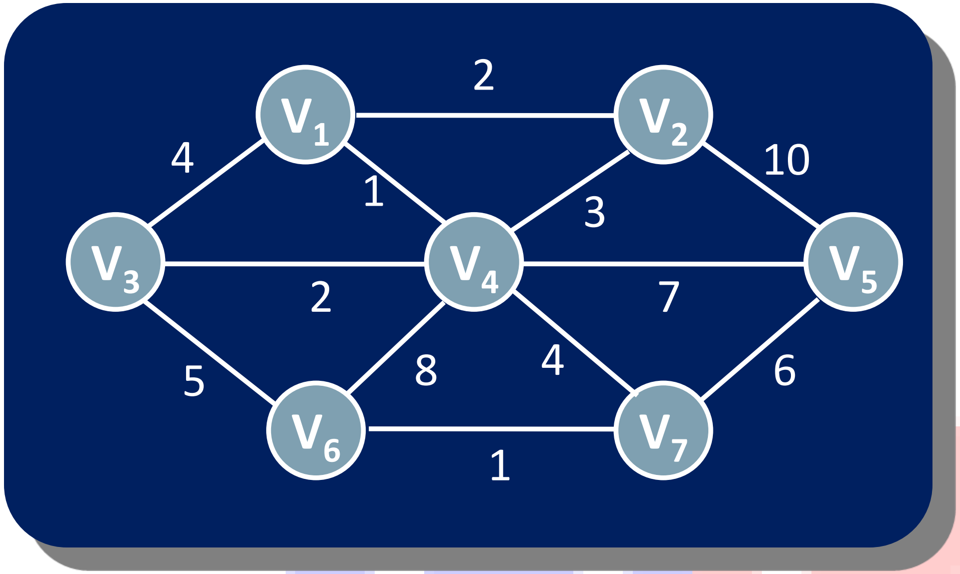
Kruskal's Algorithm

- Dari sebuah graph *G = (V,E)*, buatlah graph baru *T* dengan verteks yang sama dengan G namun belum memiliki edges.
- List semua *edges* yang terdapat pada G, urutkan berdasarkan bobot, dari yang terkecil hingga yang terbesar
- Lakukan iterasi untuk setiap *edge* secara terurut. Untuk setiap *edge* (v,u):
  - **Jika u dan v tidak terhubung oleh suatu *path* pada T, tambahkan (u,v) ke dalam T, atau dengan kata lain tambahkan edge ke dalam graph T apabila tidak menimbulkan *cycle.***

  Iterasi dilakukan hingga semua verteks terhubung (jumlah edge = jumlah verteks – 1)
- Pemeriksaan cycle dapat menggunakan struktur data "Union-Find Disjoint Sets"
- Graph T yang terbentuk merupakan MST dari graph G.

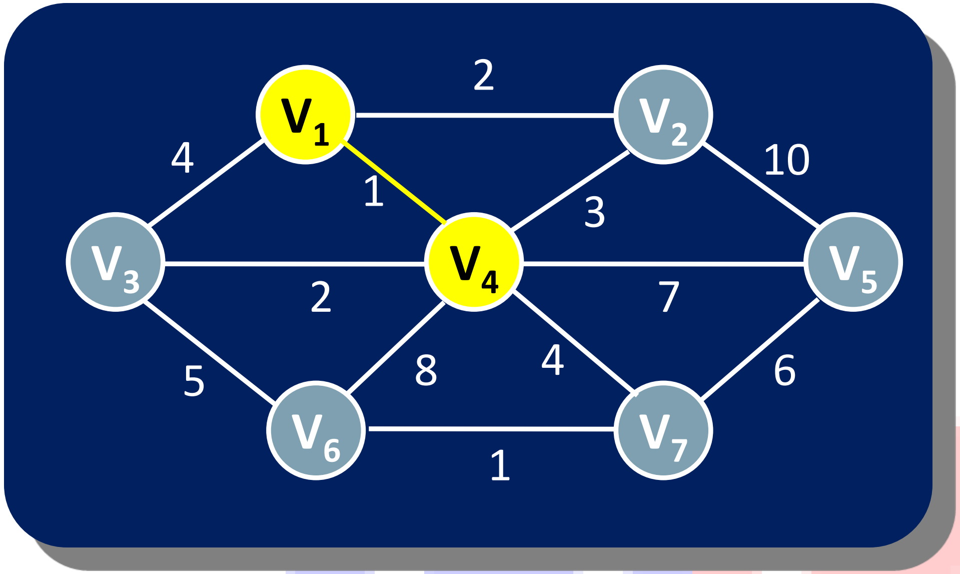
Kruskal's Algorithm

Edge	Weight	Action
(V_1, V_4)	1	-
(V_6, V_7)	1	-
(V_1, V_2)	2	-
(V_3, V_4)	2	-
(V_2, V_4)	3	-
(V_1, V_3)	4	-
(V_4, V_7)	4	-
(V_3, V_6)	5	-
(V_5, V_7)	6	-



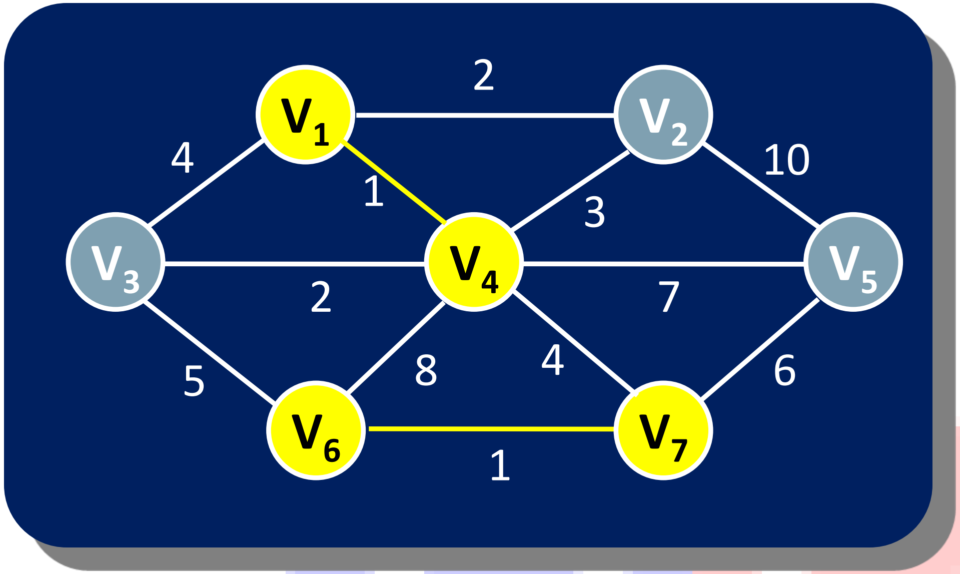
Kruskal's Algorithm

Edge	Weight	Action
(V_1, V_4)	1	A
(V_6, V_7)	1	-
(V_1, V_2)	2	-
(V_3, V_4)	2	-
(V_2, V_4)	3	-
(V_1, V_3)	4	-
(V_4, V_7)	4	-
(V_3, V_6)	5	-
(V_5, V_7)	6	-



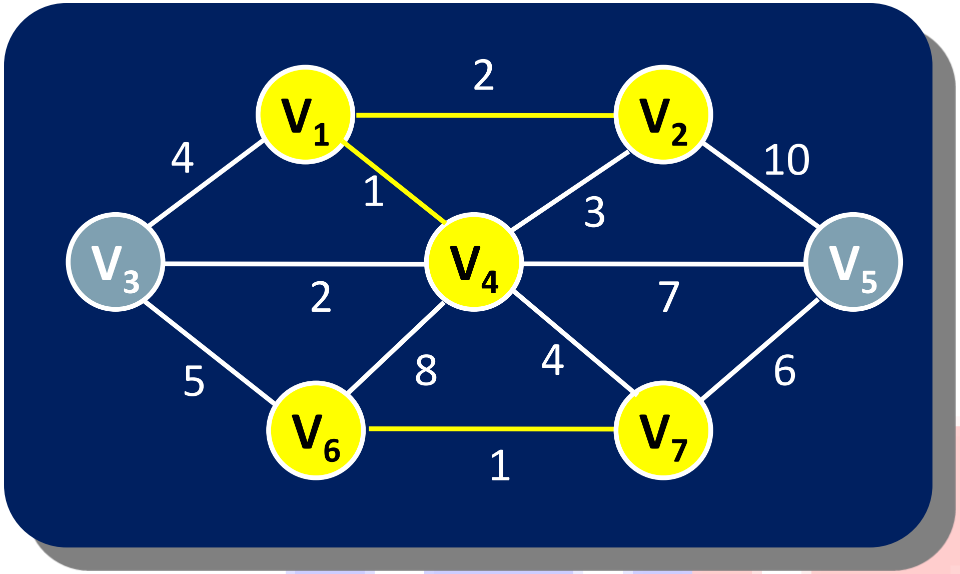
Kruskal's Algorithm

Edge	Weight	Action
(V_1, V_4)	1	A
(V_6, V_7)	1	A
(V_1, V_2)	2	-
(V_3, V_4)	2	-
(V_2, V_4)	3	-
(V_1, V_3)	4	-
(V_4, V_7)	4	-
(V_3, V_6)	5	-
(V_5, V_7)	6	-



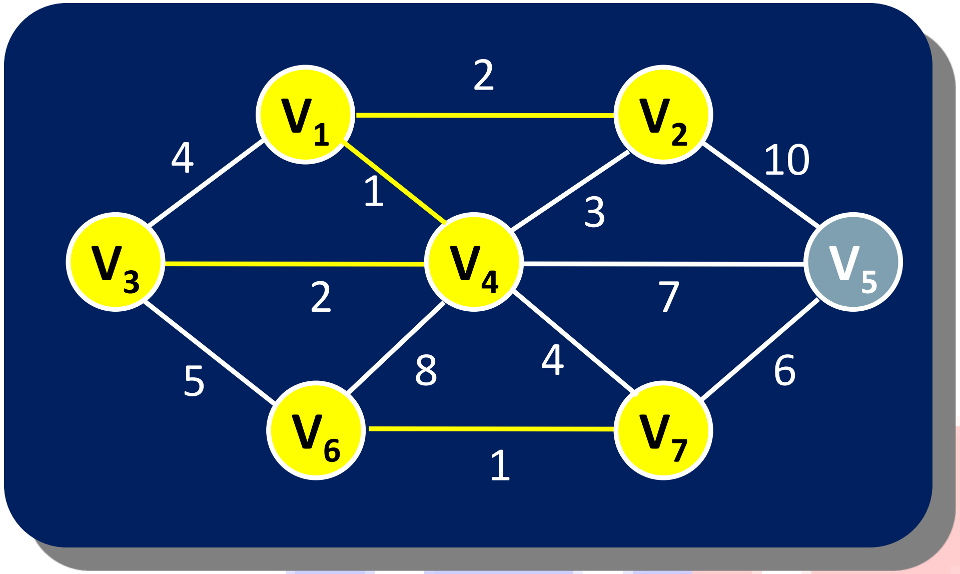
Kruskal's Algorithm

Edge	Weight	Action
(V_1, V_4)	1	A
(V_6, V_7)	1	A
(V_1, V_2)	2	A
(V_3, V_4)	2	-
(V_2, V_4)	3	-
(V_1, V_3)	4	-
(V_4, V_7)	4	-
(V_3, V_6)	5	-
(V_5, V_7)	6	-



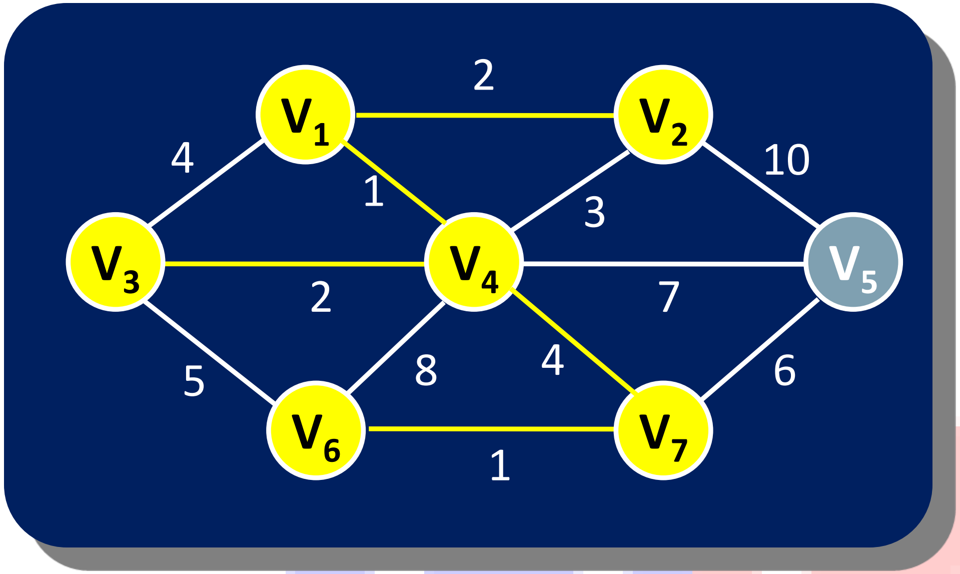
Kruskal's Algorithm

Edge	Weight	Action
(V_1, V_4)	1	A
(V_6, V_7)	1	A
(V_1, V_2)	2	A
(V_3, V_4)	2	A
(V_2, V_4)	3	-
(V_1, V_3)	4	-
(V_4, V_7)	4	-
(V_3, V_6)	5	-
(V_5, V_7)	6	-



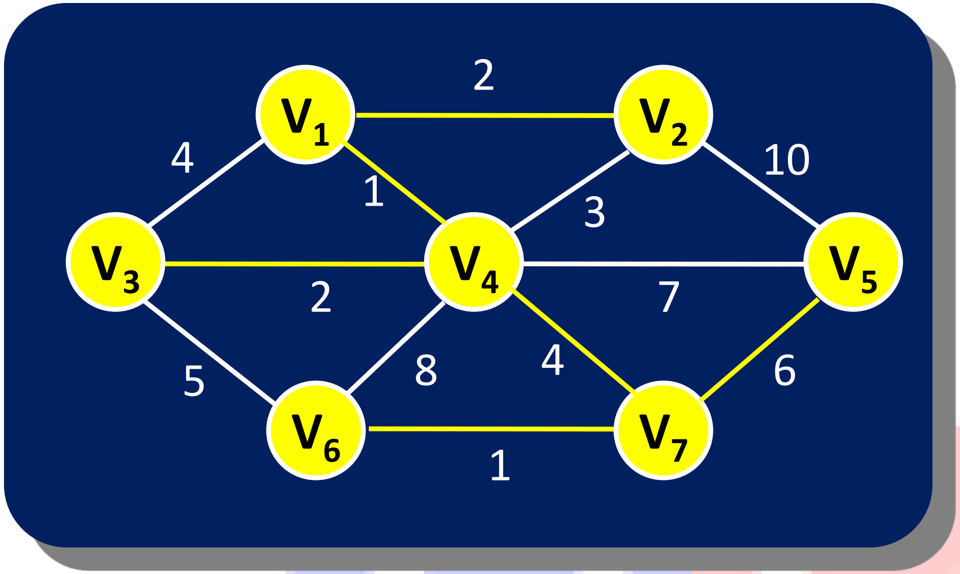
Kruskal's Algorithm

Edge	Weight	Action
(V_1, V_4)	1	A
(V_6, V_7)	1	A
(V_1, V_2)	2	A
(V_3, V_4)	2	A
(V_2, V_4)	3	R
(V_1, V_3)	4	R
(V_4, V_7)	4	A
(V_3, V_6)	5	-
(V_5, V_7)	6	-



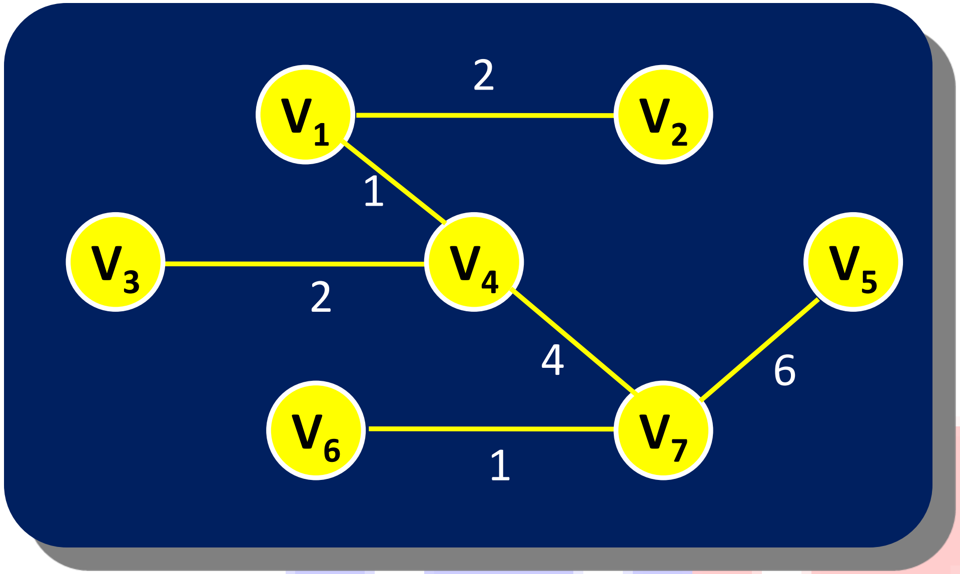
Kruskal's Algorithm

Edge	Weight	Action
(V1, V4)	1	A
(V6, V7)	1	A
(V1, V2)	2	A
(V3, V4)	2	A
(V2, V4)	3	R
(V1, V3)	4	R
(V4, V7)	4	A
(V3, V6)	5	R
(V5, V7)	6	A



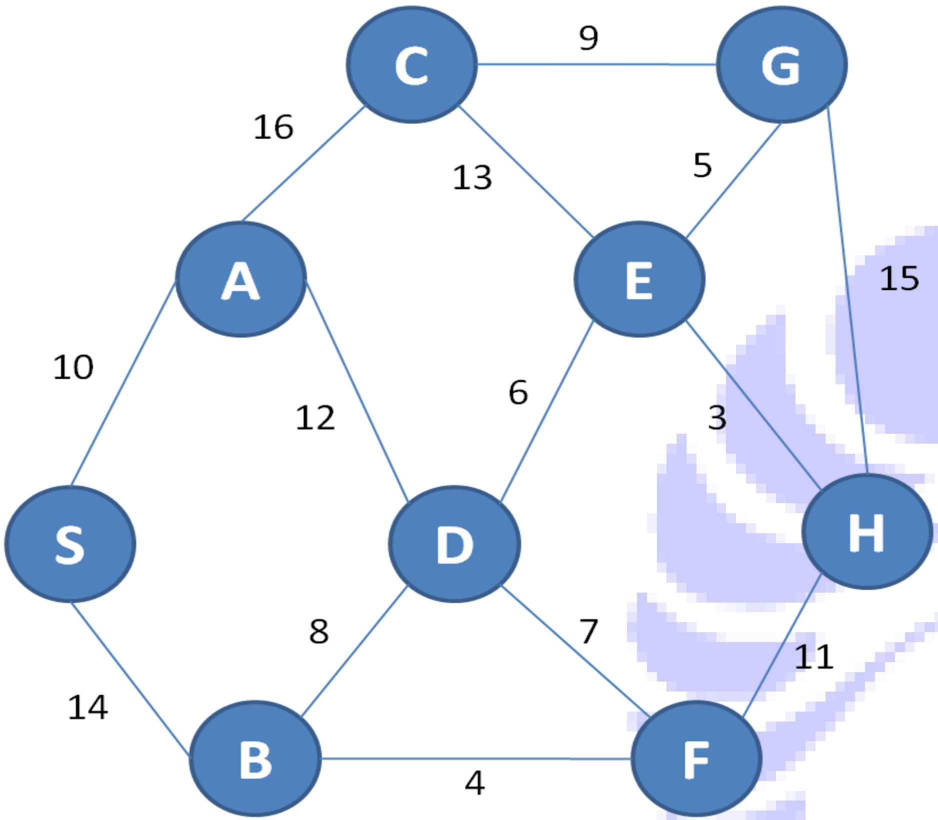
Kruskal's Algorithm

Edge	Weight	Action
(V1, V4)	1	A
(V6, V7)	1	A
(V1, V2)	2	A
(V3, V4)	2	A
(V2, V4)	3	R
(V1, V3)	4	R
(V4, V7)	4	A
(V3, V6)	5	R
(V5, V7)	6	A

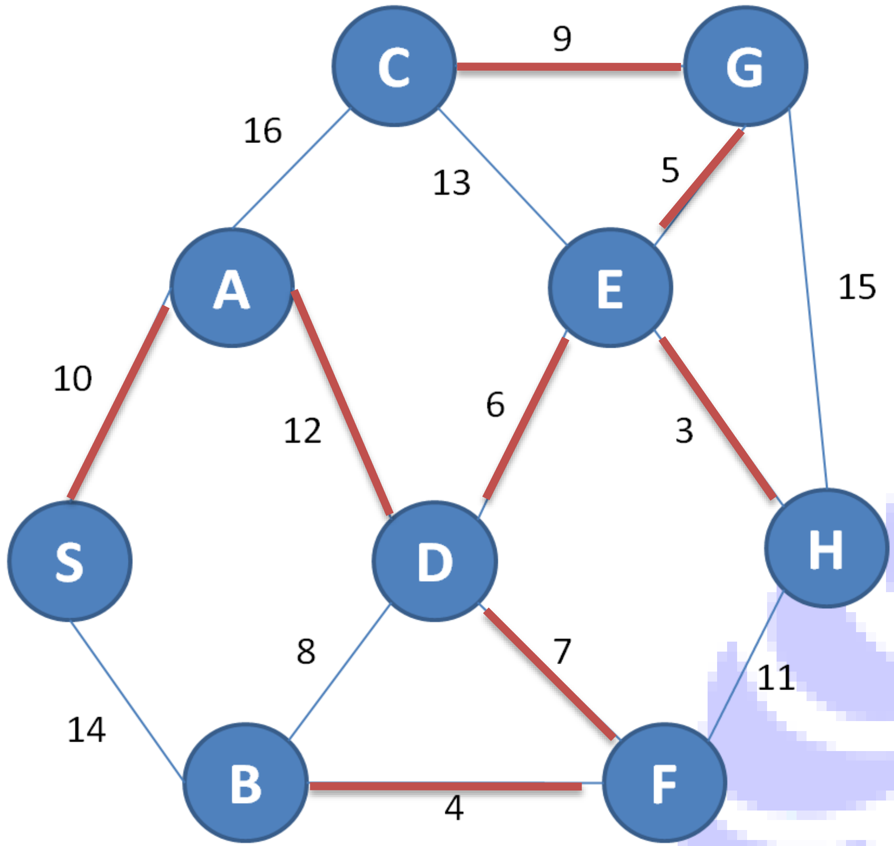


Latihan

- Gambarkan *minimum spanning tree* yang terbentuk dari graph berikut beserta total bobot minimum yang dicapai. Gunakan Prim's dan Kruskal algorithm!



Jawaban



Implementasi Graph

```java
// Represents an edge in the graph.
class Edge
{
    public Vertex dest;         // Second vertex in Edge
    public double cost;         // Edge cost

    public Edge( Vertex d, double c )
    {
        dest = d;
        cost = c;
    }
}
```

figure 14.6

The basic item stored in an adjacency list

Implementasi Graph

```
// Represents a vertex in the graph.
class Vertex
{
    public String     name;   // Vertex name
    public List<Edge> adj;    // Adjacent vertices
    public double     dist;   // Cost
    public Vertex     prev;   // Previous vertex on shortest path
    public int        scratch;// Extra variable used in algorithm

    public Vertex( String nm )
      { name = nm; adj = new LinkedList<Edge>( ); reset( ); }

    public void reset( )
     { dist = Graph.INFINITY; prev = null; pos = null; scratch = 0; }
}
```

figure 14.7

The `Vertex` class stores information for each vertex

Implementasi Graph

figure 14.12

A recursive routine for printing the shortest path

```
/**
 * Recursive routine to print shortest path to dest
 * after running shortest path algorithm. The path
 * is known to exist.
 */
private void printPath( Vertex dest )
{
    if( dest.prev != null )
    {
        printPath( dest.prev );
        System.out.print( " to " );
    }
    System.out.print( dest.name );
}
```

Implementasi Graph

```java
// Represents an entry in the priority queue for Dijkstra's algorithm.
class Path implements Comparable<Path>
{
    public Vertex     dest;   // w
    public double     cost;   // d(w)

    public Path( Vertex d, double c )
    {
        dest = d;
        cost = c;
    }

    public int compareTo( Path rhs )
    {
        double otherCost = rhs.cost;

        return cost < otherCost ? -1 : cost > otherCost ? 1 : 0;
    }
}
```

figure 14.26

Basic item stored in the priority queue

```
/**
 * Single-source weighted shortest-path algorithm.
 */
public void dijkstra( String startName )
{
    PriorityQueue<Path> pq = new PriorityQueue<Path>( );

    Vertex start = vertexMap.get( startName );
    if( start == null )
        throw new NoSuchElementException( "Start vertex not found" );

    clearAll( );
    pq.add( new Path( start, 0 ) ); start.dist = 0;

    int nodesSeen = 0;
    while( !pq.isEmpty( ) && nodesSeen < vertexMap.size( ) )
    {
        Path vrec = pq.remove( );
        Vertex v = vrec.dest;
        if( v.scratch != 0 )  // already processed v
            continue;

        v.scratch = 1;
        nodesSeen++;

        for( Edge e : v.adj )
        {
            Vertex w = e.dest;
            double cvw = e.cost;

            if( cvw < 0 )
                throw new GraphException( "Graph has negative edges" );

            if( w.dist > v.dist + cvw )
            {
                w.dist = v.dist + cvw;
                w.prev = v;
                pq.add( new Path( w, w.dist ) );
            }
        }
    }
}
```

figure 14.27

A positive-weighted, shortest-path algorithm: Dijkstra's algorithm

Extra material

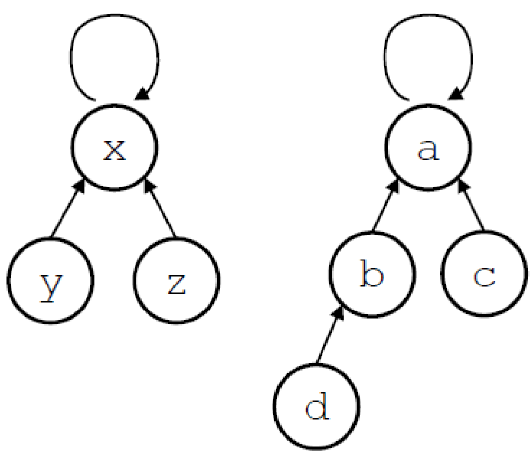
UNION FIND DISJOINT SET

Union-Find Disjoint Sets

- Can support two types of operations efficiently
  - find(x): returns the “representative” of the set that x belongs
  - union(x, y): merges two sets that contain x and y
- Both operations can be done in (essentially) constant time
- Simple and short implementation!
- Applications:
  - track connected components of an undirected graph
  - used for implementing Kruskal's algorithm to find the minimum spanning tree of a graph.
    - connecting an edge from two connected vertices will create a cycle

Data Structure

- Main idea: represent each set by a rooted tree
  - Every node maintains a link to its parent
    - initially, each node points to itself
  - A root node is the "representative" of the corresponding set
  - Example: two sets {x, y, z} and {a, b, c, d}

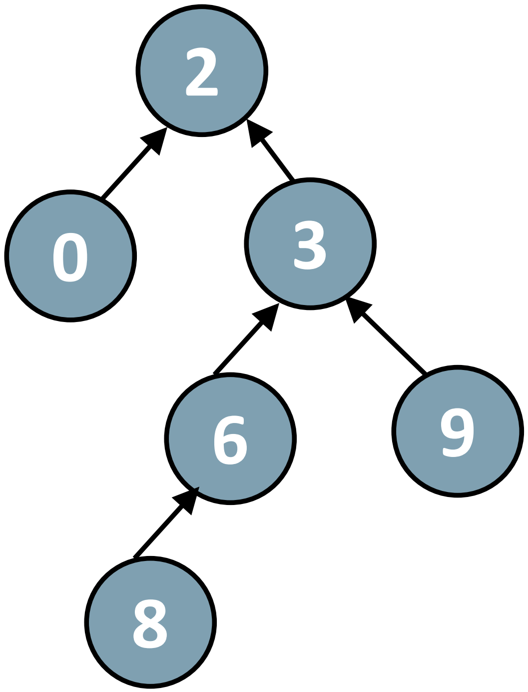


Implementation

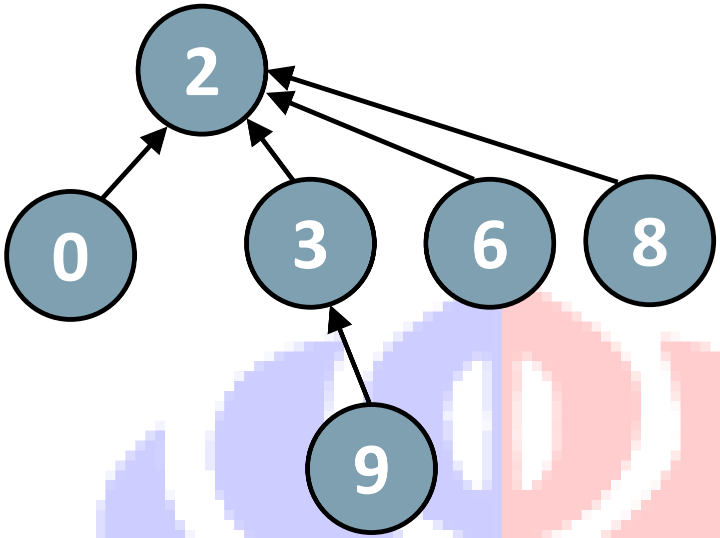
- find(x): follow the links from x until a node points itself (*the representative node*)
  - This can take $O(n)$ time but we will make it faster
  - Path compression
    - The shape of the tree is not important as long as the root stays the same
    - After find(x) returns the root, backtrack to x and reroute all the links to the root
- union(x, y): run find(x) and find(y) to find corresponding root nodes and direct one to the other
  - Another improvement: Union by rank: attach the smaller tree to the larger tree

Path Compression

Initially



After calling findSet (8)



Java Implementation

```java
public class UnionFindDisjointSet
{
    private int parent[];

    public UnionFindDisjointSet (int size) {
        parent = new int[size];
        for (int ii = 0; ii < size; ii++) {
            parent[ii] = ii;
        }
    }

    public int findSet (int i) {
        if (parent[i] == i) {
            return i;
        } else {
            return parent[i] = findSet (parent[i]); // path compression
        }
    }

    public void unionSet (int i, int j) {
        parent[findSet (i)] = findSet (j);
    }

    public boolean isSameSet (int i, int j) {
        return findSet (i) == findSet (j);
    }
}
```