OCamlによる無限グラフにも使えるダイクストラ法の実装

ML Day #2

@fetburner

2018年9月16日

発表内容

競プロで使うのでダイクストラ法を実装

実用上の要請：

- 疎なグラフに対して高速に
- ある始点からの最短距離を一度に計算

趣味：

- 無限グラフにも使えるようにしてみる

アウトライン

ダイクストラ法

非負の重みが付いた有向グラフに対して，単一始点最短経路問題を解くアルゴリズム

1. V を頂点全ての集合，始点への最短距離を 0，それ以外への最短距離を無限大とする
2. V が空集合ならば手続きを終了
3. 最短距離が最小となる $v \in V$ を V から削除
4. v から伸びる辺で最短距離を更新
5. 2へ

線形探索による実装(1/2)

```
let rec dijkstra_aux : int list ->
  (int -> (int * float) list) ->
  float array -> unit = fun q e d ->
  match q with
  | [] -> ()
  | v :: q ->
      let v, q =
        List.fold_left (fun (u, q) v ->
          if d.(u) < d.(v)
          then (u, v :: q)
          else (v, u :: q)) (v, []) q in
      List.iter (fun (u, c) ->
        d.(u) <- min d.(u) (c +. d.(v))) (e v);
      dijkstra_aux q e d
```

線形探索による実装(2/2)

```
let dijkstra : int ->
  (int -> (int * float) list) ->
  int -> int -> float = fun n e s ->
  let d = Array.make n infinity in
  d.(s) <- 0.;
  dijkstra_aux (List.init n (fun v -> v)) e d;
  fun v -> d.(v)
```

- 実装を隠蔽するため，関数を返す
- 最も近い頂点を線形探索しているため，疎なグラフに対しては遅い（$O(V^2)$）

Mapをヒープとして使う (1/2)

```
let rec dijkstra_aux : float array ->
  (int -> (int * float) list) ->
  int list FloatMap.t -> unit = fun d e q ->
  match FloatMap.min_binding q with
  | exception Not_found -> ()
  | (w, us) -> dijkstra_aux d e @@
      List.fold_left (fun q u ->
        if d.(u) < w then q
        else List.fold_left (fun q (v, c) ->
          if d.(v) <= w +. c then q
          else begin
            d.(v) <- w +. c;
            FloatMap.add (w +. c)
              (v :: try FloatMap.find (w +. c) q
                    with Not_found -> []) q
          end) q (e u)) (FloatMap.remove w q) us
```

Mapをヒープとして使う (2/2)

```
let dijkstra : int ->
  (int -> (int * float) list) ->
  int -> int -> float = fun n e s ->
  let d = Array.make n infinity in
  d.(s) <- 0.;
  dijkstra_aux d e (FloatMap.singleton 0. [s]);
  fun v -> d.(v)
```

- **標準ライブラリのMapは$O(\log N)$で最小値を取り出せる**
  - **計算量は$O(E \log V)$に**

最短距離もMapで管理してみる(1/2)

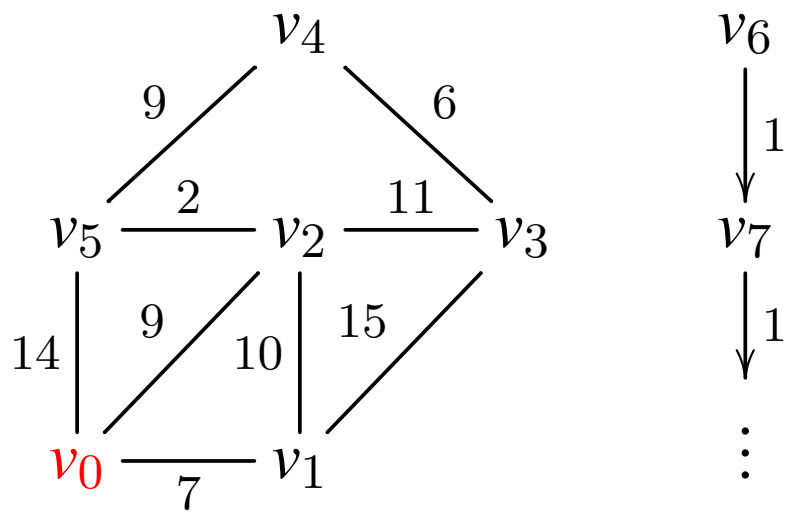
```
let rec dijkstra_aux : (int ->(int*float)list)->
  float IntMap.t * int list FloatMap.t->
  float IntMap.t = fun e (d, q) ->
  match FloatMap.min_binding q with
  | exception Not_found -> d
  | (w, us) -> dijkstra_aux e @@
      List.fold_left (fun (d, q) u ->
        if IntMap.find u d < w then (d, q)
        else List.fold_left (fun (d, q) (v, c)->
          if try IntMap.find v d <= w +. c
             with Not_found -> false then (d, q)
          else IntMap.add v (w +. c) d,
            FloatMap.add (w +. c)
              (v :: try FloatMap.find (w +. c) q
                    with Not_found -> []) q)
        (d,q) (e u))(d,FloatMap.remove w q) us
```

最短距離もMapで管理してみる(2/2)

```
let rec dijkstra :
  (int -> (int * float) list) ->
  int -> int -> float = fun e s ->
  let d = dijkstra_aux e (IntMap.singleton s 0.,
     FloatMap.singleton 0. [s]) in
  fun v -> try IntMap.find v d
           with Not_found -> infinity
```

- 破壊的代入が不要に
  - 計算量は$O(E \log V)$のまま
- 頂点数を与える必要がなくなった
- ファンクタを使えば辺の重みだけでなく，頂点の型も自由に選べる

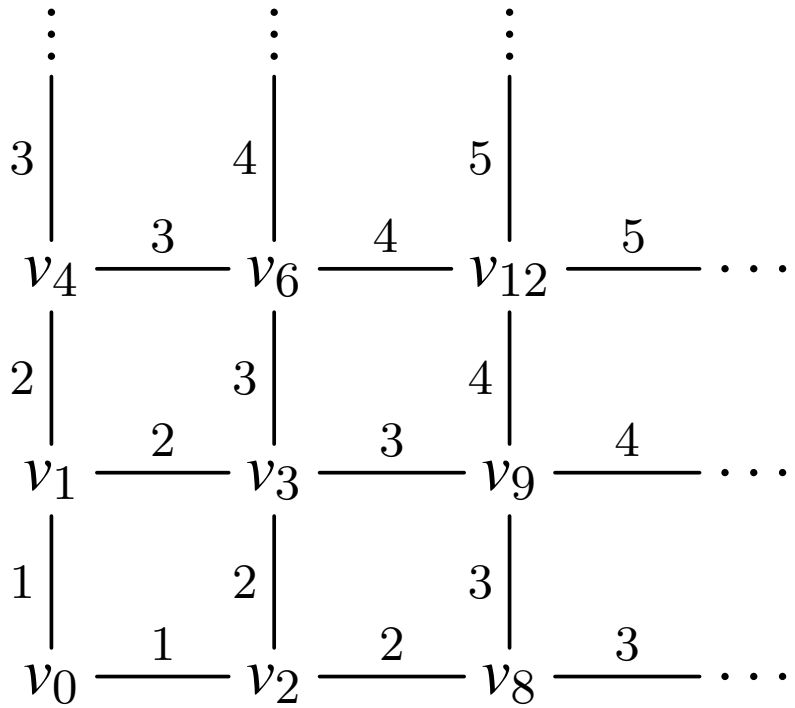
実際に使ってみる (1/2)




```
# List.init 6 (dijkstra (function ... ) 0)
- : float list = [0.; 7.; 9.; 20.; 20.; 11.]
```

始点から到達可能な頂点が有限ならば，
有限時間で最短距離を返す

実際に使ってみる (2/2)




```
# dijkstra (function ... ) 0 12
^CInterrupted.
```

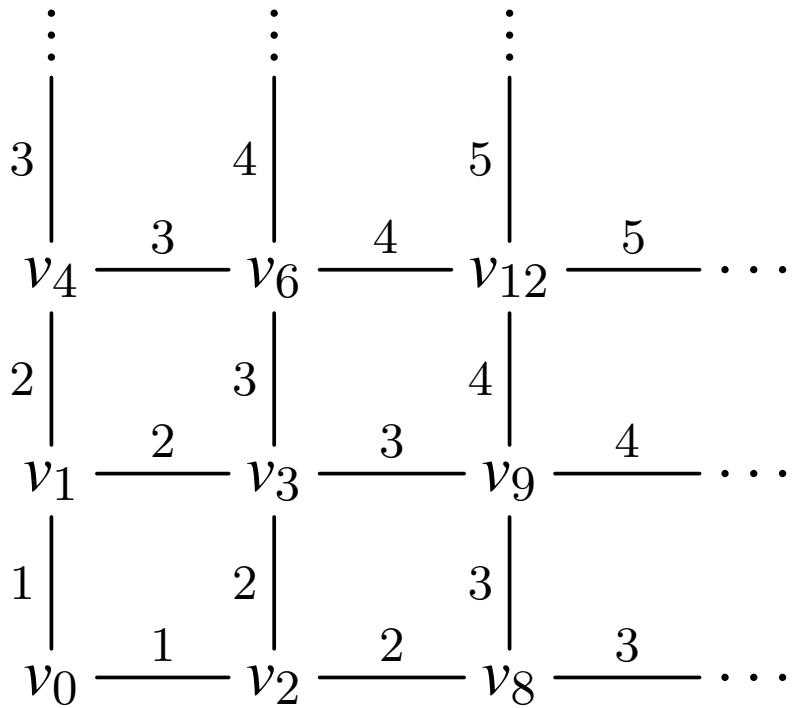
始点から到達可能な頂点が無限だと無理

改善策：計算の切り上げ

```
let rec dijkstra : (int ->(int*float)list)->
  int -> float IntMap.t * int list FloatMap.t->
  float = fun e t (d, q) ->
  match FloatMap.min_binding q with
  | exception Not_found -> infinity
  | (w, us) ->
      if List.exists (( = ) t) us then w
      else dijkstra e t @@
        List.fold_left (
          ...
        ) (d, FloatMap.remove w q) us

let dijkstra e s t = dijkstra e t
  (IntMap.singleton s 0.,
   FloatMap.singleton 0. [s])
```

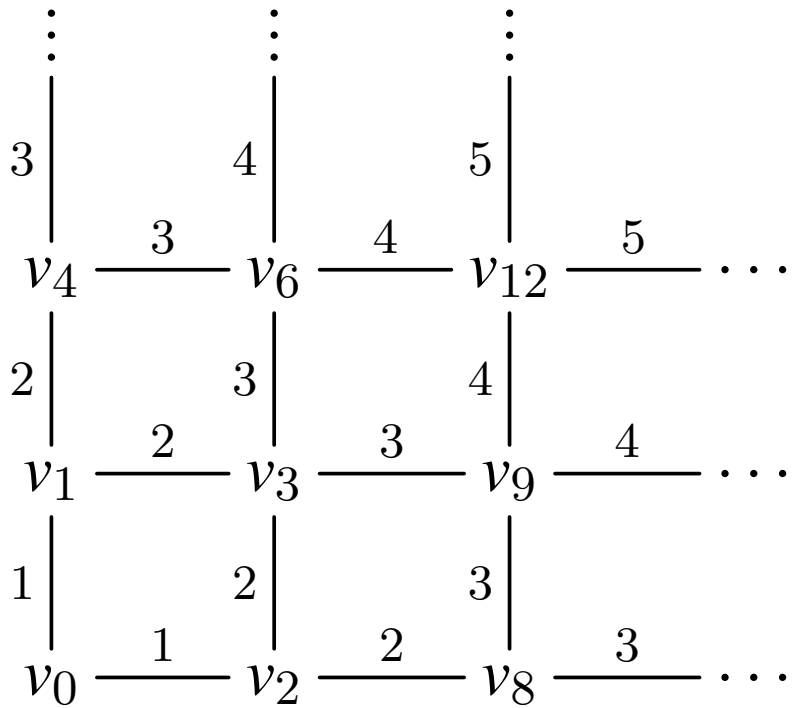
使用例(1/2)




```
# dijkstra (function ...) 0 12
- : int = 10
```

終点までの距離が分かった時点で切り上げればよい

使用例(2/2)




```
# List.init 10000 (dijkstra (function ... ) 0)
^CInterrupted.
```

計算の途中経過が捨てられるため，とても遅い

OCamlは手続き型言語(1/2)

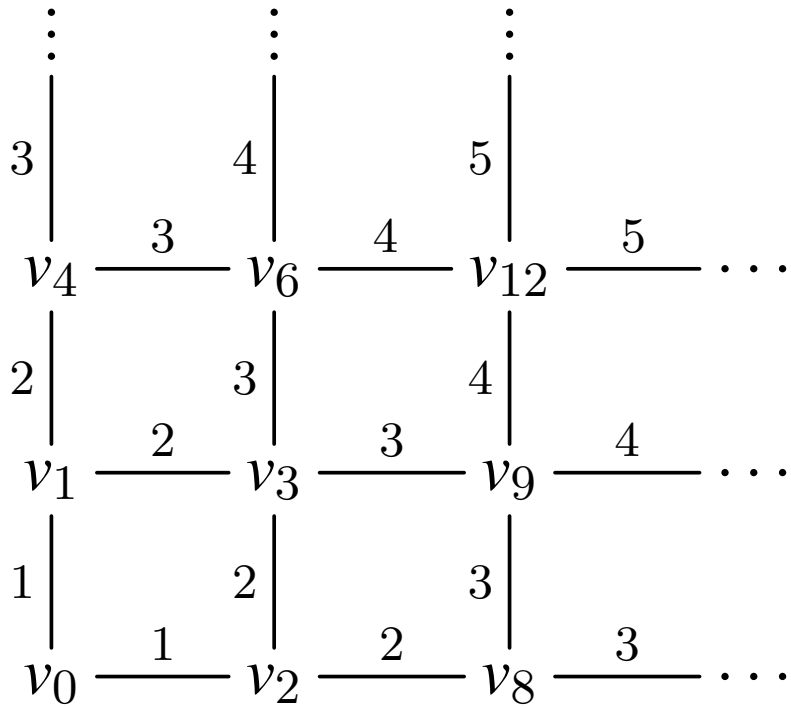
- 計算の途中経過を，クロージャの中に参照として覚えておく

```
let dijkstra e s =
  let d = ref @@ IntMap.singleton s 0. in
  let q = ref @@ FloatMap.singleton 0. [s] in
  let rec dijkstra_aux t =
    let ans = try IntMap.find t !d
              with Not_found -> infinity in
    match FloatMap.min_binding !q with
    | exception Not_found -> ans
    | (w, us) ->
        if ans <= w then ans
        else begin
```

OCamlは手続き型言語(2/2)

```
  q := FloatMap.remove w !q;
  List.iter (fun u ->
    if w <= IntMap.find u !d then
      List.iter (fun (v, c) ->
        if
          try w +. c < IntMap.find v !d
          with Not_found -> true
        then begin
          d := IntMap.add v (w +. c) !d;
          q := FloatMap.add (w +. c)
            (v :: try FloatMap.find (w +. c) !q
                  with Not_found -> []) !q
        end) (e u)) us;
  dijkstra_aux t
end in dijkstra_aux
```

解決！




```
# List.init 10000 (dijkstra (function ... ) 0)
- : float list =
[0.; 1.; 1.; 3.; 3.; 6.; 6.; 10.; 3.; 6.; ...]
```

計算の途中経過が再利用され，高速になった

まとめ

- OCaml により，様々な好ましい性質を持つダイクストラ法の実装を与えた
  - 疎なグラフに対して高速
  - ある始点からの最短距離を一度に計算
  - 無限グラフにも対応可

元ネタのソースコード： https://github.com/fetburner/compelib/blob/master/graph/dijkstra.ml

AtCoder **での使用例：** https://beta.atcoder.jp/contests/abc012/submissions/3198756