Fisica

Fisica importante per:

- **analizzare e descrivere i fenomeni fisici** con semplici modelli informatici;
- **simulare e riprodurre la realtà** in forma digitale;
- sviluppare algoritmi di controllo di sistemi informatici.

La **fisica** è una **scienza che studia i fenomeni naturali** (es. moti celesti) **e naturali provocati** (es. acceleratore di particelle). Per la comprensione sfrutta il **metodo scientifico** che si basa su misurazioni ed esperimenti per descrivere oggettivamente, razionalmente e quantitativamente i fenomeni. Inoltre è una **scienza quantitativa**, cioè utilizza **teorie** basate su una serie di **principi fondamentali** per comprendere i fenomeni.

Def **definizione operativa**: definizione di un concetto scientifico data a partire dall'esperienza e solo utilizzando le operazioni che tale esperienza richiede. Cioè, un concetto scientifico e una grandezza fisica vengono definite solo precisando tutte le operazioni necessarie a misurarli.

Questo serve a garantire i principi di razionalità e di riproducibilità richiesti dalla fisica.

Def **teoria**: inquadramento in uno schema razionale e quantitativo delle leggi fisiche.

Def **legge fisica**: relazione quantitativa tra grandezze dai caratteri generali, ricavata da esperimenti. Deve essere valida entro gli errori delle misurazioni.

Def **principio**: assunzioni, affermazioni, regole di validità, fatte nelle teorie o ricavate dalle osservazioni con processi di generalizzazione, estrapolazione ed astrazione. La validità non viene mai assunta come dogma ma costantemente verificata.

Metodo Scientifico

1. **Individuazione delle grandezze** in gioco in un fenomeno e **misurazione**
2. **Osservazione sperimentale** delle correlazioni fra grandezze
3. **Individuazione delle relazioni matematiche** , scoperta delle **leggi generali** ed eventuale **inquadramento** delle leggi in teorie
4. **Previsioni** dedotte da leggi e teorie
5. **Verifica sperimentale** delle previsioni

Def **misura**: valore numerico con relativa incertezza relativo ad una certa grandezza fisica.

Def **grandezza**: ha significato se per essa è stato definito un **metodo di misura** ed è stata assegnata una **unità di misura** o un **campione**.

Ne esistono di due tipi:

- **Scalari**, definite tramite una scala di misura, o un numero: tempo, massa, lunghezza, energia.
- **Vettoriali**, definite anche con una direzione e un verso: velocità, accelerazione, spostamento.

L'**unità campione** deve essere: **accessibile**, **invariata**, **inalterabile**, **riproducibile**, **precisa**, **concordata**.

es. $h = 1.83 \pm 0.01$ m   h = *valore ± incertezza [unità di misura]*

L'incertezza dipende dalla risoluzione sperimentale o dalla riproducibilità statistica. Inoltre il numero di cifre significative deve essere compatibile con il valore espresso nell'incertezza.

Def **risoluzione**: la misura più piccola del campione

E_A = errore **assoluto** (es. ± 0.01) E_R = errore **relativo** = E_A / misura

Nella **somma** si mette la cifra signficativa peggiore tra gli addendi.

Nella **moltiplicazione** si mette l'errore relativo peggiore ($\Delta x / x$)

1971 **Sistema Internazionale** mks
Unità fondamentali:

- **Tempo**, 1 s [**secondo**]
  Prima: giorno solare medio/8400
  Adesso: 9 192 631 770 vibrazioni dell'atomo Ce^{133}
  Orologi atomici con un grado di precisione di $1/10^{13}$
- **Lunghezza**, 1 m [**metro**]
  Prima: barra di platino-iridio a Sevres
  Adesso: distanza della luce nel vuoto in 1/299 792 458 s
- **Massa**, 1 Kg [**chilogrammo**]
  Adesso: massa di un cilindro di platino-iridio a Sevres

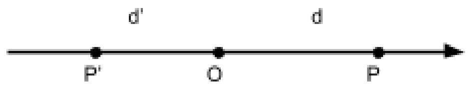
Notazione scientifica esponenziale
$M_{Terra} \simeq 6 \cdot 10^{24}$ Kg $M_{Zanzara} \simeq 1 \cdot \mathbf{10^{-5}}$ **Kg** $\mathbf{M_{AtomoH}} \simeq 1.6 \cdot 10^{-27}$ Kg
$L_{RaggioTerra} \simeq 6.4 \cdot 10^{6}$ m $T_{EtàTerra} \simeq 1.3 \cdot 10^{17}$ s

Ordini di grandezza espressi con prefissi e suffissi, importanti nelle misurazioni.
Grandezze derivate
Es. dalla lunghezza: superifici, volumi, angoli.
Superifici: funzioni omogenee di 2° grado delle lunghezze da cui dipendono ($(b \cdot h)/2$, $\pi \cdot r^2$

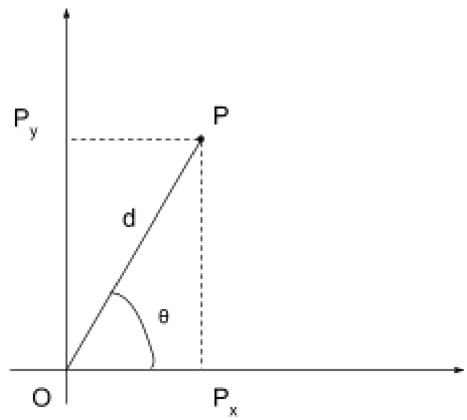
Dimensione di una grandezza: esponenti a cui vengono elevate le grandezze fondamentali.
$[L] = m$ $[S] = m^2$ $[V] = m^3[L][T]^{-2} = m/s^2$ $v = [L][T]^{-1} = m/s$
$1\ l = 10^{-3}\ m^3 \Leftrightarrow 1\ m^3 = 1000\ l$ $1\ \mu g = 10^{-6}\ g = 10^{-9}$ Kg
$40\ Km/h = (40 \cdot 10^3\ m)/(3.6 \cdot 10^3\ s) = 4/3.6 \cdot 10^{4-3}\ m/s = 11.1\ m/s$

Analisi dimensionale: tutte le grandezze sono derivate da combinazioni di tempo, lunghezza e massa, quindi se Y è grandezza nota, allora
$[Y] = [L]^{\alpha}[M]^{\beta}[T]^{\gamma}$
$\alpha = \beta = \gamma = 0 \Leftrightarrow$ Y è **adimensionale** o **numero puro** (es. radianti)
Si sommano solo le grandezze compatibili, cioè se in una somma c'è una massa sommata a qualcosa, quel qualcosa deve essere una massa e l'intera somma deve tornare una massa.

Sistemi di riferimento
Unidimensionali
Indicare la posizione di un punto su una retta: si sceglie un punto O come **origine** e si fissa un **verso** sulla retta in modo arbitrario che renderà la retta **orientata** ed indicherà il segno dei numeri.
Utilizzando la descrizione operativa della lunghezza, si misura la distanza dall'origine O del generico punto P e si assegna tale misura alla coordinata x con segno + se P è dopo O nel verso scelto, - altrimenti.

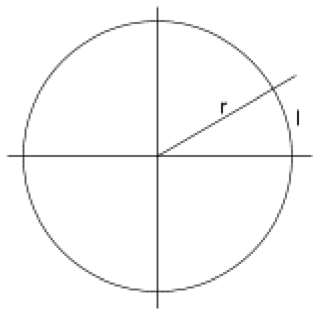


Bidimensionali
Per specificare la posizione si introduce il **piano cartesiano,** con due **assi di riferimento** perpendicolari x e y. L'origine O viene posta sull'intersezione dei due assi e l'asse x è tale che si sovrappone all'asse y se ruotato di 90° in verso antiorario. La coppia di coordinate è ordinata, cioè
$(3, 2) \neq (2, 3)$
La retta \\ y passante per P che incontra x in P_x è detta **proiezione di P su x**
La retta \\ x passante per P che incontra y in P_y è detta **proiezione di P su y**
Alternativamente alle proiezioni esistono le **coordinate polari**
P è definito come la distanza da O e dall'angolo θ della retta per OP orientata, positivo nel verso antiorario da x.
Quindi $P(x, y) \rightarrow P(d, \theta)$



Da cartesiane a polari $d^2 = x^2 + y^2$ $\theta = \arctan(y/x)$ (+ π se x < 0)
Da polari a cartesiane $x = d \cdot \cos\theta$ $y = d \cdot \text{sen}\,\theta$

Un **angolo** è una frazione del piano delimitata da due semirette che partono da un origine comune.
$\alpha = l / r$
$2\pi = 360°$



Tridimensionali
Terna destrosa di assi, regola della mano destra. Oltre agli assi cartesiani x e y viene aggiunto un terzo asse, perpendicolare anch'esso, chiamato z.
P = (x, y, z)

Derivata
$df / dt = \lim (\Delta t \rightarrow 0)\ f(t + \Delta t) - f(t) / \Delta t$
Limite per l'intervallo Δt che tende a 0 del rapporto incrementale.
Descrive la pendenza della tangente al grafico nel punto t, cioè il coefficente angolare del grafico cartesiano.
Misuro le variazioni, per esempio, nel tempo. Se il Δt è minimo allora il campionamento sarà quasi istantaneo. Quindi $\mathbf{\Delta t}$ è detto **intervallo di campionamento**.

Grandezze vettoriali

Direzione = retta
Verso = freccia
Modulo = lunghezza
v vettore $\rightarrow |v|$ modulo di $v \geq 0$

Algebra vettoriale, non dipende dal sistema di riferimento quindi anche le leggi fisiche non dipendono dal sistema di riferimento

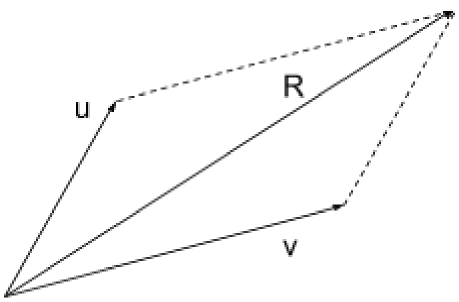
Prodotto di uno **scalare per vettore**

$a \cdot v = (av_x, av_y, av_z)$ stessa direzione, stesso verso $a > 0$, verso opposto $a < 0$, modulo = $a \cdot |v|$

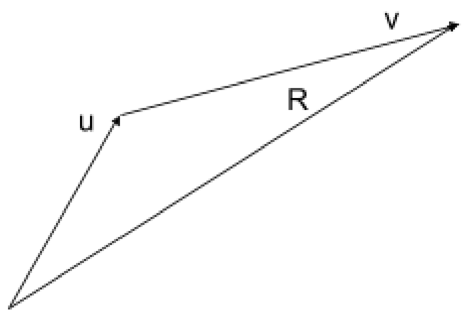
Somma di vettori

$R = u + v = (u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + v_z)$ somma dei singoli componenti

Metodo del parallelogramma

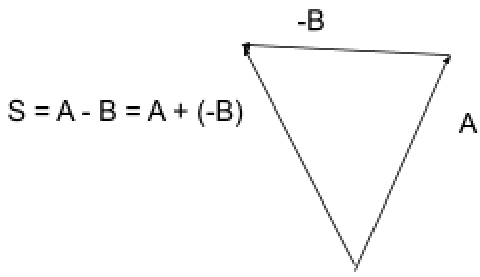


Metodo punta coda o triangolare



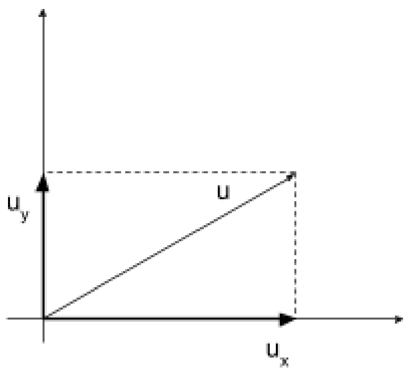
La somma gode della proprietà commutativa ed associativa

Vettore opposto -A | -A + A = 0
Stessa direzione e modulo di A ma verso opposto
A - B = A + (-B) = S



Componenti di un vettore
Sono le proiezioni sugli assi del vettore
$u = u_x + u_y$ $|u| = \sqrt{(u_x^2 + u_y^2)}$

Def **versore**: vettore orientato di modulo 1
Versore î per l'asse x
Versore ĵ per l'asse y
Versore k per l'asse z



$A = A_x + A_y = |A_x| \cdot \hat{\imath} + |A_y| \cdot \hat{\jmath} \rightarrow |A|, \theta$
$|A| = \sqrt{(A_x^2 + A_y^2)}$
$\theta = A_y / A_x$

Prodotto Scalare 2 vettori → 1 scalare

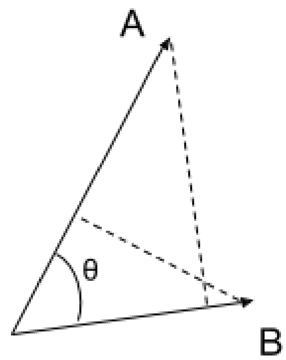
Scalare = $|A| \cdot$ [proiezione B su A] = $|B| \cdot$ [proiezione A su B]

$A \cdot B = B \cdot A = |A| \cdot |B| \cdot \cos\theta = A_x B_x + A_y B_y$

Varia a seconda dell'orientamento reciproco, massimo quando sono paralleli e nullo quando sono perpendicolari.

$A \cdot A = A^2$

Gode della proprietà distributiva e commutativa



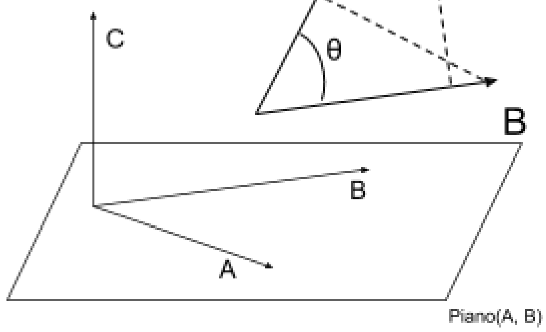
Prodotto Vettoriale 2 vettori → 1 vettore

$A \times B = C$

$|C| = |A| \cdot |B| \cdot \text{sen}\,\theta$

direzione C = ⊥piano(A, B)

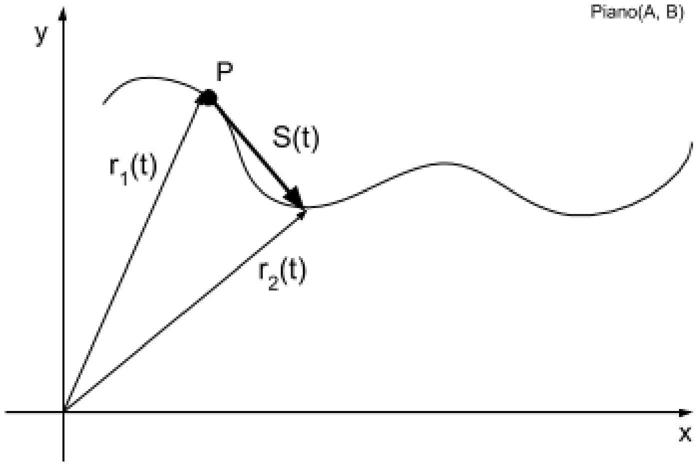
verso C = regola mano dx, A verso B in senso antiorario



Cinematica

Raggio vettore o **vettore posizione** r(t)

$r(t) = OP(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath}$



Vettore spostamento S(t)

$S(t) = \Delta r(t) = r(t_2) - r(t_1) = r_f - r_0$

Se t_2 è molto vicino a t_1 allora

$t_2 = t_1 + \Delta t$ con $\Delta t \to 0$

e Δr sempre più parallelo al grafico, quindi più significativo riguardo la traiettoria. Con spostamenti molto piccoli ricostruisco la traiettoria

$r_f = r_0 + \Sigma_i (\Delta r_i) \Rightarrow$ **velocità**

Legge del moto $x(t) = x_0 + \Delta x$

Velocità

Vettore velocità media parallelo a Δr

$\langle v \rangle = v_m(t_1, t_2) = (r(t_2) - r(t_1)) / (t_2 - t_1) = \Delta r / \Delta t \quad [L][T]^{-1} = m/s$

Dipende dall'intervallo di valutazione, non tiene conto delle posizioni e delle variazioni intermedie.

Velocità istantanea

$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} (r(t + \Delta t) - r(t)) / (t_2 - t_1) = dr / dt$

Sempre tangente alla traiettoria, anche se $|v(t)|$ è costante, se t cambia cambia anche v perché cambia la direzione.

Dai suoi componenti posso calcolare il modulo e la direzione

$v = dr / dt \Leftrightarrow v_x = dx/dt \wedge v_y = dy/dt$

$|v| = \sqrt{(v_x^2 + v_y^2)}$

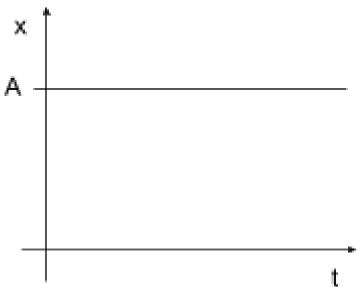
$v_x = |v|\cos\theta \wedge v_y = |v|\text{sen}\,\theta \Rightarrow \theta = \arctan(v_y/v_x)$

Dalla velocità alla posizione
$x(t) = x_0 + \Delta x$
$\Delta x = \Sigma_n (\Delta x_n) = \Sigma_n (\langle v \rangle_n \cdot \Delta t)$ $[L][T]^{-1}[T] = [L]$ spostamento totale
se Δt piccoli $\Rightarrow \Delta x = \lim_{\Delta t \to 0} (\Sigma_n (\langle v \rangle_n \cdot \Delta t)) = \int v\, dt$ inverso della derivata
$\Rightarrow x = x_0 + \int v\, dt$

Accelerazione
$\langle a \rangle = a_m(t_1, t_2) = v(t_2) - v(t_1) / t_2 - t_1 = v(t + \Delta t) - v(t) / \Delta t$ $[L][T]^{-1}[T]^{-1} = m/s^2$
$\Delta v = v_2 - v_1$ accelerazione
$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} v(t + \Delta t) - v(t) / \Delta t = dv / dt$
$a \neq 0 \Leftrightarrow$ v cambia modulo $\vee$ v cambia direzione

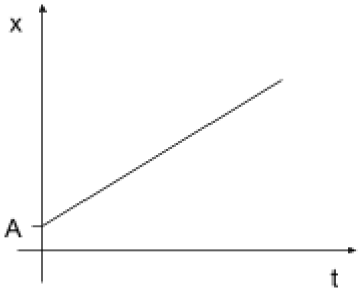
Cinematica
Descrive il moto di un punto materiale. 3 coordinate descrivono moto in 3D.
Moto unidimensionale: conoscendo la legge del tempo descritta in f(t) si ricavano v e a.
$x = f(t) \Rightarrow v = dx/dt$, $a = dv/dt = d^2x/dt^2$, $\langle v \rangle_i = v_m(t_i, t_{i - \Delta t}) = x(t_i) - x(t_i - \Delta t) / \Delta t$
$x(t_i)$ e $x(t_{i+1})$ sono **dati discreti** cioè ricavati dalle osservazioni. Le derivate sono calcolate con i rapporti incrementali e sono tanto più esatte quanto più piccoli sono gli intervalli di acquisizione (Δt).

Oggetto fermo $x(t) = A = x_0$



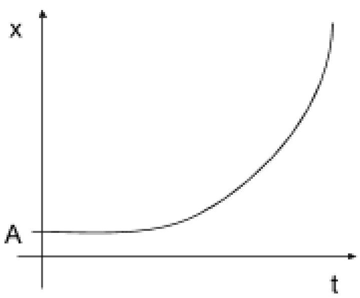
$v_m = (x(t + \Delta t) - x(t)) / \Delta t = 0$
$v = dx / dt = 0$
$a = dv / dt = 0$
Moto costantemente nullo

Moto uniforme $x(t) = A + Bt = x_0 + v_0 t$



$\mathbf{v_m} = (x(t + \Delta t) - x(t)) / \Delta t = (A + Bt + B\Delta t - A - Bt) / \Delta t = B = v_0$
$v = dx/dt = d(A + By) / dt = B = v_0$
$a_m = v_f - v_i / \Delta t = B - B / \Delta t = 0$
$a = dv / dt = 0$

Moto uniformemente accelerato $x(t) = A + Bt + Ct^2 = x_0 + v_0 t + ½ a_0 t^2$



$v = dx / dv = B + 2Ct$
$a = dv / dt = 2C$
a è costante $\Rightarrow \langle a \rangle = a_0$
$a_0 = \Delta v / \Delta t$
$v = v_0 + a_0 t$

Dinamica
Descrive le cause delle variazioni del moto. Corpi rappresentati come punti materiali (massa concentrata in un punto) ⇒ **dinamica del punto materiale**: il moto del corpo e le forze che agiscono si intendono riferite ad un punto nello spazio.

Def **massa**: resistenza alle variazioni di velocità che la materie oppone all'azione di una forza (**massa inerziale**). Proprietà scalare ed additiva intrinseca di un corpo misurata in **Kg**.

Def **forza**: quantità vettoriale che descrive le interazioni fra corpi. Importante l'intensità ma anche la direzione ed il verso. Sono vettori applicati (importante dire dove) che perturbano lo stato di **quiete relativa** dei corpi in virtù della loro **intensità**, **direzione**, **tempo di applicazione**, **punto di applicazione** e **massa** del corpo.
Le forze **non** causano movimento ma **variazioni di movimento**.
Massa gravitazionale grandezza scalare proporzionale alla forza di gravità. In teoria diversa da quella inerziale.
Forza gravitazionale
$F_{A,B} = -G \cdot ((m_A m_B)/r^2) \cdot \hat{r}$
Direzione radiale (data da $\hat{r}$), quindi perpendicolare alla superficie: forza verticale e diretta verso il centro della terra.
La F_{peso} è costante in modulo e direzione (almeno per corpi piccoli) ⇒ F_{peso} è uniforme

Sulla superficie terrestre, quindi con l'altezza dal suolo $h << R_T$
$|F_{peso}| = G \cdot ((m_T m_A)/(R_T + h)^2) \simeq m_A G \cdot m_T / R_T^2 = m_A \cdot g$
con g = 9.81 N/Kg

$|F_{peso}| = m_A g$ $|F_{gravità}| = G \cdot ((m_T m_A)/r^2) = m_A G \cdot m_T/r^2$ massa gravitazionale
$F = m_A \cdot a$ massa inerziale
Massa gravitazionale e massa inerziale sono equivalenti

Def **campo gravitazionale**: proprietà dello spazio che circonda un corpo massivo. Ad ogni punto dello spazio è associato il campo vettoriale g.
$F_g / m_A = g = -G \cdot m_T/r^2 \cdot \hat{r}$

Se la forza peso è uniforme ed è l'unica forza in gioco allora si ha un'accelerazione costante e un moto di un grave in caso 1D (a_0 \\ v_0) o parabolico in caso 2D (a_0 !\\ v_0).
$v_x = v_{0x} + a_{0x}t = v_0 \cos\theta$, $v_y = v_{0y} + a_{0y}t = v_0 \text{sen}\,\theta - gt$
$x = x_0 + v_{0x}t = x_0 + (v_0 \cos\theta)t$, $y = y_0 + v_{0y}t + ½a_{0y}t^2 = y_0 + (v_0 \text{sen}\,\theta)t - ½gt^2$

Accelerazione costante in 1D

$v = v_0 + a_0t$, integro per avere lo spostamento

$y = y_0 + \int_{0,t} v\,dt' = y_0 + \int_{0,t} (v_0 + a_0t)dt' = t_0 + v_0t + ½a_0t^2$ con y_0 e v_0 sono posizione e velocità a $t = 0$

Relazione fra posizione e velocità (funzionante solo per moti con accelerazione costante)

$t = (v - v_0)/a_0$

$v^2 - v_0^2 = 2a_0 \cdot (y - y_0)$

Es. moto di un grave vicino alla superficie terrestre. Accelerazione $g = 9.81\ m/s^2$ e altezza h.

$0 = h - ½gt_c^2 \Rightarrow t_c = \sqrt{(2h / g)}$, $v_c = \sqrt{(2hg)}$

Se il corpo è lanciato verso l'alto con $v_0 \neq 0$, calcolo il tempo impiegato per raggiungere apice (dove $v = 0$) e altezza massima.

$v(t_{max}) = 0 \Rightarrow 0 = v_0 - gt_{max} \Rightarrow t_{max} = v_0 / g$

$\Rightarrow h_{max} = h + v_0t_{max} - - ½gt_{max}^2 \Rightarrow h_{max} - h = v_0^2 / 2g$

Accelerazione costante in 2D

$a = g = -gj \Rightarrow a_x = a_{0x} = 0$, $a_y = a_{0y} = -g$

$v_x = v_{0x} + a_{0x}t = v_0\cos\theta$, $v_y = v_{0y} + a_{0y}t = v_0\mathrm{sen}\,\theta - gt$ integriamo componente per componente

$x = x_0 + v_{0x}t = x_0 + (v_0\cos\theta)t$, $y = y_0 + v_{0y}t + ½a_{0y}t^2 = y_0 + (v_0\mathrm{sen}\,\theta)t - ½gt^2$

Quindi in accelerazione costante la legge del moto è un polinomio di secondo grado.

Moto rettilineo se a_0 \\ v_0 oppure $a_0 = 0$

Moto bidimensionale se a_0 !\\ v_0

$r = r_0 + v_0t + ½a_0t^2 \Rightarrow x = x_0 + v_{0x}t + ½a_{0x}t^2$, $y = y_0 + v_{0y}t + ½a_{0y}t^2$

$v \cdot v - v_0 \cdot v_0 = 2a_0 \cdot (r - r_0)$

Quindi il moto si può descrivere come un moto con accelerazione costante su un asse e con accelerazione nulla sull'asse perpendicolare al primo, basta fare un **cambio di sistema di riferimento** usandone uno con un asse parallelo ad a_0.

Es. **Moto del proiettile** o **moto parabolico**

$a = (\sum_i F_i)/m \Rightarrow a_0 = \mathit{const}$, $v = v_0 + a_0t$, $r = r_0 + v_0t + ½a_0t^2$

$a = -gj$, $v_x = v_{0x} + a_{0x}t = v_0\cos\theta$, $v_y = v_{0y} + a_{0y}t = v_0\mathrm{sen}\,\theta - gt$

Il moto diventa una composizione di un moto rettilineo uniforme a velocità costante lungo x e un moto uniformemente accelerato con accelerazione costante lungo y.

Ponendo $x_0 = 0$

$t = x / v_0\cos\theta \Rightarrow y = y_0 + \tan\theta\, x - (g / (2v_0\cos\theta)^2) \cdot x^2$

Caratteristiche delle forze

- Sono **grandezze vettoriali**
- Si presentano a coppie: se ho due corpi A e B avrò $F_{A,B}$ ed $F_{B,A}$
- F è **proporzionale all'accelerazione**
- F può deformare un oggetto
- **Principio di sovrapposizione**: le forze si sommano come vettori

$[F] = [M][L][T]^{-2}$, 1 Newton **N** = 1 Kgm/s^2

Definizione operativa: 1 N è una forza applicata ad un corpo di massa 1 Kg che produce un'accelerazione di 1 m/s^2

Le forze che agiscono su corpi macroscopici possono essere attive:

- a **distanza** (**forze a lungo raggio**)
  Non richiedono contatto fra i corpi su cui agiscono, ad es. le 4 interazioni fondamentali:
  - Interazione **gravitazionale**, forse dal gravitone
  - Interazione **elettromagnetica**, da fotone
  - Interazione **nucleare debole**, dai bosoni W e Z
  - Interazione **nucleare forte**, dal gluone
- a **contatto** (**forze a corto raggio**)
  Di solito derivano dalle interazioni elettromagnetiche fra atomi e molecole costituenti la materia, ad esempio:
  - Forze esplicate dai **vincoli**, come le tensioni e la forza normale
  - Forze di **attrito**
  - Forze **elastiche**, interazioni elettromagnetiche che si oppongono alla deformazione dei corpi

Una forza può essere scomposta in componenti

$\mathbf{F = F_X + F_Y = F\cos\theta + F\mathrm{sen}\,\theta}$

I tre principi della dinamica (di Newton)

1. **Se la risultante delle forze che agiscono su un corpo è nulla il corpo permane nel suo stato di quiete o moto rettilineo uniforme**.
   $R = \Sigma_i(F_i) = 0 \Rightarrow a = 0, v = const$
2. **Se la risultante è diversa da zero si produce un'accelerazione proporzionale alla risultante delle forze che agiscono sul corpo**. La costante di proporzionalità è la massa.
   $R = \Sigma_i(F_i) = ma$
3. **Se vi sono due corpi interagenti ognuno di essi esercita sull'altro una forza: queste forze hanno la stessa intensità stessa direzione ma verso opposto.** Principio di azione e reazione.

Primo principio della dinamica
Se un corpo è fermo rimane fermo, se si muove rimane in stato di moto rettilineo uniforme.
Per esempio nello spazio interstellare: niente attrito e niente forze gravitazionali, la velocità rimane costante in modulo e direzione. Oppure su una superficie priva di attrito.

Def **sistema di riferimento inerziale**: appurato che la risultante delle forze che agiscono sul corpo è nulla, allora il corpo osservato nel sistema di riferimento è fermo o si muove di moto rettilineo uniforme.
Un sistema di riferimento in moto rettilineo uniforme rispetto ad un sistema di riferimento inerziale è anch'esso un sistema di riferimento inerziale.

Velocità relativa

Secondo principio della dinamica
Le forze non causano il moto ma le sue variazioni, quindi l'accelerazione. Per via integrale, dalle accelerazioni si può risalire alla velocità e quindi alla legge oraria, utile per studiare i moti.
$(\Sigma_i(F_i))/m = a \Rightarrow (\Sigma_i(F_{xi}))/m = a_x = d^2x / dt^2, (\Sigma_i(F_{yi}))/m = a_y = d^2y / dt^2, (\Sigma_i(F_{zi}))/m = a_z = d^2z / dt^2$
Equazione del moto
$v_{i+1} = v_i + a_i \Delta t, v(t + \Delta t) = v(t) + a(t) \Delta t \Rightarrow x_{i+1} = x_i + v_i \Delta t, x(t + \Delta t) = x(t) + v(t) \Delta t$

Il primo e il secondo principio della dinamica sono validi solo in sistemi di riferimento inerziali, cioè che si muovono di moto rettilineo uniforme tra loro.
Se mi trovo in **un sistema in cui è valida la prima legge allora tutti i sistemi di riferimento che si muovono a velocità relativa costante soddisfano la prima legge**. Anche la seconda legge è valida solo nei sistemi inerziali.
Se valgono il primo e il secondo principio allora la condizione necessaria affinché un corpo sia fermo (**equilibrio statico**) o che si muova a velocità costante (**equilibrio traslazionale**) è che la **risultante delle forze che agiscono sul corpo sia nulla**.

Terzo principio della dinamica
Le forze sono sempre fra coppie di oggetti, il terzo principio (di azione e reazione) è sempre fra due forze applicate su due corpi diversi generate da due corpi diversi.
Da non confondersi con le forze vincolari, il terzo principio è tra due forze applicate su due corpi diversi. Nel caso della forza peso di un libro, le coppie di forze sono: F_{peso} del libro e F con cui il libro attrae la terra, la F di contatto del tavolo sul libro e la F di contatto del libro sul tavolo.

Forza gravitazionale e forza peso

Due corpi massivi si attraggono con forze che sono:

- **Dirette** lungo la congiungente dei centri di massa
- **Attrattive**
- Con **intensità uguali e opposte** dettate dalla formula $|F| = G \cdot (m_A m_B / r^2)$

$G = 6.674 \cdot 10^{-11}\ Nm^2/Kg^2$

Forze di contatto

Quando due corpi macroscopici sono a contatto agiscono forze che derivano dalle interazioni elettromagnetiche fra atomi e molecole costituenti la materia.

La forze di contatto sono legate ai **vincoli**: **unidimensionali** (tensioni…) e **superficiali**.

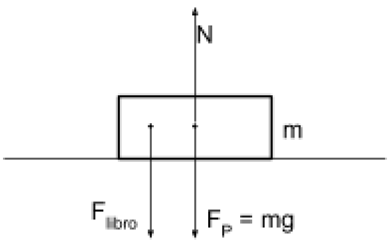
Forze di contatto superficiali

Legate ai contatti tra superfici, divise in:

- **Forze di attrito** statico o dinamico, parallele alla superficie e opposte al moto
- **Forze normali**, esercitate perpendicolarmente alla superficie di contatto fra i corpi. Legate alla resistenza del corpo alla deformazione, impedisce ai corpi di compenetrarsi. Interazioni elettromagnetiche tra gli atomi.

Se la superficie è piana, allora anche l'accelerazione perpendicolare è nulla e la componente normale della risultante delle forze che agiscono sul corpo è nulla.

Se la superficie non è piana, $a_\perp \neq 0$.



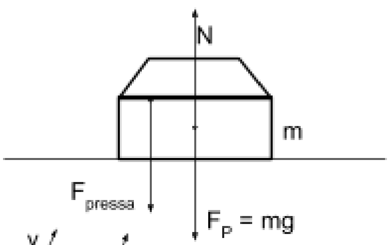
Consideriamo un libro di massa m in quiete sulla superficie.

Il libro esercita F_{libro} sul tavolo

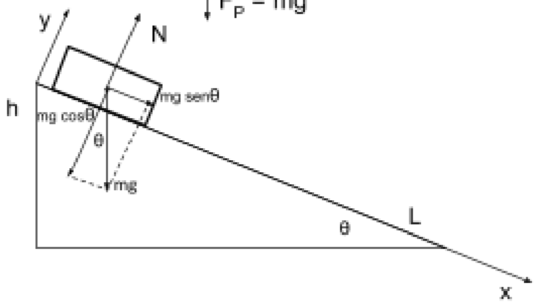
Il tavolo esercita N sul libro (**3 principio**)

$N = -F_{libro}$, $|F_{libro}| = N$

$(\Sigma_i(F_i))_{sul\ libro} = 0$, $(N - F_P)\hat{j} = 0 \Rightarrow N = F_P$



$(\Sigma_i(F_i))_{sul\ libro} = (-F_{pressa} + N - F_P)\hat{j} = 0 \Rightarrow N = F_P + F_{pressa}$



Piano inclinato liscio

$(\Sigma_i(F_i))_x = mgsen\,\theta = ma_x \Rightarrow a_x = gsen\,\theta = a_0$

$(\Sigma_i(F_i))_y = N - mgcos\,\theta = ma_y = 0 \Rightarrow N = mgcos\,\theta$

$Lsen\,\theta = h$

$x = x_0 + v_0 t + ½ a_0 t^2$, $v = v_0 + a_0 t$

$v^2 - v_0^2 = 2a_0(x - x_0)$

Fissato $x_0 = 0$, quindi origine degli assi nella posizione iniziale dell'oggetto

$L = v_0 t_f + ½ a_0 t_f^2$, $v_f = v_0 + a_0 t_f^2$, $v_f^2 - v_0^2 = 2a_0(L)$

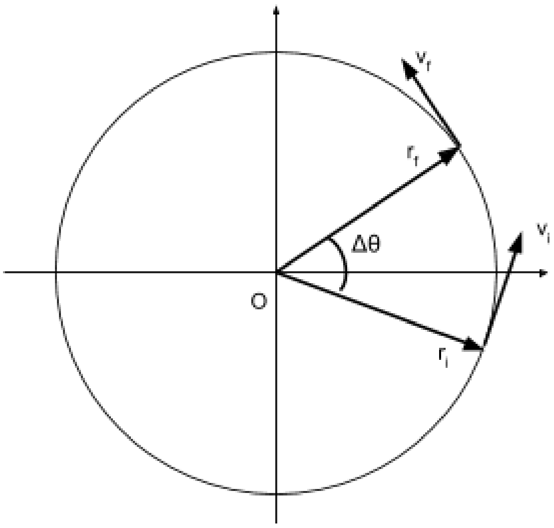
Se il corpo parte da fermo, $v_0 = 0$

$t_f = \sqrt{(2L/a_0)} = \sqrt{(2L/sen\,\theta\, gsen\,\theta)} = 1/sen\,\theta \cdot \sqrt{(2L/g)}$, $v_f = g \cdot sen\,\theta\, t_f = \sqrt{(2gh)}$

Forze di attrito

Esercitate parallelamente alla superficie di contatto con verso opposto alla forza applicata.
Resistono (statica) fino ad una certa soglia, poi rottura e scivolamento (dinamica).
L'attrito statico F_S si oppone al moto e ha un'intensità tale che l'accelerazione sia nulla.
$a_x = 0 \Rightarrow 0 = F_{ext} - F_s$
Finchè il corpo è fermo $|F_S| = |F_{ext}|$, al massimo $|F_S| \leq \mu_S N$ con μ_S coefficiente di attrito statico.
Superato il valore massimo il corpo si meete in moto e l'attrito diventa attrito dinamico con direzione del moto, verso opposto e modulo $|F_d| = \mu_d N$, dove $\mu_{,d}$ coefficiente di attrito dinamico.
$\mu_d \leq \mu_S$

Moto Circolare Uniforme
Moto su traiettoria circolare, uniforme $\Rightarrow$ $|v| = const = |v_i| = |v_f|$



$|r| = R = |r_i| = |r_f|$
La velocità cambia direzione $\Rightarrow$ $a \neq 0$
$\theta = s/R$ rad, di solito in senso antiorario con asse x positivo. s spazio percorso lungo la circonferenza
$R \cdot \mathrm{sen}(\Delta\theta/2) = |\Delta r|/2$

Nel tempo Δt
$\Delta r = r_f - r_i$
$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$
$\Delta s = R\Delta\theta$
$R(\Delta\theta/\Delta t) = \Delta s/\Delta t = v = const$
$a = -v^2/R = -\omega^2 R$
$T = 2\pi/\omega = 2\pi R/v$
$\omega = 2\pi/T = v/R$
$v = R\omega = 2\pi R/T$

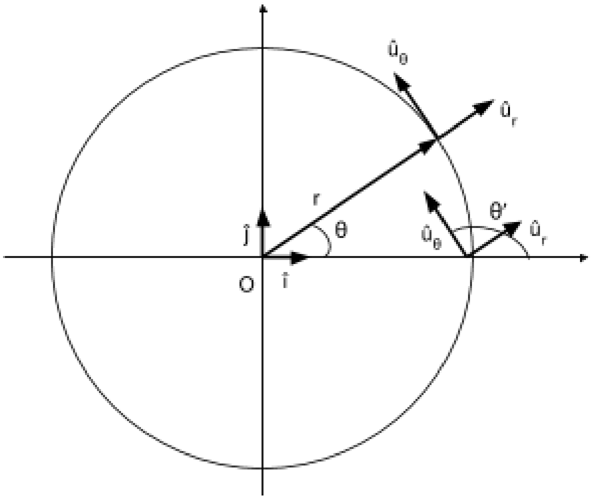
$T^2 = (4\pi^2/GM_T)R^3$

Velocità angolare media $\langle\omega\rangle = \Delta\theta / \Delta t$
Def **Velocità angolare** $\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \langle\omega\rangle = d\theta / dt$
Accelerazione angolare media $\langle\alpha\rangle = \Delta\omega / \Delta t$
Def **Accelerazione angolare** $\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \langle\alpha\rangle = d\omega / dt$

Considerando le velocità v_i, v_f e $\Delta v = v_f - v_i$, esse formano un triangolo isoscele simile a quello dei raggi vettore. La velocità è sempre tangente in ogni punto alla traiettoria, quindi perpendicolare al raggio.
Allora lo stesso angolo $\Delta\theta$
$|\Delta v|/v = |\Delta r|/R = 2\mathrm{sen}(\Delta\theta/2) \Rightarrow |\Delta v| = |\Delta r| \cdot v/R$
$\langle\omega\rangle = \Delta\theta / \Delta t = const = \omega = v/R \Rightarrow \Delta t = R\Delta\theta/v$
Se la velocità è costante in modulo $\Rightarrow$ $a \perp v$, cioè alla traiettoria in ogni punto, altrimenti ci sarebbe una componente parallela a v e $|v|$ aumenterebbe.
Direzione dell'accelerazione $a \perp v \Rightarrow a \parallel r$
$|a| = \lim_{\Delta t \to 0} |\Delta v|/\Delta t = \lim_{\Delta t \to 0} v/R \cdot |\Delta r|/\Delta t = v/R \cdot \lim_{\Delta t \to 0} |\Delta r|/\Delta t = v^2/R$

Moto Circolare Vario

La velocità cambia in modulo, trattamento in coordinate polari (r, θ)



$\theta' = \theta + \pi/2$

$d\theta/dt = \omega(t) = v(t)/r$

$\hat{u}_r = \cos\theta\, \hat{\imath} + \text{sen}\,\theta\, \hat{\jmath}$

$\hat{u}_\theta = -\text{sen}\,\theta\, \hat{\imath} + \cos\theta\, \hat{\jmath}$

$v = v\hat{u}_\theta$

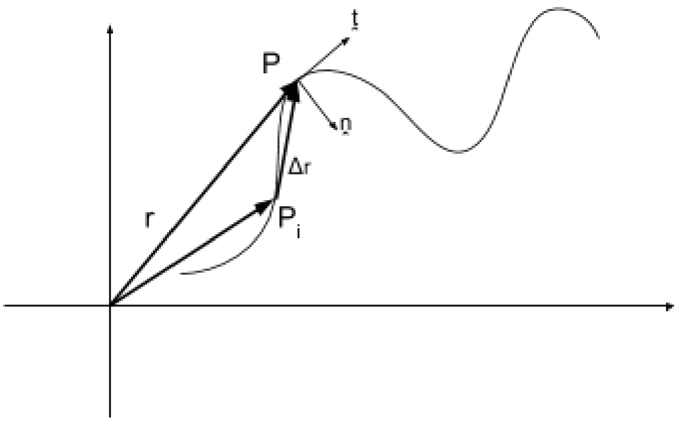
$a = dv/dt = v \cdot d\hat{u}_\theta/dt + \hat{u}_\theta \cdot dv/dt = -v^2/R$

$d\hat{u}_\theta/dt = -v/R \cdot \hat{u}_r$

$a = -v/R \cdot \hat{u}_r + dv/dt \cdot \hat{u}_\theta = a_r\hat{u}_r + a_t\hat{u}_\theta$

Componente radiale$_r$ e tangenziale$_t$, se il modulo è costante nel tempo allora c'è solo la componente radiale (Moto Circolare Uniforme)

Moto lungo una traiettoria



Con versore normale $\hat{n}$ diretto verso il centro del **cerchio osculatore** e versore tangente $\hat{t}$.

$a = -v^2/r_c\, r\hat{} = v^2/r_c\, n\hat{}$

Se conosco la legge oraria del moto, cioè OP(t), conosco la velocità e l'accelerazione. OP(t) posso descriverlo come traiettoria nello spazio e distanza percorsa nel tempo lungo la curva s(t). In ogni punto individuo il versore tangente e normale alla traiettoria.

$OP(t) = OP(s(t)) = dOP / ds = \lim_{\Delta s\to 0} OP(s + \Delta s) - OP(s) / \Delta s = \lim_{\Delta s\to 0} \Delta r/\Delta s = \hat{t}$

$v = v\hat{t}$

$a = dv/dt = d(v\hat{t})/dt = dv/dt \cdot \hat{t} + v \cdot d\hat{t}/dt$

La derivata di un vettore costante in modulo è un altro vettore perpendicolare all'originale.

const $= A \cdot A = |A|^2 \Rightarrow 0 = d|A|^2 / ds = d/ds \cdot (A \cdot A) = 2A \cdot dA/ds \Rightarrow A \perp dA/ds$

$d\hat{t}/dt = d\hat{t}/ds \cdot ds/dt = v \cdot d\hat{t}/ds$, $d\hat{t}/ds = \lim_{\Delta s\to 0} \Delta\hat{t}/\Delta s = \hat{n}/\rho$ con ρ = raggio di curvatura locale

$a = d^2s/dt^2 \cdot \hat{t} + (ds/dt)^2 \cdot \hat{n}/\rho = a_t\hat{t} + (v^2/\rho)\hat{n}$

Dinamica del moto circolare

$R = \Sigma_i(F_i) = ma$

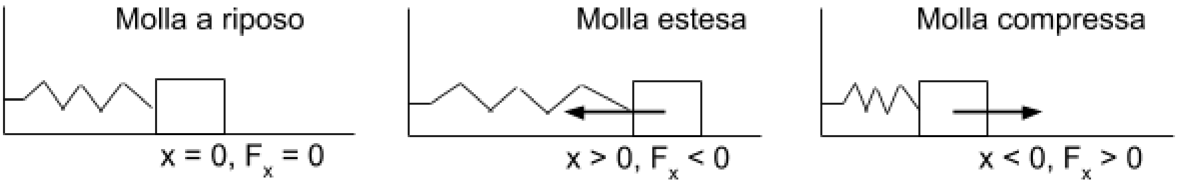
$a = -v^2/r \cdot \hat{u}_r$ con $|a| =$ *const*

$(\Sigma_i(F_i))/m = a = -v^2/r \cdot \hat{u}_r$

Se c'è moto circolare uniforme la risultante delle forze sarà costante in modulo e diretta sempre verso il centro, es. gravità, tensioni.

Forze non costanti in modulo F(x), F(v)

Forza elastica
Dipendente dalla posizione, è descritta dalla **Legge di Hooke**: la forza è proporzionale all'elongazione o alla compressione).
x_0 lunghezza a riposo, k costante elastica.



La forza elastica tende a riportare la molla in posizione di riposo.
$F = -k(x - x_0) = -k \cdot \Delta x$, $x_0 = 0$, $-(k/m)x = F/m = a = d^2x / dt^2$
La condizione di equilibrio con forze esterne è
$\Sigma_i(F_i) = -k \cdot \Delta x + F_{ext} = F_{el} + F_{ext} = 0 \Rightarrow \Delta x = F_{ext} / k$
Forza elastica $F_{el} = -k(x - x_0) = -k \cdot \Delta x$

Fin'ora le forze erano costanti, come F_{peso} o F_d, quindi $\Sigma_i(F_i) = \textit{const} \Rightarrow a = \Sigma_i(F_i) / m \Rightarrow a = \textit{const} = a_0$
Risolvendo tale moto rettilineo o parabolico con le formule viste.
Adesso invece $F(t) = F_0t + F_1t + F_2t^2 \Rightarrow dv/dt = a = (F_0 + F_1t + F_2t^2) / m$
$v = v_0 + \int_{0,t}(a(t))dt = v_0 + (F_0/m)t + (F_1/2m)t^2 + (F_2/3m)t^3$
$x = x_0 + \int_{0,t}(v(t))dt = x_0 + (F_0/2m)t^2 + (F_1/6m)t^3 + (F_2/12m)t^4$
Se l'accelerazione non è costante, a = f(t), può essere complicato trovare r(t), bisogna risolvere l'**equazione differenziale** $f(t) = d^2x / dt^2$
Per la forza elastica $F_{el} = -k(x - x_0) = -k \cdot \Delta x$
$x_0 = 0$, $-(k/m)x = F/m = a \Rightarrow a = d^2x / dt^2 = -(k/m)x \Rightarrow d^2x / dt^2 + (k/m)x = 0$
$x(0) = 0$, $v(0) = 0$
Trovo x(t)

Attrito in mezzo viscoso
Forza che dipende dalla velocità, è una forza che si oppone al moto di un corpo nel fluido ed è generata dalla resistenza dell'aria e dei fluidi viscosi.
Sempre diretta opposta alla velocità e il modulo $|F(v)|$, a seconda del tipo di mezzo viscoso, ha due regimi:

- Per v basse e mezzi viscosi $\Rightarrow F_r(v) = -b_1v$
- Per v alte e mezzi rarefatti (gas) $\Rightarrow F_r(v) = -b_2v^2v\hat{}$

Il coefficiente dipende dalla forma, dalle dimensioni del corpo e dalla viscosità del mezzo.

Es. primo regime
Corpo parte da fermo sotto l'azione di F_{peso} e della resistenza del fluido
$F_r(v) = -b_1v$
$\Sigma_i(F_{iy}) = -mg + b_1v = ma_y = m \cdot dv/dt$ **equazione differenziale**
Caso limite: v = 0 all'inizio e il moto è come quello di un grave, poi v aumenta finché c'è una velocità limite per cui le due forze si equivalgono.
$-mg + b_1v_{lim} = 0 = ma_y \Rightarrow v_{lim} = mg/b_1$

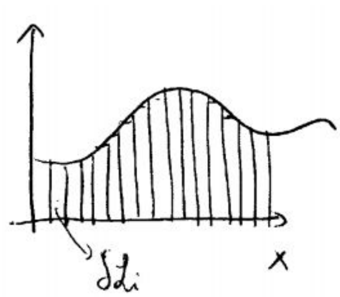
Corpi con massa più grande o con coefficiente più piccolo raggiungeranno velocità limite più elevate. Ecco perché martello e piuma sulla terra cadono al suolo con velocità diverse, ma hanno lo stesso moto nel vuoto. Un paracadute aperto garantisce b_1 maggiore, limitando molto la velocità limite.
$F_e = (-mg + F_A)\hat{\jmath} = (-\rho_{corpo}vg + \rho_{fluido}vg)\hat{\jmath}$
Non c'è solo F_{peso} ma in realtà c'è anche la forza di Archimede F_A, proporzionale a F_{peso}, diretta come F_{peso} ma con verso opposto. Non cambia niente e si può trattare F_{peso} e F_A insieme come $F_e = F_{peso} + F_A$.
$F_e = -\rho_{corpo}vg(1 - \rho_{fluido}/\rho_{corpo})\hat{\jmath} = -mg(1 - \rho_{fluido}/\rho_{corpo})\hat{\jmath} = -mg_{eff}\hat{\jmath}$

Lavoro
Consideriamo una forza costante che agisce su un corpo che si muove in linea retta, lo spostamento è $\Delta r = s$ e il **lavoro** compiuto dalla forza costante F sul corpo mentre subisce lo spostamento è
$L = F \cdot s = Fs \cdot \cos\theta = F_{||}s = Fs_{||}$ J = Nm
Il lavoro, quindi, è il **prodotto scalare dei due vettori**, ovvero il prodotto dei moduli e del coseno dell'angolo compreso, o il **prodotto dello spostamento per la componente della forza lungo lo spostamento**, o il **prodotto della forza per la componente dello spostamento lungo la forza**.
Se il corpo non si muove allora L = 0 e, a seconda di θ, il lavoro può essere positivo, negativo o nullo (quando $\theta = 90°$).

Esempi
Sollevatore di pesi, durante il sollevamento $L = F_s d$ (F_s forza per sollevare e d altezza del sollevamento). Se il sollevatore sta fermo con il peso in mano allora L = 0, se abbassa il peso L < 0;
Un uomo che cammina con un peso in mano esercita una forza verticale sul corpo che non compie lavoro perché perpendicolare allo spostamento.
Forza peso durante il moto di un grave $L = mg \cdot s = -mg(y_f - y_i)$, negativo se $y_f > y_i$, positivo se $y_f < y_i$ e nullo se $y_f = y_i$.
Una casa su un piano con attrito tirata da una forza F_t parallela al piano.
$L_t = F_t L > 0$
$N \perp s \Rightarrow L_N = Ns = 0$
$L_{peso} = mgs = 0$
$L_{attrito} = F_d s = -\mu_d NL = -\mu_d mgL < 0$
Un corpo trainato a velocità costante da una fune con forza F_t su un piano inclinato con attrito, quindi si ha $\Sigma_i(F_i) = 0$, troviamo il lavoro per un percorso la cui quota cambia di h.
$\Sigma_i(F_{yi}) = N - mg\cos\theta = 0$
$\Sigma_i(F_{xi}) = -\mu_d N + F_t - mg\,sen\,\theta = 0$
$F_t = mg\,sen\,\theta + \mu_d mg\cos\theta = mg(sen\,\theta + \mu_d\cos\theta)$
$L_t = F_t s = F_t L = F_t(h/sen\,\theta) = mgh(1 + \mu_d/tg\,\theta) = mgh + \mu_d mgh/tg\,\theta$
$L_{peso} = mgs = -mgL\,sen\,\theta = -mgh$
$L_N = Ns = 0$, $F_{vincolo} \perp$ spostamento
$L_{attrito} = F_d s = -\mu_d NL = -\mu_d mgL\cos\theta = -\mu_d mgh/tg\,\theta$

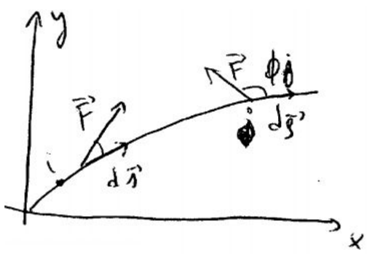
Slitta trainata a velocità costante su piano con attrito da forza F_t inclinata.
$\Sigma_i(F_{xi}) = F_t sen\,\theta + N - mg = 0$
$\Sigma_i(F_{yi}) = F_t cos\,\theta - F_d = F_t cos\,\theta - \mu_d N = 0$
$F_t\ \ \mu_d mg / \cos\theta + \mu d sen\,\theta$
$L = F_t s = F_t s \cos\theta = \mu_d mg / 1 + \mu_d tg\,\theta$
Lavoro di $F_t > 0$, quelli di $F_d < 0$ quindi $L_{tot} = 0$.

In caso di forze non costanti, il lavoro si trova analizzando il lavoro infinitesimo δ L fatto lungo uno spostamento infinitesimo ds, per il quale la forza può essere considerata costante.



In 1D
$\delta L_i = F_i \cdot ds_i = F_i dx_i \Rightarrow L = \Sigma_i(\delta L_i) = \Sigma_i(F_i dx_i) = F_i \cos\theta \cdot dx_i$, con x_i spostamento orizzontale.

In 2D



$\Sigma_i(L_i) = F_i \cdot ds_i = F_i \cos\theta \cdot ds_i$
$F = F_x \hat{\imath} + F_y \hat{\jmath}$, $ds = dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath}$
$L = \int_{i,f} F \cdot ds = \int_{i,f} F\cos\theta \cdot ds = \int_{i,f}(F_x dx + F_y dy)$

Moto circolare uniforme nel piano orizzontale.
La forza che dà l'accelerazione centripeta (es. tensione T) è sempre perpendicolare alla velocità, quindi anche allo spostamento ds.
Istantaneamente il lavoro è nullo e lo è anche complessivamente.
$F_i \cdot ds_i = 0 \Rightarrow L = \Sigma_i(\delta L_i) = \Sigma_i(F_i \cdot ds_i) = 0$
Tutte le forze normali esplicate dai vincoli non fanno mai lavoro perché N è sempre perpendicolare allo spostamento.
Lavoro svolto da una molla di costante k.
$F = ma \Rightarrow -kx = m \cdot (d^2x/dt^2)$
$L_{molla} = \int_{i,f} F_{molla}\, ds = \int_{i,f} -kx\, dx = -½\, kx_f^2 + ½\, kx_i^2 = ½\, k(x_i^2 - x_f^2)$

Energia cinetica
L'energia è una **misura della capacità di compiere lavoro**.
L'**energia cinetica traslazionale** è un particolare tipo di energia legata al moto: dato un punto materiale di massa m, se ha velocità di modulo v, allora l'energia cinetica del corpo è
$K = ½\, mv^2$ J
L'energia cinetica è uno **scalare** ed ha le stesse dimensioni del lavoro, unità di misura è il Joule.
Si intuisce, dal secondo principio, che ci sia una qualche correlazione tra energia e lavoro.

Teorema dell'energia cinetica
Il **lavoro totale compiuto su un corpo** è **uguale alla variazione dell'energia cinetica del corpo**.
$L_{tot} = \Sigma_i(L_i) = \Sigma_i(\int F_i\, ds) = \int \Sigma_i(F_i)\, ds = \int R\, ds$, $R = \Sigma_i F_i$
$L_{tot} = \Delta K = K_f - K_i = ½\, m(v_f^2 - v_i^2)$

Es. **Moto circolare uniforme**: $L = 0 \Rightarrow \Delta K = 0 \Rightarrow v_f = v_i$, v costante in modulo

$\Rightarrow L_{tot} = \int \Sigma_i(F_i)\, ds = \int (-mv^2/r)\hat{u}_r\, ds = \int -mv^2 ds/r\ \hat{u}_r \cdot \hat{u}_t = 0$

Es. **F costante applicata a massa m in 1D**: $F = ma$, $L = F\Delta x = ½ mv_f^2 - ½ mv_i^2 \Rightarrow 2ma(x_f - x_i) = m(v_f^2 - v_i^2)$

$\Rightarrow (ma)(x_f - x_i) = (m/2)(2a)(x_f - x_i) = (m/2)(v_f^2 - v_i^2) = ½ mv_f^2 - ½ mv_i^2$

Es. **Caduta di un grave da y_i a y_f**:

$\Rightarrow L_{peso} = P_y \Delta y = -mg(y_f - y_i) = \Delta K = ½ mv_f^2 - ½ mv_i^2$

se $v_i = 0 \Rightarrow mgh = (m/2)(v_f^2) \Rightarrow v_f = \sqrt{(2gh)}$

Es. **Corpo lanciato contro una molla a quale compressione si ferma**:

$\Rightarrow \Delta K = ½ mv_f^2 - ½ mv_0^2 = 0 - ½ mv_0^2$

$\Rightarrow L_{molla} = - ½ k (x_f^2 - x_i^2) = - ½ k (x_f^2) \Rightarrow x_f = \sqrt{(m/k)} \cdot v_o$

Es. **Corpo fermo lanciato da una molla compressa a quale velocità esce**:

$\Rightarrow \Delta K = ½ mv_f^2 - ½ mv_0^2 = ½ mv_f^2 \Rightarrow L_{molla} = - ½ k (0 - \Delta x_0^2) \Rightarrow v_f = \sqrt{(k/m)} \cdot \Delta x_o$

Es. **Moto parabolico sotto l'azione della forza peso**:

$\Rightarrow L_{peso} = -mg(y_f - y_i) = -mgy$, $\Delta K = ½ mv_f^2 - ½ mv_i^2 = ½ m (v_f^2 - v_0^2 sen^2 \theta)$

$\Rightarrow v_i^2 = v_0^2$, $v_{0x} = v_0 \cos\theta$, $v_{0y} = v_0 sen\,\theta$

$\Rightarrow -2gy = v_y^2 = v_y^2 - (v_0 sen\,\theta)^2 \Rightarrow v_y^2 = (v_0 sen\,\theta)^2 - 2gy$

Potenza

Si definisce la **potenza istantanea** come il lavoro prodotto nell'unità di tempo

$P = \lim_{\Delta t \to 0} \langle P \rangle = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta L/\Delta t = dL/dt$ W = J/s

Si può esprimere in funzione della velocità del corpo e della forza che compie lavoro, supponendo che l'intervallo di tempo sia sufficientemente piccolo da considerare F costante:

$\langle P \rangle = \Delta L/\Delta t = (F \cdot \Delta r)/\Delta t = F \cdot (\Delta r/\Delta t)$

$P = \lim_{\Delta t \to 0} \langle P \rangle = \lim_{\Delta t \to 0} F \cdot (\Delta r/\Delta t) = Fv$

Legge di conservazione dell'energia

Si dice che una grandezza si conserva quando il valore di quella grandezza non varia nel tempo ma è costante.

Se in un sistema l'energia si conserva, la quantità totale di energia rimane costante anche se cambia forma o tipo.

L'**energia meccanica** si divide in:

- **Cinetica**, traslazionale o rotazionale
- **Potenziale**, immagazzinata in un campo di forze (elettromagnetiche, elastiche, gravitazionali…) o in un sistema di interazioni

Vi sono poi altre forme di energia (chimica, nucleare, termica…)

Es. nel caso di un uomo che solleva un grave a velocità costante l'energia passa dall'uomo (chimica nei muscoli) ad energia potenziale gravitazionale.

Def **forza conservativa**: forza per la quale il lavoro non dipende dal percorso ma solo dalla posizione iniziale e finale. Quindi se si percorre un cammino chiuso L = 0 perché $L_{AB} = - L_{BA}$

$\oint F\, ds = 0$

Es.: forze elastiche, forza di gravità, forze elettromagnetiche.

Es. **La forza di attrito non è conservativa**, un corpo con velocità v_0 che si ferma per attrito:

$\Rightarrow L_{attrito} = -F_d d = -\mu_d mgd$

$\Rightarrow \Delta K = 0 - ½ mv_0^2 = -\mu_d mgd$, $d = v_0^2/2\mu_d g$

Se su un corpo compaiono solo forze conservative allora il sistema è detto **conservativo**. Per un sistema conservativo esiste una semplice relazione fra il lavoro compiuto dalle forze e l'energia cinetica.
Si definisce l'**energia potenziale U**: la variazione di energia potenziale $\Delta U = U_f - U_i$ dovuta ad una forza conservativa è l'opposto del lavoro fatto da tale forza
$\Delta U = - L_{forzaconservativa} = - \int_i^f F\, ds = U_f - U_i$

Es. **1D lungo x**: $\Delta U = -L = - \int_{xi, xf} F_x(x)\, dx$
Es. **Forza peso ed energia gravitazionale**: è come se si **immagazzinasse energia nell'alzare la quota**
$L_{peso} = -mg(y_f - y_i)$
$\Delta U = mg(y_f - y_i) = mgh$ con h differenza di quota
U è sempre definita a meno di una costante additiva, per es. fissata U = 0 per y = 0 $\Rightarrow$ U = mgy, $\Delta U = mgh$

$\oint F\, dr = 0$, $\Delta U = U_f - U_i = - \int_{i, f} F\, dr$
$F(x, y, z) \Leftrightarrow U(x, y, z)$
Percorso inverso: data U, la forza lungo una direzione è data dal **gradiente**, o **derivata direzionale**
$F = -\nabla U$
$F_x = - \partial U / \partial x$, $F_y = - \partial U / \partial y$, $F_z = - \partial U / \partial z$

Conservazione dell'energia meccanica
In sistemi conservativi la somma E di energia cinetica K e potenziale U è costante
$E = K + U = \mathit{const} \Leftrightarrow \Delta E = 0$
$\Delta K + \Delta U = 0 \Leftrightarrow \Delta K = -\Delta U = L_{forzeconservative}$
$\Delta K = L_{TOT} = L_{FC} = -\Delta U$

Teorema dell'energia generalizzato
In un sistema dove sono presenti forze conservative, vincoli e forze non conservative, la variazione di energia meccanica è uguale al lavoro fatto dalle forze non conservative.
$\Delta (U + K) = L_{FNC} + L_{vincoli} = L_{FNC}$

Lavoro ed energia interna
L'energia totale di un **sistema isolato**, cioè **in assenza di forze esterne**, si conserva. L'energia interna si può trasformare in energia meccanica.

Relazione generale fra energia potenziale, lavoro e forza conservativa
$F(x, y, z) \Leftrightarrow U(x, y, z)$
$\Delta U = U_f - U_i = -L(r_i, r_f) = - \int_{i, f} F\, dr$
$F = -\nabla U$, $F_x = - \partial U / \partial x$, $F_y = - \partial U / \partial y$, $F_z = - \partial U / \partial z$

Es. **Energia elastica**
Origine degli assi posto nella lunghezza a riposo della molla e $U(0) = 0$
Forza elastica $F_x(x) = -kx$
Lavoro $L = \int_{i,f} F_x(x)\, dx = -k/2\, (x_f^2 - x_i^2)$
Energia potenziale $U_f - U_i = -L = k/2\, x_f^2 - k/2\, x_i^2$
$U(0) = 0 \Rightarrow U(x) = ½\, kx^2$
$U + K = U_i + K_i = U_f + K_f =$ *const*
$½\, kx_i^2 + ½\, mv_i^2 = ½\, kx_f^2 + ½\, mv_f^2$
Se la posizione iniziale da fermo è in x_1 si muoverà confinato in un intervallo $[-x_1, x_1]$
Energia cinetica $E = E_2 = ½\, kx_1^2 = ½\, kx^2 + ½\, mv^2$, $E_1 - ½\, kx^2 = ½\, mv^2$
Massima nell'origine
La velocità dipende dalla posizione $v = \sqrt{(k/m \cdot (x_1^2 - x^2))}$

Es. **Energia potenziale gravitazionale**, moto dei satelliti e dei pianeti
Se abbiamo un corpo di massa m nel campo di forze gravitazionali esercitate dal corpo di massa M, con r distanza dai due centri di massa
$F_g = - GMm/r^2 \cdot \hat{r}$
Prendiamo una traiettoria arbitraria casuale che congiunga i punti i e f: consideriamo un punto di riferimento nel punto iniziale i, con energia potenziale U_i, e vediamo quanto cambia l'energia potenziale arrivando nel punto finale f:
$\Delta U = U_f - U_i = -L_g \Rightarrow U_f = - \int_{i,f} F_g\, ds + U_i$
Ma F_g è radiale quindi l'unico lavoro non nullo è quello legato a spostamenti lungo il raggio. Posso arrivare in f muovendomi lungo il raggio e poi lungo una circonferenza (lungo la quale la forza radiale non compie lavoro).
$\hat{r}\, ds = dr$
$\Delta U = U_f - U_i = - \int_{ri, rf} (F_g(r))dr = GMm \int_{ri, rf} dr/r^2 = GMm[-1/r]_{ri}^{rf} = -GMm(1/r_f - 1/r_i)$
Per convenzione $U = 0$ a distanze molto grandi da M ($U_i = 0 \Rightarrow r_i \rightarrow \infty$), $U(r) = - GMm/r$
L'energia potenziale è negativa e aumenta in valore assoluto al diminuire di r. L'energia cinetica aumenta al diminuire di r.
Se $E > 0$ il corpo può andare all'infinito e la sua K non diventerà mai 0. Il moto non è confinato (traiettoria iperbolica). Lo stesso se $E = 0$ (traiettoria parabolica).
Se $E < 0 \Rightarrow U + K < 0$. Non si può arrivare a $r \rightarrow \infty$, perché K sarebbe negativa ed è impossibile.
Quindi mai si andrà all'infinito e il moto è confinato (traiettoria ellittica o circolare).
Data l'energia meccanica E, si può calcolare la distanza massima:
$E = ½\, mv^2 - GMm/r \Rightarrow E = - GMm/r_{max} \Rightarrow r_{max} = - GMm/E$

Consideriamo un'orbita circolare, il moto sarà circolare uniforme (se r è costante $\Rightarrow$ U non cambia $\Rightarrow$ K non cambia $\Rightarrow$ v è costante). Ma c'è da soddisfare alla richiesta dell'accelerazione centripeta:
$- mv^2/r = - GMm \Rightarrow K = ½\, mv^2 = ½\, GMm/r = -½\, U$
L'energia cinetica del corpo in orbita è la metà del valore assoluto dell'energia potenziale- L'energia meccanica di un corpo che orbita a v costante a distanza R è:
$E_{tot} = K + U = ½\, mv^2 - GMm/r = ½\, GMm/r - GMm/r = - GMm/2r$
Se il satellite parte dalla superficie terrestre, che energia cinetica deve avere per arrivare ad andare in orbita in R con la velocità giusta per orbitare?
$E_{fin} = K_{fin} + U_{fin} = - GMm/2r = E_{in} = K_{in} + U_{in} = K_{in} - GMm/R_T$

Questo valore è definito **energia di legame** per il moto circolare, rappresenta l'energia che va donata al corpo per liberarlo dall'influsso del pianeta.
$E_{tot} = K + U = ½\ mv^2 - GMm/r = ½\ GMm/r - GMm/r = - GMm/2r = U/2$
Se l'orbita è ellittica l'energia di legame è
$E_{tot} = -GMm/2a$ con a semiasse maggiore
Se si volesse far arrivare il corpo in orbita a distanza infinita U = 0 con velocità nulla $v_f = 0$, allora l'energia totale deve essere almeno 0. Questa condizione determina l'energia meccanica minima da fornire al corpo per poter sfuggire all'influenza di corpo di massa maggiore.
Se mi trovo a distanza r_i, che velocità v_i è necessaria per sfuggire alla forza di gravità?
$E_i = ½\ mv_i^2 - GMm/r_i = 0 \Rightarrow v_i = \sqrt{(2GM/r_i)}$

Per sfuggire dalla Terra, un razzo (che parte dalla superficie terrestre $r_i = R_T$) deve avere una v_i tale che $E_i > 0$. Se invece vuole arrivare ad una r_{max}:
$r_i = R_T$, v_i, $r_f = r_{max}$, $v_f = 0$
$U_i + K_i = U_f + K_f$
$½\ mv_i^2 - GM_Tm/R_T = - GM_Tm/r_{max}$
$v_i = \sqrt{(2GM_T \cdot (1/R_T - 1/r_{max}))}$
Velocità di fuga quando $r_{max} \to \infty$, $v_i = \sqrt{(2GM_T/R_T)} = 11.2$ Km/s

Forza elettrica
Le forze elettrostatiche si manifestano in deformazioni elastiche e stress meccanici mentre le forze elettromagnetiche in computer, elettronica ecc...
Le interazioni elettromagnetiche tengono insieme le molecole.
Proprietà: **carica elettrica**, scoperta per sfregamento di un bastoncino isolante contro un panno isolante, acquisizione cariche superficiali, è posseduta da un corpo definito **carico**.
Cariche uguali si respingono, cariche diverse si attraggono.
I fenomeni elettrici ed elettromagnetici vengono ricondotti alle interazioni elettromagnetiche fra le cariche.
La conduzione elettrica è il manifestarsi del moto delle cariche attraverso i materiali. Essi sono:
- **Conduttori**: le cariche sono libere di muoversi e si distribuiscono uniformemente in superficie.
- **Isolanti**: le cariche sono legate e non si muovono liberamente.
- **Semiconduttori**: proprietà intermedie, solo poche cariche sono libere di muoversi.

La carica elettrica si conserva: la carica totale prodotta in qualsiasi processo è nulla.
Elettroni, cariche negative, orbitano attorno protoni, cariche positive. Elettroni in eccesso, carica negativa. Elettroni in difetto, carica positiva.

Il Coulomb
Nel S.I. il Coulomb è l'unità di misura per la carica elettrica.
Elettrone $e^- = -1.60207 \cdot 10^{-19}$ C, carica più piccola di tutte.

Legge di Coulomb
$F_e = K_e \cdot q_1q_2/r^2 \cdot r$^
$K_e = 1/4\pi\varepsilon_0 = 8.99 \cdot 10^9\ Nm^2/C^2$
ε_0 **Costante dielettrica nel vuoto** = $8.854 \cdot 10^{-12}\ C^2/Nm^2$

Modello planetario dell'atomo di idrogeno
$|F_e| = k_e e^2/r_h^2 = 8.2 \cdot 10^{-8}$ N
$|F_g| = G \cdot m_e m_p/r_h^2 = 3.6 \cdot 10^{-47}$ N quindi $|F_g| << |F_e|$
$|F_e| = k_e e^2/r_h^2 = m_e \omega^2 r_h$
$\omega^2 = 4\pi^2/T^2 = k_e e^2/m_e r_h^3$ quindi $T = 2\pi\sqrt{}\, (m_e r_h^3/k_e e^2)$

Principio di sovrapposizione
La forza elettrica agente su una carica in presenza di altre cariche può essere calcolata come somma vettoriale delle forze elettriche esercitate dalle cariche. Il campo elettrico in ogni punto è la sovrapposizione lineare dei campi generati da ciascuna carica.

Def **campo**: qualunque grandezza (scalare o vettoriale) che si può associare alla posizione può essere definita come un campo.
Se metto q_0 in un punto dello spazio, conoscendo il campo in quel punto trovo la forza che agisce su q_0.

Campo elettrico
Proprietà dello spazio indipendente dalla carica di prova.
Vettoriale, N/C o V/m, radiale e uscente se la carica e positiva, entrante se negativa.
$E(x, y, z) = F_c(x, y, z,)/q_0 \Leftrightarrow F = Eq_o$
$E = k_e \cdot \Sigma_i(q_i/r_i^2)r_i$^, quindi indipendente dalla carica di prova
Se puntiforme $E = k_e \cdot q/r^2 \cdot r$^
$F = - \nabla U$, $F_x = - \partial U/\partial x$, $F_y = - \partial U/\partial y$, $F_z = - \partial U/\partial z$
$\Delta U = U_f - U_i = -L(r_i, r_f) = - \int_i^f F\, dr$
$\oint F\, dr = 0$ perché è conservativa
Il campo non cambia se eseguo un'operazione di simmetria.

Linee di campo
Caratteristiche:
- in ogni punto il campo elettrico E è tangente alle linee di campo (**direzione**)
- il **verso** è dato dalla freccia (**uscente se positivo**, **entrante se negativo**)
- più linee significa più intensità, quindi (#linee / area) $\propto |E|$
- **non si intersecano mai**

Potenziale elettrico
Energia potenziale per unità di carica di una carica di prova q_0 nel punto in esame.
$E = F/q_0$, $V = U/q_0$ [1V = 1J/C], $\Delta V = \Delta U / q_0 = - \int_A^B E\, ds = V_B - V_A$
Può essere visto come il lavoro per unità di carica necessario per portare una particella di prova da infinito a P in una regione di campo.
Se carica puntiforme $V = k_e q/r$
Se ho più cariche $V = k_e \Sigma_i(q_i/r_i)$
$E(x, y, z) \Leftrightarrow V(x, y, z)$

Dipolo
Momento di dipolo $P = qL\ k\hat{}$ ⇔ $P = qL$ e $P\hat{} = P / |P|$
Con q carica, L distanza e k^ versore congiungente.
$E = k_e\ P/r^3$
Notiamo che il campo di una carica puntiforme è proporzionale a r^2 mentre quello del dipolo è proporzionale a r^3.

Flusso del campo elettrico
Data una superficie piana descritta dal vettore s e un campo elettrico E, costante su s, il flusso del vettore campo elettrico attraverso s è definito da
$\Phi_s(E) = Es$
Massimo se E è perpendicolare alla superficie, nullo se parallelo.
In generale in un campo variabile: si divide la superficie in elementi infinitesimi, su ciascuno si calcola il flusso infinitesimo e si sommano.
$\Phi_s(E) = \lim_{\Delta si \to 0} \Sigma E_i\ \Delta s_i = \int\int E\ dS = \int\int_s E\ n\hat{}\ dS = \int\int_s E sen\theta\ dS$

Teorema di Gauss
Il flusso in un campo elettrico attraverso una superficie chiusa è uguale alla carica contenuta all'interno della superficie per una costante universale e non dipende dalla posizione delle cariche interne.
$\Phi_E = \oint E\ ds = q/\varepsilon_0\ Nm^2/C$
Se ci sono più cariche vale il principio di sovrapposizione. Si definisce **superficie gaussiana** una superficie chiusa attraverso la quale si calcola il flusso del campo elettrico.

Legge di Gauss
$\Phi_E = qmt / \varepsilon_0$ con $\varepsilon_0 = 1/4\pi k_e$ quindi in generale per carica puntiforme $\Phi_E = q / \varepsilon_0$
Vale su superfici chiuse con forze che variano come l'inverso della distanza al quadrato
Φ - ES - $1/r^2$
Flusso totale = #linee uscenti - #linee entranti
$\Phi_E = \oint E\ ds = \oint E_n\ ds$ con n^ versore normale

Angolo solido $\Omega = A / r^2$, area sottesa/distanza in una superficie sferica

Pendolo
Pulsazione $\Omega = \sqrt{g/L}$ con L = lunghezza del pendolo
Periodo $T = 2\pi\sqrt{L/g}$

Oscillazione Smorzata
Pulsazione $w = \sqrt{k/m}$
Periodo $T = 2\pi\sqrt{m/k}$

$x(t) = c_1\cos(w_0t) + c_2 sen(w_0t) = A\cos(w_0t + \phi)$
$c_1 = A\cos(\phi)$, $c_2 = A sen(\phi)$, $\tan(\phi) = -c_2/c_1$, $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$

Equazioni differenziali
Equazioni la cui incognita è una funzione espressa nelle sue derivate. Usate per risolvere le equazioni del moto.
I ordine: moto in fluido viscoso, carica e scarica di un condensatore, crescita della popolazione, decadimento radioattivo ecc…
$a_n \cdot d^n x / dt^n + \ldots + a_1 \cdot dx/dt + a_0 x = f(t)$ **equazione differenziale (*)**
$a_n \cdot d^n x / dt^n + \ldots + a_1 \cdot dx/dt + a_0 x = 0$ **omogenea associata (**)**
Se $x = u(t)$ **risolve (**) allora anche** $x = A \cdot u(t)$ con A costante **è soluzione**.
Se $x = u(t)$ e $x = v(t)$ **risolvono (**) allora anche una qualsiasi combinazione lineare** $w(t) = c_1 u(t) + c_2 v(t)$ **è soluzione**.

Quindi se w(t) è soluzione di (**) (cioè $\in V_0$) e $u_{f,}(t)$ è una soluzione particolare di (*) allora al variare di w(t) in V_0, tutte le soluzioni di (*) si trovato con $u(t) = u_f(t) + w(t)$
Cioè **soluzione particolare di (*) + tutte le soluzioni di (**) = tutte le soluzioni di (*)**.
Come **soluzione particolare** spesso troviamo la **soluzione di equilibrio** in cui il sistema è in equilibrio e l'oggetto è fermo.