Elementi di Calcolo e Complessità

Federico Matteoni

A.A. 2019/20

Indice

Introduzione

Prof. Pierpaolo Degano `pierpaolo.degano@unipi.it`
Con Giulio Masetti `giulio.masetti@isti.snr.it`
Esame: compitini/scritto + orale

Capitolo 1

Calcolabilità

1.1 Teoria della Calcolabilità

Illustra **cosa può essere calcolato da un computer** senza limitazioni di risorse come spazio, tempo ed energia. Vale a dire:

- Quali sono i **problemi *solubili*** mediante una **procedura effettiva** (qualunque linguaggio su qualunque macchina)?
- Esistono **problemi *insolubili***? Sono interessanti, realistici, oppure puramente artificiali?
- Possiamo raggruppare i problemi in **classi**?
- Quali sono le **proprietà** delle classi dei problemi solubili?
- Quali sono le relazioni tra le classe dei problemi insolubili?

Astrazione Utilizzeremo **termini astratti per descrivere la possibilità di eseguire un programma ed avere un risultato**. Questa astrazione è un **modello** che non tiene conto di dettagli al momento irrilevanti.
Un po' come l'equazione per dire quanto ci mette il gesso a cadere che non tiene conto delle forze di attrito dell'aria.

Problema della Decisione Un problema è risolto se si conosce una **procedura** che permette di decidere con un numero **finito** di operazioni di decedere se una proposizione logica è vera o falsa.

1.2 Algoritmo

Un algoritmo è un insieme **finito** di istruzioni.

Istruzioni Elementi da un insieme di **cardinalità finita** ed ognuna ha **effetto limitato** (localmente e "*poco*") sui dati (che devono essere **discreti**). Un'istruzione deve richiedere tempo finito per essere elaborata.

Computazione Successione di istruzioni finite in cui ogni passo dipende solo dai precedenti. Verificando una porzione finita dei dati (**deterministico**). Non c'è limite alla memoria necessaria al calcolo (è finita ma illimitata). Neanche il tempo è limitato (necessario al calcolo). Tanto tempo e tanta memoria quante ce ne servono.

Un'eccezione a questa definizione di algoritmo è costituita dalle macchine concorrenti/interattive, dove gli input variano nel tempo. Inoltre vi sono formalismi che tengono conto di algoritmi probabilistici e stocastici. Altre eccezioni sono gli algoritmi non deterministici, ma per ognuno di essi esiste un algoritmo deterministico equivalente (Teorema `3.3.6`)

1.3 Macchina di Turing

Introdotta da **Alan Turing** nel 1936, confuta la speranza "*non ignorabimus*" di poter risolvere qualsiasi cosa con un programma.
Turing originariamente la presenta supponendo di aver un impiegato precisissimo ma stupido, con una pila di fogli di carta ed una penna, ed un foglio di carta con le istruzioni che esegue con estrema diligenza. Non capisce quello che fa, e si chiama "**computer**".

Struttura matematica Una Macchina di Turing (MdT) è una quadrupla:

$$\mathrm{M} = (\mathrm{Q}, \sum, \delta, \mathrm{q}_0)$$

Q = $\{q_i\}$ è l'insieme finito degli **stati** in cui si può trovare la macchina.
Indicheremo con lo stato speciale h la fine corretta della computazione, h non $\in$ Q.

$\sum = \{\sigma, \sigma' \dots\}$ è l'insieme finito di **simboli**. Ci sono elementi che devono per forza esistere:

\# carattere **bianco**, vuoto

$\triangleright$ carattere di inizio della memoria, chiamato **respingente**, che funziona come un inizio file

$\delta \subseteq (\mathrm{Q} \times \sum) \to (\mathrm{Q}' \bigcup \{h\}) \times \sum' \times \{\mathrm{L}, \mathrm{R}, -\}$ è **funzione di transizione**.
Mantiene determinismo perché funzione, ad un elemento associa un solo elemento (la transizione è univoca).
Transizioni finite perché prodotto cartesiano di insiemi finiti.
$\delta(\mathrm{q}, \triangleright) = (\mathrm{q}', \triangleright, \mathrm{R})$, cioè se sono a inizio file possono solo andare a destra.
Può essere vista come una relazione di transizione, $\delta \subseteq (Q \times \sum) \times (Q \bigcup \{h\}) \times \sum \times \{L, R, -\}$

$\mathrm{q}_0 \in \mathrm{Q}$ lo **stato iniziale**

Mappatura a coda di rondine, bigezione tra (m, n) $\to$ k, cioè $N^2 \to N$.
Costruire un modello per il calcolo dopo aver posto delle condizioni affinché qualcosa si possa chiamare algoritmo.

1.3.1 $\sum$

$\sum^0 = \{\epsilon\}$, con ϵ = parola vuota, che non contiene caratteri

$\sum^{i+1} = \sum \cdot \sum^i = \{\sigma \cdot u \mid \sigma \in \sum \wedge u \in \sum^i\}$

$\sum^* = \bigcup_{i \in N} \sum^i$, insieme di tutte le possibili combinazioni di simboli

$\sum^f = \sum^* \cdot (\sum - \{\#\} \bigcup \{\epsilon\})$, cioè linsieme di tutte le stringhe che terminano con un carattere non bianco ma può terminare con la stringa vuota

Esempio $\sum_B = \{0, 1\} \longrightarrow \sum_B^* = \{\epsilon, 0, 1, 01, 10, 010, 110010, \dots\}$ tutti i numeri binari

1.3.2 Transizioni

La **situazione corrente** di una macchina di Turing può essere scritto come (q, u, σ, v) dove:

q è lo **stato attuale**, $q \in Q$

u è la **stringa a sinistra** del carattere corrente, $u \in \sum^*$

σ è il **carattere corrente**, $\sigma \in \sum$

v è il **resto della stringa** che termina con un carattere non nullo, $v \in \sum^f$

Può anche essere più comodamente espressa come $(q, u \underline{\sigma} v)$

1.3.3 Computazione

Una computazione è una transizione $(q, x) \longrightarrow (q', \omega)$. Una macchina di Turing parte **sempre** da $(q_0, \trianglerighteq x)$.
Ogni computazione può esprimere il numero di passi necessari, ad esempio $\gamma \longrightarrow^n \gamma'$.
$\forall$ *computazione* $\gamma \Rightarrow \gamma \longrightarrow^0 \gamma$. Inoltre se $\gamma \longrightarrow \gamma' \wedge \gamma' \longrightarrow^n \gamma''$ allora $\gamma \longrightarrow^{n+1} \gamma''$

Esempio Macchina di Turing che esegue la semplice somma di due semplici numeri romani.

q	σ	$\delta(q,\sigma)$
q_0	$\triangleright$	$(q_0, \triangleright, R)$
q_0	I	(q_0, I, R)
q_0	$+$	(q_1, I, R)
q_1	I	(q_1, I, R)
q_1	$\#$	$(q_2, \#, L)$
q_2	I	$(h, \#, -)$

$(q_0, \underline{\triangleright} II + III) \longrightarrow (q_0, \triangleright \underline{I} I + III) \longrightarrow (q_0, \triangleright I \underline{I} + III) \longrightarrow$
$(q_0, \triangleright II \ \underline{+}\ III) \longrightarrow (q_1, \triangleright III \underline{I} III) \longrightarrow (q_1, \triangleright IIII \underline{I} II) \longrightarrow$
$(q_1, \triangleright IIIII \underline{I}) \longrightarrow (q_1, \triangleright IIIIII \underline{\#}) \longrightarrow (q_2, \triangleright IIIIII \underline{I}) \longrightarrow$
$(h, \triangleright IIIII)$

Esempio Macchina di Turing che verifica se una stringa di lettere a, b è palindroma o no.

q	σ	$\delta(q,\sigma)$
q_0	$\triangleright$	$(q_0, \triangleright, R)$
q_0	a	$(q_A, \triangleright, R)$
q_0	b	$(q_B, \triangleright, R)$
q_0	$\#$	$(h, \#, -)$
q_A	a/b	$(q_A, a/b, R)$
q_A	$\#$	$(q_{A'}, \#, L)$
$q_{A'}$	a	$(q_R, \#, L)$
q_B	a/b	$(q_B, a/b, R)$
q_B	$\#$	$(q_{B'}, \#, L)$
$q_{B'}$	a	$(q_R, \#, L)$
q_R	a/b	$(q_R, a/b, R)$
q_R	$\triangleright$	$(q_0, \triangleright, R)$

$(q_0, \underline{\triangleright} abba) \longrightarrow (q_0, \triangleright \underline{a} bba) \longrightarrow (q_A, \triangleright \triangleright \underline{b} ba) \longrightarrow$
$(q_A, \triangleright \triangleright b \underline{b} a) \longrightarrow (q_A, \triangleright \triangleright bb \underline{a}) \longrightarrow (q_A, \triangleright \triangleright bba \underline{\#}) \longrightarrow$
$(q_{A'}, \triangleright \triangleright bb \underline{a}) \longrightarrow (q_R, \triangleright \triangleright b \underline{b}) \longrightarrow (q_R, \triangleright \triangleright \underline{b} b) \longrightarrow (q_R, \triangleright \underline{\triangleright} bb)$
$\longrightarrow (q_0, \triangleright \triangleright \underline{b} b) \longrightarrow (q_B, \triangleright \triangleright \triangleright \underline{b}) \longrightarrow (q_B, \triangleright \triangleright \triangleright b \underline{\#}) \longrightarrow$
$(q_{B'}, \triangleright \triangleright \triangleright \underline{b}) \longrightarrow (q_R, \triangleright \triangleright \underline{\triangleright}) \longrightarrow (h, \triangleright \triangleright \triangleright)$

1.4 Linguaggi di Programmazione

Un primo formalismo di algoritmo, come abbiamo visto, è la **macchina di Turing**: attenendosi alle richieste di tempo e spazio arbitrariamente grandi ma finiti, risolve un **problema**.
Un secondo formalismo sono i **linguaggi di programmazione**.

1.4.1 Sintassi

Sintassi astratta Definiamo la **sintassi** dello scheletro di un semplice linguaggio di programmazione imperativo.
Una **sintassi astratta** è una sintassi non concreta, cioè che non tiene conto di alcune cose come la procedenza tra gli operatori.
Sintassi

Expr → E ::= x | n | E + E | E · E | E - E

Bexpr → B ::= tt | ff | E < E | ¬B | B ∨ B

Comm → C ::= skip | x = E | C;C | if B then C else C | for i = E to E do C | while B do C

Abbiamo una serie di insiemi da definire ulteriormente

x ∈ Var, l'insieme delle **variabili**

n ∈ N, **numeri naturali**.

Abbiamo anche la **memoria** per poter **assegnare ad una variabile il suo significato**

σ : Var $\rightarrow_{fin} N$
Si dice "a dominio finito", indicata dal fin sotto la freccia, per indicare che il dominio Var ha cardinalità finita.
Var dominio è quindi un sottoinsieme di Var insieme delle variabili che sarebbe infinito.
La memoria si può aggiornare, diventando $\sigma' = \sigma[\mathrm{x} \mapsto \mathrm{n}]$.
Ad esempio, $\sigma'(y) = \mathrm{n}$ se y = x, altrimenti $\sigma'(y) = \sigma(y)$

1.4.2 Funzioni di Valutazione

Inoltre, per valutare le espressioni generate dalla grammatica, servono delle **funzioni di valutazione**. Esse **trovano il significato di ogni espressione**

Funzione di valutazione delle espressioni
$\mathscr{E} : \text{Expr} \times (\text{Var} \to N) \to N$
La sua **semantica denotazionale** è la seguente

$$\mathscr{E}[\text{x}]_\sigma = \sigma(\text{x}) \qquad \mathscr{E}[\text{E}_1 \pm \text{E}_2]_\sigma = \mathscr{E}[\text{E}_1]_\sigma \pm \mathscr{E}[\text{E}_2]_\sigma$$
$$\mathscr{E}[\text{n}]_\sigma = \text{n}$$

Importante notare come gli operatori $+, -, \cdot$ *dentro* le espressioni siano dei **semplici token denotazionali**, mentre sono gli operatori *valutati* ad eseguire il vero e proprio calcolo. Per chiarire questo aspetto, facciamo un esempio. Valutiamo con la nostra funzione $\mathscr{E}[\text{E}_1 + \text{E}_2]_\sigma = \mathscr{E}[\text{E}_1]_\sigma$ *più* $\mathscr{E}[\text{E}_2]_\sigma$. Se non definiamo l'operatore "*più*", allora se poniamo $\sigma(\text{x}) = 25$ la valutazione

$$\mathscr{E}[3 + \text{x}]_\sigma = \mathscr{E}[3]_\sigma \textit{ più } \mathscr{E}[\text{x}]_\sigma = 3 \textit{ più } 25 = 42$$

è corretta quanto

$$\mathscr{E}[3 + \text{x}]_\sigma = \mathscr{E}[3]_\sigma \textit{ più } \mathscr{E}[\text{x}]_\sigma = 3 \textit{ più } 25 = 28$$

Ovviamente utilizzeremo la valutazione specificata in precedenza e gli operatori aritmetici assumeranno il loro significato standard.
L'unica eccezione è l'operatore $-$, che nel nostro caso sarà il **meno limitato** dal simbolo $\dot{-}$, la cui unica differenza è che non può dare un risultato inferiore a 0. Ad esempio, $5 \dot{-} 7 = 0$

Funzione di valutazione di espressioni booleane
$\mathscr{B} : \text{Bexpr} \times (\text{Var} \to N) \to \{\text{tt}, \text{ff}\}$
La cui **semantica denotazionale** è la seguente

$$\mathscr{B}[\text{tt}]_\sigma = \text{tt} \qquad \mathscr{B}[\neg \text{B}]_\sigma = \neg \mathscr{B}[\text{B}]_\sigma$$
$$\mathscr{B}[\text{ff}]_\sigma = \text{ff}$$
$$\mathscr{B}[\text{E}_1 < \text{E}_2]_\sigma = \mathscr{E}[\text{E}_1]_\sigma < \mathscr{E}[\text{E}_2]_\sigma \qquad \mathscr{B}[\text{B}_1 \vee \text{B}_2]_\sigma = \mathscr{B}[\text{B}_1]_\sigma \vee \mathscr{B}[\text{B}_2]_\sigma$$

Anche qua vale il medesimo discorso sulla definizione sugli effettivi operatori.

1.4.3 Semantica Operazione Strutturale

Structural Operationale Semantics Metodo attraverso il quale viene fornita la semantica dei comandi. Parte da un **insieme di configurazioni** Γ

$$\Gamma = \{(\text{C}, \sigma) \mid \text{FV(C)} \subset \text{dom}(\sigma)\} \cup \{\sigma\}$$

dove FV(C) sono le **variabili del programma** e con $\text{FV(C)} \subset \text{dom}(\sigma)$ si richiede che tutte le variabili del programma abbiano un valore nella memoria fornita. Si fa l'unione con la sola memoria σ perché la situazione finale è $(\ , \sigma)$ che, analogamente allo stato fittizio h nella macchina di Turing, segnala la fine dell'esecuzione. Inoltre si hanno le **transizioni** $\to$

$$\to \subset \Gamma \times \Gamma$$

Definiamo quindi un **insieme di transizioni** $(\Gamma, \to)$ tramite delle **regole di inferenza** del tipo $\frac{premesse}{conclusione}$. In assenza di premesse, $-$, la regola di inferenza si dice **assioma**.

$$\frac{-}{(skip, \sigma) \to \sigma} \qquad \frac{-}{(if\ B\ then\ C_1\ else\ C_2, \sigma) \to (C_1, \sigma)} \mathscr{B}[B]_\sigma = tt$$

$$\frac{-}{(x = E, \sigma) \to \sigma[x \mapsto n]} \mathscr{E}[E]_\sigma = n \qquad \frac{-}{(if\ B\ then\ C_1\ else\ C_2, \sigma) \to (C_2, \sigma)} \mathscr{B}[B]_\sigma = ff$$

$$\frac{(C_1, \sigma) \to (C_1', \sigma')}{(C_1; C_2, \sigma) \to (C_1'; C_2, \sigma')} \qquad \frac{-}{(for\ i = E_1\ to\ E_2\ do\ C, \sigma) \to \sigma} \mathscr{B}[E_2 < E_1]_\sigma = tt$$

$$\frac{-}{(for\ i = E_1\ to\ E_2\ do\ C, \sigma) \to (i = n_1;\ C;\ for\ i = n_1 + 1\ to\ n_2\ do\ C, \sigma)} \mathscr{B}[E_2 < E_1]_\sigma = ff \wedge [E_1]_\sigma = n_1 \wedge [E_2]_\sigma = n_2$$

$$\frac{-}{(while\ B\ do\ C, \sigma) \to (if\ B\ then\ C;\ while\ B\ do\ C, \sigma)}$$

1.5 Calcolabilità

1.5.1 T-Calcolabile

Dati Σ alfabeto della macchina, Σ_0 alfabeto di input e Σ_1 alfabeto di output, con $\#, \triangleright \notin \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \subset \Sigma$

$$\text{M=(Q, } \Sigma, \delta, \text{ q}_0\text{) calcola } f : \Sigma_0^* \longrightarrow \Sigma_1^* \Leftrightarrow (\forall w \in \Sigma_0^* \wedge f(w) = x \Rightarrow M(w) \to_{fin} (\text{h}, \triangleright \text{z}))$$

Si dice che la **funzione** f è **T-Calcolabile**.
Cioè, esiste una macchina di Turing che per ogni stringa finita in input arriva, con un numero finito di passi, all'arresto lasciando sul nastro la stringa di output corretta. Notare come non viene data nessuna interpretazione al risultato della f.

1.5.2 `while`-Calcolabile

$$\text{C calcola } f : \text{Var} \to N \Leftrightarrow (\forall\ \sigma : \text{Var} \to N \wedge f(x) = n \Rightarrow \text{C}(\sigma) \to_{fin} \sigma' \wedge \sigma'(x) = n)$$

Si dice che la funzione f è **`while`-Calcolabile**.
Cioè esiste un programma C che calcola il risultato corretto in un numero finito di passi.

Invariante Tutti i risultati visti fin'ora **sono invarianti rispetto al modello dei dati**, e questo vale anche per la T-Calcolabilità e la `while`-Calcolabilità.
In particolare, se ho i dati in un formato A allora posso codificarli nel formato B in cui opera la macchina, calcolare il risultato in formato B e decoficarlo nel formato A di partenza. Questo vale se **le codifiche sono funzioni biunivoche e "*facili*"**. Vedremo cosa significa essere "facili", ma per adesso basti pensare ad un numero finito di passi e che terminano sempre.

1.5.3 Esempio di codifica

	0	1	2	3	4	5
0	0	2	5	9	14	
1	1	4	8	13		
2	3	7	12			
3	6	11	...			
4	10	16				
5	15					

Codifica a coda di rondine

Codifica $(x,\ y) \mapsto \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2 + 3x + y)$
Es. $(3,\ 1) \mapsto \frac{1}{2}(9 + 6 + 1 + 9 + 1) = \frac{26}{2} = 13$

Decodifica $n \mapsto (n - \frac{1}{2}k(k+1),\ k - (n - \frac{1}{2}k(k+1)))$
con $k = \lfloor \frac{1}{2}(\sqrt{1 + 8n} - 1) \rfloor$

Es $8 \mapsto (8 - 6,\ 6 - 8 + 3) = (2,\ 1)$
$k = \lfloor \frac{1}{2}\sqrt{1 + 8 \cdot 8} - 1 \rfloor = 3$
$\frac{k(k+1)}{2} = 6$

1.6 Notazione

Una **funzione** f è $\subset$ A $\times$ B, con A spazio di partenza e B codominio. Quindi $f(a) = b$ si può esprimere anche con (a, b) $\in f$, con a $\in$ A e b $\in$ B.

$f(a) = b \wedge f(a) = c \Rightarrow b = c$

Considereremo **funzioni parziali**, cioè funzioni con A contenente punti dove f non è definita. Non è quindi detto che $\forall$ a $\in$ A $\exists$ b $\in$ B $\mid f(a) = b$

f **converge** su a, cioè $f(a)\downarrow \Leftrightarrow \exists\, b \mid f(a) = b$

f **diverge** su a, cioè $f(a)\uparrow \Leftrightarrow \nexists\, b \mid f(a) = b$

Dominio di f: $dom(f) = \{a \mid f(a)\downarrow\}$

Immagine di f: $imm(f) = \{b \mid \exists\, a \in A \Rightarrow f(a) = b\}$

Rapporto tra algoritmi A e funzioni f f è un **insieme potenzialmente infinito di coppie**, ma non posso assegnare due f diverse allo stesso insieme, mentre esistono tanti algoritmi diversi che calcolano la stessa funzione. Ad esempio, $f = \emptyset$ è calcolata da `while(true) do skip` ma anche da `while(true) do skip;skip`.

1. Quali sono le funzioni calcolabili?
   Nelle ipotesi iniziali di definizione di algoritmo, per adesso conosciamo le T-Calcolabili e le `while`-Calcolabili.

2. Quali proprietà hanno?
   Posso combinarle?

3. Esistono funzioni non calcolabili?

4. Sono interessanti?
   Esistono a prescindere dalla macchina?

Algoritmi e calcolabilità Per ora abbiamo definito gli algoritmi in base al loro comportamento, sotto forma di **configurazioni che si susseguono** del tipo (istr. corrente + ..., memoria). Abbiamo anche diversi modi di affrontare la calcolabilità:

1. **Hardware**, con la macchina di Turing
   Questo è uno dei primi esempio di calcolo, è semplice da capire e si descrivono direttamente macchina che eseguono gli algoritmi. Uno dei primi approcci allo studio della complessità.
   Cambio programma → Cambio macchina

2. **Software**
   Ho l'interprete, cioè la semantica, fissi. Se cambio il programma non devo cambiare la macchina

   (a) Programmi `while`
   Base della programmazione iterativa, dalla semantica operazionale e anch'essi usati per lo studio della complessità

   (b) Funzioni ricorsive
   Base della programmazione funzionale

1.7 Funzioni ricorsive primitive

Per formalizzare i vari modi con cui possiamo esprimere le funzioni, usiamo quella che si chiama **λ-notazione**. Queste espressioni individuano gli argomenti all'interno di un'espressione che descrive una funzione, scritta seguendo un'opportuna sintassi.

$$\lambda < \textit{variabili} > . < \textit{espressione} >$$

Esempio $\lambda\, x,\, y.expr$
Gli **argomenti** dell'espressione *expr* sono x, y. Si dice anche che x, y **appaiono legate da** λ **in *expr***.
Invece un qualsiasi altro simbolo di variabile w in *expr* **non è da considerarsi argomento** dell'espressione, e viene definito **libero** in *expr*.
Altri **esempi** per evidenziare la **notazione**:

$\lambda\, y.x + y$

$\lambda\, x \lambda\, y.x + y$ che può essere riscritta come $\lambda\, x,\, y.x + y$ ed equivale a dire $somma(x, y) = x + y$ dando così il nome *somma* alla funzione.

$\lambda\, x_1, x_2, \ldots, x_n.expr$ riscritta come $\lambda\, \overrightarrow{x}.expr$

1.7.1 Classe C

La classe C delle **funzioni ricorsive primitive** è la **minima classe** di funzioni che obbediscono alle seguenti regole di inferenza, regole di sintassi per definire le funzioni.
Casi base

Zero: $\lambda \overrightarrow{x}.0$
Prende un vettore di argomenti e restituisce 0.

Successore: $\lambda x.x + 1$
Prende un valore e restituisce il suo successore.

Proiezione/Identità: $\lambda \overrightarrow{x}.x_i$
$\overrightarrow{x} = x_1, \ldots, x_n$, $1 \leq i \leq n$

Casi iterativi

Composizione
$g_1, \ldots, g_n \in C$ con k argomenti ("a k posti") e
$h \in C$ a n posti
$\Rightarrow \lambda x_1, \ldots, x_n.h(g_1(\overrightarrow{x}), \ldots, g_n(\overrightarrow{x})) \in C$

Ricorsione primitiva
$h \in C$ a $n + 1$ posti e
$g \in C$ a $n - 1$ posti
$$\Rightarrow \begin{cases} f(0, x_2, \ldots, x_n) = g(x_2, \ldots, x_n) \\ f(x_1 + 1, x_2, \ldots, x_n) = h(x_1, f(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

$f \in C \Leftrightarrow$ esiste una successione $f_0, \ldots, f_n = f \mid \forall f_1$ è ottenuto con i casi base oppure f_i è ottenuto con i casi iterativi da f_j con $j < i$

Esempio Esempio di funzioni ricorsive
$f_1 = \lambda x.x$
$f_2 = \lambda x.x + 1$
$f_3 = \lambda x_1, x_2, x_3.x_2$
$f_4 = f_2(f_3(x_1, x_2, x_3))$
$\begin{cases} f_5(0, x_2) = f_1(x_2) \\ f_5(x_1 + 1, x_2) = f_4(x_1, f_5(x_1, x_2), x_2) \end{cases}$

Proviamo a calcolare $f_5(2, 3) =$

Regola di valutazione interna-sinistra: valuto per primo quello che sta dentro i parametri partendo da sinistra.
$= f_5(1 + 1, 3) =$
$= f_4(1, f_5(1, 3), 3) =$
$= f_4(1, \overline{f_4(0, \overline{f_5(0, 3)}, 3)}, 3) =$
$= f_4(1, f_4(0, \overline{f_1(3)}, 3), 3) =$
$= f_4(1, \overline{f_4(0, 3, 3)}, 3) =$
$= f_4(1, \overline{f_2(f_3(0, 3, 3))}, 3) =$
$= f_4(1, \overline{f_2(3)}, 3) =$
$= \overline{f_4(1, 4, 3)} =$
$= \overline{f_2(f_3(1, 4, 3))} =$
$= \overline{f_2(4)} =$
$= \overline{5}$

Vediamo cosa succede con una **regola di valutazione esterna**: $f_5(2, 3) =$
$= \overline{f_4(1, f_5(1, 3), 3)} =$
$= \overline{f_2(f_3(1, f_5(1, 3), 3))} =$
$= \overline{f_3(1, f_5(1, 3), 3)} + 1 =$
$= \overline{f_5(1, 3)} + 1 =$
$= \overline{f_4(0, f_5}(0, 3), 3) + 1 =$
$= \overline{f_2(f_3(0, f_5(0, 3), 3)} + 1 =$
$= \overline{f_3(0, f_5(0, 3), 3)} + 1 + 1 =$
$= \overline{f_5(0, 3)} + 2 =$
$= \overline{f_1(3)} + 2 =$
$= \overline{3 + 2} =$
$= 5$

Meno Limitato Non ritorna mai numeri negativi, ma 0.
$f_7(x, y) = y$

$f_8(x, y) = x$

$\begin{cases} pred(0) = 0 \\ pred(x + 1) = f_8(x, pred(x)) \end{cases}$

$f_9(x, y, z) = pred(f_3(x, y, z)$

$\begin{cases} f_{10}(0, y) = f_1(y) \\ f_{10}(x + 1, y) = f_9(x, f_{10}(x, y), y) \end{cases}$

$\Rightarrow x \dot{-} y = f_{10}(f_7(x, y), f_8(x, y))$

Somma Non è altro che generalizzazione del successore, applico il successore tante volte quante servono.

$\begin{cases} 0 + y = y \\ (x + 1) + y = (x + y) + 1 \end{cases}$

Prodotto Sfrutto la somma

$\begin{cases} 0 * y = 0 \\ (x + 1) * y = (x * y) + y) \end{cases}$

Potenza Generalizza il prodotto

$\begin{cases} x^0 = 1 \\ x^{y+1} = (x^y) * x \end{cases}$

C'è un modo per generalizzare la potenza? $\Rightarrow$ **Ackerman**.

Relazione Diciamo che la relazione $R(x_1, \ldots, x_n) \subset N^n$ è **ricorsiva primitiva** se lo è la sua **funzione caratteristica** χ_R definita come
$\chi_R(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & se\ (x_1, \ldots, x_n) \in R \\ 0 & se\ (x_1, \ldots, x_n) \notin R \end{cases}$

Quindi se χ_R è ricorsiva primitiva allora anche R è ricorsiva primitiva.

Esempio $P = \{\ n \in N \mid n$ è un numero primo$\}$ è ricorsiva primitiva. Questo per il teorema di fattorizzazione unica.
$\forall x \in N\ \exists$ numero finito di esponenti $x_1 \neq 0 \mid x = p_0^{x_1} \cdot p_1^{x_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{x_n}$
Come trovare tali esponenti con f ricorsiva primitiva.
M = (Q, Σ, δ, q_0)
Q = {q_0, …, q_k), Σ = {σ_0, …, σ_n)
Kurt Gödel: rappresentare algoritmi come numeri: **Gödelizzazione** data macchina di turing M trovo i che è il suo numero di Gödel.

1.7.2 Funzione di Ackermann

La funzione di Ackermann **non è definibile** mediante gli schemi di ricorsione primitiva definiti in precedenze, ma è totale ed ha una definizione intuitivamente accettabilissima.

$A(0,0,y) = y$

$A(0,x+1,y) = A(0,x,y)+1$

$A(1,0,y) = 0$

$A(z+2,0,y) = 1$

$A(z+1,x+1,y) = A(z,A(z+1,x,y),y)$ **doppia ricorsione**

La **doppia ricorsione** presente non è un problema: tutti i valori su cui si ricorre decrescono, quindi i valori di $A(z,x,y)$ sono definiti in termini di un numero finito di valori della funzione A. Quindi intuitivamente A è calcolabile. Inoltre **cresce più rapidamente di ogni funzione ricorsiva primitiva** ma **non è ricorsiva primitiva**.
Ma cosa calcola? Una sorta di esponenziale generalizzato, infatti:

$A(0,x,y) = y + x$

$A(1,x,y) = y * x$

$A(2,x,y) = y^x$

$A(3,x,y) = y^{\{y^{\cdots^{y}}\}\ x\ volte}$

1.7.3 Realizzazione

Con il linguaggio-`while` e il linguaggio-`for` posso riprodurre i casi base della ricorsione. In particolare, per ogni programma `for` esiste una funzione ricorsiva primitiva e viceversa.

Un programma che calcola lo 0 è un programma che legge gli ingressi e scrive 0 in uscita.

Il successore lo realizzo con un assegnamento uscita = ingresso +1

La proiezione consiste nel leggere in memoria la variabile x_i cercata e metterla in uscita

Realizzo h tale che $h(g_1(x,y,z), g_2(x,y,z))$, con programma p_1 associato a g_1, p_2 associato a g_2 e p_3 associato a h.
Il programma che realizza la composizione sarà quindi $p_1;p_2;p_3$.

Per la ricorsione primitiva $\begin{cases} f(0,y) = g(y) \to p_1 \\ f(x+1,y) = h(x,f(x,y),y) \to p_2 \end{cases}$ che dopo qualche passaggio abbiamo visto che $f(x+1,y) = h(x,f(x,y),y) = h(x,h(x+1,f(x+1,y)),y)$. Associando p_1 a g e p_2 a h, lo realizzo con il programma-`for`

```
t1 = g(y);
for (i = 1 to x + 1):
        t1 = g(i, t1, y);
end
```

Per la **funzione caratteristica** $\chi_I(n) = \begin{cases} 1 & n \in I \\ 0 & altrimenti \end{cases}$

1.8 Diagonalizzazione

Esiste un formalismo che esprime tutte e sole le funzioni totali calcolabili? No
Dobbiamo necessariamente avere a che fare con funzioni parziali, ma perché "no"?
Qualunque formalismo o esprime solo funzioni totali ma non tutte, oppure esprime anche funzioni parziali. La dimostrazione è fondamentale per la teoria della calcolabilità: prende il nome di **diagonalizzazione**.

Dimostazione Fissiamo il formalismo delle funzioni ricorsive primitive, posso prendere l'algoritmo di Gödel per numerarle. Quindi avrò f_0, f_1, ..., f_n, ...
Definisco $g(n) = f_n(n) + 1$ (*diagonalizzazione* viene da usare lo stesso indice per indice e parametro).
Se g è una ricorsiva primitiva, allora è numerabile. Diciamo che g ha come numero i: $f_i(n) = g(n) = f_n(n) + 1$
Se diagonalizzo avrò $f_i(i) = g(i) = f_i(i) + 1$ ma **non può essere** che $f_i(i) = f_i(i) + 1$
$\Rightarrow g$ non è ricorsiva primitiva.

Se io prendo le funzioni parziali, posso applicare lo stesso ragionamento?
$\phi(x) = \psi_x(x) + 1$
Diciamo come prima che $\phi(x)$ ha indice i, quindi $\psi_i(x) = \phi(x) = \psi_x(x) + 1$
Se $\psi_i(x)$ diverge, allora $\psi_x(x)$ diverge e anche $\psi_x(x) + 1$ diverge, quindi sono uguali. Non si applica il ragionamento della diagonalizzazione nel caso delle funzioni parziali.

1.9 μ-ricorsive

Minima classe $\mathscr{R}$ che, allo schema fino alla ricorsione primitiva, si aggiunge:

Minimizzazione $\phi(\overrightarrow{x}, y) \in \mathscr{R}$
$\psi(\overrightarrow{x}) = \mu y.[\phi(\overrightarrow{x}, y) = 0 \wedge \forall z < y \mid \phi(\overrightarrow{x}, z) \downarrow]$
$\mu x.[I]$ è il minimo elemento di I insieme.

Cosa significa? Data una funzione appartenente a $\mathscr{R}$ (che ovviamente può essere una ricorsiva primitiva), la vado a calcolare sugli argomenti $\overrightarrow{x}$ della ψ e su una certa y. Se vale 0, il risultato è y, altrimenti **deve** convergere e vado avanti incrementando y di 1 e ricalcolando fino a che non trovo un risultato pari a 0.
Quindi le μ-ricorsive definiscono anche funzioni non totali, al contrario delle ricorsive primitive che definiscono solo funzioni totali.

Esempio $\phi(x, y) = 42$ è costante, quindi ricorsiva primitiva, quindi anche μ-ricorsiva.
$\psi(x) = \mu y.[\phi(x, y) = 42]$ ovunque indefinita perché non tornerà mai 0 quindi $\nexists y$.

Quindi **terminazione e non terminazione sono cruciali**.
Se la definisco per casi? Ad esempio $f(x) = \begin{cases} \mu y.[y < g(x) \mid h(x, y) = 0] & se \exists\ tale y \\ 0 & altrimenti \end{cases}$ con g, h ricorsive primitive.
f è ricorsiva primitiva, perché composizione di ricorsive primitive, ed è anche totale, perché converge sempre.
Quindi **se pongo dei limiti al numero di tentativi**, dato da $y < g(x)$, si ricade nelle ricorsive primitive e non ci sono problemi di parzialità.

1.9.1 Notazione

Per ragioni storiche, una relazione $I \subset N^n$ è **ricorsiva** (sinonimo di totale) $\Leftrightarrow$ la sua funzione caratteristica χ_I è **calcolabile totale**.
Inoltre, come già detto, I è ricorsiva primitiva $\Leftrightarrow \chi_I$ è ricorsiva primitiva.

1.10 Tesi di Church-Turing

Le funzioni intuitivamente calcolabili sono tutte e sole le T-calcolabili.
In realtà è un'ipotesi, ma è così forte che viene presa come tesi. Ci permette di non considerare il formalismo con cui formalizziamo gli algoritmi, poiché tutti i formalismi rappresentano la stessa *classe di elementi*. Ci limiteremo a dire algoritmo, Macchia di Turing... indifferentemente, poiché grazie a questa tesi possiamo dire che un algoritmo è equivalente qualsiasi sia il linguaggio in cui è scritto.

1.10.1 Risultati

Indichiamo con ϕ_i è la **funzione calcolata dall'i-esimo algoritmo** M_i

ϕ_i è funzione $\rightarrow$ **semantica**

M_i è algoritmo $\rightarrow$ **sintassi**

Può succedere per $i \neq j$ che $\phi_i = \phi_j$ ma $\mathrm{M}_i \neq \mathrm{M}_j$ (ad esempio `while(true) do skip` e `while(true) do skip;skip`).

$$\text{T-calcolabili} = \texttt{while}\text{-calcolabili} = \mu\text{-calcolabili}$$

D'ora in avanti parliamo solo di funzioni calcolabili, quindi ϕ_i *è* calcolabile.

Tempo di calcolo $\exists$? una funzione calcolabile totale $t(i,n)$ che maggiora il tempo di calcolo di M_i(n)? No. Vediamo come dimostrarlo, introducendo una **diagonalizzazione**.
$t(i,n) = \begin{cases} k & \text{se } M_i(n)\downarrow \text{ in meno di } i \text{ passi} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
Sia T_i la misura **esatta** del tempo di calcolo di M_i. T_i(n) $\leq t(i,n)$ è calcolabile totale e $T_x(x)$ **tempo di calcolo effettivo**, $t(x,x)$ **tempo di calcolo stimato**
$\psi(x) = \begin{cases} \phi_x(x)+1 & \text{se } T_x(x) \leq t(x,x) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
Quindi anche ψ è calcolabile totale. Applico Church-Turing, quindi $\phi_i(i) = \psi(i) = \begin{cases} \phi_i(i)+1 & \text{se } T_i(i) \leq t(i,i) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
Ma siccome ϕ_i è calcolabile totale, non può succedere che, quando termina, sia $\phi_i(i) = \phi_i(i)+1$, **è un assurdo**.
Quindi $t(i,n)$ non è calcolabile totale, di conseguenza **non c'è modo di stimare il tempo di calcolo**.
Per lo stesso motivo non possiamo imporre limiti allo spazio.

Spazio di calcolo $\exists$? una funzione calcolabile totale che dato M_i, x dice quante celle di memoria uno specifico calcolatore C userà per calcolare $\mathrm{M}_i(x)$?
$h(i,x) = \begin{cases} 1 & \text{se } M_i(x)\uparrow \text{ (su } C) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
Sia n la cardinalità di Σ, $m-1$ cardinalità di Q e k il numero di celle di C.
Posso quindi scrivere n^k **stringhe diverse**: il cursore può stare su k posizioni diverse e la macchina in m stati diversi.
Il **numero massimo di configurazioni diverse** (stato con posizione del cursore e stringa su nastro) è $l = n^k \cdot k \cdot m$, con n^k possibilità di nastro scritto, k possibili posizioni del cursore e m stati ($m-1+1$ per lo stato h di **halt**)
Dopo l passi, quindi, la configurazione si ripete necessariamente. Si può dire che **la macchina è in loop**.
Siccome la macchina attraversa un **numero finito di configurazioni superiormente limitato da** l, se la macchina non si è arrestata prima di l passi allora troverò per forza una configurazione già vista in precedenza, che mi porterà in una configurazione già vista e così via. **Quindi non terminerà mai**.
Ho dimostrato che h è calcolabile totale, ma posso scrivere quindi t come nella dimostrazione precedente, ma giungo all'assurdo già visto. **Quindi non posso mettere un limite al nastro.**

I seguenti risultati sono **invarianti rispetto all'enumerazione scelta**.

1.10.2 Teorema 1: Le Funzioni Calcolabili sono tante quante i numeri naturali

Le f calcolabili sono $\#N$. Anche le f calcolabili totali sono $\#N$.
Esistono funzioni *non* calcolabili, molte di più di quelle calcolabili.

Dimostrazione Non sono più di $\#N$ perché posso calcolare le macchine di Turing. Almeno $\#N$ perché posso costruire una macchina che per qualsiasi input lascia un numero naturale sul nastro, quindi di queste ce ne sono almeno quanti sono i numeri naturali.

Quindi indichiamo con ϕ_i la funzione (in generale, parziale) calcolata dall'algoritmo M_i e i **indice della macchina**. Come detto prima, può darsi che per $i \neq j$ sia $\phi_i = \phi_j$ ma sicuramente $\mathrm{M}_i \neq \mathrm{M}_j$.

1.10.3 Teorema 2: Ogni funzione calcolabile ϕ_i ha infiniti (numerabili) indici

Anche detto **padding lemma**.
Non solo, posso costruire un insieme infinito di indici A_i tale che $\forall\, j$ in A_i $\phi_j = \phi_i$ mediante una funzione ricorsiva primitiva.

Dimostrazione Sia M_i un programma `P`. Prendo `P;skip`, poi `P;skip;skip`... metto tanti `;skip` quanti voglio. Posso generare un numero infinito di programmi che calcolano tutti la stessa funzione.

1.10.4 Teorema 3: Forma Normale

Prendendo un qualsiasi algoritmo, posso riscriverlo in una **forma canonica/normale**, che non è per forza migliore ma è una forma specifica e da noi **privilegiata**.
$\exists$ un predicato $T(i,x,y)$ e una funzione $U(y)$ ricorsive primitive calcolabili totali tali che $\forall$ funzione calcolabile i, $x.\phi_i(x) = \mu\mathrm{y}.[U(T(i,x,y))]$
Corollario: tutte le funzioni T-calcolabili sono anche μ-calcolabili. Non solo, ma μy corrisponde al `while`, e T, U a due programmi `for`. Quindi ogni funzione calcolabile può essere ottenuta da due programmi scritti con il linguaggio `for` ed una sola applicazione del linguaggio `while`.

Dimostrazione Devo costruire il predicato T e la funzione U.
$T = (i,x,y)$ è detto **predicato di Kleene** ed è **vero** $\Leftrightarrow$ y **è la codifica di una computazione di** $\mathbf{M}_i(x)$ **terminante**.
Per calcolare, T prende i e recupera M_i. Comincia a scandire i valori y, li decodifica e, uno alla volta dato x ingresso, controlla se il risultato è una computazione terminante. Definisce U in modo che $U(y) = z$, con z risultato della computazione (ciò che rimane sul nastro della MdT corrispondente).
C'è un solo y nelle macchine deterministiche, se c'è.

1.10.5 Teorema 4: Teorema di enumerazione

$\exists\, z$ tale che $\forall\, i$, x $\phi_z(i,x) = \phi_i(x)$. Quindi z è **MdT universale**. z interprete, i è programma.
Fra tutti gli algoritmi, ce ne sono infiniti numerabili in grado di eseguire tutti gli altri algoritmi.

Dimostrazione $\phi_i(x) = \mu y.U(T(i,x,y)$ per il terzo teorema. Quindi $\phi_i(x)$ è un algoritmo, avrà un indice per Church-Turing che indicheremo con z.
Diciamo $\phi_i(x) = \phi_z(i,x) = \mu y.U(T(i,x,y))$ (senza y come argomento perché quantificata, non libera ma legata, una sorta di *variabile di lavoro*). Applico la transitività dell'uguaglianza e ho finito, $\phi_i(x) = \phi_z(i,x)$.

1.11 Macchina di Turing Universale

Ottimo modello per le macchine Von Neumann.

Due insiemi Utili per la rappresentazione
$Q_* = \{q_0, q_1, \ldots\} \not\ni h$, insieme numerabile ma **non è l'insieme degli stati** della MdTU ma è un insieme ausiliario.
$\Sigma_* = \{\sigma_0, \sigma_1, \ldots\} \not\ni L, R, -$ insieme di simboli

Codifica K $K : Q_* \cup \{h\} \cup \Sigma_* \cup \{L, R, -\} \longrightarrow \{|\}^*$
Ognuno degli elementi q_i, σ_i ecc. viene codificato in questo modo.
$h \mapsto |$
$q_i \mapsto |^{i+2}$, con la barra verticale ripetuta $i+2$ volte
$L \mapsto |$, $R \mapsto ||$, $- \mapsto |||$
$\sigma_i \mapsto |^{i+4}$
C'è un problema: $|||||$ è uno stato ($\in Q_*$) o un simbolo ($\in \Sigma_*$)? Vedremo come disambiguare.
Q_* contiene **tutti i possibili stati delle MdT**, e Σ_* contiene **tutti i possibili simboli delle MdT**. Quanto visto fin'ora è ausiliario alla costruzione della MdTU.

Costruzione Prendo una MdT qualunque $M = (Q, \Sigma, \delta, s)$. Ordiniamo gli stati ed i simboli.
$Q = \{q_{i_1}, q_{i_2}, \ldots, q_{i_k}\}$, finito perché gli stati sono finiti.
$\Sigma = \{\sigma_{j_1}, \sigma_{j_2}, \ldots, \sigma_{j_l}\}$.
Con $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ e $j_1 < j_2 < \ldots < j_l$. Con questo abbiamo supposto Q e Σ **totalmente ordinate**.
Considero questo alfabeto: $\{|, c, d, \#, \triangleright\}$ con $|, c, d \notin Q_* \cup \Sigma_*$.
Adesso possiamo codificare le quintuple $\in \delta$. $\delta(q_{i_p}, \sigma_{j_q}) = (q, \sigma, D)$ con D un certo simbolo di direzione $(L, R, -)$.
Come codificarla? Attraverso la seguente stringa

$$s_{p,q} = cK(q_{i_p})cK(\sigma_{j_q})cK(q)cK(\sigma)cK(D)c$$

con c che funge da **separatore**, **tra la codifica di uno stato e la codifica di un simbolo**.
$s_{p,q} = cK(q_{i_p})cK(\sigma_{j_q})cdcdcd$ se $\delta(q_{i_p}, \sigma_{i_q})$ è indefinita

Esempio $\overline{M} = \{\{q_2\}, \{\sigma_1, \sigma_3, \sigma_5\}, \delta, q_2\}$, con $i_1 = 2$, $j_1 = 1$, $j_2 = 3$, $j_3 = 5$

$q_2 \to q_{i_1}$

$\sigma_1 \to \sigma_{j_1}$

$\sigma_3 \to \sigma_{j_2}$

$\sigma_5 \to \sigma_{j_3}$

$\delta(q_2, \sigma_1) = (h, \sigma_5, -) \mapsto s_{1,1} = c|^4c|^5c|c|^9c|^3c$ perché $K(q_2) = |^{2+2}$, $K(\sigma_1) = |^{1+4}$, $K(h) = |$, $K(\sigma_5) = |^{5+4}$, $K(-) = |||$
$\delta(q_2, \sigma_3) = (q_2, \sigma_1, R) \mapsto s_{1,2} = c|^4c|^7c|^4c|^5c|^2c$
$\delta(q_2, \sigma_5)$ non definita $\mapsto s_{1,3} = c|^4c|^9cdcdcdc$

Codifica della macchina ρ Possiamo ora definire una funzione di "*codifica*" (in realtà iniettiva, perché in fase di decodifica possiamo non trovare una M corrispondente) della macchina in esame. (s senza indici è lo stato iniziale)
$\rho(M) = cK(s)cs_{1,1}s_{1_2} \ldots s_{1,l}c \ldots cs_{k,1}s_{k_2} \ldots s_{k,l}c$
Praticamente si mettono "in coda" tutte le codifiche dei δ(stato,simbolo) $\to s_{stato,simbolo}$, separando con c il "cambio" dello stato.
$\rho(M) = c$ <codifica di $s > c$ <codifiche dello stato 1 per simbolo> $c \ldots c$ <codifiche dello stato k per simbolo> c

$\rho(M(w)) = \rho(M)\tau(w)$ con $\tau(\sigma'_0, \ldots, \sigma'_n) = cK(\sigma'_0)cK(\sigma'_1)c \ldots cK(\sigma'_n)c$

Esempio $\rho(\overline{M}) = c|^4c\ c|^4c|^5c|c|^9c|^3c\ c|^4c|^7c|^4c|^5c|^2c\ c|^4c|^9cdcdcdc\ c$

Dato che $\exists\, z \mid \forall\, i, x$ si ha $\phi_z(i, x) = \phi_i(x)$, allora vogliamo che la MdTU si comporta esattamente come $\overline{M}$ quando codifica $\overline{M}$. Quindi

$(s, \trianglerighteq w) \longrightarrow_n^M (h, u\underline{a}v) \Rightarrow (s_U, \trianglerighteq \rho(M)\tau(w)) \longrightarrow_m^U (h, \tau(uav)\underline{\#})$

$(s_U, \trianglerighteq \rho(M)\tau(w)) \longrightarrow_n^U (h, u'a'v')$ dovrebbe succedere che $a' = \#$ e $v' = \epsilon$, ma anche che $u' = \tau(uav)$. Se succede $\Rightarrow (s, \trianglerighteq w) \longrightarrow_m^M (h, uav)$

1.12 Teoremi

1.12.1 Teorema del parametro

$\exists$ s calcolabile, totale, iniettiva $\mid \forall$ i, x, y $\lambda y.\phi_i(x,y) = \phi_{s(i,x)}(y)$
Ottimo strumento per dimostrare diversi risultati. Intuitivamente, il programma $P_{s(x,y)}$ opera su z soltanto mentre P_x opera su y e su z. Quindi y è un **parametro** di P_x.

Dimostrazione Dato i trova M_i, attraverso una funzione ricorsiva primitiva grazie al teorema di codifica.
Scrivi x sul nastro di M_i cioè prepara la configurazione iniziale $(q_0, \trianglerighteq x)$.
Questo è un algoritmo, quindi ha indice per C-T. Diciamo che l'indice è $n = s(i,x)$. s è calcolabile totale, e $\lambda y.\phi_i(x,y) = \phi_{s(i,x)}(y)$ è vera.
Per l'iniettività? Da n genero diversi indici i di macchine che calcolano la stessa funzione. Appena trovo un indice che non avevo già visto e maggiore di quelli già visti, lo uso per porlo come indice della funzione che sto costruendo.

1.12.2 Teorema di Espressività

Un formalismo F è Turing-Equivalente $\Leftrightarrow$

- Ha un algoritmo universale (Teorema di Enumerazione)
- Ha il teorema del parametro

Supponiamo un programma che calcola prodotto con somme successive

```
P := 0;
while y > 0
P := P + w;
y := y - 1;
end
```

Abbiamo sicuramente bisogno della semantica del linguaggio, perché definisce perfettamente l'interprete.
Primo passo dell'interprete: scopre `;` e legge ciò che sta prima e dopo.
`P` non è parametro, quindi scrive sul nastro d'uscita `P := 0;`. Valuta il `while`. `y` è parametro, lo legge e verifica che è maggiore di 0, quindi legge

```
P := P + w;
y := y - 1;
while ...
```

Per valutare dove va il while deve valutare il resto, per valutare il resto (le prime due istr) deve valutare la prima. Scrive in uscita `P := P + w;` e rimane

```
y = y - 1;
while ...
```

Quindi $\sigma(y) = 2$ adesso vale $\sigma'(y) = 1$ quindi diventa

```
while y > 0
P := P + w;
y := y - 1;
```

che valutata la guardia diventa

```
P := P + w;
y := y - 1;
while ...
```

Scrive sul nastro `P := P + w;`
...
Sul nastro c'è `P := 0; P := P + w; P := P + w;`, che è il programma specializzato.

1.12.3 Teorema di Ricorsione/Kleene 2

Operazioni che si possono fare sugli algoritmi che ci lasciano all'interno delle funzioni calcolabili
$\forall\, f$ calcolabile totale $\exists\, n \,|\, \phi_n = \phi_{f(n)}$. Posso trasformare il mio programma in maniera da ottenerne uno perfettamente equivalente. n si dice **punto fisso**.

Dimostrazione Definiamo la seguente funzione calcolabile "diagonale"
$\psi(u,z) = \begin{cases} \phi_{\phi_u(u)}(z) & \text{se } \phi_u(u)\downarrow \\ \textit{indefinita} & \textit{altrimenti} \end{cases}$ ψ è calcolabile, quindi per C-T ha un indice $\psi(u,z) = \phi_{s(i,u)}(z) = \phi_i(u,z)$ e posso applicare il teorema del parametro $= \phi_{d(u)}(z)$ con $d(u) = \lambda u.s(i,u)$ calcolabile totale e iniettiva e indipendente da f.
Ma f è calcolabile totale, quindi anche $f(d(x))$ è calcolabile totale. Quindi ha indice per C-T $= \phi_v(x)$.
Quindi $\phi_{d(v)} = \phi_{\phi_v(v)}$
$d(v) = n$ e d è iniettiva quindi $\phi_n = \phi_{d(v)} = \phi_{\phi_v(v)} = \phi_{f(d(v))} = \phi_{f(n)}$ quindi n è punto fisso.

Dom	f	**Imm**
N	$\lambda x.2x$	$\{2n \mid n \in N\}$
$\{2n \mid n \in N\}$	$\lambda x.\frac{x}{2}$	N

I è ricorsiva primitiva $\Leftrightarrow \chi_i(x) = 1$ se $x \in I$, 0 altriementi è calcolabile totale
A $= \{(i,x,k) \mid \exists\, y,n$ con $(y,n,x < k) \wedge \phi_i(x)\downarrow$ in n passi$\}$. Limita spazio e tempo
B $= \{(i,x,k,z) \mid \exists\, n < k \wedge \phi_i(x) = z$ in n passi$\}$. Anche qua limito il numero di passi, ma non la memoria
$f(i,x)$ rimpiazza k, con f calcolabile totale

1.12.4 Ricorsivamente Enumerabile

I è **ricorsivamente enumerabile** $\Leftrightarrow$ è **dominio di una funzione calcolabile**, cioè $\exists\, i \mid I = dom(\phi_i)$

I è ricorsivo $\Rightarrow$ I è ricorsivamente enumerabile

I, $\overline{I}$ sono ricorsivamente enumerabili, con $\overline{I}$ insieme degli elementi $\notin I$, $\Leftrightarrow$ I, $\overline{I}$ sono ricorsivi

Dim: se I è ricorsivamente enumerabile, allora esiste ϕ_i con domino I, e $\overline{I}$ ricorsivamente enumerabile allora esiste $\phi_{\overline{i}}$.
Per sapere se x sta o non sta in I, faccio un passo di calcolo nella macchina i: se termina allora $x \in I$, altrimenti faccio un passo un passo nella macchina $\overline{i}$ e se termina $x \in \overline{I} \Rightarrow x \notin I$.
Se non terminano, ripeto: faccio un passo in $i\ldots$ finché non termino in una delle due macchine.

Ricorsivamente enumerabile perché vogliamo enumerare i suoi elementi, tirandone fuori uno alla volta.

Teorema di equivalenza fra caratterizzazioni I è ricorsivamente enumerabile $\Leftrightarrow$ $I = \emptyset \vee I = imm(f)$, con f calcolabile totale.

Dim Il primo caso è banale (la funzione caratteristica dà sempre 0, ricorsiva)
$I \neq \emptyset$, $I = dom(\phi_i)$ costruisco la f
Indice di riga tiene traccia del numero di passi
Indice di colonna tiene traccia dell'argomento

	0	1	2	3	4	5
1	0	2	5	9	14	
2	1	4	8	13	18	
3	3	7	12	17		
4	6	11	16			
5	10	15				

Passi:

1. Calcola ϕ_i con la tabella sopra
   1 passo su 0, 2 passi su 0... finché non si arresta.
   Trovo (m,n) per cui $\phi_i(< m,n >)\downarrow$ con $< m,n >$ codifica di (m,n). Chiamo $< m,n >= \overline{n} \in I$ perché appartiene al dominio.

2. Calcola $\phi_i(n)$ per m passi. Termina? Allora $< m,n > \in I$ e $f(< m,n >) = n$.
   Se non termina, $f(< m,n >) = \overline{n}$.
   Per esempio $\phi_i(2)$ per 4 passi. Converge? Se non converge, allora $f(< 4,2 >) = \overline{n}$. Se converge, pongo $f(< 4,2 >) = 2$

1.13 K e Riduzioni

1.13.1 Insieme K

K $= \{x \mid \phi_x(x)\downarrow\}$ insieme degli algoritmi applicati a sé stessi e convergenti.

K ricorsivamente enumerabile? Si.
Prendo l'x-esima macchina, la applico a x e converge $\Rightarrow x \in K$. Quindi K è dominio di una funzione.

K ricorsivo? No.
Dimostrazione Per assurdo, **K** ricorsivo. Allora $\chi_K(x) = \begin{cases} 1 & se\ x \in K \\ 0 & altrimenti \end{cases}$ è calcolabile totale.
Prendiamo $f(x) = \begin{cases} \phi_x(x)+1 & se\ \chi_K(x) = 1 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$ Poiché χ è calcolabile totale, anche f lo è.
Proviamo quindi a cercare il numero di f, ma **non lo troviamo**. Perché poniamo i come indice di f, allora $\phi_i(i) = f(i) = \phi_(i) + 1$ se $i \in K$, ma non può essere. Se $i \notin K$ non può essere $\phi_i(i) = f(i) = 0$ perché $\phi_i(i)\uparrow$

Osservazione **Ricorsivi** $\subset$ **ricorsivi enumerabili** $\subset$ non **ricorsivi enumerabili**

Bootstrapping Cross-compiler: un compilatore scritto in un certo linguaggio L, che compila $L \to A$, con A altro linguaggio. Se L non gira su una determinata macchina, posso applicarlo a sé stesso: produrrà qualcosa scritto in A che prende L e produce A.

$$C_L^{L\to A}(C_L^{L\to A}) = C_A^{L\to A}$$

Qeusto assomiglia alla nostra K.
$K_0 = \{(x,y) \mid \phi_y(x)\downarrow\}$: scrivo un programma che prende un altro programma in input e testa per verificare se termina su un input. Questo è il **problema della fermata** (**halting**), che detto in altri termini: dato x e y, il programma $P_y(x)$ termina?
K_0 non è ricorsivo. Perché $x \in K \Leftrightarrow (x,x) \in K_0$, quindi se K_0 fosse ricorsivo lo sarebbe anche K.

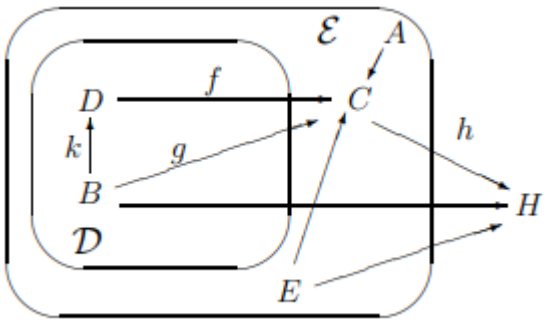
1.13.2 Riduzioni

Riduzione f è una **riduzione** da A a B, si scrive $A \leq_f B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B)$
Proprietà: $A \leq_f B \Leftrightarrow \overline{A} \leq_f \overline{B}$

Famiglia di riduzioni $A \leq_F B \Leftrightarrow \exists\, f \in F \mid A \leq_F B$. Di queste ci interessano quelle che mantengono determinate proprietà.

Classi di problemi $\mathscr{D}, \mathscr{E}$ **classi di problemi** $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{E}$($\subseteq$ ricorsivi), allora $\leq_F$ **classifica** $\mathscr{D}, \mathscr{E} \Leftrightarrow \forall A, B, C$ problemi:

1. $A \leq_F A$
   Cioè l'identità $\in F$
2. $A \leq_F B$, $B \leq_F C \Rightarrow A \leq_F C$
   Cioè $f, g \in F \Rightarrow f(g) \in F$, f chiusa rispetto alla composizione.
3. $A \leq_F B$, $B \in \mathscr{D} \Rightarrow A \in \mathscr{D}$
   Preordine parziale, perché non vale la simmetria.
   Potrebbe $A \leq_F B$, $B \leq_F A$ ma non coincidere
   D è **ideale**, o **chiuso all'ingiù per la riduzione**.
4. $A \leq_F B$, $B \in \mathscr{E} \Rightarrow A \in \mathscr{E}$
   E è **ideale**, o **chiuso all'ingiù per riduzione**.



1.13.3 Problema Arduo

H è $\leq_F$-arduo per $\mathscr{E} \Leftrightarrow \forall A \in \mathscr{E} \quad A \leq_F H$

1.13.4 Problema Completo

C è $\leq_F$-completo per $\mathscr{E} \Leftrightarrow C \leq_F$-arduo e $C \in \mathscr{E}$
Sia $\leq_F$ classifica $\mathscr{D}$ ed $\mathscr{E}$, allora C $\leq_F$-completo per $\mathscr{E}$, C $\subset \mathscr{D} \Leftrightarrow \mathscr{D} = \mathscr{E}$

Per ipotesi, $C \in \mathscr{D}, A \in \mathscr{E}$ allora $A \leq_F C$. Allora, per 3, anche $A \in \mathscr{D}$
Se $A \leq_F$-completo per $\mathscr{E}$, $B \in \mathscr{E}$ e $A \leq_F B \Leftrightarrow B \leq_F$-completo per $\mathscr{E}$. Quindi se un problema completo si riduce ad un altro problema della stessa classe, allora anche quest'altro problema è completo.
Questo perché $\forall D \in \mathscr{E} \Rightarrow D \leq_F A, A \leq_F B$ e per 2 $D \leq_F B$

Se $A \leq_F B$ allora, se la riduzione misura in qualche modo la difficoltà di un problema, A **è al massimo difficile quanto** B e B **è più difficile (o uguale) di** A.
Quindi dovremmo cercare una famiglia di riduzioni che classificano $\mathscr{R}$ (ricorsive) e $\mathscr{RE}$ (ricorsive enumerabili).

1.14 Classificare R ed RE

Definiamo un insieme di funzioni $REC = \{\phi_x \mid dom(\phi_x) = N\}$ come l'**insieme di tutte le funzioni calcolabili**.

$TOT = \{x \mid \phi_x \leq REC\}$

$I \leq_{REC} J \Leftrightarrow \exists\, f \in REC \mid x \in I \Leftrightarrow f(x) \in J$

Per decidere la non appartenenza ad un insieme ricorsivamente enumerabile è necessario un **tempo infinito**.

Th La **relazione di riduzione** $\leq_{REC}$ classifica $\mathscr{R}$ e $\mathscr{RE}$

Dim Sappiamo che $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{RE}$. Allora

1. $id \in REC$, dalla definizione di μ-ricorsiva
2. $f, g \in REC \Rightarrow g(f) \in REC$ perché la composizione conserva la totalità
3. $B \in \mathscr{R} \Rightarrow A = \{x \mid f(x) \in B\} \in \mathscr{R}$
   Per vedere se $A \in \mathscr{R}$ devo vedere se la funzione di A è una funzione caratteristica calcolabile totale
   $\chi_A = \chi_B + f$ che è calcolabile totale perché χ_B è calcolabile totale
4. **idem** per $\mathscr{RE}$ con la funzione semi-caratteristica di B, ϕ_i il cui dominino è B

Il fatto che $\leq_{REC}$ classifichi $\mathscr{R}$ ed $\mathscr{RE}$ può essere visto come la capacità che hanno le funzioni calcolabili totali di **separare i problemi ricorsivi da quelli ricorsivamente enumerabili**: ciò avviene **in base al tempo necessario per decidere un problema**. Se il problema è **ricorsivo**, allora avremo la **risposta in tempo finito**, altrimenti il tempo necessario è infinito.
Inoltre, basta trovare un problema che sia $\leq_{REC}$-completo per $\mathscr{R}$ per poter vedere quali problemi sono decidibili e quali no.
Ancora più interessante è trovare un problema $\leq_{REC}$-completo per $\mathscr{RE}$: sapremmo quali sono i problemi *al più* semi-decidibili e quale nemmeno semi-decidibili. Infatti basta ridurre il problema da studiare a quello completo e sapremo che è ricorsivamente enumerabile, oppure ridurre il problema completo a quello da studiare e sapremo che quest'ultimo, alla meglio, è ricorsivamente enumerabile.
Infatti è chiaro anche che $A \leq_{REC} B$, quindi

B è ricorsivamente enumerabile (B $\in \mathscr{RE}$) $\Rightarrow$ A $\in \mathscr{RE}$ (e forse A $\in \mathscr{R}$)

A $\notin \mathscr{RE} \Rightarrow$ B $\notin \mathscr{RE}$ e sicuramente anche B $\notin \mathscr{R}$

Se A $\in \mathscr{R}$, il fatto che A $\leq_{REC}$ B non ci consente di dedurre niente sulla natura di B, che potrebbe essere ricorsivo o ricorsivamente enumerabile o nemmeno ricorsivamente enumerabile.
Analogamente nel caso di A ricorsivamente enumerabile.

$K \leq_{REC} \overline{K}$? No. Perché $K \leq_{REC} \overline{K} \Leftrightarrow \overline{K} \leq_{REC} K$ e sarebbero entrambi $\mathscr{RE}$ ed è assurdo perché sappiamo che K non è ricorsivo.

Oss K è $\leq_{REC}$-completo per $\mathscr{RE}$, cioè K è $\mathscr{RE}$-completo

Dim $K \in \mathscr{RE}$ ok.
Dimostriamo che $\forall A \in \mathscr{RE} \Rightarrow A \leq_{REC} K$
Questo perché $A \to \exists\ \psi \mid A = dom(\phi_i)$ con ψ calcolabile $\Rightarrow \exists\ \psi'$ calcolabile $\mid \psi'(x,y) = \psi(x)$
$A = dom(\psi) = \{x|\psi(x)\downarrow\} = \{x|\psi'(x,y)\downarrow\}$ e siccome è calcolabile allora ha indice: diciamo i
Quindi $A = \{x \mid \phi_i(x,y)\downarrow\} = \{x \mid \phi_{s(i,x)}(y)\downarrow\} = \{x \mid \phi_{s(i,x)}(s(i,x))\downarrow\}$ con $f(x) = \lambda x.s(i,x)$ e perché y non dipende da $\phi_{s(i,x)}$ e per il teorema del parametro.

Esercizio $K \leq_{REC} TOT$?
Definisco $\psi(x,y) = 1$ se x $\in$ K, indef altrimenti
La condizione $x \in K$ deve essere calcoalbile, così l'intera ψ è calcolabile
ψ calcolabile allora ha indice per C-T $\phi_i(x,y)$ ma se ha indice allora ho il teorema del parametro $\phi_{s(i,x)}(y)$ e posso usare la $f(x) = \lambda x.s(i,x)$ quindi

$$\phi_{f(x)}(y)$$

Vediamo i due casi

$x \in K$, $\forall y \psi(x,y) = 1 \Rightarrow \forall y \phi_{f(x)}(y) = 1 \Rightarrow f(x) \in TOT$ perché $\phi_{f(x)}(y)$ è calcolabile totale e $f(x)$ è indice

$x \notin K$, $\forall y \psi(x,y) =$ indef. $\Rightarrow \forall y \phi_{f(x)}(y) =$ indef. $\Rightarrow f(x) \notin TOT$

I, $x \in I$, $\phi_y = \phi_x \Rightarrow y \in I$ insieme degli indici delle funzioni che calcolano la stessa funzione di ϕ_x
I è un **insieme di indici che rappresentano le funzioni**. Caratterizzo le funzioni attraverso gli algoritmi che le calcolano.

Lemma A è un **insieme di indici che rappresentano funzioni** $A \neq \emptyset$ e $A \neq \mathbb{N}$
$\Leftrightarrow \forall\ x, y$ ho $x \in A \wedge \phi_x = \phi_y \Rightarrow y \in A$
$K \leq_{REC} A$ oppure (non esclusivo, possono essere vere entrambe) $K \leq_{REC} \overline{A}$

Dim i_0 sia l'indice della funzione ovunque indefinita $\phi_{i_0} = \lambda x.$indefinita
$i_0 \in A \vee i_0 \in \overline{A}$, sicuramente in uno dei due perché $A \neq \emptyset$ e $A \neq N$ quindi $\overline{A}$ "*ha spazio*".
Sia $i_0 \in \overline{A}$, dimostro $K \leq_{REC} A$ (viceversa è una dimostrazione analoga) perché sia $i_1 \in A$ allora $\phi_{i_0} \neq \phi_{i_1}$
$\psi(x,y) = \begin{cases} \phi_{i_1}(y) & \text{se } x \in K \\ \phi_{i_0}(y) & \text{altrimenti} \end{cases}$ Calcolabile, per C-T ha indice: quindi, per il ragionamento precedente, $= \phi_{f(x)}(y)$

$x \in K$ allora $\phi_{f(x)}(y) = \phi_{i_1}(y) \Rightarrow$ siccome $i_1 \in A$ insieme di indici che rappresentano funzioni e quindi $f(x) \in A$

$x \notin K$ allora $\phi_{f(x)}(y) = \phi_{i_0}(y) \Rightarrow f(x) \in \overline{A} \Rightarrow f(x) \notin A$

Lemma A è ricorsivo $\Leftrightarrow A = \emptyset \vee A = \mathbb{N}$

1.15 Teorema di Rice

"*Con la sintassi si va poco lontano.*"
Sia $\mathscr{A}$ un insieme di funzioni calcolabili.
L'insieme $A = \{x \mid \phi_x \in \mathscr{A}\}$ è **ricorsivo** $\Leftrightarrow \mathscr{A} = \emptyset$ oppure $\mathscr{A}$ **contiene tutte le funzioni calcolabili**.

Dim Corollario del lemma precedente. Si noti che A è un'insieme di indici, mentre $\mathscr{A}$ è una classe di funzioni.
$A = \emptyset$ allora ok
$A = \mathbb{N}$ allora $\mathscr{A}$ rappresenta tutte le funzioni calcolabili quindi A ricorsivo, altrimenti K si riduce ad A o $\overline{A}$ e si riduce alla dimostrazione di prima.
Si noti che A è un insieme di indici, mentre $\mathscr{A}$ è una **classe di funzioni**: A è **sintassi**, mentre $\mathscr{A}$ è **semantica**.

1.16 Considerazioni

Questo risultato si ripercuote sulle proprietà che si possono dimostrare sui programmi: ogni metodo di prova si scontra con il problema della fermata. Ci sono però varie tecniche per aggirare il problema, ad esempio l'**analisi statica** del codice, dove si analizza il **testo** del programma, per raccogliere informazioni su come vengono usati durante l'esecuzione i vari oggetti (variabili, chiamate...), per esempio se vengono rispettati i tipi, se si inizializzano...
Si ha successo, con questo tipo di analisi, perché il **programma è approssimato in modo sicuro**: ciò che viene predetto è una sovra-approssimazione di ciò che succederà davvero. Per esempio, può succedere di dire che tra i valori assegnati ad una variabile `int` c'è una `String` senza che ciò accada a runtime, ma non capiterà mai di dire che tutti i valori assegnati sono `int` se a runtime a tale variabile viene assegnata una `String`.
A questa famiglia appartengono vari strumenti, spesso incorporati nei compilatori: type-checker, analizzatori data-flow e control-flow...

Applicazione Un'applicazione del teorema di Rice è che $K_1 = \{x \mid dom(\phi_x) \neq \emptyset\}$, cioè l'insieme degli indici delle funzioni definite in almeno un punto **non è ricorsivo**, sebbene sia ricorsivamente enumerabile.
Inoltre K, K_0 e K_1 si riducono l'un l'altro.

Fine della Calcolabilità

Capitolo 2

Complessità

Una volta che abbiamo chiaro *cosa* si può calcolare, ci si può porre il problema del *come* calcolare. Sapendo distinguere il *come* si calcola, riusciamo a distinguere tra loro le varie tecniche di calcolo, quindi a distinguere problemi *facili* da *difficili*.
Primi passi verso una **teoria quantitativa** degli algoritmi. Considereremo solo i problemi decidibili, e parleremo solamente delle risorse di tempo e spazio. Per vederle, modificheremo leggermente le MdT già viste.

Taglia La **taglia** di un problema è il **numero di ingressi** della funzione.

Valutare Avere una f funzione che **valuta asintoticamente l'utilizzo delle risorse**. Studieremo al **caso pessimo**, per semplificazione.

Classi di gerarchia Come si relazionano fra loro? Ce ne sono di particolarmente interessanti, caratterizzate da problemi particolarmente interessanti? Sicuramente abbiamo già sentito parlare della **classe di problemi risolvibili in tempo polinomiale deterministico P** e anche quella dei **problemi risolvibili in tempo polinomiale non deterministico NP**, che sono due classi particolarmente interessanti cercando la loro relazione e le loro proprietà.

$$\mathscr{RE} \supset \mathscr{R} \supset NPSPACE = PSPACE \supseteq \mathscr{NP} \supseteq \mathscr{P} \supseteq Logspace$$

Considerando

> *Logspace*: insieme delle funzioni il cui tempo di calcolo è asintoticamente simile al logaritmo della taglia
>
> *NPSPACE* e *PSPACE* uguali, ma diversi da *Logspace*
>
> Non esiste ancora una dimostrazione di $\mathscr{P} \subseteq \mathscr{NP}$
>
> Per decidere la non appartenenza ad $\mathscr{R}$ basta un tempo finito, ma per decidere la non appartenenza a $\mathscr{RE}$ no.

2.1 Misure di complessità deterministiche

Misure in tempo e spazio per decidere $x \in I$

MdT a k nastri MdT come tutte le altre (Q, Σ, δ, q_0)
La funzione di transizione δ è un po' diversa e h, stato di terminazione, viene diviso in 2: stato **si** (stato di arresto buono) e stato **no** (stato di arresto cattivo), entrambi $\notin$ Q. Operano in **modo sincrono su k nastri**.

Per ciascun simbolo, δ dovrà fornire il nuovo simbolo e spostare sincronamente le testine quindi fornire una direzione: $\delta(q, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k) = (q', (\sigma'_1, D_1), (\sigma'_2, D_2), \ldots, (\sigma'_k, D_k))$
La configurazione iniziale sarà leggermente diversa, quindi: $\gamma = (q_0, u_1\sigma_1 v_1, u_2\sigma_2 v_2, \ldots, u_k\sigma_k v_k)$
Una transizione d'esempio: $(q, u_1\sigma_1 v_1, u_2\sigma_2 v_2, \ldots, u_k\sigma_k v_k) \to (q', u'_1\sigma'_1 v'_1, u'_2\sigma'_2 v'_2, \ldots, u'_k\sigma'_k v'_k)$

Tempo Il tempo di richiesto da M a k nastri per decidere $x \in I$ è $t \Leftrightarrow$ partendo dallo stato iniziale q_0 ho $(q_0, \trianglerighteq x, \trianglerighteq, \ldots, \trianglerighteq) \longrightarrow_M^t (H, w_1, \ldots, w_k)$ con $H \in \{\text{si, no}\}$
Non si può decidere precisamente il numero di passi, ci accontenteremo di una **stima superiore** $f(|(x)|)$, con $|x| =$ taglia(x). Non sapremo come calcolare la taglia in generale, ma deve essere relativamente **facile** farlo: lunghezza di un vettore, dimensione in memoria...
M **decide** I in tempo $f \Leftrightarrow \forall\, x$ il tempo t per decidere $x \in I$ è tale che $t \leq f(\text{taglia}(x))$

TIME(f) $= \{I \mid \exists\, M$ che decide I in tempo deterministico $f\}$

$O(f) = \{g | \exists r \in Rg(n) < r \cdot f(n)\}$ salvo un pezzo iniziale. Cioè la f da un certo punto in poi sta sopra la g.
$\Omega(f)$ è quando la f sta sotto.
$\Theta(f)$ è quando le funzioni crescono allo stesso modo.

2.1.1 Teorema di Riduzione del Numero di Nastri

Teorema Teorema per...
Per ogni M a k nastri che decide I in o(f) deterministica, allora esiste M' a 1 nastro che decide I in $o(f^2)$
Dim: da ${}_k\gamma$ (a k nastri) $\longrightarrow ({}_1q, \triangleright \triangleright' u_1 \overline{\sigma_1} v_1 \triangleleft' \triangleright' u_2 \overline{\sigma_2} v_2 \triangleleft' \ldots \triangleright' u_k \overline{\sigma_k} v_k \triangleleft')$ usando le "parentesi $\triangleright'$ e $\triangleleft'$ per separare i k nastri sul nastro singolo .
$\sigma_i \longrightarrow \overline{\sigma_i}$

1. Sistemare il nastro iniziale: $(q_0, \trianglerighteq \triangleright' x \triangleleft' \triangleright' \triangleleft' \ldots \triangleright' \triangleleft')$
   $2k + \#\Sigma$ nuovi stati
2. Per simulare una mossa di M, M' scorre il nastro da sinistra a destra per scovare i caratteri correnti, quelli sovralineati: avanti e indietro
   Riscorro il nastro per scrivere i nuovi simboli e fissare i nuovi correnti: avanti e indietro.

Non si può usare più spazio che tempo: non si possono vedere più caselle di quanti passi si fanno.
Inoltre per simulare un passo ci vogliono al massimo 4K passi.
Il nastro contiene al massimo $K = k \cdot (2 + f(|x|)) + 1$ con $|x| =$ taglia(x)
2 per le parentesi di ogni nastro, 1 per il respingente iniziale.

M fa $f(|x|)$ passi, M' fa $f(|x|) \cdot 4K$ quindi $f(x) \cdot \not{k} \cdot (\not{2} + f(|x|)) + \not{1})$ con la roba cancellata perché non dipende dall'input ma dalla macchina.
Quindi M fa $o(f)$ mentre M' fa $o(f^2)$

2.1.2 Teorema di Accelerazione Lineare

Teorema Se $I \in \text{TIME}(f(n)) \Rightarrow \forall\, \epsilon \in R_+$ si ha $I \in \text{TIME}(\epsilon \cdot f(n) + n + 2)$
Quindi se ho un algoritmo che decide un problema in tempo deterministico $f(n)$, allora l'algoritmo $\in \text{TIME}(f(n))$ e posso costruirne un altro che lo calcola in tempo deterministico $\epsilon f(n) + n + 2$, questo per ogni ϵ: posso accelerare l'algoritmo **linearmente** quanto voglio.
Quindi se f è $c \cdot n$ posso eliminare c e mettere $\epsilon = \frac{1}{c}$. Questo teorema **consente di usare gli ordini di grandezza per approssimare** senza *fare niente di male.*

Dim Intuizione su come determinare ϵ

1. Condensare un certo numero di caratteri in un carattere
   $\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_m \longrightarrow [\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_m]$, con $[\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_m]$ **unico carattere**.
   Stati codificati in una tripla $[q, \sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_m, k]$ con k che indica la posizione del cursore.

M' in 6 passi simula m passi di M, con M' macchina veloce e M macchina lenta, questo perché partizionando l'input in blocchi di m caratteri i cambiamenti possono essere fatti in blocchi contigui.
M' farà $|x| + 2$ passi per condensare l'input $+ 6 \cdot \left(\frac{f(|x|)}{m}\right)$ passi, quindi posso prendere come $m = \left(\frac{6}{\epsilon}\right)$

Grazie a questi risultati definisco $\mathscr{P}$, la classe dei problemi decidibili in tempo polinomiale deterministico, come

$$\mathscr{P} = \bigcup_{k \geq 1} TIME(|n|^k)$$

Ricapitolando

M richiede tempo t per decidere $I \Leftrightarrow M(x) = (q_0, \triangleright x, \triangleright, \ldots, \triangleright) \rightarrow^t (h, w_1, \ldots, w_k)$ con $h \in \{si, no\}$

M decide I in tempo $f \Leftrightarrow \forall\, x \in I\ M(x) \rightarrow^t (si, w_1, \ldots, w_k)$ cioè M richiede tempo t per deciderlo, con $t \leq f(|x|)$

$\mathbf{TIME}(f) \quad = \{I \mid \exists\, M \text{ che decide } I \text{ in tempo } f\}$
$\mathscr{P} = \bigcup_{k \geq 1} TIME(|n|^k)$

Abbiamo anche scoperto che **non si può usare più spazio che tempo**.

Spazio necessario al calcolo Quantità di celle che il programma utilizza durante l'esecuzione.
Ignoreremo lo spazio utilizzato dal nastro d'ingresso.

2.2 MdT I/O a k nastri

Si tratta di una MdT in cui il **primo nastro contiene l'ingresso** mentre l'**ultimo nastro contiene l'uscita**.

$$\delta(\sigma_1, \ldots, \sigma_k) = (q', (\sigma'_1, D_1), \ldots, (\sigma'_k, D_k))$$

Nastro d'ingresso Ogni δ come sopra deve essere tale che il primo nastro (σ'_1, D_1) sia di **sola lettura** perché è il nastro dell'input.
La **condizione** quindi è che $\sigma'_1 = \sigma_1$ **sempre**, cioè **il nastro di ingresso è di sola lettura**.

Nastro d'uscita Analogamente ci deve essere una condizione sul nastro d'uscita:

$D_k = R$

oppure $D_k = -$ allora $\sigma'_k = \sigma_k$, cioè **nastro d'uscita di sola scrittura**.

Altra condizione Inoltre, bisogna costruire le δ in modo che quando finisco di leggere il nastro d'ingresso, finendo quindi sul carattere bianco #, io debba necessariamente tornare indietro. Altrimenti, anche se non scrivo niente, potrei usare le operazioni di spostamento sui caratteri bianchi per codificare delle operazioni. Quindi

$\sigma_1 = \# \Rightarrow D_1 \in \{L, -\}$

Teorema Collega le MdT a k nastri con le MdT di tipo I/O a $k+2$ nastri
$\forall\, M$ a k nastri che decide I in tempo deterministico $f \Rightarrow \exists\, M'$ a $k+2$ nastri I/O che decide I in tempo $c \cdot f$
La dimostrazione, intuitivamente, consiste per M' nel copiare il nastro d'ingresso sul secondo nastro e, a computazione conclusa ed eseguita come M, copiare il nastro d'uscita sull'ultimo nastro.

2.2.1 Complessità in spazio

M a k nastri di tipo I/O che va $(q_0, \triangleright x, \triangleright, \ldots, \triangleright) \rightarrow^t (h, w_1, \ldots, w_k)$ con $h \in \{si, no\}$ richiederà, come spazio, quello dei nastri di lavoro w_i. Hanno spazio costante, quindi so in principio qual'è. Quindi:

M a k nastri I/O richiede spazio $\sum_{i=2}^{k-1} |w_i| \Leftrightarrow (q_0, \triangleright x, \triangleright, \ldots, \triangleright) \rightarrow^t (h, w_1, \ldots, w_k)$

Ad esempio, per $k = 3$ avrò un unico nastro di lavoro, quindi lo spazio occupato dalla macchina sarà quello del nastro di lavoro (come detto prima, ignoriamo l'occupazione in spazio dei nastri input e output).

M decide I in spazio $f \Leftrightarrow \forall\, x\ M$ richiede spazio$\leq f(|x|)$

SPACE(f) $= \{I \mid \exists\, M$ che decide I in spazio $f\}$

Teorema Posso ridurre linearmente lo spazio.
$I \in \text{SPACE}(f) \Rightarrow \forall\, \epsilon \in R_+\ I \in \text{SPACE}(2 + \epsilon \cdot f(n))$

$$PSPACE = \bigcup_{k \geq 1} SPACE(n^k)$$

$$LogSPACE = \bigcup_{k \geq 1} SPACE(k \cdot \log(n))$$

Teorema $LogSPACE \subseteq \mathscr{P}$

Dim Sia $I \in LogSPACE \Rightarrow \exists\, M$ di tipo I/O...
Quante **configurazioni diverse posso avere sul nastro di lavoro**? Dipende da quanti simboli ho sulla macchina. Poniamo x input e la sua lunghezza $|x| = n$, avrò $\#\Sigma^{\log(n)}$ nastri diversi, cioè il numero di simboli (cardinalità di Σ) alla $\log(n)$. Inoltre posso avere il cursore in $\log(n)$ posizioni diverse in ciascun stato (che sono $\#Q$). Inoltre il cursore sta anche nell'input, in $|x|$ posizioni diverse. Quindi le configurazioni diverse del nastro di lavoro sono

$$n \cdot \log(n) \cdot \#Q \cdot \#\Sigma^{\log(n)}$$

Per dimostrare che $LogSPACE \subseteq \mathscr{P}$ devo trovare k tale che $n \cdot \log(n) \cdot \#Q \cdot \#\Sigma^{\log(n)} \leq n^k$. Applico il log da entrambi i membri

$$\log(n) + \log(\log(n)) + \log(\#Q) + \log(n)\log(\#\Sigma) \leq k \cdot \log(n)$$

Elimino $\log(\log(n))$ perché è molto piccolo, e $\log(\#Q)$ perché è una costante, poi semplifico per $\log(n)$

$$\cancel{\log(n)} + \cancel{\log(n)}\log(\#\Sigma) \leq k \cdot \cancel{\log(n)}$$

$$1 + \log(\#\Sigma) \leq k$$

Quindi basta usare $k \geq \log(\#\Sigma)$.

Come conseguenza, scopriamo che **lo spazio limita il tempo**, perché se passo troppe volte sopra la solita configurazione vado in ciclo.

Ricapitolando MdT a k nastri, eventualmente di tipo I/O. $\forall x$ macchina $M(x) \to^t M$ in una situazione di alt. Riesce perché: **aggiungere nastri**, **avere I/O**, **aumentare la parola** su cui lavorano le macchine (quindi **compattare** simboli) sono tutte **operazioni algoritmicamente effettive**: si possono fare con algoritmi. Ciò fornisce un bel vantaggio.
Però sorge un **problema**: dobbiamo decidere un insieme (quindi risolvere un problema) che **sappiamo essere decidibile** e calcolare una funzione che **sappiamo essere calcolabile**, ma non riusciamo a individuare una struttura matematica e delle proprietà tramite le quali risolverlo *facilmente*.
Per esempio per costruire una macchina che decideva se una data stringa fosse palindroma, **abbiamo sfruttato una proprietà** delle stringa: che essa sia leggibile da destra a sinistra e da sinistra a destra. In questo caso era banale, ma ci sono problemi per cui non conosciamo la struttura e ciò rende la vita difficile.

Esempio

2.2.2 Spazio degli stati

Lo spazo degli stati di una MdT può essere

Generato esplicitamente,

Generato implicitamente, guess & try

2.3 MdT non deterministica

N = (Q, Σ, Δ, q_0) **MdT non deterministica**

Relazione di transizione $\Delta \subseteq (Q \times \Sigma) \times (Q \times \{si, no\} \times \Sigma \times \{Q, L, -\})$
Possono essere presenti più quintuple associate allo stesso stato ed allo stesso simbolo, quindi molte configurazioni $(q', u'\sigma'v')$ raggiungibili da $(q, u\sigma v)$

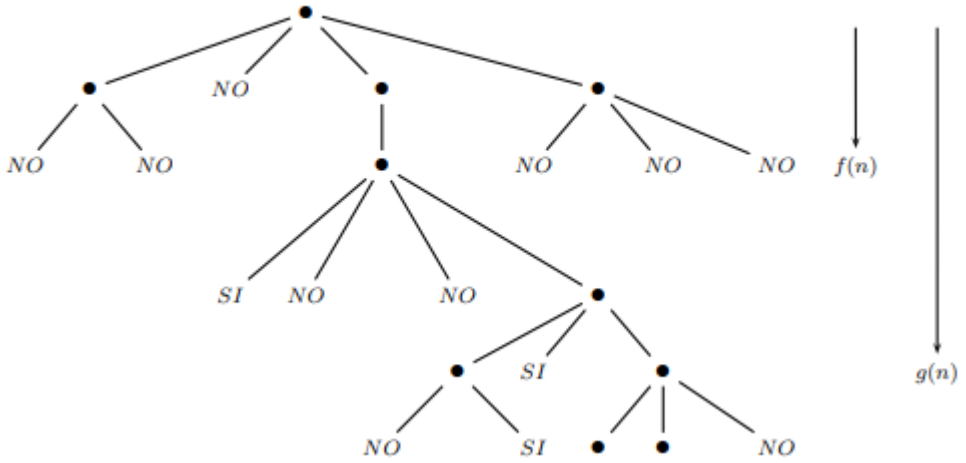
Stato iniziale $\gamma = (q, u\sigma v) \to (q', u'\sigma'v')$

Computazione $M(x) \to \gamma_1 \to \ldots \to \gamma_n$ cioè $M(x) \to^n \gamma_n$

La potenza del non determinismo si vede nel modo in cui si accetta: **basta che ci sia un cammino che porti alla soluzione** perché il problema sia risolto.

DNA Computing Calcolo eseguito ricombinando fra loro sequenze biologiche invece che per passi come da tradizione.

Come decide un problema una macchina non deterministica Di seguito la definizione.
N decide I $\Leftrightarrow \forall\, x \in I \Rightarrow \exists$ computazione $M(x) \to^* (si, w)$
Se $x \in I$ allora e solamente allora deve esistere *almeno una* computazione, un cammino, che accetta x.
Il contrario è che **tutte rifiutino**, allora $x \notin I$



Numerando gli archi di decisione identifico una computazione tramite la successione di numeri. Data una certa σ ho tante quintuple in Δ, le enumero e le ordino in qualche modo. Prendo la n_1 scelta dallo stato iniziale, la n_2 scelta dallo stato risultante...
Nell'esempio, una scelta Si è identificata dalla computazione $(2, 0, 0)$, un'altra da $(2, 0, 3, 1)$.

2.3.1 Misure di complessità non deterministica

Tempo N decide I in **tempo non deterministico** $f(|x|)$ (più semplicemente f) $\Leftrightarrow$

N decide I

$\forall\, x \in I \;\; \exists\, t \mid M(x) \to^t (si, w)$ e $t \leq f(|x|)$

$NTIME(f) = \{I \mid \exists\, N$ che decide I in tempo non deterministico $f\}$
$\mathscr{NP} = \bigcup_{k \geq 1} NTIME(n^k)$

Teorema Se $I \in NTIME(f) \Rightarrow I \in TIME(c^f)$ con $c \geq 1$ che **dipende soltanto dalla macchina** in $TIME(f)$.
In altre parole: se I è deciso da N a k nastri in tempo non deterministico $f(n)$, allora $\exists\, M$ a $k+1$ nastri che decide I in $O(c^{f(x)})$, $c \geq 1$ che dipende solo da N
In altre parole $NTIME(f) \subseteq TIME(c^f)$

Dim Il grado di diramazione massimo, o il **grado di non determinismo**, è

$d = max\{grado(q,\sigma) \mid q \in Q, \sigma \in \Sigma\}$

dove $grado(q,\sigma) = \#\{(q',\sigma',D) \mid ((q,\sigma),(q',\sigma',D)) \in \Delta\}$

Per ogni stato $q \in Q$ e ogni simbolo $\sigma \in \Sigma$ ordino totalmente, ottenendo così che ogni computazione è una sequenza di scelte lunga t, indicabili come una sequenza di t numeri naturali nell'intervallo $[0 \dots d-1]$. Una macchina M che simula N produce una successione di scelte partendo sempre dal principio. Per esempio riproduce la scelta 20300 e magari arriva in uno stato di accettazione. Se ci arriva, bene **ho finito**.
Se non ci arriva prende il prossimo numero $t+1$ in base d, nell'esempio 20301.
Se supera il numero di archi la stringa aumenta di un carattere e faccio 00, 01, 02... poi 10, 11, 12...
Sarà dell'ordine di $d^{f(n)}$ con $c = d$.
Ho una perdita esponenziale. Ma aggiungere il non determinismo non cambia le classi dei problemi.

Spazio N decide I in **spazio non deterministico** $f(|x|)$ (più semplicemente f) $\Leftrightarrow$

N decide I

$\forall\, x \in I \;\; \exists\, w_1, \dots, w_k$ tali che $(q_0, \trianglerighteq x, \dots, \trianglerighteq) \to_N^* (\text{Si}, w_1, \dots, w_k)$ e $\displaystyle\sum_{2 \le i \le k-1} |w_i| \le f(|x|)$

NSPACE(f) = {I | $\exists$ N dcide I in spazio non deterministico f}
$\mathscr{NPSPACE} = \bigcup_{k \ge 1} NSPACE(n^k)$

Teorema di Savich $NPSPACE = PSPACE$

$$LogSpace \subseteq \mathscr{P} \subseteq \mathscr{NP} \subseteq PSPACE + NPSPACE \subset \mathscr{R} \subset \mathscr{RE}$$

$$\mathscr{P} ? \mathscr{NP}$$

Siamo giunti alla conclusione che una MdT non deterministica accetta x in tempo $f \Leftrightarrow \forall\, x \in I \; \exists$ una computazione $N(x) \to^t (\text{Si}, w)$ con $t \le f(|x|)$
Per confutare invece, bisogna che **tutte** le computazioni rifiutano, cioè per rifiutare x bisogna che $\forall$ computazione $N(x) \to^t (\text{No}, w)$ con $t \le f(|x|)$

2.3.2 Commesso Viaggiatore

n città connesse da strade, la distanza fra la città i e la città j è $d(i,j)$. Sulle distanze vale la proprietà riflessiva e la diseguaglianza triangolare.
Le distanze sono rappresentate con le coppie (i,j) che sono $O\left(\frac{n \cdot (n-1)}{2}\right)$. Il problema è trovare un cammino che tocchi le città una ed una sola volta, con costo minimo. Il costo è la somma delle distanze percorse.
Cerchiamo quindi una **permutazione** degli indici i, j in modo tale che la somma delle distanze sia minima. Una permutazione è una bigezione $\Pi : [1,n] \to [1,n]$.
Il nostro costo $\displaystyle\sum_{1 \le i \le n-1} d(i, i+1) \le B$ con $\Pi(h) = i$ e $\Pi(k) = i+1$, cioè i e $i+1$ sono permutazioni di, rispettivamente, un certo h ed un certo k.

Forza Bruta Deterministica

1. **Generare l'intero spazio di ricerca**, cioè tutte le possibile permutazioni esistenti Π come stringhe, che sono nell'ordine di $n! = O(n!)$

2. **Certificazione**: prendere la prima permutazione e verificare se è $\le B$.
   n accessi al nastro d'ingresso, uno per città, e n^2 per vedere la distanza di ciascuna città, quindi $O(n \cdot n^2)$

Esponenziale in tempo ma lineare $O(n)$ in spazio, perché si mantiene una singola permutazione alla volta.
Dire che non esiste soluzione richiede di valutare tutte le permutazioni.

MdT non deterministica

1. Bisogna **scrivere una MdT non deterministica** che generi ad ogni passo un numero tra 1 ed n compresi: abbiamo così una permutazione delle città.
   Con un po' di accorgimenti si evitano stringhe del tipo $111\ldots$, ad esempio scrivendo la MdT in modo che non rigeneri numeri già generati.
2. **Certificazione**: la stringa è una permutazione Π? Si scopre in n passi.
   Dopodiché faccio esattamente la certificazione precedente, per verificare se $\leq B$: tutto ciò si fa in $O(n^3)$ come prima.

2.4 Funzioni di valutazione

Una **funzione di valutazione** potrebbe essere una qualunque funzione calcolabile che dalla dimensione dell'input porti in un numero naturale che indica la valutazione: numero di passi, di moltiplicazioni...
Sappiamo che le classi di complessità formano una gerarchia: ad esempio la classe $TIME(O(n^3))$ cioè i problemi risolvibili in tempo cubico, include propriamente quelli risolvibili in tempo quadratico. Questo lo sappiamo dall'esperienza.
Perché queste funzioni funzionino dobbiamo porre loro dei vincoli: chiameremo queste funzioni
appropriate/oneste/costruibili.
Vincoli:

Monotone crescenti
Significa che se devo risolvere un problema la cui dimensione è maggiore di un altro problema ci devo mettere più tempo che spazio.

$\exists M | \forall x \in \Sigma^*$ si arresta (dando come risultato $\diamond^{f(|x|)}$, $\diamond \notin \Sigma$ carattere speciale, lungo tanti caratteri quanto $f(|x|)$) in tempo $O(f(|x|) + |x|)$ con l'addendo $|x|$ per rendere lineare quando $f(|x|)$ è sub-lineare e spazio $O(f(|x|))$

Esempi: $n^k, \lfloor \log n \rfloor, n!, k^n, \ldots$
Se f, g sono appropriate, anche $f(g)$, f^g, $f \cdot g$, $f + g \ldots$: la classe è chiusa per una serie di operazioni.

2.4.1 Teorema di gerarchia

Data f appropriata, allora (ricordando che $TIME(f(n)) = \{I \mid \exists\, M$ che decide I in tempo $f(n)\}$

$TIME(f(n)) \subsetneq TIME(f(2n+1)^3)$

$SPACE(f(n)) \subsetneq SPACE(f(n) \cdot \log(f(n)))$

La dimostrazione è omessa, si noti che quella del primo punto si basa sulla dimostrazione che il problema $\{x \mid \phi_x(x)$ termina in $f(|x|)$ passi$\}$, che è un pezzetto di K, appartiene a $TIME(f(2n+1)^3)$ ma non a $TIME(f(n))$
Analogamente per le MdT non deterministiche.

Possiamo ora dimostrare la nostra gerarchia, in particolare che $\mathscr{P} \subsetneq EXP = \bigcup_{k \geq 1} TIME(2^{n^k})$

Dim Sappiamo che $\mathscr{P} \subseteq EXP$, cioè $\mathscr{P} \subseteq TIME(2^n)$ perché al crescere di n per qualunque k, $n^k \leq 2^n$
Abbiamo quindi $\mathscr{P} \subseteq TIME(2^n) \subsetneq TIME(f(2^{(2n+1)^3}) \subseteq \bigcup_{k \geq 1} TIME(2^{n^k})$

2.4.2 Qualche assioma

- $SPACE(f(n)) \subseteq NSPACE(f(n))$
- $TIME(f(n)) \subseteq NTIME(f(n))$
- $NSPACE(f(n)) \subseteq TIME(k^{\log n + f(n)})$

Avevamo anche dimostrato che $NTIME(f(n)) \subseteq TIME(c^{f(n))}$ da cui deriva $\mathscr{NP} \subseteq EXP$
Si ricorda quindi anche che

$$LogSpace \subseteq \mathscr{P} \subseteq \mathscr{NP} \subseteq EXP$$

Abbiamo dei motivi per cui non possiamo fare a meno delle funzioni di misura appropriate.

2.4.3 Teorema

Troveremo sempre problemi via via più difficili, cioè la gerarchia non è superiormente limitata.
$\forall\, g$ calcolabile totale $\exists\, I$ problema $\mid I \in TIME(f(n)) \wedge I \notin TIME(g(n))$, con $f > g$ quasi ovunque
Quindi la gerarchia tratta dal teorema di gerarchia continua a crescere senza fermarsi mai.
Con *quasi ovunque* si intende **dappertutto eccetto che in un numero finito di punti**.

2.4.4 Teorema di Accelerazione (Blum)

Il teorema di accelerazione *lineare* diceva che possiamo accelerare *linearmente* la soluzione del problema.
Blum ci dice che **non sempre esiste un algoritmo ottimo** per un problema.

$\forall\, h$ calcolabile totale
$\exists\, I \mid \forall\, M$ che decide I in tempo f $\exists\, M'$ che decide I in tempo $f' \mid f(n) > h(f'(n))$ quasi ovunque

h indica quanto è più veloce M' rispetto a M
Intuitivamente: supponendo di avere una macchina universale lenta, e di ottenere una macchina universale nuova e velocissima, allora avremmo dei programmi che rimangono più veloci sulla macchina vecchia che non sulla nuova.

2.4.5 Teorema della lacuna

$\exists\, f$ calcolabile totale $\mid TIME(f) = TIME(2^f)$
Intuitivamente: c'è un insieme di programmi che sono altrettanto efficienti/veloci su una macchina lenta che su una macchina nuova.
Questo cozza con un risultato del teorema di gerarchia, che arrivava a dire (a grandi linee)
$TIME(f(n)) \subsetneq TIME(f(2n+1)^3)$ perché avrei $TIME(f^2) = TIME(f) \subsetneq TIME(f^3)$, ma quindi avrei una situazione assurda del tipo $A = B < C$, come può essere $A = C$? Ma il teorema di gerarchia vale. Ciò che cambia è che nel teorema della lacuna f non è richiesta appropriata. Questo ci dice che **non possiamo fare a meno delle funzioni di misura appropriate**, o di classi di funzioni con vincoli a come misuriamo il consumo delle risorse in modo che il teorema di gerarchia valga.

2.4.6 Teoria della Complessità Astratta

Si svincola dal tipo di risorsa misurata.
ϕ è misura $\Leftrightarrow$

$\phi(\psi, x)$ converge $\Leftrightarrow \psi(x)$ converge

$\forall\, \psi, x, k$ è decidibile se $\phi(\psi, x) = k$, cioè sapere esattamente il risultato

2.4.7 Tesi di Cook-Karp

- $\mathscr{P}$ sono i problemi **trattabili**

- $\mathscr{NP}$ sono i problemi **intrattabili**

Nel senso che avendo un algoritmo che funziona in tempo polinomiale ($\mathscr{P}$), allora il problema può essere risolto "efficientemente", altrimenti se il problema sta in $\mathscr{NP}$ allora è troppo difficile per essere gestito da un programma.

Sono **robuste**, cioè resistono al cambio di modello. Ponendo M, M' **modelli di calcolo** (quindi MdT, `while`-calcolabili...), allora posso passare da $M \longrightarrow M'$ mediante un polinomio.
Inoltre $\mathscr{P}$ e $\mathscr{NP}$ sono chiusi rispetto alle classiche operazioni ma anche alle riduzioni in sottoclassi dei polinomi. Significa che se riduco il problema $I \leq_F J$, con $F \subseteq$ polinomi e $I \in \mathscr{C} \Rightarrow f(I) = J \in \mathscr{C}$

Ci sono algoritmi esponenziali al caso pessimo, ma efficientissimi nei casi più comuni: ad esempio l'algoritmo del simplesso, la paginazione, l'inferenza dei tipi in ML...
Ma non sempre posso sapere qual è il caso medio di un problema.

2.4.8 Riduzione efficiente

I si riduce efficientemente a $J \Leftrightarrow (x \in I \Leftrightarrow f(x) \in J$ con $f \in$ *logspace*) e si può scrivere $I \leq J$
Otteniamo che $\leq$ classificano *logspace* e una qualunque classe $\mathscr{E} \subset \{\mathscr{P}, \mathscr{NP}, EXP, PSPACE, NPSPACE\}$
Se prendo una $\mathscr{D} \subset \mathscr{E}$, allora $\leq$ classificano $\mathscr{D}$ ed $\mathscr{E}$ (quindi ad esempio $\mathscr{P}$ ed $\mathscr{NP}$)
Dato che *logspace* $\leq \mathscr{P} \Rightarrow \leq_{\mathscr{P}}$ classificano $\mathscr{D}$ ed $\mathscr{E}$. Lo si dimostra così, tramite le proprietà della classificazione di una famiglia di riduzioni:

1. $id \in$ *logspace*, banalmente
2. $f, g \in$ *logspace* $\Rightarrow f(g) \in$ *logspace*
   $f \in$ *logspace* $\Rightarrow \exists\, M$ che opera in *logspace*, analogamente per la g avrò M'. La nuova macchina può considerare l'ultimo nastro di M come nastro di lavoro di M' e calcolare così la composizione delle due. Questa nuova macchina sta in *logspace*? Se prendo ad esempio $f = id$ ho input e output lungo n, e la somma dei nastri di lavoro è n, quindi lineare e non logaritmica. Allora si fa partire M' in modo da richiedere a M i dati di lavoro e usarli all'occorrenza sostituendoli sempre su una sola casella. Otteniamo così il *logspace*
3. $I \leq J$, $J \in \mathscr{D} \Rightarrow I \in \mathscr{D}$
   Se I si riduce per un logaritmo a J, e J lo risolvo in tempo logaritmico allora risolvo in tempo logaritmico anche I
4. $I \leq J$, $J \in \mathscr{E} \Rightarrow I \in \mathscr{E}$
   Analogo al punto precedente.

Quindi $\leq_{logspace}$ **sono riduzioni efficienti** e **classificano** $\mathscr{P}$ ed $\mathscr{NP}$
Una delle conseguenze è che se trovo un problema completo dentro $\mathscr{P}$ (cioè che tutti i problemi di $\mathscr{P}$ si riducono a lui e lui $\in \mathscr{P}$) allora in qualche modo ho rappresentato la difficoltà massima e $\mathscr{P}$ non ha problemi più difficili perché tutti i problemi si riducono a lui.
Poiché riesco a trovare soluzioni tra problemi in $\mathscr{P}$, questo vuol dire che le soluzioni di tutti i problemi all'interno di una classe hanno una struttura matematicamente analoga tra loro.

2.5 Espressioni Booleane

Ponendo $x_1, \ldots, x_n \in X$ **variabili** e la **grammatica**

$$B \longrightarrow tt \mid ff \mid x \mid \neg B \mid B_1 \vee B_2 \mid B_1 \wedge B_2$$

con tt, ff, x e $\neg x$ chiamati **letterali** $l_1, \ldots$.
Diciamo che $V : X' \longrightarrow \{T, F\}$ con $X' \subset X$ è un **assegnamento booleano**.
B è **chiusa** se **non ha variabili**. Un assegnamento booleano è **buono** se **lega tutte le variabili di B**.

Soddisfacibilità Cioè quando un assegnamento booleano rende vera un'espressione booleana.

$V \vDash tt$ banalmente

$V \vDash x$ quando $V(x) = tt$

$V \vDash \neg B$ quando $V \nvDash B$

$V \vDash B_1 \vee B_2$ quando $V \vDash B_1$ oppure $V \vDash B_2$

$V \vDash B_1 \wedge B_2$ quando $V \vDash B_1$ e $V \vDash B_2$

Forma normale B è in **forma normale congiuntiva** $\Leftrightarrow B = \bigwedge_{i=1}^{n} C_i$ e $C_i = \bigvee_{j=1}^{m} l_j$ con l_j letterali

B è in **forma normale disgiuntiva** $\Leftrightarrow B = \bigvee_{i=1}^{n} C_i$ e $C_i = \bigwedge_{j=1}^{m} l_j$ con l_j letterali

Inoltre $\forall\, B\ \exists\, B'$ in forma normale (una delle due) $\mid (V \vDash B \Leftrightarrow V \vDash B')$.
Questo si ottiene avendo, da B con $O(n)$ simboli, un B' con $O(2^n)$ simboli.

Considereremo espressioni solo in forma normale congiuntiva.

2.6 Alcuni problemi

2.6.1 Problema SAT

Anche chiamato **problema della soddisfacibilità**. La formulazione è semplice:

$$\text{Dato } B, \text{ allora } \exists\, V \mid V \vDash B \ ?$$

SAT $\in \mathscr{NP}$. Come faccio a dirlo? Dovrei costruire una macchina non deterministica che verifica questa cosa, cioè che dice se l'assegnamento esiste o meno. Come si fa?
Cominciando dallo stato iniziale. Supponendo n variabili, allora ho n scelte all'inizio, per ognuna delle quale ho due scelte: assegnare tt o assegnare ff. Lo faccio per la prima, due scelte, poi per la seconda... facendo così tutti i possibili assegnamenti. **Un cammino è un assegnamento**.
Vedremo invece che la verifica se un assegnamento soddisfa possiamo farla dinamicamente, quindi è **polinomiale** perché è nel numero delle variabili.

2.6.2 Problema HAM

Problema del cammino hamiltoniano. Dato un grafo orientato $G = (N, A)$, $\exists$? cammino che tocca tutti i nodi una ed una sola volta?
Vediamo che HAM $\leq$ SAT. Devo definire $f \in \textit{logspace} \mid$ (G ha un cammino hamiltoniano $\Leftrightarrow f(G) = B$ è tale che $\exists\, V \vDash B$)
Vedremo una riduzione, ma non è la migliore.

Supponiamo che $G = (N, A)$ ha n nodi (cioè l'insieme $\{1, 2, \ldots, n\}$), allora B ha n^2 variabili $x_{i,j}$: ciascuna rappresenta che nell'i-esimo posto di un cammino appare il nodo j. Posso rappresentarle anche come (i, j) con $i, j \in [1, n]$.
Definiamo una permutazione $\Pi : [1, n] \to [1, n] \mid (\Pi(i), \Pi(i+1)) \in A$, dai nodi ai nodi. In realtà nella nostra permutazione, i primi sono i nodi mentre i secondi sono le posizioni che occupano nel cammino. con $\Pi(i)$ rappresento il nodo in posizione i.
Π deve essere davvero una funzione:

1. Un nodo non può essere mappato due volte. Quindi: $\neg(x_{ij} \wedge x_{kj})$ con $i \neq k$. Questo però non è un congiunto, quindi applico DeMorgan
   $\Longrightarrow \neg x_{ij} \vee \neg x_{kj}$ con $i \neq k$
2. La funzione deve essere definita ovunque (totale), quindi ogni nodo deve apparire nel cammino.
   $\Longrightarrow x_{1i} \vee x_{2i} \vee \ldots \vee x_{ni}$

   Ho definito che la funzione è totale, quindi ora devo definire la sua surgettività.
3. Ogni posizione deve ricevere un nodo, sennò rimane un pezzo "vuoto".
   $\Longrightarrow x_{i1} \vee x_{i2} \vee \ldots \vee x_{in}$
4. Non posso avere due nodi nella solita posizione. Quindi: $\neg(x_{ij} \wedge x_{ik})$ con $j \neq k$. Applico DeMorgan.
   $\Longrightarrow \neg x_{ij} \vee \neg x_{ik}$ con $j \neq k$

   Ho ben definito la permutazione Π, quindi ora se riesco a prendere tutti i disgiunti, metterli in and e trovo un assegnamento booleano che li rende veri ho trovato un cammino hamiltoniano. Manca da definire $(\Pi(i), \Pi(i+1)) \in A$
5. Se $(i, j) \notin A \Longrightarrow \neg x_{k,i} \vee \neg x_{k+1,j}$

Adesso devo dimostrare che se c'è un cammino hamiltoniano allora esiste un assegnamento che soddisfa. Dimostro i due versi dell'implicazione separatamente:

- $\Leftarrow$ $\forall\, j \ \exists!\, i \mid V(x_{ij}) = tt$, così definiamo la valutazione. Cioè per ogni posizione del cammino i c'è un solo nodo j, quindi solo un x_{ij} è vera per ogni i.
  Nello stesso modo $\forall\, i \ \exists!\, j \mid V(x_{ij}) = tt$, cioè ogni nodo j è in una sola posizione del cammino, quindi una sola i per cui x_{ij} è vera.
  Grazie anche alla 5, che garantisce che ci sia il cammino, ho definito la V
- $\Rightarrow$ Ho un cammino, composto da $(\Pi(1), \Pi(2), \ldots, \Pi(n))$, quindi definisco la $V(x_{ij}) = \begin{cases} tt & \text{se } \Pi(j) = i \\ ff & \text{se } \Pi(j) \neq i \end{cases}$

Finito. Ho definito una permutazione che rispetta il fatto che gli archi siano ben rappresentati.
Manca di dimostrare che $f \in \textit{logspace}$.

Dobbiamo costruire una macchina di tipo I/O, così sappiamo misurare lo spazio necessario (somma dello spazio usato dai nastri di lavoro). Naturalmente l'alfabeto della nostra macchina conterrà: simboli di verità, connettivi logici, parentesi, e due caratteri 0 e 1. Perché gli indici delle variabili sono rappresentati in binario.
L'input è la successione degli archi. La macchina scrive in binario il numero di nodi n sul nastro di lavoro. Poi avrò tre ulteriori nastri di lavoro, poiché nelle formule 1—5 compaiono 3 indici: un nastro per i, uno per j e uno per k.
Per scorrere le clausole farà scorrere da 1 a n gli indici sui nastri di lavoro. Quando ha scritto le quattro formule 1—4, comincia a scrivere sull'output l'ultima formula, la 5. Scorrerà il nastro input anche questa volta per verificare la clausola, finendo ad un certo punto.
Perché è in *logspace*? $\sum_{i=2}^{5}|w_i|$, ma i arriva fino ad n che rappresentato in binario richiede $\log n$. Quindi abbiamo 5 nastri di $\log n$, quindi $\sum_{i=2}^{5}|w_i| = 5\log n$ cioè $f \in SPACE(5 \cdot \log n)$

Da un **problema nel mondo dei grafi** ho ottenuto **la sua soluzione mediante la soluzione di un problema di deduzione logica**. Abbiamo **ricondotto un problema sui grafi ad un problema di logica**.
Diventa esplicita la **struttura comune** fra i due problemi.

2.6.3 Problema CRICCA

Un problema risolto positivamente se in un certo grafo non orientato esiste un sottoinsieme dei nodi detto **cricca** tale per cui, per ogni coppia di nodi all'interno della cricca c'è un arco che li congiunge.
Formalmente: dato $G = (N, A)$ $\exists ? C \subseteq N \mid \forall\, i, j \in C\ (i, j) \in A$.
C, cioè la cricca, è di ordine k se contiene k nodi.
Vediamo come SAT $\leq$ CRICCA, cioè **riconduciamo un problema di logica ad uno sui grafi**.

$\exists\, V \vDash B = \bigwedge_{i=1}^{n} C_i \Leftrightarrow f(B) = (N, A)$ ha n-cricca.
Otteniamo che

> N è l'insieme delle occorrenze dei letterali l in B
>
> $A = \{(i, j) \mid i \in C_k \Rightarrow (j \notin C_k \wedge i \neq \neg j)\}$ cioè metto un arco tra due nodi solo se non sono all'interno dello stesso letterale né se sono uno il negato dell'altro.

Da questo ottengo che se c'è una cricca c'è un assegnamento booleano, viceversa se c'è un assegnamento booleano c'è una cricca, quindi è una riduzione.
Appartiene a *logspace* perché posso usare lo stesso meccanismo della rappresentazione binaria e mantenendo gli indici sui nastri di lavoro.

2.7 Funzioni Booleane

$$V \vDash B \Leftrightarrow f(V(x_1), \ldots, V(x_n)) = tt \quad f : X \to \{0, 1\}$$

f si **costruisce mediante un circuito booleano**, cioè un grafo $G = (N, A)$ **aciclico**, con

> $i \in N$ nodi
> **Sorta** $s(i) = \{tt, ff, \neg, \wedge, \vee\} \bigcup X$ (X variabili)
> **Ingressi** le porte con $s(i) \subset \{tt, ff\} \bigcup X$
> **Uscita** i la porta più in alto (il massimo del circuito quando viene ordinato con ordinamento parziale)
> Se $s(i) = \neg \Rightarrow i$ ha 1 ingresso ed 1 uscita
> Se $s(i) \subset \{\wedge, \vee\} \Rightarrow i$ ha 2 ingressi e 1 uscita
> Per calcolare l'uscita ho bisogno di una funzione di valutazione che assegni i valori di verità agli ingressi, definiamone la semantica
>
> $[i]_V = tt$ se $s(i) = tt$
> $[i]_V = f$ se $s(i) = ff$
> $[i]_V = V(x)$ se $s(i) = x$
> $[i]_V = not([j]_V)$ se $(j, i) \in A$ e $s(i) = \neg$
> $[i]_V = [j]_V$ *and* $[h]_B$ se $(j, i), (h, i) \in A$ e $s(i) = \wedge$
> $[i]_V = [j]_V$ *or* $[h]_B$ se $(j, i), (h, i) \in A$ e $s(i) = \vee$
>
> $(i, j) \in A$

Esempio $(x \vee (x \wedge y)) \vee ((x \wedge y) \wedge \neg(y \vee z))$

2.7.1 Circuit SAT

$$\exists\, V \mid [C]_V = tt?$$

con $[C]_V = [n]_V$ con n porta di uscita. Questo problema $\in \mathscr{NP}$
Circuit Value: se C non ha variabili, $[C]_\emptyset = tt$? Questo è il problema della soddisfacibilità, per verificare se dato un assegnamento il circuito è soddisfatto o meno.
Circuit Value $\in \mathscr{P}$ perché tengo sul nastro input la rappresentazione del grafo, cioè l'insieme delle coppie che formano gli archi e la sorta di ogni nodo (porta).
Sui nastri di lavoro tengo i valori dei vari livelli di porte, ma non ho ripetizioni quindi è polinomiale

Notiamo che **Circuit Value** $\leq$ **Circuit SAT**, perché SAT è la versione più generale di value. Value è la versione di SAT in cui non ho bisogno della funzione di assegnamento.

Più interessante è scopire che Circuit SAT $\leq_{logspace}$ SAT. Intuitivamente è vero, costruiamo la riduzione.
Significa che $\forall$ circuito con variabili $\in X$, dobbiamo trovare una $f \in logspace \mid [C]_V = tt \Leftrightarrow \exists\, V' \supseteq V \quad V' \vDash f(C)$
$V(x) = tt \Rightarrow V'(x) = tt$ e $f(C) = \bigwedge B_k$
Le variabili di $f(C)$ includono tutte le variabili di C, cioè X, unito ad una variabile per ogni porta,
cioè $X \cup \{x_i = i \mid i \in N\}$

Se g è la porta di uscita $\Rightarrow$ genera un congiunto g variabile

Se $s(i) = tt$ o $ff \Rightarrow$ genera un congiunto i nel primo caso, $\neg i$ nel secondo caso

Se $s(i) = x \Rightarrow (i \Leftrightarrow x)$ cioè i è vero se e soltanto se x è vero, cioè $(i \Rightarrow x) \wedge (x \Rightarrow i)$ cioè $(\neg i \vee x) \wedge (\neg x \vee i)$

Se $s(i) = \wedge \Rightarrow (i$ è vero$\Leftrightarrow h \wedge k)$ con $(h, i), (k, i) \in A$, espandendola diventa $\neg(i \vee h) \wedge (\neg i \vee k) \wedge (\neg h \vee \neg k \vee i)$

Se $s(i) = \vee \Rightarrow (i$ è vero$\Leftrightarrow h \vee k)$ con $(h, i), (k, i) \in A$, espandendola diventa $(\neg i \vee h \vee k) \wedge (\neg h \vee i) \wedge (\neg k \vee i)$

Usando $x \wedge ff$ come esempio, mettendo come nodi $h = x$, $g = \wedge$ e $k = ff$, ottengo la formula

$$g \wedge \neg k \wedge (\neg h \vee x) \wedge (h \wedge \neg x) \wedge (\neg g \vee h) \wedge (\neg g \vee k) \wedge (\neg h \vee \neg k \vee g)$$

Vediamo che $[g] = ff \;\forall\, V$

$g\wedge \longrightarrow V(g) = tt$

$\neg k\wedge \longrightarrow V(k) = ff$

$(\neg h \vee x)\wedge$

$(h \wedge \neg x)\wedge$

$(\neg g \vee h)\wedge$

$(\neg g \vee k)\wedge \longrightarrow V(k) = tt$ ottenendo un assurdo

$(\neg h \vee \neg k \vee g)$

2.8 Tabella di computazione

Prendiamo un problema $I \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \exists\, M \mid \forall\, x \in IM(x) \longrightarrow_t$ (si/no, w) con $t \leq |x|^k$
Ho la configurazione iniziale $\trianglerighteq \underline{a_1} \ldots a_n$, copo un certo passo ho $\triangleright \underline{a_1} \ldots a_n$ e così via.

Posso immaginare di mettere il tutto in una matrice:

$\trianglerighteq$	a_1	$\ldots$	a_n
$\triangleright$	$\underline{a_1}$	$\ldots$	a_n
$\triangleright$			
$\triangleright$			

Ad ogni riga i ho il passo di computazione e la configurazione al passo i: ho rappresentato l'intera computazione in una matrice. Possiamo dare a questa **tabella di computazione** un **formato standard**.

Tabella di computazione Una matrice quadrata $T[i,j]$ con $1 \leq i,j \leq |x|^k$ se $M(x)$ termina in $|x|^k - 2$ passi.
Condizioni:

1. La macchina termina in meno di $|x|^k - 2$ passi, come detto

2. Presa la riga i, essa comincia con il respingente e termina con tutti i caratteri bianchi.
   Tutte le caselle non significative di una riga, quindi, sono riempite con #
   Siccoma la lunghezza della riga è $|x|^k$, ma la macchina termina in $|x|^k - 2$ passi, non avrò mai il cursore in ultima posizione perché il tempo limita lo spazio.

3. Supponiamo il cursore in una posizione, posso codificare lo stato nell'alfabeto
   L'alfabeto contiene $\sigma_q \in (\Sigma \times Q \times \{h\})$ che registra che nella configurazione i-esima il cursore si trova nella posizione j, si legge σ e lo stato è q. Basta prendere $\Sigma \times Q$ nuovi simboli.

4. All'inizio il cursore è sul primo carattere subito dopo il respingente. In più i passaggi sul respingente "indietro-avanti", cioè i due passi obbligati successivi di andare sul respingente e tornare a destra, vengono condensati in un singolo passo. Così facendo, il cursore non si troverà mai sul respingente. C'è un'eccezione, nel caso seguente

5. Quando $T[i,j] =$ si/no, allora sposta il cursore fino alla seconda colonna (con massimo $O(|x|^k)$ passi), introducendo uno stato ausiliario di finto arresto. Lo stato di accettazione, se raggiunto, è quindi sempre in $T(l,2)$ per qualche $l \leq |x|^k$.
   Si ammette che il cursore passi sopra il simbolo $\triangleright$ quando lo stato sia q_{SI} (abbreviazione di $\sigma_{q_{SI}}$), con il vincolo che non debba mai toccare il $\triangleright$ più a sinistra (che rappresenta l'inizio del nastro).

6. Se σ_{SI} oppure σ_{NO} appaiono sulla riga $p < |x|^k$ e nella seconda colonna, allora tutte le righe di indice q con $p \leq q \leq |x|^k$ sono uguali alla p-esima

Abbiamo l'ovvia condizione di terminazione con successo: M accetta $x \Leftrightarrow \exists\, i \mid T(i,2) = \sigma_{SI} (= T(|x|^k, 2))$
Su una tabella di computazione T di una macchina di Turing M che decide I in $|x|^k$, con x lungo n caratteri, ho una serie di fatti:

$T(1,2)$ contiene lo stato iniziale e il primo carattere di x x_q^1
Inoltre $\forall\, j, 2 \leq j \leq |x| + 1$, la casella $T(1,j)$ contiene il $j-1$-esimo simbolo di x
Infine, $\forall\, j, |x| + 2 \leq j \leq |x|^k$, la casella $T(1,j)$ contiene #

$\forall\, i, T(i,1) = \triangleright$

$\forall\, i, T(i, |x|^k) =$ # (si impiega meno spazio che tempo!)

$T(i,j) =$ come determinarlo? (Osservazione tratta dall'esempio successivo)
L'elemento $T(i,j)$ dipende dall'elemento $T(i-1, j \pm 1)$ oppure da $T(i-1,j)$. Nell'esempio successivo, $T(4,4)$ dipende da $T(3,4)$, $T(8,3)$ da $T(7,4)$ e $T(11,5)$ da $T(10,4)$
Ciascuna cella, quindi, **dipende solo e solamente dalle tre precedenti**. Questo perché ad ogni passo la macchina si sposta di un posto solo.
Quindi $T(i,j)$ dipende solo da $T(i-1,j-1)$, $T(i-1,j)$, $T(i-1,j+1)$ e dalla δ.

Una tabella di computazione, quadrata, ha $|x|^k$ righe/colonne. Siccome si ferma in $|x|^k - 2$ passi, abbiamo la sicurezza che la prima colonna è composta da tutti $\triangleright$ e l'ultima è composta da tutti # perché non si può usare più spazio che tempo.
La prima riga, oltre il respingente, avrà i caratteri $x_1\, x_2 \ldots x^n$ e dopo tutti caratteri bianchi #. Le righe rappresentano i passi di computazione, fino a che ad un certo punto (in una certa riga = un certo passo di computazione) in un certo carattere si troverà uno stato di accettazione σ_h. Questo stato di accettazione viene portato, nei passi successivi, in seconda posizione (subito dopo il respingente) e da quella riga in poi sono tutte uguali, per cui l'ultima riga sarà $\triangleright\, \sigma_h' \ldots$ #

Esempio MdT che verifica se una stringa è palindroma. Esempio: la stringa `abba`, 16 passi per verificare, quindi 18 righe e colonne

	1	2	3	4	5	6	7	...	17	18
1	$\triangleright$	a_{q_0}	b	b	a	#	#	...	#	#
2	$\triangleright$	$\triangleright$	b_{q_A}	b	a	#	#	...	#	#
3	$\triangleright$	$\triangleright$	b	b_{q_A}	a	#	#	...	#	#
4	$\triangleright$	$\triangleright$	b	b	a_{q_A}	#	#	...	#	#
5	$\triangleright$	$\triangleright$	b	b	a	$\#_{q_A}$	#	...	#	#
6	$\triangleright$	$\triangleright$	b	b	$a_{q'_A}$	#	#	...	#	#
7	$\triangleright$	$\triangleright$	b	b_{q_1}	#	#	#	...	#	#
8	$\triangleright$	$\triangleright$	b_{q_1}	b	#	#	#	...	#	#
9	$\triangleright$	$\triangleright$	b_{q_0}	b	#	#	#	...	#	#
10	$\triangleright$	$\triangleright$	$\triangleright$	b_{q_B}	#	#	#	...	#	#
11	$\triangleright$	$\triangleright$	$\triangleright$	b	$\#_{q_B}$	#	#	...	#	#
12	$\triangleright$	$\triangleright$	$\triangleright$	$b_{q'_B}$	#	#	#	...	#	#
13	$\triangleright$	$\triangleright$	$\triangleright$	$\#_{q_0}$	#	#	#	...	#	#
14	$\triangleright$	$\triangleright$	$\triangleright_{SI}$	#	#	#	#	...	#	#
15	$\triangleright$	$\triangleright_{SI}$	$\triangleright$	#	#	#	#	...	#	#
16	$\triangleright$	$\triangleright_{SI}$	$\triangleright$	#	#	#	#	...	#	#
17	$\triangleright$	$\triangleright_{SI}$	$\triangleright$	#	#	#	#	...	#	#
18	$\triangleright$	$\triangleright_{SI}$	$\triangleright$	#	#	#	#	...	#	#

2.8.1 Circuit Value è $\mathscr{P}$-completo

$\forall\, I \in \mathscr{P}$, $x \in I \Leftrightarrow [f(x)]_\emptyset = tt$ con $f \in$ *logspace*
$I \in \mathscr{P} \Rightarrow \exists\, M$ che decide x in $|x|^k = n^k \Rightarrow M(x) \to^t$ (SI, w) con $t \leq n^k - 2$
Allora **costruiamo la tabella di computazione**, aggiungendo ad M $\Sigma \times Q \cup \{h\}$ nuovi simboli. Chiamo Σ' il nuovo alfabeto.
Ciascun simbolo $\rho \in \Sigma'$ viene mappato in una stringa di bit, successioni di 0/1 $(s_1, \ldots, s_m) \in \{tt, ff\}^m$, con $m = \lceil \log_2(\#\Sigma') \rceil$ cioè numero di bit necessari per rappresentare i $\#\Sigma'$ simboli contenuti in Σ'.
Posso codificare il respingente e il carattere bianco come preferisco, ad esempio $\triangleright = tt \ldots tt$ e $\# = ff \ldots ff$
Ogni elemento della tabella quindi diventa una sequenza di m bit: $T(i,j) = s_{i,j,1}, s_{i,j,2}, \ldots, s_{i,j,m}$, cioè m simboli ciascuno che codifica anche la riga i e la colonna j.

$$T(i,j) = f\begin{pmatrix} s_{i-1,j-1,2}, & s_{i-1,j-1,2}, & \ldots, & s_{i-1,j-1,m}, \\ s_{i-1,j,2}, & s_{i-1,j,2}, & \ldots, & s_{i-1,j,m}, \\ s_{i-1,j+1,2}, & s_{i-1,j+1,2}, & \ldots, & s_{i-1,j+1,m} \end{pmatrix}$$ perché dipende solamente da $\begin{matrix} T(i-1,j-1) \\ T(i-1,j) \\ T(i-1,j+1) \end{matrix}$

Abbiamo la tabella di computazione che decide x, accettandolo o rifiutandolo. Prendo questa tabella e la codifico in binario, ottenendo un'altra tabella in cui invece dei simboli ho 0/1. **Ottengo un circuito**.
La f sopra indicata è una funzione booleana, quindi $\exists$ un circuito $\overline{C}$ che la realizza. Questo circuito avrà m uscite e $3 \cdot m$ ingressi. $\overline{C}$ dipende dall'input x? No, perché dipende soltanto dalla δ e dai $3m$ valori in ingresso. Quindi il suo costo è **costante**, indipendente da x.
Ogni gruppo di m input di $\overline{C}$ proviene da un circuito $\overline{C}$ a sua volta, perché è il gruppo di bit di una cella, e così via...
Riempio la tabella binaria, con $\overline{C}_\triangleright$ e $\overline{C}_\#$ circuiti costanti che fanno le veci del respingente e del carattere bianco.
Al centro avrò le varie porte del circuito, che si alimentano l'un l'altra incastrando le une con le entrate delle altre. Ogni cella riceve input dalle tre celle sottostanti (il segnale fluisce verso l'altro nel grafo dei circuiti). La prima riga, invece, riceve input da x.

$$\begin{array}{c|ccc|c} \overline{C}_\triangleright & & \ldots & & \overline{C}_\# \\ \overline{C}_\triangleright & & \overline{C} & & \overline{C}_\# \\ \overline{C}_\triangleright & \overline{C} & \overline{C} & \overline{C} & \overline{C}_\# \\ \overline{C}_\triangleright & & \ldots & & \overline{C}_\# \\ \overline{C}_\triangleright & & & & \overline{C}_\# \\ \overline{C}_\triangleright & \overline{C}_{x_1} & \ldots & \overline{C}_{x_n} & \overline{C}_\# \end{array}$$

Verifichiamo che f stia in *logspace*. Per verificare questo è necessario considerare l'indice di riga, colonna e la dimensione della matrice. Gli indici li rappresento in binario, con $\lceil \log_2(|x|) \rceil$ bit.
Con gli indici scorro la matrice avanti e indietro (due for annidati), 3 nastri di lavoro.
Quindi sto in *logspace*.
Abbiamo visto come realizzare un'intuizione avuta all'inizio: la MdT ha un approccio hardware alla computabilità (e

di conseguenza alla complessità), ma solo ora abbiamo visto un processo diretto di trasformazione di una computazione in un circuito.

2.8.2 Monotone Circuit Value

Circuito Monotono Circuito dove non compare il NOT ($\neg$). Mentre tutti gli altri operatori logici sono monotoni, nel senso che mantengono l'informazione, il $\neg$ la butta via. Ma d'altra parte, senza il $\neg$ non si possono esprimere tutte le formule.
Il problema di calcolare il valore in un circuito monotono è un problema $in\mathscr{P}$, perché è un caso particolare del Circuit Value. C'è però una riduzione Circuit Valute $\leq$ Monotone Circuit Value.

Nel grafo del circuito, riscritto dall'alto verso il basso e da sinistra verso destra, lo riscrivo mantenendo però un "cambio di stato" quando incontro un $\neg$. I nodi successivi saranno quindi invertiti secondo le leggi di DeMorgan, ad esempio $\vee$ diventa $\wedge$.

Grammatica $G = (N, \Sigma, P, S)$

N **alfabeto**, insieme di simboli non terminali

Σ insieme di **simboli terminali**

P insieme di **produzioni**, $P = \{A \to \alpha \mid A \in N,\ \alpha \in (N \cup \Sigma)^+\}$, cioè α è una stringa non vuota.

$S \in N$ **simbolo distinto**

Una certa stringa si trasforma secondo la G, cioè $\gamma A \beta \Rightarrow_G \gamma\alpha\beta$ se $A \to \alpha \in P$ senza nessun vincolo (**grammatica libera da contesto**)
Il **linguaggio generato dalla grammatica** è l'insieme $L(G) = \{w \in \Sigma^+ \mid S \Rightarrow^* w\}$ cioè tutte le stringhe w generate da S tramite la grammatica G in un numero qualsiasi di passi ($\Rightarrow^*$)

Esempio $S \to ()|(S)|SS$ genera il linguaggio delle parentesi bilanciate, tipo $S \Rightarrow (S) \Rightarrow (SS) \Rightarrow (()())$

Verificare Data una grammatica libera G, $L(G) = \emptyset$? Questo problema viene spesso considerato il capostipite dei problemi $\mathscr{P}$-completi.
Si costruisce una tabella simile alla tabella di computazione, in ogni riga ci metto cioè che la grammatica produce a partire dalla precedente fino alla fine. Passare da una riga alla successiva è determinato solamente dalla G.

2.9 SAT è $\mathscr{NP}$-completo

Passiamo attraverso Circuit SAT, dimostrando che Circuit SAT è $\mathscr{NP}$-completo. Devo prendere un problema $I \in \mathscr{NP}$ e costruire $f \in logspace \mid x \in I \Leftrightarrow f(x) = C$ ed $\exists\, V \mid [C]_V = tt$

$x \in I$ vuol dire che $\exists$ una macchina non deterministica N ed $\exists$ una computazione $N(x) \longrightarrow^t$ (si, w) con $t \leq |x|^k$
Da N posso ottenere una N' *equivalente* (cioè se N termina con si anche N' termina con si, analogo per il no) che calcola esattamente la stessa cosa, il cui grado di diramazione (grado di non determinismo) $= 2$
Come farlo? Se la macchina in uno stato q che va in q' posso sdoppiare lo stato di arrivo q' in q'_1, q'_2. Se ho $n > 2$ scelte, prendo la prima scelta e considero tutte le altre come se fossero un singolo nuovo stato. In questo nuovo stato, prendo il primo degli $n-1$ stati rimanenti e considero i successivi come un singolo nuovo stato e così via.
Posso farlo in tempo polinomiale (basta ricopiare gli stati) e il rallentamento della nuova macchina è dovuto al numero di nuovi stati ma sempre polinomiale.

Se la prima scelta la codifico con ff, la seconda scelta la codifico con tt, allora la computazione $N(x) \longrightarrow^t$ (si, w) è rappresentata da una successione di bit $b_0 b_1 \dots b_{|x|^n - 1}$. T_{ij} non dipenderà solamente dalle tre celle superiori della tabella di computazione, ma anche dal bit b_i
Costruisco il circuito $\overline{C}$ con $3m$ input e m output, ma stavolta con un bit ulteriore in input. Ho ottenuto $\overline{C_n}$ che ci serve per riempire la tabella, a costo costante che dipende solo dalla Δ' di N'.
Riempiamo il circuito con $|x|^k$ circuiti per $\triangleright$, $|x|$ circuiti per $\#$, e $|x|^{k-2} \times |x|^k$ copie di $\overline{C_n}$ opportunamente connesse.
Il **teorema di Cook è dimostrato**.

Altri problemi $\mathscr{NP}$-completi HAM, CRICCA, commesso viaggiatore, programmazione lineare, e altri e altri ancora...