Cheatsheet di Analisi Matematica

Federico Matteoni

Limiti Notevoli — Sostituire x con $f(x)$ per ottenere lo stesso risultato

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\alpha^x-1}{x}=\ln(\alpha) \qquad \lim_{x\to\infty}(1+\frac{\alpha}{x})^{nx}=e^{n\alpha}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha \qquad \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$$

Derivate e integrali di funzioni elementari

Funzione	**Derivata**	**Integrale**
x	$\frac{d}{dx}x=1$	$\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+c$
x^n	$\frac{d}{dx}x^n=n\,x^{n-1}$	$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$
$\sin(x)$	$\frac{d}{dx}\sin(x)=\cos(x)$	$\int\sin(x)\,dx=-\cos(x)+c$
$\cos(x)$	$\frac{d}{dx}\cos(x)=-\sin(x)$	$\int\cos(x)\,dx=\sin(x)+c$
$\frac{1}{x}$	$\frac{d}{dx}\frac{1}{x}=-\frac{1}{x^2}$	$\int\frac{1}{x}\,dx=\ln(x)+c$
$\ln(x)$	$\frac{d}{dx}\ln(x)=\frac{1}{x}$	$\int\ln(x)\,dx=x(\ln(x)-1)+c$ *(per parti)*

$$\frac{d}{dx}\tan(x)=\frac{1}{\cos^2(x)} \qquad \frac{d}{dx}\arctan(x)=\frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{d}{dx}\arcsin(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}\arccos(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Derivate – Regole di derivazione

$\frac{d}{dx}f(g(x))=f'(g(x))\cdot g'(x)$

$\frac{d}{dx}f(x)\cdot g(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Integrali – Regole di integrazione

$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx=F(g(x))+c$

Integrale per parti
$\int f(x)\cdot g(x)\,dx=F(x)g(x)-\int F(x)\cdot g'(x)\,dx$

Differenziali – Soluzioni generali

$y'=a(x)\cdot y+b(x)$
$\Rightarrow y=e^{A(x)}\cdot\int e^{-A(x)}\cdot b(x)\,dx+c$
con $A(x)=\int a(x)\,dx$

$y'=a(x)\cdot f(y)$ *Variabili separabili*
$\Rightarrow\int\frac{1}{f(y(x))}\,dx=\int a(x)\,dx$

$y''+ay'+by=0$ *Di secondo grado* $\lambda^2+a\lambda+b=0\to\lambda_1,\lambda_2$

$\lambda_1\neq\lambda_2\in R\Rightarrow y(x)=c_1e^{\lambda_1x}+c_2e^{\lambda_2x}$

$\lambda_1=\lambda_2\in R\Rightarrow y(x)=c_1e^{\lambda_1x}+xc_2e^{\lambda_1x}$

$\lambda_1=\alpha+i\beta,\ \lambda_2=\alpha-i\beta$
$\Rightarrow y(x)=e^{\alpha x}(c_1\cos(\beta x)+c_2\sin(\beta x))$

$\sin^2(x)+\cos^2(x)=1 \qquad \sin(2x)=2\sin(x)\cos(x) \qquad \cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x) \qquad \tan(2x)=\frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$

Studio di funzione

1. **Insieme di definizione**

$\frac{1}{f(x)} \Rightarrow f(x) \neq 0$

$\log_a(f(x)) \Rightarrow f(x) > 0$

$\sqrt[n]{f(x)} \Rightarrow f(x) \geq 0$ per n pari

$\arcsin(f(x))$ *oppure* $\arccos(f(x)) \Rightarrow -1 \leq f(x) \leq 1$

2. **Asintoti**

Orizzontali

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = l \neq \infty$$

Verticali

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$$

x_0 punto di discontinuità

Obliqui

$y(x) = mx + q$ asintoto obliquo se

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq \infty, 0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx = q$$

3. **Derivate e segno**

$f'(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$f'(x_0) \geq 0 \Rightarrow f(x_0)$ **crescente**
$f'(x_0) \leq 0 \Rightarrow f(x_0)$ **decrescente**
x_0 **angoloso** se $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$ finiti
x_0 **cuspide** se $f'_+(x_0) = \pm\infty \wedge f'_-(x_0) = \mp\infty$
x_0 **minimo** se $f(x)$ decrescente $\to x_0 \to$ crescente
x_0 **massimo** se $f(x)$ crescente $\to x_0 \to$ decrescente

$f''(x)$

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f(x_0)$ **convessa**
$f''(x_0) < 0 \Rightarrow f(x_0)$ **concava**
x_0 **flesso** se $f''(x_0) = 0$

Valori di sin **e** cos

Angolo	sin	cos
$0 = 2\pi = 360$	0	1
$30 = \frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$45 = \frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$60 = \frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$90 = \frac{\pi}{2}$	1	0
$180 = \pi$	0	-1
$270 = \frac{3\pi}{2}$	-1	0

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$