



[\[정수론\]](#)

[\[선형대수학\]](#)

[\[이산수학\]](#)

[〈경우의 수와 생성함수〉](#)

[〈그래프〉](#)

[\[확률과통계\]](#)

[〈이산형〉](#)

[〈연속형〉](#)

[\[복소해석학\]](#)

[〈해석함수〉](#)

[〈비해석함수〉](#)

[\[미분기하학\]](#)

[〈곡선〉](#)

[〈곡면〉](#)

[\[위상수학\]](#)

[〈집합 · 위상의기초 · 사상 · 거리공간〉](#)

[〈수렴과분리공리 · 콤팩트 · 연결〉](#)

[\[현대대수학\]](#)

[〈군〉](#)

[〈환〉](#)

[〈체〉](#)

[\[실해석학\]](#)

[〈미적분학\(편도함수 · 다중적분\)〉](#)

[〈실수체계 · 수열 · 연속 · 미분 · 적분〉](#)

[〈급수 · 함수열〉](#)

[\[기타\]](#)

[〈미분방정식〉](#)

[정수론]

1.

$\gcd(21, 66) = 3 \mid 45$ 이므로 $|A| = 3$.

$1^{\frac{\varphi(151)}{\gcd(\varphi(151), 3)}} \equiv 1 \pmod{151}$, $\gcd(\varphi(151), 3) = 3$ 이므로 $|B| = 3$.

$|A| = 3 = |B \cup C|$ 이려면 $C \subset B$ 이어야 하므로 $|C| = \gcd(n, 150) = 1$ 또는 3 이어야 한다.

$\gcd(n, 150) = 1$ 인 n 의 개수 $\varphi(150) = 40$.

$\gcd(n, 150) = 3$ 인 n 의 개수 $\varphi(50) = 20$ 이므로 구하는 값 60 .

2.

$5^{\varphi(157)/2} = 5^{78} \equiv -1 \equiv 156 \pmod{157}$, $5^{\varphi(157)} \equiv 5^{156} \equiv 1 \pmod{157}$.

157과 서로소가 아닌 수는 주어진 합동식의 해가 되지 않는다.

157과 서로소인 $x \equiv 5^t \pmod{157}$ 라 쓸 수 있다.

$5^{6t} \equiv 5^{78} \pmod{157}$, $t \equiv 13 \pmod{26}$, $t \equiv 13, 39, \dots, 143 \pmod{156}$.

따라서 A 의 원소의 개수는 4.

$157 - i \equiv -i \pmod{157}$ 이므로 $1 \leq i \leq 155$ 인 i 에 대하여

$$\left(\frac{5^i}{157}\right)\left(\frac{i^3}{157}\right)\left(\frac{157-i}{157}\right) = \left(\frac{5^i}{157}\right)\left(\frac{i^4}{157}\right)\left(\frac{-1}{157}\right) = \left(\frac{5^i}{157}\right),$$

$5^i \in \{2, 3, \dots, 156\}$, $5^i - 1 \in \{1, 2, \dots, 155\}$ 이므로

$$\sum_{i=1}^{155} \left\{ \left(\frac{5^i}{157}\right)\left(\frac{i^3}{157}\right)\left(\frac{157-i}{157}\right) + \left(\frac{5^i-1}{157}\right) \right\}$$
$$= \sum_{i=1}^{155} \left\{ \left(\frac{5^i}{157}\right) + \left(\frac{5^i-1}{157}\right) \right\}$$
$$= \sum_{k=2}^{156} \left(\frac{k}{157}\right) + \sum_{k=1}^{155} \left(\frac{k}{157}\right)$$
$$= \left[0 - \left(\frac{1}{157}\right)\right] + \left[0 - \left(\frac{156}{157}\right)\right]$$
$$= -2.$$

3.

$\gcd(\varphi(p), a) = 1 = \gcd(\varphi(p), b)$ 이므로 $\gcd(\varphi(p), ab) = 1$.

(범 $\varphi(p)$ 에 관한 곱셈 역원 a^* , b^* , $(ab)^*$ 있다.)

$|r^{ab}| = \frac{\varphi(p)}{\gcd(\varphi(p), ab)} = \varphi(p)$ 이므로 r^{ab} 는 원시근.

$r^{ab} \equiv r^a \pmod{p}$ 또는 $r^{ab} \equiv r^b \pmod{p}$

$\Leftrightarrow ab \equiv a \pmod{\varphi(p)}$ 또는 $ab \equiv b \pmod{\varphi(p)}$

$\Leftrightarrow b \equiv 1 \pmod{\varphi(p)}$ 또는 $a \equiv 1 \pmod{\varphi(p)}$ 이므로

포함배제의 원리에 따라 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 의 개수 $2|X| - 1$.

$p - 1 = 2^k \cdot d$, $k \geq 1$, $\gcd(2, d) = 1$ 라 할 때,

$15 = 2|X| - 1$ 이려면 $|X| = 8 = \varphi(p - 1) = 2^{k-1}\varphi(d)$.

$k = 1$ 일 때 $d = 15$, $p = 2^k \cdot d + 1 = 31$,

$k = 2$ 일 때 $d = 5$, $p = 21$,

$k = 3$ 일 때 $d = 3$, $p = 25$,

$k = 4$ 일 때 $d = 1$, $p = 17$.

그러므로 모든 $p = 17, 31$.

4.

주어진 합동식은 $\begin{cases} (x+1)^2 \equiv k+1 \pmod{3} \\ (x-1)^2 \equiv k+1 \pmod{25} \end{cases}$ 과 동치이다.

합동식 $(x+1)^2 \equiv k+1 \pmod{3}$ 에 $x \equiv 0, 1, 2 \pmod{3}$ 을 대입하면 $-k, -k, 2-k \equiv 0 \pmod{3}$ 이므로 $k \equiv 0, 2 \pmod{3}$ 일 때 해가 존재한다.

$1^2 \equiv 1$, $2^2 \equiv 4$, $3^2 \equiv 9$, $4^2 \equiv 16$, $5^2 \equiv 0$, $6^2 \equiv 11$, $7^2 \equiv 24$,

$8^2 \equiv 14$, $9^2 \equiv 6$, $10^2 \equiv 0$, $11^2 \equiv 21$, $12^2 \equiv 19 \pmod{25}$ 이므로

$k+1 \equiv 0, 1, 4, 9, 11, 14, 16, 19, 21, 24$,

즉 $k \equiv 24, 0, 3, 8, 10, 13, 15, 18, 20, 23 \pmod{25}$ 일 때 해가 존재한다.

두 합동방정식의 해가 동시에 존재하는 $k = 15, 18, 20$ 이므로 구하는 k 의 값 $11, 12, 13, 14, 16, 17, 19$.

5.

$$x^5 \equiv 23 \pmod{35} \Leftrightarrow \begin{cases} x^5 \equiv 3 \pmod{5} \\ x^5 \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}.$$

$x^5 \equiv 3 \pmod{5}$ 의 해를 찾자.

$1^5 \equiv 1$, $2^5 \equiv 2$, $3^5 \equiv 3$, $4^5 \equiv 4 \pmod{5}$ 이므로 $x \equiv 3 \pmod{5}$.

$x^5 \equiv 2 \pmod{7}$ 의 해를 찾자.

$1^5 \equiv 1$, $2^5 \equiv 4$, $3^5 \equiv 5$, $4^5 \equiv 2$, $5^5 \equiv 3$, $6^5 \equiv 6 \pmod{7}$ 이므로 $x \equiv 4 \pmod{7}$.

중국인의 나머지 정리에 의해 $x^5 \equiv 23 \pmod{35}$ 의 해는

$$x \equiv 3 \cdot 7x_1 + 4 \cdot 5x_2 \equiv 18 \pmod{35}$$

(단, $7x_1 \equiv 1 \pmod{5}$, $5x_2 \equiv 1 \pmod{7}$, $x_1 \equiv -2 \pmod{5}$, $x_2 \equiv 3 \pmod{7}$)

(다른 풀이)

3은 범 5와 범 7에 관한 원시근이다.

$5\text{ind}_3 x \equiv \text{ind}_3 3 \equiv 1 \pmod{4}$ 이므로 $x^5 \equiv 3 \pmod{5}$ 의 해 $x \equiv 3 \pmod{5}$.

$5\text{ind}_3 x \equiv \text{ind}_3 2 \equiv 2 \pmod{6}$ 이므로 $x^5 \equiv 2 \pmod{7}$ 의 해 $x \equiv 4 \pmod{7}$.

중국나머지정리에 따라 $x^5 \equiv 23 \pmod{35}$ 의 해 $x \equiv 18 \pmod{35}$.

(다른 풀이)

$$3^{\frac{\varphi(5)}{\gcd(5, \varphi(5))}} \equiv 3^4 \equiv 1 \pmod{5}$$

이고 $3^5 \equiv 3 \pmod{5}$ 이므로

$x^5 \equiv 3 \pmod{5}$ 는 $\gcd(5, \varphi(5)) = 1$ 개의 해 $x \equiv 3 \pmod{5}$ 를 갖는다.

$$2^{\frac{\varphi(7)}{\gcd(5, \varphi(7))}} \equiv 2^6 \equiv 1 \pmod{7}$$

이므로 $\gcd(5, \varphi(7)) = 1$ 개의 해를 갖고,

그 해를 x_0 라 하면 $\gcd(x_0, 7) = 1$ 이므로

$$x_0^5 \equiv 2 \pmod{7} \Rightarrow 1 \equiv x_0^6 \equiv x_0 \cdot x_0^5 \equiv 2x_0 \pmod{7} \Rightarrow x_0 \equiv 4 \pmod{7}.$$

따라서 $x^5 \equiv 2 \pmod{7}$ 의 해는 $x \equiv 4 \pmod{7}$ 이다.

중국인의 나머지 정리에 의해 구하는 값 $x = 18$.

6.

61은 홀수 소수이므로 원시근 g 있다. $x \equiv g^t \pmod{61}$ 라 하면

$$(x^{10} - 1)(x^{10} + x^5 + 1)(x^{36} - 1) \equiv (x^5 + 1)(x^{15} - 1)(x^{36} - 1)$$
$$\equiv (g^{5t} + 1)(g^{15t} - 1)(g^{36t} - 1) \equiv 0 \pmod{61}$$
$$\Leftrightarrow g^{5t} \equiv -1 \equiv g^{30} \pmod{61},$$
$$g^{15t} \equiv 1 \equiv g^{60} \pmod{61},$$
$$g^{36t} \equiv 1 \equiv g^{60} \pmod{61}$$
$$\Leftrightarrow t \equiv 6, 18, 30, 42, 54 \pmod{60},$$
$$t \equiv 0, 4, 8, \dots, 56 \pmod{60},$$
$$t \equiv 0, 5, 10, \dots, 55 \pmod{60}$$

이므로

해의 개수 $5 + 15 + 12 - 0 - 1 - 3 = 32 - 4 = 28$ 개.

7. $a = 1$, $b = 12 (\neq -1)$, $x = 77$

오일러 정리와 계산에 의해 $25^{99} \equiv 1 \pmod{19}$, $25^{99} \equiv -1 \pmod{13}$.

$\gcd(19, 23) = 1$ 이므로 주어진 합동식은 $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{19} \\ x \equiv -1 \equiv 12 \pmod{13} \end{cases}$ 와 동치.

$a = 1$, $b = 12$. 중국 나머지 정리에 의해

$$x \equiv 1 \cdot 13x_1 + (-1) \cdot 19x_2 \equiv 77 \pmod{247}, \text{ 구하는 } x = 77.$$

(단, $13x_1 \equiv 1 \pmod{19}$, $19x_2 \equiv 1 \pmod{13}$)

8.

$a \in T_m$ 이면 $\gcd(a^{\varphi(8m)}, 8m) = \gcd(1, 8m) = 1$ 이므로 $\gcd(a, 8m) = 1$.

자연수 a 일 때 $\gcd(a, 8m) = 1$ 이면 오일러 정리에 의해 $a \in T_m$,

따라서 $|T_m| = \varphi(8m)$.

m 이 2를 소인수로 갖는다고 하면

$m = 2^k \cdot d$, $\gcd(2, d) = 1$ 인 정수 $k \geq 1$, d 있다.

$\varphi(8m) = 2^{k+2}\varphi(d)$, $4\varphi(m) = 2^{k+1}\varphi(d)$ 이므로 모순이다.

m 이 2를 소인수로 갖지 않을 때 $\varphi(8m) = \varphi(8)\varphi(m) = 4\varphi(m)$ 가 성립하므로 구하는 m 의 개수는 100이하의 양의 홀수 개수 50이다.

9. 60

131과 서로 소 아닌 x 는 합동식의 해가 되지 않는다. 131은 소수이므로 원시근 g 를 갖고, 131과 서로 소인 x 에 대하여

$x \equiv g^t, \ t \in \{1, 2, \cdots, 130 = \varphi(131)\}$ 인 t 있다.

주어진 합동식을 풀면 $x^5 \equiv 1$ 또는 $x^n \equiv 1 \pmod{131}$ 이며,

$g^{5t} \equiv 1 \pmod{131}, \ t \equiv 0, 26, 52, 78, 104 \pmod{130},$ 5개 해 있다.

$g^{nt} \equiv 1 \pmod{131}, \ t \equiv 0 \pmod{\frac{130}{d}}, \ d = \gcd(n, 130)$ 개 해 있다.

문제의 조건을 만족하기 위해서는 우선 $d \leq 5$ 여야 한다.

130의 표준분해 $130 = 2 \times 5 \times 13$ 이므로

① $d = 1$ 인 경우

$t = 0$, 즉 $x \equiv g^0 \equiv 1$ 는 $x^5 - 1 \equiv 0$ 의 해가 된다. 이때 n 의 개수 $\varphi(130) = 48$.

② $d = 2$ 인 경우

$t = 0, 65$, 즉 $x \equiv \pm 1$ 이며, $x \equiv -1$ 은 $x^5 - 1 \equiv 0$ 의 해가 되지 않으므로

해의 개수가 5보다 커지게 되어 조건을 만족하지 않는다.

③ $d = 5$ 인 경우

$t = 0, 26, \cdots, 104$ 이므로 $x^5 - 1 \equiv 0$ 의 해와 같다. 이때 n 의 개수 $\varphi(26) = 12$.

(n 은 $d = 5 = \gcd(n, 130)$ 의 배수 $\Rightarrow 1 = \gcd(n, 26)$)

그러므로 구하는 n 의 개수 60이다.

10. $\sum_{k=3}^{2014} \left(\frac{a_k}{2017} \right) = -4$

$1 \leq k \leq 2016$ 인 k 는 법 2017에 대하여 k^* 를 가지며, 윌슨 정리에 의해

$a_k = k! \times (2017 - k)!$

$$\begin{aligned} &= k! \times (2017 - k)(2017 - k - 1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= k! \cdot (2017 - k)(2017 - k - 1) \cdots (2017 - k + k - 2016) \\ &\equiv k!(-k)(-k - 1)(-k - 2) \cdots (-2015)(-2016) \\ &\equiv k!(-1)^{1 + k - 2016} \cdot 2016 \times 2015 \times \cdots \times k \\ &\equiv k! \times (-1)^{k - 1} 2016! \cdot (k - 1)^* (k - 2)^* \cdots (k - (k - 1))^* \\ &\equiv k(-1)^{k - 1}(-1) \\ &\equiv k(-1)^k \pmod{2017}. \end{aligned}$$

따라서 $\left(\frac{a_k}{2017} \right) = \left(\frac{k(-1)^k}{2017} \right) = \left(\frac{k}{2017} \right)$.

한편, 2017의 원시근 g 와 각 $1 \leq k \leq 2016$ 에 대하여

$k \equiv g^t \pmod{2017}, \ t \in \{1, 2, \cdots, 2016\}$ 인 t 있다.

따라서 $\sum_{k=1}^{2016} \left(\frac{a_k}{2017} \right) = \sum_{k=1}^{2016} \left(\frac{g}{2017} \right)^t = \sum_{t=1}^{2016} (-1)^t = 0$.

(다른 설명)

법 2017에 대한 이차잉여와 이차비잉여는 각각 1008개씩 있으며

르장드르 기호의 값은 각각 1, -1 이므로 $\sum_{k=1}^{2016} \left(\frac{k}{2017} \right) = 0$.

그러므로 $\sum_{k=3}^{2014} \left(\frac{a_k}{2017} \right) = 0 - \left(\frac{1}{2017} \right) - \left(\frac{2}{2017} \right) - \left(\frac{2015}{2017} \right) - \left(\frac{2016}{2017} \right) = -4$.

11.

$\varphi(89) = 88$ 이고, $23^{41n} \equiv 23^1 \pmod{89}$ 에서 $41n \equiv 1 \pmod{88}$ 이므로

$n \equiv 41^* \pmod{88}$.

유클리드 호제법에 의해 $15 \times 41 - 7 \times 88 = -1$ 이므로

$41 \times (-15) \equiv 1 \pmod{88}$, 즉 $n \equiv 73 \pmod{88}$

그러므로 구하는 $n = 73$.

	41	88	
7	42	82	2
	-1	6	

	a	b	
7	$7b - 14a$	$2a$	2
	-1	$b - 2a$	

* 다른 설명: $\gcd(41, 88) = 1$, 오일러 정리에 의해

$41^{40} \equiv 1 \pmod{88}$ 이므로 $41^* \equiv 41^{39}$ 를 계산하자.

$41^2 = 1681 \equiv -79 \equiv 9 \pmod{88}$ 이므로

$$\begin{aligned} 41^{39} &\equiv 41 \times 9^{19} \equiv 41 \cdot 9 \cdot 81^9 \equiv 17 \cdot (-7)^9 \\ &\equiv -17 \cdot 7 \cdot 49^4 \equiv -31 \cdot 39^4 \equiv -31 \cdot 1521^2 \\ &\equiv -31 \times 63^2 \equiv -31 \times 97 \equiv -31 \times 9 \equiv -264 \\ &\equiv -15 \equiv 73 \pmod{88}. \end{aligned}$$

12.

5, 13, 31은 쌍마다 서로 소이다. $f(x) = x^2 + 2x + 4$ 라 하면

법 5, 13, 31 각각에 대하여 $x \equiv 2$ 는 $f(x) \equiv 0$ 의 해가 되지 않는다.

$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -12$ 이며, $\left(\frac{D}{5} \right) = -1, \left(\frac{D}{13} \right) = 1, \left(\frac{D}{31} \right) = 1$ 이므로

주어진 합동식은 법 5, 13, 31 각각에 대해 1개, 3개, 3개의 해를 갖는다.

그러므로 중국인의 나머지 정리에 의해

$x^3 - 8 \equiv 0 \pmod{2015}$ 는 \mathbb{Z}_{2015} 에 9개 해 있다.

13. 61

가정에 의해 $m^{18} \equiv 21 \pmod{100}, \gcd(m, 10) = 1$ 이므로 $\gcd(m, 10^2) = 1$.

오일러 정리에 의해 $m^{\varphi(100)} = m^{40} \equiv 1 \pmod{100}$

한편 $294 = 40 \cdot 6 + 18 \cdot 3$ 이므로

$m^{294} = (m^{40})^6 \cdot (m^{18})^3 \equiv 21^3 \equiv 41 \cdot 21 = 800 + 40 + 20 + 1 \equiv 61 \pmod{100}$.

그러므로 m^{294} 의 마지막 두 자리 수는 61.

14. ②

$50 = 2 \times 5^2$ 이므로 원시근을 갖고, $\varphi(50) = 20$ 이다.

만약 x 가 50과 서로 소가 아니면 $\gcd(x, 50) \neq 1$ 이고

이때 $\gcd(x^{12}, 50) = \gcd(-9, 50) = 1$ 이 되어 모순이다.

따라서 주어진 합동식의 해는 50과 서로 소인 정수 중에서 찾을 수 있다.

(해는 기약잉여계 \mathbb{Z}_{50}^* 에 있다.)

50과 서로 소인 x 에 대하여 $x \equiv 3^t \pmod{50}$ 인 $t \in \{1, 2, \cdots, 20\}$ 있다.

$3^{12t} \equiv -9 \equiv 3^{10} \cdot 3^2 \equiv 3^{12} \pmod{50}$ 에서 $t \equiv 1, 6, 11, 16 \pmod{20}$ 이므로

$x \equiv 3^t \equiv \pm 3, \pm 3^6 \equiv 3, 47, 29, 21 \pmod{50}$.

문제 상황에 맞는 해는 3, 21이므로 구하는 값 24.

15. ⑤ \neg, \sqsubset

p 는 홀수 소수이고 5, 11, 17은 쌍마다 서로 소이다.

가정에 의해 $x^2 \equiv -2p \pmod{935}$ 의 해가 존재하므로

합동식 $x^2 \equiv -2p$ 는 법 5, 11, 17 각각에 대해서 해 있다.

따라서 $1 = \left(\frac{-2p}{5} \right) = \left(\frac{-2p}{11} \right) = \left(\frac{-2p}{17} \right)$.

한편 $\left(\frac{-2}{5} \right) = -1, \left(\frac{-2}{11} \right) = 1 = \left(\frac{-2}{17} \right)$ 이므로 $\left(\frac{p}{5} \right) = -1, \left(\frac{p}{11} \right) = 1 = \left(\frac{p}{17} \right)$ 이다.

$$\begin{aligned} \neg. \left(\frac{-11}{p} \right) &= \left(\frac{-1}{p} \right) \left(\frac{11}{p} \right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} (-1)^{\frac{11-1}{2} \frac{p-1}{2}} \left(\frac{p}{11} \right) \\ &= 1 \text{이므로 } -11 \text{은 } p \text{의 이차잉여.} \end{aligned}$$

$$\sqsubset. \left(\frac{5}{p} \right) = (-1)^{\frac{5-1}{2} \frac{p-1}{2}} \left(\frac{p}{5} \right) = -1 \text{이므로 } 5 \text{는 } p \text{의 이차비잉여.}$$

$$\sqsupset. \left(\frac{17}{p} \right) = (-1)^{\frac{17-1}{2} \frac{p-1}{2}} \left(\frac{p}{17} \right) = 1 \text{이므로 } 17 \text{은 } p \text{의 이차잉여.}$$

그러므로 답은 \neg, \sqsupset .

16. ②

27은 홀수 소수 3의 거듭제곱이므로 원시근을 갖는데,

문제에 원시근 2가 주어져 있다.

주어진 가정으로부터 $16^n x_0 \equiv x_0 \pmod{27}$ 에서

$\gcd(x_0, 27) = 1$ 이므로 양변에 x_0^* 를 곱하면

$2^{4n} \equiv 1 \pmod{27}, 4n \equiv 0 \pmod{18}$ 에서 $n \equiv 0 \pmod{9}$.

그러므로 최소의 $n = 9$.

(오일러 정리에 의해 $1 \equiv x_0^{\varphi(27)} \equiv x_0^{18} = x_0 \cdot x_0^{17}, x_0^* \equiv x_0^{17}$.)

17. ②

- ㄱ. 주어진 연립합동식이 해를 갖는다고 하자.
 $x \equiv 4 \pmod{28} \Rightarrow x \equiv 0 \pmod{4}$,
 $x \equiv 6 \pmod{36} \Rightarrow x \equiv 2 \pmod{4}$ 이므로 모순.
* $\gcd(28, 36) = 4$ 는 $6 - 4 = 2$ 를 나누지 않는다.
- ㄴ. 정수해를 a 라 하자. $a^4 \equiv -1 \pmod{p}$ 이므로
 $a^8 \equiv 1 \pmod{p}$ 가 되어 $\text{ord}_p a \mid 8$.
 $a^4 \not\equiv 1 \pmod{p}$ 이므로 $\text{ord}_p a \neq 1, 2, 4$.
따라서 $\text{ord}_p a = 8$ 이다.
한편 $\gcd(a^4, p) = \gcd(p-1, p) = 1$ 이므로 $\gcd(a, p) = 1$.
오일러 정리에 의해 $a^{\varphi(p)} = a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, $\text{ord}_p a = 8 \mid p-1$.
즉, $p-1 \equiv 0 \pmod{8}$.
- ㄷ. 부정방정식의 해가 존재한다고 하면,
 $x^2 + 2x + 5 \equiv -4 \pmod{13}$ 의 해도 존재한다.
 $2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = -32, \left(\frac{-32}{13}\right) = -1$ 이므로 모순.

18. ⑤

- ㄱ. $p! + 1$ 을 나누는 소수 q 가 p 보다 작다고 하면 가정에 의해 $q \mid p! + 1$,
 $q \mid p!$ 이므로 $q \mid 1$ 이 되어 모순이다.
 $(p! + 1 \equiv 0 \pmod{q}, p! \equiv 0 \pmod{q} \Rightarrow 1 \equiv 0 \pmod{q})$
그러므로 $p! + 1$ 을 나누는 소수는 p 보다 크다.
- ㄴ. 윌슨 정리에 의해 $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$,
 $\gcd(p-1, p) = 1$ 이므로 양변에 $(p-1)^*$ 을 곱하면
 $(p-2)! \equiv 1 \pmod{p}$ 이다.
 $(p=2$ 여도 성립)
- ㄷ. $\gcd(2p, 3) = 1$, $\varphi(2p) = p-1$ 이므로 $3^{\varphi(2p)} = 3^{p-1} \equiv 1 \pmod{2p}$ (오일러정리).
 $(p=2, 3$ 일 때는 성립하지 않는다.)

19. ④

111의 표준분해는 $111 = 3 \times 37$ 이며 $\gcd(3, 37) = 1$.

주어진 합동식은 $\begin{cases} x^2 \equiv 1 \pmod{3} \\ x^2 \equiv -7 \pmod{37} \end{cases}$ 과 동치이며,

$x^2 \equiv 1 \pmod{3}$ 의 해는 $x \equiv \pm 1 \pmod{3}$.

$$\left(\frac{-7}{37}\right) = (-1)^{\frac{37-1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{7-1}{2}} \cdot \frac{37-1}{2} \left(\frac{2}{7}\right) \\ = (-1)^{\frac{7^2-1}{8}} = 1 \text{이므로}$$

$x^2 \equiv -7 \pmod{37}$ 의 해는 법 37에 대하여 2개.

20. ①

- ㄱ. $\gcd(7, 31) = 1 \mid 2$ 이므로 정수해가 존재한다. ($x = -13, y = 3$)
- ㄴ. $\gcd(6, 32) = 2 \mid 22$ 이므로 주어진 합동식은 법 32에 대하여 2개해 있다.
- ㄷ. $\gcd(17, 23) = 1$ 이고, $x^2 + 10x + 20 \equiv 0 \pmod{17}$ 에서
 $D = 10^2 - 4 \cdot 20 = 20, \left(\frac{D}{17}\right) = -1$ 이므로 해 없다.
그러므로 $x^2 + 10x + 20 \equiv 0 \pmod{17 \cdot 23}$ 의 해도 존재하지 않는다.

21. ④

홀수 소수 29이며 1보다 크거나 같고 28보다 작거나 같은 정수 x 에 대하여
 $x \equiv 2^t \pmod{29}$ 인 $t \in \{1, 2, \dots, 28\}$ 있다.
 $2^{4t} \equiv 1 \pmod{29}$ 에서 $t \equiv 0, 7, 14, 21 \pmod{28}$.
따라서 $x \equiv 2^t \equiv 2^0, 2^7, 2^{14}, 2^{21} \pmod{29}$
 $\equiv \pm 1, \pm 12 \pmod{29}$
 $\equiv 1, 28, 12, 17 \pmod{29}$,
문제 상황에 맞는 x 는 1, 28, 12, 17이며, 이를 모두 곱한 값
 $m = 1 \times 28 \times 12 \times 17$
 $\equiv 2^0 \cdot 2^{14} \cdot 2^7 \cdot 2^{21} \equiv 2^{42} \equiv 2^{14} \pmod{29}$.
이때 $2^k \equiv 2^{14} \pmod{29}$ 에서 $2^{k-14} \equiv 1 \pmod{29}$, $k-14 \equiv 0 \pmod{28}$,
구하는 최소의 양의 정수 $k = 14$. ($\text{ord}_{29} 2 = \varphi(29) = 28$)

22. ③

- ㄱ. $\gcd(a, b) = d \Rightarrow as + bt = d$ 인 정수 s, t 가 존재,
(역명제는 항상 성립하지 않는다. $d=1$ 일 때 성립)
 $ap + bq = 1$ 인 정수 p, q 가 존재할 때 a 와 b 는 서로소.
- ㄴ. 정수 $m (\geq 2)$, $2^m - 1$ 이 소수이면, m 도 소수.
정수 $a (\geq 2)$, 양의 정수 m, n ,
(1) $n \mid m$ 이면, $a^n - 1 \mid a^m - 1$.
(2) $(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m,n)} - 1$.
- ㄷ. $110_{(25)} = 1 \times 25^2 + 1 \times 25^1 + 0 \times 25^0 = 650$ 이며,
 $650 = 1 \times 5^4 + 1 \times 5^2$ 이므로 $110_{(25)} = 10100_{(5)}$.

23. ③

- ㄱ. 19는 홀수 소수이므로 원시근을 갖는다.
- ㄴ. $\varphi(8) = \varphi(2^3) = 4$ 의 약수 1, 2, 4에 대하여
 $3^1 \equiv 3, 3^2 \equiv 1, 3^4 \equiv 1 \pmod{8}$ 이므로
 $\text{ord}_8 3 = 2 \neq 4 = \varphi(8)$ 이 되어 3은 8의 원시근이 아니다.
- ㄷ. 양변에 $(g^j)^*$ 를 곱하면 $g^{i-j} \equiv 1 \equiv g^{\varphi(m)} \pmod{m}$ 이므로
 $\text{ord}_m g = \varphi(m) \mid i-j$, 즉 $i-j \equiv 0 \pmod{\varphi(m)}$.

24. ④

$a = 14, b = 32$ 에 대하여 유클리드 호제법 적용하자.

	14	32				
2	12	28	3	2	a	b
		2	4		$3b-6a$	$2a$
					$7a-3b$	$b-2a$

따라서 $32 \times (-3) + 14 \times 7 = 2$.

특수해 $(x_0, y_0) = (-3, 7)$, 일반해 $x = -3 + \frac{14}{2}t, y = 7 - \frac{32}{2}t \ (t \in \mathbb{Z})$.

$(x, y) = (-3 + 7t, 7 - 16t), t \in \mathbb{Z}$.

$t = 0, 1$ 에 대하여 $(x, y) = (-3, 7), (4, -9)$ 이므로 보기 중에서 답은 10(④).

25. ③

- ① $\varphi(5) = 4$ 이고, 4의 약수는 1, 2, 4이다.
법 5에 대하여 $3^1 \equiv 3, 3^2 \equiv -1, 3^4 \equiv 1$,
 $r = 4$.
- ② $\varphi(7) = 6$ 이며 6의 약수는 1, 2, 3, 6이다.
법 7에 대하여 $3^1 \equiv 3, 3^2 \equiv 2, 3^3 \equiv -1, 3^6 \equiv 1$,
 $s = 6$.
- ③ $\varphi(35) = \varphi(5)\varphi(7) = 24$ 이며,
24의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 12, 24이다.
법 35에 대하여 $3^1 \equiv 3, 3^2 \equiv 9, 3^3 \equiv 27, 3^4 \equiv 11$,
 $3^6 \equiv 11 \times 9 \equiv -6$,
 $3^{12} \equiv 36 \equiv 1, 3^{24} \equiv 1^2 \equiv 1$,
 $t = 12$.
(다른 방법) $t = \text{lcm}(4, 6) = 12$.
그러므로 구하는 $rst = 288$.

26. $\gcd(3, 4, 5) = 1 \mid 2$ 이므로 정수해 (x, y, z) 가 존재.

$w = 3x + 4y$ 로 놓으면, 주어진 방정식은 $w + 5z = 2$,

$1 \times (-3) + 5 \times 1 = 2$ 이므로 특수해 $(w_0, z_0) = (-3, 1)$,

$(w, z) = (-3 + 5t, 1 - t)$, $t \in \mathbb{Z}$.

한편, $3x + 4y = w$ 에서 $3 \times (-w) + 4 \times w = w$ 이므로

특수해 $(x_0, y_0) = (-w, w)$,

$(x, y) = (-w + 4s, w - 3s)$, $s \in \mathbb{Z}$ 이므로

$(x, y, z) = (3 - 5t + 4s, -3 + 5t - 3s, 1 - t)$, $s, t \in \mathbb{Z}$.

(다른 풀이)

$3x + 4y = 2 - 5z$ 이고, $3 \times (-1) + 4 \times 1 = 1$ 이므로

$3 \times (-1)(2 - 5z) + 4 \times 1(2 - 5z) = 2 - 5z$.

따라서 $x = -2 + 5s - 4t$, $y = 2 - 5s + 3t$, $z = s$. ($s, t \in \mathbb{Z}$)

27.

주어진 합동식은 $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 0 \pmod{4}$ 와 동치이다.

임의의 정수 a 일 때, $a^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$ 이므로 $x^2, y^2, z^2 \equiv 0 \pmod{4}$.

따라서 $x, y, z \equiv 0 \pmod{2}$.

28. $a = 802$

문제 상황을 합동식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{9} \\ x \equiv 2 \pmod{10} \\ x \equiv -1 \pmod{11} \end{cases}$$

9, 10, 11은 쌍마다 서로 소이다.

중국인의 나머지 정리에 의해

$x \equiv 1 \cdot 110x_1 + 2 \cdot 99x_2 + (-1) \cdot 90x_3 \pmod{9 \cdot 10 \cdot 11}$

$\equiv -440 - 198 + 450$

$\equiv 802 \pmod{990}$.

$(110x_1 \equiv 1 \pmod{9}, 99x_2 \equiv 1 \pmod{10}, 90x_3 \equiv 1 \pmod{11})$

그러므로 구하는 $a = 802$.

29. 288

1008의 표준분해는 $1008 = 2^4 \times 3^2 \times 7$ 이므로

$Z_{1008}^* = \varphi(1008) = \varphi(2^4 3^2 7) = \varphi(2^4) \varphi(3^2) \varphi(7) = 8 \cdot 6 \cdot 6 = 288$.

30. (1) O (2) X

(1) $\left(\frac{97}{101}\right) = \left(\frac{-4}{101}\right) = \left(\frac{-1}{101}\right) \cdot \left(\frac{2^2}{101}\right) = (-1)^{\frac{101-1}{2}} = 1$ 이므로

주어진 이차합동식은 해를 갖는다.

(2) $x^2 + 2x - 28 \equiv 0 \pmod{89}$ 에서 $2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-28) = 116$,

$\left(\frac{116}{89}\right) = \left(\frac{27}{89}\right) = \left(\frac{3}{89}\right) = (-1)^{\frac{3-1}{2} \cdot \frac{89-1}{2}} \left(\frac{-1}{3}\right) = -1$.

그러므로 주어진 이차합동식은 해를 갖지 않는다.

* $D/4 = 29$ 라 할 때 $\left(\frac{D/4}{89}\right) = (-1)^{\frac{29-1}{2} \cdot \frac{89-1}{2}} \left(\frac{2}{29}\right) = -1$

31. ③

19는 홀수 소수이며, $\varphi(19) = 18$ 이고, 18의 약수는 1, 2, 3, 6, 9, 18이다.

$k = 1, 2, 3, 6, 9, 18$ 에 대하여 $9^k \equiv 9, 5, 7, 11, 1, 1 \pmod{19}$

즉, $9^9 \equiv 1 \equiv 9^{18} \pmod{19}$ 이다. 보기 중에서는 $(9^9)^4 \equiv 9^{36} \equiv 1^4 \equiv 1 \pmod{19}$.

(1) 정수 $m(\geq 3)$ 에 대하여 $Z_m^* = \{s_1, s_2, \dots, s_{\phi(m)}\}$ 라 할 때,

$$s_1 + s_2 + \dots + s_{\phi(m)} = \frac{\varphi(m)}{2} m.$$

(2) 정수 $m(\geq 3)$ 에 대하여 법 m 에 관한 기약잉여계

$R = \{r_1, r_2, \dots, r_{\varphi(m)}\}$ 에 대하여 $r_1 + r_2 + \dots + r_{\varphi(m)} \equiv 0 \pmod{m}$.

(3) p : 홀수소수, $(k, p-1) = 1$ 인 양의 정수 k ,

$$1^k + 2^k + \dots + (p-1)^k \equiv 1 + 2 + \dots + (p-1) \equiv 0 \pmod{p}$$

32. ③

월요일을 0, 화요일을 1, ..., 일요일을 6라 하고,

오늘의 요일을 T 요일, 구하는 요일을 x 요일이라 할 때,

$T + n^7 \equiv 4 \pmod{7}$, $T + (n+2)^7 \equiv x \pmod{7}$.

$x \equiv 4 + (n+2)^7 - n^7 \pmod{7}$ (\because Fermat 정리)

$$\equiv 4 + n^7 + 2^7 - n^7 \equiv 4 + 1 \cdot 2 = 6 \pmod{7}$$

그러므로 구하는 요일은 일요일이다.

* Fermat의 정리: 소수 p

(1) 모든 정수 a 에 대하여 $a^p \equiv a \pmod{p}$

(2) $1 \leq r \leq p-1$ 일 때 $\binom{p}{r} \equiv 0 \pmod{p}$

(3) $(a+b)^p = a^p + b^p \pmod{p}$

(4) $(a, p) = 1$, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

(5) $(a, p) = 1$, $ax \equiv b \pmod{p}$ 의 해 $x \equiv a^{p-2}b \pmod{p}$

(6) $1^p + 2^p + \dots + (p-1)^p \equiv 0 \pmod{p}$

(7) $1^{p-1} + 2^{p-1} + \dots + (p-1)^{p-1} \equiv -1 \pmod{p}$

33. ④

101은 소수이므로 윌슨 정리에 의해 $100! \equiv -1 \pmod{101}$.

그러므로 구하는 값은 100.

* Wilson의 정리

$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p} \Leftrightarrow p$: 소수

* 홀수 소수 p ,

(1) $1^2 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot (p-4)^2 (p-2)^2$

$$\equiv 2^2 \cdot 4^2 \cdot \dots \cdot (p-3)^2 (p-1)^2 \pmod{p}$$

$$\equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}$$

(2) $1 + 2 + \dots + (p-2) + (p-1) \equiv 0 \pmod{p}$

(3) $p \equiv 1 \pmod{4}$ 이면, $\left\{\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right\}^2 \equiv -1 \pmod{p}$

(4) $(p-2)! \equiv 1 \pmod{p}$, $2 \cdot (p-3)! \equiv -1 \pmod{p}$

34. ③

$\gcd(5^n, 7^n) = 1$ 이므로 $500! \times 200! \equiv 0 \pmod{35^n}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 500! \times 200! \equiv 0 \pmod{5^n} \\ 500! \times 200! \equiv 0 \pmod{7^n} \end{cases},$$

$5 < 7$ 이므로 7의 최대지수만 구하면 충분하다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{500}{7^n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{500}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{500}{7^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{500}{7^2} \right\rfloor}{7} \right\rfloor + 0 + 0 + \dots$$
$$= 71 + 10 + 1 = 82,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{200}{7^n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{200}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{200}{7} \right\rfloor}{7} \right\rfloor + 0 + 0 + \dots$$
$$= 28 + 4 = 32.$$

그러므로 $500! \times 200!$ 을 나누는 35의 최대지수는 114.

* $[x] \leq x < [x] + 1, \quad [x] - 1 < x \leq [x]$

① $[x+a] = [x] + a, \quad [x] + [y] \leq [x+y]$

② $[-x] = -[x], \quad [x][y] \leq [xy]$

* 10!과 최소공배수 $[1, 2, \dots, 10]$ 의 표준분해

10보다 크지 않은 모든 소수는 2, 3, 5, 7.

$\left\lfloor \frac{10}{2} \right\rfloor = 5, \quad \left\lfloor \frac{10}{2^2} \right\rfloor = 2, \quad \left\lfloor \frac{10}{2^3} \right\rfloor = 1$ (3회 계산)

$\left\lfloor \frac{10}{3} \right\rfloor = 3, \quad \left\lfloor \frac{10}{3^2} \right\rfloor = 1$ (2회 계산)

$\left\lfloor \frac{10}{5} \right\rfloor = 2$, (1회 계산)

$\left\lfloor \frac{10}{7} \right\rfloor = 1$ (1회 계산)

$$\therefore 10! = 2^{5+2+1} \cdot 3^{3+1} \cdot 5^2 \cdot 7^1 = 2^8 3^4 5^2 7,$$

(전개했을 때 끝자리에 2개의 0이 있음)

$$[1, 2, 3, \dots, 10] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7.$$

35. ①

$\varphi(11) = 10, \quad \gcd(11, 2) = 1 = \gcd(11, 14)$ 이므로

오일러 정리에 의해 $2^{10} \equiv 1 \equiv 14^{10} \pmod{11}, \quad 2^{10} \cdot 14^{10} \equiv 1 \pmod{11}.$

따라서 $2^{15}14^{10} + 2 \equiv 2^5 \cdot 1 + 2 \equiv 34 \equiv 1 \pmod{11}.$

그러므로 정수 $2^{15}14^{10} + 2$ 를 11로 나눈 나머지는 1.

36. ②

$\gcd(2, 3) = 1 \mid 55$ 이므로 정수해 (x, y) 가 존재한다.

$2 \times (-1) + 3 \times 1 = 1$ 에서 특수해 $(x_0, y_0) = (-55, 55).$

$$\therefore (x, y) = (-55 + 3t, 55 - 2t), \quad t \in \mathbb{Z}.$$

문제 상황에 맞는 t 의 범위는 $\frac{55}{3} < t < \frac{55}{2}$ 이므로

구하는 양의 정수해 (x, y) 의 개수는 9개.

1.

$u=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\ v=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix},\ w=u\times v=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ 라 하자.

$Au=4u,\ Av=10v$ 이므로 A 의 고유치 4, 10.
 $\det(A)=800$ 이므로 A 의 남은 고유치 20이며 고유벡터 w .
따라서 $\{u,v,w\}$ 는 \mathbb{R}^3 의 정규직교기저이고, $P=(u\mid v\mid w)$ 라 할 때,

$A=P\begin{pmatrix}4&0&0\\0&10&0\\0&0&20\end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix}4&0&0\\0&10&0\\0&0&20\end{pmatrix}P^T,\ A^{-1}=P\begin{pmatrix}1/4&0&0\\0&1/10&0\\0&0&1/20\end{pmatrix}P^{-1}.$

가정에 따라 $B=2|B|A^{-1}=2|B|\cdot P\begin{pmatrix}1/4&0&0\\0&1/10&0\\0&0&1/20\end{pmatrix}P^{-1},$
 $|B|=(2|B|)^3\cdot\frac{1}{|A|},\ |B|^2=100,\ \text{tr}B$ 는 $|B|$ 의 부호와 같으므로 $|B|=-10.$
 B 의 고유치 $-5,\ -2,\ -1,$ B 의 고유벡터로 구성된 정규직교기저 $\{u,v,w\}.$

2.

(나)에 따라 2차원 평면 $x+y+z=0$ 의 영이 아닌 임의의 벡터 v 에 대하여
 $\left(A^{-1}-\frac{1}{2}I\right)v=O,\ Av=2v,$ 따라서 A 의 고유치 2.
(가)에 따라 A 의 다른 하나의 고유치 8이므로 $D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&8\end{pmatrix}.$

$v_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1),\ v_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\ v_2=v_1\times v_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$ 라 하면
 $\{v_1,v_2,v_3\}$ 는 \mathbb{R}^3 의 정규직교기저이다.
(v_3 는 고유치 8에 대응하는 고유벡터)
 $((1,-2,1),\ (1,2,-3))$ 은 서로 다른 고유벡터이지만 수직이 아님)
 $P=(v_1\mid v_2\mid v_3)$ 로 놓으면 $A=PDP^{-1}=PDP^T.$

3.

(가), (나)에 따라 A 의 고유치 3, $\alpha,\ \bar{\alpha},\ \alpha\bar{\alpha}=|\alpha|^2=2.$
따라서 B 의 고유치는 $3^2-3+5\cdot1=11,\ \alpha^2-\alpha+5,\ \bar{\alpha}^2-\bar{\alpha}+5.$
(다)에 따라 B 의 서로 다른 고유치는 2개 이하이며,
 $11=\alpha^2-\alpha+5$ 또는 $11=\bar{\alpha}^2-\bar{\alpha}+5$ 이면 $\alpha,\ \bar{\alpha}$ 가 실수(실근)가 되어 모순.
따라서 $\alpha^2-\alpha+5=\bar{\alpha}^2-\bar{\alpha}+5,\ \alpha+\bar{\alpha}=1.$
 $\alpha,\ \bar{\alpha}$ 는 $x^2-x+2=0$ 의 근 $\frac{1\pm\sqrt{7}i}{2}.$
그러므로 $\det(A)=3\alpha\bar{\alpha}=6,\ \text{tr}(A)=3+\alpha+\bar{\alpha}=4.$

4.

$L(1,1,1)=(0,0,0),$
 $L(0,1,1)=(-1,0,0)=-(1,1,1)+(0,1,1),$

$L(1,0,1)=(2,-1,1)=-(0,1,1)+2(1,0,1)$ 이므로 $[L]_{\alpha}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&1&-1\\0&0&2\end{pmatrix}.$

$(a+c=2,\ a+b=-1,\ a+b+c=1$ 로부터 $b=-1,\ c=2,\ a=0)$
 $|xI-[L]_{\alpha}|=x(x-1)(x-2)=0\iff x=0,\ 1,\ 2$ 에 대응하는 고유공간

$E_0=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle,\ E_1=\left\langle\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\rangle,\ E_2=\left\langle\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}\right\rangle$ 이므로

($[L]_{\alpha}$ 의 고윳값의 대수적 중복도와 기하적 중복도가 일치하므로)

$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&-2\\0&0&2\end{pmatrix}$ 일 때 $P^{-1}[L]_{\alpha}P=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$ 즉 $[L]_{\alpha}$ 는 대각화가능하다.

(다른 설명)
 $[L]_{\alpha}\in\text{Mat}_3(\mathbb{R})$ 는 서로 다른 3개의 고유치를 가지므로 대각화 가능.

5.

$v_1=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix},\ v_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\ v_3=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ 라 하면 $Av_1=4v_1,\ Av_2=-2v_2,\ Av_3=-2v_3.$

따라서 고유치 4, -2

$\begin{bmatrix}a_{11}+a_{12}+a_{13}\\a_{21}+a_{22}+a_{23}\\a_{31}+a_{32}+a_{33}\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=A\left(\frac{1}{2}v_1+\frac{1}{2}v_3\right)=2v_1-v_3=\begin{bmatrix}1\\1\\4\end{bmatrix}$ 이므로 구하는 값 1.

6.

$|A-xI|=0\iff x=1,\ 2,\ 3.$ 고유치 1, 2, 3이며, $P=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-2&-1&0\end{bmatrix}$ 라 하면

$P^{-1}=\frac{1}{\det(P)}\text{adj}(P)=\begin{bmatrix}0&-1&-1\\0&2&1\\1&1&1\end{bmatrix},\ P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}=D.$

$*\begin{pmatrix}1&0&1&|&1&0&0\\1&1&0&|&0&1&0\\-2&-1&0&|&0&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&|&0&-1&-1\\0&1&0&|&0&2&1\\0&0&1&|&1&1&1\end{pmatrix}$

$A^n=PD^nP^{-1}=\begin{bmatrix}3^n&3^n-1&3^n-1\\0&2^{n+1}-1&2^n-1\\0&2-2^{n+1}&2-2^n\end{bmatrix},$ 구하는 값 $2^n-1.$

$*\begin{bmatrix}1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2^n&0\\0&0&3^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}=2^n-1.$
(2행) (3열)

7.

A 는 삼각행렬이므로 고유치 5, 1, -1 이다. (계산해도 된다.)
각각 서로 다른 고유치에 대응하는 고유벡터는
 $u_1=(1,0,0),\ u_2=(3,-4,0),\ u_3=(0,1,1)$ 이며 일차독립.

$*\text{ 다른 설명: }\text{rank}\begin{pmatrix}1&3&0\\0&-4&1\\0&0&1\end{pmatrix}=3$ 이므로 일차독립.

따라서 $B=\{u_1,u_2,u_3\}$ 는 \mathbb{R}^3 의 기저이다.
한편, $T(u_1)=5u_1,\ T(u_2)=1u_2,\ T(u_3)=-u_3$ 이므로

$[T]_B=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 는 대각행렬.

$*\ [T]_E^E=PDP^{-1}=[I]_E^B[T]_B^B[I]_B^E$

8. $\mathcal{B}=\{v_1,v_2,v_3\}$ 는 \mathbb{R}^3 의 기저이다.

$T_k(v_1)=v_1+v_1+kv_1=(k+2)v_1,$

$T_k(v_2)=v_2+\left[\frac{v_2\cdot v_1}{\|v_1\|^2}v_1+\vec{0}\right]+kv_2=v_1+(k+1)v_2,$

$T_k(v_3)=[\vec{0}+\vec{0}]+v_3+kv_3=(k+1)v_3$ 이므로 $[T_k]_{\mathcal{B}}=A=\begin{pmatrix}k+2&1&0\\0&k+1&0\\0&0&k+1\end{pmatrix}.$

T_k 의 역변환이 존재하지 않으려면 A 의 역행렬이 존재하지 않아야 한다.

따라서 $\det A=(k+1)^2(k+2)=0,\ k=-1,\ -2.$

T_k 의 랭크 2가 되는 경우는 $\text{rank}A=2,\ k=-2.$

$*\text{ 표준기저에 의한 }T_k\text{의 행렬 }A\text{라 하면}$

$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\0&1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\\0&1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1\\0&1\end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}+kI$
 $=\begin{pmatrix}k+2&0&0\\0&k+1&0\\0&0&k+1\end{pmatrix}.$

9. $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ 는 \mathbb{R}^3 의 기저이므로 일차독립이다.

스칼라체 \mathbb{R} 의 원소 a, b, c 에 대하여

$a(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)+b(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_3)+c(\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3)=\boldsymbol{0}$ ($\in \mathbb{R}^3$)라 하면

$(a+b)\boldsymbol{v}_1+(a+c)\boldsymbol{v}_2+(b+c)\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{0}$ 이므로

$a+b=a+c=b+c=0$ 에서 $a=b=c=0$,

즉 $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3$ 은 일차독립이며, 어떤 벡터도 영벡터가 아니다.

* 다른 설명

기저에 의한 세 벡터의 표현행렬 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 의 계수=3이므로 세 벡터는 벡터공간

간 \mathbb{R}^3 의 일차독립인 벡터이며, 따라서 $\mathcal{B}=\{\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3\}$ 는 \mathbb{R}^3 의 기저이다.

한편 주어진 조건으로부터

$A(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2, A(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_3)=2(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_3), A(\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3)=3(\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3)$ 이므로

A 의 고유치는 1, 2, 3.

그러므로 $\det(A)=1\cdot 2\cdot 3=6$.

* 다른 설명: $P=(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2 \mid \boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_3 \mid \boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3)$ 라 할 때

$A=P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1}$ 이고, $\det A=\left|P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1}\right|=\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}=6$.

* 대각화 $A=PDP^{-1}$, P =(고유열벡터)

* 기저변환 $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}=[I]_{\mathcal{B}}^E[T]_E^E[I]_E^{\mathcal{B}}$.

10. $|a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}|=3\sqrt{5}$

$\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2=(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2$ 이므로 양변 노름취하면

$|a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}|\|\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2\|=|a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}|\|\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2\|=\|(6, 0, -3)\|=3\sqrt{5}$.

* 다른 설명

$\boldsymbol{v}_3=\frac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, -1)$ 라 하면 \boldsymbol{v}_3 는 평면 V 의 법벡터와 평행하다.

따라서 $B'=\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ 는 \mathbb{R}^3 의 기저가 되며,

$B''=\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ 는 \mathbb{R}^3 의 정규직교기저이다.

한편 $\boldsymbol{v}_1=a_{11}\boldsymbol{u}_1+a_{12}\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_2=a_{12}\boldsymbol{u}_1+a_{22}\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{v}_3$ 이므로

이를 행렬로 나타내면 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 \\ \boldsymbol{v}_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{v}_3 \end{pmatrix}$ 이다.

B'' 은 정규직교기저이므로 $\left|\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{v}_3 \end{pmatrix}\right|=1$ (\leftarrow 절대치),

$|a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}|=\left|\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right|$
 $=\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\right|=3\sqrt{5}$.

11.

$\|T(\mathbf{x})\|^2=T(\mathbf{x})\cdot T(\mathbf{x})=(\mathbf{x}-2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u})\cdot(\mathbf{x}-2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u})$
 $=\|\mathbf{x}\|^2-4(\mathbf{x}\cdot\mathbf{u})^2+4(\mathbf{x}\cdot\mathbf{u})\|\mathbf{u}\|^2$
 $=\|\mathbf{x}\|^2$.

$\|T(\mathbf{x})\|\geq 0, \|\mathbf{x}\|\geq 0$ 이므로 $\|T(\mathbf{x})\|=\|\mathbf{x}\|$.

* 다른 설명

T 는 $\langle\mathbf{u}\rangle$ 와 수직인 직선 $\langle\mathbf{u}\rangle^{\perp}$ 에 대한 선대칭변환이다.

선대칭변환은 합동변환이므로 등장사상이다.

따라서 $\|T(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)\|=\|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\|$ 이므로 $\|T(\mathbf{x})\|=\|\mathbf{x}\|$.

$T(1, 0)=(1, 0)-(1, 1), T(1, 1)=-(1, 1), [T]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

* $T(\mathbf{x})=\mathbf{x}-2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u}=\mathbf{x}-2\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u}=\mathbf{x}-2\text{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{x}$

12. $(x-1)(x+1)^2$

\mathbb{R}^3 의 직선 $\langle(1, 2, 3)\rangle$ 의 기저원 \boldsymbol{u} 와

$(1, 2, 3)$ 을 법선으로 하는 평면 $\langle(1, 2, 3)\rangle^{\perp}$ 의 기저원 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 에 대하여

$T(\boldsymbol{u})=1\cdot\boldsymbol{u}, T(\boldsymbol{v})=-1\cdot\boldsymbol{v}, T(\boldsymbol{w})=-1\cdot\boldsymbol{w}$ 이므로

T 는 고유치 1, -1 을 갖고, 고유다항식 $(x-1)(x+1)^2$.

* 다른 풀이

$\boldsymbol{v}_1=(1, 2, 3)$ 과 수직인 벡터 $\boldsymbol{v}_2=(2, -1, 0)$ 과

그 외적 $\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2=(3, 6, -5)$ 라 하자.

$T(\boldsymbol{v}_1)=\boldsymbol{v}_1, T(\boldsymbol{v}_2)=-\boldsymbol{v}_2, T(\boldsymbol{v}_3)=-\boldsymbol{v}_3$ 이므로

$A=(\boldsymbol{v}_1\mid\boldsymbol{v}_2\mid\boldsymbol{v}_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}(\boldsymbol{v}_1\mid\boldsymbol{v}_2\mid\boldsymbol{v}_3)^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

단, $(\boldsymbol{v}_1\mid\boldsymbol{v}_2\mid\boldsymbol{v}_3)^{-1}=\frac{1}{70}(\text{adj}A_{ij})^T=\frac{1}{70}\begin{pmatrix} 5 & 28 & 3 \\ 10 & -14 & 6 \\ 15 & 0 & -5 \end{pmatrix}^T=\frac{1}{70}\begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 28 & -14 & 0 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$.

이때 A 의 특성다항식

$|A-xI|=\frac{1}{7^3}\{(6-7x)(-3-7x)(2-7x)+72-9(-3-7x)$
 $-36(-6-7x)-4(2-7x)\}$
 $=\frac{1}{7^3}\cdot(-343)(x-1)(x+1)^2$
 $=-(x-1)(x+1)^2$.

13.

임의의 스칼라 $a, b \in \mathbb{C}$ 와 임의의 $f, g \in V$,

$$\begin{aligned} T(af+bg) &= \int_C af(z)+bg(z)dz \\ &= a \int_C f(z)dz + b \int_C g(z)dz \\ &= aT(f)+bT(g) \text{이므로 } T \text{는 선형사상이다.} \end{aligned}$$

$a_1f_1+a_2f_2+a_3f_3+a_4f_4 \in \ker T$ 이면 코시-구르사 정리와 유수 정리에 의해

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{|z|=1} a_1f_1+a_2f_2+a_3f_3+a_4f_4 \, dz \\ &= a_2 \int_{|z|=1} f_2 \, dz + a_4 \int_{|z|=1} f_4 \, dz \\ &= a_2 \int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz + a_4 \int_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} dz \\ &\quad (|z|=1 \text{에서 } 1^2=|z|^2=z\bar{z}, \bar{z}=\frac{1}{z}) \\ &= a_2 \cdot 2\pi i + a_4 \cdot 2\pi i \text{에서 } a_4 = -a_2. \end{aligned}$$

그러므로 $\ker T \subset \langle f_1, (f_2-f_4), f_3 \rangle$.

$f_1, f_2-f_4, f_3 \in \ker T$ 이고, 적당한 $a, b, c \in \mathbb{C}$ 에 대하여

$$af_1+b(f_2-f_4)+cf_3=0 \text{이면 } az+b(\bar{z}-e^{\bar{z}})+ce^z=0, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & z=0 \text{일 때, } b=c \\ \textcircled{2} \quad & z=\frac{\pi i}{2} \text{일 때, } \frac{\pi i}{2}a+b=0 \\ \textcircled{3} \quad & z=\pi i \text{일 때, } \pi ia-b\pi i=0 \end{aligned}$$

따라서 $a=b=c=0, f_1, f_2-f_4, f_3$ 는 일차독립,

$\ker T$ 의 기저는 $\{f_1, (f_2-f_4), f_3\}$.

($\dim \ker T=3$ 이므로 $\dim T=1, \dim V=4$)

(T 는 동형 선형사상은 아니다.)

$$\begin{aligned} f \in T^{-1}(2) &\Leftrightarrow T(f)=2=T\left(\frac{1}{\pi i}f_2\right) \\ &\Leftrightarrow T\left(f-\frac{1}{\pi i}f_2\right)=0 \\ &\Leftrightarrow f-\frac{1}{\pi i}f_2 \in \ker T \\ &\Leftrightarrow f \in \frac{1}{\pi i}f_2 + \ker T. \end{aligned}$$

$$\text{그러므로 } T^{-1}(2)=\frac{1}{\pi i}f_2+\ker T.$$

$$\begin{aligned} & (T(f)=2 \text{의 특수해}+\ker T) \\ & (A\mathbf{x}=2 \text{의 특수해}+\underline{A\mathbf{x}=0 \text{의 일반해}}) \\ & \hspace{10em} (A \text{의 영공간}) \end{aligned}$$

* A : T 의 행렬(선형사상이므로 A 있다.), $\text{rank } A=1$

14. $a=15$

원점을 중심으로 시계방향으로 45° 만큼 회전이동하는 행렬은

$$\begin{pmatrix} \cos(-45^\circ) & -\sin(-45^\circ) \\ \sin(-45^\circ) & \cos(-45^\circ) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ (직교행렬).}$$

$(x,y) \in C$ 에 대하여 회전이동한 뒤의 C 위의 점을 (x',y') 라 할 때,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{에서 } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right]^T \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x'-y' \\ x'+y' \end{pmatrix} \text{이므로}$$

C 의 방정식에 대입하여 정리하면

$$(14a+a^2)(x')^2+(14a-a^2)(y')^2-\sqrt{2}x'-1=0.$$

a 는 자연수이므로 $14a+a^2>0$.

이 곡선이 초점이 x 축에 있는 쌍곡선이 되려면 $14a-a^2<0$.

그러므로 $a>14$ 인 자연수 a 중 가장 작은 수 15.

* \mathbb{R}^2 에서 θ 만큼 반시계 회전 행렬 $R=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

* \mathbb{R}^3 에서 회전변환행렬

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \text{양의 } x \text{축에 대하여 } \theta \text{만큼 반시계 회전 } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \\ \textcircled{2} \quad & \text{양의 } y \text{축에 대하여 } \theta \text{만큼 반시계 회전 } \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \\ \textcircled{3} \quad & \text{양의 } z \text{축에 대하여 } \theta \text{만큼 반시계 회전 } \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

15. ⑤

ㄱ. 스칼라 체 \mathbb{R} 에 속하는 적당한 a, b, c 에 대하여

$$a(v_1+v_2+v_3)+b(v_2+v_3)+cv_3=(0,0,0,0,0) \text{라 하면}$$

$$av_1+(a+b)v_2+(a+b+c)v_3=\mathbf{0},$$

v_1, v_2, v_3 은 일차독립이므로 $a=0, a+b=0, a+b+c=0$,

$$a=b=c=0. \text{ 즉 } v_1+v_2+v_3, v_2+v_3, v_3 \text{도 일차독립이다.}$$

ㄴ. $\{v_1, v_2, v_3\}$ 로 생성되는 \mathbb{R} 위의 벡터공간 $\{av_1+bv_2+cv_3 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ 의

임의의 두 원소 $a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3, b_1v_1+b_2v_2+b_3v_3$ 와

임의의 스칼라 $k \in \mathbb{R}$ 에 대하여

$$\begin{aligned} & (a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3)+(b_1v_1+b_2v_2+b_3v_3) \\ & = (a_1+b_1)v_1+(a_2+b_2)v_2+(a_3+b_3)v_3 \in \{av_1+bv_2+cv_3 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} \text{이고,} \\ & k(a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3)=ka_1v_1+ka_2v_2+ka_3v_3 \\ & \in \{av_1+bv_2+cv_3 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} \text{이므로} \end{aligned}$$

$\{av_1+bv_2+cv_3 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ 는 \mathbb{R}^5 의 부분공간이다.

ㄷ. $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^5$ 에 대하여 $Ax_1=v_1, Ax_2=v_2$ 라 하자.

$$\mathbf{x}=2x_1+x_2 \text{로 놓으면 } A\mathbf{x}=2v_1+v_2 \text{이므로 } Ax=2v_1+v_2 \text{의 해 존재.}$$

* 연립일차방정식 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 의 일반해는 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 의 일반해(영공간, 핵, \ker)에 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 의 임의의 특수해를 더하여 얻어진다. 즉, $\mathbf{x}=\text{“}A^{-1} \cdot \mathbf{b}\text{”}$ =특수해+nullity(A))

16. ④

ㄱ. $(a,b,c) \in \ker T$ 이면 $a=2c, \ker T \in \langle (2,0,1) \rangle$

$$T(2,0,1)=\mathbf{0} \text{이므로 } \ker T=\langle (2,0,1) \rangle.$$

차원 정리에 의해 $\dim T=\dim \mathbb{R}^3-\dim \ker T=2$.

* 표준기저에 의한 T 의 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\text{rank } A=2$ 이므로 $\dim T=2$

ㄴ. $\ker T$ 의 기저는 $\{(2,0,1)\}$ 이므로

$$\text{proj}_{\ker T}(1,0,0)=\frac{(1,0,0) \cdot (2,0,1)}{\|(2,0,1)\|^2}(2,0,1)=\frac{2}{5}(2,0,1).$$

ㄷ. $\mathbf{0}$ 아닌 임의의 $v \in \ker T$ 에 대하여 $T(v)=1 \cdot v$ 이고, $(\ker T)^\perp$ 의 기저원

$$u, w \text{에 대하여 } T(u)=0 \cdot u=\mathbf{0}, T(w)=0 \cdot w=\mathbf{0},$$

$$T \text{의 고유치 } 1, 0, \text{tr } A=1+0+0=1.$$

* $(\ker T)^\perp$ 은 $(2,0,1)$ 을 법선으로 하는 \mathbb{R}^3 의 평면

* $\text{proj}_{\ker T}(0,1,0)=\mathbf{0}, \text{proj}_{\ker T}(0,0,1)=\frac{1}{5}(2,0,1),$

표준기저에 의한 직교정사영의 행렬 $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

구하는 $\text{tr } A=\text{tr } \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\frac{4}{5}+0+\frac{1}{5}=1.$

17. ③
- ㄱ. 서로 다른 5개의 벡터이므로 적어도 한 벡터는 $\mathbf{0}$ 이 아니다.
 $1 \leq \dim V \leq 4 = \dim \mathbb{R}^4$ 이므로 $V \cong \mathbb{R}^n$ 이 되는 자연수 n 있다.
 - ㄴ. $V \leq \mathbb{R}^4$ 이고, $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ 가 V 의 기저이면
 $\dim V = |\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}| = 5 \leq 4 = \dim \mathbb{R}^4$ 가 되어 모순.
 - ㄷ. $V \leq \mathbb{R}^4$ 이므로 \mathbb{R}^4 의 부분공간으로서는 $\{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{0}$ 을 지나는 평면(차원 2) 등이 있다. 즉 $\dim V = 2$ 인 벡터 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 있다.

18. ③
- $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \ker L$ 일 때 계산하면 $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 2c & -2a-2b+2d \\ 2c & 2c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 이므로
- $\ker L \subset \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 은 일차독립이고 $\ker L$ 에 속한다.
- 그러므로 $\ker L = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. 차원정리에 의해
- $\dim \ker L = \dim V - \dim \operatorname{im} L = 4 - 2 = 2$.

* V 의 기저에 의한 L 의 4×4 행렬 $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ 의 rank 구해도 된다.

* $\operatorname{im}(L) = L(V) = L(\langle E_1, E_2, E_3, E_4 \rangle)$
 $= \langle L(E_1), L(E_2), L(E_3), L(E_4) \rangle$
 $= \langle E_2, E_1 + E_3 - E_4 \rangle$.

19. ③
- ㄱ. A 는 가역행렬이므로 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj} A$ 이고,
 $(\operatorname{adj} A)^n = (A^{-1} |A|)^n = (A^n)^{-1} |A|^n$,
 $\operatorname{adj}(A^n) = (A^n)^{-1} |A|^n$ 이므로 $\operatorname{adj} A^n = (\operatorname{adj} A)^n$.
 * $|A| \cdot I = A \cdot \operatorname{adj} A$
 - ㄴ. $\operatorname{adj}(A^T) = (A^T)^{-1} |A^T| = |A| (A^T)^{-1}$,
 $(\operatorname{adj} A)^T = (|A| A^{-1})^T = |A| (A^T)^{-1}$ 이므로
 $\operatorname{adj}(A^T) = (\operatorname{adj} A)^T$ 이다. ($|A| \in \mathbb{R}$)
 - ㄷ. $\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = |\operatorname{adj} A| (\operatorname{adj} A)^{-1}$
 $= ||A| A^{-1}| \cdot (|A| A^{-1})^{-1}$
 $= |A|^3 |A^{-1}| \cdot \frac{A}{|A|}$
 $= |A| A, \det A = 1$ 인 경우에만 성립.

20. ②
- ㄱ. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 은 대각화가능하지 않다.
 * $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + y, y)$ 에 대하여 T 는 정칙선형사상이지만 표준기저에 의한 T 의 행렬 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 는 대각화가능하지 않다.
 - ㄴ. $A^T = PDP^{-1}$ 인 정칙행렬 P , 대각행렬 D 있다.
 $A = (A^T)^T = (PDP^{-1})^T = (P^T)^{-1} D P^T$ 이고,
 $\det P^T = \det P \neq 0$ 이므로 A 는 대각화가능하다.
 * A^T 의 고유다항식
 $= \det(A^T - kI)$
 $= \det((A^T - kI)^T)$ (\because 행렬식의 성질)
 $= \det(A - kI) = A$ 의 고유다항식

- ㄷ. T 의 표준기저에 의한 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 에서
 $\det(A - xI) = (1 - x)^3$, 고유치 $x = 1$ (삼중근)이며
 $(A - I) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 에서 $a = b = 0$, $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \langle (0, 0, 1) \rangle$.
 고유치 1의 대수적 중복도(3)와 기하적 중복도(1)가 일치하지 않으므로 A 는 대각화가능하지 않다.

* $\ker T = \{\mathbf{0}\}$ 이므로 T 는 단사이면서 전사이다. 즉 정칙선형사상이지만 T 의 \mathbb{R}^3 의 표준기저에 대한 행렬은 대각화가능하지 않다.

21. ④
- ① A 의 고유다항식은
 $\det(xI - A) = (x + 1)(x - 4)(x - 3) - 14(x - 3)$
 $= (x^2 - 3x - 18)(x - 3)$
 $= x^3 - 6x^2 - 9x + 54$.
 - ② A 는 고유치 $\pm 3, 6$ 을 갖고 그에 대응하는 고유벡터 $(0, 0, 1), (1, -1, 0), (2, 7, 0)$ 를 갖고 $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 라 할 때 $A = P \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} P^{-1}$ 이므로 A 는 항등행렬이 아닌 두 개의 가역행렬의 곱으로 나타낼 수 있다.
 * 다른 설명: $A = (-A)(-I)$ 이므로 옳다.
 - ③ $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj} A$ 에서 $\operatorname{adj} A = |A| A^{-1}$ 이므로
 $|\operatorname{adj} A| = \det(|A| A^{-1}) = |A|^3 \frac{1}{|A|} = |A|^2$. ($|AA^{-1}| = 1$ 이므로 $|A^{-1}| = |A|^{-1}$)
 * A^{-1} 는 행렬이고 $|A|^{-1}$ 는 실수이다.
 - ④ $A^2 = P \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix} P^{-1}$ 이므로 A^2 의 모든 고유치의 합은 45이다. (* $\operatorname{tr}(A^2) = 54$)
 - ⑤ $\dim \ker T = \operatorname{rank} A = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, T 는 전사이면서 단사이다. 그러므로 T 는 정칙선형사상이다.

22. ②
- ㄱ. 스칼라 $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ 와 \mathbb{Q}^3 의 원소 $(1, 1, 1)$ 에 대하여
 $\sqrt{2} \cdot (1, 1, 1) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}) \notin \mathbb{Q}^3$ 이므로 \mathbb{Q}^3 는 \mathbb{R}^3 의 부분공간이 아니다. (스칼라 체 \mathbb{R} 위의 벡터공간도 안 됨, 합 연산에 대해서는 닫혀 있음.)
 - * 공집합 아닌 W 가 $W \leq V$
 \Leftrightarrow (1) $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ 이면 $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$
 (2) 스칼라 $k, \mathbf{u} \in W$ 이면 $k\mathbf{u} \in W$
 - ㄴ. 벡터공간 \mathbb{R}^3 의 원점을 지나는 평면(부분벡터공간)
 $U: x + 5y - z = 0$ 의 법벡터 $\mathbf{n} = (1, 5, -1)$ 는
 임의의 U 의 원소와 수직이다.((유클리드)내적이 0.)
 그러므로 $\langle \mathbf{n} \rangle = U^\perp$ 이고 $U \oplus U^\perp = U \oplus \langle \mathbf{n} \rangle = \mathbb{R}^3$.
 - ㄷ. $(a, b, c) \in \ker T$ 이면 $a - b = 0, 2b = 0, a - 3c = 0$ 이므로 $a = b = c = 0$.
 $\ker T = \{\mathbf{0}\}$ 이므로 $\dim \ker(T) = 0$.

23. ④
- 가정에 의해 정칙행렬 P 가 존재해서 $A = PDP^{-1}$ 이다.
- (단, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 이다.)
- ㄱ. $|A| = \det(PDP^{-1}) = \det D = 1(-1) \cdot 2 \cdot 4 = -8$.
 - ㄴ. $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr}(PDP^{-1}) = \operatorname{tr}(PP^{-1}D)$
 $= \operatorname{tr} D = 1 - 1 + 2 + 4 = 6$
 - ㄷ. 상(하)삼각 행렬만 되어도 충분, 대칭일 필요는 없다.
 - ㄹ. $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(PDP^{-1}) = \operatorname{rank} D = 4$
 (P 는 가역이므로 D 의 행(열)공간의 차원은 P 에 의해 불변)
 - * 다른 설명: $\det A = \det D \neq 0$ 이므로 $\operatorname{rank} A = 4$.

24. ⑤
- ① $W = P(W) \leq P(V) = \operatorname{Im} P \leq W$ 이므로 $W = \operatorname{Im} P$
 - ② $\ker(P) = \{\mathbf{0}\} \cup (V/W)$ 이므로 $\ker P \cap W = \{\mathbf{0}\}$
 - ③ 자명하다.
 - ④ $P(v) \in W$ 이므로 ③에 의해 성립한다.
 - ⑤ $V = \mathbb{R}^2$ (좌표평면)에서 $W = \mathbb{R}(x\text{축})$ 위로의 정사영 사상의 표준기저에 의한 행렬은 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 이며 가역행렬이 아니다.

25. ④

$3=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta=\sqrt{3}\cdot3\cos\theta,\ \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}.$

26. ①

A 는 실대칭행렬이므로 직교대각화 가능하다.

$0=\det(A-tI)=(t-4)(t+2)$ 에서 고유치 $-2,\ 4$

㉠ $t=-2$ 일 때 $\begin{pmatrix}3&-3\\-3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 에서 $a=b$ 이므로 한 고유벡터는 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

㉡ $t=4$ 일 때 $\begin{pmatrix}-3&-3\\-3&-3\end{pmatrix}\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 에서 $\mathbf{x}\in\left\langle\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle/\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 이므로 한 고유벡터는 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

㉠, ㉡에 의해 구하는 $P=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}.$

27. $T(4+2x+3x^2)=4+3x+\frac{7}{2}x^2$

선형사상의 성질과 계산에 의해

$T(1)=1+\frac{3}{2}x^2,\ T(x)=-\frac{1}{2}x^2,\ T(x^2)=x-\frac{1}{2}x^2.$

그러므로 $T(4+2x+3x^2)=4+6x^2-x^2+3x-\frac{3}{2}x^2=4+3x+\frac{7}{2}x^2.$

* 다른 설명

P_2 의 기저 $\{1,x,x^2\}$ 에 의한 T 의 행렬 A 라 하면

가정에 의해 $A\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 이므로

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\frac{1}{\det\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}}\text{adj}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\3&-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\-1&-1&-2\end{pmatrix}.$$

즉 $T(1)=1+0x+\frac{3}{2}x^2,\ T(x)=0+0x-\frac{1}{2}x^2,\ T(x^2)=0+1x-\frac{1}{2}x^2.$

* 3차 행렬식 $\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}$ 의 계산

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&b\\d&e\\g&h\end{vmatrix}i+\begin{vmatrix}a&b\\d&e\\g&h\end{vmatrix}i+\begin{vmatrix}a&b\\d&e\\g&h\end{vmatrix}i$$
$$=(+aei+bfh+cdh)+(-ceg-afh-bdi)$$
$$=(aei+bfh+cdh)-(ceg+afh+bdi).$$

28. $P=\begin{pmatrix}1&1\\-i&i\end{pmatrix}$

$0=\det(A-xI)=x^2-2\cos\theta x+1$ 에서 $x=\cos\theta\pm i\sin\theta(=e^{\pm i\theta})$

$(A-e^{-i\theta}I)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ 에서 $ai=b((a,b)\neq(0,0))$ 이므로 $\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$ 는 고유벡터.

$P=\begin{pmatrix}1&1\\-i&i\end{pmatrix}$ 라 하면 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}e^{i\theta}&0\\0&e^{-i\theta}\end{pmatrix}.$

회전변환행렬 A 는 \mathbb{C} 위에서 대각화가능.

29.

$L(\{(1-t)\mathbf{x}+t\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n\mid 0\leq t\leq 1\})=\{(1-t)L(\mathbf{x})+tL(\mathbf{y})\in\mathbb{R}^m\mid 0\leq t\leq 1\}$ 는

㉠ $L(\mathbf{x})=L(\mathbf{y})$ 일 때 한 점 집합이 된다.

㉡ $L(\mathbf{x})\neq L(\mathbf{y})$ 이면 $L(\mathbf{x})$ 와 $L(\mathbf{y})$ 를 잇는 선분이 된다.

(단사 \Leftrightarrow 전사 \Leftrightarrow 동형)일 때 선분된다. 이때 $m=n$

30. $\dim\ker T=1,\ \dim\im T=2$

$\text{rank}A=2=\dim\im T$ 이고, 차원정리에 의해

$\dim\ker T=\dim\mathbb{R}^3-\dim\im T=1.$

* 다른 풀이

$(a,b,c)\in\ker T$ 이면 $0=a+c=b+2c=-a+b+c,$

$(a,b,c)=a(1,2,-1)$ 이므로 $\ker T\subset\langle(1,2,-1)\rangle$ 이며,

$(1,2,-1)\in\ker T$ 이므로 $\ker T=\langle(1,2,-1)\rangle.$

그러므로 $\dim\ker T=|\{(1,2,-1)\}|=1.$

$\im T=T(\mathbb{R}^3)=T(\langle(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\rangle)$
$$=\langle T(1,0,0),\ T(0,1,0),\ T(0,0,1)\rangle$$
$$=\langle(1,0,-1),\ (0,1,1),\ (1,2,1)\rangle\ (\text{열공간의 기저})$$
$$=\langle(1,0,-1),\ (0,1,1)\rangle$$

$(1,0,-1),\ (0,1,1)$ 은 스칼라체 \mathbb{R} 위에서 일차독립.

따라서 $\dim\im T=|\{(1,0,-1),\ (0,1,1)\}|=2.$

31. 고유치: $1,\ 2$, 고유공간: $\langle(1,0,0)\rangle,\ \langle(1,1,0),\ (0,1,1)\rangle$

주어진 행렬을 A 라 할 때, A 는 상삼각행렬이므로

$0=\det(A-\lambda I)=(1-\lambda)(2-\lambda)^2$ 에서 고유치 $\lambda=1,\ 2.$

$\lambda=1$ 에 대응하는 고유공간은 $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid (A-1\cdot I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\mathbf{0}\}=\langle(1,0,0)\rangle,$

$\lambda=2$ 에 대응하는 고유공간은

$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid (A-2\cdot I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\mathbf{0}\}=\langle(1,1,0),\ (0,1,1)\rangle.$

* $\lambda=2$ 의 대수적 중복도와 기하적 중복도가 일치한다.

32.

$(\Rightarrow)\ u\in W_1\cap W_2(\subset V,$ 실제로 $\leq V)$ 이면 $u=u+\mathbf{0},u=\mathbf{0}+u$ 이므로 $u=\mathbf{0}$, 즉 $W_1\cap W_2\subset\{\mathbf{0}\}$ 가 되고 $\{\mathbf{0}\}\leq W_1\cap W_2$ 이므로 $W_1\cap W_2=\{\mathbf{0}\}.$

(\Leftarrow) 다음 v 의 두 가지 표현을 생각하자.

$v=w_1+w_2,\ v=w_1'+w_2'\ (w_1,w_1'\in W_1,\ w_2,w_2'\in W_2)$

벡터 연산에 의해 $(W_1\supset)w_1-w_1'=-\color{blue}{(w_2-w_2')}\color{blue}{(\in W_2)},$

$W_1,\ W_2$ 은 연산에 의해 닫혀있으므로 $w_1-w_1'\in W_2,\ w_2-w_2'\in W_1$ 이 되어

w_1-w_1' 과 w_2-w_2' 은 $W_1\cap W_2=\{\mathbf{0}\}$ 에 속한다.

그러므로 $w_1=w_1',\ w_2=w_2'$, 즉 v 는 유일하게 표현된다.

33.

차원정리에 의해 $\dim\ker L+\dim\im L=\dim V$ 에서

$\dim\im L=\dim W$ 이고 $\im L\leq W$ 이므로 $\im L=W$, 즉 L 은 전사이다.

$\ker L=\{\mathbf{0}\}$ 이므로 L 은 단사이다.

그러므로 L 은 동형사상이다.

(유한차원 벡터공간 간의 선형사상은 단사 \Leftrightarrow 전사이므로 하나면 보여도 충분하다.)

* 다른 설명

$L(u)=L(v)$ 이면 $L(u-v)=\mathbf{0}$ 이므로 $u-v\in\ker L=\{\mathbf{0}\}$, 즉 $u=v$ 이므로 L 은 단사,

V 의 기저 $\{v_1,\ \cdots,\ v_n\}$ 에 대하여 적당한 실수 $c_i(1\leq i\leq n)$ 에 대하여

$c_1T(v_1)+\cdots+c_nT(v_n)=\mathbf{0}$ 라 하면 $T(c_1v_1+\cdots+c_nv_n)=\mathbf{0}\ (\in W)$ 가 되어

$c_1v_1+\cdots+c_nv_n=\mathbf{0}\ (\in V),\ \{v_1,\ \cdots,\ v_n\}$ 는 기저이므로 $c_1=\cdots=c_n=0\ (\in\mathbb{R}).$

따라서 $\{T(v_1),\ \cdots,\ T(v_n)\}$ 은 W 에서 일차독립이고,

$\langle T(v_1),\ \cdots,\ T(v_n)\rangle\leq W$ 이므로 $\{T(v_1),\ \cdots,\ T(v_n)\}$ 은 W 의 기저이다.

W 와 $\im L=L(V)$ 는 실수체 \mathbb{R} 위의 같은 차원을 갖는 벡터공간이므로

L 은 전사이다.

* 다른 설명(전사 정의)

임의의 $w\in W$ 에 대하여 $w=\sum_i\alpha_iT(v_i)=\sum_iT(\alpha_iv_i)\ (\alpha_i\in\mathbb{R},\ \text{즉}\ \alpha_iv_i\in V)$

이고, 이는 w 의 유일한 표현이다. ($\because\ \{T(v_i)\}_{i=1}^n$ 이 기저) 그러므로 L 은 전사이다.

34. (1) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 \\ 3 & -2\end{pmatrix}$ (2) $\frac{63}{2}$

(1) f 는 선형변환이므로 이에 대응하는 행렬 있다.
그 행렬의 크기는 $\dim(\text{공역})\times\dim(\text{정의역})=2\times2$.

$A=\begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 \\ -2 & 3\end{pmatrix}$, 계산하면 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 \\ 3 & -2\end{pmatrix}$.

* 다른 설명 $A\begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 \\ -2\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 \\ 3\end{pmatrix}$ 이므로

$A\begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 \\ -2 & 3\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1 & 2 \\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 \\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 \\ 3 & -2\end{pmatrix}$

(2) $P' = (-2, -3)$, $Q' = (1, 5)$, $R' = (7, 0)$.
 x 축을 기준으로 두 개의 삼각형의 넓이의 합으로 계산하면
 $\triangle P'Q'R' = \frac{1}{2} \cdot \frac{63}{8} (5+3) = \frac{63}{2}$.

* 다른 방법

$\triangle P'Q'R' = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{63}{2}$ (3열의 1들 고정)

* 다른 방법

$\overrightarrow{P'Q'} = (3, 8)$, $\overrightarrow{P'R'} = (9, 3)$, 구하는 넓이는 $\triangle P'Q'R' = \left| \frac{1}{2} \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \right| = \frac{63}{2}$.

* $\triangle PQR \times |\det A| = \frac{9}{2} \times |-7| = \frac{63}{2} = \triangle P'Q'R'$

* $\triangle PQR$ 의 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} (3+1) = \frac{9}{2}$ 이므로 f 는 넓이(길이)를 보존하지 않는다. 즉, 합동변환이 아니다.
* 합동 변환을 나타내는 행렬의 행렬식은 ± 1 .
(합동 변환은 회전변환(+1), 대칭변환(-1) 뿐이다.)

35.
두 근을 t_1, t_2 라 하면 타원 ① 위의 두 점
 (x_0+lt_1, y_0+mt_1) , (x_0+lt_2, y_0+mt_2) 의 중점 (x_0, y_0) 이다.
즉, $\frac{l}{2}(t_1+t_2)=0$, $\frac{m}{2}(t_1+t_2)=0$ 이다.
 \therefore 임의의 l, m 에 대하여 $t_1+t_2=0$ 이다.

③에서 $\frac{(2ax_0+hy_0+g)l+(hx_0+2by_0+f)m}{al^2+hlm+bm^2}=0$,
$$\begin{cases} 2ax_0+hy_0+g=0 \\ hx_0+2by_0+f=0, \quad al^2+hlm+bm^2 \neq 0 \end{cases}$$

$4ab-h^2 \neq 0$ 이면 한 쌍의 (x_0, y_0) 를 얻고
 $4ab-h^2=0$ 이면 부정 또는 불능이므로
무수히 많은 (x_0, y_0) 가 존재하거나 중심 (x_0, y_0) 를 갖지 않는다.

따라서 중심을 얻는 식 $\begin{cases} 2ax_0+hy_0+g=0 \\ hx_0+2by_0+f=0 \end{cases} (\Leftrightarrow \nabla f(x_0, y_0) = \vec{0})$.

36.

하위 영역	배점	예상정답율(%)	관련사고영역	출제자
선형대수	5	60	이해 및 적용	좌준수
출제 내용	W.Nicholson. Linear Algebra with Applications. PWS.			
관련자료	pp. 251-257			

$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$

이므로 A 의 고윳값은 $\lambda=1, 2, 3$ 이다.

$\lambda=1$ 에 대응되는 A 의 고유벡터를 $x_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ 이라 하면

$(A-\lambda I)x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ 2x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

이 식으로부터 $x_3=0, x_2=0$ 이고

따라서, $x_1 = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, s 는 0이 아닌 임의의 실수.

$\lambda=2$ 에 대응되는 A 의 고유벡터를 $x_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ 라고 하면

$(A-\lambda I)x_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1+x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

이 식으로부터 $x_1=0, x_3=0$ 이고

따라서, $x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, t 는 0이 아닌 실수.

$\lambda=3$ 에 대응되는 A 의 고유벡터를 $x_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ 라고 하면

$(A-\lambda I)x_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1+x_3 \\ -x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

이 식으로부터 $x_3=2x_1, x_2=0$ 이고

따라서, $x_3 = \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ 2u \end{bmatrix} = u \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, u 는 0이 아닌 임의의 실수.

한편 λ 가 A 의 고윳값이고 x 가 λ 에 대응되는 고유벡터이면

$A^{10}x = A^9(Ax) = A^9(\lambda x) = \lambda A^9x = \cdots = \lambda^{10}x$

이므로 A^{10} 의 고윳값은 λ^{10} 이고 대응되는 고유벡터는 x 가 된다.
그런데 A 의 고윳값이 1, 2, 3이고, 대응되는 각각의 고유벡터가

$s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ (s, t, u 는 0이 아닌 임의의 실수)

이므로 A^{10} 의 고윳값은 1, 2^{10} , 3^{10} 이고,

대응되는 각각의 고유벡터는

$s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ (s, t, u 는 0이 아닌 임의의 실수) 이다.

* 채점기준

A 의 고윳값 1, 2, 3을 모두 구하면1점

고윳값 1, 2, 3 각각에 대응되는 고유벡터

$s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ (s, t, u 는 0이 아닌 임의의 실수)

를 모두 구하면1점

(A 의 고유벡터를 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ 라고만 언급해도1점)

λ 가 A 의 고윳값이고 x 가 λ 에 대응되는 고유벡터일 때

$A^{10}x = A^9(Ax) = A^9(\lambda x) = \lambda A^9x = \cdots = \lambda^{10}x$

를 쓰면1점

A^{10} 의 고윳값 1, 2^{10} , 3^{10} 을 모두 구하면1점

A^{10} 의 고유벡터를

$s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ (s, t, u 는 0이 아닌 임의의 실수)

또는 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

라고 쓰거나, A 의 고유벡터와 같다고 기술하면1점

37.

$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 에 대하여 $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1}$

38.

2차원 아핀공간 A^2 의 변환은 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ 이므로

주어진 좌표를 위의 식에 대입하면

$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ 에서

$\alpha=1, \beta=2, a=1, b=1, c=2, d=-1$.

그러므로 아핀변환 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

39.

하위 영역	배점	예상 정답율(%)	출제근거 (이유)
고등수학(선형대수)	5	20	L. Smith, Linear Algebra 2nd. ed., pp. 59-64

$T(a)=a\times a+(a\cdot a)a=\parallel a\parallel^2=2a$ 이므로
 a 는 2를 고유치로 갖는 고유벡터 2점
(단, a 가 고유벡터임을 인지하여 입증하려고 시도했으면 부분점수 가능)

T 가 2 이외의 고유치를 가지면 그 고유벡터는 a 와 수직
즉, p 를 그 이외의 고유벡터라 하면
 $p\cdot a=0$, $T(p)=\lambda p$ 3점

$T(p)=a\times p=\lambda p$ 에서
 $0=(a\times p)\cdot p=T(p)\cdot p=\lambda p\cdot p=\lambda\parallel p\parallel^2$
이므로, $\lambda=0$ ($\because p\neq\mathbf{0}$). 단, $\mathbf{0}$ 는 영벡터이다. 4점

이제, $a\times p=\mathbf{0}$.
따라서 벡터 a , p 사잇각은 0(또는 π)이다.

그러나 $p\cdot a=0$ 에서 벡터 a , p 의 사잇각은 $\frac{\pi}{2}$ 이므로 모순. 5점

40.

- $\text{im } T$ (공역의 부분공간)를 이용하는 방법

선형사상 T 의 행렬표현이 A_T 라 하면 $A_T=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$ 이고,

선형사상 T 의 차원(dimension)은

$$\dim(T(\mathbb{R}^3))=\dim(\text{Im}(T))=\text{rank}(T)=\text{rank}(A_T)$$

이므로 선형사상 T 의 차원은 다음과 같다.

$$\text{rank}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\text{rank}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&3\\6&6&6\end{pmatrix}=\text{rank}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\text{rank}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}=\text{rank}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}=2$$

따라서 $\dim(T)=2$ 이다.

- $\ker T$ (정의역의 부분공간)를 이용하는 방법
 $(a,b,c)\in\ker T$ 이면 $0=a+2b+3c=4a+5b+6c=7a+8b+9c$ 에서
 $(a,b,c)=a(1,-2,1)$ 이므로 $\ker T\subset\langle(1,-2,1)\rangle$ 이고,
 $T(1,-2,1)=\mathbf{0}$ 이므로 $\ker T=\langle(1,-2,1)\rangle$.
따라서 $\dim\ker T=|\{(1,-2,1)\}|=1$.
그러므로 차원정리에 의해
 $\dim(T(\mathbb{R}^3))=\dim(\text{im } T)=\dim(\text{dom}(T))-\dim(\ker T)$
 $=\dim(\mathbb{R}^3)-\dim(\ker T)=3-1=2$.

41. ②

42. ①

가정에 의해 $A=PB{P}^{-1}=Q\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}Q^{-1}$ 인 가역행렬 P , Q 있다.

이때, $B={P}^{-1}Q\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}(P^{-1}Q)^{-1}$. 그러므로 행렬 B 의 고유치는 1, 2, 3

(고유치 같으므로 고유다항식도 같다.)

43. ④

일반적으로 $U\cup V$ 는 벡터공간이 되지 않는다.

$\dim(U+V)=5$ 라 놓고 풀다.

$$\dim(U+V)=\dim U+\dim V-\dim(U\cap V)$$
$$5=2+8-\dim(U\cap V)$$

그러므로 $\dim(U\cap V)=5$.

$$*\dim U+\dim V=\dim(U\cap V)+\dim(U+V)$$

44. ②

45. ④

* 답만 구하기

$(1,1)$ 은 $(r\sin\theta+r\cos\theta,r\cos\theta-r\sin\theta)$ 로 변환되므로 구하는 값 $2r\cos\theta$.

* 다른 설명

$$(x,y)\xrightarrow{f}(ry,rx)\xrightarrow{g}(ry\sin\theta+rx\cos\theta,ry\cos\theta-rx\sin\theta)$$

$$\text{이를 행렬로 나타내면 }\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\xrightarrow{g\circ f}\begin{pmatrix}r\cos\theta&r\sin\theta\\-r\sin\theta&r\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

그러므로 구하는 값은 $2r\cos\theta$.

* 다른 설명: f 와 g 는 모두 원점을 지나는 선형사상이므로 적절한 행렬에 대응된다. 표준기저에 의한 행렬을 구하면 f 의 행렬은 $\begin{pmatrix}0&r\\\cos\theta&-\sin\theta\end{pmatrix}$ 이고, g 의 행렬은 $\begin{pmatrix}\sin\theta&\cos\theta\\\cos\theta&-\sin\theta\end{pmatrix}$.

그러므로 $g\circ f$ 를 나타내는 행렬은 $\begin{pmatrix}\sin\theta&\cos\theta\\ \cos\theta&-\sin\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&r\\r&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\cos\theta&r\sin\theta\\-r\sin\theta&r\cos\theta\end{pmatrix}$ 이다.

46. ③

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in W\text{이면 }\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=b\begin{pmatrix}3&1\\0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-2&0\\1&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\text{이므로}$$

$$W\subset\left\langle\begin{pmatrix}3&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\rangle.$$

$$\begin{pmatrix}3&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\text{는 일차독립이며 }W\text{에 속하므로}$$

$$W=\left\langle\begin{pmatrix}3&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\rangle.\text{ 그러므로 }\dim W=3.$$

47. ②

구하는 일차변환은 평면(벡터공간) \mathbb{R}^2 의

임의의 벡터 (x,y) 의 원점을 지나는 직선(부분공간)

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid mx-y=0, m\neq 0\}\text{으로의 정사영.}$$

(x,y) 의 직선의 기저원소 $(1,m)$ 으로의 정사영은

$$(x',y')=\text{proj}_{(1,m)}(x,y)=\frac{(1,m)\cdot(x,y)}{\parallel(1,m)\parallel^2}(1,m)$$
$$=\left(\frac{x+my}{1+m^2},\frac{m(x+my)}{1+m^2}\right)$$

$$\text{문제 상황에 맞게 정리하면 }\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\frac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix}1&m\\m&m^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

(2×2 이므로 계산해도 되고, 양변 전치 취해도 된다.)

$$\text{그러므로 }A=\frac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix}1&m\\m&m^2\end{pmatrix}.$$

* 다른 풀이: A 의 고유치는 0, 1이다.

㉠ 0에 대응되는 고유벡터: 직선 $y=-\frac{1}{m}x$ 의 $\mathbf{0}$ 아닌 임의의 벡터(ex.

$$(m,-1)), A\begin{pmatrix}m\\-1\end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix}m\\-1\end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

㉡ 1에 대응되는 고유벡터: 직선 $y=mx$ 의 $\mathbf{0}$ 아닌 임의의 벡터(ex. $(1,m)$),

$$A\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}m&1\\-1&m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&m\end{pmatrix}, A=\frac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix}1&m\\m&m^2\end{pmatrix}.$$

$$\text{㉢ }P=\begin{pmatrix}m&1\\-1&m\end{pmatrix}\text{라 할 때, }A=P\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}P^{-1}.$$

48. ①

주어진 연립방정식을 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\mathbf{0}.\text{ 이때 행렬 }\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}\text{이 역행렬을 가지면}$$

주어진 연립방정식은 해 $x=y=z=0$ 만 갖는다.

그러므로 $\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}$ 이 역행렬이 갖지 않을 때 문제의 조건을 만족하므로

$$0=\det\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}=-(a-1)^2(a+2)\text{에서 }a=1,-2.\text{ 구하는 값은 }-1\text{이다.}$$

49. ①

50. ②

(1, 1, 0)와 (0, 1, -1)은 일차독립이므로 (1, x, 1)이
(1, 1, 0)와 (0, 1, -1)로 생성되는 평면 α에 포함될 경우를 생각하자.
평면 α에 포함되는 임의의 벡터는 (a, a+b, -b) (a, b는 실수) 꼴로 쓸 수
있으며, x=0일 때 (1, x, 1)이 평면에 포함된다. 이때 세 벡터가 일차종속이
된다.

* 다른 설명: $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

* 다른 설명: $\text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} < 3$ 이 될 때 일차종속.

1. 특성다항식 t^2-4t+4 .
특성방정식의 해 $t=2$ (중근)이므로 $a_n=\alpha\cdot 2^n+\beta\cdot n2^n$ 라 하면
초기조건에 따라 $\alpha=0, \beta=1$ 이므로 $a_n=n2^n$.

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}n(2x)^n$ 이므로

$$\begin{aligned} &x\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^3 \\ &=x\times\left(\sum_{n=0}^{\infty}nx^n\right)^3 \\ &=x\left\{x\times\frac{d}{dx}(x+x^2+x^3+\cdots)\right\}^3 \\ &=x\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)^3 \\ &=\frac{x^4}{(1-x)^6} \\ &=\sum_{n=0}^{\infty}{}_6\mathrm{H}_nx^{n+4}. \end{aligned}$$

그러므로 $0\leq n\leq 3$ 일 때 $b_n=0$, $n\geq 4$ 일 때 $b_n={}_6\mathrm{H}_{n-4}={}_{n+1}\mathrm{C}_5$.

2. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\frac{x^2}{1-x}$.

$\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=x(1-x)^{-1/2}=x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-x)^n$ 이므로 $b_5=\binom{-1/2}{4}=\frac{105}{384}=\frac{35}{128}$.

3. $b_0=2$ 이며 $\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}=-2\frac{a_n}{n!}+3$ 이므로 $b_{n+1}=-2b_n+3$,

$\sum_{n=0}^{\infty}b_{n+1}x^n=-2\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n+3\sum_{n=0}^{\infty}x^n, \frac{f-b_0}{x}=-2f+\frac{3}{1-x}$ 에서

$f(x)=\frac{2+x}{(1+2x)(1-x)}=\frac{(1-x)+(1+2x)}{(1+2x)(1-x)}=\frac{1}{1+2x}+\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}((-2)^n+1)x^n$.

$b_n=(-2)^n+1, a_n=n!((-2)^n+1)$.

(다른 풀이)

$b_{n+1}+2b_n=3$ 의 특성방정식 $t^2+2t=0$ 에서
일반(동차)해 $p_n=\alpha(-2)^n+\beta\cdot(0)^n$.
특수해 $q_n=\gamma$ 라 하면 $\gamma+2\gamma=3$ 에서 $\gamma=1$.

$b_0=2=p_0+q_0=\alpha+1, \alpha=1$. 그러므로 $b_n=(-2)^n+1 \ (n\geq 0)$.

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}((-2)^n+1)x^n=\frac{1}{1+2x}+\frac{1}{1-x}$ 이고 $a_n=n!\{(-2)^n+1\} \ (n\geq 0)$

(다른 설명)

점화식 $b_{n+1}=-2b_n+3$ 에 대하여 $b_{n+1}+\alpha=-2(b_n+\alpha)$ 라 할 때 $\alpha=-1$.
 $b_n-1=c_n$ 이라 하자. $c_{n+1}=-2c_n$ 이므로 $c_n=(-2)^n, b_n=c_n+1=1+(-2)^n$.

따라서 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}((-2)^n+1)x^n=\frac{1}{1+2x}+\frac{1}{1-x}, a_n=n!\{(-2)^n+1\} \ (n\geq 0)$.

4. $\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}, \frac{2}{(1-x)^3}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n$ 이므로

$a_n=\frac{(n+2)(n+1)}{2}={}_3\mathrm{H}_n$.

$\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=x(1+x)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+2}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^n$

$=a_0x+\sum_{n=2}^{\infty}(a_{n-1}+a_{n-2})x^n$ (상수항 0, $a_0=1$) 이므로

$b_0=0, b_1=1, n\geq 2$ 일 때, $b_n=a_{n-1}+a_{n-2}=n^2$.

그러므로 $b_n=n^2 \ (n\geq 0)$, 구하는 값 $\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{2n^2}{(n+2)(n+1)}=2$.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}n^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3}=\frac{3}{2}$.

5. $\left(-\frac{1}{2}\right)_n=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!}$

$=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!(-2)^n}=\frac{(2n)!}{n!n!(-4)^n}=\left(-\frac{1}{4}\right)^n\cdot {}_{2n}\mathrm{C}_n$ 이므로

$f(n)=\frac{\binom{2n}{n}}{\binom{-1/2}{n}}=(-4)^n$.

일반화된 이항정리에 따라

$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\left(-\frac{1}{8}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)\binom{-1/2}{n}\left(-\frac{1}{8}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(1+\frac{1}{2}\right)^{-1/2}=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

6. $g(x)=\frac{1}{(1+x)^2}, \mathrm{E}(X)=-1+\ln 3$

가정에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nx^n \ (n=1\text{부터 시작})$ 이므로

$(g(x)-1)+xg(x)=\frac{-x}{1-(-x)}$ 를 풀면 $g(x)=(1+x)^{-2}$.

(다른 풀이)

특성방정식 $t^2+t=0, t=0, -1$ 이므로 일반해 $p_n=\alpha\cdot 0^n+\beta\cdot(-1)^n$.
특수해 $q_n=\gamma\cdot n(-1)^n$ 라 하면 주어진 점화식에 의해 $\gamma=1, q_n=n(-1)^n$.
그러므로 $a_n=p_n+q_n=(-1)^n(n+1)$.

$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}{}_2\mathrm{H}_n(-x)^n=\frac{1}{(1-(-x))^2}=\frac{1}{(1+x)^2}$.

* $g(x)\neq f(x)$

$\mathrm{E}(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x)dx=\int_{-\frac{1}{3}}^1\frac{x}{(1+x)^2}dx=\int_{-\frac{1}{3}}^1x\cdot(1+x)^{-2}dx$

$=\left[x\cdot\{-(1+x)^{-1}\}\right]_{-1/3}^1-\int_{-1/3}^1-(1+x)^{-1}dx=-1+\ln 3$.

$\mathrm{E}(X)=\int_{-\frac{1}{3}}^1\frac{x}{(1+x)^2}dx=\int_{\frac{2}{3}}^2\frac{t-1}{t^2}dt=\int_{\frac{2}{3}}^2\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}dt=\left[\ln t+t^{-1}\right]_{2/3}^2=\ln 3-1$.

7. 100
 ${}_5C_4=5$ 이므로 5가지 경우만 조사하면 된다.
① A, B, C / D 선발: 10×2
② A, B, C / E 선발: 10×2
③ A, B / D, E 선발: 6×3
④ A, C / D, E 선발: 9×3
⑤ B, C / D, E 선발: 5×3
그러므로 구하는 경우의 수 100.

8. $x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}$, $a_n=\frac{1}{2^{n-3}}-\frac{1}{3^{n-2}}$
특성다항식 $x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}$ 의 해 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$.
 $a_n=\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^n+\beta\left(\frac{1}{3}\right)^n$ 에서 $a_1=1=a_2$ 이므로
 $a_n=8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+(-9)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{2^{n-3}}-\frac{1}{3^{n-2}}$.

9.
생성함수 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}a_{n-1}+\frac{1}{2^n}\right)x^n\right]=1+\frac{1}{2}xf(x)+\frac{x}{2-x}$
 $f(x)=\frac{4}{(2-x)^2}=\frac{1}{(1-(x/2))^2}=\sum_{n=0}^{\infty}{}_2H_n\left(\frac{x}{2}\right)^n$.
 $\sum_{n=0}^{\infty}na_n=\sum_{n=1}^{\infty}na_n=f'(1)=8$.

* 다른 설명
특성방정식 $t-\frac{1}{2}=0$, 일반해 $p_n=\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
특수해 $q_n=\beta\cdot n\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 라 하면 $n\beta\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot(n-1)\beta\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{2^n}$ 에서 $\beta=1$.
 $a_n=p_n+q_n=\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^n+n\left(\frac{1}{2}\right)^n$, 초기조건 $a_0=1$ 이므로 $a_n=(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}{}_2H_n\left(\frac{x}{2}\right)^n=\frac{1}{\left(1-\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}=\frac{4}{(2-x)^2}$.

10.
 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=(x+x^2+x^3+\cdots+x^7)(1+x+x^2+\cdots)^2=\frac{x(1-x^7)}{(1-x)^3}$.
 $f(x)=\frac{x(1-x^7)}{(1-x)^3}=(x-x^8)\sum_{n=0}^{\infty}{}_3H_nx^n$ 이므로
 a_{15} 는 x^{15} 의 계수 즉, ${}_3H_{14}-{}_3H_7=120-36=84$.

11. ①
 $1=d_0=a+b$, 특성방정식 $t^2-3t+1=0$ 에서 두 근의 합 $p+q=3$.
그러므로 $a+b+p+q=4$.

12. ④
① 경우의 수를 이용하는 방법
구하는 경우의 수는 다음 방정식의 정수해 개수이다.
 $a+b+c+d+e=12, 0\leq a\leq 3, b,c,d,e\geq 0$
 $a=0, 1, 2, 3$ 인 경우의 수를 각각 구하여 더하면
 ${}_4H_{12}+{}_4H_{11}+{}_4H_{10}+{}_4H_9=1325$.

② 생성함수를 이용하는 방법
조건 $0\leq a\leq 3, b,c,d,e\geq 0$ 을 만족하면서
 $a+b+c+d+e=n$ 이 되는 경우의 수를 a_n 라 할 때,
 a_n 의 생성함수는
 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=(x^0+x^1+x^2+x^3)\cdot\left(\frac{1}{1-x}\right)^4$
 $=\left(\frac{1-x^4}{1-x}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-x}\right)^4$
 $=(1-x^4)\sum_{n=0}^{\infty}{}_5H_nx^n$ 에서

구하는 경우의 수 a_{12} 즉, x^{12} 의 계수 ${}_5H_{12}-{}_5H_8=1325$.

13. ②
규칙을 만족하면서 만들 수 있는 n 자리 자연수의 개수를 a_n 라 할 때, a_n 의
지수생성함수는
 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n=(\frac{x^1}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots)^3\cdot(\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\cdots)^2$
 $=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^3\cdot e^{2x}$
 $=\frac{1}{8}(e^{3x}-3e^x+3e^{-x}-e^{-3x})\cdot e^{2x}$
 $=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(5^n-3\cdot 3^n+3\cdot 1^n-(-1)^n)\frac{x^n}{n!}$ 에서

구하는 경우의 수 a_8 즉, $\frac{x^8}{8!}$ 의 계수는 $\frac{1}{8}(5^8-3^9+2)$.

14. ③
① 포함배제의 원리를 이용하는 방법
면접 점수표의 가짓수는 다음 방정식의 정수해의 개수
 $x+y+z+w=14, 1\leq x,y,z,w\leq 6$ 정수해 개수
 $\Leftrightarrow a+b+c+d=10, 0\leq a,b,c,d\leq 5$ 정수해 개수
포함배제의 원리에 의해
 ${}_4H_{10}-(a\text{가 }6\text{이상}+b\text{가 }6\text{이상}+c\text{가 }6\text{이상}+d\text{가 }6\text{이상})$
 $+(a,b\text{가 }6\text{이상}+\cdots+c,d\text{가 }6\text{이상})$
 $-(a,b,c\text{가 }6\text{이상}+\cdots)$
 $={}_4H_{10}-{}_4C_1\times{}_4H_4+{}_4C_2\times 0=286-140=146$.

② 생성함수를 이용하는 방법
조건 $1\leq x,y,z,w\leq 6$ 을 만족하면서 $x+y+z+w=n$
되는 경우의 수를 a_n 라 할 때, a_n 의 생성함수는
 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=(x+x^2+\cdots+x^6)^4$
 $=(x^4-4x^{10}+6x^{16}-4x^{22}+x^{28})\sum_{n=0}^{\infty}{}_4H_nx^n$ 에서

구하는 경우의 수 a_{14} 즉, x^{14} 의 계수 ${}_4H_{10}-4\cdot{}_4H_4=146$.

15. ①

① 포함배제원리를 이용하는 방법

$x+y+z=30, \ 0\leq x,y,z\leq 20$

포함배제의 원리에 의해

$$\begin{aligned} &{}_3\text{H}_{30}-(x\text{가 }21\text{개 이상}+y\text{가 }21\text{개 이상}+z\text{가 }21\text{개 이상})+(x,y\text{가 }21\text{개 이상}+\cdots) \\ &= {}_3\text{H}_{30}-3\times {}_3\text{H}_9+0=331. \end{aligned}$$

② 생성함수를 이용하는 방법

조건 $0\leq x,y,z\leq 20$ 을 만족하면서 $x+y+z=n$ 을 만족하는 경우의 수를 a_n 라 할 때, a_n 의 생성함수는

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= (1+x+x^2+\cdots+x^{20})^3 \\ &= \left(\frac{1-x^{21}}{1-x}\right)^3 \\ &= (1-3x^{21}+3x^{42}-x^{63})\sum_{n=0}^{\infty} {}_3\text{H}_n x^n \text{에서} \end{aligned}$$

구하는 경우의 수는 a_{30} , 즉 x^{20} 의 계수 $1\cdot {}_3\text{H}_{30}-3\cdot {}_3\text{H}_9=331$.

16. ③

* S, T 가 구성되는 경우의 수

(i) S 에서 5명 통과: ${}_5\text{C}_5$

T 에서 5, 4, 3, 2, 1, 0명 통과: ${}_5\text{C}_5+\cdots+{}_5\text{C}_0=2^5$

(ii) S 에서 4명 통과: ${}_5\text{C}_4$

T 에서 4, 3, 2, 1, 0명 통과: ${}_4\text{C}_4+\cdots+{}_4\text{C}_0=2^4$

(iii) S 에서 3명 통과: ${}_5\text{C}_3$

T 에서 3, 2, 1, 0명 통과: 2^3

(iv) S 에서 2명 통과: ${}_5\text{C}_2$

T 에서 2, 1, 0명 통과: 2^2

(v) S 에서 1명 통과: ${}_5\text{C}_1$

T 에서 1, 0명 통과: 2^1

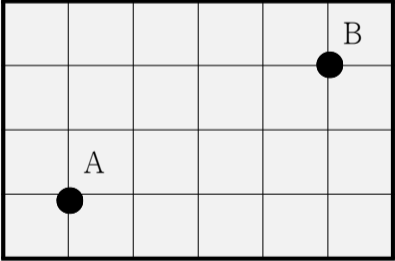
(vi) S 에서 0명 통과: ${}_5\text{C}_0$

T 에서 0명 통과: 2^0

그러므로 구하는 경우의 수는 $\sum_{k=0}^5 {}_5\text{C}_k 2^k \times 1^{5-k} = (2+1)^5 = 3^5$.

* $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 $\{0, 1, 2\}$ 로의 일대일대응의 개수 $|\{0, 1, 2\}|^{|\{1, 2, 3, 4, 5\}|} = 3^5$.

17. ③



(i) 집에서 A까지 가는 경우의 수 2

(ii) A에서 B까지 가는 경우의 수 $\frac{6!}{4!2!}=15$

(iii) B에서 학교까지 가는 경우의 수 2

(i), (ii), (iii)은 동시에 일어나야 하므로

구하는 경우의 수는 $2\times 15\times 2=60$.

18. 점화 관계: $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=4, \ a_n=2n^2-n$

$(a_{n+1}-a_n=4n+1)$

$a_2-a_1=5$

$a_3-a_2=9=5+4=a_2-a_1+4$

$a_4-a_3=13=9+4=a_3-a_2+4$

\vdots

이므로 $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n+4$ 로부터 $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=4$.

특성방정식 $t^2-2t+1=0$ 에서 $t=1$ 이므로

일반해 $t_n=\alpha\cdot 1^n+\beta n\cdot 1^n=\alpha+\beta n$.

특수해 $p_n=\gamma n^2$ 라 할 때 항등식 $\gamma(n+2)^2-2\gamma(n+1)^2+\gamma n^2=4$ 에서 $\gamma=2$.

따라서 $a_n=t_n+p_n=\alpha+\beta n+2n^2$ 이고 $a_1=1, \ a_2=6$ 로부터 $\alpha=0, \ \beta=-1$.

그러므로 $a_n=2n^2-n$.

* 다른 풀이

$a_{n+1}-a_n=4(n-1)+5=4n+1$ 이다.

따라서 $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k+1)=2n^2-n$.

19. 600

① 경우의 수를 이용하는 방법

(i) $\{1, 3, 5, 7\}=\{a, b, c, d, e\}$ 일 때

1, 3, 5, 7이 각각 중복되는 경우: $4\times \frac{5!}{2!1!1!1!}=240$,

(ii) $\{1, 3, 5, 7\}\subsetneq \{a, b, c, d, e\}$ 일 때

2, 4, 6을 뽑아 1, 3, 5, 7과 배열: $3\times 5!=360$.

그러므로 구하는 경우의 수는 600

② 생성함수를 이용하는 방법(뽑고 배열하기)

조건을 만족하면서 만들 수 있는 n 자리 자연수의

개수를 a_n 라 하면 a_n 의 생성함수는

(홀수는 1개 이상, 짝수는 0개 이상 뽑고+배열)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n &= (e^x-1)^4 (e^x)^3 \\ &= e^{3x} (e^{4x}-4e^{3x}+6e^{2x}-4e^x+1) \\ &= e^{7x}-4e^{6x}+6e^{5x}-4e^{4x}+e^{3x} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (7^n-4\cdot 6^n+6\cdot 5^n-4\cdot 4^n+3^n) \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

에서 구하는 경우의 수는 a_5 즉, $\frac{x^5}{5!}$ 의 계수는

$$\begin{aligned} &7^5-4\cdot 6^5+6\cdot 5^5-4\cdot 4^5+3^5 \\ &=16807-31104+18750-4096+243 \\ &=600. \end{aligned}$$

20.

(1) 구별되지 않는 6개를 3명에게 나누는 경우의 수 ${}_3\text{H}_6=28$

* 학생에게 나누어주는 개수를 x_1, x_2, x_3 라 할 때

$x_1+x_2+x_3=6$ 의 음이 아닌 정수해 개수

$$\begin{aligned} f(1, m)+f(2, m)+\cdots+f(n, m) &= {}_m\text{H}_1+{}_m\text{H}_2+\cdots+{}_m\text{H}_n \\ &= {}_m\text{C}_1+{}_{m+1}\text{C}_2+\cdots+{}_{m+n-1}\text{C}_n, \\ f(n, m+1)-1 &= {}_{m+1}\text{H}_n-1={}_{m+n}\text{C}_n-1. \end{aligned}$$

(2) $f(1, m)+f(2, m)+\cdots+f(n, m)=f(n, m+1)-1$, 수학적 귀납법 적용

(i) $n=1$ 일 때

$$\begin{aligned} f(1, m) &= {}_m\text{H}_1={}_m\text{C}_1=m, \\ f(1, m+1)-1 &= {}_{m+1}\text{H}_1-1={}_{m+1}\text{C}_1-1=m \\ \text{이므로 주어진 등식이 성립한다.} \end{aligned}$$

(ii) $n=k$ 일 때 주어진 등식이 성립한다고 하자.

$$\begin{aligned} \text{즉, } f(1, m)+f(2, m)+\cdots+f(k, m) &= f(k, m+1) \\ f(1, m)+f(2, m)+\cdots+f(k, m)+f(k+1, m) \\ &= {}_{m+k}\text{C}_k-1+f(k+1, m) \\ &= {}_{m+k}\text{C}_k-1+{}_m\text{H}_{k+1} \\ &= {}_{m+k}\text{C}_k-1+{}_{m+k}\text{C}_{k+1} \\ &= {}_{m+k+1}\text{C}_{k+1}-1=f(k+1, m+1)-1 \text{이므로} \\ n=k+1 \text{일 때도 등식이 성립한다.} \\ \text{그러므로 수학적 귀납법에 의해 주어진 등식은 참.} \end{aligned}$$

21. 25

구별되는 다섯 개를 구별되지 않는 상자에 넣는 경우의 수

$$\begin{aligned} \text{(i) } 2, 2, 1 \text{개 넣는 경우: } &{}_5\text{C}_2 \cdot {}_3\text{C}_2 \cdot {}_1\text{C}_1 \times \frac{1}{2!}=15 \\ \text{(ii) } 1, 1, 3 \text{개 넣는 경우: } &{}_5\text{C}_1 \cdot {}_4\text{C}_1 \cdot {}_3\text{C}_3 \times \frac{1}{2!}=10 \end{aligned}$$

그러므로 구하는 경우의 수는 25.

22. 45개

① 경우의 수를 이용하는 방법

$$\begin{aligned} \text{주어진 방정식은 다음 방정식과 동치이다.} \\ (x-1)+(y-3)+(-z+2)=8, \quad x-1 \geq 0, \quad y-3 \geq 0, \quad -z+2 \geq 0 \\ \text{주어진 방정식의 정수해의 개수 } {}_3\text{H}_8=45. \end{aligned}$$

② 생성함수를 이용하는 방법(뽀기)

주어진 조건을 만족하는 $x+y-z=n$ 의 정수해의 개수 a_n 라 하자. a_n 의

$$\begin{aligned} \text{생성함수 } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= (x+x^2+\cdots)(x^3+x^4+\cdots)(x^{-2}+x^{-1}+\cdots) = \frac{x^2}{(1-x)^3} \\ &= x^2 \sum_{n=0}^{\infty} {}_3\text{H}_n x^n. \end{aligned}$$

구하는 경우의 수는 a_{10} 즉, x^{10} 의 계수 ${}_3\text{H}_8=45$.

23.

피보나치의 저서 「산반서(Liber Abaci)」에 다음과 같은 문제가 있다.

한 사람이 암, 수 한 쌍의 토끼를 기르는데 한 달에 한 번씩 한 쌍의 새끼(암, 수)를 출산한다고 합니다. 새로 출산된 새끼 한 쌍은 한 달이면 다 자라고, 두 달 후부터는 매달 한 쌍의 새끼를 출산한 일 년 후에는 모두 몇 쌍의 토끼를 출산하겠습니까?

이 문제의 풀이에 나오는 수열을 Lucas가 피보나치 수열이라고 이름 붙였다.

① $x_n=f_{n+1}f_{n-1}-f_n^2$ 라 하면

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f_{n+2}f_n-f_{n+1}^2 \\ &= (f_{n+1}+f_n)f_n-(f_n+f_{n-1})f_{n+1} \\ &= f_n^2-f_{n-1}f_{n+1} \\ &= -x_n. \end{aligned}$$

② $x_2=f_3f_1-f_2^2=2 \cdot 1-1^2=1$ 이므로 $n \geq 2$ 일 때 $\{x_n\}$ 은 공비 -1 인 등비 수열이다. 따라서 $x_n=1 \cdot (-1)^n \ (n \geq 2)$.

③ $f_{n+1}f_{n-1}-f_n^2=(-1)^n$ 에서 $f_{n+1}f_{n-1}=f_n^2+(-1)^n \ (n \geq 2)$.

24. ②

$$c_n=\log_2 a_n, \quad c_n=\frac{c_{n-1}+c_{n-2}}{2}, \quad n=3, 4, \cdots.$$

$$\text{특성방정식 } 2t^2-t-1=0, \quad t=1, \quad -\frac{1}{2}.$$

$$c_n=\alpha+\beta\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\log_2 a_n,$$

$$a_n=2^{\alpha+\beta(-2)^{-n}}, \quad \alpha=2, \quad \beta=4. \quad \therefore a_n=2^{2+4(-2)^{-n}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n=4.$$

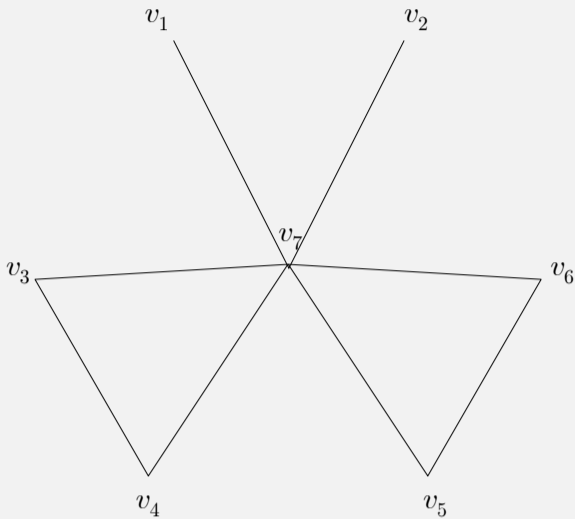
25. ④

$$\sum_{j=1}^i {}_iC_j={}_iC_1+{}_iC_2+\cdots+{}_iC_i=2^i-1 \text{이므로}$$

$$\sum_{i=1}^9 \sum_{j=1}^i {}_iC_j=\sum_{i=1}^9 (2^i-1)=\frac{2(2^9-1)}{2-1}-9=1013.$$

<그래프>

1. G 의 변의 개수 e 라 하자.
(가)에 따라 $\deg(v_1) \leq 1, \deg(v_7) \leq 7, G$ 는 단순그래프이므로 $\deg(v_7) \leq 6$.
(나)에 따라 $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ 이면 $\deg(v_n) \leq 2$.
여기서 $\sum_{v \in V} \deg(v) \leq 17, 2e = \sum \deg(v)$ 는 짝수이므로 $\sum_{v \in V} \deg(v) \leq 16$.
 $\deg(v_1) = 1 = \deg(v_2), \deg(v_3) = \deg(v_4) = \deg(v_5) = \deg(v_6) = 2, \deg(v_7) = 6$
을 만족하는 그래프 G 가 존재하므로, $2e = \sum_{v \in V} \deg(v) = 16, e = 8$.



2. 근접행렬 B 로부터 인접행렬 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 이므로 $L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.
 $\det(L) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 0$.
($-(2, -1, -1) = (-1, 2, -1) + (-1, -1, 2)$, 일차종속.)
 $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, A^4 = A^2 \cdot A^2$ 의 1행 4열 성분 $= (1 \ 0 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 4$. 구하는 값 4.
 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 & x_2 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_2 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_4 & x_2 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_4 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ 이므로 길이 4인 길의 개수 4.

3. 16
 $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ 이므로 구하는 값 $\sum_{i,j} (a_{ij}) = 16$

- * 다른 설명
 A 의 모든 성분의 합은 각 행(열)의 합들을 모두 더한 것으로 각 꼭짓점의 차수의 합과 같다. 따라서 구하는 값은 주어진 그래프의 변의 수의 2배, 16이다.
- * 루프는 없으나 다중변 있다. 단순그래프 아님
* 평면에 변이 서로 교차하지 않게 그려지므로 평면그래프
* 임의의 두 꼭짓점 사이에 경로 있으므로 연결그래프

4. ① $G = G(V, E)$ 에 대하여
 $2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v) = 4 + 6 + 4 + 7 + 2 + 8 + 4 + 6 + 3 = 44$ 이므로 $|E| = 22$.
② G 가 평면그래프라 하자.
 G 의 임의의 두 꼭짓점 사이에 경로가 존재하므로 G 는 연결그래프이다.
따라서 $22 = |E| \leq 3|V| - 6 = 21$, 모순.
③ $\{v_2, v_3, v_5, v_7\}$ 으로 이루어진 G 의 부분그래프는 K_4 와 동형이다.
 $\chi(K_4) = 4$ 이므로 $\chi(G) \geq \chi(K_4) = 4$.
한편 $v_2, v_4, v_6, v_8, v_{10}$ 와 v_3, v_9 와 v_5 와 v_7 은 각각 다른 색으로 채색이 가능하므로 $\chi(G) = 4$.

5. ①
ㄱ. 조건을 만족하는 단순그래프가 존재할 필요충분조건
차수열 **(4, 4, 3, 3, 2, 0)**: 그래프적
 $\Leftrightarrow (4-1, 3-1, 3-1, 2-1, 0) = \mathbf{(3, 2, 2, 1, 0)}$: 그래프적
 $\Leftrightarrow (2-1, 2-1, 1-1, 0) = (1, 1, 0, 0)$: 그래프적
 $\bullet \text{---} \bullet \quad \bullet \quad \bullet$ 는 단순그래프이므로
차수 4, 3, 3, 2, 0인 단순그래프 있다.
ㄴ. 육각형 / 연결되지 않은 두 삼각형은 조건을 만족하는 두 개의 단순그래프이다.
ㄷ. 조건을 만족하는 단순그래프는 꼭짓점의 개수가 6개, $d_1 \geq 6$ 이 되는데,
이 경우 v_1 에 루프 혹은 다중변이 존재하게 되어 단순그래프라는 데
모순이 된다.

6. ③
(가)에 의해 $v = 5 + 6 = 11$, (나)에 의해 $e = 5 + 9 + 5 \times 6 = 44$
 $m = \sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2e = 88$.
(나)에 의해 C_5 의 임의의 꼭짓점과 $K_{3,3}$ 의 임의의 꼭짓점은 인접하므로
그래프 G 의 채색수는 C_5 의 채색수와 $K_{3,3}$ 의 채색수의 합이다.
 $\chi(C_5) = 3, \chi(K_{3,3}) = 2$ 이므로 $n = 5$.
그러므로 $m + n = 93$.

7. ③
ㄱ. A^2 의 (i, i) 성분은 꼭짓점 v_i 에서 v_i 에 이르는 길이 2인 경로의 수이다.
즉, v_i 의 차수를 나타내므로 A^2 의 대각합은 $2m$ 이다.
ㄴ. $A^k (k \geq 3)$ 의 대각합은 길이 k 인 경로의 개수.
(회로만 있는 것이 아니다.)
ㄷ. $BB^T = D + A$ 이며 G 는 단순그래프이므로 A 의 모든 (i, i) 성분은 0이다.
따라서 BB^T 의 대각성분 즉, (i, i) 성분은 $\deg(v_i)$ 이다.

8. ⑤

ㄱ. Kuratowski 정리에 의해 옳다.

* 다른 설명

$K_{3,4}$ 는 연결그래프이다. $K_{3,4}$ 가 평면그래프이면

오일러 공식에 의해 $v-e+f=2$ 에서 $f=7$ 이다.

$K_{3,4}$ 는 단순그래프이므로 임의의 면의 차수는 1, 2가 될 수 없고,

이분그래프이므로 3도 될 수 없다.

따라서 $K_{3,4}$ 의 모든 면의 차수는 4이상이다.

한편 $28=4f \leq \sum_{f \in F} \deg(f) = 2e = 24$ 가 되어 모순.

그러므로 $K_{3,4}$ 는 평면그래프가 아니다.

ㄴ. 평면그래프 G 의 모든 꼭짓점의 차수 6이상 가정.

$6v \leq \sum_{v \in V} \deg(v) = 2e$ 에서 $3v \leq e$ 이며, $e \leq 3v-6$ 이므로 $3v \leq 3v-6$, 모순.

따라서 평면그래프에 차수 5이하 꼭짓점 있다.

ㄷ. 평면에 그렸으므로 평면그래프, 하나의 면만 삼각형이고 나머지 면은 삼각형이므로 임의의 두 꼭짓점이 연결되어 있으므로 연결그래프,

따라서 주어진 그래프는 연결평면그래프이다.

그러므로 다음 등식과 공식 사용가능

$\sum_{f \in F} \deg(f) = 4 \times 1 + 3(f-1) = 3f+1$ 에서 $f = \frac{2e-1}{3}$,

오일러 공식에 의해 $v-e+f=2$ 에서 $e=83$.

9. ②

분할하여 얻은 그래프를 G 라 하면

가정에 의해 G 는 연결, 평면, 단순그래프.

G 의 꼭짓점의 수 v , 변의 수 e , 면의 수 f 에 대하여

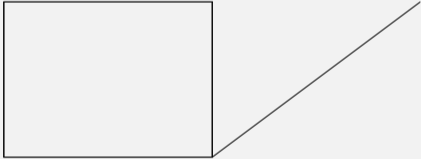
$v=11, \sum_{v \in V} \deg(v) = 4 \cdot 11 = 2e$ 에서 $e=22$,

$v-e+f=2$ 에서 $f=13$ 이다. 삼각형의 개수 x 라 하면

$\sum_{f \in F} \deg(f) = 2e = 44 = 3x + 4(13-x)$ 에서 $x=8$.

10. ⑤

주어진 문제 상황을 그래프 문제로 생각하자.



위 그래프를 4가지 색으로 칠하는 방법의 수이다.

제거-축약정리에 의해 채색다항식은 다음과 같다.

$$P_G(x) = x(x-1)^4 - \{x(x-1)^3 - x(x-1)^2\} = x(x-1)^2(x^2-3x+3)$$

그러므로 구하는 값 $P_G(4) = 252$.

* $P_G(0) = P_G(1) = 0, P_G(2) = 2, P_G(3) = 36$.

11. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, a 에서 세 점을 지나 c 에 이르는 경로의 수

* 루프, 다중변 없다. 단순그래프

* 평면에 변이 서로 교차하지 않게 그려지므로 평면그래프

* 임의의 두 꼭짓점 사이에 경로 있으므로 연결그래프

* $v=4, e=5, f=3$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad 2e &= \sum \deg(f) = 3+3+4 \text{ (삼각형 2개, 외부 사각형 1개)} \\ &= \sum \deg(v) = 3+2+3+2 \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad e=5 \leq 3v-6=6$$

* 채색다항식 $P_G(x) = x(x-1)(x-2)^2$,

* 채색수 $\min\{x \in \mathbb{Z}^+ \mid P_G(x) \neq 0\} = \chi(G) = 3$.

12.

$m=1$ 일 때 $n, 1 \mid m \geq 2$ 일 때 $n(n-1)^{m-1}, 2$

1을 칠하면 2는 1과 다른 색으로, 3은 2와 다른 색으로 ...,

m 은 $m-1$ 과 다른 색으로 칠하면 되므로

① $m=1$ 일 때 $P_G(n)=n$ 이고, $\min\{n \in \mathbb{Z}^+ \mid P_G(n) \neq 0\} = 1$ 이므로 $\chi(G) = 1$.

② $m \geq 2$ 일 때

$P_G(n) = n \times (n-1) \times (n-1) \times \cdots \times (n-1) \times (n-1) = n(n-1)^{m-1}$ 이고,

$\min\{n \in \mathbb{Z}^+ \mid P_G(n) \neq 0\} = 2$ 이므로 $\chi(G) = 2$.

그래프 G 를 색칠하는 데 필요한 색의 최소 개수는 2.

13.

(1) 인접행렬 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(2) 곧바로 가는지 알 수 있는 행렬 A ,

한 지점을 거쳐서 갈 수 있는지 알 수 있는 행렬 A^2 .

그러므로 구하는 행렬 $A+A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1.

$1=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=0+\frac{c}{8}+\frac{c}{8},\ c=4.$

$P(X\geq 4)=\int_4^{\infty}4x^{-3}dx=\frac{1}{8}.$

우수 제품이 3개 이상 있을 확률 $\left(\frac{1}{8}\right)^4+4\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^3\left(\frac{7}{8}\right)=\frac{29}{4096}.$

2. 29

$E(X_i)=5=V(X_i),\ \frac{140}{n-1}=V(X_i)=5,\ n=29.$

3. 4, $\frac{4}{5}$

$1=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$ 에서 $p+q=\frac{5}{24}.$

$\frac{11}{12}=E(X)=0\cdot P(X=0)+1\cdot P(X=1)+2\cdot P(X=2)$ 에서

$q=\frac{1}{24},\ p=\frac{1}{6},\ p\times\frac{1}{q}=4.$

$$P(X+Y\leq 4\mid Y-X=2)=\frac{P(X+Y\leq 4,\ Y-X=2)}{P(Y-X=2)}$$
$$=\frac{P(X=0,\ Y=2)+P(X=1,\ Y=3)}{P(X=0,\ Y=2)+P(X=1,\ Y=3)+P(X=2,\ Y=4)}=\frac{\frac{1}{6}}{q+\frac{1}{6}}=\frac{4}{5}.$$

4. $\frac{5}{6}$

$E[X\mid Y=1]=\sum_{x=0}^2x\cdot\frac{f(x,1)}{f_Y(1)}=\sum_{x=0}^2x\cdot\frac{f(x,1)}{\frac{2}{15}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}}=\frac{5}{2}(0+\frac{1}{5}+\frac{2}{15})=\frac{5}{6}.$

5. $n=9$

A가 동전을 던져 앞면이 나오는 횟수 X,
B가 동전을 던져 앞면이 나오는 횟수 Y라 하자.
동전을 던지는 시행은 독립시행이므로 X와 Y는 독립이다.

$$\frac{6}{13}=P(X=1\mid X+Y=2)$$
$$=\frac{P(X=1,\ X+Y=2)}{P(X+Y=2)}$$
$$=\frac{P(X=1,\ Y=1)}{P(X+Y=2)}$$
$$=\frac{P(X=1)\cdot P(Y=1)}{P(X+Y=2)}$$
$$=\frac{{}_nC_1p^1(1-p)^{n-1}\cdot {}_nC_1p^1(1-p)^{2n-1}}{{}_n{}_nC_2p^2(1-p)^{3n-2}}$$
$$=\frac{2n^2}{3n(3n-1)/2}$$

에서 $n^2-9n=0.$

그러므로 $n=9.$

6. ⑤

ㄱ. trivial

ㄴ. 가능한 모든 경우의 확률을 더하면 1이므로 옳다.

ㄷ. 12번째까지는 4번 성공하고 13번째에 성공할 확률은 ${}_{12}C_4\left(\frac{1}{8}\right)^4\left(\frac{7}{8}\right)^8\times\left(\frac{1}{8}\right)$ 이므로 옳다.

* 음이항분포

n 회의 독립시행에서 k 번 성공할 때까지 필요한 총 횟수에 대한 확률변수를 음이항확률변수라 한다. $k=1$ 일 때 기하분포라 한다.

① 확률질량함수 $f(x)={}_{x-1}C_{k-1}p^kq^{x-k}$

② $M_X(t)=(pe^t/(1-qe^t))^k$

③ $E(X)=k/p,\ V(X)=kq/p^2$

7. ②

흰 공일 사건을 E라 하자.

가정에 의해 $P(A)=\frac{1}{3},\ P(B)=\frac{2}{3},\ P(E\mid A)=\frac{3}{5},\ P(E\mid B)=\frac{m}{m+2}$ 이므로

$$\frac{2}{7}=P(A\mid E)=\frac{P(E\mid A)P(A)}{P(E)}$$
$$=\frac{P(E\mid A)P(A)}{P(E\mid A)P(A)+P(E\mid B)P(B)}$$
$$=\frac{0.6\times 0.3}{0.6\times 0.3+[m/(m+2)]\times 0.6}$$
$$=\frac{0.6}{0.6+2m/(m+2)},\ m=6.$$

8. ④

$$f(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{\frac{3x-y}{12}}{\frac{3-y}{12}+\frac{6-y}{12}}=\frac{3x-y}{9-2y},\ (x,y=1,2)$$

$$E(X\mid Y=1)=\sum_{x=1}^2x\cdot\frac{3x-1}{9-2}=\frac{12}{7}.$$

9. ④

$p_{Y\mid X}(n\mid m)=(\text{동전을 }m\text{번 던져 앞면이 }n\text{번 나올 확률})$
$$={}_mC_n\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{m-n}={}_mC_n\left(\frac{1}{2}\right)^m.$$

전확률의 법칙(law of total probability)에 의해

$$p_Y(0)=\sum_{m=1}^6p_{Y\mid X}(0\mid m)\cdot p_X(m)$$
$$=\sum_{m=1}^6{}_mC_0\left(\frac{1}{2}\right)^m\cdot\frac{1}{6}$$
$$=\frac{1}{6}\sum_{m=1}^6\left(\frac{1}{2}\right)^m=\frac{63}{6\cdot 64}.$$

* 초기하분포

특정한 속성을 갖는 원소 m 개를 포함한 전체 N 개의 원소 중에서 임의로 n 개의 원소를 비복원추출할 때, n 개에 포함된 특정한 속성을 갖는 원소의 개수에 대응하는 확률변수를 초기하확률변수라 한다. 초기하분포는 m 과 N 이 무한히 커질 때 $p=\frac{m}{N}$ 인 이항분포로 근사한다.

① 확률질량함수 $f(x)=\frac{{}_mC_x\cdot {}_{N-m}C_{n-x}}{{}_NC_n}$
$$(0\leq x\leq \min\{m,n\})$$

② $E(X)=\frac{nm}{N},\ V(X)=\frac{npq(N-n)}{N-1}$

10. ④

$E(Y) = E(X^2) = M_X''(0) = \frac{3}{5}, \quad E(Y^2) = E(X^4) = M_X^{(4)}(0) = \frac{3}{5}$ 이므로

$V(Y) = \frac{3}{5} - \frac{9}{25} = \frac{6}{25}.$

* 주어진 적률 생성함수로부터 X 의 분포는 다음과 같다.

X	0	-1	1	계
$P(X)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

11. ⑤

사각연필을 i 번째 굴렸을 때 윗면에 나온 수 X_i 라 하면

$X_1, X_2, X_3, \cdots, X_{80}$ 은 독립이며, X_i 의 분포는 다음과 같다.

X_i	1	2	3	4	계
$P(X_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

이때 $E(X_i) = \frac{5}{2}, \quad V(X_i) = \frac{5}{4}$ 이다.

한편 $X = \frac{1}{80}(X_1 + X_2 + X_3 + \cdots X_{80})$ 라 하면

$E(X) = \frac{1}{80} \cdot 80 \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{2}, \quad V(X) = \frac{1}{80^2} \cdot 80 \cdot \frac{5}{4} = \frac{1}{8^2}.$

그러므로 $x = \Pr(X_1 + X_2 + \cdots + X_{80} \geq 216) = \Pr(X \geq 2.7)$
 $\approx \Pr(Z \geq 1.6) = 1 - \Phi(1.6).$

12. ②

시험 횟수를 X 라 하면 X 의 확률분포는 다음과 같다.

X	3	4	5	계
$P(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	1

$E(X) = \frac{33}{8}.$

13. $n=1, 2$

$E_n = 0 \cdot (1 - \frac{1}{2^n}) + n \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{n}{2^n}.$

$f(x) = \frac{x}{2^x}, \quad f'(x) = 2^{-x}(1 - x \ln 2)$ 는 $x \geq 2$ 일 때 $f'(x) < 0$ 이므로

$n=1, 2$ 일 때 E_n 은 최댓값을 갖는다.

14. X 의 적률생성함수를 이용하자.

$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^n e^{tx} \cdot {}_n C_x p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=0}^n {}_n C_x (pe^t)^x (1-p)^{n-x}$
 $= [pe^t + (1-p)]^n$ 이므로
 $E(X) = M_X'(0) = np.$

15. 짝수 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 이므로 $X \sim B(288, \frac{1}{3}).$

$E(X) = 96, \quad V(X) = 64 = 8^2.$

시행횟수가 충분히 크므로 중심극한정리에 따라 $X \sim N(96, 8^2).$

$P(88 \leq X \leq 112) = P(-1 \leq Z \leq 2) = 0.8185.$

16. $\frac{2}{7}$

a 에서 생산하는 제품을 선택할 사건 A ,

b 에서 생산하는 제품을 선택할 사건 B ,

c 에서 생산하는 제품을 선택할 사건 C 라 하자.

A, B, C 는 쌍마다 배반 사건이므로

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B).$

가정에 의해 $P(A) = 0.2, \quad P(B) = 0.3, \quad P(C) = 0.5,$

$P(E|A) = 0.005, \quad P(E|B) = 0.01, \quad P(E|C) = 0.02.$

베이즈 정리에 따라 구하는 확률은

$P(A \cup B|E) = \frac{P((A \cup B) \cap E)}{P(E)} = \frac{P(A \cap E) + P(B \cap E)}{P(E)}$
 $= \frac{P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B)}{P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B) + P(E|C)P(C)}$
 $= \frac{2}{7}.$

17.

(1)

X	P(X)
0	1/4
1	1/2
2	1/4
합	1

Y	P(Y)
0	1/2
1	1/2
합	1

Y \ X	0	1	합
0	1/4	0	1/4
1	0	1/2	1/2
2	1/4	0	1/4
합	1/2	1/2	1

(2) $\sigma_{XY} = E(XY) - \mu_X \mu_Y = \sum_{x,y} xyf(x,y) - 1 \cdot (1/2) = 1/2 - 1/2 = 0.$

(3) $P(X=0, Y=0) = 1/4 \neq P(X=0) \cdot P(Y=0) = 1/8$ 이므로
 X 와 Y 는 독립이 아니다.

18.

하위 영역	배점	예상정답율(%)	관련사고영역	출제자
교직수학	5	50	이해	전무근
출제 내용	고등학교 수학 I 교과서. 동화사. 1998. pp.233-236.			
관련자료	수학과 교육과정, 교육부. 1997. p.103.			

(유형 1) 강원도를 여행할 사건을 A , 제주도를 여행할 사건을 B 라 하면

$p(A)=\frac{2}{5}, p(B)=\frac{1}{4}$ 이고 A, B 는 독립이므로

$p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B)=\frac{1}{10}$

한편, $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$ 에서 $p(A\cup B)=\frac{11}{20}$

구하는 조건부확률은 $p(B^c|A^c)=\frac{p(A^c|B^c)}{p(A^c)}=\frac{1-p(A\cup B)}{1-p(A)}$

$=\frac{1-\frac{11}{20}}{1-\frac{2}{5}}=\frac{3}{4}$

(유형 2) $p(A)=\frac{2}{5}, p(B)=\frac{1}{4}$ 이고 A, B 는 독립이므로

$p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B)=\frac{1}{10}$

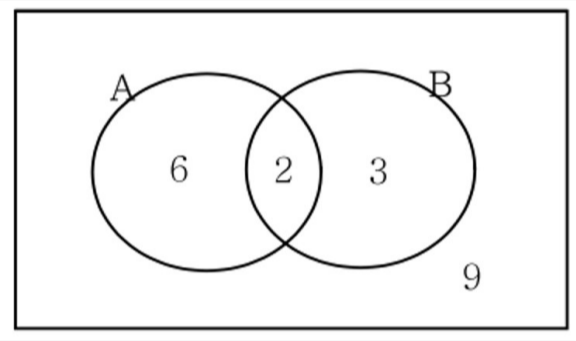
한 반의 학생을 20명으로 생각하여 벤 다이어그램을 그리면 다음과 같다.

$p(A^c\cap B^c)=\frac{9}{20}$

$p(A^c)=\frac{3}{20}+\frac{9}{20}=\frac{12}{20},$

$p(B^c|A^c)=\frac{p(A^c|B^c)}{p(A^c)}$

$=\frac{1-p(A\cup B)}{1-p(A)}=\frac{3}{4}$



* 채점기준

(유형 1) 강원도를 여행할 사건을 A , 제주도를 여행할 사건을 B 라 하면

$p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B)=\frac{1}{10}$ 을 구하면

$p(A\cup B)=\frac{11}{20}$ 를 구하면

$p(B^c|A^c)=\frac{p(A^c|B^c)}{p(A^c)}$ 를 사용하면

$\frac{p(A^c|B^c)}{p(A^c)}=\frac{1-p(A\cup B)}{1-p(A)}$ 를 사용하면

$p(B^c|A^c)=\frac{3}{4}$ 을 구하면

(유형 2) $p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B)=\frac{1}{10}$ 을 구하면

$p(A^c\cap B^c)=\frac{9}{20}$ 를 구하면

(벤 다이어그램에서 $A\cap B$ 와 $(A\cup B)^c$ 의 개수 또는 확률이 정확하면 각각 1점)

$p(B^c|A^c)=\frac{p(A^c|B^c)}{p(A^c)}$ 의 식을 사용하면

$\frac{p(A^c|B^c)}{p(A^c)}=\frac{1-p(A\cup B)}{1-p(A)}$ 를 사용하면

$p(B^c|A^c)=\frac{3}{4}$ 을 구하면

19. ①

$M_X(t)=E(e^{tX})=\sum_{x=1}^{\infty}e^{tx}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{e^t}{2-e^t}.$

$E(X)=M_X'(0)=2, E(X^2)=M_X''(0)=6. V(X)=6-2^2=2.$

20. ②

학생 2명을 뽑아 순서쌍으로 나타내면 다음과 같다.

$(1,2)$	$(2,1)$	$(3,1)$	$(4,1)$	$(5,1)$
$(1,3)$	$(2,3)$	$(3,2)$	$(4,2)$	$(5,2)$
$(1,4)$	$(2,4)$	$(3,4)$	$(4,3)$	$(5,3)$
$(1,5)$	$(2,5)$	$(3,5)$	$(4,5)$	$(5,4)$

서로의 위치를 3번 바꾸었을 때, 첫 번째 학생이 1번일 경우의 수 4이므로

구하는 확률 $\frac{4}{20}=\frac{1}{5}.$

21. ②

$x+y+\frac{1}{3}=1$ 에서 $0\leq x\leq\frac{2}{3}.$ $E(X)=4x+\frac{5}{3}, E(X^2)=\frac{11}{3}+24x$ 이므로

$V(X)=\frac{11}{3}+24x-\left(4x+\frac{5}{3}\right)^2=-16x^2+\frac{32}{3}x+\frac{8}{9}=-16\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{3}.$

따라서 $x=\frac{1}{3}$ 일 때 분산이 최대이다.

22. ③

A 가 이길 확률을 구하자.

① A 가 2번 연속 이기는 경우

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

② A 와 B 가 각각 1번 이기고 A 가 이기는 경우

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

③ A 가 1번, B 가 2번 이기고 A 가 이기는 경우

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$

따라서 A 가 이기는 확률 $\frac{11}{16}$ 이므로

A 는 1100원, B 는 500원 갖는 것이 타당하다.

23. ①

$X\sim B(6,\frac{1}{4}). E(X)=\frac{3}{2}, V(X)=\frac{9}{8}=E(X^2)-\frac{9}{4}$ 에서 $E(X^2)=\frac{27}{8}.$

$X+Y=6$ 에서 $Y=6-X.$

$E[(X-Y)^2]=E[(2X-6)^2]=E(4X^2-24X+36)=\frac{27}{2}-36+36=\frac{27}{2}.$

24. ③

주머니에서 C_i 을 뽑는 사건 C_i ($i=1, 2, 3$),

주사위를 4번 던져 앞면이 2번 나오는 사건 H 라 하자.

가정에 의해 $P(C_1)=P(C_2)=P(C_3)=\frac{1}{3},$

$P(H|C_1)={}_4C_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{128},$

$P(H|C_2)={}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{8},$

$P(H|C_3)={}_4C_2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{27}{128}.$

$P(H)=P(H|C_1)P(C_1)+P(H|C_2)P(C_2)+P(H|C_3)P(C_3)=\frac{17}{64}$ 이므로

구하는 확률 $P(C_2|H)=\frac{P(H|C_2)P(C_2)}{P(H)}=\frac{8}{17}.$

1. 500, 50

$$\text{Var}(X+Y)=400^2+300^3=500^2, \sigma_{X+Y}=500, c=\frac{\sigma_{X+Y}}{\sqrt{100}}=50$$

2. 9, $\frac{7}{3}$

$$\mu_Y=0+0+\cdots+0=0, V(Y)=\sigma_Y^2=1+1+\cdots+1=9, Y\sim N(0,3^2).$$

$$P(Y\geq-7)=P\left(Z\geq-\frac{7}{3}\right)=P\left(X_1\geq-\frac{7}{3}\right)=P\left(X_1\leq\frac{7}{3}\right)\text{이므로 } a=\frac{7}{3}.$$

3.

$$f_X(x)=\int_0^\infty f(x,y)dy=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}, x>0.$$

$$f_Y(y)=\int_0^\infty f(x,y)dx=\left[\frac{e^{-\frac{1}{2}y^2}}{\sqrt{2\pi}}\times\left(-2e^{-\frac{1}{2}x}\right)\right]_0^\infty=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-y^2/2}, y>0.$$

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)\text{이므로 } X, Y\text{는 독립.}$$

$$P(X\leq 2\mid Y\leq 2)=P(X\leq 2)=\int_0^2 f_X(x)dx=1-e^{-1}.$$

4.

$$0< z < 1\text{일 때 } Z=F(X)\text{의 누적분포함수는}$$

$$\Pr(Z\leq z)=\Pr(F(X)\leq z)=\Pr(X\leq F^{-1}(z))=F(F^{-1}(z))=z.$$

$$F(X)\text{의 확률밀도함수 } f(z)=1, 0< z < 1.$$

$$\begin{aligned} \Pr(-2<\ln F(X)<1)&=\Pr(e^{-2}<F(X)<e) \\ &=\Pr(F(X)<e)-\Pr(F(X)<e^{-2}) \\ &=1-e^{-2}. \end{aligned}$$

5. 0.75, 0.02

$$\text{두 도시의 정책에 찬성하는 사람의 수를 각각 } X, Y\text{라 하면}$$

$$X\sim B(350,0.7), Y\sim B(160,0.8).$$

$$\text{표본의 크기가 충분히 크므로 중심극한 정리에 따라}$$

$$X\sim N(350\times0.7,350\times0.7\times0.3), Y\sim N(160\times0.8,160\times0.8\times0.2)\text{라 쓸 수 있다.}$$

$$\text{따라서 } p_1=\frac{X}{350}\sim N\left(0.7,\frac{0.7\times0.3}{350}\right), p_2=\frac{Y}{160}\sim N\left(0.8,\frac{0.8\times0.2}{160}\right).$$

$$\frac{p_1+p_2}{2}\sim N\left(0.75,\frac{1}{4}\left(\frac{0.7\times0.3}{350}+\frac{0.8\times0.2}{160}\right)\right)=N\left(\frac{3}{4},\left(\frac{0.2}{10}\right)^2\right)$$

$$*\frac{1}{4}\left(\frac{0.7\times0.3}{350}+\frac{0.8\times0.2}{160}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{0.1\times0.3}{50}+\frac{0.1\times0.2}{20}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{0.06+0.1}{100}=\frac{0.04}{100}$$

$$\text{그러므로 평균 } \frac{p_1+p_2}{2}\text{에 대한 } 90\% \text{ 신뢰구간은}$$

$$\frac{3}{4}\pm z_{0.9}\frac{0.2}{10}=\left(\frac{3}{4}-1.645\times\frac{1}{50},\frac{3}{4}+1.645\times\frac{1}{50}\right)\text{이므로 } a=\frac{3}{4}, b=0.02.$$

6.

$$G(z)=\begin{cases} 2\times\int_1^{1+\frac{z}{2}}\int_{y-z}^{y+2}1\,dxdy=\frac{z^2}{2}, & 0\leq z\leq 1 \\ 1-2\times\int_0^{1-\frac{z}{2}}\int_{x+z}^{-x+2}1\,dydx=-\frac{z^2}{2}+2z-1, & 1\leq z\leq 2 \end{cases}$$

$$g(z)=G'(z)=\begin{cases} z, & 0\leq z\leq 1 \\ -z+2, & 1\leq z\leq 2 \end{cases}, g(z)>\frac{1}{2}\Leftrightarrow \frac{1}{2}<z<\frac{3}{2}\text{이므로}$$

$$P\left(g(Z)>\frac{1}{2}\right)=P\left(\frac{1}{2}<Z<\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{4}.$$

$$(\text{다른 풀이})$$

$$z<0\text{이면 } G(z)=0,$$

$$0\leq z\leq 1\text{이면 } G(z)=\frac{1}{2}z^2,$$

$$1\leq z\leq 2\text{이면 } G(z)=1-\frac{(2-z)^2}{2},$$

$$2< z\text{이면 } G(z)=1.$$

$$0< z < 2\text{이면 } g(z)=\begin{cases} z, & 0< z < 1 \\ 2-z, & 1\leq z < 2 \end{cases}\text{이므로}$$

$$P\left(g(Z)>\frac{1}{2}\right)=P\left(\frac{1}{2}<Z<\frac{3}{2}\right)=G\left(\frac{3}{2}\right)-G\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}.$$

7.

$$E(X)=M_X'(0)=8, E(X^2)=M_X''(0)=80, V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=16.$$

$$\text{중심극한정리에 따라 } \bar{X}\sim N(8,0.4^2)\text{이므로 } P(\bar{X}\geq 9)=P(Z\geq 2.5), c=2.5.$$

8. $a=100, b=2$

$$\bar{X}\sim N(2500,8^2), \bar{Y}\sim N(2200,6^2), \bar{X}-\bar{Y}\sim N(300,10^2), a=100,$$

$$P(\bar{X}-\bar{Y}\leq 320)=P(Z\leq 2), b=2.$$

9.

$$Y\text{의 확률밀도함수를 } f(y), \text{ 누적분포함수를 } F(y)\text{라 하자.}$$

$$0< y < 1\text{일 때}$$

$$F(y)=\Pr(Y\leq y)$$

$$=\Pr(X_1,X_2\leq y)+\Pr(X_1,X_3\leq y)+\Pr(X_2,X_3\leq y)-2P(X_1,X_2,X_3\leq y)$$

$$=3y^2-2y^3.$$

$$f(y)=F'(y)=6y-6y^2, 0< y < 1$$

$$(\text{다른 풀이})$$

$$X_1\text{의 확률밀도함수를 } f_{X_1}, Y\text{의 누적분포함수를 } F_Y\text{라 하면}$$

$$0\leq y\leq 1\text{에 대하여}$$

$$F_Y(y)=\Pr(Y\leq y)=6\int_0^y f_{X_1}(x)\Pr(X_2\leq x, X_3\geq x\mid X_1=x)\,dx$$

$$=6\int_0^y x(1-x)\,dx=6\left(\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3\right).$$

$$Y\text{의 확률밀도함수를 } f_Y\text{라 하면 } f_Y(y)=6y(1-y), 0< y < 1$$

10. $X\rightarrow 0\text{일 때 } Y\rightarrow 0, X\rightarrow 3\text{일 때 } Y\rightarrow\infty\text{이므로}$

$$0< X < 3\text{일 때 } 0< Y < \infty\text{이고}$$

$$F_Y(y)=\Pr(X\leq 3-3e^{-\frac{y}{2}})=\begin{cases} 1-e^{-y/2}, & 0< y < \infty \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$Y\text{의 확률밀도함수 } f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} \quad (0< y < \infty)$$

$$P(|Y-2|>2)=P(Y>4 \text{ or } Y<0)=P(Y>4)=1-F_Y(4)=e^{-2}.$$

11. e^{-3}
 $Z = \min\{X, Y\}$ 이므로
 $P(Z > 10) = P(\min\{X, Y\} > 10)$
 $= P(X > 10, Y > 10)$
 $= P(X > 10)P(Y > 10)$
 $= \int_{10}^{\infty} f_X(x)dx \int_{10}^{\infty} f_Y(y)dy$
 $= e^{-3}.$
(다른 풀이)
 $F_X(x) = \int_0^x \frac{1}{5}e^{-\frac{t}{5}}dt = 1 - e^{-\frac{x}{5}}, F_Y(y) = \int_0^y \frac{1}{10}e^{-\frac{t}{10}}dt = 1 - e^{-\frac{y}{10}}$ 이므로
 $P(Z > 10) = P(\min\{X, Y\} > 10) = P(X > 10, Y > 10)$
 $= (1 - P[X \leq 10])(1 - P[Y \leq 10])$
 $= (1 - F_X(10))(1 - F_Y(10))$
 $= e^{-2}e^{-1} = e^{-3}.$

* 지수분포
양의 실수 구간에서 정의한 어떤 사건이 발생하기까지의 대기시간에 관한 확률변수를 지수확률변수라 한다.

① 확률밀도함수 $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \lambda > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$
② $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$
③ $M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} \quad (t < \lambda)$
④ $E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

12. $E(\bar{X}) = \mu, \quad V(\bar{X}) = 1.5^2$ 이므로 $\bar{X} \sim N(\mu, 1.5^2).$
 $0.1 = P(|Z| > c \times \frac{2}{3}) = P(|Z| > 1.64)$ 에서 $c = 2.46.$
 $0.9 = P(|Z| \leq 1.64) = P(|\bar{X} - \mu| \leq 1.64 \times \frac{9}{6}) = P(|\bar{X} - \mu| \leq 2.46)$ 이므로
모평균 μ 에 대한 90% 신뢰구간은 $[57.54, 62.46].$

13. $k = 1.8$
 $E(T) = 81, \quad V(T) = 5^2$ 이므로 $T \sim N(81, 5^2)$ 이다.
 $P(T \geq 90) = P(Z \geq 1.8)$ 이므로 $k = 1.8$ 이다.

14. $\frac{7}{16}$
 $P\left(Y < \frac{5}{2}\right) = P(\min\{X_1, X_2\} < \frac{5}{2}) = 1 - P(\min\{X_1, X_2\} \geq \frac{5}{2})$
 $= 1 - P(X_1 \geq \frac{5}{2}, X_2 \geq \frac{5}{2})$
 $= 1 - \left(\int_{\frac{5}{2}}^4 \frac{2}{9}\mathbf{x_1} - \frac{2}{9}dx_1\right)\left(\int_{\frac{5}{2}}^4 \frac{2}{9}\mathbf{x_2} - \frac{2}{9}dx_2\right)$
 $= 1 - \left(\int_{\frac{5}{2}}^4 \frac{2}{9}x - \frac{2}{9}dx\right)^2$
 $= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}.$

15. $f_X(x) = \frac{1}{2} \quad (0 < x < 2), \quad f_Y(y) = \frac{1}{2} \quad (0 < y < 2), \quad f(x, y) = \frac{1}{4} \quad (0 < x, y < 2).$
 Z 의 누적분포함수 $F(z)$ 라 하자.
 $0 < z < 4$ 인 z 에 대하여
 $0 < x + y < 4, \quad 0 < x, y < 2$ 의 그래프를 그려 생각한다.
① $0 < z \leq 2$ 인 경우

$$F(z) = \int_{-\infty}^z f_Z(z)dz = \Pr(X + Y \leq z) = \int_0^z \int_0^{z-x} \frac{1}{4} dydx = \frac{1}{8}z^2.$$

② $2 < z < 4$ 인 경우
 $F(z) = \Pr(Z \leq z) = 1 - \int_{z-2}^2 \int_{z-x}^2 \frac{1}{4} dydx = -1 + z - \frac{z^2}{8}.$
* $F(z) = \frac{1}{4}\left\{2(z-2) + \frac{z}{2}(4-z)\right\} = \frac{1}{4} \times (\text{직사각형} + \text{사다리꼴})$

* $2 < z < 4$ 일 때 다른 방법

$$F(z) = \int_0^2 \int_0^{2-x} \frac{1}{4} dydx + \int_0^{z-2} \int_{2-x}^2 \frac{1}{4} dydx + \int_{z-2}^2 \int_{2-x}^{z-x} \frac{1}{4} dydx$$

$$= -1 + z - \frac{z^2}{8}.$$
그러므로 $f_Z(z) = F'(z) = \begin{cases} \frac{z}{4}, & 0 < z \leq 2 \\ 1 - \frac{z}{4}, & 2 < z < 4 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}.$

$$E(Z) = E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 2.$$

16. $g(z) = G'(z) = \frac{z}{4}e^{-\frac{z}{2}} \quad (z > 0)$

Z 의 누적분포함수 $G(z).$ $z < 0$ 일 때 $G(z) = 0.$

$z \geq 0$ 일 때
 $G(z) = \Pr(Z \leq z)$
 $= \Pr(X + 2Y \leq z)$
 $= \Pr(X \leq z - 2Y)$
 $= \int_0^{\frac{z}{2}} \int_0^{z-2y} \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} \cdot e^{-y} dx dy$
 $= \int_0^{\frac{z}{2}} (e^{-y} - e^{-\frac{z}{2}}) dy$
 $= 1 - e^{-\frac{z}{2}} - \frac{z}{2}e^{-\frac{z}{2}} \quad (z > 0).$

그러므로 $g(z) = G'(z) = \frac{z}{4}e^{-\frac{z}{2}} \quad (z > 0).$

17. $k = 0.5$
 $E(Y) = \frac{2}{5}E(X) + E(\alpha) = 70, \quad V(Y) = \frac{4}{25} \cdot 25 + 12 = 4^2$ 이므로 $Y \sim N(70, 4^2).$
따라서 $\Pr(Y > 72) = \Pr(Z > 0.5).$ 그러므로 $k = 0.5.$

18. $\frac{1}{9}$

$$P(M = 2) = P(2 \leq \frac{X}{Y} < 3)$$

$$= P(2Y \leq X < 3Y)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}} \int_{2y}^{3y} 2xdxdy + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \int_{2y}^1 2xdxdy$$

$$= \frac{1}{9}.$$

* 다른 풀이
 $P(M = 2) = P(2 \leq \frac{X}{Y} < 3) = P(2Y \leq X < 3Y)$
 $= P(\frac{X}{3} < Y \leq \frac{X}{2})$
 $= \int_0^1 \int_{\frac{x}{3}}^{\frac{x}{2}} 2xdydx = \frac{1}{9}.$

19. $k = 1.5$
통신사를 이용하는 성인의 수 X 라 하면 $X \sim B(400, 0.2).$
 $E(X) = 80, \quad V(X) = 8^2$ 이므로 $X \approx N(80, 8^2).$
 $P(80 \leq X \leq 92) = P(0 \leq Z \leq 1.5)$ 에서 $k = 1.5.$

* 이항분포 $X \sim B(n, p), \quad n$ 이 충분히 클 때 $\frac{X - np}{np(1-p)}$ 는 근사적으로 정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

20. $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\frac{y+3y^2}{30} \quad (1<y<3)$

$f_{X|Y}(x|2)=\frac{f(x,2)}{f_Y(2)}=\frac{6}{7}(3x-x^2) \quad (0<x<1)$

$E[X|Y=2]=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot\frac{6}{7}(3x-x^2)dx=\frac{9}{14}.$

21. ④

$E(Y)=E(\frac{2}{X})=\int_1^2\frac{2}{x}\cdot\frac{2}{3}xdx=\frac{4}{3}.$

22. ③

영양제를 주 2회 이상 복용하는 사람을 X 라 하면

$X\sim B(300,0.6), \ E(X)=180, \ V(X)=72.$

$\bar{p}=\frac{X}{300}\sim N(0.6,\frac{(2\sqrt{2})^2}{100^2})=N(0.6,0.0282^2),$

$0.99=P(|Z|\leq 2.58)=P(|\bar{p}-p|\leq 2.58\times\sqrt{\frac{0.6\cdot0.4}{300}})$ 이므로

신뢰구간은 $0.6-2.58\times0.0282\leq p\leq 0.6+2.58\times0.0282$ 에서 $(0.5272, 0.6728).$

23. ③

$E(\overline{X}-\overline{Y})=\mu_1-\mu_2, \ V(\overline{X}-\overline{Y})=V(\overline{X})+V(\overline{Y})=\left(\frac{10}{\sqrt{n}}\right)^2$ 이므로

$\overline{X}-\overline{Y}\sim N(\mu_1-\mu_2,\frac{100}{n}).$

$0.95=P\left[\left|\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{100/n}}\right|\leq 1.96\right]$ 에서

신뢰구간의 길이 $2\times1.96\times\sqrt{100/n}=4.9, \ n=64.$

* 두 모집단 X, Y 가 서로 독립이고 각 평균 μ_1, μ_2 , 각 분산 σ_1^2, σ_2^2 이며, 여기서 크기가 각각 $n_1, \ n_2$ 인

표본평균 $\overline{X}, \ \overline{Y}$ 라 할 때 $\overline{X}-\overline{Y}\sim N(\mu_1-\mu_2, \ \frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}).$

24. ③

$1=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\int_0^1adx+\int_1^{\infty}be^{1-x}dx=a+b$

$\frac{3}{2}=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x)dx=\frac{a}{2}+\int_1^{\infty}bxe^{1-x}dx=\frac{a}{2}+2b$

따라서 $a=\frac{1}{3}, \ b=\frac{2}{3}$ 이므로 구하는 값 $\frac{5}{9}.$

25. ①

㉠ 귀무가설 $H_0: \mu=141$, 대립가설 $H_1: \mu>141$

㉡ 검정통계량 $Z=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

㉢ 기각역 $R: Z\geq 1.645$

㉤ 검정통계량의 관측값 $\frac{142.2-141}{6/\sqrt{81}}=1.8\geq 1.645$ 이므로 유의수준 5%에서
줄넘기 운동이 신장 발육에 도움이 된다고 할 수 있다.

26. ④

$f_X(x)=2x \ (0\leq x\leq 1), \ f_Y(y)=2y \ (0\leq y\leq 1)$ 에서

$f(x,y)=4xy \ (0\leq x,y\leq 1)$ 이다.

$P(X^2\leq Y\leq X)=\int_0^1\int_{x^2}^x4xy \ dydx=\int_0^14x(x^2-x^4)dx=2\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}.$

27. ②

표본비율 \bar{p} , 모비율 p 라 하면 $\bar{p}\sim N(p,\frac{p(1-p)}{n}).$

$0.95=P(|Z|\leq 1.96)=P(|\bar{p}-p|\leq 0.05)=P(|Z|\leq \frac{0.05}{\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}})$ 에서

$\sqrt{n}=20\times1.96\times0.4, \ n=39.2^2\times0.4^2=245.92.$

그러므로 n 이 246이상이 될 때 조건을 만족한다.

* 모비율의 구간추정

$X\sim B(n,p)$, 표본비율 $\bar{p}=\frac{X}{n}$ 일 때,

$\bar{p}\sim N(p,\frac{p(1-p)}{n}),$ 모비율 p 100(1- α)% 신뢰구간

$\bar{p}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}\leq p\leq \bar{p}+z_{\alpha/2}\frac{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})}}{n}$

28. $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{5-1}=\frac{1}{4}, & 1\leq x\leq 5 \\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$

$E(X)=\int_1^5x\cdot\frac{1}{4}dx=3, \ E(X^2)=\int_1^5x^2\cdot\frac{1}{4}dx=\frac{31}{3},$

$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{4}{3}.$

29.

(1) [46.628, 49.372]

표본평균 $\overline{X}=48$, 표준편차 $\sigma=5.6$ 이므로 $\overline{X}\sim N(48,0.7^2).$

모평균 m 에 대하여 $0.95=P(|Z|\leq 1.96)=P(|\overline{X}-m|\leq 1.96\times\frac{5.6}{8})$ 이므로

신뢰구간은 [46.628, 49.372].

(2) [36.235, 47.765]

표본평균 $\overline{Y}=42$, 표준편차 $S=7.5$, 자유도 8이므로 $\overline{Y}\sim t(8).$

모평균 m 에 대하여 $0.95=P(|t|\leq 2.306)=P(|\overline{Y}-m|\leq 2.306\times\frac{7.5}{3})$ 이므로

신뢰구간은 [36.235, 47.765].

* 모평균의 구간추정

① 모분산 σ^2 알 때, $\mu(=m)$ 의 100(1- α)% 신뢰구간

$\overline{X}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leq \mu\leq \overline{X}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

② 모분산 σ^2 모를 때, $\mu(=m)$ 의 100(1- α)% 신뢰구간

$\overline{X}-z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\leq \mu\leq \overline{X}+z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$

③ 표본의 크기가 작을 때 ($n<30$) 100(1- α)% 신뢰구간

$\overline{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\leq \mu\leq \overline{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$

30. 65.4

응시자의 성적을 X 라 하면 $X\sim N(55,8^2)$, 최저 점수를 k 라 하자.

$0.096=\frac{480}{5000}=Pr(X\geq k)=Pr(Z\geq \frac{k-55}{8})$ 에서 $\frac{k-55}{8}=1.3, \ k=65.4.$

31. 남자 성인 지지자를 X , 여자 성인 지지자를 Y 라 하자.
 $X \sim B(400, 0.8)$, $X \sim B(400, 0.9)$, X , Y 는 독립이다.
 $E(X) = 320$, $V(X) = 8^2$, $E(Y) = 360$, $V(Y) = 6^2$ 이다.
(1) 시행횟수가 충분히 크므로 $X + Y \sim N(680, 10^2)$.
 $P(X + Y \geq 700) = P(Z \geq 2) = 0.0228$.
(2) 시행횟수가 충분히 크므로 $Y - X \sim N(40, 10^2)$.
 $P(Y - X = 25) = P(Y - X \leq 25) - P(Y - X \leq 24)$
 $= P(Z \leq -1.5) - P(Z \leq -1.6) = 0.0120$.

* 모비율과 표본비율
모비율이 p 이고 표본의 크기 n 이 충분히 클 때, 임의로 추출한 표본 X_1 , X_2 , ..., X_n 의 표본비율 \bar{p}

$$\bar{p} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \sim N\left(p, \frac{pq}{n}\right)$$

32.
(1) $0.95 = P(|\bar{X} - m| \leq 1.96 \times \frac{2}{10})$ 이므로 신뢰도 95%로 m 의 신뢰구간은
 $10 - 1.96 \times \frac{2}{10} \leq m \leq 10 + 1.96 \times \frac{2}{10}$ 에서 $9.608 \leq m \leq 10.392$.
(2) $P(|\bar{X} - m| \leq \frac{1}{2}) = P(|Z| \leq \frac{\sqrt{n}}{4}) \geq 0.95$ 이려면
 $\frac{\sqrt{n}}{4} \geq 1.96$ 에서 $n \geq 61.4656$ 이다. 구하는 $n = 62$.

33.

하위 영역	배점	예상 정답율(%)	출제근거 (이유)
교직수학 (고등학교 수학, 통계)	5	60	박한식. 교직수학. pp. 139-150

$$\int_0^\infty k e^{-3x} dx = \left[-\frac{k}{3} e^{-3x}\right]_0^\infty = \frac{k}{3} = 1 \quad \therefore k = 3 \quad \cdots \cdots \cdots 2\text{점}$$

(단, 다른 식 없이 확률밀도함수가 되려면 $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = 1$ 이라는 사실을 언급해도 부분점수 가능)

$$E(X) = \int_{-\infty}^\infty x f(x) dx = \int_0^\infty 3x e^{-3x} dx \quad \cdots \cdots \cdots 3\text{점}$$

$$= [-x e^{-3x}]_0^\infty - \int_0^\infty (-e^{-3x}) dx \quad \cdots \cdots \cdots 4\text{점}$$

$$= \int_0^\infty e^{-3x} dx = \left[-\frac{1}{3} e^{-3x}\right]_0^\infty = \frac{1}{3} \quad \cdots \cdots \cdots 5\text{점}$$

34. $\Pr(Z \leq x)$
각각의 확률변수 X_i 는 포아송 분포 $\text{Pois}(\lambda)$ 에 따르고, X_i 들의 표본평균 $\bar{X} = \frac{S_n}{n}$ 라 하면 $E(\bar{X}) = \frac{1}{n} \cdot n\lambda = \lambda$, $V(\bar{X}) = \frac{1}{n^2} \cdot n\lambda = \frac{\lambda}{n}$.
중심극한정리에 의해 n 이 충분히 클 때 $\bar{X} = \frac{S_n}{n} \sim N(\lambda, \frac{\lambda}{n})$.

이때 $\frac{\frac{S_n}{n} - \lambda}{\frac{\lambda}{n}} = \frac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \sim N(0, 1^2)$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\left(\frac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leq x\right) = \Pr(Z \leq x) (= \int_{-\infty}^x \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz)$$

* 포아송분포
일정한 단위 내에서 발생하는 사건의 수에 대응하는 확률변수를 포아송 확률변수라 한다.
① 확률질량함수 $f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$
② $M_X(t) = e^{\lambda(\exp(t) - 1)}$, $E(X) = \lambda = V(X)$

35. ②
두 사건의 합사건의 확률은
 $P(a < X_1 < b \text{ or } c < X_2 < d)$
 $= P(a < X_1 < b) + P(c < X_2 < d) - P(a < X_1 < b, c < X_2 < d)$
 $= \frac{2}{3} + \frac{5}{8} - \frac{2}{3} \times \frac{5}{8} = \frac{7}{8}$.

36. ②

$$\Pr[X < Y] = \int_0^\infty \int_x^\infty 2e^{-(x+2y)} dy dx = \int_0^\infty e^{-3x} dx = \frac{1}{3}$$

* $\Pr(X < Y) = \int_0^\infty \int_0^y f(x, y) dx dy = \frac{1}{3}$.

37. ①
 $0 \leq z$ 인 z 에 대하여 Z 의 누적분포함수 $F(z)$

$$F(z) = \Pr(Z \leq z) = \Pr(X + Y \leq z) = \int_0^z \int_0^{z-x} e^{-(x+y)} dy dx = 1 - e^{-z} - ze^{-z}$$

그러므로 구하는 값 $\Pr(Z \leq 1) = F(1) = 1 - 2e^{-1}$.
* Z 의 pdf $f(z) = F'(z) = ze^{-z}$ ($z \geq 0$).
* 다른 풀이

$$\Pr(Z \leq 1) = \Pr(X + Y \leq 1) = \int_0^1 \int_0^{1-x} f(x, y) dy dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} e^{-(x+y)} dy dx = 1 - \frac{2}{e}$$
.

38. ③
귀무가설 H_0 : $\mu = 5$, 대립가설 H_1 : $\mu \neq 5$
검정통계량 $Z = \frac{6.085 - 5}{0.5} = 2.17$
기각역 R : $|Z| \geq z_{\alpha/2}$ 이므로
귀무가설을 기각하기 위해서는 $2.17 \geq z_{\alpha/2}$ 이어야 한다.
이때 최소의 유의수준은 $\alpha/2 = 0.015$ 에서 $\alpha = 3\%$.

39. ③ $f(x) = 3x^2$
 $0 \leq x \leq 1$ 인 x 에 대하여 X 의 누적분포함수 $F(x)$,
 $F(x) = P(X \leq x)$
 $= P(\max\{x_1, x_2, x_3\} \leq x)$
 $= P(x_1 \leq x, x_2 \leq x, x_3 \leq x)$
 $= P(x_1 \leq x)P(x_2 \leq x)P(x_3 \leq x)$
 $= \int_0^x 1 dx_1 \times \int_0^x 1 dx_2 \times \int_0^x 1 dx_3$
 $= x^3$.
그러므로 $f(x) = F'(x) = 3x^2$ ($0 \leq x \leq 1$).

* 균등분포
임의의 실수 구간 $[a, b]$ 에서 나타날 가능성이 동일한 확률변수를 균등확률변수라 한다.
① 확률밀도함수 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

② $F(x) = \frac{x-a}{b-a}$
③ $M_X(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}$
④ $E(X) = \frac{a+b}{2}$, $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

1. $6\pi i$, 5
 $f(z)$ 의 영점 $-1+i(5)$, $-1-i(4)$, 9개, 극 $0(6)$, $1-4i(3)$, $9-2i(5)$, 14개.

편각원리에 따라 $\int_{C(r)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \begin{cases} 12\pi i, & r=1 \\ 6\pi i, & r=2, 3, 4 \\ 0, & r=5, 6, 7, 8, 9 \\ 10\pi i, & r=10, 11, \dots \end{cases}$ 이므로
 $\int_{C(2)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 6\pi i$, $\int_{C(r)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$ 이 되는 r 은 5개 있다.

2.
 $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ 라 하면 $b = -d$, $ai - c = b(i-1)$, $a-3c = -2b$ 이므로
 $a=b=c=-d$. 따라서 $T(z) = \frac{z+1}{z-1}$.

선형분수변환은 원을 직선이나 원으로 사상한다.
 $T(i) = -i$, $T(-1) = 0$, $T(-i) = i$ 이므로 W 는 허수축이다.
구하는 거리의 최솟값 1.

3.
 $u(x, y) = e^{-x} \cos y$ 라 하자.
 f 는 정함수이므로 임의의 $z = x + iy$ 에 대하여 코시리만방정식을 만족.
 $v(x, y) = -e^{-x} \sin y + C$, $f(0) = 1$ 이므로 $v = -e^{-x} \sin y$.
 $f(x + iy) = e^{-x} [\cos(-y) + i \sin(-y)] = e^{-x} e^{-iy} = e^{-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!}$.
 $z \neq 0$ 일 때, $f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{z}\right)^n \frac{1}{n!}$ 이므로 유수정리에 따라 $\int_C f\left(\frac{1}{z}\right) dz = -2\pi i$.

4.
 $f(z)$ 는 정함수이므로 코시-리만 방정식을 만족하고 u, v 는 연속이다.
 $\overline{f(\bar{z})} = u(x, -y) - iv(x, -y)$, $u(x, -y)$, $-v(x, -y)$ 는 연속이다.
 $\frac{\partial}{\partial x} u(x, -y) = \frac{\partial}{\partial y} \{-v(x, -y)\}$, $\frac{\partial}{\partial y} u(x, -y) = -\frac{\partial}{\partial x} \{-v(x, -y)\}$ 이므로
 $\overline{f(\bar{z})}$ 는 정함수이다.
(다른 설명)
 $f(z) = \sum a_n z^n$, $\overline{f(\bar{z})} = \overline{\sum a_n z^n} = \sum \overline{a_n} \overline{z^n}$ 이므로 $\overline{f(\bar{z})}$ 는 정함수이다.

가정에 의해 $|f'(z)|^2 > |\overline{f(\bar{z})}|^2 \geq 0$, $0 < \left| \frac{\overline{f(\bar{z})}}{f'(z)} \right|^2 < 1$, $\left| \frac{\overline{f(\bar{z})}}{f'(z)} \right| < 1$.
 $g(z) = \frac{\overline{f(\bar{z})}}{f'(z)}$ 는 정함수이므로 리우빌 정리에 따라 $g(z)$ 는 상수함수.
 $g(1+i) = g(i) = \frac{1}{\pi}$ 이므로 구하는 값 π .

5. 적분값 10π , 최솟값 -5 .
 $a = -1$ 일 때, $u_{xx} + u_{yy} = 0$ 이므로 u 는 \mathbb{R}^2 에서 조화함수이다.
따라서 u 의 \mathbb{C} 에서의 조화공액 v 가 존재한다.
(정함수 $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ 가 존재한다.)
 $f = u + iv$ 는 정함수이므로 가우스 평균값 정리에 따라
 $\int_0^{2\pi} u(1 + 2\cos\theta, 2\sin\theta) d\theta = \operatorname{Re} \left[\int_0^{2\pi} f(1 + 2e^{i\theta}) d\theta \right] = \operatorname{Re} [2\pi f(1)] = 2\pi u(1, 0)$
 $= 10\pi$.
 $a = 2$ 일 때, $u(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 4x - 6y$.
 $\nabla u(x, y) = (2x - 2y + 4, -2x + 4y - 6) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (-1, 1)$
 $D(-1, 1) = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4 > 0$, $u_{xx}(-1, 1) = 2 > 0$ 이므로
이계도함수 판정법에 따라 $u(x, y)$ 의 최솟값 $u(-1, 1) = -5$.
(다른 설명)
 $a = 2$ 이면 $u(x, y) = (x - y + 2)^2 + (y - 1)^2 - 5 \geq -5$ 이므로
 $x = -1$, $y = 1$ 일 때 최솟값 -5 를 갖는다.

6. $a = 3$, $b = 4$, $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 8 + 9i$.
 $f(z)$ 가 정함수이면 $u(x, y) = e^{-3y} \cos(ax) + bx^2 - 4y^2$ 는 조화함수이다.
임의의 실수 x, y 에 대하여
 $0 = u_{xx} + u_{yy} = 2(b - 4) + (9 - a^2)e^{-3y} \cos(ax)$, $a = 3$, $b = 4$.
 $f'(z) = f_x = u_x + iv_x = u_x - iu_y$, $f''(z) = f'_x = u_{xx} - iu_{yx}$ 이므로
 $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 8 + 9i$.

7. $\sqrt{14}$.
 $\frac{1}{f(z) + z^2}$ 은 정함수이고 유계이므로 리우빌정리에 의해
 $f(z) + z^2 = a + bi$, a, b 는 실수라 할 수 있다.
(가)에 의해 $\sqrt{a^2 + b^2} \geq 3$, (나)에 의해 $\sqrt{(a-4)^2 + b^2} = 3$ 이므로
 $|f(i)| = \sqrt{(a+1)^2 + b^2}$ (반지름의 길이)가 최소가 될 때는
 $\sqrt{a^2 + b^2} = 3$, $\sqrt{(a-4)^2 + b^2} = 3$ 이 될 때이다.
 $a^2 + b^2 = 9$, $(a-4)^2 + b^2 = 9$ 에서 $a = 2$, $b = \sqrt{5}$.
이때 $|f(i)| = \sqrt{14}$.

8. $f(0) = 3$, $u(x, y) = 3 - e^{-y}(x \sin x + y \cos x)$.
 $f(0) = u(0, 0) + iv(0, 0)$, $v(0, 0) = 0$ 이므로 $f(0) \in \mathbb{R}$.
주어진 정리에 의해
 $f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u(\cos t, \sin t) + iv(\cos t, \sin t)] dt$
 $= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\cos t, \sin t) dt + \frac{1}{2\pi} \cdot i \cdot \int_0^{2\pi} v(\cos t, \sin t) dt$.
 $= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\cos t, \sin t) dt$

선적분의 정의로부터
 $6\pi = \int_C -yu(x, y) dx + xu(x, y) dy$
 $= \int_0^{2\pi} (-\sin t) \cdot u(\cos t, \sin t)(-\sin t dt) + \cos t \cdot u(\cos t, \sin t)(\cos t dt)$
 $= \int_0^{2\pi} u(\cos t, \sin t) dt$
 $= 2\pi f(0)$ 이므로 $f(0) = 3$.
코시-리만 방정식 $u_x = v_y$ 에서
 $u = -e^{-y}(x \sin x + y \cos x) + C$ (C : 상수), $u(0, 0) = 3$, $C = 3$.
그러므로 $u(x, y) = 3 - e^{-y}(x \sin x + y \cos x)$.

9. $T(2i) = -\frac{2}{3}$
 $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ 라 두자. 가정에 의해 $d = 2b$, $2i(a+b) = c+d$, $c = -2a$ 에서
 $i(a+b) = -a+b$, $a = -ib$.
그러므로 $T(2i) = \frac{-4ai+2b}{2ai+b} = \frac{b(-4+2)}{b(2+1)} = -\frac{2}{3}$.

10. $f'(0) = \frac{1}{e-1}$.
 $e^z - 1 = 0 \Leftrightarrow z = 2n\pi i$ ($n \in \mathbb{Z}$), $g(z) = \frac{f(z)}{e^z - 1}$ 라 두자.
 g 는 $0 < |z - 2n\pi i| < 1$ 에서 해석적이고 유계이므로 <정리>를 만족하는 함수 h 있다.
 h 는 정함수이고 $|h(z)| \leq 1$ 이므로 리우빌정리에 의해 h 는 상수함수.
 $f(1) = 1$ 이므로 $f(z) = \frac{1}{e-1}(e^z - 1)$, 구하는 값 $f'(0) = \frac{1}{e-1}$.

11. $n=1, f'(1)=1-3i.$
 $r>0$ 이 존재해서 f 는 $D:|z-1|<r$ 에서 해석적이다.
따라서 x^ny+xy^n+x+y 는 D 에서 조화함수이다.
임의의 $x+iy\in D$ 에 대하여 $0=n(n-1)x^{n-2}y+n(n-1)xy^{n-2}$ 이 되는 자연수 $n=1$ 이다.
 $f'(z)=(x+y+2xy)_x+i[-(x+y+2xy)_y]=(1+2y)-i(1+2x)$ 이므로
 $f'(1+0\cdot i)=1-3i.$

12.
 $\lim_{z\rightarrow 0}zf(z)=0$ 이므로 리만정리에 의해 $z=0$ 는 f 의 제거가능특이점이다.
 $0<r<1$ 인 실수 r 에 대하여 f 는 $|z|\leq r$ 에서 해석적이고
 $|z|=r$ 위에서 $|f(z)|\leq 1+\ln\left(\frac{1+r}{2r}\right)$ 이므로 최대절댓값 정리에 의해
 $|z|\leq r$ 에서 $|f(z)|\leq 1+\ln\left(\frac{1+r}{2r}\right).$
 r 은 임의이므로 $|z|<1$ 에서 $|f(z)|\leq 1.$ ($r\rightarrow 1$ 로 생각해도 된다.)
 $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$ 이므로 f 는 D 에서 상수함수, 구하는 값 1.

13. ②
 f 는 정함수이므로 코시리만 방정식에 의해 임의의 $x+iy\in \mathbb{C}$ 에 대하여
 $(x_3-2axy-bxy^2)_x=(2x^2-ay^2+bx^2y-y^3)_y,$
 $(x_3-2axy-bxy^2)_y=-(2x^2-ay^2+bx^2y-y^3)_x$ 이므로
 $a=2, b=3.$ 그러므로 구하는 값 13. (조화함수로 해결가능)

14. ⑤
ㄱ. 테일러급수전개가능 \Leftrightarrow 해석적
ㄴ. 모레라 정리(모든 단순폐곡선 C 에서 연속+ C 를 따라 선적분 0)
ㄷ. 코시 적분공식의 결과

15. ④
 f 는 정함수이므로 코시-리만방정식을 만족하며 u, v 는 조화함수이다.
따라서 다음 등식 성립 $u_x=v_y, u_{xx}+u_{yy}=0=v_{xx}+v_{yy}.$
(가)에 의해 $u_x=-v_y$ 이므로 $u_x=v_y=0.$
즉, u 는 y 에 관한 함수, v 는 x 에 관한 함수.
그리고 $u''=u_{yy}=0=v_{xx}=v''$ 이다.
따라서 u 는 y 에 관한 일차 이하의 다항함수,
 v 는 x 에 관한 일차 이하의 다항함수.
 $u=ay+b, v=cx+d$ 라 놓으면 (나)에 의해 $a=1, b=0, c=-1, d=1$ 이다.
따라서 $f(x+iy)=y+i(-x+1).$ 구하는 값 $f(-1+i)=1+2i.$

16. ④
ㄱ. $x=0$ 일 때 0, $x\neq 0$ 일 때 $e^{-\frac{1}{x^2}}$ 으로 정의한 함수는 \mathbb{R} 에서 미분가능하며 주어진 조건을 만족하지만 상수함수가 아니다.
ㄴ. 테일러 급수 전개, $f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_2^{(n)}(0)}{n!}z^n=0.$
ㄷ. $x=0$ 일 때 0, $x\neq 0$ 일 때 $x^2\sin\frac{\pi}{x}$ 로 정의한 함수는 \mathbb{R} 에서 미분가능하며 주어진 조건을 만족하지만 상수함수가 아니다.
ㄹ. 상수수열이 아닌 수열 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 는 $0\in \mathbb{C}$ 으로 수렴하고 f_4 와, $g\equiv 0$ 는 정함수이다. 모든 $n\in \mathbb{N}$ 에 대하여 $f_4\left(\frac{1}{n}\right)=g\left(\frac{1}{n}\right)=0$ 이므로 항등정리에 의해 \mathbb{C} 에서 $f_4(z)=0.$

17. ⑤
<1단계>
함수 f 는 D 에서 해석적이므로 (테일러)급수 전개가능

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$$

$$=z^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^{n-2}$$

$$=z^2\cdot g(z) \ (g(0)\neq 0)\text{이다.}$$

이때 g 는 D 에서 해석적이다. ($\frac{1}{z^n}(n\in \mathbb{N})$ 꼴의 항 없다.)
<2단계>
 $0<r<2$ 인 r 에 대하여 g 는 $|z|\leq r$ 에서 해석적이고 $|z|=r$ 위에서
 $|g(z)|\leq \frac{|f(z)|}{|z|^2}=\frac{3}{r^2}$ 이다. 최대절댓값정리에 의해 $|z|\leq r$ 에서 $|g(z)|\leq \frac{3}{r^2}.$
 r 은 임의이므로 $D:|z|<2$ 에서 $|g(z)|\leq \frac{3}{2^2}=\frac{3}{4}.$
<3단계>
 $\frac{i}{12}=f\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^2g\left(\frac{1}{3}\right)$ 에서 $\left|g\left(\frac{1}{3}\right)\right|=\left|\frac{9i}{12}\right|=\frac{3}{4}.$
 D 의 내부에서 g 는 최댓값을 가지므로 최대절댓값 정리에 의해
 g 는 D 에서 상수함수이다. 따라서 $f(z)=g\left(\frac{1}{3}\right)\cdot z^2=\frac{3i}{4}z^2.$
그러므로 구하는 값 $f\left(\frac{2i}{3}\right)=-\frac{i}{3}.$

18. ②
 $g(z)=\frac{f(z)}{ze^z}$ 는 $0<|z|$ 에서 해석적이고 유계이다.
따라서 리만 정리에 의해 g 는 \mathbb{C} 에서 해석적인 함수 g^* 로 확장된다.
 $z\in \mathbb{C}$ 에 대하여 $|g^*(z)|\leq \max\{2, g^*(0)\}.$
리우빌 정리에 의해 g^* 는 상수함수.
따라서 $f(z)=C\cdot ze^z$ 라 할 때 $f'(1)=1$ 에서 $C=\frac{1}{2e}.$
그러므로 구하는 값 $f(1)=\frac{1}{2}.$
* 다른 풀이
 $R>1$ 에 대하여 $g(z)=\frac{f(z)}{e^z}$ 는 $|z|\leq R$ 에서 해석적,
 $|z|=R$ 위에서 $|g(z)|\leq 2R$ 이므로 코시부등식에 의해
 $|g^{(n)}(z)|\leq \frac{n!\cdot 2R}{R^n}=\frac{2n!}{R^{n-1}} \ (n=0, 1, 2, \cdots)$ 이다.
 g 는 정함수이므로 $n-1>0$ 즉, $n\geq 2$ 에서 $R\rightarrow \infty$ 일 때도 부등식이 성립.
따라서 $g^{(n)}(0)=0 \ (n\geq 2)$ 이므로 g 의 급수전개에서

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}z^n=g(0)+g'(0)z$$

$$=f(0)+(f'(0)-f(0))z$$

$$=f'(0)\cdot z=\frac{f(z)}{e^z}$$

$$\therefore f(z)=f'(0)\cdot ze^z, f'(1)=1\text{에서 } f'(0)=\frac{1}{2e}.$$

그러므로 $f(1)=f'(0)\cdot e^1=\frac{1}{2}.$
* 다른 풀이
 $\left|\frac{f(z)}{e^z}\right|\leq |2z|$ 이므로 일반화된 리우빌정리에 따라
 $\frac{f(z)}{e^z}$ 는 1차 이하 다항함수, $f(z)=(az+b)e^z$ 인 복소수 a, b 있다.
 $|f(0)|\leq 0$ 이므로 $f(0)=b=0, f'(1)=1=2ae, a=\frac{1}{2e}.$
 $f(z)=\frac{z}{2}e^{z-1}, f(1)=\frac{1}{2}.$

19.

(가) 최대·최소의 정리에 의해 임의의 $x \in [a, b]$ 에 대하여

$$f(x_m)g(x) \leq f(x)g(x) \leq f(x_M)g(x)$$

되는 $x_m, x_M \in [a, b]$ 있다.

f, g 는 유계폐구간 I 에서 연속이므로 리만적분가능하고,

$$f(x_m) \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq f(x_M).$$

중간값 정리에 따라 $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx$ 되는 $c \in I$ 있다.

(나) $z = z_0 + re^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$)라 하면 코시의 적분 공식에 의해

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) \cdot i d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta. \end{aligned}$$

(가)와 (나)의 의미 비교

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}, \quad f(z_0) = \frac{\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta}{\int_0^{2\pi} 1 d\theta}$$

- ① (가)에서 $x=c$ 의 존재성은 알 수 있으나 c 를 정할 수 없고, $f(c)$ 의 값을 알기 위해서는 I 에서 $f(x)$ 의 함숫값을 알아야 한다.
- ② (나)에서 z_0 는 적분경로 $z = z_0 + re^{i\theta}$ 의 중심이므로 z_0 를 알 수 있다.

(다) $f(z)$ 는 유계이므로 $|f(z)| \leq M$ 인 실수 $M > 0$ 있다. $R > 0$ 에 대하여

f 는 $|z| \leq R$ 에서 해석적이므로 코시의 적분 공식에 의해

$$|f^{(n)}(0)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot 2\pi R \cdot \frac{M}{R^{n+1}} = \frac{n!M}{R^n}.$$

f 는 정함수이므로 $R \rightarrow \infty$ 일 때도 부등식이 성립.

(코시부등식에 따라 $|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n! \cdot M}{R^n}$.)

따라서 $f^{(n)}(0) = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

그러므로 f 의 테일러 급수전개 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = f(0)$ 이므로

f 는 상수함수이다.

(다)와 관련된 명제는 성립하지 않는다.

$f(x) = \tan^{-1}x$ 는 \mathbb{R} 에서 C^∞ 급 함수이고,

임의의 $x \in \mathbb{R}$ 에 대하여 $|f(x)| \leq \frac{\pi}{2}$ 이지만 $f(x)$ 는 상수함수가 아니다.

* 다른 반례

\mathbb{R} 에서 C^∞ 급 함수 $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 에 대하여

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = e^0 = 1, x \neq 0$ 일 때 $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$ 이므로

$x < 0$ 이면 감소, $x > 0$ 이면 증가하므로 $0 \leq f(x) < 1$, 즉 f 는 유계.

그러나 $f(x)$ 는 상수함수가 아니다.

20. ②

ㄱ. $f(z)$ 는 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -3]$ 에서 해석적이므로 D 에서 해석적이다.

ㄴ. f 가 정함수이면 f' 도 정함수이다.

$f' = u + iv$ 로 놓을 때 $u = xy^3, v = 0$ 이며 코시-리만방정식에 의해

$u_x = y^3 = 0 = v_y$ 이므로 $y \neq 0$ 일 때 성립하지 않는다.

이는 \mathbb{C} 에서 해석적인 함수 f 가 있다고 가정한 데 모순이다.

* 다른설명: $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 라 할 때

f 가 정함수라 가정하면 $f'(z) = u_x + iv_x$ 이므로 \mathbb{C} 에서 $u_x = xy^3, v_x = 0$.

코시-리만방정식 $u_x = xy^3 = v_y, u_y = -v_x = 0$ 에서

$v = \frac{1}{4}xy^4 + C(x)$ ($C(x)$ 는 x 에 관한 함수),

$v_x = \frac{1}{4}y^4 + C'(x) = 0$ ($x + iy \in \mathbb{C}$)이므로 모순이다.

따라서 조건을 만족하는 정함수 없다.

ㄷ. 임의의 폐곡선 C 일 때 조건을 만족해야 C 의 내부에서 해석적이 된다. (Morera 정리)

21.

$f(z) = z - 2, g(z) = e^{-z}$ 는 $|z - 2| \leq 2$ 에서 해석적,

$|z - 2| = 2$ 위에서 $|g(z)| = e^{-\operatorname{Re}(z)} \leq e^0 = 1 < 2 = |f(z)|$ 이므로

Rouche 정리에 의해 $f(z) + g(z)$ 의 $|z - 2| < 2$ 에서의 영점의 수는

$f(z)$ 의 $|z - 2| < 2$ 에서의 영점의 수 1과 같다.

한편, $h(x) = x - 2 + e^{-x}$ 는 $[0, 4]$ 에서 연속이고

$h(0) = -1 < 0, h(4) = 2 + e^{-4} > 0$ 이므로

중간값 정리에 의해 $h(x) = 0$ 는 $(0, 4)$ 에 실근 있다.

그러므로 주어진 복소방정식은 주어진 범위에서 단 하나의 실근을 갖는다.

22. $2 + i$

D 에서 $|f(z)| \leq \sqrt{5}, D$ 내부의 점 $z = 0$ 에서 $|f(0)| = \sqrt{5}$, 이므로

최대절댓값 정리에 따라 f 는 D 에서 상수함수.

$f(1) + f'(i) = 2 + i$.

23. $z = x + iy \in D$ 에 대하여 $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y), \operatorname{Im} f(z) = v(x, y)$ 라 하자.

$f'(z) = u_x + i(2u_x) = -if_y = 2u_y - iu_y$ 에서 $u_x = 2u_y, 2u_x = -u_y$ 이므로

$u_x = u_y = 0$ 즉, u 는 D 에서 상수함수이다.

즉, $f'(z) = u_x + i(2u_x) = 0$ ($z \in D$)이다.

그러므로 f 는 D 에서 상수함수이다.

24.

$R > 1$ 에 대하여 f 는 $|z| \leq R$ 에서 해석적이고 $|z| = R$ 위에서 $|f(z)| \leq R$.

Cauchy 부등식에 의해 $|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!R}{R^n} = \frac{n!}{R^{n-1}}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)

f 는 \mathbb{C} 에서 해석적이므로 $R \rightarrow \infty$ 일 때도 부등식이 성립하므로

$n \geq 2$ 이면 $f^{(n)}(0) = 0$.

따라서 f 의 급수전개 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = f(0) + f'(0)z$ 이며

가정에 의해 $f(0) = 0, f(1) = 1$ 이므로 $f(z) = z$.

* 다른 풀이

$g(z) = \frac{f(z)}{z}$ 라 하면

g 는 $0 < |z| (\mathbb{C} - \{0\})$ 에서 해석적이고, $|g| \leq 1$ 이므로 유계이다.

리만정리에 의해 g 는 \mathbb{C} 에서 해석적인 함수 g^* 로 확장된다.

$g^*(0) = \alpha$ 라 할 때 $M = \max\{\alpha, 1\}$ 라 하면

임의의 $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여 $|g^*(z)| \leq M$ 이므로

리우빌 정리에 의해 g^* 는 상수함수이다.

$g^*(1) = 1$ 이므로 $g^* \equiv 1$ 즉, $f(z) = z$ 이다. ($g^*(0) = \lim_{z \rightarrow 0} g(z) = f'(0) = 1$)

* 다른 풀이

일반화된 리우빌 정리에 의해 f 는 1차 이하의 다항식.

따라서 $f(z) = az + b$ 이고 가정에 의해 $f(z) = z$.

25. * 출제오류

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \infty \neq 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x).$
 f 는 $x=0$ 에서 불연속이므로 미분가능하지도 않으며,
 n 번 미분가능하지도 않다.
그러므로 테일러급수도 존재하지 않으며 (1)의 결과를 근거로
실함수와 복소함수의 미분가능성이 갖는 특징의 차이도 무엇인지 알 수 없다.

* $x=0$ 일 때 0 , $x \neq 0$ 일 때 $e^{-\frac{1}{x^2}}$ 으로 정의한 함수 $g(x)$ 에 대하여
 $g^{(n)}(0)=0$ 이며 테일러급수 0 이다.

26.
 $|f(z)| = \sqrt{[Re f(z)]^2 + [Im f(z)]^2} > \sqrt{1 + [Im f(z)]^2} \geq 1 \ (z \in \mathbb{C})$ 이므로
 $\frac{1}{|f(z)|} \leq 1$ 이고 $\frac{1}{f(z)}$ 는 정함수이므로 리우빌 정리에 의해 상수함수이다.
따라서 $f(z)$ 도 상수함수이다.
* 다른 설명: $g = e^f, \ g \neq 0, \ \left| \frac{1}{g} \right| = e^{-Re f(z)} < 1, \ g$:상수이므로 f :상수.

27. $f(1+i) = i$
 $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq Re(z) \leq 2, 0 \leq Im(z) \leq 1\}$ 은 \mathbb{C} 에서 유계폐집합이다.
 f 는 연속이므로 $f(A)$ 는 \mathbb{C} 에서 유계폐집합이다.
가정에 의해 임의의 $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여 $f(z) = f(z') \in f(A)$ 인 $z' \in A$ 있다.
따라서 $f(A) = f(\mathbb{C})$ 즉, f 는 유계이다.
그러므로 리우빌 정리에 의해 f 는 상수함수이다.
구하는 값 $f(1+i) = f(0) = i.$

28. $v = -\ln|z| + C$ (C 는 상수), 조화공액을 v 라 하자.
 $z = re^{i\theta} \ (-\pi < \theta < \pi)$ 라 하면 $u = Arg \ z = \theta$ 이다.
코시-리만 방정식에 의해 $u_r = 0 = \frac{1}{r}v_\theta$ 에서 v 는 r 에 관한 함수이고,
 $v_r = -\frac{1}{r}u_\theta = -\frac{1}{r}$ 에서 $v = -\ln r + C$ (C : 복소상수)
이때 $r = |z|$ 이므로 조화함수 u 의 조화공액 $v = -\ln|z| + C$ (C : 상수)

* 다른 설명
조화공액 v 라 하자. $z = x + iy \ (x, y \in \mathbb{R})$ 라 하면 $\tan(Arg \ z) = \frac{y}{x}$ 이므로
 $Arg \ z = u = \tan^{-1} \frac{y}{x}.$ 코시-리만 방정식에 의해
 $u_x = \frac{-y}{x^2 + y^2} = v_y, \ u_y = \frac{x}{x^2 + y^2} = -v_x.$
 v_y 를 y 에 관하여 적분하면 $v = -\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + C(x),$
이를 x 에 관하여 미분하면 $v_x = -\frac{x}{x^2 + y^2} + C'(x).$
따라서 $C'(x) = 0, \ C(x) = C$ (상수)이다.
그러므로 $v = -\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + C = -\ln|z| + C.$

29. ④
 $z = x + i(\tan \theta x)$ 와 원이 접하면 $6 = \frac{10}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$ 에서 $\cos \theta = \pm \frac{3}{5}$
 $\cos \theta_1 = \frac{3}{5}, \ \cos \theta_2 = -\frac{3}{5}$ 인 $\theta_1, \ \theta_2$ 에 대하여 $0 < \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 < \pi$ 이다.
한편 $f(\theta) = 8\sin \theta + 6\cos \theta, \ f'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \tan \theta = \frac{4}{3}$
 $\tan \theta' = \frac{4}{3}$ 되는 $\theta_1 \leq \theta' \leq \theta_2$ 에서 $f(\theta') = 10,$
 $f(\theta_1) = 10, \ f(\theta_2) = \frac{14}{5}$ 이므로 구하는 값 28.

30. ①
 w 를 18번 곱하면 한 바퀴, $w^{18} = 1$ (9번 곱하면 반 바퀴, $w^9 = -1$)
 $w = e^{i(20^\circ)} = e^{\frac{\pi}{18}i}, \ \frac{1}{w} = w^{-1} = e^{-\frac{\pi}{18}i} = \overline{w} \ (w\overline{w} = |w|^2 = 1).$
 $S = w + 2w^2 + 3w^3 + \cdots + 18w^{18},$
 $wS = w^2 + 2w^3 + \cdots + 17w^{18} + 18w^{19}$ 에서 $S = \frac{-18w}{1-w}.$
 $\frac{1}{|S|} = \frac{|1-w|}{18|w|} = \frac{1}{18}|w^{-1} - 1| = \frac{1}{18}|(\cos 20^\circ - 1) - i \sin 20^\circ|$
 $= \frac{1}{18} \sqrt{(\cos 20^\circ - 1)^2 + \sin^2 20^\circ} = \frac{1}{18} \sqrt{2 - 2\cos 20^\circ}$
 $= \frac{1}{18} \cdot (2\sin 10^\circ) = \frac{1}{9} \sin 10^\circ.$

31. ④
 $0 < |z| < 1$ 인 $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여 $0 < \cdots < |z|^2 < |z| < 1$ 이며
선분들의 길이의 합은 $|z - z^2| + |z^2 - z^3| + |z^3 - z^4| + \cdots = \frac{|z - z^2|}{1 - |z|}.$

32. ② π
 $z^n = 1 = e^{2k\pi i} \ (k \in \mathbb{Z})$ 에서 $z = e^{\frac{2k\pi i}{n}} \ (k \in \mathbb{Z})$ 이며
 $0 \leq \theta < 2\pi$ 인 $\theta = \frac{2k\pi}{n} \ (k = 0, 1, \cdots, n-1).$
 $S_n = \frac{2\pi}{n}(0 + 1 + \cdots + (n-1)) = (n-1)\pi$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \pi.$

<비해석함수>

1. $u(x,y)=\frac{x+ay}{x^2+y^2}+x^2+by^2$, $v(x,y)=\frac{cy}{x^2+y^2}+dxy$ 라 하자.
코시-리만 방정식 $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ 를 풀면 $a=0$, $b=-1$, $c=-1$, $d=2$.

$f(z)=\frac{x-iy}{x^2+y^2}+(x^2-y^2+2ixy)=\frac{\bar{z}}{|z|^2}+z^2=\frac{\bar{z}}{zz}+z^2=\frac{1}{z}+z^2$ 이므로

$e^{\frac{1}{z}}f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}\left(\frac{1}{z}+z^2\right)$, $a_{-1}=1+\frac{1}{3!}=\frac{7}{6}$.

2. $4\pi i$
 $z=e^{it}$, $dz=ie^{it}dt$, $0\leq t\leq 2\pi$.
 $\bar{z}=e^{-it}$, $d\bar{z}=-ie^{-it}dt$.
 $\int_C\bar{z}dz-\frac{1}{z}d\bar{z}=\int_0^{2\pi}i+i\,dt=4\pi i$.

3. $|z|=2$ 이면 $|-z-4|\leq 6<8=|z|^3$ 이므로 주어진 <정리>에 의해 $z^3-z-4=0$ 의 해는 $|z|<2$ 에서만 존재한다.

$f(z)=\frac{1}{(z-3)(z^3-z-4)}$ 라 하면 유수 정리에 따라

$\int_{|z|=4}f(z)dz=2\pi i\cdot\text{Res}\left(\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right)=0$.

$=\int_Cf(z)dz=\int_{|z-3|=\frac{1}{2}}f(z)dz$ 이므로

$\int_Cf(z)dz=\int_{|z|=4}f(z)dz-\int_{|z-3|=\frac{1}{2}}f(z)dz$
 $=2\pi i\cdot\text{Res}(f(z),3)=-\frac{\pi i}{10}$.

(다른 풀이)
 $|z|=2$ 일 때 $|z^3|=8>6\geq |-z-4|$ 이므로 주어진 정리에 의해 $z^3-z-4=0$ 의 영역 $\{z\in\mathbb{C}\mid|z|<2\}$ 의 근의 개수 3.
유수 정리에 따라

$\oint_{|z|=2}\frac{1}{(z-3)(z^3-z-4)}dz$
 $=-\oint_{|w|=\frac{1}{2}}\frac{1}{(\frac{1}{w}-3)(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{w}-4)}\cdot\left(-\frac{1}{w^2}\right)dw$
 $=\int_{|w|=\frac{1}{2}}\frac{w^2}{3(w-\frac{1}{3})(4w^3+w^2-1)}dw$
 $=2\pi i\cdot\frac{1}{3^2\cdot 3\cdot\left(\frac{4}{27}+\frac{1}{9}-1\right)}$
 $=-\frac{\pi i}{10}$.

4. C 는 시계반대방향 단순폐곡선이므로 그린 정리에 따라 $\int_C\bar{z}dz=2i\times(C\text{ 내부의 넓이})=2i\cdot 4\pi=8\pi i$. ($z=x+iy$)

유수 정리에 따라 $\int_C\frac{4e^{-iz}}{(z+6i)(z-2i)}dz=2\pi i\times\frac{e^2}{2i}=\pi e^2$.

그러므로 구하는 값 $\pi e^2+8\pi i$.
(다른 풀이)

$C:|z-i|=2$ 위에서 $4=|z-i|^2=(z-i)\overline{(z-i)}$, $\bar{z}=\frac{4}{z-i}-i$,

유수 정리에 따라 $\int_C\left\{\frac{4e^{-iz}}{(z+6i)(z-2i)}+\bar{z}\right\}dz=\int_C\frac{4e^{-iz}}{(z+6i)(z-2i)}+\frac{4}{z-i}-i\,dz$
 $=2\pi i\cdot\left(\frac{4e^2}{8i}+4\right)=\pi e^2+8\pi i$.

5. $\frac{5}{4},\frac{3}{4}$

$z=2e^{it}=2(\cos t+i\sin t)$, $0\leq t\leq 2\pi$ 라 하면 $f=\frac{5}{4}c+\frac{3}{4}is$ 이므로

$|f(z)|^2=f(z)\overline{f(z)}=\frac{9}{16}+\cos^2t$ 이므로 $|f(z)|$ 의 최댓값 $\frac{5}{4}$, 최솟값 $\frac{3}{4}$.

6. $g(z)=\frac{z^3f'(z)}{f(z)}$ 의 C 내부의 특이점 $z=1, e^{\frac{\pi i}{3}}, e^{\frac{5\pi i}{3}}$ (단순특이점).

$g(z)$ 는 특이점을 제외한 C 와 C 내부에서 해석적이다.

유수정리에 따라 $\int_Cg(z)dz=2\pi i\cdot\left(1^3+e^{\frac{\pi i}{3}}\cdot 3+e^{\frac{5\pi i}{3}}\cdot 3\right)=-2\pi i$.

* 다른 풀이

일반화된 편각 원리에 따라 $\int_C\frac{z^3f'(z)}{f(z)}dz=2\pi i(1^3+e^{\pi i}+e^{5\pi i})=-2\pi i$.

7. $x+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{3}x^3,\frac{10}{3}\pi i$

$(e^x-1)\cdot(1-x)^{-1}$ 곱의 미분법으로 직접 계산하면 $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=3$, $f^{(3)}(0)=10$ 이므로

$f(x)$ 의 3차 테일러 다항식 $x+\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{3}x^3$.

* 다른 설명

$f(x)=(e^x-1)(1-x)^{-1}$
 $=\left(\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)(1+x+x^2+x^3+\cdots)$

3차 테일러 다항식 $(x+x^2+x^3)+\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}\right)+\frac{x^3}{6}=x+\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{3}x^3$.

$g(z)=\frac{e^z-1}{z^4(1-z)}$ 라 하면 유수 정리에 의해

$\int_{|z|=\frac{1}{2}}g(z)dz=2\pi i\cdot\text{Res}(g(z),0)=2\pi i\cdot(3\text{차항 계수})=\frac{10}{3}\pi i$.

8. π
곡선 C 는 원점 중심인 반지름 1인 상반원이다. (이때 C 는 단순폐곡선)
 $z=x+iy$, $dz=dx+idy$ 이므로

$\int_C(x^2-y^2-y)+i(2xy-x)\,dz$
 $=\int_C[x^2-y^2-y+i(2xy-x)]dx+[-2xy+x+i(x^2-y^2-y)]dy$
 $=\iint_{\text{int } C\cup\text{b}(C)}2dA$ (그린 정리)
 $=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi$.

* $\mathbb{C}\cong\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

9. 임의의 $|z| < \frac{\pi}{2}$ 인 z 에 대하여 $f(-z) = f(z)$ 이므로

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-z)^n = f(-z)$ 에서 $a_{2n+1} = 0$.

$f(z)$ 는 $|z| \leq 1$ 에서 (테일러 급수 전개가능하므로) 해석적이므로
코시적분공식에 따라 $\int_C \frac{f(z)}{z^3} dz = 2\pi i \cdot \frac{f''(0)}{2!} = 2\pi i \cdot a_2 = -\frac{\pi i}{2}$.

* $f(z) = \frac{1}{e^z + e^{-z}} = \frac{1}{2\cosh z}$

* 다른 설명

$$f(z) = \frac{1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots}{2+2z+\frac{4z^2}{2!}+\frac{8z^3}{3!}+\frac{16z^4}{4!}+\frac{32z^5}{5!}+\cdots}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4} + \frac{5}{48}z^4 - \cdots$$
이므로

$a_{2n+1} = 0$ (비약), $\text{Res}[\frac{f(z)}{z^3}, 0] = -\frac{1}{4}$, 유수정리에 의해 적분값 $-\frac{\pi i}{2}$.

10. $R > a$ 일 때 $|z| = R$ 위에서 $\left| \frac{z}{z^2+a^2} \right| \leq \frac{R}{R^2-a^2} \rightarrow 0 \ (R \rightarrow \infty)$ 이므로

Jordan 보조정리에 의해 $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{z}{z^2+a^2} \cdot e^{ibz} dz = 0$.

C_R 과 $(-R, 0)$ 에서 $(R, 0)$ 을 잇는 반시계방향 폐곡선 C 라 하면

유수 정리에 의해 $\int_C \frac{ze^{ibz}}{z^2+a^2} dz = 2\pi i \text{Res}\left(\frac{ze^{ibz}}{z^2+a^2}, ai\right) = \pi i e^{-ab}$.

따라서 $\pi i e^{-ab} = \int_{C_R} \frac{ze^{ibz}}{z^2+a^2} dz + \int_{-R}^R \frac{xe^{ibx}}{x^2+a^2} dx$ 에서 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ibx}}{x^2+a^2} dx = \pi i e^{-ab}$.

11. ①
주어진 조건을 만족하는 고립특이점은 진성특이점이다.
(카소라티-바이어슈트라스 정리)

- ㄱ. $f(z) = z \sin \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{-2n}$ 에 대하여 z^{-n} (n : 자연수)꼴의 항이 무한히 많다. 즉 $z=0$ 는 진성특이점.
- ㄴ. $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 1 \neq 0$ 이므로 $z=0$ 는 제거가능특이점.
- ㄷ. $\lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = 1 \neq 0$ 이므로 $z=0$ 는 위수 1인극.

12. ⑤
 $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ 이므로 $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\cos z}{\sin z} dz = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1} dz$.

$e^{2iz} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2iz = 2n\pi i \ (n \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow z = n\pi \ (n \in \mathbb{Z})$ 이며
 $|z| = 5$ 내부에 속하는 $z = 0, \pm\pi$ 3개 있다.

$\text{Res}(n\pi) = \frac{e^{2iz} + 1}{[2ie^{iz}]} \Big|_{z=n\pi} = 1$ 이므로 유수정리에 의해

구하는 값 $\frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \cdot (1+1+1) = 3$.

* 다른 풀이

$\sin z = 0 \Leftrightarrow z = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$. 편각 원리에 따라 적분값 3.

13. ①
자연수 n 에 대하여 $z^n e^z$ 는 정함수이므로 코시-구르사 정리에 의해 C 를 따라 선적분 0이다.

$0 < |z| < 1$ 인 z 에 대하여 $z^n e^{\frac{1}{z}}$ 의 급수전개

$$z^n \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{z^{n+1}} + \cdots \right),$$

$\text{Res}[z^n e^{\frac{1}{z}}, 0] = \frac{1}{(n+1)!}$ 이므로 유수정리에 의해

$a_n = \frac{2\pi i}{(n+1)!}$. 그러므로 구하는 값 0.

14. ①

e^{z^2} 은 C 와 C 내부에서 해석적이므로 코시-구르사 정리에 의해 $\int_C e^{z^2} dz = 0$.

$0 < |z| < 1$ 에서 $z^2 e^{\frac{1}{z}} = z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z^2} + \cdots$ 이므로 유수 $\frac{1}{6}$.

유수 정리에 따라 $A = \frac{\pi i}{3}$.

$\sin z = 0 \Leftrightarrow z = n\pi \ (n \in \mathbb{Z})$ 이며 C 내부에 있는 $z = 0$, 1개 있다.

$\lim_{z \rightarrow 0} z \frac{1-z}{\sin z} = 1$ 이므로 유수 정리에 의해 $B = 2\pi i$

(실제로 나누면 $\frac{1-z}{\sin z} = \frac{1}{z} - 1 + \frac{z}{3!} + \cdots$)

$\therefore \frac{A}{B} = \frac{1}{6}$.

15. ①

ㄱ. $X = \mathbb{R}$ 라 하자. $f(0) = 0$ 이고

$0 \leq \lim_{t \rightarrow 0} |f(t)| = \lim_{t \rightarrow 0} |t \cos \frac{1}{t}| \leq \lim_{t \rightarrow 0} |t| = 0$ 이므로

$f(0) = 0 = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$ 가 되어 f 는 $t=0$ 에서 연속.

ㄴ. $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ 는 존재하지 않으므로 불연속이다.

* $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ 이므로 $f(z) = z \cdot \frac{e^{\frac{i}{z}} + e^{-\frac{i}{z}}}{2}$. 허수축 $z(t) = it$ 을 따라

$|f(z(t))| = \left| it \cdot \frac{e^{\frac{1}{t}} + e^{-\frac{1}{t}}}{2} \right| \geq \left| t \frac{e^{1/t}}{2} \right| \rightarrow \infty \ (t \rightarrow 0+)$ 이므로

f 는 $t=0$ 에서 불연속이다.

* 연속이라 가정하면 $0 < |z| < R$ 에서 $\left| z \cos \frac{1}{z} \right| < 1$ 이 되는 R 있다.

리만 정리에 의해 $g(z) = \begin{cases} z \cos \frac{1}{z}, & z \neq 0 \\ w = \lim_{z \rightarrow 0} f(z), & z = 0 \end{cases}$ 는 \mathbb{C} 에서 해석적이므로

$\int_{|z|=1} g(z) dz = 0$ 이다.

한편, 유수 정리에 의해 $\int_{|z|=1} g(z) dz = \int_{|z|=1} z \cos \frac{1}{z} dz = -\pi i$, 모순.

이는 f 가 연속이라 가정한 데서 비롯된 것이다.

ㄷ. $|z| > 0$ 에서 f 는 해석적이므로 (로랑)급수전개 가능

$z \cos \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{1-2n}$.

ㄹ. 유수정리에 의해 적분값은 $-\pi i$ 이다.

16. ④

(가) $\int_C f(z) dz = 2\pi i \cdot \left(-\frac{i}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$

(나) $\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq |\Gamma| \cdot |f(z)|$
 $= \pi R \cdot \frac{R^2}{(R^2-1)^2} = \frac{\pi R^3}{(R^2-1)^2}$

(다) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx$
 $= \int_C f(z) dz - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f(z) dz$
 $= \int_C f(z) dz = \frac{\pi}{2}$.

17. $-\pi i$

$f(z)=\frac{1}{z-2}$ 는 C 와 C 내부에서 해석적이다.

코시 적분공식에 의해 $\int_C \frac{f(z)}{z} dz=2\pi i \cdot f(0)=-\pi i$.

* $f(z)=\frac{1}{z(z-2)}$ 의 C 내부의 특이점 $z=0$ 이다.

$\text{Res}[f,0]=-\frac{1}{2}$ 이므로 유수정리에 의해 적분은 $2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)=-\pi i$.

* $\frac{1}{z^2-2z}=-\frac{1}{2z}-\frac{1}{4}-\frac{z}{8}+\frac{z^2}{16}+\frac{z^3}{32}+\frac{z^4}{64}+\cdots$

18. $|z|=1$ 위의 $z=1\cdot e^{i\theta}$ ($0\leq\theta\leq2\pi$)라 쓸 수 있다. 선적분의 정의로부터

$$\int_{|z|=1} z^n dz = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} i e^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta = \begin{cases} 2\pi i, & n=-1 \\ 0, & n\neq -1 \end{cases}$$

19. $-\frac{8\pi i}{e^2}$

$|z|=2$ 내부의 특이점 $z=-1$ 이다.

$$\lim_{z\rightarrow -1} \left[\frac{(z^2+7)e^{2z}}{(z-3)} \right]' \cdot \frac{1}{(2-1)!} = \frac{-4}{e^2}$$
이므로 유수정리에 의해 적분은 $-\frac{8\pi i}{e^2}$.

* $f(z)=\frac{(z^2+7)e^{2z}}{(z-3)}$ 은 $|z|\leq2$ 에서 해석적이므로 코시 적분공식에 의해

$$\int_{|z|=2} \frac{(z^2+7)e^{2z}}{(z-3)(z+1)^2} dz = \int_{|z|=2} \frac{f(z)}{(z+1)^{1+1}} dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(-1) = -\frac{8\pi i}{e^2}.$$

20.

하위 영역	배점	예상 정답율(%)	출제근거 (이유)
고등수학(복소함수)	4	75	H. Silverman. Complex Variables. pp. 251-266

$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots$ 이므로 1점

$\cos \frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{4!} \frac{1}{z^4} - \cdots$ 2점

(직접 이 식을 유도해도 2점)

이제 $z^3 \cos \frac{1}{z} = z^3 - \frac{z}{2!} + \frac{1}{4!} \frac{1}{z} - \cdots$ 에서

$z^3 \cos \frac{1}{z}$ 의 $z=0$ 에서의 유수(residue)는 $\frac{1}{4!}$ 이다. 3점

$\oint_U z^3 \cos \frac{1}{z} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{4!} \right) = \frac{\pi i}{12}$ 4점

21.

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z(z-1)(z-i)}$$

복소 평면의 세 점 $0, 1, i$ 모두 원 $|z|=3$ 내부에 있으므로 각 점에서 유수를 계산하면

$$\text{Res}[f, 0] = \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = 0,$$

$$\text{Res}[f, 1] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) f(z) = \frac{e-1}{1-i},$$

$$\text{Res}[f, i] = \lim_{z \rightarrow i} (z-i) f(z) = -\frac{e^i - 1}{1+i}.$$

이제 유수 정리에 의하여 적분은

$$\int_{|z|=3} f(z) dz = 2\pi i \left(0 + \frac{e-1}{1-i} - \frac{e^i - 1}{1+i} \right) = \pi i (e + ie + ie^i - 2i - e^i).$$

$$= 2\pi i \cdot \text{Res} \left(\frac{1}{z^2} f \left(\frac{1}{z} \right), 0 \right)$$

22. ②

$z=1, -2$ 는 $|z|=3$ 내부에 있다. 유수 정리에 따라

$$\int_{|z|=3} \frac{z^3+3z-1}{(z-1)(z+2)} dz = 2\pi i (\text{Res}(1) + \text{Res}(-2)) = 2\pi i \cdot (1+5) = 12\pi i.$$

* $\frac{z^3+2z-1}{(z-1)(z+2)} = \frac{z^3+2z-1}{z^2+z-2} = z-1 + \frac{6}{z} - \frac{9}{z^2} - \frac{3}{z^3} - \frac{15}{z^4} + \frac{9}{z^5} + \cdots$

23. ④

$0<|z|<1$ 인 z 에 대하여 $e^{\frac{1}{z^2}}$ 의 (로랑) 급수 전개에서 $\frac{1}{z}$ 항 없다.

즉, $\text{Res}[e^{\frac{1}{z^2}}, 0]=0$. 유수 정리에 의해 구하는 적분값은 0.

24. ①

* $f(z)$ 는 코시-리만 방정식을 만족하지 않으므로 해석함수가 아니다.

선적분의 정의를 적용하자.

C 의 매개변수 방정식 $c(t)=(1+i)t=1+it, 0\leq t\leq 1, c'(t)=(1+i)$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_{t=0}^{t=1} f(c(t)) c'(t) dt = \int_0^1 (-3t^2 i)(1+i) dt = (1+i)[-t^3 i]_0^1 \\ &= (1+i)(-i) = 1-i. \end{aligned}$$

1. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

v = 1, 프레네-세레 공식 적용.

$$\begin{aligned}0 &= \frac{d}{ds} \alpha(s) \cdot \alpha'(s) + \alpha(s) \cdot \frac{d}{ds} \alpha'(s) \\&= T(s) \cdot T(s) + \alpha(s) \cdot T'(s) \\&= 1 + \alpha(s) \cdot \kappa(s) N(s) \\&= 1 - 2\kappa(s)s^2 \text{이므로} \\ \kappa(1) &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-4s &= \frac{d}{ds} \alpha(s) \cdot N(s) + \alpha(s) \cdot \frac{d}{ds} N(s) \\&= T \cdot N + \alpha \cdot (-\kappa T + \tau B) \\&= 0 + (0 + \tau \alpha \cdot B) \text{이므로} \\ -4 &= 12\tau(1), \quad \tau(1) = -\frac{1}{3}, \quad |\tau(1)| = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

2. $\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}$

$$C(t) = (t, e^{at}, be^{-at}), \quad C(0) = (0, 1, b) = P, \quad C'(0) = (1, a, -ab).$$

$P + tC'(0) = (t, 1 + at, b - abt)$ 이므로 $t = 2\sqrt{2}$.

$$(2\sqrt{2}, 1 + 2a\sqrt{2}, b - 2ab\sqrt{2}) = (2\sqrt{2}, 3, -1), \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b = 1, \quad a^2 + b^2 = \frac{3}{2}.$$

$$C''(0) = (0, a^2, a^2b) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \quad C'(0) \perp C''(0) \text{이므로}$$

$$\kappa = \frac{\|C''(0)\|}{\|C'(0)\|^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

3. $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right), \frac{4\sqrt{2}}{3}$

$$\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx (2, 1, 0), \quad \alpha'\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx (2, -2, 0), \quad \alpha''\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx (-2, -4, 0) \text{이므로}$$

$$T = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad (\alpha' \times \alpha'')\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 0, -12), \quad B = (0, 0, -1),$$

$$N = B \times T = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad \kappa = \frac{|\alpha' \times \alpha''|}{|\alpha'|^3} = \frac{3}{4\sqrt{2}}$$

$$(\text{곡률중심}) = \alpha + \frac{1}{\kappa}N = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

$$(\text{곡률반경}) = \frac{1}{\kappa} = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

4.

$$\beta' = \tau_\alpha T + \kappa_\alpha B, \quad \|\beta'\| = \sqrt{\tau_\alpha^2 + \kappa_\alpha^2} \neq 0 \text{이므로 } \beta \text{는 정칙곡선이다.}$$

$$\beta'(1) = \kappa_\alpha(1)\sqrt{3}T + \kappa_\alpha(1)B, \quad \beta'' = \tau_\alpha'T + \kappa_\alpha'B,$$

$$\beta''(1) = (\sqrt{3}\kappa_\alpha'(1) - 2\kappa_\alpha(1))T + \kappa_\alpha'(1)B, \quad \|\beta'(1)\| = 2\kappa_\alpha(1),$$

$$\beta'(1) \times \beta''(1) = \begin{vmatrix} T & N & B \\ \sqrt{3}\kappa_\alpha(1) & 0 & \kappa_\alpha(1) \\ \sqrt{3}\kappa_\alpha'(1) - 2\kappa_\alpha(1) & 0 & \kappa_\alpha'(1) \end{vmatrix} = -2\kappa_\alpha(1)^2 N,$$

$$\|\beta'(1) \times \beta''(1)\| = 2\kappa_\alpha(1)^2.$$

$$\text{구하는 값} \quad \tau_\alpha(1)\kappa_\beta(1) = \sqrt{3}\kappa_\alpha(1) \cdot \left[\frac{2\kappa_\alpha(1)^2}{8\kappa_\alpha(1)^3}\right] = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

5. $0, \frac{2}{\sqrt{3}}$

$$\gamma \text{는 구면곡선이므로 } \|\gamma\| = 1, \quad n = \frac{\gamma}{\|\gamma\|} = \gamma, \quad n' = \gamma' = T.$$

$$0 = (B \cdot n)' = B' \cdot n + B \cdot n' = -\tau N \cdot n + B \cdot n' \text{이므로}$$
$$B \cdot n' = B \cdot T = 0 = \tau N \cdot n, \quad \tau = 0 = a(s).$$

구면 위의 곡선으로서 열률=0이므로 γ 는 원(의 일부).

$$B, n \text{의 사잇각 } \frac{\pi}{3} \text{이므로 } b(s) = \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{1 \cdot \cos \frac{\pi}{6}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

6. $\frac{\pi}{2}, -\frac{2}{13}$

$$\gamma'(t) = (2 + \sin t, 1 + \cos t, 2) \text{가 } (6, 2, 4) \text{와 평행하게 되는 } t_0 = \frac{\pi}{2} \in (0, 2\pi).$$

$$\gamma(t_0) = (\pi, \frac{\pi}{2} + 1, \pi + 1) \text{에서}$$

$$\gamma' = (3, 1, 2), \quad \gamma'' = (0, -1, 0), \quad \gamma' \times \gamma'' = (2, 0, -3), \quad \gamma''' = (-1, 0, 0).$$

$$\gamma \text{의 열률 } \tau = \frac{(\gamma' \times \gamma'') \cdot \gamma'''}{\|\gamma' \times \gamma''\|^2} = \frac{-2}{13}.$$

7. $\tau = 0, a = 3$

$$C \text{의 매개변수표현 } C(t) = (t, t^3 - at + a, t - 1) \text{이다.}$$

$$C'(t) = (1, 3t^2 - a, 1), \quad C''(t) = (0, 6t, 0), \quad C'''(t) = (0, 6, 0),$$

$$C(1) = (1, 1, 0), \quad C'(1) = (1, 3 - a, 1),$$

$$C''(1) = (0, 6, 0), \quad C'(1) \times C''(1) = (-6, 0, 6),$$

$$(C' \times C'') \cdot C''' = 0 \text{이므로 } \tau = 0.$$

$$C \text{의 곡률 } 3 = \frac{6\sqrt{2}}{[2 + (a - 3)^2]^{3/2}} \text{에서 } a = 3.$$

8. $\frac{1}{4}$

$$\beta'(t) = \alpha(t) + t^2 N(t), \quad \beta''(t) = T(t) + 2tN(t) + t^2(-\kappa(t)T(t) + \tau(t)B(t)) \text{에서}$$
$$\beta''(2) = [1 - 4\kappa(2)]T(2) + 4N(2) + 4\tau(2)B(2)$$

$$\text{양변 } \alpha'(2) = T(2) \text{내적하면 } 0 = 1 + 0 - 4\kappa(2) \text{이므로 } \kappa(2) = \frac{1}{4}.$$

9. $\frac{6}{\sqrt{5}}$

γ 의 곡률 $\kappa(s)$ 라 하자.

$$3t = \int_0^t \|\beta'(s)\| ds = \int_0^t \left\| \frac{1}{2}\kappa(s)N(s) - \kappa(s)T(s) + 0B(s) \right\| ds = \int_0^t \frac{\sqrt{5}}{2}\kappa(s) ds$$

$$3 = \frac{\sqrt{5}}{2}\kappa(t), \quad \kappa(1) = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

10. $\frac{7}{3}$

$$\|\alpha'(t)\| = t^2 + 2, \quad \int_0^1 t^2 + 2 dt = \frac{7}{3}.$$

* 정규직교기저 $\{T, N, B\}$ 에 관한 α' 의 좌표 $(1, \kappa, 0)$

11. $a^2+b^2=3$

(3차항 없음) $\beta'''(t)=\mathbf{0}$ 이므로 임의의 $t\in\mathbb{R}$ 에 대하여

β 의 열률 $\tau_\beta\equiv 0=\tau_\alpha=\frac{24a}{\|\alpha'\times\alpha''\|^2}$ 에서 $a=0$.

α 의 곡률 $\kappa_\alpha=\frac{4}{(4+4t^2)^{3/2}}$ 의 최댓값 $\frac{1}{2}$ (곡률반경 최소)

β 의 곡률 $\kappa_\beta=\frac{\sqrt{4b^2+4}}{(b^2+1+4t^2)^{3/2}}$ 의 최댓값 $\frac{2}{b^2+1}$ 에서

$\frac{1}{2}=\frac{2}{b^2+1}$, $b^2=3$. 구하는 값 $a^2+b^2=3$.

12. $\sqrt{1+\tau^2}$

α 의 프레네 세레틀 $\{T,N,B\}$ 라 하자.

$\beta'=N$, $\beta''=N'=-T+\tau B$, $\beta'\times\beta''=B+\tau T$,

$\beta'''=-N-\tau^2N=(-1-\tau^2)N$.

$\kappa_\beta=\left\|\frac{T_\beta'}{ds}\right\|=\|\beta''(s)\|=\frac{\|\beta'\times\beta''\|}{\|\beta'\|^3}=\frac{\sqrt{1+\tau^2}}{1^3}=\sqrt{1+\tau^2}$,

$\tau_\beta=\frac{(\beta'\times\beta'')\cdot\beta'''}{\|\beta'\times\beta''\|^2}=0$.

구하는 값 $\kappa_\beta+\tau_\beta=\sqrt{1+\tau^2}$.

13. ③

$f:\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}^3$, $f(x,y,z)=\begin{pmatrix}x\\y\\-z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ 라 하면

f 는 xy -평면의 대칭이동(직교변환, 기저에 의한 표현행렬이 직교행렬)으로서, $f(\alpha(t))=\beta(t)$ 인 등장사상이다.

ㄱ. 곡선 α 와 β 의 곡률 $\kappa_\alpha=\kappa_\beta$.

ㄴ. f 의 표현행렬의 행렬식은 -1 이므로 $\tau_\alpha=-\tau_\beta$.

ㄷ. 그런 L 이 있으면 $\tau_\alpha=1\cdot\tau_\beta=-\tau_\beta$ 에서 $\tau_\alpha=\tau_\beta=0$ 가 되는데, α , β 는 평면 곡선이 아니다.

* 직접 계산으로도 확인할 수 있다.

* 등장사상의 불변량

① 곡선 길이, κ 불변

② $| \tau |$ 불변, 부호는 등장사상의 행렬식의 부호를 따른다.

14. ③

C 의 매개변수표현 $\alpha(t)$ 라 하자.

C 는 정칙곡선이므로 $\alpha'(t)\neq\mathbf{0}$, $v=\|\alpha'(t)\|\in\mathbb{R}$ 라 하자.

ㄱ. $T'=\kappa vN=\mathbf{0}$ 이므로 $T=c$ 인 $c\in\mathbb{R}^3$ 있다.

$\alpha'(t)=v\mathbf{c}$ 이므로 $\alpha(t)=vct+b$ 인 $b\in\mathbb{R}^3$ 있다.

따라서 C 는 직선이거나 직선의 일부이다.

ㄴ. $B'=-\tau vN=0$ 이므로 $B=c$ 인 $c\in\mathbb{R}^3$ 있다.

따라서 C 는 B 를 법선으로 하는 평면에 놓여 있다.

ㄷ. 주면나선

15. ①

$(2,0,4\pi)=\gamma(t_1)=(a\cos t_1,a\sin t_1,bt_1)$,

$(2,0,8\pi)=\gamma(t_2)=(a\cos t_2,a\sin t_2,bt_2)$ 라 하면

$a^2=4$ 에서 $a=2$, $b(t_2-t_1)=4\pi$ 에서 $t_2-t_1=\frac{4\pi}{b}$

$\gamma'(t)=(-a\sin t,a\cos t,b)$ 이므로

$$\begin{aligned} 4\sqrt{10}\pi &= \int_{t_1}^{t_2}\|\gamma'(t)\|dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{a^2+b^2}dt \\ &= (t_2-t_1)\sqrt{a^2+b^2} \text{에서 } 9b^2=4, \, b=\frac{2}{3}. \, \therefore \, a+b=\frac{8}{3}. \end{aligned}$$

16. ⑤

$q=(1,0,0)$ 에서 $\nabla(x^2-y^2-1)=(2x,-2y,0)=(2,0,0)$,

$\nabla(z-xy)=(-y,-x,1)=(0,-1,1)$ 이므로 $(1,0,0)\times(0,-1,1)=(0,-1,-1)$.

교선 γ 의 접선벡터는 $(0,-1,-1)$ 과 평행하다.

따라서 구하는 평면의 방정식은 $(x-1,y,z)\cdot(0,-1,-1)=0$ 에서 $y+z=0$.

구하는 답은 $(-1,1,-1)$

* 다른 설명

γ 의 매개변수 표현 $\gamma(t)=(\cos ht,\sin ht,\frac{1}{2}\sinh 2t)$,

$\gamma(0)=(1,0,0)$, $\gamma'(0)=(0,1,1)$ 이므로

구하는 평면은 $(x-1,y,z)\cdot(0,1,1)=0$ 에서 $y+z=0$.

* 공간 \mathbb{R}^3 에서 γ 의 접선벡터 T 는 S_1 , S_2 의 단위법벡터 U_1 , U_2 와 각각 수직이다. 그러므로 T 는 U_1 과 U_2 를 포함하는 평면의 법벡터 $U_1\times U_2$ 와 평행하다.

(T 를 고정하고 U_1 과 U_2 를 포함하는 평면을 생각)

17. ①

$\beta'(0)=-4\alpha'(0)$, $\beta''(0)=8\alpha''(0)$, $\beta'(0)\times\beta''(0)=-32\alpha'(0)\times\alpha''(0)$,

$\beta'''(0)=-16\alpha'''(0)$ 이므로

β 의 비틀림 $\frac{(\beta'(0)\times\beta''(0))\cdot\beta'''(0)}{\|\beta'(0)\times\beta''(0)\|^2}=\frac{-32\times(-16)}{32^2}\tau(0)=\frac{1}{2}\tau(0)$.

18. ②

$\alpha'(t)=(\sinh t,\cosh t,1)$, $\|\alpha'(t)\|=\sqrt{\sinh^2t+\cosh^2t+1}=\sqrt{2}\cosh t$

$s(t)=\int_0^t\|\alpha'(u)\|du=\sqrt{2}\sinh t$,

$t=t(s)=\sinh^{-1}\frac{s}{\sqrt{2}}$, $\cosh^2t-\sinh^2t=1$ 에서

$\cosh t=\sqrt{1+\sinh^2t}=\sqrt{1+\frac{s^2}{2}}$,

$\beta(s)=\alpha(t(s))=\left(\sqrt{1+\frac{s^2}{2}},\frac{s}{\sqrt{2}},\sinh^{-1}\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$.

* $\cosh^2t-\sinh^2t=1$, $\cosh^2t=1+\sinh^2t$

* $\cosh^2t+\sinh^2t=\cosh 2t$, $\sinh 2t=2\sinh t\cosh t$

19. $t=\sqrt{\frac{5}{3}}$

$\alpha'(t)=(3t^2+1,2t,1)$, $\alpha''(t)=(6t,2,0)$, $\alpha'(t)\times\alpha''(t)=(-2,6t,-6t^2+2)$.

xy -평면의 법벡터 $(0,0,1)$ 이므로

$\cos 45^\circ=\frac{(-2,6t,-6t^2+2)\cdot(0,0,1)}{\|(-2,6t,-6t^2+2)\|\|(0,0,1)\|}$ 에서

$3t^4-5t^2=0$, $t=0,\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$ 이므로 구하는 $t=\sqrt{\frac{5}{3}}$.

20. $\mathbf{0}\neq\alpha''(s)=\kappa(s)N(s)$ 이므로 $\kappa(s)\neq 0$ ($s\in[a,b]$).

$c\in\mathbb{R}^3$ 에 대하여 $c=\alpha(s)+\frac{1}{\kappa(s)}N(s)$ 라 하자.

양변을 미분하면, 프레네 공식에 의해

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= T(s)+\frac{N'(s)\kappa(s)-\kappa'(s)N(s)}{[\kappa(s)]^2} \\ &= T+\frac{1}{\kappa^2}(-\kappa^2T+\kappa\tau B-\kappa'N) \\ &= \frac{\tau}{\kappa}B-\frac{\kappa'}{\kappa^2}N. \end{aligned}$$

$\{T, \, N, \, B\}$ 는 \mathbb{R}^3 의 정규직교기저이므로

$\frac{\tau}{\kappa}=0=\frac{\kappa'}{\kappa^2}$, $\tau=0$ 이므로 α 는 평면곡선, $\kappa'=0$ 이므로 κ 는 상수.

$\|c-\alpha(s)\|=\left\|\frac{1}{\kappa(s)}N(s)\right\|=\frac{1}{\kappa(s)}$ 이므로 α 는 반지름 $\frac{1}{\kappa(s)}$ 인 원의 일부.

21. $\frac{\pi}{4}$

구하고자 하는 각을 θ 라 하자.

단위접선벡터 $T(t)=\frac{1}{1+2t^2}(1,2t,2t^2)$.

평면의 단위법벡터 $\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$.

$\cos(\theta-\frac{\pi}{2})=\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로 $\theta=\frac{\pi}{4}$.

* $T(t)\cdot\vec{n}=\cos\frac{\pi}{4}$ (상수) 이므로 $\mathbf{x}(t)$ 는 주면나선이다.

* $\vec{n}=\cos\theta T+\sin\theta B$, $\frac{\tau}{\kappa}=\cot\theta$.

22. $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 0, 반지름 $\sqrt{2}$ 인 원

$\mathbf{x}'(\theta)=(-\sin\theta,-\sin\theta,\sqrt{2}\cos\theta)$, $\|\mathbf{x}'(\theta)\|=\sqrt{2}$,

$\mathbf{x}''(\theta)=(-\cos\theta,-\cos\theta,-\sqrt{2}\sin\theta)$,

$\mathbf{x}'(\theta)\times\mathbf{x}''(\theta)=(\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$,

$\mathbf{x}'''(\theta)=(-\sin\theta,-\sin\theta,-\sqrt{2}\cos\theta)$ 이므로 곡률 $\kappa=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

열률 $\tau=0$ 이므로 주어진 곡선은 반지름 $\sqrt{2}$ 인 원이다.

* 원의 중심(곡률중심) $\mathbf{x}(\theta)+\frac{1}{\kappa}N=(-2,2,0)$

23. 비꼬임 $\frac{1}{2}$, $\int_{\alpha}\phi=\frac{8}{5}$

(1) $t=0$ 에서 $\alpha'=(2,0,0)$, $\alpha''=(0,2,0)$, $\alpha'\times\alpha''=(0,0,4)$, $\alpha'''=(0,0,2)$.

α 의 비꼬임은 $\frac{(\alpha'\times\alpha'')\cdot\alpha'''}{\|\alpha'\times\alpha''\|^2}=\frac{1}{2}$.

(2) $dx=2dt$, $dy=2tdt$, $dz=t^2dt$ 이므로 $\int_{\alpha}\phi=\int_{-1}^12t^2+\frac{2}{3}t^4+2t^5dt=\frac{8}{5}$.

24.

(1) $T=\frac{X'}{\|X'\|}=\left(-\frac{4}{5}\sin t,\frac{4}{5}\cos t,\frac{3}{5}\right)$

(2) 곡률을 κ 라 하면 $T'=\kappa\|X'\|N$ 에서 $\kappa=\frac{4}{25}$

(3) 곡률반경 $\frac{1}{\kappa}=\frac{25}{4}$.

* 공간 \mathbb{R}^3 에서 곡선 α , $\|\alpha'\|=v$ 일 때 다음이 성립

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & v\kappa & 0 \\ -v\kappa & 0 & v\tau \\ 0 & -v\tau & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

25.

하위 영역	배점	예상정답율(%)	관련사고영역	출제자
기하 및 위상	5	30	적용	방승진
출제 내용 관련자료	R.S. Milman/G.D.Parker. Elements of Differential Geometry. pp102-104			

반지름의 길이가 r 인 원의 곡률은 $\frac{1}{r}$ 이고, 이 원이 측지선이므로 $k_g\equiv 0$ 이다.

$k^2=k_n^2+k_g^2$ 이고 따라서 $k_n=\pm\frac{1}{r}$ 이다.

k_n 은 미분가능이므로 연속이다.

따라서, $k_n\equiv\frac{1}{r}$ 또는 $k_n\equiv-\frac{1}{r}$ 이다.

* 채점기준

공식 $k^2=k_n^2+k_g^2$ 을 쓰면

측지선이면 $k_g\equiv 0$ 을 언급하면

원의 곡률은 $\frac{1}{r}$ 임을 언급하면

$k_n\equiv\frac{1}{r}$ 또는 $k_n\equiv-\frac{1}{r}$ 의 답 중 어느 하나만 구해도

(\equiv 대신 $=$ 로 써도 점수를 줄 수도 있다.)

26. ①

X 는 단위속력곡선이므로 $X(t)$ 의 곡률 κ 는 $\kappa=\|X''(t)\|=\frac{a}{a^2+1}$.

<곡면>

1. 존재하지 않는 함수에 관한 미분법은 존재하지 않는다.

해당 문항에서는 측지곡률 조건을 이용하면 함수 f(x)를 구할 수 있습니다. 비록 구한 f(x)가 일부 구간에서 첫 번째 문장의 조건을 만족시키지 않지만 이러한 상황이 f(x)를 구하거나 문항 전체를 해결하는 데 영향을 주지는 않습니다.

다만 $f(x)$ 를 구한 후에 구한 $f(x)$ 가 첫 번째 문장의 조건을 만족하지 않는다는 사실을 인지한 경우 더 이상 문제 풀이를 진행하지 못할 수 있다는 점과 서술형 평가의 특성 및 채점의 공정성, 객관성을 고려하여 채점 기준에 반영하기로 했습니다.

2.

$$X(0, \frac{\pi}{4}) = (1, \sqrt{2}, \sqrt{2}) = P \text{에서 } X_u = (2, 0, 0), X_v = (0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}) \text{이므로}$$
$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, -1), \text{ 접평면의 방정식 } y + z = 2\sqrt{2}.$$

P에서 $E = 4, F = 0, G = 4, L = -2, M = 0, N = 2$ 이므로

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{4}, H = \frac{1}{2} \cdot \frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2} = 0.$$

3.

M 은 $x^2 + 4y^2 = 4$ 를 x 축으로 회전한 회전면이다.

M 의 조각사상 $X(u, v) = (2\cos u, \sin u \cos v, \sin u \sin v)$.

$$X\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \left(\sqrt{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{에서}$$
$$L = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, M = 0, N = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}},$$
$$E = \frac{5}{2}, F = 0, G = \frac{1}{2} \text{이므로}$$
$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{16}{25}.$$

M 의 경계 $\alpha_1 = X(u, 0), \alpha_2 = X\left(u, \frac{\pi}{3}\right), \alpha_3 = X\left(\frac{\pi}{2}, v\right), \alpha_4 = X\left(\cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}, v\right)$.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 는 측지선이다.

외각합 $\sum e_j = 2\pi, \chi(M) = 4 - 4 + 1 = 1$.

가우스-보네 정리에 따라

$$\iint_M K dA = 2\pi\chi(M) - \int_{\partial M} \kappa_g ds - \sum e_j = \frac{\pi}{3\sqrt{2}}.$$

4. $\gamma(t) = \left(-\frac{1}{2} + \cosh t, \frac{1}{2} + \sinh t, 1 - \cosh t - \sinh t\right)$ 라 하면 $p = \gamma(0)$.

$\gamma'(0) = (0, 1, -1), \gamma''(0) = (1, 0, -1), \gamma' \times \gamma''(0) = (-1, -1, -1)$.

$X(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$ 라 하면 $p = X\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 에서 $U = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)$.

그러므로 $\kappa_g = \kappa BU = -\frac{1}{2\sqrt{6}}, \kappa_n = \frac{\gamma'' \cdot U}{\|\gamma'\|^2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$

(다른 풀이)

M 의 조각사상 $X(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$ 라 하면 p 에서

$$L = \frac{2}{\sqrt{3}}, M = 0, N = -\frac{2}{\sqrt{3}}, E = 2, F = -1, G = 2.$$

M, N 의 p 에서 단위법벡터를 각각 U_M, U_N 라 하면

$$U_M = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1), U_N = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$

γ 의 p 에서 단위접선벡터 T 라 하면 $T \parallel U_M \times U_N \parallel -\frac{1}{\sqrt{2}}X_v$ 이므로

$$\kappa_n = \frac{\Pi}{I} = \frac{N}{G} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

γ 의 곡률, 단위주법선벡터를 각각 κ, N 라 하면

$$\kappa N = -\frac{1}{\sqrt{3}}U_M + \kappa_g(U_M \times T) \text{이므로}$$
$$0 = \kappa(N \cdot U_N) = -\frac{1}{\sqrt{3}}(U_M \cdot U_N) + \kappa_g(U_M \times T) \cdot U_N, \kappa_g = -\frac{1}{2\sqrt{6}}.$$

5. $\frac{3}{4}, 2$

주곡률 κ_1, κ_2 라 하고 κ_1 에 대한 주방향을 e 라 하자.

오일러 공식에 따라

$$\frac{11\pi}{8} = \int_0^\pi \kappa_n(\theta) d\theta = \int_0^\pi \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{2}(\kappa_1 + \kappa_2), \kappa_1 + \kappa_2 = \frac{11}{4}.$$
$$K = \kappa_1 \kappa_2 = \frac{3}{2} \text{이므로 } \kappa_1, \kappa_2 \text{는 } x^2 - \frac{11}{4}x + \frac{3}{2} = 0 \text{의 근 } \frac{3}{4}, 2.$$

6. M 의 조각사상 $X(u, v) = ((u^4 - 2u^2 + 5)\cos v, (u^4 - 2u^2 + 5)\sin v, u)$.

S 의 경계는 M 과 평면 $z = \pm 1$ 의 교선

$$\alpha_1(t) = (4\cos t, 4\sin t, -1), \alpha_2(t) = (4\cos t, 4\sin t, 1).$$

S 의 경계에서 측지곡률 $\kappa_g = \frac{(\alpha' \times \alpha'') \cdot U}{\|\alpha'\|^3} = 0.$

* $B \cdot U = 0$

외각은 없으며, $\chi(S) = 4 - 6 + 2 = 0$. 가우스-보네 정리에 따라

$$\iint_S K dA = 2\pi\chi(S) - \int_{\partial S} \kappa_g ds - \sum e_j = -\int_{\alpha_1} \kappa_g ds - \int_{\alpha_2} \kappa_g ds = 0.$$

7.

$x(1, 2) = P = (3, -3, 2)$ 에서 $x_u = (2, 1, 2), x_v = (1, -4, 1), x_u \times x_v = (9, 0, -9)$

접평면의 방정식 $0 = (1, 0, -1) \cdot (x - 3, y + 3, z - 2), x - z = 1$.

점 P에서 $E = 9, F = 0, G = 18, L = \sqrt{2}, M = -\frac{1}{\sqrt{2}}, N = 0$ 이므로

$$H = \frac{1}{2} \cdot \frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2} = \frac{L}{2E} = \frac{\sqrt{2}}{18}.$$

* 다른 설명

모양연산자 $S = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{9} & -\frac{1}{9\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{18\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$

$$H = \frac{1}{2} \text{tr} S = \frac{\sqrt{2}}{18}, K = \det S = \frac{1}{18^2}, \kappa_1, \kappa_2 = \frac{\sqrt{2} \pm 1}{18}.$$

8. $d = \frac{3}{2}, K = 1$

가정에 의해 점 p 에서 M 과 H 의 단위법벡터는 평행하므로

$$\nabla(z - \frac{1}{4}(x^4 + y^4)) = k \cdot \nabla(x + y - z - d) \text{인 } k \in \mathbb{R} \text{ 있다.}$$

이때 $k = -1, -x^3 = -1, -y^3 = -1,$

$x = 1, y = 1, z = \frac{1}{2}$ 에서 $d = \frac{3}{2}. (z \neq 1)$

* 점 p 에서 곡면 M 의 접평면이 H 이다.

① \mathbb{R}^2 에서 접한다. \Leftrightarrow 접선이 같다.

② \mathbb{R}^3 에서 접한다. \Leftrightarrow 접평면이 같다.

한편, M 의 매개변수표현 $X(u, v) = (u, v, \frac{1}{4}(u^4 + v^4)),$

$X(1, 1) = p$ 에서 $E = 2, F = 1, G = 2, L = \sqrt{3}, M = 0, N = \sqrt{3},$

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = 1 = \kappa_1 \kappa_2.$$

* $H = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$ 이므로

주요곡률 κ_1, κ_2 는 $x^2 - \frac{4}{\sqrt{3}}x + 1 = 0$ 의 근이다.

따라서 $x = \frac{2 \pm 1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}.$

* 모양연산자 S 일 때, $K = \det S, H = \frac{1}{2} \cdot \text{tr} S.$

9. $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{6}$

$X(1,0)=p$ 에서

$X_u=(1,0,-1),\ X_v=(0,1,0),\ X_u\times X_v=(1,0,1),\ U=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1),$

$X_{uu}=(0,0,2),\ X_{uv}=(0,1,0),\ X_{vv}=(-1,0,0),$

$E=2,\ F=0,\ G=1,\ L=\sqrt{2},\ M=0,\ N=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로

$\kappa_1=\frac{L}{E}=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \kappa_2=\frac{N}{G}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.\ (\kappa_1>\kappa_2)$

w 는 접벡터 $1X_u+1X_v$ 와 평행하므로 w 방향 법곡률

$\kappa_n(w)=\frac{\text{II}}{\text{I}}=\frac{\sqrt{2}+0-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2+0+1}=\frac{\sqrt{2}}{6}.$

* 다른 설명

$F=M=0$ 이므로 주벡터 $X_u,\ X_v$ 이다.

X_u 와 w 의 사잇각 θ 라 할 때, $X_u\cdot w=\frac{2}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}\cos\theta.$

오일러 공식에 의해 w 방향 법곡률

$\kappa_n(w)=\kappa_1\cos^2\theta+\kappa_2\sin^2\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=\frac{1}{3\sqrt{2}}.$

* 주어진 곡면은 경선 $(u,0,\frac{1}{u})$ 을 z 축 회전한 회전면이며,
곡면의 방정식 $(x^2+y^2)z^2=1$ 이다.

10. $\gamma(\theta)=(1+\cos\theta,\sin\theta,\sqrt{2-2\cos\theta}),\ \kappa_g=1$

S_2 의 매개변수표현 $(1+\cos\theta,\sin\theta,z)$ 을 S_1 에 대입하면
 $(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta+z^2=4,\ z=\sqrt{2-2\cos\theta}=(2-2\cos\theta)^{1/2}.$

$\gamma(\theta)=(1+\cos\theta,\sin\theta,(2-2\cos\theta)^{1/2})=(1+\cos\theta,\sin\theta,2\sin\frac{\theta}{2}).$

$\gamma(\pi)=(0,0,2)$ 에서 $\nabla(x^2+y^2+z^2)|_{(0,0,2)}=(0,0,4),\ U=(0,0,1).$

$\gamma'(\pi)=(0,-1,0),\ \gamma''(\pi)=(1,0,-\frac{1}{2}),\ \gamma'(\pi)\times\gamma''(\pi)=(\frac{1}{2},0,1),$

그러므로 측지곡률 $\kappa_g=\frac{(\gamma'(\pi)\times\gamma''(\pi))\cdot U}{\|\gamma'(\pi)\|^3}=1.$

* $\kappa_n=\kappa N\cdot U=\frac{\alpha''\cdot U}{\|\alpha'\|^2},\ \kappa_g=\kappa B\cdot U=\frac{(\alpha'\times\alpha'')\cdot U}{\|\alpha'\|^3}.$

* S_1 위 에서 $\begin{cases}\kappa_n=-\frac{1}{2},\\ \kappa_g=1\end{cases},\ S_2$ 위 에서 $\begin{cases}\kappa_n=-1\\ \kappa_g=-\frac{1}{2}\end{cases}$ 이며,

$U_{S_1}=(0,0,1)\perp(-1,0,0)=U_{S_2}$ 이다. (사잇각 $\frac{\pi}{2}$)

11. $\kappa_1=0,\ \kappa_2=\frac{\sqrt{15}}{3},\ \kappa=\frac{16\sqrt{15}}{75}$

원뿔은 회전면이므로 점 p 에서 주곡률은 경선·위선 법곡률.

점 p 에서 경선(모선) \overline{pq} 의 법곡률 $\kappa_1=0,$

점 p 에서 위선은 반지름 $\frac{3}{4}$ 인 원이므로

단위법벡터 U 가 원뿔의 외부방향을 향한다고 정할 때,
위선의 단위주법선벡터 N 과 U 의 사잇각 α 라 하자.

위선방향 법곡률 $\kappa_2=\frac{4}{3}N\cdot U=\frac{4}{3}\cos\alpha=\frac{4}{3}\cos(\pi-\alpha)=-\frac{\sqrt{15}}{4}.$

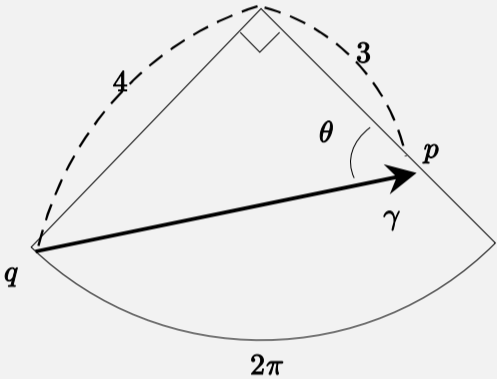
γ 의 접벡터 γ' 과 경선이 이루는 각을 θ 라 하면 $\cos\theta=\frac{3}{5}.$

오일러 공식에 의해 점 p 에서 γ 의 법곡률

$\kappa_n=\kappa_1\cos^2\theta+\kappa_2\sin^2\theta=-\frac{16\sqrt{15}}{75},$

γ 의 측지곡률 $\kappa_g=0$ 이므로 $\kappa=|\kappa_n|=\frac{16\sqrt{15}}{75}.$

* 조각사상 $X(u,v)=(u\cos v,u\sin v,\sqrt{15}(1-u))$ 일 때,
 $p=X(3/4,0),\ q=X(1,0),$ 주곡률까지는 계산할 수 있다.
* γ 는 측지선이므로 평면에 그려지면 직선이다.
* 원뿔은 평면과 국소등장적($K=0$)이므로 평면에 그릴 수 있다.
(전개도)



12. 회전면 M 의 조각사상 $X(u, v) = (\frac{(u^2 + v^2)^2}{4}, u, v)$.

$X(u, 0) = p$ 에서 $X_u = (u^3, 1, 0), X_v = (0, 0, 1), U = \frac{1}{\sqrt{1 + u^6}}(1, -u^3, 0),$

$X_{uu} = (3u^2, 0, 0), X_{uv} = \mathbf{0}, X_{vv} = (u^2, 0, 0),$

$E = 1 + u^6, F = 0, G = 1, L = \frac{3u^2}{\sqrt{1 + u^6}}, M = 0, N = \frac{u^2}{\sqrt{1 + u^6}}.$

$K(u) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{LN}{EG} = \frac{3u^4}{(1 + u^6)^2}.$

$F = M = 0$ 이므로 모양연산자 $\begin{pmatrix} EF \\ FG \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} LM \\ MN \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L/E & 0 \\ 0 & N/G \end{pmatrix}$ 의

고유벡터는 $(1, 0), (0, 1)$.

따라서 $0X_u + 1X_v = X_v = (0, 0, 1)_p$ 는 주벡터이다.

이에 대응하는 주곡률을 κ_1 라 하면 오일러 공식에 의해

$\kappa_n(w_p) = \cos^2 \frac{\pi}{6} \kappa_1(u) + \sin^2 \frac{\pi}{6} \kappa_2(u).$

그러므로 $ab = \frac{3}{16}.$

* $X(u, v) = (\frac{u^4}{4}, u \cos v, u \sin v)$ 일 때, $X(u, 0) = p$ 에서

$E = 1 + u^6, F = 0, G = u^2, L = 3u^2(1 + u^6)^{1/2}, M = 0, N = u^2(1 + u^6)^{1/2}$

M 은 회전면($F = M = 0$)이므로 X_u, X_v 는 주벡터이고

$(0, 0, 1)_p \parallel X_v, X_v$ 에 대응하는 주곡률 $\kappa_1(u)$ 라 하면

오일러 공식에 의해 $\kappa_n(w_p) = \cos^2 \frac{\pi}{6} \kappa_1(u) + \sin^2 \frac{\pi}{6} \kappa_2(u).$

13. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

M 은 곡선 $\alpha(u) = (u, 0, \frac{1}{2}u^2)$ 을 z 축으로 회전한 회전면.

$X_u = (\cos v, \sin v, u), X_v = (-u \sin v, u \cos v, 0),$

$X_u \times X_v = (-u^2 \cos v, -u^2 \sin v, u),$

$U = \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}}(-u \cos v, -u \sin v, 1).$

각 경계의 매개변수표현은

위선 $\alpha_1(t) = (\cos t, \sin t, \frac{1}{2}) \quad (0 \leq t \leq \pi),$

경선 $\alpha_2(t) = (t, 0, \frac{1}{2}t^2) \quad (-1 \leq t \leq 1)$ (측지선).

각 측지곡률 $\frac{(\alpha_1' \times \alpha_1'') \cdot U_{\alpha_1}}{\|\alpha_1'\|^3} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{(\alpha_2' \times \alpha_2'') \cdot U_{\alpha_2}}{\|\alpha_2'\|^3} = 0,$

$\int_{\partial S} \kappa_g ds = \int_{\alpha_1} \kappa_g ds = \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{2}} ds = \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{2}} \|\alpha_1'\| dt = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$

* α_1 의 법곡률 $\kappa_n = \kappa \cdot NU = 1 \cdot \cos \alpha = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

* α_2 의 법곡률 $\kappa_n = \frac{\alpha_2'' \cdot U_{\alpha_2}}{\|\alpha_2'\|^2} = \frac{1}{(1 + t^2)^2}$

* 가우스-보네 정리로 풀 수도 있다.

$\iint_M K dS = \pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \chi(M) = 3 - 3 + 1 = 1$

$\sum_p \varepsilon_p = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi,$ (경선과 위선은 직교)

* M 은 경선 $(x, 0, \frac{1}{2}x^2)$ 을 z 축 회전한 회전면

* M 의 방정식 $x^2 + y^2 = 2z$

14. ①

* 원환면 T 는 xz -평면의 원 $(x - 2)^2 + z^2 = 1$ 을 z 축을 기준으로 회전하여 얻은 회전면이다.

T 의 매개변수표현

$X(u, v) = ((2 + \cos u) \cos v, (2 + \cos u) \sin v, \sin u)$
 $(0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi)$

$X(\pi, 0) = (1, 0, 0) = \alpha(0)$ 에서

$X_u = (0, 0, -1), X_v = (0, 1, 0), X_u \times X_v = (1, 0, 0).$

한편 $\nabla(y + z) = (0, 1, 1)$ 이므로

$\alpha'(0)$ 의 방향은 $(1, 0, 0) \times (0, 1, 1) = (0, -1, 1)$ 과 평행.

이때 $(0, -1, 1) = -X_u - X_v$ 이므로 $\frac{\text{II}}{\text{I}}$ 를 구하자.

$E = 1, F = 0, G = 1, L = 1, M = 0, N = -1$ 이므로

$\frac{\text{II}}{\text{I}} = \frac{L(-1)^2 + 2M(-1)(-1) + N(-1)^2}{E(-1)^2 + 2F(-1)(-1) + G(-1)^2} = 0.$

* 곡면 T 를 평면 P 로 잘랐을 때 곡선이 생겼다고 할 때,
곡선의 접선벡터, 주법선벡터는 P 에 포함되며,
곡선의 종법선벡터는 T 의 법벡터와 평행하다.
특히, 접선벡터는 T 의 법벡터와 P 의 법벡터의 외적과 평행.

15. ④

ㄱ. f 의 표현행렬 A 는 직교행렬이며 A^{-1} 도 직교행렬이므로 f^{-1} 도 등장사상된다. (회전/대칭변환 행렬)

ㄴ. 등장사상은 가우스곡률 보존, S 의 모든 점에서 가우스곡률 0이다. 등장사상있으면 위상동형된다.

ㄷ. 가우스곡률, 측지곡률을 보존한다. $(u, u^2, 1)$ 의 $(0, 0, 0)$ 에서 평균곡률 $H \neq 0$.

16. ②

M 의 매개변수표현

$X(u, v) = (u, 2\cosh\left(\frac{u}{2}\right)\cos v, 2\cosh\left(\frac{u}{2}\right)\sin v),$
 $(u \in \mathbb{R}, 0 \leq v \leq 2\pi).$

$E = 1 + \sinh^2 \frac{u}{2} = \cosh^2 \frac{u}{2}, F = 0, G = 4\cosh^2 \frac{u}{2},$

$L = -\frac{1}{\cosh \frac{u}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cosh \frac{u}{2} = -\frac{1}{2},$

$M = 0,$

$N = \frac{1}{\cosh \frac{u}{2}} \cdot 2\cosh \frac{u}{2} = 2.$

$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{LN}{EG} = \frac{-1}{4\cosh^4 \frac{u}{2}}$ 이므로

임의의 \mathbf{p} 에 대하여 $-\frac{1}{4} \leq K(\mathbf{p}) < 0$ (쌍곡점).

거리동형은 가우스곡률을 보존하므로 M 은 평면($K = 0$)과 동형이 아니다.

* $y = f(x)$ 를 x 축 중심 회전한 회전면일 때 $K = \frac{-f''}{f[1 + (f')^2]^2}.$

17.

(Ⅰ) α 위의 모든 점에서 Y 의 가우스곡률 0
(가)와 [정리 1]에 의해 $N_X'(t)=k\alpha'(t)$ 인 $k\in\mathbb{R}$ 있다.
 $\alpha(t)$ 의 X, Y 에서 단위법벡터 $N_X(t), N_Y(t)$ 라 하자.
 $\alpha'(t)\perp N_X(t), \alpha'(t)\perp N_Y(t)$ 이므로 $\alpha'(t)$ 는 $N_X(t)\times N_Y(t)$ 와 평행하다.
두 곡면 X, Y 가 수직으로 만나므로 $N_X(t)\cdot N_Y(t)=0\in\mathbb{R}$, 양변 미분하면
 $0=N_X'(t)\cdot N_Y(t)+N_X(t)\cdot N_Y'(t)$
 $=k\alpha'(t)\cdot N_Y(t)+N_X(t)\cdot N_Y'(t)$
 $=N_X(t)\cdot N_Y'(t).$
즉, $N_Y'(t)\perp N_X(t)$.
한편 $\|N_Y(t)\|=1$ 이므로 $1=N_Y(t)\cdot N_Y(t)$, 양변 미분하면 $N_Y'(t)\cdot N_Y(t)=0$.
즉, $N_Y'(t)\perp N_Y(t)$.
 $N_Y'(t)\perp N_X(t), N_Y'(t)\perp N_Y(t)$ 이므로 $N_Y'(t)$ 는 $N_X(t)\times N_Y(t)$ 와 평행하다.
 $N_Y'(t)$ 는 $\alpha'(t)$ 와 평행하므로 $N_Y'(t)=l\cdot\alpha'(t)$ 인 $l\in\mathbb{R}$ 있다.
그러므로 [정리 1]에 의해 $\alpha(t)$ 는 Y 의 주요곡선이다.
(나)에 의해 $\alpha''(t)$ 는 $N_X(t)$ 와 평행하고 $N_X\perp N_Y(t)$ 이므로 $\alpha''(t)\perp N_Y(t)$.
 Y 의 곡선으로서 $\alpha(t)$ 의 법곡률 $\frac{\alpha''(t)\cdot N_Y(t)}{\|\alpha'(t)\|^2}=0$.
주요곡선 $\alpha(t)$ 의 법곡률 0이므로 α 위의 모든 점에서 Y 의 가우스곡률 0.

(Ⅱ) (X,\mathfrak{I}) 에서 $\overline{A}=X$
 $x\in X$ 를 포함하는 개집합 $G\in\mathfrak{I}$ 라 하자.
 $G\in\mathfrak{I}_A$ 인 경우 $G\cap A\neq\emptyset$.
 $G\notin\mathfrak{I}_A$ 인 경우 $G=X-F$ 인 (A,\mathfrak{I}_A) 의 컴팩트 집합 F 있다.
(다)에 의해 A 는 컴팩트가 아니므로 $F\subsetneq A$, 즉 $A-F\neq\emptyset$.
 $A\cap G=A\cap(X-F)=A-F\neq\emptyset$.
그러므로 $X\subset\overline{A}$ 가 되어 $\overline{A}=X$, A 는 X 에서 조밀.

(Ⅲ) $f|_A$ 가 상수함수이면 f 는 상수함수
보통위상공간 \mathbb{R}^3 는 거리공간이므로 T_2 -공간이며,
따라서 부분공간 Y 도 T_2 -공간이다.
 $f|_A$ 가 상수함수이므로 $f(A)=\{k\}$ 인 $k\in Y$ 있다.
상수함수 $g:X\rightarrow Y, g(x)=k$ 라 하면
임의의 Y -개집합들의 g 에 의한 역상은 \emptyset 또는 X 이므로 g 는 연속함수.
 $F=\{x\in X|f(x)=g(x)\}$ 라 하면 [정리 2]에 의해 F 는 폐집합이다.
임의의 $t\in I$ 에 대하여 $f(\alpha(t))=k=g(\alpha(t))$ 이므로 $A\subset F$
(Ⅱ)에 의해 $X=\overline{A}\subset\overline{F}=F$ 이므로 $F=X$.
그러므로 $f=f|_X=g$ 가 되어 f 는 상수함수이다.

18. ④

α 는 반지름 $\sqrt{2}$ 인 $z=2$ 위의 원이므로
 α 의 매개변수표현 $\alpha(t)=(\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t, 2), \alpha$ 곡률 $\kappa=\frac{1}{\sqrt{2}},$
 $\nabla(z^2-x^2-y^2-2)=(-2x, -2y, 2z),$
 α 의 S 위의 법벡터 $U=\frac{1}{\sqrt{3}}(\cos t, \sin t, \sqrt{2}),$
 S 위에 놓인 α 의 법곡률 $\kappa_n=\frac{\alpha''\cdot U}{\|\alpha'\|^2}=\frac{1}{\sqrt{6}},$
 $\kappa^2=\kappa_n^2+\kappa_g^2$ 에서 $|\kappa_g|=\frac{1}{\sqrt{3}}.$

* 다른 설명: $\kappa_g=\frac{(\alpha'\times\alpha'')\cdot U}{\|\alpha'\|^3}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$

* 다른 풀이: S 의 매개변수표현
 $X(u, v)=\sqrt{2}(\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, \cosh u)$
 $X_u=\sqrt{2}(\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, \sinh u),$
 $X_v=\sqrt{2}(-\sinh u \sin v, \sinh u \cos v, 0),$
 $E=2\cosh^2 u+2\sinh^2 u=2\cosh 2u, F=0, G=2\sinh^2 u$
 $L=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cosh 2u}}, M=0, N=\frac{\sqrt{2}\sinh^2 u}{\sqrt{\cosh 2u}}.$
 $\cosh u=\sqrt{2}, \sinh u=1, v=t$ 일 때
 $X_v=\sqrt{2}(-\sqrt{2}\sin t, \sqrt{2}\cos t, 0)$ 이므로
 $\alpha'=(-\sqrt{2}\sin t, \sqrt{2}\cos t, 0)=X_v.$
 $\kappa_n(\alpha')=\frac{\text{II}}{\text{I}}=\frac{N\cdot 1^2}{G\cdot 1^2}=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\cosh 2u}}=\frac{1}{\sqrt{6}}, \kappa=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로 $\kappa_g=\frac{1}{\sqrt{3}}.$

19.

• X 는 T_2 -공간
 $f:D\rightarrow Y, f(x, y)=\mathbf{x}(2\pi x, 2\pi y)$ 라 하면 f 는 연속, 전사이며,
 $(x, y)\sim(x', y')\Leftrightarrow \mathbf{x}(2\pi x, 2\pi y)=\mathbf{x}(2\pi x', 2\pi y')\Leftrightarrow f(x, y)=f(x', y')$ 이다.
 f 가 폐사상임을 보인다.
 D 는 유계폐집합이므로 하이네-보렐 정리에 의해 cpt이고,
 f 는 연속이므로 $f(D)=Y$ 는 cpt이다.
 $F\subset D$ 인 폐집합 F 에 대하여 D 는 cpt이므로 F 도 cpt이다.
따라서 $f(F)$ 는 Y 에서 cpt이며 원환면 Y 는 T_2 -공간이므로
 $f(F)$ 는 Y 에서 폐집합이 된다. f 는 폐사상.
따라서 f 는 상사상이므로 $X=D/\sim\cong Y$ (위상동형).
 Y 가 T_2 -공간이므로 상공간 X 도 T_2 -공간이다.

• X, Y 의 가우스곡률 비교
상공간 X 의 가우스곡률은 정의할 수 없으며, X 는 $r>1$ 인 실수 r 에 대해
 $X(u, v)=((r+\cos u))\cos v, (r+\cos u)\sin v, \sin u)$ 와 위상 동형이다.
이때 가우스곡률 $K=\frac{\cos u}{r+\cos u}$ 는 r 의 값에 따라 변하며 $r=2$ 일 때 Y 의 가
우스곡률과 같다. 즉, 가우스곡률이 서로 다르게 주어질 수 있다.

• 가우스-보네 정리의 의미
가우스-보네 정리에 따라 컴팩트 유향 곡면 X, Y 에 대하여
$$\iint_X KdS=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos u}{r+\cos u}(r+\cos u)dudv=0=2\pi\chi(X)$$
이므로 $\chi(X)=0$.
$$\iint_Y KdS=0=2\pi(v-e+f)$$
이므로 $\chi(Y)=0$.
위상불변량 $\chi(X)=\chi(Y)$ 이므로 X 와 Y 는 위상적 구조가 일치한다(위상동형).

가우스-보네 정리는 두 곡면의 가우스곡률이 다르게 주어질 수 있더라도
전가우스곡률이 같으면 두 곡면의 위상적 구조가 일치함을 의미한다.

20. ⑤

직선 $l_0(v)=(0,v,2v)$ 를 곡선 $c(u)=(u,0,u^3)$ 을 따라 평행이동하면

$X(u,v)=l_0(v)+c(u)=(u,v,u^3+2v).$

$E=\|c'(u)\|^2=1+9u^4, \ F=c'(u)\cdot l_0'(v)=6u^2, \ G=\|l_0'(v)\|^2=5.$

$L=\frac{6u}{\sqrt{9u^4+5}}, \ M=0, \ N=0.$

$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=0, \ H=\frac{EN+GL-2FM}{2(EG-F^2)}=\frac{15u}{(9u^4+5)^{3/2}}.$

$\begin{pmatrix}EF\\FG\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}LM\\MN\end{pmatrix}$ 의 고유치 0, $2H$, 고유벡터 $(0,1), (1,0).$

주곡률: $0, \frac{30u}{(9u^4+5)^{3/2}}.$

주방향: $0\cdot X_u+1\cdot X_v=X_v=l_0'(v),$

$1\cdot X_u+0\cdot X_v=X_u=c'(u)=(1,0,3u^2).$

p 에서 l_0 의 방향 $l_0'(p)$ 은 M 의 주방향이므로 l_p 는 M 의 주요곡선도 된다.

l_0 와 평행인 직선 $l_p(t)$ 으로서 M 에서 법곡률(=주곡률) 0이므로 l_p 는 M 의 접근 곡선이다.

l_p 는 직선이므로 곡률 $\kappa=0$ 이다. M 에서 l_p 의 측지곡률 κ_g 라 하면

$0^2=\kappa_n^2+\kappa_g^2$ 에서 $\kappa_g=0$ 이므로 l_p 는 M 의 측지선도 된다.

가우스-보네 정리에 의해

$$\iint_{\Delta}KdA+\int_{\partial\Delta}\kappa_gds+\sum_{i=1}^3e_i$$
$$=\iint_{\Delta}0dA+\int_{\partial\Delta}0ds+\sum_{j=1}^3(\pi-i_j)$$
$$=3\pi-\sum\text{내각}=2\pi\chi(\Delta)=2\pi\cdot(3-3+1)=2\pi\text{이므로 내각의 합 }\pi.$$

21. ①

오일러 공식에 의해 v 방향의 법곡률 $\kappa_n(v)=1\cdot\cos^2\frac{\pi}{3}+\frac{1}{3}\cdot\sin^2\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}.$

* 오일러의 공식

곡면 M 위의 점 p 에서 주곡률 $\kappa_1, \ \kappa_2$, 주방향 $e_1, \ e_2$ 에 대하여 $u=e_1\cos\theta+e_2\sin\theta$ 의 법곡률 $\kappa_n(u)$ 는

$\kappa_n(u)=\kappa_1\cos^2\theta+\kappa_2\sin^2\theta.$

22.

(1) $\mathbf{x}(1,1)$ 에서 $\mathbf{x}_u=(1,2,2), \ \mathbf{x}_v=(2,1,-2),$

$\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v=(-6,6,-3)$ 이므로 $\vec{n}=\frac{1}{3}(-2,2,-1).$

(2) xy -평면의 (정규직교)기저 $\{(1,0,0), (0,1,0)\}$ 이므로

\vec{n} 을 xy -평면에 정사영한 벡터를 p 라 하면

$p=\text{proj}_{(1,0,0)}\vec{n}+\text{proj}_{(0,1,0)}\vec{n}=-\frac{2}{3}(1,0,0)+\frac{2}{3}(0,1,0)=(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},0).$

$\cos\alpha=\frac{\vec{n}\cdot p}{\|\vec{n}\|\|p\|}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$

* 다른 설명

xy -평면의 법벡터 $(0,0,1)\in\langle(1,0,0), (0,1,0)\rangle^{\perp},$

$\vec{n}\cdot(0,0,1)=\|\vec{n}\|\|(0,0,1)\|\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)$ 에서 $-\frac{1}{3}=\sin\alpha, \ \cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$

23.

$\mathbf{x}(0,0)=(2,0,1)$ 에서 $\mathbf{x}_{\theta}=(0,2,0), \ \mathbf{x}_{\phi}=(1,0,0),$

$\mathbf{x}(0,0)$ 에서 접평면의 법벡터 $(0,0,1),$

$(x-2,y-0,z-1)\cdot(0,0,1)=0$ 이므로 접평면의 방정식 $z=1.$

$\sin^2\phi+\cos^2\phi=1$ 에서 $\cos\phi=1$ 이면 $\sin\phi=0$ 이므로

$\mathbf{x}(\theta,\cos^{-1}(1))=(2\cos\theta,2\sin\theta,1)$ 이므로 교선의 방정식 $x^2+y^2=4, \ z=1.$

* 원환면 \mathbf{x} 을 평면 $z=1$ 로 자르면 반지름 2인 원(위도선)

* 곡면 \mathbf{x} 는 곡선 $(x-2)^2+z^2=1$ 을 z 축 회전하여 얻은 회전면이다.

* \mathbf{x} 의 방정식 $(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+z^2=1,$

24.

$$\iint_G\cos^2\frac{\theta}{2}dS=\iint_G\frac{1}{2}+\frac{\cos\theta}{2}dS$$
$$=\frac{1}{2}\iint_GdS+\frac{1}{2}\iint_DdA$$
$$=\frac{1}{2}S(G)+\frac{1}{2}A(D)$$

* 곡면 $M:\mathbf{x}(u,v):D\rightarrow\mathbb{R}^3$ 위의 호의 길이 l , 영역의 넓이 S

① $l=\int_a^b\|\mathbf{x}'(u(t),v(t))\|dt$

$=\int_a^b\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right)+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}dt$

② $S=\iint_M1\cdot dS=\iint_D\|\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v\|dA$

$=\iint_D\sqrt{EG-F^2}dA=\iint_D\|\nabla f\|dA$

($f(x,y,z)=0$ 는 M 의 음함수 표현)

25.

하위 영역	배점	예상정답율(%)	관련사고영역	출제자
고등미적분학	5	40	지식 및 이해	방승진
출제 내용	박을룡/김영원/고성은(역). Thomas/Finney. Calculus and			
관련자료	Analytic Geometry. pp.995-1004			

$f(x,y)=1-x^2-y^2$ 라 두면

$\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}=\sqrt{4x^2+4y^2+1}=\sqrt{4(1-z)+1}=\sqrt{5-4z}$ 이고

S 를 xy 평면에 내린 정사영은 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq1\}$ 이므로 주어진 적분은

$\iint_S\frac{1}{\sqrt{5-4z}}dS=\iint_D\frac{1}{\sqrt{5-4z}}\sqrt{5-4z}dA=\iint_DdA=\pi$ 이다.

* 채점기준

$f(x,y)=1-x^2-y^2$ 라 두고

$\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}=\sqrt{4x^2+4y^2+1}=\sqrt{4(1-z)+1}=\sqrt{5-4z}$ 를 계산하면……2점

영역 D 를 구하면1점

적분값을 구하면1점

26.

폐곡면 S 는 컴팩트 곡면을 가지므로 반지름 r 인 구면으로 덮을 수 있다.

구면에 접하는 S 의 점 p 라 하자. 구면의 가우스 곡률은 $\frac{1}{r^2}$ 이고,

p 에서 S 는 구면보다 더 많이 굽어있으므로

p 에서 가우스곡률 $K(p)\geq\frac{1}{r^2}>0$ 이다.

* 임의의 컴팩트 곡면은 가우스 곡률이 양수인 점 있다.

27.

하위 영역	배점	예상 정답율(%)	출제근거 (이유)
고등수학(미분기하학)	4	50	B. O'Neill. Elementary Differential Geometry. pp.380-390.

가우스-보네 정리에 의해

$\int_{S^1\times S^1}KdA=2\pi\chi(S^1\times S^1)$

단, $\chi(S^1\times S^1)$ 은 $S^1\times S^1$ 의 오일러 지표이다. 2점

(단, 식 없이 가우스-보네 정리만 언급했을 경우 부분점수 가능, $\chi(S^1\times S^1)$ 의 의미는 언급하지 않아도 됨)

$S^1\times S^1$ 의 지너스 g 는 1이므로

$\chi(S^1\times S^1)=2(1-g)=2(1-1)=0$

따라서, $\int_{S^1\times S^1}KdA=0$ 3점

$K(p)$ 가 연속함수이므로 $K(p)=0$ 되는 점 $p\in S^1\times S^1$ 가 적어도 하나 존재한다. 4점

28. 유향 폐곡면 S 에 대하여 가우스-보네정리를 이용하면

$\int_S K dS=2\pi\chi(S)$ 가 성립하고 주어진 타원면 E 는 구면 S (또는 정육면체 P)

과 위상동형이므로 $\chi(S)=2$ 이다.

따라서 $\int_E K dE=2\pi\chi(E)=2\pi\chi(P)=2\pi(V-E+F)=2\pi\cdot 2=4\pi$ 이다.

* 가우스-보네 정리

① 콤팩트 곡면 M , $\iint_M K dM=2\pi\chi(M)$

② M 이 고리 h 개를 가지면 $\iint_M K dM=4\pi(1-h)$

1. $\mathfrak{I}_{\mathbb{Z}} = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}, \mathbb{Z}\}, \{0, 1, 2\}$
 $\mathfrak{I}_{\mathbb{Z}}$ 의 원소로서 A 를 포함하는 가장 큰 개집합 $\{0, 1, 2\}$.

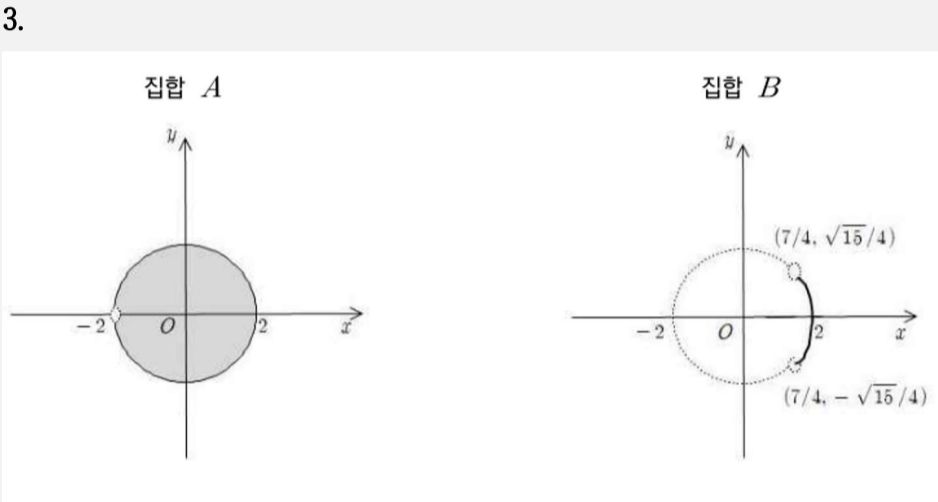
2.
여가산위상공간에서 구간 $(0, 1)$ 에 포함되는 개집합 G 라 하면
 G^c 은 가산집합이고, $(0, 1)^c \subset G^c$, $(0, 1)^c$ 은 비가산집합이므로 $G = \emptyset$.
따라서 $S^o = \emptyset$.

또한 여가산위상에서 폐집합은 가산집합이거나 전체집합이므로 $\overline{(0, 1)} = \mathbb{R}$.
보통위상공간의 기저 $\mathcal{B} = \{(a, b) \times (c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ 이므로

$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y = \sin \frac{1}{x} \right\}$ 라 할 때,

$\overline{B} = \bigcap_{F^c \in \mathcal{B}, B \subset F} F = B \cup \{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\}.$

그러므로 $\overline{S} = \mathbb{R} \times [B \cup (0, y) \mid -1 \leq y \leq 1]$.



$\|(2, 0)\| = 2, P = (x, y)$ 라 할 때

$A : \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + 2 < 4 & , \sqrt{x^2 + y^2} \neq 2 \\ \sqrt{(x-2)^2 + y^2} < 4 & , \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \end{cases}$

$= \begin{cases} x^2 + y^2 < 2^2 & , x^2 + y^2 \neq 2^2 \\ (x-2)^2 + y^2 < 4^2 & , x^2 + y^2 = 2^2 \end{cases}$

$B : \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + 2 < 1 & , \sqrt{x^2 + y^2} \neq 2 \\ \sqrt{(x-2)^2 + y^2} < 1 & , \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \end{cases}$

$= (x-2)^2 + y^2 < 1, x^2 + y^2 = 2^2$

4. $(1, 2), [1, 2], (0, 2]$

$(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$ 의 기저개집합 $f_1^{-1}(G) \cap f_2^{-1}(H) = [m, m+1) \cap (n, n+1], m, n \in \mathbb{Z}$

$(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$ 의 기저 $\mathcal{B} = \{[m, n), (m, n], (m, n), \{m\} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$

$= \{\{n\} \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{Z}\}.$

$\sqrt{2}$ 를 포함하는 개집합 $(1, 2)$ 에 대하여 $(1, 2)^c \in \mathfrak{I}$ 이므로 $(1, 2)$ 는 폐집합.
상대위상 $\mathfrak{I}_{(1, 2)} = \{(1, 2) \cap G \mid G \in \mathfrak{I}\} = \{\emptyset, (1, 2)\}$ 는 비이산위상이므로
 $(1, 2)$ 는 $((1, 2), \mathfrak{I}_{(1, 2)})$ 에서 연결이다.
따라서 $(1, 2)$ 는 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$ 에서 연결이므로 연결성분이다.

$\text{int}\left[\frac{1}{2}, 2\right] = \bigcup_{\substack{G \in \mathcal{B}, \\ G \subset [1/2, 2]}} G = [1, 2]$

$= ([\frac{1}{2}, 2]$ 를 포함하는 가장 큰 개집합)

$\overline{\left[\frac{1}{2}, 2\right]} = \left[\text{int}\left(\left[\frac{1}{2}, 2\right]^c\right)\right]^c$

$= [\text{int}((-\infty, 1/2) \cup (2, \infty))]^c$

$= [(-\infty, 0] \cup (2, \infty)]^c$

$= (0, 2]$

$= ([\frac{1}{2}, 2]$ 에 포함되는 가장 작은 폐집합)

* $\text{int}(A) = (\overline{A^c})^c, \overline{A} = [\text{int}(A^c)]^c$

5. $\frac{11}{2}, 41$

$e((1, 3), (-1, 1/2)) = \{|0-1|+|0-3|\} + \{|0-(-1)|+|0-1/2|\}$

$= 1+3+1+\frac{1}{2} = \frac{11}{2}.$

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid e((x, y), (1, 3)) < 9\}$ 의 정수점

$= \{(1, 3)\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid |x|+|y|+1+3 < 9, (x, y) \neq (1, 3)\}$

$= \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid |x|+|y| \leq 4\}, 41\text{개}.$

6. 8, $B' = \{2, 3\}$

① $k = -1, -2, -3$ 일 때,

$f^{-1}(\{-3\}) = f^{-1}(\{-2\}) = f^{-1}(\{-1\}) = \emptyset \in \mathfrak{I}_u,$

② $k = 0, 1, 2, 3$ 일 때,

$f^{-1}(\{k\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid k \leq x^2 + y^2 < k+1\}.$

(X, \mathfrak{I}) 의 기저개집합 $\{-3\}, \{-2\}, \{-1\}, \{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 2, 3\},$
 $\mathfrak{I} = \wp(\{-1, -2, -3\}) \cup \{\{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 2, 3\}\} \cup \{\emptyset\}.$

3을 포함하는 개집합은 8개 있다.
* $\{0, 1, 2, 3\} \cup G \ (G \in \wp(\{-1, -2, -3\}))$
 $\overline{B} = \{1, 2, 3\}, \{B\text{의 고립점}\} = \{1\}$ 이므로 $B' = \overline{B} - \{B\text{의 고립점}\} = \{2, 3\}.$

7. $\overline{A} = \{(x, 0) \mid 0 \leq x < 1\}, B = \left\{ \left(\frac{1}{n}, 0\right) \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$

한 점 $x \in \mathbb{R}^2, \varepsilon > 0$ 라 하자.

① $0 < \varepsilon \leq \|x\|$ 일 때,

$B_d(x, \varepsilon) = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, p) < \varepsilon\} = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid x = p\} = \{x\}.$

(원점을 제외하면 이산위상)

② $\|x\| < \varepsilon$ 일 때,

$B_d(x, \varepsilon) = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, p) < \varepsilon\}$

$= \left\{ p \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} d(x, p) = 0 < \varepsilon, p = x \\ d(x, p) = \max\{\|x\|, \|p\|\} < \varepsilon, p \neq x \end{cases} \right\}$

$= \left\{ p \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} p = x \\ p \neq x, \|x\| < \varepsilon, \|p\| < \varepsilon \end{cases} \right\}$

$= \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \|p\| < \varepsilon\}$: 원점 중심 반지름 ε 인 원

$(\mathbb{R}^2, \mathfrak{I}_d)$ 의 기저

$\mathcal{B} = \{B_d(x, \varepsilon) \mid x \in \mathbb{R}^2, \varepsilon > 0\}$

$= \{\{x\} \mid x \neq (0, 0)\} \cup \{\{x\} \mid \|x\| < \varepsilon\}$ 이므로

$\overline{A} = \bigcap_{A \subset F, F^c \in \mathcal{B}} F = \{(x, 0) \mid 0 \leq x < 1\} = [0, 1) \times \{0\} \neq [0, 1).$

$B = \left\{ \left(\frac{1}{n}, 0\right) \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0 = (0, 0)\}$: 콤팩트 무한 부분집합

$(\because) B$ 의 개폐복 $\{G_i\}_{i \in I}$ 라 하면 $0 \in G_0 \in \{G_i\}_{i \in I}$ 있다.

이때, $0 \in B_d(0, \varepsilon) \subset G_0$ 인 $\varepsilon > 0$ 있다.

$\frac{1}{N} < \varepsilon$ 인 $N \in \mathbb{N}$ 을 택하면 $n \geq N$ 일 때, $\left(\frac{1}{n}, 0\right) \in G_0.$

한편, $(1, 0), \left(\frac{1}{2}, 0\right), \dots, \left(\frac{1}{N-1}, 0\right)$ 을 포함하는

G_1, G_2, \dots, G_{N-1} 있다.

그러므로 $B \subset G_0 \cup G_1 \cup \dots \cup G_{N-1}, B$ 는 콤팩트이다.

* $(0, 0)$ 의 연결성분 $\{(0, 0)\}, (\mathbb{R}^2, \mathfrak{I}_d)$ 는 비연결공간

8.

$(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_l) \times (\mathbb{R}, \mathfrak{I}_u)$ 의 기저 $\mathcal{B} = \{[a, b) \times (c, d] \in \mathbb{R}^2 \mid a < b, c < d\}$ 이므로

$A^o = \bigcup \{G \mid G \subset A, G \in \mathcal{B}\}$

$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, x < 0, y > 0\}.$

$\overline{A} = \bigcap \{F \mid A \subset F, F^c \in \mathcal{B}\} = \{A\text{의 밀착점}\} = A.$

$b(A) = \overline{A} - A^o = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, x \geq 0 \vee y \leq 0\}.$

* $\{A\text{의 고립점}\} = \{(1, 0), (0, -1)\}$

9. $A'=\left(\frac{1}{2},1\right)$

$(\mathbb{R},\mathfrak{I})$ 의 기저 $\mathcal{B}=\{\{m\}\mid m\in\mathbb{Z}\}\cup\{(n,n+2^{-k})\mid n\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}\}$

$A'=\{x\in\mathbb{R}\mid x\in\forall G\in\mathcal{B},(G-\{x\})\cap A\neq\varnothing\}=\left(\frac{1}{2},1\right).$

* 다른 설명

$\overline{A}=[\text{int}(A^{\circ})]^c=[\text{int}((-\infty,1/2)\cup(1/2,\infty))]^c$
 $=\left[\bigcup_{m\in\mathbb{Z}}\{m\}\cup\bigcup_{n\neq 0}(n,n+1)\cup(0,1/2)\right]^c=\left[\frac{1}{2},1\right).$

$\{A\text{의 고립점}\}=\{p\in A\mid\exists G_0\in\mathfrak{I}\text{ s.t }G_0\cap A=\{p\}\}=\left\{\frac{1}{2}\right\}.$

$A'=\overline{A}-\{A\text{의 고립점}\}=\left(\frac{1}{2},1\right).$

* $\text{int}(A)=\varnothing$, $\text{b}(A)=\left[\frac{1}{2},1\right)$, $\text{ext}(A)=(-\infty,1/2)\cup[1,\infty).$

10. $|A|=9$
 $\mathfrak{I}=\{\mathbb{N}-F\mid F\text{: 유한}\},\mathfrak{I}_d\text{의 기저 }\{\{n\}\mid n\in\mathbb{N}\}.$

㉓ $1\leq n\leq 4$ 일 때, $f(n)=1$ 을 포함하는 기저 개집합 $\{1\}$ 에 대하여 $f^{-1}(\{1\})=\{1,2,3,4\}$ 는 유한집합이므로 $n\in G\subset f^{-1}(\{1\})$ 가 되는 $G\in\mathfrak{I}$ 가 존재하지 않는다.
따라서 $1\leq n\leq 4$ 일 때 불연속이다.
㉔ $5\leq n\leq 9$ 일 때, $f(n)=2$ 를 포함하는 기저 개집합 $\{2\}$ 에 대하여 $f^{-1}(\{2\})=\{5,6,7,8,9\}$ 는 유한집합이므로 $n\in G\subset f^{-1}(\{2\})$ 가 되는 $G\in\mathfrak{I}$ 가 존재하지 않는다.
따라서 $5\leq n\leq 9$ 일 때 불연속이다.
㉕ $n\geq 10$ 일 때 $f(n)=3$ 을 포함하는 기저 개집합 $\{3\}$ 에 대하여 $f^{-1}(\{3\})=\{10,11,12,\cdots\}=\mathbb{N}-\{1,2,3,\cdots,9\},$
 $n\in\mathbb{N}-\{1,2,\cdots,9\}=f^{-1}(\{3\})$ 이므로 $n\geq 10$ 일 때 연속이다.
그러므로 $|A|=9.$

11. $\overline{A\times B}=\mathbb{Z}\times\{\pm 1\},\ (A\times B)^{\circ}=\{0\}\times\{\pm 1\},\ \text{b}(A\times B)=(\mathbb{Z}-\{0\})\times\{\pm 1\}.$
 $n\in\mathbb{Z}\subset\mathbb{R}$ 에 대하여
 $f(n)=n^2\in(n^2-1,n^2+1)\in\mathfrak{I},\ f^{-1}((n^2-1,n^2+1))=\{\pm n\}\in\mathfrak{I}_1.$
따라서 \mathfrak{I}_1 의 기저 $\mathcal{B}=\{\{\pm n\}\mid n\in\mathbb{Z}\}.$

한편, $[n^2-1,n^2+1]\in\mathfrak{I}^c$ 이고, f 역상 $\{\pm n\}$ 이다.

* f 는 연속이므로 폐집합의 역상은 $(\mathbb{Z},\mathfrak{I}_1)$ 에서 폐집합

A 를 포함하는 최소 폐집합 $\overline{A}=\{0\}\cup\mathbb{Z}=\mathbb{Z},$
 B 를 포함하는 최소 폐집합 $\overline{B}=\{\pm 1\}=B$ 이므로 $\overline{A\times B}=\overline{A}\times\overline{B}=\mathbb{Z}\times\{\pm 1\}.$
 A 에 포함되는 최대 개집합(기저 개집합) $\{0\},$
 B 에 포함되는 최대 개집합(기저 개집합) $\{\pm 1\}$ 이므로
 $(A\times B)^{\circ}=A^{\circ}\times B^{\circ}=\{0\}\times\{\pm 1\}.$
 $\text{b}(A\times B)=\overline{A\times B}-\text{int}(A\times B)=(\mathbb{Z}\times\{\pm 1\})-(\{0\}\times\{\pm 1\})=(\mathbb{Z}-\{0\})\times\{\pm 1\}.$
* $A'=\{-1,-2,-3,-4,\cdots\},\ \{A\text{의 고립점}\}=A$
* $B'=B,\ \{B\text{의 고립점}\}=\varnothing$

12. ㉔
 $\neg.$ $f:(\mathbb{Q}\times\mathbb{R}-\mathbb{Q})\rightarrow\mathbb{R}-\mathbb{Q},\ f(x,y)=y$ 라 하면 f 는 전사이므로 $\mathbb{Q}\times(\mathbb{R}-\mathbb{Q})$ 의 기수(cardinal number)는 $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ 이상.
따라서 $\mathbb{Q}\times(\mathbb{R}-\mathbb{Q})$ 는 비가산집합.
 $\neg.$ $g:F\rightarrow\mathbb{Q},\ g(x)=x$ 라 정의하면 g 는 단사이므로 F 의 기수는 \mathbb{Q} 이하가 되고 \mathbb{Q} 는 가산집합이므로 F 는 가산집합이다.
 $\neg.$ $\mathbb{R}/\sim=\{[x]\mid x\in\mathbb{R}\}=\{[r],[0]\mid r\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\},$
 $h:\mathbb{R}/\sim\rightarrow\mathbb{R}-\mathbb{Q}\cup\{0\},\ h([x])=x$ 라 하면 h 는 전사이므로 \mathbb{R}/\sim 은 비가산집합이다.

13. ㉓
 $a,\ b\in\mathbb{R},\ a<b$ 라 하자.
(i) $b\leq 0,\ f^{-1}([a,b))=\varnothing\in\mathfrak{I}_1$
(ii) $0=a<b,\ f^{-1}([a,b))=(-b,b)\in\mathfrak{I}_1$
(iii) $0<a<b,\ f^{-1}([a,b))=(-b,-a)\cup[a,b)\in\mathfrak{I}_1$
이므로 $(\mathbb{R},\mathfrak{I}_1)$ 의 기저 \mathcal{B} 는
 $\mathcal{B}=\{\varnothing\}\cup\{(-b,b)\mid b>0\}\cup\{(-b,-a]\cup[a,b)\mid 0<a<b\}.$

$(-2,1)$ 에 포함되는 가장 큰 개집합 $A=(-1,1)$
 $[1,2)$ 에 포함되는 가장 큰 개집합 $B=\varnothing$
* 하한위상은 보통위상을 포함하고 $[a,b)$ 는 폐집합

14. ㉔
 $\neg.$ $A\cap A\neq\varnothing$ 이므로 \sim 은 반사적이다.
 $\neg.$ $A\cap B\neq\varnothing$ 이면 $B\cap A\neq\varnothing$ 이므로 \sim 은 대칭적이다.
 $\neg.$ $(0,2)\cap(1,3)\neq\varnothing,\ (1,3)\cap(2,3)\neq\varnothing$ 이지만
 $(0,2)\cap(2,3)=\varnothing$ 이므로 \sim 은 추이적이지 않다.
그러므로 관계 \sim 은 X 위의 동치관계가 아니다.

15. ㉑
 $\neg.$ $\text{int}(A^{\circ})=\left[\overline{(A^{\circ})^c}\right]^c=\left(\overline{A}\right)^c=X-\overline{A}.$
 $\neg.$ 보통위상공간에서 $A=\{0\}$ 라 하면
 $\overline{A}=\{0\},\ \text{int}(\overline{A})=\varnothing$ 에서 $\overline{\text{int}(\overline{A})}=\varnothing\neq\overline{A}.$
 $\neg.$ 일반적으로 $\overline{A\cap B}\neq\overline{A}\cap\overline{B}$ 이므로 성립하지 않는다.
(보통위상공간에서 $A=\{0\},\ B=(0,1)$)

16. ㉑
 $a,b\in\mathbb{R},\ a<b$ 라 하자.
(i) $0\in(a,b)$ 일 때
 $f^{-1}((a,b))=(\mathbb{R}-\mathbb{Q})\cup(\mathbb{Q}\cap(a,b))=[(\mathbb{R}-\mathbb{Q})\cup\mathbb{Q}]\cap(a,b)=(a,b)\in\mathfrak{I}_0$
(ii) $0\notin(a,b)$ 일 때
 $f^{-1}((a,b))=(a,b)\cap\mathbb{Q}\in\mathfrak{I}_0$
따라서 $(\mathbb{R},\mathfrak{I}_0)$ 의 기저 \mathcal{B} 는
 $\{\{f^{-1}(G)\mid 0\in G\in\mathfrak{I}\}\}\cup\{\{f^{-1}(G)\mid 0\notin G\in\mathfrak{I}\}\}$
 $=\{(a,b)\cup(\mathbb{R}-\mathbb{Q})\mid a<0<b\}\cup\{(a,b)\cap\mathbb{Q}\mid 0\notin(a,b)\}$
(0을 포함) (0이 없음)
㉑ $\sqrt{2}\in G\subset\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ 인 $G=(a,b)\in\mathcal{B}$ 있다($a<0<b$).
유리수 조밀성에 의해 $q\in G$ 있다. 모순.
㉒ 0을 포함하는 개집합은 무리수를 항상 가지므로 \mathbb{Q} 의 내점이 될 수 없다. $(a,b)\cap\mathbb{Q}$ 꼴의 개집합 중에서 \mathbb{Q} 에 포함되는 가장 큰 개집합은 $\mathbb{Q}-\{0\}=[(-\infty,0)\cup(0,\infty)]\cap\mathbb{Q}$ 이므로 $\text{int}(\mathbb{Q})=\mathbb{Q}-\{0\}.$
폐집합은 $[a,b](a<0<b),\ [a,b]\cap\mathbb{Q}(0\notin(a,b))$ 꼴과 그 합집합이며, 유리수를 항상 포함. 따라서 \mathbb{Q} 를 포함하는 가장 작은 폐집합 $\mathbb{R}.$
 $\text{b}(\mathbb{Q})=\overline{\mathbb{Q}}-\text{int}(\mathbb{Q})$
 $=\mathbb{R}-[\mathbb{Q}-\{0\}]=(\mathbb{R}-\mathbb{Q})\cup\{0\}.$
($\overline{\mathbb{Q}}=[\text{ext}(\mathbb{Q})]^c$ 임을 이용할 수도 있다.)
㉓ $f^{-1}((-1,1))=(-1,1)\cup(\mathbb{R}-\mathbb{Q})$ 이므로 옳다.
㉔ f 는 연속이고 $[-1,1]\in\mathfrak{I}^c$ 이므로 $f^{-1}([-1,1])=[-1,1]\cup(\mathbb{R}-\mathbb{Q})\in\mathfrak{I}_0^c.$
㉕ 0을 포함하는 임의의 개집합 G 에 대하여 $0\in(a,b)\cup(\mathbb{R}-\mathbb{Q})\subset G$ 인 $a,\ b\in\mathbb{R}$ 있다.
따라서 $(G-\{x\})\cap(\mathbb{R}-\mathbb{Q})\supset[G-[(a,b)\cup(\mathbb{R}-\mathbb{Q})]]\cap(\mathbb{R}-\mathbb{Q})\neq\varnothing,$
0은 $(\mathbb{R}-\mathbb{Q})$ 의 집적점이다.

17. ③

- ㄱ. 옳은 설명
- ㄴ. $f^{-1}(f(A) \cap B) = f^{-1}(f(A)) \cap f^{-1}(B) \supset A \cap f^{-1}(B)$ 이고 단사일 때 같다.
- ㄷ. $f(A \cap f^{-1}(B)) \subset f(A) \cap f(f^{-1}(B)) \subset f(A) \cap B$,
 $y \in f(A) \cap B$ 이면 $y \in B$, $y = f(x)$ 인 $x \in A$ 있다.
 $x = f^{-1}(y) \in B$ 이므로 $x \in A \cap f^{-1}(B)$ 이다.
따라서 $y = f(x) \in f(A \cap f^{-1}(B))$
그러므로 $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$ 이다.

18. ①

- ㉠ $\text{int}(\mathbb{Z}) = (\overline{\mathbb{Z}^c})^c = [c(\mathbb{Z}^c)]^c = \mathbb{R}^c = \emptyset$.
- ㉡ $\text{int}([0, 1]) = (\overline{[0, 1]^c})^c = [c([0, 1]^c)]^c = \mathbb{R}^c = \emptyset$.
- ㉢ $\text{int}(\mathbb{R} - \mathbb{Z}) = (\overline{(\mathbb{R} - \mathbb{Z})^c})^c = [c(\mathbb{R} - \mathbb{Z})^c]^c = \mathbb{Z}^c = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$.
 $[c(A)]^c = \begin{cases} \mathbb{R} - A, & A \text{는 가산(countable)집합} \\ \emptyset, & A \text{는 비가산(uncountable)집합} \end{cases}$
 \Rightarrow 여가산 위상

19. ②

- ㄱ. $A_n \cap B_n = \{-n, -n+1, \dots, 0, \dots, n-1, n\} = [-n, n] \cap \mathbb{Z}$,
 $\bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B_n) = A_1 \cap B_1 = \{-1, 0, 1\}$.
- ㄴ. $A_n \cup B_n = \mathbb{Z}$ 이므로 $\mathbb{Z} \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n^c \cap B_n^c) \right) = \emptyset$.
- ㄷ. $A_n - B_n = \{-n-1, -n-2, -n-3\}$ 이므로
 $\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n - B_n) = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq -2\}$,

20. ③

- $\mathfrak{I} = \{U \subset A \mid f^{-1}(U) \in \mathfrak{I}_1\}$
 $= \{A, \emptyset, \{1\}, \{4\}, \{1, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$
8개 있다.

21. ①

- ① $6 \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$ 이며 $B_6 = \{1, 2, 3, 6\}$ 이다. 만약 $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ 가 열린 집합이면 $6 \in B_6 \subset A$ 에서 $3 \notin A$ 가 되어 모순이다.
- ② $\cup \{p \mid p: \text{소수}\} = \{2\} \cup \{3\} \cup \{5\} \cup \dots$
 $= \bigcup_{p: \text{소수}} B_p$ 이므로
소수 전체의 집합은 열린 집합이다.
- ③ 소수 전체의 집합을 P 라 하고 $\overline{P} = X$ 임을 보인다.
 $x \in X = \{2, 3, 4, \dots\}$ 를 포함하는 개집합 G ,
 $x \in B_x \subset G$ 인 기저원 B_x 있고, 소수 p 가 존재해서
 $p \mid x$ 이므로 $B_p \subset B_x$, $G \cap P \supset B_x \cap P \ni p$ 이므로
 $G \cap P \neq \emptyset$. 그러므로 $\overline{P} = X$.
- ④ $y \in \overline{\{x\}}$ 이면 $B_y \cap \{x\} \neq \emptyset$ 즉, $x \in B_y$ 이므로 $x \mid y$.
따라서 y 는 x 의 배수이므로 $y \in \{nx \mid n \in \mathbb{N}\}$.
 $y \in \{nx \mid n \in \mathbb{N}\}$ 이면 $y = mx$ 인 $m \in \mathbb{N}$ 있다.
이때 $x \mid y$ 이므로 $x \in B_y$. y 를 포함하는 임의의 개집합 G 에 대하여
 $y \in B_y \subset G$ 이므로 $\emptyset \neq B_y \cap \{x\} \subset G \cap \{x\}$.
그러므로 $\overline{\{x\}} = \{nx \mid n \in \mathbb{N}\} = x\mathbb{N}$.
- ⑤ $f(2) = 2$ 를 포함하는 \mathfrak{I}' -개집합 G 는 $\{2\} \subset G$ 이며,
 $2 \in \{2\} = f^{-1}(\{2\}) \subset f^{-1}(G)$, $B_2 = \{2\} \in \mathfrak{I}$ 이므로
 f 는 $x=2$ 에서 연속이다.

22. ④

$x \in X - A$ 에 대하여 $[x] = \{x\}$, $y \in A$ 에 대하여 $[y] = \{2, 4, 6\}$.
그러므로 $n(X/R) = |X/R| = |\{[1], [3], [5], [7], [8], [2]\}| = 6$.

* $R(\sim)$ 은 X 상의 동치관계이다.

- ㉠ $x \in X$ 이면 $x \in A$ 또는 $x \in X - A$ 이며
 $x \in A$ 일 때, $x \sim 2, 4, 6$, $x \in X - A$ 일 때, $x \sim x$.
따라서 R 은 반사적이다.
- ㉡ $x, y \in X$ 에 대하여 $x \sim y$ 이면 $x, y \in A$ 또는 $x = y \in X - A$ 이므로 $y \sim x$.
따라서 R 은 대칭적이다.
- ㉢ $x, y, z \in X$ 에 대하여 $x \sim y$, $y \sim z$ 이면 $x, y, z \in A$ 또는 $x = y = z \in X$ 이므로 $x \sim z$. 따라서 R 은 추이적이다.

23. ②

- 가정에 의해 a 를 포함하는 개집합은 $\{a, c\}$ 를 포함하고 있어야 하고 b 를 포함하는 개집합은 $\{b, c\}$ 를 포함하고 있어야 하며 c 를 포함하는 개집합은 $\{c\}$ 를 포함하고 있어야 하며 d 를 포함하는 개집합은 X 뿐이다.
따라서 $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{c\} \in \mathfrak{I}$ 이다.
- ㉠ $\{a, c\} \cup \{b, c\} = \{a, b, c\} \in \mathfrak{I}$
- ㉡ $\{a, b\} \in \mathfrak{I}$ 이면 $\{a\} = \{a, b\} \cap \{a, c\} \in \mathfrak{I}$ 가 되어 $\{a, c\} \subset \{a\}$, 모순이다.
- ㉢ $\{a, c, d\} \in \mathfrak{I}$ 이면 $\{a, c, d\}$ 는 d 를 포함하는 개집합이므로 $X \subset \{a, c, d\}$ 가 되어 모순이다.

24. ②

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) = \{0\}.$$

- ㉠ 0이 아닌 x 가 존재해서 $x \in \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c$ 라 하자.

$0 < |x|$ 이고, 아르키메데스 원리에 의해 $0 < \frac{1}{N} < |x|$ 인 자연수 N 있다. 모

순이다. ($n \geq N$ 이면 $x \notin \left(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n \right)^c$)

- ㉡ 임의의 자연수 $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여 $-\frac{1}{n} < 0 < \frac{1}{n}$ 이므로 $0 \in \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c$.

25. ④

- ① $(1, \infty)$ 는 개집합이고, $f^{-1}((1, \infty)) = \emptyset \in \mathfrak{I}$
- ② $(-1, 1)$ 는 개집합이고 $f^{-1}((-1, 1)) = \{0\} \in \mathfrak{I}$
- ③ $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ 는 개집합이고
 $f^{-1}((-\infty, 0) \cup (0, \infty)) = \mathbb{Z} - \{0\} \in \mathfrak{I}$
- ④ $f^{-1}(G) = \{2k \mid k \text{는 자연수}\}$ 이 되는 개집합 G 가 존재한다고 하면
 $f(f^{-1}(G)) = f(\{2k \mid k \text{는 자연수}\}) = \{1\} \subset G$.
이때 $f^{-1}(\{1\}) = \mathbb{Z} - \{0\} \subset f^{-1}(G)$, 모순이다.
- ⑤ $(-\infty, 1)$ 는 개집합이고 $f^{-1}((-\infty, 1)) = \{2k-1 \mid k \text{는 정수}\} \cup \{0\} \in \mathfrak{I}$
- * $\mathfrak{I} = \{f^{-1}(G) \mid G: \mathbb{R} \text{-개집합}\}$

26. ②

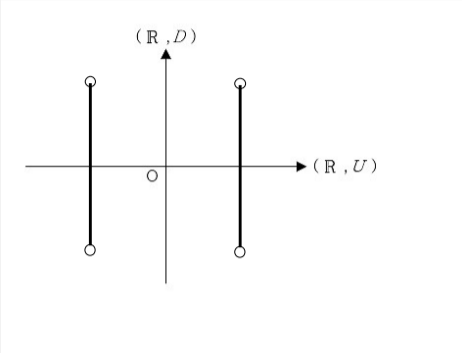
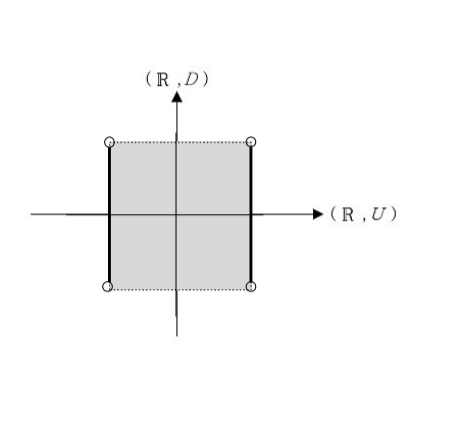
- ㉠ 현정: 틀림
- ㉡ 기태: 위상 공간에는 열린 집합도 닫힌 집합도 아닌 집합이 있다.
- ㉢ 수연: $\overline{A} = \text{int}(A) \cup \text{b}(A)$ 에서 $\text{int}(A) = \overline{A} - \text{b}(A)$ 라 쓸 수 있는 것은
 $\text{int}(A) \cap \text{b}(A) = \emptyset$ 이기 때문이다.
- ㉣ 영호: 보통위상공간에서 개집합 $A = (-1, 1)$ 에 대하여
 $\text{int}(A) = A$, $\overline{A} = [-1, 1]$, $\text{b}(A) = \overline{A} - \text{int}(A) = \{-1, 1\} \neq \emptyset$.

27. $\text{int}(A)=A$, $A'=\mathbb{R}$, $\overline{A}=\mathbb{R}$, $\text{b}(A)=\mathbb{Q}$.
 $\mathfrak{I}^c=\{F\subset\mathbb{R}\mid F\text{는 가산집합}\}\cup\{\mathbb{R}\}$ 이고 $A^c=\mathbb{Q}\in\mathfrak{I}^c$ 이므로 A^c 은 폐집합.
따라서 A 는 개집합이다. $\text{int}(A)=A$.
 \mathfrak{I}^c 의 원소는 가산집합 또는 \mathbb{R} (비가산집합)이므로 $\overline{A}=\mathbb{R}$.
 $\text{b}(A)=\overline{A}-\text{int}(A)=\mathbb{R}-(\mathbb{R}-\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$
 $A'=\{x\in\mathbb{R}\mid x\in\forall G\in\mathfrak{I}, (G-\{x\})\cap A\neq\emptyset\}=\mathbb{R}$.

28. 실 폐포: $[-1,1]\times(-1,1)$, 경계: $\{-1,1\}\times(-1,1)$

• 폐포

• 경계



U 에서 $\overline{(-1,1)}=[-1,1]$, D 에서 $\overline{(-1,1)}=(-1,1)$,
 $\overline{A}=\overline{(-1,1)\times(-1,1)}=[-1,1]\times(-1,1)$ 이다.
 $(-1,1)\in U,D$ 이므로 $\text{int}(A)=A$.
 $\text{b}(A)=\overline{A}-\text{int}(A)$
 $\quad=\overline{(-1,1)\times(-1,1)}-\text{int}((-1,1)\times(-1,1))$
 $\quad=[-1,1]\times(-1,1)-(-1,1)\times(-1,1)$
 $\quad=\{-1,1\}\times(-1,1)$.

* 다른 풀이
적공간의 기저 $\mathcal{B}=\{(a,b)\times\{c\}\mid a,b,c\in\mathbb{R},a<b\}$.
 $\overline{A}=\cup\{F\mid A\subset F,F^c\in\mathcal{B}\}=[-1,1]\times(-1,1)$
 $\text{int}(A)=\cup\{G\mid G\subset A,G\in\mathcal{B}\}=A$
따라서 $\text{b}(A)=\overline{A}-\text{int}(A)=\{-1,1\}\times(-1,1)$

* 다른 설명: $\text{b}(A\times B)=(\text{b}(A)\times\overline{B})\cup(\overline{A}\times\text{b}(B))$
 $\text{b}((-1,1)\times(-1,1))$
 $\quad=(\text{b}((-1,1))\times\overline{(-1,1)})\cup(\overline{(-1,1)}\times\text{b}((-1,1)))$
 $\quad=(\{-1,1\}\times(-1,1))\cup((-1,1)\times\emptyset)$
 $\quad=\{-1,1\}\times(-1,1)$

* $\text{b}(A)=\mathbb{R}\times\mathbb{R}-(\text{int}(A)\cup\text{ext}(A))$, $\text{int}(A)=(\overline{A^c})^c$,
 $\text{ext}(A)=\text{int}(A^c)=(\overline{A})^c$ 를 이용해도 된다.

29. \mathbb{R} 에서 개집합 G 에 대하여 $f^{-1}(G)=G\times\mathbb{R}$ 는 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 에서 개집합이므로 f 는 연속사상이다.

폐집합 $A=\left\{\left(x,\frac{1}{x}\right)\mid x>0\right\}\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 에 대하여
 $f(A)=(0,\infty)$ 는 폐집합이 아니므로 f 는 폐사상 아니다.

30. 상위상: $\{\mathbb{Z}\}\cup\{\emptyset\}\cup\{\{\cdots n-2,n-1,n\}\mid n\in\mathbb{Z}\}$
보통위상을 \mathfrak{I} , 상위상을 \mathfrak{I}_1 라 하자. $f^{-1}(\mathbb{Z})=\mathbb{R}$, $f^{-1}(\emptyset)=\emptyset\in\mathfrak{I}$ 이다.
 $n\in\mathbb{Z}$ 에 대하여 $f^{-1}(\{n\})=[n,n+1)\notin\mathfrak{I}$ 이므로
 $\mathfrak{I}_1=\{U\subset\mathbb{Z}\mid f^{-1}(U)\in\mathfrak{I}\}=\{\mathbb{Z}\}\cup\{\emptyset\}\cup\{\{\cdots n-2,n-1,n\}\mid n\in\mathbb{Z}\}$.

31. (1) 여유한 위상 (2) $\mathbb{N}'=\mathbb{R}$
(1) \mathfrak{I} : 여유한 위상
 $\mathcal{J}=\{\mathbb{R}-\{p\}\mid p\in\mathbb{R}\}$ 의 유한 교집합은
 $\mathbb{R}-\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}=\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}^c$ 이므로
 $\mathfrak{I}=\{\mathbb{R}-F\mid F\text{: 유한집합}\}\cup\{\emptyset\}$.
즉, \mathfrak{I} 는 \mathbb{R} 상의 여유한 위상이다.

(2) $\mathbb{N}'=\mathbb{R}$
 $x\in\mathbb{R}$ 를 포함하는 \mathfrak{I} 의 원소 G 에 대하여 $G=\mathbb{R}-F$ 인 유한집합 F 있다.
(\mathfrak{I} 의 원소는 \emptyset 아니면 $\mathbb{R}-F$ 인데, x 를 포함하려면 $\mathbb{R}-F$ 꼴 밖에 없다.)
 $G-\{x\}=\mathbb{R}-F-\{x\}\supset\mathbb{N}-F-\{x\}\neq\emptyset$ 이므로
 $(G-\{x\})\cap\mathbb{N}\neq\emptyset$, $\mathbb{R}\subset\mathbb{N}'$, 즉 $\mathbb{N}'=\mathbb{R}$.

32.
(1) $f^{-1}(\{1\})=\{1,2\}$, $f^{-1}(\{3\})=\{3,4,5\}$,
 $f^{-1}(\{2\})=\emptyset=f^{-1}(\{4\})=f^{-1}(\{5\})$ 는 모두 \mathfrak{I} 에 속하므로
임의의 2^X 의 원소의 역상도 모두 \mathfrak{I} 에 속한다.
그러므로 f 는 연속이다.

(2) $\mathfrak{I}^c=\{\emptyset,X,\{3,4,5\},\{1,3,4,5\},\{1,2\},\{1\},\{1,2,3,5\},\{3,5\},\{1,3,5\}\}$
 $\overline{\{2\}}=\{1,2\}$, $\overline{\{4\}}=\{3,4,5\}$ 이다.

(3) 구하는 원소의 개수는 1이다.
(2)에서 구한 폐포를 활용하자. f 가 연속이면
 $f(\overline{\{2\}})=f(\{1,2\})\subset\overline{f(\{2\})}=\overline{\{1\}}=\{1\}$,
 $f(\overline{\{4\}})=f(\{3,4,5\})\subset\overline{f(\{4\})}=\overline{\{3\}}=\{3\}$ 이다.
(공역의 위상은 이산위상이다.)
그러므로 구하는 원소의 개수는 1개.

33.
(1) 위상동형사상의 정의
① f 가 1-1 대응함수이다.
② f 가 연속함수이다. 즉, Y 의 임의의 열린집합 U 에 대하여 $f^{-1}(U)$ 가 X 의 열린집합이다.
③ f^{-1} 가 연속함수이다. 즉, X 의 임의의 열린집합 V 에 대하여 $f(V)$ 가 Y 의 열린집합이다.

(2) 위상동형사상의 개수
 $f:(X,\mathfrak{I})\rightarrow(X,\mathfrak{I})$ 가 위상동형사상이라 하자.
 $f(X)=X$, $f(\emptyset)=\emptyset$, $G\in\mathfrak{I}\Leftrightarrow f(G)\in\mathfrak{I}$ 이고 $\text{n}(G)=\text{n}(f(G))$ 이다.
가능한 경우는 다음 8가지 있다.

- (i) $f(\{a,b\})=\{a,b\}$, $f(\{c,d\})=\{c,d\}$
- ㉠ $f(a)=a$, $f(b)=b$, $f(c)=c$, $f(d)=d$
 - ㉡ $f(a)=a$, $f(b)=b$, $f(c)=d$, $f(d)=c$
 - ㉢ $f(a)=b$, $f(b)=a$, $f(c)=c$, $f(d)=d$
 - ㉣ $f(a)=b$, $f(b)=a$, $f(c)=d$, $f(d)=c$
- (ii) $f(\{a,b\})=\{c,d\}$, $f(\{c,d\})=\{a,b\}$
- ㉤ $f(a)=c$, $f(b)=d$, $f(c)=a$, $f(d)=b$
 - ㉥ $f(a)=c$, $f(b)=d$, $f(c)=b$, $f(d)=a$
 - ㉦ $f(a)=d$, $f(b)=c$, $f(c)=a$, $f(d)=b$
 - ㉧ $f(a)=d$, $f(b)=c$, $f(c)=b$, $f(d)=a$

34. $A' = \{d, e\}$

- ① a 를 포함하는 가장 작은 개집합: $\{a\}$
- ② b 를 포함하는 가장 작은 개집합: $\{b\}$
- ③ c 를 포함하는 가장 작은 개집합: $\{a, c, d\}$
- ④ d 를 포함하는 가장 작은 개집합: $\{a, c, d\}$
- ⑤ e 를 포함하는 가장 작은 개집합: X

그러므로 $x \in X$ 를 포함하는 임의의 개집합 G 에 대하여 $(G - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ 을 만족하는 $x = d, e$. 그러므로 $A' = \{d, e\}$.

* 다른 풀이

$A' = \{x \in X \mid x \in \forall G \in \mathfrak{J}, (G - \{x\}) \cap A \neq \emptyset\} = \{d, e\}.$

35. $x, y, z \in X$ 라 하자.

- (i) $d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \geq 0.$
- (ii) $d_1(x, y) = 0 \Leftrightarrow \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = 0 \Leftrightarrow d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$
- (iii) $d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = \frac{d(y, x)}{1 + d(y, x)} = d_1(y, x).$
- (iv) $d_1(x, y) + d_1(y, z) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(y, z)}$
 $\geq \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(y, z) + d(x, y)}$
 $= \frac{d(x, y) + d(y, z)}{1 + d(x, y) + d(y, z)}$
 $\geq \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} = d_1(x, z).$

따라서 (X, d_1) 은 거리공간이다.

한편 $d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \leq \frac{d(x, y)}{d(x, y)} = 1$ 이므로 (X, d_1) 은 유계이다.

36. $\overline{\{x_2\}} = \{x_2, x_5\}$

$T^c = \{X, \emptyset, \{x_2, x_3, x_4, x_5\}, \{x_3, x_4, x_5\}, \{x_2, x_5\}, \{x_5\}\}$ 이므로 $\{x_2\}$ 를 포함하는 가장 작은 폐집합은 $\overline{\{x_2\}} = \bigcap_{\{x_2\} \subset F, F^c \in T} F = \{x_2, x_5\}.$

37. 두 도형이 위상동형이라 하고, 연결성은 위상적 성질임을 이용하자.
첫 번째 도형의 두 선분이 교차하는 점을 제외한 도형에서 연결성분은 4개 있다.
그런데 두 번째 도형의 어떤 한 점을 제외해도 연결성분이 4개가 될 수 없으므로 이는 두 도형이 위상동형이라 가정한 데 모순이다.
따라서 두 평면도형은 위상적으로 동형이 아니다.

* 다른 풀이

두 도형 X, Y 가 서로 위상적으로 동형이라 하자.

X 에서 Y 로의 함수 f 가 존재해서 위상적 성질에 의해서 연결성이 같아야 한다.

① $f(A) = B$ 일 때

$X - \{A\}, Y - \{f(A)\}$ 사이의 위상동형을 준다. 그런데 부분위상공간 $X - \{A\}$ 는 연결성분이 3개인 위상공간이고, $Y - \{f(A)\}$ 는 연결성분이 4개인 위상공간이므로 동형일 수 없다.

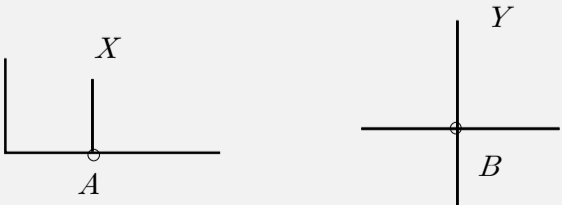
② $f(A) \neq B$ 일 때

$X - \{A\}$ 는 3개의 연결성분이 존재, $Y - \{f(A)\}$ 는 연결성분이 2개인 위상공간이므로 동형일 수 없다.

이때, 두 도형이 위상적으로 동형이라는 가정에 모순이다.

그러므로 f 는 위상동형사상이 될 수 없다.

따라서 두 도형 X, Y 는 위상적으로 동형이 아니다.



38. ④

④는 열린(개) 사상의 정의

* $f : X \rightarrow Y$ 가 연속일 필요충분조건

- ① Y -개집합 B 에 대하여 $f^{-1}(B)$ 가 X -개집합
- ② Y -폐집합 B 에 대하여 $f^{-1}(B)$ 가 X -폐집합
- ③ X -부분집합 A 에 대하여 $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$
- ④ Y -부분집합 B 에 대하여 $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$

(\therefore) ① \Leftrightarrow ②임은 자명하다.

② \Rightarrow ③: $\overline{f(A)}$ 는 Y -폐집합이므로 ②에 의해 $f^{-1}(\overline{f(A)})$ 는 X -폐집합.

$A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ 이고, \overline{A} 는 A 를 포함하는 최소의 X -폐집합이므로 $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$.

따라서 $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

③ \Rightarrow ②: Y -폐집합 B 에 대하여 $f^{-1}(B)$ 가 X -폐집합임을 보이자.

$A = f^{-1}(B)$ 라 하면 ③에 의해

$f(\overline{f^{-1}(B)}) \subset \overline{f(f^{-1}(B))} \subset \overline{B} = B, \overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(B),$

$f^{-1}(B) \subset \overline{f^{-1}(B)}$ 이므로 $f^{-1}(B) = \overline{f^{-1}(B)}$

따라서 $f^{-1}(B)$ 는 X -폐집합이다.

② \Rightarrow ④: \overline{B} 는 Y -폐집합이므로 $f^{-1}(\overline{B})$ 는 X -폐집합이다.

따라서 $\overline{f^{-1}(\overline{B})} = f^{-1}(\overline{B})$ 이다. $B \subset \overline{B}$ 이므로

$f^{-1}(B) \subset f^{-1}(\overline{B}), \overline{f^{-1}(B)} \subset \overline{f^{-1}(\overline{B})} = f^{-1}(\overline{B})$ 이므로 $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B}).$

④ \Rightarrow ②: Y -폐집합 B 이면 $\overline{B} = B$ 이고, ④에 의해

$\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B}) = f^{-1}(B) \subset \overline{f^{-1}(B)}$ 이므로

$\overline{f^{-1}(B)} = f^{-1}(B)$ 가 되어 $f^{-1}(B)$ 는 X -폐집합.

39. ②

① $\overline{A} \subset \overline{A}$ 이므로 $\overline{\overline{A}} \subset \overline{\overline{A}}$ 이다. $x \in \overline{\overline{A}}$ 이면 x 를 포함하는 임의의 개집합 G 에 대하여 $y \in G \cap \overline{A}$ 인 y 있다. $y \in \overline{A}$ 이므로 y 를 포함하는 임의의 개집합 H 에 대하여 $H \cap A \neq \emptyset$ 이다. 한편 G 는 y 를 포함하는 개집합이므로 $G \cap A \neq \emptyset$. 따라서 $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$. 그러므로 $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

② 보통위상에서 $A = \{0\}, B = (0, 1)$ 이면 성립하지 않는다.

③ $x \in A - \overline{B}$ 이면 $x \in A, x \in (\overline{B})^c$ 이고, $B = (B^c)^c,$

$x \in \left[(\overline{B^c})^c \right]^c = \text{int}(B^c) (= \text{ext}(B)) \subset B^c.$

즉 $x \in A$ 이고 $x \in B^c$ 이므로 $x \in A \cap B^c = A - B \subset \overline{A - B}.$

④ \emptyset 은 폐집합이므로 \emptyset 을 포함하는 제일 작은 폐집합 $\overline{\emptyset} = \emptyset$ 이다.

1.

$-1 \leq x < 1$ 일 때 $\frac{1}{2} \geq d((-1,0), (x,0)) = \min\{|x-1|, |x+1|, |x+3|\}$ 를 풀면,

$-1 \leq x \leq -\frac{1}{2}$ 또는 $\frac{1}{2} \leq x < 1$ 이므로 구하는 값 $\frac{1}{2}$.

(\mathbb{R}_*^2, d_*) 에서 $a_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$ 이 코시열이라 하자.

거리함수 d_* 는 연속이므로 양의 실수 $\varepsilon_0 = \ln 2$ 가 주어질 때,

$m, n \geq N$ 이면 $d_*(a_m, a_n) < \varepsilon_0$ 되는 자연수 N 있다.

$d_*(a_{2N}, a_N) = d((1/2, -\ln 2N), (1/2, -\ln N)) = \ln \frac{2N}{N} = \ln 2$, 모순.

따라서 $\left\{\left(0, \frac{1}{n}\right)\right\}$ 은 코시수열이 아니다.

2.

$\pi_1(a, b) = a^2 + b^2$, $\pi_2(c, d) = c^2 + d^2$, $\pi_3(a, b, c, d) = ac + bd$ 는 연속이고,

$\{1\}, \{0\}$ 는 폐집합이므로 $\pi_1^{-1}(1) \cap \pi_2^{-1}(1) \cap \pi_3^{-1}(0) = A$ 는 폐집합.

$\mathbf{p}, \mathbf{q} \in A$ 일 때 $d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \leq d(\mathbf{O}, \mathbf{p}) + d(\mathbf{O}, \mathbf{q}) = 2\sqrt{2}$ 이므로

$d(A) \leq 2\sqrt{2}$, 따라서 A 는 유계집합.

하이네-보렐 정리에 따라 A 는 콤팩트.

(다른 설명)

$d(A) < 2024$, A^c 은 개집합이므로 A 는 유계폐집합.

하이네-보렐 정리에 따라 A 는 콤팩트.

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(a, b, c, d) = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 는 직교행렬이므로 $\text{im} f = \{\pm 1\}$.

A 가 연결이면 f 는 연속이므로 $f(A) = \{-1, 1\}$ 가 연결이어야 한다.

이는 모순이므로 A 는 연결집합이 아니다.

3. $\alpha \notin K$ 인 경우, $G_\alpha = (\alpha - 1, \alpha + 1) \setminus K$ 일 때 $K \cap (G_\alpha - \{\alpha\}) = \emptyset$, $\alpha \notin K'$.

자연수 n 에 대하여 $G_n = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n(n+1)}, \frac{1}{n} + \frac{1}{2n(n+1)}\right)$ 라 하면

* G_n 은 $\frac{1}{n} \in K$ 을 포함하는 길이 $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ 인 개구간

$K \cap \left(G_n - \left\{\frac{1}{n}\right\}\right) = \emptyset$, $\frac{1}{n} \notin K'$.

그러므로 $K' = \emptyset$.

$G_0 = (-1, 1)$, $G_n = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n(n+1)}, \frac{1}{n} + \frac{1}{2n(n+1)}\right)$, $I = \{0\} \cup \mathbb{N}$ 라 하자.

$\{G_i\}_{i \in I}$ 는 $[0, 1]$ 의 개피복이지만 유한부분피복이 존재하지 않으므로

$[0, 1]$ 은 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$ 의 콤팩트 부분집합이 아니다.

(다른 풀이)

\mathbb{R} 위의 보통위상 U 라 하고 K 의 (\mathbb{R}, U) 에서 도집합을 K_1 라 하자.

$U \subset \mathfrak{I}$, $K_1 = \{0\}$ 이므로 $K' \subset \{0\}$.

$G = (-1, 1) - K$ 는 0 을 포함하는 \mathfrak{I} 에서의 개집합이지만

$(G - \{0\}) \cap K = \emptyset$ 이므로 $0 \notin K'$. 따라서 $K' = \emptyset$.

$[0, 1]$ 가 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$ 의 콤팩트 부분집합이라고 하면

$[0, 1]$ 의 임의의 무한 부분집합에 대하여 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$ 에서의 집적점이 존재한다.

그러나 위 결과에 의해 $[0, 1]$ 는 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$ 의 콤팩트 부분집합이 아니다.

(다른 풀이)

$x \in \mathbb{R}$ 라 하자.

① $x \in K$ 인 경우 자연수 N 이 존재해서 $x = \frac{1}{N}$ 라 할 수 있으며

x 를 포함하는 기저의 원소 $B = \left(\frac{1}{N+1}, \frac{1}{N-1}\right)$ 일 때

$(B - \{x\}) \cap K = \emptyset$ 이므로 $x \notin K'$.

② $x \notin K$ 인 경우 x 를 포함하는 개집합 $G = \mathbb{R} - K$ 에 대하여

$(G - \{x\}) \cap K = \emptyset$ 이므로 $x \notin K'$.

$C = \{(-2, 2) - K\} \cup \left\{\left(\frac{1}{n}, 2\right) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ 는 $[0, 1]$ 의 개피복이지만 유한부분피복을 갖지 않으므로 $[0, 1]$ 은 콤팩트가 아니다.

4. $\mathfrak{I}_\mathcal{B} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{c\}, \{a, c\}\}$.

임의의 자연수 n 에 대하여 $x_{2n} \not\in \{a\}$, $x_{2n-1} \notin \{c\}$ 이므로

a, c 는 점열 $\{x_n\}$ 의 극한이 될 수 없다.

b 를 포함하는 모든 개집합 X , $\{a, b\}$ 는 a, b 를 모두 포함하고 있다.

즉 $N = 1$ 라 할 때 b 를 포함하는 개집합 $G \in \mathfrak{I}_\mathcal{B}$ 에 대하여

$n \geq N$ 이면 $b \in \{a, b\} \subset G$ 이므로 $\{x_n\}$ 의 극한 b .

$\mathfrak{I}_\mathcal{B}^c = \{X, \emptyset, \{b, c\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b\}\}$ 이므로

공집합이 아닌 진부분 폐집합 $\{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}$.

서로소가 될 수 있는 경우는 $F_1 = \{b\}$, $F_2 = \{c\}$ 혹은 $F_1 = \{a, b\}$, $F_2 = \{c\}$

2가지이며, 각각 $G_1 = \{a, b\}$, $G_2 = \{c\}$ 혹은 $G_1 = \{a, b\}$, $G_2 = \{c\}$ 인

개집합 G_1, G_2 를 택하면 조건을 만족한다.

5.

$(x, y) \neq (0, 0)$ 이면 $[x, y]$ 는 (x, y) 와 원점을 지나는 직선에서 원점을 제외한 집합이고, $[0, 0] = \{(0, 0)\}$ 이다.

$Y = \{[0, 0]\} \cup \{[\cos \theta, \sin \theta] \mid 0 \leq \theta < \pi\}$

$[0, 0]$ 를 포함하는 $G \in \mathfrak{I}$ 에 대하여 $\pi^{-1}(G)$ 는 $(0, 0)$ 을 포함하는 \mathbb{R}^2 에서의 개 집합이다.

따라서 $r > 0$ 이 존재해서 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\} \subset \pi^{-1}(G)$ 이므로 $G = Y$.

$[0, 0] \neq [1, 1]$ 이고 $[0, 0]$ 를 포함하는 개집합은 Y 뿐이므로

위상공간 (Y, \mathfrak{I}) 는 T_1 -공간이 아니다.

6. $b(C) = A$, (X, \mathfrak{I}') 는 콤팩트공간

\mathfrak{I}_A 는 A 위의 여유한 위상, \mathfrak{I}_B 는 B 위의 이산 위상이며,

\mathfrak{I}' 는 \mathfrak{I}_A 와 \mathfrak{I}_B 의 합위상이다.

(A, \mathfrak{I}_A) 에서 $\text{int}\left\{3 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} = \emptyset$, $\overline{\left\{3 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}} = A$.

* (무한)여유한 위상에서 폐집합은 유한집합 \vee 전체집합

(B, \mathfrak{I}_B) 에서 $\text{int}\{3\} = \{3\}$, $\overline{\{3\}} = \{3\}$ 이므로

(X, \mathfrak{I}') 에서 $\text{int}(C) = \{3\}$, $\overline{C} = A \cup \{3\}$. 따라서 $b(C) = \overline{C} - \text{int}(C) = A$.

부분공간 (A, \mathfrak{I}_A) 는 여유한 위상공간이므로 cpt공간이다.

따라서 (X, \mathfrak{I}') 에서 A 는 cpt이다.

B 는 유한집합이므로 (X, \mathfrak{I}') 에서 cpt이다.

그러므로 $A \cup B = X$ 는 (X, \mathfrak{I}') 에서 cpt이다.

7. 7

$\mathfrak{I}_\mathbb{N}$ 은 $\mathbb{N} - f(X)$ 의 이산위상과 $f(X)$ 의 여유한위상의 합위상.

부분공간 $f(X)$ 는 여유한위상공간이므로 연결공간이다.

따라서 $f(X)$ 는 $(\mathbb{N}, \mathfrak{I}_\mathbb{N})$ 의 연결성분.

$2^{\mathbb{N} - f(X)}$ 는 완전비연결공간이므로 연결성분은 단집합이다.

따라서 $\{1\}, \{2\}, \dots, \{6\}$ 는 $(\mathbb{N}, \mathfrak{I}_\mathbb{N})$ 의 연결성분.

그러므로 $(\mathbb{N}, \mathfrak{I}_\mathbb{N})$ 의 연결성분의 개수 7.

8. $A=N\cup\{-1,-2\}$, $N\cup\{-1,-3\}$, $B=N\cup\{-2,-3\}$. $N\cup\{-2\}$. $N\cup\{-3\}$

①에서 A 가 될 수 있는 후보들은 $N\cup\{-1,-2\}$, $N\cup\{-1,-3\}$, $N\cup\{-2,-3\}$. $N\cup\{-2\}$, $N\cup\{-3\}$ 5개 있다. 이 중에서 -1 을 포함하는 집합은 콤팩트. -1 을 포함하는 개집합은 $(N\cup\{-1\})-F(F: N-유한집합)$ 과 $\{-2,-3\}$ 의 합 집합 꼴이므로 F 가 뻥 것만큼 채워주면 콤팩트된다. -1 을 포함하지 않는 집합은 멍집합 $\wp(N)$ 때문에 유한부분피복을 가질 수 없다.

②에서 B 가 될 수 있는 후보들은 $N\cup\{-1,-2\}$, $N\cup\{-1,-3\}$, $N\cup\{-2,-3\}$. $N\cup\{-2\}$, $N\cup\{-3\}$, $N\cup\{-1\}$ 6개 있다. -1 을 포함하면 콤팩트되므로 제외한다. $N\cup\{-2,-3\}$. $N\cup\{-2\}$. $N\cup\{-3\}$ 는 콤팩트가 아니다. 개피복을 $\wp(N)$ 을 포함하도록 하면 유한부분피복을 갖지 않는다. $(N\cup\{-2,-3\}$ 의 경우 $\{\{n\} \mid n \in N\} \cup \{-2,-3\}$)

* (X, \mathfrak{I}) 는 다음 두 위상공간의 합공간이다.
① 이산공간 (N, \mathfrak{I}_d) 의 한 점 cpt화 위상공간 (N^*, \mathfrak{I}^*)
② 비이산공간 $(\{-2,-3\}, \{\emptyset, \{-2,-3\}\})$

9. ④
ㄱ. 짝수집합을 E 라 하자. 임의의 $n \in N$ 을 포함하는 개집합 G 는 A_n 을 포함하므로 $G \cap E \supset G \cap A_n \neq \emptyset$ 이므로 $\overline{E} = X$ 이다.
임의의 $y \in Y$ 를 포함하는 개집합 G 는 적당한 $\varepsilon > 0$ 이 존재해서 $H = Y \cap (y - \varepsilon, y + \varepsilon) \subset G$ 이고, 유리수의 조밀성에 의해 H 에 유리수 있다. 따라서 $G \cap (Y \cap Q) \supset H \cap (Y \cap Q) \neq \emptyset$.
즉, $\overline{(Y \cap Q)} = Y$. 그러므로 $\overline{E \times (Y \cap Q)} = X \times Y$.
ㄴ. ㄱ에서 구한 폐포를 활용하자. 만약 f 가 연속이라면 $f(\overline{E}) \subset \overline{f(E)}$ 이어야 한다.
$$f(\overline{E}) = E \times \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in N \right\},$$
$$\overline{f(E)} = \overline{\{4n \mid n \in N\}} \times \overline{\left\{ \frac{1}{2n} \mid n \in N \right\}} = X \times \left(\{0\} \cup \left\{ \frac{1}{2n} \mid n \in N \right\} \right)$$
이므로 $f(\overline{E}) \not\subset \overline{f(E)}$ 가 되어 모순이다.
그러므로 f 는 연속함수가 아니다.
ㄷ. X 의 개피복 $\{G_i\}_{i \in I}$ 에 대하여 $1 \in G_{i_1}$ 인 $G_{i_1} = A_1 = X$ 이므로 X 는 콤팩트공간이다.
 Y 는 하이네-보렐 정리에 의해 콤팩트공간이다.
티호노프정리에 의해 $X \times Y$ 는 콤팩트공간이다.

10. ②
ㄱ. 보통위상공간에서 연결집합은 구간이다.
 Q 의 분리: $\{(-\infty, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, \infty)\}$ 있다.
ㄴ. $A = (-2, -1)$, $B = (0, 1)$, $C = \{\sqrt{2}\}$ 라 하자.
 A, B, C 는 쌍마다 서로 소인 연결집합이다. $(\{\sqrt{2}\} = [\sqrt{2}, \sqrt{2}])$
 X 에서 연결집합은 구간이므로 A, B, C 의 어떤 합집합도 연결이 되지 않는다.
그러므로 $A \cup B \cup C$ 의 연결성분은 A, B, C , 3개.
ㄷ. f 는 연속이고 X 는 연결공간이므로 $f(X)$ 는 Y 에서 연결공간이다.
 Y 는 이산공간이고 $X \neq \emptyset$ 이므로 $f(X)$ 는 단집합이다.
즉, f 는 상수함수이다.
그러므로 $f(5) \neq f(6)$ 일 수 없다.

11. (I)
(가) 참
함수 $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ 은 연속.
 $\{1\}$ 은 \mathbb{R} 에서 폐집합이므로 $f^{-1}(\{1\}) = S^3$ 은 \mathbb{R}^4 에서 폐집합이다.
임의의 $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in S^3$ 에 대하여 \mathbf{p}, \mathbf{q} 사이의 거리(지름) $d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 2 < \infty$ 이므로 S^3 는 \mathbb{R}^4 에서 유계집합.
따라서 하이네-보렐 정리에 의해 S^3 는 \mathbb{R}^4 에서 콤팩트.

표준사상(자연사상, canonical function) $p: S^3 \rightarrow S^3 / \sim$, $p(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}]$ 는 연속, 전사이므로 $p(S^3) = S^3 / \sim$ 는 콤팩트.

(나) 거짓
 S^3 / \sim 과 S^3 가 위상동형이라 하자.
 $\overline{\mathbf{p}} \in S^3 / \sim$ 에 대하여 $\overline{\mathbf{p}} = \{(x, y, z, w) \in S^3 \mid w > 0\}$ 는 S^3 에서 개집합이므로 $\{\overline{\mathbf{p}}\}$ 는 S^3 / \sim 에서 개집합.
위상동형사상에 의해 $\{\overline{\mathbf{p}}\}$ 는 S^3 의 열린 단집합(singleton)에 대응된다.
거리공간 S^3 에서 한 점 집합은 폐집합이므로 S^3 는 공이 아닌 진부분집합으로서 개, 폐집합을 갖게 된다.
따라서 S^3 는 비연결공간이 된다. 모순.

(II) $K = 3$
 M 의 방정식 $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2yz = 1$ 에서 점 $(1, 0, 0)$ 을 포함하는 조각사상은
$$X(u, v) = (\sqrt{1 - 2u^2 - 2v^2 - 2uv}, u, v)$$
$$X(0, 0) = (1, 0, 0)$$
에서 $X_u = (0, 1, 0)$, $X_v = (0, 0, 1)$, $U = (1, 0, 0)$,
 $X_{uu} = (-4, 0, 0)$, $X_{uv} = (-2, 0, 0)$, $X_{vv} = (-4, 0, 0)$,
 $E = 1$, $F = 0$, $G = 1$, $L = -2$, $M = -1$, $N = -2$.
$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{3}{1} = 3,$$

*
$$H = \frac{1}{2} \cdot \frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2 - 2 - 0}{1} = -2.$$

12. ④
ㄱ. X 의 개피복 $\{G_i\}_{i \in I}$ 라 하자. $q \in G_{i_0}$ 인 $i_0 \in I$ 를 택하면 $A - G_{i_0}$ 는 유한집합이므로 $A - G_{i_0} = \emptyset$ 이면 $X \subset G_{i_0}$ 이고, $\emptyset \neq A - G_{i_0} = \{a_1, \dots, a_n\}$ 라 하면 $a_1 \in G_{i_1}$, ..., $a_n \in G_{i_n}$ 인 $i_1, \dots, i_n \in I$ 있다.
따라서 $X \subset G_{i_0} \cup G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_n}$.
그러므로 (X, \mathfrak{I}) 는 콤팩트공간이다.
ㄴ. (X, \mathfrak{I}) 의 서로소 폐집합 E, F 라 하자. 둘 중 하나가 공집합이면 개집합 \emptyset, X 에 의해 각각 피복된다.
둘 다 공집합이 아니라고 하자.
① 일반성을 잃지 않고 $q \in E$ 라 하자. 그러면 $F \subset A$ 이므로 F 는 개집합이다. 따라서 $E \subset F^c$, $F \subset F$.
② E 와 F 모두 q 를 포함하고 있지 않으면 $E, F \subset A$ 이므로 $E \subset E$, $F \subset F$. 그러므로 (X, \mathfrak{I}) 는 정규공간이다.
ㄷ. X 의 가산집합 C 에 대하여 $\overline{C} \subset C \cup \{q\} \neq X$ 이므로 X 는 분리가능공간이 아니다.

13. ⑤
ㄱ. 곱공간 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_1) \times (\mathbb{R}, \mathfrak{I}_2)$ 에서 $Q \times \mathbb{R}$ 는 개폐집합이므로 곱공간은 비연결.
ㄴ. $\mathfrak{I}_1^c = \{\emptyset, \mathbb{R}, \mathbb{R} - Q, Q\}$, $\mathfrak{I}_2^c = \{\emptyset, \mathbb{R}, \mathbb{R} - N, N\}$,
$$\overline{[0, 1] \times [0, 1]} = \overline{[0, 1]} \times \overline{[0, 1]} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

ㄷ. 곱공간의 공집합이 아닌 개집합 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \times N$, $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} - N)$, $Q \times \mathbb{R}$, $Q \times N$, $Q \times (\mathbb{R} - N)$, $(\mathbb{R} - Q) \times \mathbb{R}$, $(\mathbb{R} - Q) \times N$, $(\mathbb{R} - Q) \times (\mathbb{R} - N)$ 의 F 의 역상 \mathbb{R} , Q , $\mathbb{R} - Q$, Q , Q , \emptyset , $\mathbb{R} - Q$, \emptyset , $\mathbb{R} - Q$ 는 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_1)$ 에서 개집합이므로 F 는 연속함수이다.

14. ②

- ㄱ. $f^{-1}([0, \frac{1}{2})) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n + \frac{1}{2}) \notin \mathfrak{I}$ 이므로 $[0, \frac{1}{2}) \notin \mathfrak{I}_0$.
- ㄴ. $[0, 1]$ 은 하이네-보렐 정리에 의해 보통위상공간 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$ 에서 콤팩트이며 f 는 연속이므로 $f([0, 1]) = [0, 1]$ 은 $([0, 1], \mathfrak{I}_0)$ 에서 콤팩트이다.
 $(f([0, 1]) = f([0, 1]) \cup f(\{1\}) = [0, 1] \cup \{0\} = [0, 1])$
- ㄷ. $h([0, 1]) = (0, 1]$ 이다. $(\frac{1}{2}, 2) \in \mathfrak{I}$ 이므로 h 가 연속이면 $h^{-1}((\frac{1}{2}, 2)) \in \mathfrak{I}_0$ 이어야 한다. $h^{-1}((\frac{1}{2}, 2)) = [0, \frac{1}{2})$, 보기 ㄱ.에서 $[0, \frac{1}{2}) \notin \mathfrak{I}_0$.
그러므로 h 는 연속이 아니다.
- * 다른 설명
보기 ㄴ.에서 $[0, 1]$ 은 \mathfrak{I}_0 에서 콤팩트이므로 h 가 연속이면 $h([0, 1]) = (0, 1]$ 은 \mathfrak{I} 에서 콤팩트, 이는 모순이다.
따라서 h 는 연속이 아니다.

15.

- (I) $\mathbb{R}^3 - S$ 는 비연결
 $\mathbb{R}^3 - S = \mathbb{R}^3 - f^{-1}(\{1\}) = f^{-1}([0, 1] \cup (1, \infty)) = f^{-1}([0, 1]) \cup f^{-1}((1, \infty))$.
 $G = f^{-1}([0, 1])$, $H = f^{-1}((1, \infty))$ 라 하면 (가)에 의해 $G \neq \emptyset$, $H \neq \emptyset$.
 $[0, 1]$, $(1, \infty)$ 는 $[0, \infty)$ 에서 개집합이므로 G , H 는 \mathbb{R}^3 -개집합.
 $G \cap H = f^{-1}([0, 1] \cap (1, \infty)) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.
따라서 $\mathbb{R}^3 - S$ 는 비연결이다.

- (II) ϕ 는 최솟값을 갖는다.
(가)에 의해 폐집합 $\{1\}$ 의 역상 $f^{-1}(\{1\}) = S$ 는 $f^{-1}([0, 2011])$ 의 폐집합이며,
(나)에 의해 S 는 cpt.
 x, y, z 는 연속이므로 $x + y + z = \phi$ 는 연속이다.
 $\phi(S) = \phi(f^{-1}(\{1\}))$ 는 \mathbb{R} 에서 cpt이므로 최솟값 $m = \inf\{\phi(S)\} = \min\{\phi(S)\}$ 있다.

- (III) ϕ 가 최솟값을 갖는 점 \mathbf{p} 에서 S 의 가우스 곡률 $K \geq 0$
최솟값 $m = \phi(\mathbf{p})$, $\mathbf{p} \in S$ 라 하자.
 S 위의 \mathbf{p} 를 지나는 단위속력곡선 $c(t)$, $c(0) = \mathbf{p}$, $c'(0) = \mathbf{v}$ 라 하자.
(그런 단위속력곡선 있다?)

$\nabla \phi = (1, 1, 1)$ 이므로 단위법벡터 $U(\mathbf{p}) = \frac{\nabla \phi(\mathbf{p})}{\|\nabla \phi(\mathbf{p})\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$.
 $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi(c(t)) \geq \phi(c(0)) = \phi(\mathbf{p}) = m$ (극솟값)이므로
 $\left. \frac{d}{dt} \phi(c(t)) \right|_{t=0} = \nabla \phi(c(0)) \cdot c'(0) = 0$,
 $\left. \frac{d^2}{dt^2} \phi(c(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \nabla \phi(c(t)) \cdot c'(t) \right|_{t=0}$
 $= \nabla \phi(c(0)) \cdot c''(0) \geq 0$
 $= \nabla \phi(\mathbf{p}) \cdot c''(0) \geq 0$ 이 성립한다.
 S 위의 곡선으로서 c 의 법곡률 $\kappa_n(\mathbf{v}) = \frac{c''(0) \cdot U(\mathbf{p})}{\|c'(0)\|^2} = c''(0) \cdot \frac{\nabla \phi(\mathbf{p})}{\|\nabla \phi(\mathbf{p})\|} \geq 0$.
주곡률 $\kappa_1(\mathbf{p})$, $\kappa_2(\mathbf{p}) \geq 0$ 이므로 가우스곡률 $K(\mathbf{p}) = \kappa_1(\mathbf{p})\kappa_2(\mathbf{p}) \geq 0$.

16. ⑤

- ㄱ. $\mathbb{R} - U$ 가 유한집합인 $U \subset \mathbb{R}$ 에 대하여 $\mathbb{R} - U$ 는 가산집합이므로 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$ 는 T_1 -공간이다.
- * 단집합은 가산집합이므로 폐집합이다. 따라서 T_1 -공간이다.
- ㄴ. $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$ 의 폐집합은 \mathbb{R} , \emptyset , 가산집합이므로 가산조밀부분집합을 갖지 않는다. 따라서 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$ 는 분리공간이 아니다.
- ㄷ. 무한 부분집합 A 가 콤팩트라 하자. A 는 무한 집합이므로 서로 다른 $a_1, a_2, a_3, \dots \in A$ 를 택하자.
 $G_i = \mathbb{R} - \{a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots\}$ 라 하면 G_i 는 개집합이고 $A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} G_i$ 이므로
 $A \subset G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_n}$ 이 되는 $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}$ 있다.
 $N = \max\{i_1, \dots, i_n\} + 1$ 일 때 $a_N \notin G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_n}$
즉, $a_N \notin A$ 가 되어 모순이다. 따라서 A 는 콤팩트가 아니다.
그러므로 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$ 에서 콤팩트 집합은 유한집합이다.

17. ③

- ㄱ. $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$ 의 개집합 G 에 대하여 $j^{-1}(G) = G \cap \mathbb{Q}$ 는 $(\mathbb{Q}, \mathfrak{I}_{\mathbb{Q}})$ 에서 개집합이므로 j 는 연속이다.
- ㄴ. 하이네-보렐 정리에 의해 $A = [\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ 는 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$ 에서 cpt이다.
 $j^{-1}(A) = [\sqrt{2}, \sqrt{3}] \cap \mathbb{Q} = (\sqrt{2}, \sqrt{3}) \cap \mathbb{Q}$ 는 cpt가 아니다.
 $(\because) \left\{ \left[\sqrt{2} - \frac{1}{n}, \sqrt{3} \right] \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ 은 $j^{-1}(A)$ 의 개피복이지만
어떤 유한 피복도 $j^{-1}(A)$ 를 피복할 수 없다.
- ㄷ. $(\mathbb{Q}, \mathfrak{I}_{\mathbb{Q}})$ 의 개집합 $H = G \cap \mathbb{Q}$, $G \in \mathfrak{I}$ 에 대하여
 $f^{-1}(H) = f^{-1}(G \cap \mathbb{Q}) = f^{-1}(j^{-1}(G)) = (j \circ f)^{-1}(G)$ 이며,
 $j \circ f$ 는 연속이므로 $f^{-1}(H) = (j \circ f)^{-1}(G)$ 는 X -개집합. f 는 연속이다.

18. ①

- \mathfrak{I}_1 은 하한위상으로, 완전비연결공간, 따라서 $A_1 = \{0\}$.
 $(\mathfrak{I}_1$ 의 공이 아닌 기저원 $[a, b]$ 는 진부분 개폐집합)
 \mathfrak{I}_2 에서 공집합이 아닌 진부분집합으로서 개·폐집합 없으므로 연결위상이다.
따라서 $A_2 = \mathbb{R}$.

19.

- * Y_1 : T_2 공간(O), cpt공간(X), 연결공간(O)
① $p \neq q$ 인 $p, q \in Y_1$ 에 대하여 $\varepsilon = d(p, q) > 0$ 라 하자.
 $G = Y_1 \cap B_d(p, \frac{\varepsilon}{2})$, $H = Y_1 \cap B_d(q, \frac{\varepsilon}{2})$ 라 하면
 $G \cap H = \emptyset$ 이고 G, H 는 Y_1 -개집합이다.
따라서 Y_1 은 T_2 공간이다.
② Y_1 은 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 에서 유계가 아니므로 하이네-보렐 정리에 의해 $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathfrak{I}_1)$ 에서 cpt가 아니다.
③ 함수 $f: \mathbb{R} \rightarrow Y_1$, $f(x) = (x, 1 - x)$ 라 정의하자. $p \in Y_1$ 과 $\varepsilon > 0$ 에 대하여
 $f^{-1}(B_d(p, \varepsilon)) = (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ 은 \mathbb{R} -개집합이므로 f 는 연속이다.
 $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathfrak{I}_1)$ 의 부분공간 \mathbb{R} 은 연결공간이므로 $f(\mathbb{R}) = Y_1$ 은 연결공간이다.

- * Y_2 : T_2 공간(X), cpt공간(O), 연결공간(O)
① $p \neq q$ 인 $p, q \in Y_2$ 에 대하여
 $p \in G, q \in H, G \cap H = \emptyset$ 인 $G, H \in \mathfrak{I}_2$ 있다 하면 $G \neq \emptyset, H \neq \emptyset$ 이므로
 $G = \mathbb{R}^2 - U, H = \mathbb{R}^2 - V$ 인 $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{I}_1)$ 에서 cpt 부분집합 U, V 있다.
하이네-보렐 정리에 따라
 U, V 는 $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{I}_1)$ 에서 유계폐집합이므로 $U \cup V$ 는 유계이다.
 $\emptyset = G \cap H = (\mathbb{R}^2 - U) \cap (\mathbb{R}^2 - V), \mathbb{R}^2 = U \cup V$ 이므로
 \mathbb{R}^2 가 유계가 되어 모순. Y_2 는 T_2 공간이 아니다.
② Y_2 의 개피복 $\{G_i\}_{i \in I}$ 라 하자. $\emptyset \neq G_{i_0}$ 인 $i_0 \in I$ 에 대하여
 $F_{i_0} \cap Y_2 \subset Y_2 \subset \bigcup_{i \in I} (\mathbb{R}^2 - F_i)$,
 $G_{i_0} = \mathbb{R}^2 - F_{i_0}, G_i = \mathbb{R}^2 - F_i$

- 인 $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{I}_1)$ 에서 cpt부분집합 F_{i_0}, F_i 있다.
 Y_2 는 $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{I}_1)$ 에서 폐집합이므로 $F_{i_0} \supset F_{i_0} \cap Y_2$ 는 cpt,
(유계)폐집합 F_i 에 대하여 $(\mathbb{R}^2 - F_i)$ 는 $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{I}_1)$ 에서 개집합이므로
 $F_{i_0} \cap Y_2 \subset (\mathbb{R}^2 - F_{i_1}) \cup \dots \cup (\mathbb{R}^2 - F_{i_n})$
인 $i_1, \dots, i_n \in I$ 있다.
 $Y_2 \subset \bigcup_{k=1}^n G_{i_k} = (\mathbb{R}^2 - F_{i_0}) \cup (\mathbb{R}^2 - F_{i_1}) \cup \dots \cup (\mathbb{R}^2 - F_{i_n})$
이므로 Y_2 는 cpt공간이다.

- ③ Y_2 의 공집합이 아닌 진부분집합으로서 개폐집합이 되는 집합 A 있다 하자.
 $A \neq \emptyset$ 이므로 $A = \mathbb{R}^2 - F$ 인 $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{I}_1)$ 에서 cpt집합 F 있다. A^c 은 개집합이므로 $A^c = F = \mathbb{R}^2 - G$ 인 $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{I}_1)$ 에서 cpt집합 G 있다.
 F, G 는 하이네-보렐 정리에 따라 $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{I}_1)$ 에서 유계(폐집합)이므로
 $F = \mathbb{R}^2 - G$ 는 모순이다. (좌변은 유계, 우변은 비유계)
그러므로 Y_2 는 연결공간이다.

20. ⑤

- ㄱ. 부분공간을 생각하자. 유한집합상의 여유한위상은 이산위상이므로 비연결이다.
- ㄴ.ㄷ. 부분공간을 생각하자. 무한집합상의 여유한위상공간에서 공집합이 아닌 진부분집합으로서 개집합이면서 폐집합이 되는 부분집합이 있으면 비연결이다. 이때 폐집합은 유한집합이고, 개집합도 되므로 여집합이 유한집합이 되어야 하는데, 이는 모순이다. 따라서 ㄴ. ㄷ. 보기는 연결이다.

* 무한 집합 상의 여유한위상공간에서 연결집합
: 단집합, 공집합, 무한부분집합, 전체집합

21.

21-1.

(공식 1)에 의해 $E=(g')^2+(h')^2$, $F=0$, $G=h^2$.

(공식 2)에 의해 $K=\frac{-1}{h(u)\sqrt{g'(u)^2+h'(u)^2}}\left(\frac{h'(u)}{\sqrt{g'(u)^2+h'(u)^2}}\right)_u$.

(공식 3)에 의해 $\|\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v\|=h(u)\sqrt{g'(u)^2+h'(u)^2}$ 이므로

$$\begin{aligned}\iint_M KdA &= \int_0^{2\pi} \int_a^b -\left(\frac{h'(u)}{\sqrt{g'(u)^2+h'(u)^2}}\right) du \\ &= -2\pi \left[\frac{h'(u)}{\sqrt{g'(u)^2+h'(u)^2}}\right]_a^b \\ &= -2\pi \left[\frac{h'(b)}{\sqrt{g'(b)^2+h'(b)^2}} - \frac{h'(a)}{\sqrt{g'(a)^2+h'(a)^2}}\right].\end{aligned}$$

21-2.

- 회전면 M 의 회전축: x 축
 - M 이 긴밀 정칙곡면일 h 및 도함수 h' , g' 의 조건
- ① 정칙곡선 $\alpha(u)$ 의 양 끝점이 다른 경우, 양 끝점이 회전축에 수직으로 만날 때 M 이 긴밀 정칙곡면이 되므로

$$\begin{aligned}g(a) &\neq g(b), \quad h(a)=0=h(b), \\ (a,b) \text{에서 } h(u) &> 0, \\ g'(a) &= 0 = g'(b), \\ h'(b) &< 0 < h'(a).\end{aligned}$$

전곡률 4π , 오일러 표수 2, 구면과 위상동형.

- ② 정칙곡선 $\alpha(u)$ 의 양 끝점이 같은 경우, 양 끝점에서 공통인 접선을 가질 때 M 이 긴밀 정칙곡면이 되므로

$$\begin{aligned}g(a) &= g(b), \quad h(a)=h(b), \\ [a,b] \text{에서 } h(u) &> 0, \\ \text{양수 } k \text{에 대하여 } (g'(a), h'(a)) &= k \cdot (g'(b), h'(a)).\end{aligned}$$

전곡률 0, 오일러 표수 0, 원환면(torus)과 위상동형.

22. * 일반적으로 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ 가 안 된다. (합집합일 때는 성립)
가정에 의해 $\overline{A} = X = \overline{B}$ 이다.

$x \in X$ 라 하자.

$x \in \overline{B}$ 이므로 x 를 포함하는 임의의 개집합 G 에 대하여 $G \cap B \neq \emptyset$ 이다.
 $y \in G \cap B (\subset X)$ 인 y 를 택하자.

$G \cap B$ 는 y 를 포함하는 개집합이고 $y \in X = \overline{A}$ 이므로
 $(G \cap B) \cap A \neq \emptyset$. 즉, $G \cap (A \cap B) \neq \emptyset$ 이 되어 $x \in \overline{A \cap B}$.

따라서 $X \subset \overline{A \cap B}$ 로부터 $\overline{A \cap B} = X$.
그러므로 $A \cap B$ 는 X 에서 조밀하다.

23. $p \in F^c$ 는 개집합이므로 $p \in V \subset F^c$ 인 $V \in \mathcal{B}$ 있다.

이때 V , V^c 은 개집합이다.

$f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in V^c \\ 0, & x \in V \end{cases}$ 라 하면

(F1) $x \in X$ 에 대하여 $f(x) = 0$ 또는 1이며 $0, 1 \in \mathbb{R}$
(F2) $x_1 = x_2 \in X$ 이면 $x_1 = x_2 \in V$ 또는 $x_1 = x_2 \in V^c$. 이때, $f(x_1) = f(x_2)$ 이다.
따라서 f 는 X 에서 \mathbb{R} 로의 함수이다.

$f(p) = 0$, $f(F) \subset f(V^c) = \{1\}$ 이고,
문제의 문맥상 F 는 공집합이 아니므로 $f(F) = \{1\}$ 이다.

f 가 연속함수임을 보이자.

\mathbb{R} 에서 임의의 개집합 G 에 대하여

$f^{-1}(G)$ 는 X , \emptyset , V , V^c 중 하나이므로 f 는 연속함수이다.

24. X 의 개피복 $\{G_i\}_{i \in I}$ 라 하자. $0 \in X$ 이므로 $0 \in G_{i_0}$ 인 $i_0 \in I$ 있다.

\mathcal{I} 의 원소 중에서 0을 포함하는 원소는 $(-1, 1)$ 을 포함하므로 $(-1, 1) \subset G_{i_0}$.
 $-1, 1$ 을 포함하는 $G_{i_{-1}}$ 과 G_{i_1} 에 대하여 $X \subset G_{i_{-1}} \cup G_{i_0} \cup G_{i_1}$ 이므로
 (X, \mathcal{I}) 는 콤팩트공간이다.

25. $W = (0, 1)$, $X = \{0, 1\}$, $Y = \emptyset$, $Z = \mathbb{R}$

26. $x \in X - A$ 라 하자. $y \in A$ 이면 X 는 T_2 -공간이므로

$x \in G_y$, $y \in H_y$, $G_y \cap H_y = \emptyset$ 인 개집합 G_y , H_y 있다.

이때 $x \in \bigcup_{y \in A} G_y$, $A \subset \bigcup_{y \in A} H_y$, $\left(\bigcup_{y \in A} G_y\right) \cap \left(\bigcup_{y \in A} H_y\right) = \emptyset$.

A 는 cpt이므로 유한부분피복 $\{H_{y_1}, H_{y_2}, \cdots, H_{y_n}\}$ 있다.

$$x \in \bigcup_{i=1}^n G_{y_i} = U, \quad A \subset \bigcup_{i=1}^n H_{y_i} = V, \quad U \cap V = \bigcup_{i=1}^n (G_{y_i} \cap H_{y_i}) = \emptyset.$$

27.

하위 영역	배점	예상 정답율(%)	출제근거 (이유)
고등수학(위상수학)	5	40	J. R. Munkres. Topology, a First Course. pp. 77-78 ; pp. 126-131

임의의 정수 $m \in \mathbb{Z}$ 을 택하고 m 의 임의의 열린 집합(개집합) U 를 택하자.
 U^c 가 유한 집합이므로 유한 개의 정수를 제외하면 나머지는 모두 U 안에 있다. 2점

(단, 수열의 수렴 정의를 알고 있다고 판단되는 경우 부분 점수 가능)
 U 안에 들어있지 않은 수열 $\{a_n\}$ 의 서로 다른 원소들의 개수는 유한 개 뿐이다. 3점

그 유한 개 원소 a_{n_1} , a_{n_2} , ..., a_{n_k} 의 첨자 n_1 , n_2 , ..., n_k 중 최대를 N 이라 하자. 4점

그러면, N 보다 큰 모든 정수 n 에 대하여, $a_n \in U$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 m 에 수렴한다. 5점

28. ①

㉠ $U \in \tau' \Leftrightarrow f^{-1}(U) \in \tau$ (닫힌 집합도 필요충분조건)

㉡ f 는 연속이므로 $f(C)$ 는 X/R 에서 컴팩트이다.

㉢ 일반적으로 성립하지 않는다. (개사상 정의)

* 함수가 전사일 때 상위상, 전사가 아닐 때 강위상

* $\tau' = \{U \subset X/R \mid f^{-1}(U) \in \tau\}$

29. ④

① 하이네-보렐 정리

② 폐집합 F 와 컴팩트 집합 T 에 대하여 $F \cap T = \emptyset$ 은

컴팩트이다. $F \cap T \neq \emptyset$ 일 때 F^c 은 개집합이고,

$F \cap T$ 의 개피복 $\{G_i\}_{i \in I}$ 라 하자. $F \cap T \subset \bigcup_{i \in I} G_i$,

$T \subset \bigcup_{i \in I} G_i \cup F^c$ 이고 T 는 컴팩트이므로

$T \subset G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \dots \cup G_{i_n} \cup F^c$.

따라서 $F \cap T \subset G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \dots \cup G_{i_n}$ 가 되어

$F \cap T$ 는 컴팩트이다.

③ 위상공간 X 의 컴팩트 집합 T 의 폐부분 집합 F 에 대하여 F^c 은 개집합이고 F 의 개피복 $\{G_i\}_{i \in I}$ 라 하자.

$F \subset \bigcup_{i \in I} G_i$ 에서 $T \subset X = F^c \cup F \subset \bigcup_{i \in I} G_i \cup F^c$,

따라서 $T \subset \bigcup_{i \in I} G_i \cup F^c$ 이고 T 는 컴팩트이므로

$T \subset G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \dots \cup G_{i_n} \cup F^c$ 이 되어

$F \subset G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \dots \cup G_{i_n}$. 그러므로 F 는 컴팩트이다.

④ \mathbb{R}^5 는 폐집합이지만 유계가 아니다.

[현대대수학]

<군>

1. 유한순환군의 부분군은 순환군이며, 각 위수별로 유일하게 존재한다.
 \mathbb{Z}_{200} 의 부분군으로서 6개의 부분군을 갖는 경우는 위수가 $2^2 \times 5$ 일 때이다.
따라서 \mathbb{Z}_{200} 의 부분군 $\text{Im}(\phi)$ 의 위수 $|\text{Im}(\phi)|=20$.
동형정리에 따라 $\mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{26} / \ker \phi \cong \text{Im}(\phi)$ 이므로 $|\ker \phi|=26$.

2. 소수 a 에 대하여 자연수 n 이 존재해서 $G = \mathbb{Z}_4 \times F^* \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{a^n-1}$.
 G 는 순환군이므로 $\gcd(4, a^n-1)=1$.
(유한순환군이므로 \mathbb{Z}_k 꼴로 나타낼 수 있다.)
 a 는 홀수일 수 없으므로 $a=2$.
 $|G|=4(2^n-1) \leq 160, 2^n \leq 41$ 이 되는 $n=1, 2, 3, 4, 5$ 이므로 $b=5$.

3. 192, 8
 G 는 순환군이므로 $G/H, K/H, L/H$ 도 순환군이다.
 $|G/H|=|G:H|=520$ 이므로 $G/H \cong \mathbb{Z}_{520}$.
 $\langle aH \rangle = G/H$ 의 생성원 개수는 $\varphi(520)=192$.
 $|K/H| = \frac{520}{\gcd(35, 520)} = 104$.
 $G/H = (K/H)(L/H)$ 이 성립하기 위해서는
 $520 = \frac{104 \cdot |L/H|}{|K/H \cap L/H|}, |L/H|=5 \cdot |K/H \cap L/H|, |L/H|$ 는 5의 배수.
라그랑지 정리에 따라 $|L/H|$ 는 5×104 의 약수.
순환군의 부분군은 각 위수별로 유일하므로 구하는 값 8.

4. $(a, b) \in \mathbb{Z}_{13}^* \times \mathbb{C}^*$ 일 때, $18 = |(a, b)| = \text{lcm}(|a|, |b|)$ 가 되는 경우의 수를 구하자.
 $|b|=18$ 일 때, $|a|=1, 2, 3, 6$ 이므로 경우의 수는
 $\varphi(18) \cdot [\varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(6)] = 36$.
 $|b|=9$ 일 때, $|a|=2, 6$ 이므로 경우의 수는 $\varphi(9) \cdot [\varphi(2) + \varphi(6)] = 18$.
 $|b|=6, 3, 2, 1$ 일 때, 가능한 $a \in \mathbb{Z}_{13}^*$ 는 존재하지 않는다.
 G 의 위수 18인 원소의 개수 54이므로
 G 의 위수 18인 순환부분군의 개수 $\frac{54}{\varphi(18)}=9$.

5. 6, 12
 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 5 \rightarrow 3$ 이므로 $\sigma = (124)(35)$. 따라서 $|\sigma|=6$.
* $(124)(35) = (35)(124), |\langle (124) \rangle \cap \langle (35) \rangle| = 1$.
 \mathbb{Z}_{12} 에서 $|9| = |9 \cdot 1| = \frac{12}{\gcd(9, 12)} = 4$ 이므로
 $\mathcal{S}_5 \times \mathbb{Z}_{12}$ 에서 $|(\sigma, 9)| = \text{lcm}(|\sigma|, |9|) = \text{lcm}(6, 4) = 12$.

6. 위수 6인 부분군을 H 라 하면 가정에 의해 H 는 G 의 정규부분군.
(다른 설명)
 $g \in G$ 일 때 gHg^{-1} 도 위수 6인 G 의 부분군이므로 $gHg^{-1} = H$, 즉 $H \triangleleft G$.
* 6은 소수 아니다.
코시 정리(제1 Sylow 정리)에 의해 위수 5인 G 의 부분군 K 있다.
 H 가 정규이므로 HK 는 G 의 부분군이다.
라그랑지 정리에 의해 $|H \cap K| \mid \gcd(|H|, |K|) = 1$.
따라서 $|H \cap K| = 1$ 이고, $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} = 30$.
그러므로 HK 는 위수 30인 G 의 부분군이다.

7. 36
 $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_n$: 순환군 $\Leftrightarrow \gcd(10, n) = 1 \Leftrightarrow \gcd(2, n) = 1 = \gcd(5, n)$
10이하의 자연수 중에서 2, 5와 서로 소인 개수=4이므로
구하는 값 $4 \times (10-1) = 36$.
* $1 = \gcd(10, n) = \gcd(10, n+10k), k \geq 0$

8. 잉여군 G/N 의 위수 $|G/N| = [G:N] = \frac{|G|}{|N|} = 5$.
 $h \in H \subset G, h^5 N = (hN)^5 = N$ 이므로 $h^5 \in N$.
 $|H|=8$ 이므로 $(hN)^8 = h^8 N = N$ 에서 $h^8 \in N$.
 $\gcd(5, 8) = 1$ 이므로 $5s + 8t = 1$ 인 정수 s, t 있다.
따라서 $h = h^1 = h^{5s+8t} \in N, H$ 는 군이므로 $H \leq N$.

9. 4
 $\text{im} f = f(\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_6) = f(\langle (1, 0), (0, 1) \rangle) = \langle f(1, 0), f(0, 1) \rangle$
 $= \langle 9, 0 \rangle = \{9s + 0t \mid s, t \in \mathbb{Z}\} = \langle 9 \rangle$.
 \mathbb{Z}_{12} 에서 $9 = 9 \cdot 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ 의 위수는
 $\frac{12}{\gcd(9, 12)} = 4$ 이므로 $|\text{im} f| = 4$.
동형정리에 의해 $|(\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_5)/K| = |\text{im} f| = 4$.

* 다른 풀이
 $K = \ker f$
 $= \{(m, n) \in \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_6 \mid 9m = 0 \pmod{12}\}$
 $= \{(m, n) \in \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_6 \mid m \equiv 0, 4, 8 \pmod{12}\}$
 $= \{0, 4, 8\} \times \mathbb{Z}_6$
 $= \{(4s, t)\} = \{s \cdot (4, 0) + t \cdot (0, 1)\}$
 $= \langle (4, 0), (0, 1) \rangle$
 $= \langle 4 \rangle \times \langle 1 \rangle \neq \langle (4, 1) \rangle$ 이므로 동형정리에 의해
 $|K| = 18, |(\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_6)/K| = 72/18 = 4$.

* $f(x, y) = 9 \cdot x + 0 \cdot y$
 $= (x + x + \cdots + x) + 0 \cdot y$

10. 1
 $|(5, 5)| = \text{lcm}(12, 6) = 12 = |G|$ 이므로 $|G/H| = 6$.
라그랑지 정리에 의해 $\overline{(3, 3)}$ 의 위수는 1, 2, 3, 6중의 하나이며
 $\overline{(3, 3)} \in H$ 이므로 구하는 값 1.
 $H = \{(5, 5), (10, 4), (3, 3), (8, 2), (1, 1), (6, 0), (11, 5), \dots\}$
* $\begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 6 \\ 5 & 5 \\ x & y \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \\ 0 & 0 \\ x & y-x \end{pmatrix}$ 이므로 $G/H \cong \mathbb{Z}_1 \times \mathbb{Z}_6, \overline{(3, 3)} \rightarrow (0, 0)$.

11. $m+n=26$
① G 는 유한 위수를 갖는 가환군이므로 라그랑지 정리의 역도 성립한다.
2014를 나누는 약수의 개수만큼 부분군을 갖는다.
따라서 $m=2 \cdot 2 \cdot 2=8$.
* 위수 n 인 부분군의 개수 $= \frac{(\text{위수 } n \text{인 원소 개수})}{\varphi(n)}$
 $= 1$ (순환군일 때)
② 유한순환군 G 의 부분군은 유한순환군이며 38은 2014를 나누므로 G 의 위수 38인 순환부분군 H 있으며, 이때 $H \cong \mathbb{Z}_{38}$ 의 생성원의 개수는
 $\varphi(38) = \varphi(2 \cdot 19) = 18 = n$, 구하는 값 $m+n=26$

* 다른 설명
 $G = \langle g \rangle$ 라 하자. $38 \mid 2014$ 이므로 위수 38인 원소 k 있다.
(그런 k 중의 한 예시: $k = g^{\frac{2014}{38}} = g^{53}$)
이때 $k = g^s$ 인 $s \in \{1, 2, \dots, 2014\}$ 있다.
 $|k| = |g^s| = 38 = \frac{2014}{(s, 2014)}$
 $\Leftrightarrow (s, 2014) = \frac{2014}{38} = 53$.
 $\Leftrightarrow (\frac{s}{53}, 38) = 1. (\frac{s}{53} \text{는 정수})$
 \therefore 구하는 개수는 38과 서로소인 개수 $\varphi(38) = 18$.

12. ③

중국인의 나머지 정리 적용.

- ㄱ. $\ker f = \{n \in \mathbb{Z} \mid f(n) = ([n]_2, [n]_3) = (0, 0)\}$
 $= \{n \in \mathbb{Z} \mid n \equiv 0 \pmod{2}, n \equiv 0 \pmod{3}\}$
 $= \{n \in \mathbb{Z} \mid n \equiv 0 \pmod{6}\}$
 $= \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$
 $= 6\mathbb{Z}$
- ㄴ. $G/Z(G) = \langle g+Z(G) \rangle$ 인 $g+Z(G) \in G/Z(G)$ 있다.
 $a, b \in G$ 이면
 $a+Z(G) = mg+Z(G), b+Z(G) = ng+Z(G)$ 인 $m, n \in \mathbb{Z}$ 있다.
* 여기서 mg 란 g 를 “ m 번” 더한다는 뜻이다.
이때, $a = mg + \alpha, b = ng + \beta$ 인 $\alpha, \beta \in Z(G)$ 있다.
이제 $a+b = (mg+\alpha) + (ng+\beta)$
 $= \alpha + mg + \beta + ng$
 $= \beta + ng + \alpha + mg$
 $= ng + \beta + mg + \alpha$
 $= b+a$ 이므로 G 는 아벨군이다.
- * 잉여군의 연산을 곱셈으로 간주하고 계산해도 된다.

- ㄷ. $400 = 16 \times 25 = 2^4 \cdot 5^2$ 의 지수 4와 2의 분할은 각각
 $4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1$, 5가지,
 $2 = 1+1$, 2가지 있다.
따라서 총 10가지의 서로 동형이 아닌 군이 있다.

13. ⑤

- ㄱ. $\phi: \mathbb{Z} \rightarrow G = \langle g \rangle, \phi(n) = g^n$ 은 동형사상.
- ㄴ. $4_{\square} / 2_{\Delta} \times 9_{\square} / 3_{\star} \times 5_{\Delta}, 3_{\star} / 2_{\Delta} \times 5_{\Delta} / 4_{\square} \times 9_{\square},$
 $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_{15} \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{36}.$
- ㄷ. 위수 360인 순환군은 $(\mathbb{Z}_{360}, +) = \langle 1 \rangle$ 과 동형이며 \mathbb{Z}_{360} 의 원소는
 $k \cdot 1 = 1+1+\cdots+1 = k$ 로 쓸 수 있다.
 $\mathbb{Z}_{360} = \langle k \rangle \Leftrightarrow |k| = 360 = \frac{360}{\gcd(360, k)}$ 에서
 $\gcd(360, k) = 1.$
구하는 개수는 $\varphi(360) = \varphi(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5) = 4 \cdot 6 \cdot 4 = 96.$

14. ③

- 주어진 가정에 의해 $|G| = 2 \times 3 \times 2 = 12$ 이고,
 G 의 적당한 원소 몇 개 계산을 통해 $\text{im} \phi = \mathbb{Z}_3^*$ 이므로
동형정리에 의해 $|\ker \phi| = 6$ 이다. $(\ker \phi \trianglelefteq G)$
 $S_3 \cong D_3$ 에는 위수 2인 원소 3개, 위수 3인 원소 1개.
 \mathbb{Z}_6 에는 위수 2인 원소 1개, 위수 3인 원소 2개.
 $\begin{pmatrix} 11 \\ 01 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 01 \end{pmatrix} \in \ker \phi$ 는 위수 3, $\therefore \ker \phi \cong \mathbb{Z}_6.$
- * $\ker \phi = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G \mid \phi \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = ac \equiv 1 \pmod{3} \right\}$
 $= \left\{ I, \begin{pmatrix} 11 \\ 01 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 01 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 \\ 02 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 21 \\ 02 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 22 \\ 02 \end{pmatrix} \right\}$
(위수: 1, 3, 3, 2, 2, 6)
- * 순환군의 부분군은 순환군이므로 부분순환군의 위수가 n 이면 위수 n 인 원소는 $\varphi(n)$ 개 있다.
- * $G/\ker \phi \cong (\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}, +)$

15. ⑤

- $\gcd(12, 7) = 1$ 이므로 $G \cong \mathbb{Z}_{84}.$
- ㄱ. G 는 가환군이므로 모든 부분군이 정규부분군이다.
- ㄴ. $|(3, 1)| = \text{lcm}(|3|, |1|) = \text{lcm}(4, 7) = 28.$
 $\phi: (G, +) \rightarrow (\mathbb{Z}_{84}, \times), \phi(a, b) = [ab]_{84}$ 는 동형사상,
 $(3, 1) \mapsto 3$ 의 위수 28이므로 $(3, 1)$ 의 G 에서 위수 28.

16. ③

- ① G 와 H 의 부분군의 개수가 같은데 $G \neq H$ 라 하면 $H \leq G, G \leq G$ 이므로 G 의 부분군의 개수가 더 많아야 한다.
- ② G 가 가환군이면 H, K 는 G 의 정규부분군이므로 $H \cap K$ 와 HK 도 G 의 정규부분군이 된다.
- * 이때 $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}, [HK: K] = [H: H \cap K], [HK: K] = [H: H \cap K].$
- ③ 실로우 정리 적용, $|G| = 2^2 \cdot 3$, 실로우-3부분군 H 있다.
 H 의 개수를 n_3 라 하면 $n_3 = 3k_1 + 1 \mid 12$ 에서 $k_1 = 0, 1, n_3 = 1, 4.$
 $n_3 = 1$ 인 경우 $H \trianglelefteq G$ 이므로 G 는 단순군이 아니다.
 $(\langle 2 \rangle \trianglelefteq \mathbb{Z}_{12})$
- ④ $G = \langle g \rangle$ 인 $g \in G$ 있다. $H = \langle g^s \rangle, K = \langle g^t \rangle$ 인 $s, t \in \mathbb{Z}$ 있다.
이때 H, K 는 가환군임이 자명하다.
(순환군(가환군)의 부분군은 가환군)
- ⑤ $e^{-1} = e \in H$ 이므로 $H \neq \emptyset.$
 $g, h \in H^{-1}$ 이면 $g = h_1^{-1}, h = h_2^{-1}$ 인 $h_1, h_2 \in H$ 있다.
이때 $gh^{-1} = h_1^{-1}h_2 \in H$ 이므로 $H^{-1} \leq G.$

17. ①

- ㄱ. 실로우 정리(코시 정리) 적용, 실로우-5부분군 H 있다. H 의 개수를 n_5 라 하면 $n_5 = 5k_1 + 1 \mid 40$ 에서 $k_1 = 0, n_5 = 1$ 이므로 $H \trianglelefteq G$ 이며 잉여군 G/H 가 정의되고, $|G/H| = [G: H] = |G| \div |H| = 40 \div 5 = 8.$
- ㄴ. G 는 유한 가환군이므로 라그랑지 정리의 역이 성립한다. 즉, $|G| = 4$ 의 약수 1, 2, 4를 위수로 하는 G 의 부분군이 각각 존재한다. (유일하지는 않다. $\mathbb{Z}_2 \times \{0\}, \{0\} \times \mathbb{Z}_2$) G 가 가환이므로 모든 부분군이 정규이다.
 $|N| = 1$ 일 때 $G/N \cong G, |N| = 2$ 일 때 $G/N \cong \mathbb{Z}_2, |N| = 4$ 일 때 $G/N \cong \{0\}.$ 따라서 X 에 속하면서 서로 동형이 아닌 잉여군은 모두 3개. 동형을 고려하면 4개 있다.
- ㄷ. $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{0 + \mathbb{Z}, 1 + \mathbb{Z}, 2 + \mathbb{Z}, 3 + \mathbb{Z}, 4 + \mathbb{Z}, 5 + \mathbb{Z}\}$
 $= \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\} \cong \mathbb{Z}_6$ 의 위수는 $6 = 2 \times 3$ 이므로
라그랑지 정리의 역에 의해 위수를 1, 2, 3, 6으로 갖는 부분군이 각각 1개씩, 총 4개 있다.

18. ④

- ㄱ. 정이면체군 D_4 , 사원수군 Q_8 은 위수 8인 비가환군.
- ㄴ. G : 부분군의 개수가 유한인 무한군이라 하자.
 $G = \bigcup_{g \in G} \langle g \rangle$ 라 쓸 수 있고, $|G| = \infty$ 이므로 $|g| = \infty$ 인 $g \in G$ 있다. 이때의 부분군 $\langle g \rangle$ 는 무한순환군이므로 \mathbb{Z} 와 동형이며, \mathbb{Z} 의 부분군은 $\langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle, \langle 3 \rangle, \dots$ 이므로 부분군의 개수가 유한하지 않다. 이는 부분군의 개수가 유한인 무한군이 있다고 가정한 데 모순이다.
그러므로 부분군의 개수가 유한인 군은 유한군이다.
- ㄷ. $27 = 3^3$ 이며, 지수 3의 분할의 수는 $3 = 2+1 = 1+1+1$, 3가지이므로 유한 Abel군의 기본정리에 의해 위수 27인 아벨군 중에서 동형이 아닌 것의 종류는 3가지.

19. ⑤

- ① 위수 2인 부분군은 $\langle (1\ 2) \rangle, \langle (1\ 3) \rangle, \langle (2\ 3) \rangle$, 3개 있다.
- ② 위수 6인 군은 \mathbb{Z}_6 또는 S_3 와 동형이므로 옳다.
- ③ 항등원이 아닌 원소 $g \in G$ 에 대하여 라그랑지 정리에 의해 $|g| \mid |G| = p$ 에서 $|g| = p$ 이므로 G 는 위수 p 인 순환군이 된다. 따라서 G 의 생성원의 개수 $\varphi(p) = p-1.$
- ④ 서로 다른 소수 p_i 와 자연수 e_i 가 존재해서
 $|G| = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$ 라 하면 실로우 정리(혹은 코시 정리)에 의해 G 는 비자명 진부분군을 갖게 되어 모순이다.
따라서 G 의 위수는 1 또는 소수이다.
그러므로 G 는 순환군이며 순환군은 가환군이다.
- ⑤ 라그랑지 정리에 의해 $|b| \mid |G| = 4$ 이므로 b 의 위수는 1, 2, 4 중 하나이다. $b, b^2 = c$ 는 항등원이 아니므로 $|b| = 4$, 즉 G 는 b 를 생성원으로 갖는 순환군.

20.

S_3 에서 $(1\ 2)^2 = \text{id}$, $(1\ 2\ 3)^3 = \text{id}$,
 $(1\ 2)^{-1}(1\ 2\ 3)(1\ 2) = (1\ 2)(1\ 2\ 3)(1\ 2) = (1\ 3\ 2) = (1\ 2\ 3)^{-1}$ 이므로
 $\phi: D_3 \rightarrow S_3$, $\phi(a) = (1\ 2)$, $\phi(b) = (1\ 2\ 3)$ 으로 정의한 ϕ 는 군동형사상이다.
 $D_3 = \langle (1\ 2), (1\ 2\ 3) \mid (1\ 2)^2 = (1\ 2\ 3)^3 = \text{id}, (1\ 2)^{-1}(1\ 2\ 3)(1\ 2) = (1\ 2\ 3)^{-1} \rangle$
 $\cong S_3$.

* D_n =(정 n 각형의 자기 자신으로의 합동변환)
=회전변환 \cup 대칭변환
 $\cong \mathbb{Z}_n \cup$ 위수 2

* 다른 설명

$|D_3| = |S_3| = 6$ 이고 D_3 는 조건으로부터 $ab \neq ba$ 이므로 비가환이며, 순환군도 아니다.
 $|D_3| = |S_3| = 6 = 2 \cdot 3$ 이고 코시 정리에 의해서 위수가 2, 3인 부분군이 존재하고(항등원은 제외) 이들을 각각 H, K 라 하자. H, K 의 개수를 각각 n_2, n_3 라 하면 Sylow정리에 의해 $n_2 = 2k_1 + 1 \mid 3$, $n_3 = 3k_2 + 1 \mid 2$ 에서 $k_1 = 0$ 또는 1이고 $k_2 = 0$ 이다.
 $\therefore n_2 = 1$ 또는 3이고 $n_3 = 1$ 이다.
그런데 만약 H 를 한 개만 가지면 $|H \cup K \cup \{e\}| = 4$ 이므로 D_3 의 원소의 개수 6에 대하여 모순이다. 그러므로 위수 2인 부분군은 3개 있다.
 S_3 는 항등원을 제외한 위수 3인 $\langle (123) \rangle = \langle (132) \rangle$ 이 1개 존재하고 위수 2인 부분군이 $\langle (1\ 2) \rangle, \langle (1\ 3) \rangle, \langle (2\ 3) \rangle$ 으로 3개 있다.
그러므로 Hasse 다이어그램이 일치하므로 $D_3 \cong S_3$ 이다.

21. $|Q| = 2^3$ 이므로

라그랑지 정리에 의해 Q 의 부분군 H 의 위수는 1, 2, 4, 8 중 하나이고, Sylow 정리에 의해 위수 1, 2, 4, 8인 부분군 H 가 반드시 존재한다.
① $|H| = 1$, 8이면 $H = \{I\}$, Q 이므로 자명한 정규부분군이다.
② $|H| = 2$ 인 $H = \{I, A^2\}$ 뿐이므로 $H \triangleleft Q$.
③ $|H| = 4$ 이면 $[Q:H] = \frac{|Q|}{|H|} = 2$ 이므로 H 는 Q 의 정규부분군이다. (실로우 정리에 의해 $H \triangleleft K$, 위수 2^3 인 부분군 K 있다. $K = Q$ 이므로 $H \triangleleft Q$)
* $H = \langle A, B \rangle$, $|A| = 4 = |B|$
* $N \triangleleft G$, $[G:N] = n$ 이면 $a^n \in N$ ($a \in G$)

22. $(\emptyset \neq) G$ 는 순환군이므로 가환군이다.

(1) σ : (잘 정의됨), 준동형, 단사, 전사
① 준동형: $\sigma(gh) = (gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1} = g^{-1}h^{-1} = \sigma(g)\sigma(h)$
② 단사: $g \in \ker \sigma \Leftrightarrow \sigma(g) = g^{-1} = e \Leftrightarrow g = e \Leftrightarrow \ker \sigma = \{e\}$.
③ 전사: $\text{Im} \sigma = \{\sigma(g) \mid g \in G\} = \{g^{-1} \mid g \in G\} = \{g \mid g^{-1} \in G\} = G$.

(2) $\phi: G \rightarrow G$ 가 동형사상이라 하자.
 $G = \langle \alpha \rangle = \{\alpha^s \mid s \in \mathbb{Z}\}$ 라 할 때, $\phi(\alpha) = \alpha^n$ 인 $n \in \mathbb{Z}$ 있다.
 $\phi(G) = \phi(\langle \alpha \rangle) = \langle \phi(\alpha) \rangle$ 이므로 $\langle \alpha^n \rangle = G = \langle \alpha \rangle$.
이때 $(\alpha^n)^t = \alpha^{nt} = \alpha$ 인 $t \in \mathbb{Z}$ 있다.
 nt 가 1이 아니면 α 가 유한 위수를 갖게 되어 모순.
따라서 $nt = 1$, 곱해서 1되는 정수는 ± 1 들 밖에 없다.
그러므로 $n = \pm 1$.
즉, G 에서 G 로의 동형사상은 $\phi(\alpha) = \alpha^{-1}$ 또는 α 인 σ 와 항등사상 뿐.
* 무환순환군은 \mathbb{Z} 와 동형.
* $\phi: G \rightarrow \mathbb{Z}$, $\phi(g) = \phi(\alpha^n) = n$ 라 두면 ϕ 는 동형사상.
* 유한순환군 G 의 위수 n 이면 G 는 \mathbb{Z}_n 과 구조가 같다.

23. 2, 6, 7, 8

원시근은 위수 10인 군 G 의 생성원이므로 원시근을 g 라 하면 $|g| = 10$.
10의 약수는 1, 2, 5, 10이므로
범 11에 대하여 $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^5 = -1$ 이므로 2는 G 의 원시근이다.
따라서 G 의 모든 원소는 $k = 1, \dots, \phi(11) = 10$ 에 대해 2^k 라 쓸 수 있다.
다른 원시근은 2^k 로 쓸 수 있고, $10 = |2^k| = \frac{|G|}{\gcd(10, k)} \Leftrightarrow \gcd(10, k) = 1$.
 $\therefore k = 1, 3, 7, 9$.
모든 원시근은 $2^1, 2^3, 2^7 = -2^2, 2^9 = -2^4$.
정리하면 G 의 모든 원시근 2, 8, 7, 6이다.
* $G = \langle 2 \rangle = \langle 6 \rangle = \langle 7 \rangle = \langle 8 \rangle$.

24.

하위 영역	배점	예상정답율(%)	관련사고영역	출제자
대 수	5	50	이해	좌준수
출제 내용 관련자료	W.Nicholson. Introduction to Abstract Algebra. PWS. pp. 114-125			

G 가 군이므로 임의의 $g, h \in G$ 에 대하여 $gh \in G$ 이고
문제의 가정에 의해 $g^{-1} = g$, $h^{-1} = h$, $(gh)^{-1} = gh$ 가 성립한다.
한편, $(gh)h^{-1}g^{-1} = gg^{-1} = e$ (항등원)이므로 $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$ 이다.
따라서 다음이 성립한다. $gh = (gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1} = hg$.
그러므로 G 는 가환군이다.

* 채점기준

$(gh)^{-1} = gh$ 를 언급하면 1점
 $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$ 를 증명하면 3점
($(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$ 를 증명없이 언급만 하면 2점)
 $h^{-1}g^{-1} = hg$ 를 언급하면 1점

25.

하위 영역	배점	예상 정답율(%)	출제근거 (이유)
고등수학(대수학)	4	50	김응태, 박승안, 현대대수학, pp. 59-64

두 번째 조건식의 양변을 제공하면
 $b^4 = (b^2)^2 = (aba^{-1})(aba^{-1}) \quad \therefore b^4 = ab^2a^{-1} \dots\dots\dots 1\text{점}$
우변의 b^2 대신에 aba^{-1} 을 대입하면
 $b^4 = a(aba^{-1})a^{-1} = a^2ba^{-2} \dots\dots\dots 2\text{점}$
이 식을 다시 제공하면
 $b^8 = (a^2ba^{-2})(a^2ba^{-2}) \quad \therefore b^8 = a^2b^2a^{-2} \dots\dots\dots 3\text{점}$
우변의 b^2 대신에 다시 aba^{-1} 을 대입하면
 $b^8 = a^2(aba^{-1})a^{-2} = a^3ba^{-3} = b$
 $b \neq e$ 이므로, $b^7 = e$
7은 소수이므로 b 의 위수는 7이다. 4점

26. $\ker \phi \triangleleft H$

① $\ker \phi \leq H$
 $\phi(e_G) = e_H$, $e_G \in \ker \phi$ 이므로 $\ker \phi \neq \emptyset$.
 $a, b \in \ker \phi$ 에 대하여 $\phi(ab^{-1}) = \phi(a)\phi(b)^{-1} = e_H$ 이므로 $ab^{-1} \in \ker \phi$.
그러므로 $\ker \phi \leq H$.
② $\ker \phi \triangleleft H$
임의의 $h \in H$ 와 임의의 $k \in \ker \phi$ 에 대하여
 $\phi(hkh^{-1}) = \phi(h)\phi(k)\phi(h^{-1}) = \phi(h)e_H\phi(h^{-1}) = \phi(h)\phi(h)^{-1} = e_H$.
즉 $gkg^{-1} \in \ker \phi$
따라서 위의 결과에 의해서 $\ker \phi$ 는 H 의 정규부분군이다.

27. ②

㉠ $i \notin \mathbb{R}$

㉡ $\gcd(5, 12) = 1$ 이므로 옳다.

* $\langle 5 \rangle = \{5n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ (덧셈군으로 간주)
 $= \{5n + 12m \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$
 $\ni 5 \cdot (5) + 12 \cdot (-2) = 1$ 이므로

$\mathbb{Z}_{12} = \langle 1 \rangle \subset \langle 5 \rangle \subset \mathbb{Z}_{12}$, 즉 $\mathbb{Z}_{12} = \langle 5 \rangle$.

㉢ $f: \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_{mn}, f(a, b) = [a + b]_{mn}$ 라 하자.

$f((a, b) + (c, d)) = f(a + c, b + d)$
 $= [a + c + b + d]_{mn}$
 $= [(a + b) + (c + d)]_{mn}$
 $= [a + b]_{mn} + [c + d]_{mn}$
 $= f(a, b) + f(c, d)$ 이므로

f 는 준동형사상이다.

$f(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n) = f(\langle (1, 0), (0, 1) \rangle)$
 $= \langle f(1, 0), f(0, 1) \rangle$
 $= \langle 1 \rangle = \mathbb{Z}_{mn}$ 이므로

f 는 전사이다. 따라서 f 는 단사이다.

그러므로 f 는 군-동형사상이다.

㉣ 치환군은 비가환군이다.

28. ③

$G = \{i, -i, 1, -1\}$

① $a^2 + b^2 + c^2 = (-i)^2 + 1^2 + (-1)^2 = 1$

② 곱셈 교환법칙이 성립한다.

③ 덧셈 항등원 0이 없다.

④ $\{1\}$ 는 곱셈군을 이룬다.

<환>

1. \mathbb{Z}_{10} 에서 3은 단원이므로 3을 포함하는 가장 작은 아이디얼은 \mathbb{Z}_{10} 이다.
 \mathbb{Z}_{12} 에서 8을 포함하는 가장 작은 아이디얼은 $\langle 8 \rangle = \langle 4 \rangle$.
따라서 $(3, 8)$ 을 포함하는 R 의 가장 작은 아이디얼은 $\mathbb{Z}_{10} \times \langle 4 \rangle$.
동형정리에 따라 $R/\ker\phi \cong S$. $\phi(3, 8) = 0_S$ 이므로 $(3, 8) \in \ker\phi$.
따라서 $\mathbb{Z}_{10} \times \langle 4 \rangle \subset \ker\phi$.
이때 가능한 $\ker\phi$ 는 $\mathbb{Z}_{10} \times \langle 4 \rangle$, $\mathbb{Z}_{10} \times \langle 2 \rangle$, $\mathbb{Z}_{10} \times \langle 1 \rangle$ 이므로
 $R/(\mathbb{Z}_{10} \times \langle 4 \rangle) \cong \mathbb{Z}_4$, $R/(\mathbb{Z}_{10} \times \langle 2 \rangle) \cong \mathbb{Z}_2$, $R/(\mathbb{Z}_{10} \times \langle 1 \rangle) \cong \{0_R\}$, 3개 있다.

2. $|\mathbb{Z}_n[x]/I| = n^2 \leq 40$, $n \leq 6$.
 $(\mathbb{Z}_n[x]/I, +, \times)$ 의 표수 n 이 홀수이므로 $n = 3, 5$.
 $\mathbb{Z}_n[x]/I$ 은 유한정역이므로 체이다.
따라서 I 는 극대아이디얼이 되어야 하므로
2차 다항식 $x^2 + ax + 1 - a$ 는 PID $\mathbb{Z}_n[x]$ 에서 기약이다.
 $n = 3$ 일 때 $a = 0, 2$.
 $n = 5$ 일 때 $a = 2, 3, 4$.
구하는 순서쌍 $(3, 0), (3, 2), (5, 2), (5, 3), (5, 4)$.

3. $\mathbb{Z}[i]$ 는 ED이므로 PID이다. $I = \langle a + bi \rangle$ 인 정수 a, b 가 존재.
 $\nu(\alpha) = 10$, $\nu(\beta) = 25$, $\alpha, \beta \in I$ 이므로 $\nu(a + bi) = a^2 + b^2 \mid \gcd(10, 25) = 5$,

 $a = \pm 1$, $b = 0$ 또는 $a = 0$, $b = \pm 1$ 인 경우 $I = \mathbb{Z}[i]$.
 $a = \pm 2$, $b = \pm 1$ 또는 $a = \pm 1$, $b = \pm 2$ 인 경우 $(\mathbb{Z}[i])^* = \{\pm 1, \pm i\}$ 이므로
 $I = \langle 2 + i \rangle$ 또는 $\langle 2 - i \rangle$ 가 가능하며, 이 중 α, β 를 포함하는 $I = \langle 2 - i \rangle$.
그러므로 가장 작은 $I = \langle 2 - i \rangle = \langle \pm 2 \mp i \rangle$.

정수 c, d 가 존재해서 $\eta = (2 - i) \cdot (c + di)$ 이므로
 $\nu(\eta) = 5 \cdot (c^2 + d^2) \geq 5$, $\nu(\eta)$ 의 최솟값 5.
 $\mathbb{Z}[i]/I = \{\overline{r + si} \mid 0 \leq r < 5, 0 \leq s < 1\}$
 $= \{\bar{r} \mid 0 \leq r < 5\}$
 $\cong (\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ 이므로 $\mathbb{Z}[i]/I$ 의 표수 = 5.

$\mathbb{Z}[i]/\langle a + bi \rangle = \left\{ \overline{r + si} \mid 0 \leq r < \frac{a^2 + b^2}{\gcd(a, b)}, 0 \leq s < \gcd(a, b) \right\}$
위수: $a^2 + b^2$, 표수: $\frac{(a^2 + b^2)}{\gcd(a, b)}$

4. 2, 6, 7, 8
2의 위수 10이므로 $\mathbb{Z}_{11}^* = \langle 2 \rangle$ 이며, 생성원 2^k , $\gcd(k, \varphi(11)) = 1$ 꼴이다.
따라서 생성원(원시근)은 $2, 2^3 = 8, 2^7 = 7, 2^9 = 6$, 즉 2, 6, 7, 8.

5. $\gcd(2, 5) = 1$, $\ker\psi = \{0\} \times 5 \cdot 2^n \mathbb{Z}$ 이므로 동형정리에 따라
 $\text{im}\psi \cong (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\ker\psi \cong \mathbb{Z}/\{0\} \times \mathbb{Z}/5 \cdot 2^n \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{5 \cdot 2^n}$.
 $|\left(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{5 \cdot 2^n}\right)^*| = 2 \cdot \varphi(5 \cdot 2^n) = 2 \cdot (4 \cdot 2^{n-1}) = 2^{n+2}$ 이므로 구하는 $n = 5$.

6. $p(x) = x^4 - 4x^2 + 2$, $g(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x^3 + 2x^2)$
 α 를 근으로 갖는 다항식 $p(x) = x^4 - 4x^2 + 2$ 는
소수 2에 대한 아이젠슈타인 판정법에 의해 $\mathbb{Q}[x]$ 에서 기약,
 $K = \{f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid \varphi_\alpha(f(x)) = f(\alpha) = 0\}$
 $= \{f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid \text{irr}(\alpha, \mathbb{Q}) \mid f(x)\}$
 $= \{f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid f(x) \in \langle p(x) \rangle\}$
 $= \langle p(x) \rangle$

체 \mathbb{Q} 의 다항식환 $\mathbb{Q}[x]$ 에 관한 나눗셈 알고리즘에 의해
 $p(x) = (x - 2)(x^3 + 2x^2) + 2$ 이므로
 $\bar{0} = \overline{p(x)} = \overline{(x - 2) \cdot (x^3 + 2x^2) + 2}, \overline{x - 2} \cdot \overline{-(x^3 + 2x^2)} = 1$.

그러므로 $g(x) = -\frac{1}{2}x^3 - x^2 \neq \overline{g(x)}$.
* 정수환 \mathbb{Z} 의 분수체 \mathbb{Q}
* \mathbb{Q} 는 체이므로 $\mathbb{Q}[x]$ 는 PID
* $\mathbb{Q}[x]$ 는 PID이므로 $\langle p(x) \rangle = K$ 는 극대아이디얼
* K 가 극대아이디얼이므로 $\mathbb{Q}[x]/K$ 는 체
* $\mathbb{Q}[x]/K$ 가 체이므로 영 아닌 모든 원소가 역원 갖는다
* $\gcd(p(x), x - 2) = \gcd(x - 2, 2) = 1, \overline{x - 2} \in (\mathbb{Q}[x]/K)^*$

7. 36
 $J = \langle x \rangle$, $K = \langle x - 1 \rangle$, $x - (x - 1) = 1$,
 $J + K = \langle \gcd(x, x - 1) \rangle = \langle 1 \rangle = \mathbb{Z}_7[x]$,
 $J \cap K = \langle \text{lcm}(x, x - 1) \rangle = \langle x \cdot (x - 1) \rangle = I$ 이므로
중국인의 나머지 정리와 제1동형정리에 의해
 $\mathbb{Z}_7[x]/I = \mathbb{Z}_7[x]/J \cap K \cong (\mathbb{Z}_7[x]/J) \times (\mathbb{Z}_7[x]/K) \cong \mathbb{Z}_7[0] \times \mathbb{Z}_7[1] \cong \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7$.
 $|\mathcal{U}(\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7)| = |\mathbb{Z}_7^* \times \mathbb{Z}_7^*| = 6 \cdot 6 = 36$ 이므로 $|\mathcal{U}(\mathbb{Z}_7[x]/I)| = 36$.

* $\mathbb{Z}_7[x]/\langle x \rangle = \{\overline{f(x)} \mid \deg f(x) < \deg x = 1\}$
 $= \{\dots, \bar{x}, \overline{x + 1}, \overline{x + 2}, \dots\}$
 $= \{\dots, \bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{6}, \dots\}$
 $\cong \mathbb{Z}_7$
* PID에서 $\langle a \rangle + \langle b \rangle = \langle c \rangle \Leftrightarrow c = \gcd(a, b)$
 $\Rightarrow as + bt = c$ 인 s, t 있다.

8. 10
 \mathbb{Z}_5 는 체이므로 $\mathbb{Z}_5[x]$ 는 PID이다. 따라서 $I = \langle f(x) \rangle$ 인 $f(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$ 있다.
(가)에 의해
 $|\mathbb{Z}_5[x]/I| = |\{r(x) + I \mid r(x) \in \mathbb{Z}_5[x], \deg r(x) < \deg f(x)\}|$
 $= 5^{\deg f(x)} = 25, \deg f(x) = 2$.

$f(x) = (x - a)^2$ 꼴이면 (나)를 만족하지 않는다.
 $a \neq b$ 인 $a, b \in \mathbb{Z}_5$ 에 대하여 $f(x) = (x - a)(x - b)$ 라 하면
제3동형정리에 의해
 $\mathbb{Z}_5[x]/\langle f(x) \rangle \cong (\mathbb{Z}_5[x]/\langle x - a \rangle) \times (\mathbb{Z}_5[x]/\langle x - b \rangle)$
 $\cong \mathbb{Z}_5[a] \times \mathbb{Z}_5[b]$
 $\cong \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ 의 극대 아이디얼 $\mathbb{Z}_5 \times \{0\}, \{0\} \times \mathbb{Z}_5$, 2개 있다.

* $\langle x - a \rangle / \langle f(x) \rangle, \langle x - b \rangle / \langle f(x) \rangle \subset \mathbb{Z}_5[x] / \langle f(x) \rangle$
그러므로 조건을 만족시키는 아이디얼의 개수는 \mathbb{Z}_5 의 서로 다른 a, b 를
순서와 관계없이 뽑는 경우의 수 $_5C_2 = 10$ 과 같다.

* $\mathbb{Z}_5[x]$ 에서 $\langle 2x + 1 \rangle = \langle x + 3 \rangle, 3 \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_5[x])$
* 대응정리에 의해 $\mathbb{Z}_5[x]/I$ 의 모든 아이디얼은
 $r(x) \mid f(x)$ 인 $r(x)$ 에 대해 $\langle r(x) \rangle / I$ 라 나타낼 수 있다.
* $r(x) \mid f(x) \Leftrightarrow f(x) \in \langle r(x) \rangle \Leftrightarrow I \subset \langle r(x) \rangle$

9. $\text{char}R=30$

\mathbb{Z} 는 PIR이며, \mathbb{Z} 의 잉여환 $\mathbb{Z}/\langle 60\rangle\cong \mathbb{Z}_{60}$ 은 PID.

\mathbb{Z}_{60} 의 아이디얼은 $k\mid 60$ 인 k 에 대하여 $\langle k\rangle$,

$\mathbb{Z}_{60}/\langle k\rangle\cong \mathbb{Z}_{\gcd(60,k)}=\mathbb{Z}_k$ 이다.

* \mathbb{Z}_{60} 의 아이디얼의 개수 $= (2+1)(1+1)(1+1)=12$

* $2\neq 14$ 이지만 $\langle 2\rangle=\langle 14\rangle$, $\langle 2\rangle=\langle k\rangle$ 인 k 개수 $=\varphi(60/2)$

60의 표준분해 $60=2^2\cdot 3\cdot 5$ 이므로

\mathbb{Z}_k 가 체가 되는 $k=2, 3, 5$.

그러므로 $R=(\mathbb{Z}_{60}/\langle 2\rangle)\times(\mathbb{Z}_{60}/\langle 3\rangle)\times(\mathbb{Z}_{60}/\langle 5\rangle)$
 $\cong \mathbb{Z}_2\times \mathbb{Z}_3\times \mathbb{Z}_5\cong \mathbb{Z}_{30}$, $\text{char}R=\text{char}\mathbb{Z}_{30}=30$.

10. ㉔

ㄱ. $ab=0$ 인 $b\neq 0$ 인 $b\in \mathbb{Z}_n$ 있다. 이때 a 가 단원이면 $ac=1=ca$ 인 $c\in \mathbb{Z}_n$ 있다.

$0=0\cdot c=ab\cdot c=ac\cdot b=b$ 가 되어 모순이다.

* $U(\mathbb{Z}_n)=\{m\in \mathbb{Z}_n\mid \gcd(m,n)=1\}$, $|U(\mathbb{Z}_n)|=\varphi(n)$.

ㄴ. $\text{char}R=n=ab$, $a>1$, $b>1$ 라 하자.

$0=n\cdot 1$

$=1+1+\cdots +1$ (n 번 $=ab$ 번 연산)

$=(1+1+\cdots +1)(1+1+\cdots +1)$ (a 번 $\cdot b$ 번 연산)

$=(a\cdot 1)(b\cdot 1)$ 이므로

$n=\text{char}R=\min\{a,b\}<n$ 이 되어 모순이다.

* 표수는 덧셈군에서 단위원 1의 위수(라그랑지 적용가능)

ㄷ. 소수 3에 대한 아이젠슈타인 판정법에 의해 옳다.

* 주어진 다항식은 실근 1개, 허근 6개를 갖는다.

* 실근 $-3<\alpha<-2$, $\deg(\alpha,\mathbb{Q})=[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]=7$

11. ㉑

$\ker\varphi=\{a+b\alpha\in \mathbb{Z}[\alpha]\mid \varphi(a+b\alpha)=\mathbf{0}\}$
 $=\{a+b\alpha\in \mathbb{Z}[\alpha]\mid [a]_3\varphi(1)+[b]_3\varphi(\alpha)=\mathbf{0}\}$
 $=\left\{a+b\alpha\in \mathbb{Z}[\alpha]\mid [a]_3\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+[b]_3\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\mathbf{0}\right\}$
 $=\{a+b\alpha\in \mathbb{Z}[\alpha]\mid [a]_3=0=[b]_3\}$ (\because 일차독립)
 $=\{3(r+s\alpha)\mid r,s\in \mathbb{Z}\}$
 $=3\cdot \mathbb{Z}[\alpha]$
 $=\langle 3\rangle$.

동형정리에 의해 $\text{im}(\varphi)\cong \mathbb{Z}[\alpha]/\ker\varphi=\mathbb{Z}[\alpha]/\langle 3\rangle\cong \mathbb{Z}_3[\alpha]$.

$f(x)=x^2-x-1\in \mathbb{Z}_3[x]$ 는 α 를 근으로 갖는 기약다항식이므로 $\mathbb{Z}_3[\alpha]$ 는 체.
따라서 $\mathbb{Z}_3[\alpha]=\mathbb{Z}_3(\alpha)$ 이고 $\text{im}(\varphi)$ 는 F_9 와 동형이다.

* $\varphi(1)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\varphi(\alpha)=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$ 는 $M_2(\mathbb{Z}_3)$ 에서 일차독립.

* $\text{im}\varphi=\varphi(\mathbb{Z}[\alpha])=\varphi(\langle 1,\alpha\rangle)=\left\langle \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\right\rangle$, $|\text{im}\varphi|=3^2=9$.

* 환 $(\mathbb{Z}_3\times \mathbb{Z}_3,+,\times)$ 에는 곱셈 위수 3 넘는 원소 없다.

* 환 $\text{im}(\varphi)$ 의 원소 $\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$ 은 위수 $8(=|[\text{im}(\varphi)]^*|)$ 이다.

12.

(I) 참

S 의 아이디얼 J 라 하자.

(나)에 의해 $\varphi^{-1}(J)$ 는 $\mathbb{R}[x]$ 의 아이디얼이고,

(가)에 의해 $\varphi^{-1}(J)=\langle f(x)\rangle$ 인 $f(x)\in \mathbb{R}[x]$ 있다.

$\varphi(\mathbb{R}[x])=S$, 즉 φ 는 전사이므로 $\varphi(\varphi^{-1}(J))=J$, $J=\varphi(\langle f(x)\rangle)=\langle \varphi(f(x))\rangle$.
그러므로 S 는 PID.

(II) 거짓

φ 는 전사 환준동형사상이고,

환준동형사상 $\psi:\mathbb{R}[x]\rightarrow S/\varphi(I)$, $\psi(f(x))=\varphi(f(x))+\varphi(I)$ 에 대하여

$\ker\psi=\varphi^{-1}(\varphi(I))=I$, $\text{im}\psi=\psi(\mathbb{R}[x])=\varphi(\mathbb{R}[x])/\varphi(I)=S/\varphi(I)$ 이므로

동형정리에 따라 $\mathbb{R}[x]/I\cong S/\varphi(I)$.

즉, $S/\varphi(I)$ 의 대수적 구조는 $\mathbb{R}[x]/I$ 와 일치한다.

$x^2+2x+2\in \mathbb{R}[x]$ 는 $\mathbb{R}[x]$ 에서 해를 갖지 않으므로 기약이다.

(다)에 의해 I 는 $\mathbb{R}[x]$ 의 극대아이디얼이이며, $\mathbb{R}[x]/I$ 는 체이다.

체(단순환)의 아이디얼은 2개 있으므로 $S/\varphi(I)$ 의 아이디얼은 2개 있다.

(III) 참

$\varphi(1)=\varphi(1^2)=\varphi(1)^2$ 에서 $\varphi(1)=0$ 또는 $\varphi(1)=1$.

$\varphi(1)=1$ 라 하자.

$\varphi(\sqrt{2})=m$ 인 $m\in \mathbb{Z}$ 있다.

$\varphi(2)=m^2=\varphi(1+1)=2\varphi(1)=2$, 즉 제공해서 2가 되는 정수 있다. 모순.
따라서 $\varphi(1)=0$ 이고, $\varphi(\mathbb{R}[x])=\varphi(1\cdot \mathbb{R}[x])=\varphi(\langle 1\rangle)=\langle \varphi(1)\rangle=\langle 0\rangle=\{0\}$.
그러므로 $\mathbb{R}[x]/\ker\varphi=\mathbb{R}[x]/\mathbb{R}[x]\cong \{0\}$ 의 아이디얼 1개 있다.

13. ㉑

ㄱ. $\delta:\mathbb{Z}[i]\rightarrow \mathbb{N}\cup \{0\}$, $\delta(a+bi)=a^2+b^2$ 라 정의하자.

㉑ $\delta(\alpha)=0\iff N(\alpha)=\alpha\overline{\alpha}=0\iff \alpha=0$ 이고,

$\alpha,\beta\in \mathbb{Z}[i]$, $\beta\neq 0$ 이면 $\delta(\beta)\geq 1$ 이므로

$\delta(\alpha)\leq \delta(\alpha)\delta(\beta)=|N(\alpha)||N(\beta)|=\delta(\alpha\beta)$.

㉒ $\alpha,\beta\in \mathbb{Z}[i]$, $\beta\neq 0$ 일 때

$\frac{\alpha}{\beta}=u+vi\in \mathbb{Q}(i)$ 일 때,

x,y 를 각각 유리수 u,v 에 가장 가까운 정수,

$\gamma=x+yi\in \mathbb{Z}[i]$, $\varepsilon=\alpha-\beta\gamma\in \mathbb{Z}[i]$

라 하면,

$\varepsilon=\alpha-\beta\gamma=\beta\left(\frac{\alpha}{\beta}-\gamma\right)=\beta[(u-x)+(v-y)i],$

$N(\varepsilon)=N(\beta)[(u-x)^2-m(v-y)^2]$

이고 $0\leq |u-x|\leq \frac{1}{2}$, $0\leq |v-y|\leq \frac{1}{2}$ 이므로

$0\leq (u-x)^2-m(v-y)^2\leq \frac{1}{4}-\frac{m}{4}<1$.

$\delta(\varepsilon)=|N(\varepsilon)|<|N(\beta)|=\delta(\beta)$ 이므로 $\mathbb{Z}[i]$ 는 유클리드 정역이다.

그러므로 $\mathbb{Z}[i]$ 는 PID이다.

ㄴ. $U(\mathbb{Z}[i])=\{a^2-b^2=\pm 1\mid a,b\in \mathbb{Z}\}=\{\pm 1,\pm i\}$

ㄷ. $\mathbb{Z}[i]$ 는 PID이고, $2=(1+i)(1-i)$ 이며 $1+i, 1-i$ 는 $\mathbb{Z}[i]$ 의 단원이 아님.

따라서 2는 $\mathbb{Z}[i]$ 의 기약원이 아니므로 $\langle 2\rangle$ 는 극대아이디얼이 아니다.

실제로, $\langle 2\rangle\subsetneq \langle 1+i\rangle\subsetneq \mathbb{Z}[i]$.

14. ①

- ㄱ. $g(1)=g(1^2)=[g(1)]^2$ 이므로 $g(1)=0$ 또는 1 . g 는 단사이므로 $g(1)=1$.
환준동형사상의 성질에 따라 $n \in \mathbb{Z}$ 에 대해 $g(1 \cdot n)=g(n)=n$.
- ㄴ. \mathbb{Z} 는 PID이므로 \mathbb{Z} 의 이데알 $I=\langle m \rangle=m\mathbb{Z}$ 인 $m \in \mathbb{Z}$ 있다.
 $g(I)=g(m\mathbb{Z})=m \cdot g(\mathbb{Z})=mg(\langle 1 \rangle)=m\langle g(1) \rangle=m\mathbb{Z}$.
 $m \cdot 3 \in m\mathbb{Z}$, $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ 에 대하여 $\frac{1}{2} \cdot (m \cdot 3)=m \cdot \frac{3}{2} \notin m\mathbb{Z}$ 이므로
 $m\mathbb{Z}$ 는 \mathbb{Q} 의 아이디얼이 아니다.
* $I \neq m + \mathbb{Z}$
- ㄷ. 유리수체 \mathbb{Q} 의 아이디얼 $\{0\}$, \mathbb{Q} , 2개 뿐이다.
 \mathbb{Q} 의 아이디얼 $J=\{0\}$ 에 대하여 $g(I)=J$ 되는 \mathbb{Z} 의 아이디얼 $\{0\}$ 있다.
 \mathbb{Q} 의 아이디얼 $J=\mathbb{Q}$ 에 대하여 $g(I)=J$ 가 되는 아이디얼 없다.
(\because) 임의의 $n \in \mathbb{Z}$ 에 대하여 $g(n)=n$ 이므로
 $g(I)=J=\mathbb{Q}$ 되는 아이디얼이 존재하지 않는다.
* 임의의 \mathbb{Z} 의 아이디얼 $n\mathbb{Z}$ 에 대하여 $g(n\mathbb{Z})=n\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q}$.

15. ②

- ① R 에서 $4 \neq 0$, $6 \neq 0$, $4 \cdot 6=0$ 이므로 R 은 정역이 아니다.
- ② $U(\mathbb{Z}_{24})=\{n \mid \gcd(n, 24)=1\}$, $\mathbb{Z}_{24} \subset R$ 이므로
 $U(\mathbb{Z}_{24}) \subset U(R)$, $|U(\mathbb{Z}_{24})|=\varphi(24)=8 \leq |U(R)|$.
* $n \in \mathbb{N}$, $(12x^n+1) \cdot (12x^n+1)=1$, $|U(R)|=\infty$.
- ③ R 의 단위원(곱셈항등원) 1 , $\text{char} R=24$,
 $S=\mathbb{Z}_4[x] \times \mathbb{Z}_6[x]$ 의 단위원 1 , $\text{char} S=\text{lcm}(4, 6)=12$.
표수가 다르므로 환동형이 아니다.
* $\mathbb{Z}_{24}[x] \cong \mathbb{Z}_3[x] \times \mathbb{Z}_8[x]$, $\gcd(3, 8)=1$
- ④ $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3) \equiv 0 \pmod{24}$
 $\Leftrightarrow f(x) \equiv 0 \pmod{3}$, $f(x) \equiv 0 \pmod{8}$
 $\Leftrightarrow x \equiv 1, 2, 3 \pmod{3}$, $x \equiv 1, 2, 3, 5, 7 \pmod{8}$
이므로 \mathbb{Z}_{24} 에서 $f(x)$ 는 15개 해를 갖는다.
(중국인 나머지 정리)
* $x \equiv a_i 8x_1 + b_j 3x_2 \pmod{24}$, $a_i \in \{1, 2, 3\}$, $b_j \in \{1, 2, 3, 5, 7\}$.
* $8x_1 \equiv 1 \pmod{3}$, $3x_2 \equiv 1 \pmod{8}$ 에서
 $x_1 \equiv 2 \pmod{3}$, $x_2 \equiv 3 \pmod{8}$.
* $x \equiv 16a_i + 9b_j \equiv 1, 10, 19, 13, 7, 17, 2, 11, 29, 23, 9, 18, 3, 45, 15$
- ⑤ $x^2+12=(x+6)(x-6)$, $0+I=\overline{0}=\overline{x+6} \cdot \overline{x-6}$,
 $\overline{x+6}=x+6+I \neq 0+I$, $\overline{x-6} \neq I$ 이므로 R/I 는 정역이 아니며, 체도 아님.

16. ②

- ① $\langle 1 \rangle = \mathbb{Z}$, $\langle 2 \rangle = 2\mathbb{Z}$, ..., $\langle 2, 6 \rangle = \langle 2 \rangle$, $\langle 5, 6 \rangle = \langle 1 \rangle$, ...
* $n\mathbb{Z}$ 는 \mathbb{Z} 의 부분환 ($n \in \mathbb{Z}$)
- ② \mathbb{Z} 에는 곱셈항등원(단위원) 1있다. $3\mathbb{Z}$ 에는 곱셈항등원 없다.
- ③ \mathbb{Z} 는 PID, 17은 \mathbb{Z} 의 소원(기약원), $\langle 17 \rangle = 17\mathbb{Z}$ 은 극대이데알.
* \mathbb{Z} 는 PID이고 PID에서 기약원 \Leftrightarrow 극대아이디얼 생성
* $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_{17}$ 은 체이므로 $17\mathbb{Z}$ 는 \mathbb{Z} 의 극대아이디얼.
* 정수계수 다항식환 $\mathbb{Z}[x]$ 는 PID 아님, $(2, x)$
- ④ (1), (2), (-4) , (-17) , ... 많다.
- ⑤ 정역에서 소원 \Rightarrow 기약원
* \mathbb{Z} 는 UFD이고 UFD에서 소원 \Leftrightarrow 기약원
* F : UFD이면 $F[x]$: UFD

17. ②

- ① \mathbb{Z} 는 환이고 임의의 $m \in \mathbb{Z}$ 에 대하여 $m \in \mathbb{Z}[x]$ 이므로 \mathbb{Z} 는 $\mathbb{Z}[x]$ 의 부분환이다.
- ② $\mathbb{Z}[i]$ 에는 제공해서 -1 이 되는 원소 i 있다. $\mathbb{Z}[x]$ 가 $\mathbb{Z}[i]$ 와 환동형이라면 $\mathbb{Z}[x]$ 에도 제공해서 -1 이 되는 원소가 있어야 한다. 그러나 임의의 정수 다항식의 제공은 0이상이므로 모순이다.
* $\mathbb{Z}[i]$ 는 PID, $\mathbb{Z}[x]$ 는 PID가 아니다. (\mathbb{Z} 는 체가 아니다.)
* $\mathbb{Z}[x]$ 의 단원 ± 1 , $\mathbb{Z}[i]$ 의 단원 $\pm 1, \pm i$.
- ③ \mathbb{Z} 는 UFD(유클리드 호제법 사용가능)이므로 $\mathbb{Z}[x]$ 는 UFD이다.
- ④ 정역 \mathbb{Z} 에 대하여 $E=\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ 위의 $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad=bc$ 로 정의된 동치관계 \sim 에 대하여 $(a, b) \in E$ 를 포함하는 동치류를 $\frac{a}{b}$, 동치류 전체의 집합을 F , F 의 연산을
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$
로 정의하자. \mathbb{Z} 의 분수체 $(F, +, \times)$ 는 유리수체 \mathbb{Q} 와 동형이다.
* 이차 체 $\mathbb{Q}(\sqrt{m})=\{a+b\sqrt{m} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ 는 정역 $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ 의 분수체.
- ⑤ $f(x) \in U(\mathbb{Z}[x])$ 이면 $f(x)g(x)=1$ 되는 $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 있다.
양변 비교하면 $f(x), g(x) \in \mathbb{Z} - \{0\}$,
이때 $f(x)=\pm 1$. 따라서 $U(\mathbb{Z}[x])=U(\mathbb{Z})=\{\pm 1\}$.

18. ④

- ㄱ. α 가 F 위에서 대수적이므로 α 를 근으로 갖는 $f(x) \in F[x]$ 있다.
 $f(x) \in \ker \phi_\alpha$ 이므로 $\ker \phi_\alpha \neq \{0\}$.
* 실제로 $\ker \phi_\alpha = \langle \text{irr}(\alpha, F) \rangle$ ($F[x]$: PID, 자연수 정렬성 이용)
- ㄴ. ϕ_α 가 전사일 때 동형정리에 의해 성립한다. 항상 성립하지 않는다.
* 예: $F=\mathbb{Q}$, $\alpha=\sqrt{2}$, $E=\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})=\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$
- ㄷ. $F[x]/\ker \phi_\alpha$ 는 체이므로 $\ker \phi_\alpha$ 는 $F[x]$ 의 소아이디얼.
* $\ker \phi_\alpha = \langle \text{irr}(\alpha, F) \rangle$ 는 $F[x]$ 에서 극대아이디얼, 소아이디얼도 된다.

19. ⑤

- ① \mathbb{Z}_5 는 체이므로 $\mathbb{Z}_5[x]$ 는 주아이디얼정역이고,
여기서 극대아이디얼 $\langle f(x) \rangle \Leftrightarrow f(x)$ 가 기약다항식.
 $x^3+3x+2 \in \mathbb{Z}_5[x]$ 는 \mathbb{Z}_5 에서 해를 갖지 않으므로
기약다항식이다. 따라서 $\langle x^3+3x+2 \rangle$ 는 극대이데알.
- ② $\mathbb{Z}_6/\langle 3 \rangle \cong \mathbb{Z}_3$ 는 체이므로 $\langle 3 \rangle$ 는 극대이데알.
 $\mathbb{Z}_6/\langle 3 \rangle \cong \mathbb{Z}_{\gcd(6, 3)} = \mathbb{Z}_3 \neq \mathbb{Z}_2$
- ③ 소수 2에 대한 아이젠슈타인 판정법에 의해
 $x^5-4x+22 \in \mathbb{Q}[x]$ 는 기약이고 \mathbb{Q} 는 체이므로
 $\langle x^5-4x+22 \rangle$ 는 $\mathbb{Q}[x]$ 의 극대아이디얼.
- ④ $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/(2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/(\langle 2 \rangle \times \langle 1 \rangle)$
 $= (\mathbb{Z}/\langle 2 \rangle) \times (\mathbb{Z}/\langle 1 \rangle)$
 $\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_1 \cong \mathbb{Z}_2$ 는 체이므로 옳다.
- ⑤ 정역 $\mathbb{Z}[x]$ 의 원소 $3x^3+x^2+x-2=(3x-2)(x^2+x+1)$ 이므로 극대아이디얼이 아니다.
* $\mathbb{Z}[x]$ 의 아이디얼 $I=\langle 3x^3+x^2+x-2 \rangle$ 라 하자.
 $\mathbb{Z}[x]/I$ 에서 $\overline{3x+2} \neq 0+I$, $\overline{x^2+x+1} \neq 0+I$ 이지만
(3차 다항식이 1, 2차 다항식은 못나눈다.)
 $\overline{3x+2} \cdot \overline{x^2+x+1} = \overline{(3x^3+x^2+x-2)} = \overline{0} = 0+I = \bar{0}$.
따라서 $\mathbb{Z}[x]/I$ 는 정역부터 안된다. 그래서 체도 안된다.
즉, I 는 $\mathbb{Z}[x]$ 의 극대이데알이 아니다.

20. ①

① UFD의 성질, I 의 조건과 무관하다.

* 체 \Rightarrow ED \Rightarrow PID \Rightarrow UFD

[② \Rightarrow ③]

$I = \langle p(x) \rangle$ 인 기약다항식 $p(x) \in F[x]$ 택하자.

$\langle p(x) \rangle = 0 + I \neq f(x) + \langle p(x) \rangle \in F[x]/I$ 에 대하여

$f(x) \notin \langle p(x) \rangle$ 이므로 $p(x)$ 는 $f(x)$ 를 나누지 못하므로

$\gcd(p(x), f(x)) = 1$ 즉, $p(x)s(x) + f(x)t(x) = 1$ 인 $s(x), t(x) \in F[x]$ 있다.

$1 - f(x)t(x) = p(x)s(x) \in \langle p(x) \rangle$ 이므로 $1 + \langle p(x) \rangle = f(x)t(x) + \langle p(x) \rangle$

즉, 영이 아닌 $\overline{f(x)} \in F[x]/I$ 는 곱셈 역원 $\overline{t(x)}$ 갖는다.

[③ \Rightarrow ④]

$I \subset J \subset F[x]$ 인 이데알 J 라 하자. $F[x]/J \subset F[x]/I$ 이므로

$0 \neq \overline{f(x)} \in F[x]/J \subset F[x]/I$ 에 대하여

$\overline{f(x)} \cdot \overline{t(x)} = \overline{1} = 1 + \langle p(x) \rangle$ 인 $\overline{t(x)} \in F[x]/I$ 있다.

이때 $f(x)t(x) - 1 = \alpha$ 인 $\alpha \in I$ 있다.

여기서 $1 = f(x)t(x) - \alpha \in J, J = F[x]$.

[④ \Rightarrow ⑤]

I 는 극대이데알이므로 $F[x]/I$ 는 체이고 따라서 $F[x]/I$ 는 정역이다.

그러므로 I 는 $F[x]$ 의 소이데알이다.

21. $a \neq 0$ 일 때, $a \mid b$ 임을 보이자.

* \mathbb{Z} : 체 아님 $\Leftrightarrow \mathbb{Z}[x]$: PID 아님

\mathbb{Z} : 정역 $\Leftrightarrow \mathbb{Z}[x]$: 정역

$I = \langle f(x) \rangle$ 인 $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 를 택하자.

$\langle a, bx \rangle \subset \langle f(x) \rangle, a, bx \in \langle f(x) \rangle$ 이므로 $f \mid a, f \mid bx$ 이며,

a 는 정수이므로 $f \in \mathbb{Z}, f \mid a, f \mid b$.

$\langle f(x) \rangle \subset \langle a, bx \rangle, f(x) \in \langle a, bx \rangle = \langle a \rangle + \langle bx \rangle$ 이므로

$f(x) = a \cdot s(x) + bx \cdot t(x)$ 인 $s(x), t(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 있다.

$x = 0$ 대입하면 $f(x) = f(0) = a \cdot s(0), a \mid f$.

그러므로 $a \mid b$.

22.

$\text{im} f = f(\mathbb{Z}) = f(\langle 1 \rangle) = \langle f(1) \rangle$

$$= \langle 6m + 4n \rangle (m, n \in \mathbb{Z})$$

$$= 2\langle 3m + 2n \rangle = 2\langle 1 \rangle \quad (\because \gcd(3, 2) = 1)$$

$$= 2\mathbb{Z}_6.$$

* $0, 1, 2, 3, 4, 5 \in \mathbb{Z}$ 만 대입해서 비교해도 충분하다.

$\ker f = \{n \in \mathbb{Z} \mid f(n) = 4n = 0 \pmod{6}\} = 3\mathbb{Z}$.

동형정리에 의해 $\mathbb{Z}/\ker f = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \text{im} f = 2\mathbb{Z}_6$.

23. $\ker f = 105\mathbb{Z}$

중국인의 나머지 정리에 의해

$x \in \ker f \Leftrightarrow$ 법 $3, 5, 7$ 에 대하여 $x \equiv 0$

\Leftrightarrow 법 $3 \cdot 5 \cdot 7$ 에 대하여 $x \equiv 0$

$\Leftrightarrow x \equiv 0 \pmod{105}$

$\Leftrightarrow x \in 105\mathbb{Z},$

$\ker f = 105\mathbb{Z}.$

24. 특수해 $f(53) = (\overline{2}, \overline{3}, \overline{4})$ 이므로 일반해 $53 + \ker f = 53 + 105\mathbb{Z}$.

구하는 정수 $x = 53 + 105m, m \in \mathbb{Z}$.

* $x \equiv 2 \pmod{3}, x \equiv 3 \pmod{5}, x \equiv 4 \pmod{7}$

* 해집합 $f^{-1}[(2 + 3\mathbb{Z}, 3 + 5\mathbb{Z}, 4 + 7\mathbb{Z})] = 53 + \ker f$

* $4 + 7\mathbb{Z}$ 원소 나열하면서 비교, 특수해 + $\ker f$.

25. $F[x]$ 의 이데알 I 라 하자. $I = \langle 0 \rangle$ 는 주이데알이다. $I \neq \langle 0 \rangle$ 라 하자.

$D = \{\deg f(x) \mid f(x) \in I \setminus \{0\}\}$ 라 하면

$D \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$ 이므로 자연수 정렬성 원리에 의해 $n = \min D$ 있다.

$\deg f(x) = n$ 인 $f(x) \in I$ 택하자. $\langle f(x) \rangle \subset I$ 임은 자명하다.

$g(x) \in I$ 에 대하여 나눗셈 알고리즘에 의해

$$g(x) = f(x)Q(x) + R(x), \quad 0 \leq \deg R(x) < \deg f(x) \quad \text{또는} \quad R(x) = 0$$

인 $Q(x), R(x) \in F[x]$ 가 유일하게 존재한다.

이때 $f(x)Q(x)$ 좌변 이항하면

$R(x) = g(x) - f(x)Q(x) \in I = \{0, f(x), g(x), \dots\}$ 이고

I 는 아이디얼이므로 $R(x) \in I$ 이다.

이때 $\deg f(x)$ 는 I 의 최소차수 다항식이므로 $R(x) = 0$.

즉 $g(x) = f(x)Q(x) \in \langle f(x) \rangle$.

그러므로 $I = \langle f(x) \rangle$ 는 $F[x]$ 의 주아이디얼이다.

26. $a \neq 0$ 인 $a \in D$ 에 대하여 $a, a^2, a^3, \dots \in D$ 이고 D 는 유한집합이므로

$m > n, a^m = a^n$ 인 자연수 m, n 있다.

$a^n(a^{m-n} - 1) = 0, a \neq 0$ 이므로 $a^{m-n} = a \cdot a^{m-n-1} = 1$.

영 아닌 임의의 원소가 단원이므로 D 는 체이다.

27. J 는 R 의 아이디얼

① $0 \in J$ 이므로 $J \neq \emptyset$

② $a, b \in J$ 이면 $a^m = 0, b^n = 0$ 인 $m, n \in \mathbb{Z}^+$ 있다.

$$\begin{aligned} (a-b)^{m+n} &= \sum_{k=0}^n {}_{m+n}C_k (-b)^k a^{m+n-k} + \sum_{k=n+1}^{m+n} {}_{m+n}C_k (-b)^k a^{m+n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{m+n}{k} (-b)^k \cdot 0 + \sum_{k=n+1}^{m+n} \binom{m+n}{k} 0 \cdot a^{m+n-k} \\ &= 0, \quad \text{즉} \quad a-b \in J \text{이므로} \quad (J, +) \leq (R, +) \end{aligned}$$

③ $a \in J, r \in R$ 라 하면 $a^n = 0$ 인 $n \in \mathbb{Z}^+$ 있다. R 은 가환환이므로

$$(ra)^m = r^m a^m = r^m \cdot 0 = 0 \text{이므로} \quad ra = ar \in J.$$

그러므로 J 는 R 의 아이디얼이다.

28. ②

\mathbb{Z}_2 는 체이므로 $\mathbb{Z}_2[x]$ 는 PID, $f(x)$ 는 \mathbb{Z}_2 에서 해를 갖지 않으므로 기약.

PID에서 기약다항식 $f(x)$ 에 대하여 $\langle f(x) \rangle$ 는 극대이데알.

$$|\mathbb{Z}_2[x]/\langle f(x) \rangle| = 2^{\deg f(x)} = 4.$$

$f(x)$ 의 한 근을 $\alpha \in \overline{\mathbb{Z}_2}$ 라 할 때,

$$\phi: \mathbb{Z}_2[x] \rightarrow \mathbb{Z}_2[x]/\langle f(x) \rangle, \quad \phi(g(x)) = g(\alpha) + \langle f(x) \rangle,$$

$$\ker \phi = \langle f(x) \rangle, \quad \text{im} \phi = \mathbb{Z}_2[x]/\langle f(x) \rangle.$$

$$* \quad \mathbb{Z}_2[x]/\langle f(x) \rangle = \langle 1, \alpha \rangle_{\mathbb{Z}_2} = \{a + b\alpha \mid a, b \in \mathbb{Z}_2\}$$

* $\mathbb{Z}_2[x]/\langle f(x) \rangle$ 는 $x^2 - x \in \mathbb{Z}_2[x]$ 의 분해체이며,

$f(x)$ 의 두 개 해는 $x^2 - x$ 의 해이다.

* $\mathbb{Z}_2[x]$ 의 $f(x)$ 는 분리다항식이다.

29. ④

(가) $\mathbb{Z}_2[x]$ 의 이차 다항식은 $x^2, x^2 + x, x^2 + 1, x^2 + x + 1$, 4개 있으며, \mathbb{Z}_2 에서 근을 갖지 않으면 기약이므로 $x^2 + x + 1$ 만 기약이다.

(나) $2x^2 \in \mathbb{Z}_4[x], 2x^2 \neq 0$ 이지만 $(2x^2) \cdot (2x^2) = 0$ 이므로 $\mathbb{Z}_4[x]$ 는 정역이 아니다. $\mathbb{Z}_4[x] \supset \mathbb{Z}_4$ 부터 정역이 아님

(다) $\sum_{i=0}^n a_i x^i, \sum_{j=0}^m b_j x^j \in R[x]$ 에 대하여

$$f(x)g(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_{n+m}x^{n+m}, \quad c_i = \sum_{k=0}^i a_k b_{i-k}$$

$$= d_0 + d_1x + \dots + d_{m+n}x^{m+n}, \quad d_i = \sum_{k=0}^i b_k a_{i-k}$$

$$= g(x)f(x).$$

(라) $f(x), g(x) \in R[x], f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$ 이면

$$\deg(f(x)g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x) \geq 0 \text{이므로}$$

$f(x)g(x) \neq 0, R[x]$ 는 정역이다.

* $R[x]$ 의 단원군 $U(R[x]) = U(R), R$ 의 단원군

<체>

1. $k \in \mathbb{Z}_7$ 일 때 $f(k) \neq 0$ 이므로 $f(x)$ 는 일차 인수를 갖지 않는다.
 $f(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$ 인 $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_7$ 가 있다고 하면
 $a + c = 0, ac + b + d = 3, ad + bc = 0, bd = -1.$
 $0 = a(d - b)$ 이므로 $a = 0$ 또는 $b = d.$
 $a = 0$ 인 경우 $b + d = 3, bd = -1$ 이 되는 b, d 는 \mathbb{Z}_7 에 존재하지 않는다.
 $b = d$ 인 경우 $b^2 = -1 = 6$ 이 되는 b 는 \mathbb{Z}_7 에 존재하지 않는다.
그러므로 $f(x)$ 는 기약이다.
유한체 $\mathbb{Z}_7(\alpha)/\mathbb{Z}_7 = \text{GF}(7^4)$ 의 갈루아군 $G(\mathbb{Z}_7(\alpha)/\mathbb{Z}_7)$ 는 위수 4인 순환군.
따라서 위수 4인 원소 σ 는 $G(\mathbb{Z}_7(\alpha)/\mathbb{Z}_7)$ 의 생성원이므로 $|\sigma^2| = 2.$
갈루아 정리에 따라 $|E| = 7^2 = 49.$

2. K 는 \mathbb{Q} 위의 갈루아 확대체이므로 갈루아 정리 적용.
 $[K : \mathbb{Q}] = |G(K/\mathbb{Q})| = |\mathbb{Z}_2 \times S_3| = 12, 6 = [E : \mathbb{Q}]$ 이므로 $|G(E/\mathbb{Q})| = 2.$
 $\mathbb{Z}_2 \times S_3 = \mathbb{Z}_2 \times D_3$ 의 위수 2인 원소의 개수는 7개 있으므로
 $G(K/\mathbb{Q})$ 의 위수 2인 (순환)부분군의 개수 $7/\varphi(2) = 7.$
따라서 조건을 만족하는 K 의 부분체 E 의 개수는 7.
정규부분군 $\mathbb{Z}_2 \times \{1\}$ 와 동형인 $G(K/\mathbb{Q})$ 의 부분군 H 라 하자.
고정체 $K_H = F$ 는 \mathbb{Q} 위의 정규확대체이며,
 $G(F/\mathbb{Q}) \cong G(K/\mathbb{Q})/H \cong (\mathbb{Z}_2 \times S_3)/(\mathbb{Z}_2 \times \{1\}) \cong S_3.$

3. $\alpha = \sqrt[23]{88}, \zeta = e^{\frac{2\pi i}{23}}$ 일 때 $K = \text{SF}(x^{23} - 88/\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}(\alpha, \zeta).$
 $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = \deg(\alpha, \mathbb{Q}) = 23, [\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = \varphi(23) = 22.$
 $\gcd(23, 22) = 1$ 이므로 $[K : \mathbb{Q}] = \text{lcm}(23, 22) = 506 = 2 \cdot 11 \cdot 23.$
 $[K : E] - [E : \mathbb{Q}]$ 가 $1010 = 2 \cdot 5 \cdot 101$ 의 양의 약수인 경우는
 $[K : E] = 506$ 또는 $[K : E] = 23, 2$ 가지 있다.
 $[K : E] = 506$ 인 경우, 소체 $E = \mathbb{Q}.$
 $[K : E] = 23$ 인 경우, $E = \mathbb{Q}(\zeta).$
(실로우 23-부분군의 개수 $n_{23} = 23k + 1 \mid 22, n_{23} = 1$)
그러므로 문제의 조건을 만족하는 체 E 의 개수 2.

4. K 는 \mathbb{Q} 위의 13번째 원분확대체이므로
 $K = \text{SF}(x^{13} - 1/\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}(\zeta), [K : \mathbb{Q}] = 12,$
 $G(K/\mathbb{Q}) = \{\sigma_i \mid \sigma_i(\zeta) = \zeta^i, \gcd(i, 13) = 1, 1 \leq i \leq \varphi(13)\}$
 $= \langle \sigma_2 \rangle = \langle \sigma_6 \rangle = \langle \sigma_7 \rangle = \langle \sigma_{11} \rangle$
 $\cong (\mathbb{Z}_{13}^*, \cdot)$
 $= \langle 2 \rangle = \langle 2^5 \rangle = \langle 2^{11} \rangle = \langle 2^7 \rangle$ 이다.

$\sigma \in X \Leftrightarrow K_{\langle \sigma \rangle} = \mathbb{Q} \Leftrightarrow G(K/K_{\langle \sigma \rangle}) = \langle \sigma \rangle = G(K/\mathbb{Q})$ 이므로
 X 의 원소 개수는 순환군 $G(K/\mathbb{Q})$ 의 생성원의 개수 $\varphi(12) = 4$ 와 같다.
 X 의 원소 각각에 대한 ζ 의 상은 다음과 같다.
 $\sigma_2(\zeta) = \zeta^2, \sigma_6(\zeta) = \zeta^6, \sigma_7(\zeta) = \zeta^7, \sigma_{11}(\zeta) = \zeta^{11}.$
 $\sigma_2^2(\beta) = \beta$ 이므로 $\beta \in K_{\langle \sigma_2^2 \rangle}, \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\beta) \subset K_{\langle \sigma_2^2 \rangle}.$
 $6 = |\sigma_2^2| = |G(K/K_{\langle \sigma_2^2 \rangle})| = [K : K_{\langle \sigma_2^2 \rangle}] = \frac{[K : \mathbb{Q}]}{[K_{\langle \sigma_2^2 \rangle} : \mathbb{Q}]} = \frac{12}{[K_{\langle \sigma_2^2 \rangle} : \mathbb{Q}]}$ 에서
 $[K_{\langle \sigma_2^2 \rangle} : \mathbb{Q}] = 2, \beta \notin \mathbb{Q}$ 이므로 $\deg(\beta, \mathbb{Q}) = [\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] = [K_{\langle \sigma_2^2 \rangle} : \mathbb{Q}] = 2.$
 \mathbb{Q} 위의 β 와 켄레 원소들=해집합 $= \{\tau(\beta) \mid \tau \in G(K/\mathbb{Q})\} = \{\beta, \sigma_2(\beta)\}.$
따라서 $\beta, \sigma_2(\beta)$ 는 2차 방정식 $\text{irr}(\beta, \mathbb{Q}) = 0$ 의 두 근이다.
 $0 = \zeta^{13} - 1 = (\zeta - 1)(\zeta^{12} + \zeta^{11} + \dots + \zeta + 1), \zeta^{12} + \dots + \zeta + 1 = 0$ 임을 이용하면
두 근의 합 $\beta + \sigma_2(\beta) = -1,$ 두 근의 곱 $\beta \cdot \sigma_2(\beta) = -1 - 1 - 1 = -3$ 이므로
 $\text{irr}(\beta, \mathbb{Q}) = (x - \beta)(x - \sigma_2(\beta)) = x^2 + x - 3.$

* $\text{SF}(x^n - a/\mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q}(e^{2\pi i/n}, \sqrt[n]{a}) & , a > 0 \\ \mathbb{Q}(e^{2\pi i/n}, \sqrt[n]{a} \cdot e^{\pi i/n}) & , a < 0 \end{cases}$

5. $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = \deg(x^3 - 2) = 3,$
 $\text{SF}(x^{75} - 1/\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{75}}, \sqrt[75]{1}) = \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{75}})$ 는 \mathbb{Q} 위의 75번째 원분확대체이므로
 $[\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{75}} : \mathbb{Q})] = \varphi(75) = 40$ 이다. $\gcd(3, 40) = 1$ 이므로 $[K : \mathbb{Q}] = 120.$
 K 는 \mathbb{Q} 위의 갈루아 확대체이므로 $|G(K/\mathbb{Q})| = [K : \mathbb{Q}] = 120.$

$x^3 - 2, x^{25} - 1$ 의 \mathbb{Q} 위의 분해체를 각각 E_1, E_2 라 하면
 $E_1 = \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{3}}, \sqrt[3]{2}), E_2 = \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{25}}, \sqrt[25]{1}) = \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{25}}),$
 $[E_1 : \mathbb{Q}] = \deg(x^3 - 2) \cdot \deg(x^2 + x + 1) = 6, [E_2 : \mathbb{Q}] = \varphi(25) = 20$ 이다.
따라서 $H_1 = G(K/E_1), H_2 = G(K/E_2)$ 는 각각 위수 20, 6인
 $G(K/\mathbb{Q})$ 의 정규부분군이다.

“ $[E_1 \cap E_2 : \mathbb{Q}] = 1$ 이므로 $|H_1 \cap H_2| = 1$ 이다.”
 $\sigma \in H_1 \cap H_2$ 이면 $\alpha = \sqrt[3]{2}, e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{\frac{2\pi i}{25}}$ 라 할 때 $\sigma(\alpha) = \alpha$ 이므로 $\sigma(e^{\frac{2\pi i}{75}}) = e^{\frac{2\pi i}{75}}.$
그러므로 σ 에 의한 K 의 고정체 $K_{\langle \sigma \rangle} = K$ 이므로 $\sigma = \text{id}, H_1 \cap H_2 = \{\text{id}\}.$

(다른 설명)
 E_1, E_2 의 부분체 $E_1 \cap E_2$ 에 대하여 $[E_1 \cap E_2 : \mathbb{Q}] \mid \gcd(6, 20) = 2$ 이므로
 $[E_1 \cap E_2 : \mathbb{Q}] = 1$ 또는 2이다.
 $[E_1 \cap E_2 : \mathbb{Q}] = 2$ 이면 $G(E_1/E_1 \cap E_2)$ 는 $G(E_1/\mathbb{Q})$ 의 위수 3인 부분군이므로
 $E_1 \cap E_2 = \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{3}})$ 이다. 따라서 $e^{\frac{2\pi i}{3}} \in E_2 = \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{25}})$ 이므로
 $e^{\frac{2\pi i}{75}} = \frac{\left(e^{\frac{2\pi i}{75}}\right)^{25}}{\left(e^{\frac{2\pi i}{75}}\right)^8} = \frac{e^{\frac{2\pi i}{3}}}{\left(e^{\frac{2\pi i}{25}}\right)^8} \in \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{25}}) = E_2$ 가 되어 모순이다.
따라서 $[E_1 \cap E_2 : \mathbb{Q}] = 1 = |G(E_1 \cap E_2/\mathbb{Q})| = |H_1 \cap H_2|, H_1 \cap H_2 = \{1\}.$

$H_1 H_2$ 는 $G(K/\mathbb{Q})$ 의 정규부분군, $|H_1 H_2| = \frac{|H_1| |H_2|}{|H_1 \cap H_2|} = 120 = |G(K/\mathbb{Q})|$ 이므로
 $G(K/\mathbb{Q}) = H_1 H_2.$

6.

$\alpha = \sqrt[5]{5}, \zeta = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ 일 때 $K = \mathbb{Q}(\alpha, \zeta), \zeta + \zeta^{-1} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ 이므로 $\sqrt{5} \in K$.

* $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{-5}, \zeta) = \mathbb{Q}(\sqrt[5]{5}, \zeta)$

$$\zeta + \zeta^{-1} = e^{\frac{2\pi i}{5}} + e^{-\frac{2\pi i}{5}} = \cos \frac{2\pi}{5} > 0, \zeta^5 = 1, \zeta^4 - \zeta^3 + \zeta^2 - \zeta + 1 = 0 \text{이므로}$$
$$(\zeta + \zeta^{-1})^2 - (\zeta + \zeta^{-1}) - 1 = 0, \zeta + \zeta^{-1} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \in K.$$

$\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}} \in K, \left(5^{\frac{1}{5}}\right)^{-2} \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^1 = {}^{10}\sqrt{5} \in K$ 이므로 $\mathbb{Q}({}^{10}\sqrt{5})$ 는 K 의 부분체.

* ${}^{10}\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{10}} = \left(5^{\frac{1}{5}}\right)^a \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^b, \frac{a}{5} + \frac{b}{2} = \frac{1}{10}, 2a + 5b = 1$ 에서 $a = -2, b = 1$

$\alpha = \zeta - \zeta^{-1}, \alpha^2 = \zeta^2 + \zeta^{-2} - 2 = (\zeta + \zeta^{-1})^2 - 4 = \frac{-5 - \sqrt{5}}{2}, \alpha^4 + 5\alpha^2 + 5 = 0.$

α 를 근으로 갖는 $x^4 + 5x^2 + 5 \in \mathbb{Q}[x]$ 는 소수 5에 대한 아이젠슈타인 판정에 따라 \mathbb{Q} 위에서 기약이므로 $\text{irr}(\alpha, \mathbb{Q}) = x^4 + 5x^2 + 5$.

7. K 는 \mathbb{Q} 위의 24번째 원분확대체이므로

$K = \mathbb{Q}(\zeta), |G(K/\mathbb{Q})| = \varphi(24) = 8 = \deg(\zeta, \mathbb{Q}).$

$G(K/\mathbb{Q}) = \{\sigma_i \mid \sigma_i(\zeta) = \zeta^i, \gcd(i, 24) = 1, 1 \leq i \leq \varphi(24)\} \cong Z_{24}^*$ 이므로

$\text{irr}(\zeta, \mathbb{Q}) = \prod_{\sigma \in G(K/\mathbb{Q})} (x - \sigma(\zeta)) = x^8 - x^4 + 1.$

$$\zeta^{24} = 1, \zeta^{12} = -1 \text{임을 이용하자.}$$
$$\begin{aligned} \Phi_{24}(x) &= \prod_{\sigma \in G(K/\mathbb{Q})} (x - \sigma(\zeta)) \in K[x] \text{ (일차식의 곱)} \\ &= (x - \zeta^1)(x - \zeta^5)(x - \zeta^7)(x - \zeta^{11}) \\ &\quad \times (x - \zeta^{13})(x - \zeta^{17})(x - \zeta^{19})(x - \zeta^{23}) \in K[x] \\ &= (x^2 - \zeta^2)(x^2 - \zeta^{10})(x^2 - \zeta^{14})(x - \zeta^{22}) \\ &= (x^4 - \zeta^4)(x^4 - \zeta^{20}) \\ &= x^8 + (\zeta^8 - \zeta^4)x^4 + 1 \\ &= x^8 - x^4 + 1 \in \mathbb{Q}[x]. \end{aligned}$$

(다른 설명)

$x^{24} - 1 = \Phi_1\Phi_2\Phi_3\Phi_4\Phi_6\Phi_8\Phi_{12}\Phi_{24} = (x^{12} - 1)\Phi_8\Phi_{24}$ 이므로

$\Phi_{24} = \frac{x^{12} + 1}{\Phi_8} = \frac{x^{12} + 1}{(x^8 - 1/\Phi_1\Phi_2\Phi_4)} = \frac{(x^4)^3 + 1}{x^4 + 1} = x^8 - x^4 + 1.$

* $\zeta + \zeta^{-1} = 2\cos\frac{\pi}{12}.$

* $\sigma_{23}(\zeta) = \zeta^{23} = \zeta^{-1}, \sigma_{23}(\zeta + \zeta^{-1}) = \zeta + \zeta^{-1}$ 이므로 $\mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1}) \subset K_{\langle \sigma_{23} \rangle}$

8. 가정에 의해 $a - bi \in K$ 이므로 $a \in K, K = \mathbb{Q}(a)(a + bi)$ 이다.

갈루아 정리에 따라 $[K : \mathbb{Q}(a)] = \deg(x^2 - 2ax + a^2 + b^2) = 2 = |G(K/\mathbb{Q}(a))|.$
 $G(K/\mathbb{Q}(a)) < G(K/\mathbb{Q})$ 이므로 라그랑지 정리에 따라 $G(K/\mathbb{Q})$ 의 위수는 짝수.

$G(K/\mathbb{Q})$ 는 가환이므로 $G(\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q})$ 의 위수 $\frac{m}{d}$ 인 정규부분군 H 있다.

갈루아 정리에 따라 $\mathbb{Q}(a)_H$ 는 \mathbb{Q} 위의 확대차수 d 인 갈루아 확대이며, 원시원소정리에 따라 $\mathbb{Q}(a)_H = \mathbb{Q}(\gamma)$ 인 $\gamma \in \mathbb{Q}(a) \subset \mathbb{R}$ 있다.
따라서 문제에서 요구하는 $\text{irr}(\gamma, \mathbb{Q})$ 있다.

* $H = G(\mathbb{Q}(a)/F), \mathbb{Q}(a)_H = \mathbb{Q}(a)_{G(\mathbb{Q}(a)/F)} = F$ (갈루아정리)

* 부분체의 차수와 부분군의 위수는 “역대응” 한다.

* 라그랑지 정리의 역은 가환군일 때 성립한다.

9. $f(x)$ 의 한 근 $\alpha \in \mathbb{C}$ 택하자. (대수학의 기본정리)

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\alpha) \subset K, G(K/\mathbb{Q})$ 는 아벨군이다.

따라서 $G(K/\mathbb{Q}(\alpha))$ 는 $G(K/\mathbb{Q})$ 의 정규부분군이므로 갈루아 정리에 의해 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\alpha)$ 는 갈루아 확대이며, $f(x)$ 는 $\mathbb{Q}(\alpha)[x]$ 에서 일차식의 곱으로 인수분해된다.
그러므로 $K \subset \mathbb{Q}(\alpha), K = \mathbb{Q}(\alpha).$

* 다른 풀이

\mathbb{Q} -기약다항식 $f(x)$ 의 한 근 $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ 택하면 $\mathbb{Q}(\alpha) \subset K.$
 $\mathbb{Q} \subset K$ 는 갈루아 확대체(분해체)이므로

$f(x) = \prod_{\sigma \in G(K/\mathbb{Q})} (x - \sigma(\alpha)) \in K[x]$ 라 쓸 수 있다.
(\Leftrightarrow 일차식의 곱으로 인수분해된다.)

$G(K/\mathbb{Q})$ 의 (임의의) 원소 σ 와 $G(K/\mathbb{Q}(\alpha))$ 의 원소 τ 일 때, $G(K/\mathbb{Q})$ 는 가환이므로
 $(\sigma \circ \tau)(\alpha) = \sigma(\tau(\alpha)) = \sigma(\alpha) = (\tau \circ \sigma)(\alpha) = \tau(\sigma(\alpha)).$
따라서 $\sigma(\alpha) \in \mathbb{Q}(\alpha)$ 가 되어(모든 근을 포함하므로)
 $f(x) \in \mathbb{Q}(\alpha)[x]$ 이 되며, $K \subset \mathbb{Q}(\alpha), K = \mathbb{Q}(\alpha).$

갈루아 정리에 의해 $|G(K/\mathbb{Q})| = [K : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = \deg f(x).$

$\deg f(x) = 2018$ 이면 유한가환군의 기본정리에 따라 $G(K/\mathbb{Q}) \cong Z_{2018}$ 이므로 갈루아 정리에 의해 K 의 모든 부분체의 개수는 Z_{2018} 의 부분군의 개수 4.

10. $[F : \mathbb{Q}] = 50$

$\sigma(\alpha + \alpha^{-1}) = \alpha + \alpha^{-1}$ 이므로 $\mathbb{Q} \subset F \subset K_{\langle \sigma \rangle}.$

“ $\alpha + \alpha^{-1} \notin \mathbb{Q}$ 이므로” $F = K_{\langle \sigma \rangle}.$

$\therefore [F : \mathbb{Q}] = [K_{\langle \sigma \rangle} : \mathbb{Q}] = \frac{[K : \mathbb{Q}]}{[K : K_{\langle \sigma \rangle}]} = \frac{100}{|\sigma|} = 50.$

(다른 풀이)

$$\begin{aligned} \sigma(\alpha) &= \alpha^{-1} \text{이므로 } \text{irr}(\alpha, \mathbb{Q}) = \text{irr}(\alpha^{-1}, \mathbb{Q}) = f(x). \\ K &\text{는 분해체이므로 } f(x) \text{는 } K[x] \text{에서 일차식들의 곱.} \\ \text{즉, } K[x] \text{에서 } f(x) &= (x - \alpha)(x - \alpha^{-1}) \cdot \dots \\ &= (x^2 - (\alpha + \alpha^{-1})x + 1) \cdot \dots \\ x^2 - (\alpha + \alpha^{-1})x + 1 &\in F[x], (x - \alpha)(x - \alpha^{-1}) \notin F[x] \end{aligned}$$

$K \supset F \supset \mathbb{Q}, K \supset F(\alpha) \supset \mathbb{Q}(\alpha) = K$ 이므로 $K = F(\alpha).$

이차다항식 $x^2 - (\alpha + \alpha^{-1})x + 1 \in F[x]$ 의 두 근 $\alpha, \alpha^{-1} \notin F.$
따라서 $[K : F] = [F(\alpha) : F] = \deg(\alpha, F) = 2.$

$\sigma(\alpha + \alpha^{-1}) = \alpha + \alpha^{-1}$ 이므로 $F \subset K_{\langle \sigma \rangle}.$

$K_\sigma \subset K$ 는 갈루아 확대이므로 갈루아 정리에 의해

$[K : K_{\langle \sigma \rangle}] = |G(K/K_{\langle \sigma \rangle})| = |\sigma| = 2 = [K : F]$ 이므로 $F = K_{\langle \sigma \rangle}.$

구하는 값 $[F : \mathbb{Q}] = \frac{[K : \mathbb{Q}]}{[K : K_{\langle \sigma \rangle}]} = \frac{100}{2} = 50.$

* $\alpha = i = e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ 일 때, $\alpha + \alpha^{-1} = 0,$
 $F = \mathbb{Q}(\alpha + \alpha^{-1}) = \mathbb{Q}, K = \mathbb{Q}(i).$

* $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{n}} = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ 일 때, $\frac{\alpha + \alpha^{-1}}{2} = \cos\frac{2\pi}{n}.$
이때, $n = 125$ 이면 K 는 \mathbb{Q} 위의 확대차수 100인 125번째 원분확대체.

11. $E = \mathbb{Q}(a_1, a_2, \dots, a_r)$ 라 하면 $E \subset F.$

$\text{irr}(\alpha, F) \in E[x]$ 는 $F[x]$ 에서 기약이므로 부분환 $E[x]$ 에서도 기약이다.

따라서 $\text{irr}(\alpha, F) = \text{irr}(\alpha, E), \deg(\alpha, F) = \deg(\alpha, E),$ 즉 $[F(\alpha) : F] = [E(\alpha) : E].$
 $K = \mathbb{Q}(\alpha) = F(\alpha) = E(\alpha)$ 이므로 $[K : F] = [K : E].$

따라서 $[F : E] = 1, E = F.$

$x^2 - 2\sqrt{2}x + 3 \in F[x]$ 는 실근을 갖지 않고 $F \subset \mathbb{R}$ 이므로 F 에서 기약이다.

12. $\sqrt{2}$ 를 포함하는 K 의 부분체 F 라 하면 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset F \subset K$.
가정에 의해 K 는 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 위의 갈루아 확대체.
갈루아 정리에 따라 $[K: \mathbb{Q}(\sqrt{2})] = \frac{270}{\deg(\sqrt{2}, \mathbb{Q})} = 135 = |\mathrm{G}(K/\mathbb{Q}(\sqrt{2}))|$ 이므로
 $\mathrm{G}(K/\mathbb{Q}(\sqrt{2})) \cong Z_{135}$ 이며, Z_{135} 의 부분군의 개수 8이므로 F 의 개수는 8.

* 다른 설명
갈루아 정리에 따라
순환군 $\mathrm{G}(K/\mathbb{Q}) = \langle \sigma \rangle$ 의 부분군은 유일하므로 고정체 $K_{\langle \sigma^2 \rangle}$ 는 유일하게 존재.
 $[K: K_{\langle \sigma^2 \rangle}] = |\langle \sigma^2 \rangle| = 135$, $[K_{\langle \sigma^2 \rangle}: \mathbb{Q}] = 2 = [\mathbb{Q}(\sqrt{2}): \mathbb{Q}]$ 이므로 $K_{\langle \sigma^2 \rangle} = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
 $\langle \sigma^2 \rangle = \mathrm{G}(K/K_{\langle \sigma^2 \rangle}) \cong Z_{135}$ 이며, Z_{135} 의 부분군의 개수 8이므로
 K 와 $K_{\langle \sigma^2 \rangle}$ 사이의 중간체의 개수 8.

13.

* $x^9 + 3x^6 + 9x^3 + 1 \equiv (x^3 + 2)(x^3 + 3)(x^3 + 11) \pmod{13}$
* $f_{13}(x)$ 는 $Z_{13}[x]$ 에서 기약다항식임이 알려져 있지 않다.

• $[K: \mathbb{Q}] = 9$
 $\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3} \in K$ 이므로 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}) \subset K$.
 $[K: \mathbb{Q}] \geq [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}): \mathbb{Q}] = 9$,
 $[K: \mathbb{Q}] = [K: \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})][\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}): \mathbb{Q}]$
 $\qquad = \deg(\sqrt[3]{3}, \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}))\deg(x^3 - 2)$
 $\qquad \leq \deg(x^3 - 3) \cdot 3 = 9$.
그러므로 $[K: \mathbb{Q}] = 9$, 즉 $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3})$.

• $|\mathrm{G}(E/\mathbb{Q})| = 18$
 $\alpha = \sqrt[3]{2}$, $\beta = \sqrt[3]{3}$, $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ 에 대하여
 $E = \mathbb{Q}(\alpha, \alpha\zeta, \alpha\zeta^2, \beta, \beta\zeta, \beta\zeta^2) = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \zeta) = K(\zeta) = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \sqrt{3}i)$.
 $K \subset \mathbb{R}$ 이고 $x^2 + 3 \in K[x]$ 의 근 $\sqrt{3}i$ 는 실수가 아니므로 K 에서 기약이다.
 $\mathbb{Q} \subset E$ 는 분해, 분리확대이므로 갈루아 정리에 의해
 $|\mathrm{G}(E/\mathbb{Q})| = [E: \mathbb{Q}] = [E: K][K: \mathbb{Q}]$
 $\qquad = \deg(\sqrt{3}i, K)\deg(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}, \mathbb{Q})$
 $\qquad = 2 \cdot 9 = 18$.

14. $\alpha = i\sqrt[6]{3}$, $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{6}} = e^{\frac{\pi i}{3}}$ 일 때 $x^6 + 3 = 0$ 의 모든 근 α , $\alpha\zeta$, $\alpha\zeta^2$, ..., $\alpha\zeta^5$.
 $\zeta = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} = \frac{1 - \alpha^3}{2}$ 이므로 $K = \mathbb{Q}(\alpha, \alpha\zeta, \dots, \alpha\zeta^5) = \mathbb{Q}(\alpha)$.
 $\mathbb{Q} \subset K$ 는 분해, 분리확대체이므로 갈루아 정리에 의해
 $|\mathrm{G}(K/\mathbb{Q})| = [K: \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha): \mathbb{Q}] = \deg(\alpha, \mathbb{Q}) = 6$.

* $x^3 - 3$ 의 분해체 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \sqrt{3}i) = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{3}i)$
 \mathbb{Q} 위의 $x^3 - 3$ 의 분해체 $[\mathbb{Q}(\sqrt[6]{3}): \mathbb{Q}] \leq 3!$,
 $[\mathbb{Q}(\sqrt[6]{3}i): \mathbb{Q}] = \deg(x^6 + 3) = 6$ 의 배수

15. ②
 $F = x^{2^{60}} - x \in Z_2[x]$ 의 분해체
 $= \{x \in \overline{Z_2} \mid x^{2^{60}} - x = 0\}$
 $= Z_2(\alpha)$, $\deg(\alpha, Z_2) = 60$
 $= \mathrm{GF}(2^{60})$
 \neg . F 의 표수는 2이므로 $\mathrm{char} K = 2$, $Z_2 \subset K$.
 \neg . $[K_1: Z_2] = 12$, $[K_2: Z_2] = 6$.
 K_2 의 모든 원소는 $x^{2^{12}} - x$ 의 해가 되므로 $K_2 \subset K_1$.
 \sqsubset . $[K_1: Z_2] = 10$, $[K_2: Z_2] = 6$,
 $[K_1 \cap K_2: Z_2] = \gcd(10, 6) = 2$ 에서 $K_1 \cap K_2 = \mathrm{GF}(2^2) \neq Z_2$.
* $K_1 \cap K_2 = \{x \in \overline{Z_2} \mid \gcd(x^{2^{10}} - x, x^{2^6} - x) = 0\}$
 $\qquad = \{x \in \overline{Z_2} \mid x^{2^2} - x = 0\}$.

* \sqsubset 의 다른 설명
 $\sigma(x) = x^2$ 인 생성원 $\sigma \in \mathrm{G}(F/Z_2)$ 일 때, $K_1 = F_{\langle \sigma^{10} \rangle}$, $K_2 = F_{\langle \sigma^6 \rangle}$.
 $K_1 \cap K_2 = \{x \in F \mid \sigma^{10}(x) = x, \sigma^6(x) = x\}$
 $\qquad = \{x \in F \mid x^{2^{10}} = x, x^{2^6} = x\}$
 $\qquad = \{x \in F \mid x^{2^2} = x\}$
 $\qquad = F_{\langle \sigma^2 \rangle} \neq Z_2$.

16. ④
① $|F| = |Z_2|^6 = 2^6 = 64$.
② $\varphi_\alpha(0) = 0$ 이므로 $\ker(\varphi_\alpha) \neq \emptyset$.
 $u, v \in \ker(\varphi_\alpha)$ 에 대하여 $\varphi_\alpha(u - v) = (u - v)(\alpha) = u(\alpha) - v(\alpha) = 0$ 이므로
 $\ker(\varphi_\alpha)$ 는 $Z_2[x]$ 의 덧셈부분군.
 $f(x) \in \ker(\varphi_\alpha)$, $g(x) \in Z_2[x]$ 일 때
 $\varphi_\alpha(f(x)g(x)) = f(\alpha)g(\alpha) = 0 \cdot g(\alpha) = 0$ 이므로 $f(x)g(x) \in \ker(\varphi_\alpha)$.
따라서 $\ker(\varphi_\alpha)$ 는 $Z_2[x]$ 의 아이디얼이다.
 $Z_2[x]$ 는 PID이므로 $\ker(\varphi_\alpha)$ 는 $Z_2[x]$ 의 주아이디얼.
* $\ker(\varphi_\alpha) = \langle \mathrm{irr}(\alpha, Z_2) \rangle$.
③ F 는 $x^6 - x \in Z_2[x]$ 의 분해체이므로 $\alpha^6 - \alpha = 0$.
따라서 $\mathrm{irr}(\alpha, Z_2)$ 는 $x^{64} - x$ 를 나눈다.
④ 그런 $\alpha \in F$ 있다 하자. $Z_2 \subset Z_2(\alpha) \subset F$,
 $[F: Z_2] = 6 = [F: Z_2(\alpha)][Z_2(\alpha): Z_2]$
 $\qquad = [F: Z_2(\alpha)]\deg(\alpha, Z_2)$
 $\qquad = 4 \cdot [F: Z_2(\alpha)]$, 모순.
⑤ 동형 정리에 의해 $Z_2(\alpha) = \mathrm{im}(\varphi_\alpha) \cong Z_2[x]/\ker(\varphi_\alpha)$,
 $\ker(\varphi_\alpha)$ 는 $Z_2[x]$ 의 극대아이디얼이므로 $\mathrm{im}(\varphi_\alpha)$ 는 F 의 부분체이다.

17. $R[x]$ 는 PID이고 x 는 소원이므로 $\langle x \rangle$ 는 극대아이디얼이다.
따라서 $R[x]/\langle x \rangle \cong R[0] = R$ 은 체.
* 다른 풀이
다항식 환 $R[x]$ 가 주 아이디얼 정역이면 R 는 체
 $R \subset R[x]$ 가 정역이므로 R 은 단위원 1을 갖는 가환환.
 R 의 0아닌 원소가 단원임을 보이면 충분하다.

$a \neq 0$ 인 $a \in R$ 라 하자.
아이디얼 $I = \langle a \rangle + \langle x \rangle = \langle a, x \rangle = \langle f(x) \rangle$ 인 $f(x) \in R[x]$ 있다.
 $a \in I$ 이므로 $a = f(x)g(x)$ 인 $g(x) \in R[x]$ 있다.
양변 차수비교하면 $0 = \deg a = \deg f(x) + \deg g(x)$ 에서 $f(x) \in R - \{0\}$.
한편 $x \in I$ 이므로 $x = f(x)h(x)$ 인 $h(x) \in R[x]$ 있다.
양변 일차항 계수를 비교하자.
 $h(x)$ 의 1차항 계수를 $h \in R$ 라 할 때 $h \cdot f(x) = 1$.
따라서 $1 = h \cdot f(x) \in I$.
이때 $1 = a \cdot p(x) + x \cdot q(x)$ 인 $p(x), q(x) \in R[x]$ 있다.
양변 $x = 0$ 대입하면 $1 = a \cdot p(0)$. 따라서 $a \in U(R)$.
그러므로 R 은 체이다.

18. ⑤

$|K| = \deg f(x) = p^4, \quad [K : \mathbb{Z}_p] = \log_p p^4 = 4 = |G(K/\mathbb{Z}_p)|,$

$G(K/\mathbb{Z}_p) = \langle \sigma_p \rangle \cong (\mathbb{Z}_4, +), \quad \sigma_p : K \rightarrow K, \quad \sigma_p(x) = x^p.$

$(K^*, \times) = \langle \alpha \rangle, \quad \alpha \text{는 } f(x) \text{의 } 0 \text{아닌 근.}$

$\mathbb{Z}_p \subset K$ 는 분해, 분리, 유한 확대체(유한정규확대체)이므로 갈루아 정리 적용.

ㄱ. $0^{p^4} = 0, \quad 0 \text{ 아닌 원소 } \alpha \in K, \quad \alpha^{p^4-1} = 1, \quad \alpha^{p^4} = \alpha$

그러므로 모든 $\alpha \in K$ 에 대하여 $\alpha^{p^4} = \alpha.$

ㄴ. \mathbb{Z}_4 의 비자명 진부분군은 1개 있으므로

갈루아 정리에 의해 $\mathbb{Z}_p \subsetneq L \subsetneq K$ 인 중간체 L 은 1개.

* $L = K_{\langle \sigma_p^2 \rangle}, \quad \mathbb{Z}_p = K_{\langle \sigma_p^4 \rangle}, \quad K = K_{\langle \sigma_p \rangle} = K_{G(K/\mathbb{Z}_p)}.$

ㄷ. 옳다.

19.

(I) $\psi_\alpha(\sigma) \in \mathbb{Z}_p, \quad K = \mathbb{Z}_p(\alpha)$

표수 p 인 유한체 $\mathbb{Z}_p = \{x \in K \mid x^{p^1} - x = 0\}$ 이고 $\sigma \in G(K/\mathbb{Z}_p)$ 에 대하여

$[\psi_\alpha(\sigma)]^p - \psi_\alpha(\sigma)$

$= [\sigma(\alpha) - \alpha]^p - [\sigma(\alpha) - \alpha]$

$= [\sigma(\alpha) - \alpha] - [\sigma(\alpha) - \alpha]$

$= 0$ 이므로

$\psi_\alpha(\sigma) = \sigma(\alpha) - \alpha$ 는 $x^p - x \in \mathbb{Z}_p[x]$ 의 근, 즉 $\psi_\alpha(\sigma) \in \mathbb{Z}_p.$

$k \in \mathbb{Z}_p$ 에 대하여

$f(\alpha + k) = (\alpha + k)^p - (\alpha + k) - a$

$= \alpha^p + k^p - \alpha - k - a$

$= \alpha^p - \alpha - a + k - k$

$= \alpha^p - \alpha - a = 0$ 이므로 $\alpha + k$ 는 $f(x)$ 의 해이다.

따라서 $f(x)$ 의 분해체 $K = \mathbb{Z}_p(\alpha, \dots, \alpha + p - 1) = \mathbb{Z}_p(\alpha).$

(II) $\psi_\alpha : G(K/\mathbb{Z}_p) \rightarrow (\mathbb{Z}_p, +)$ 는 군-동형사상

$\sigma, \tau \in G(K/\mathbb{Z}_p)$ 에 대하여 $f(\sigma(\alpha)) = 0 = f(\tau(\alpha))$ 이므로

$\tau(\alpha) = \alpha + k$ 인 $k \in \mathbb{Z}_p$ 있다.

$\psi_\alpha(\sigma \circ \tau) = (\sigma \circ \tau)(\alpha) - \alpha$

$= \sigma(\tau(\alpha)) - \tau(\alpha) + \tau(\alpha) - \alpha$

$= \sigma(\alpha + k) - (\alpha + k) + \tau(\alpha) - \alpha$

$= \sigma(\alpha) + k - \alpha - k + \psi_\alpha(\tau) \quad (\because \sigma \text{는 } \mathbb{Z}_p \text{를 고정})$

$= \psi_\alpha(\sigma) + \psi_\alpha(\tau)$ 이므로

ψ_α 는 준동형사상이다.

$\sigma \in G(K/\mathbb{Z}_p)$ 에 대하여 $\psi_\alpha(\sigma) = 0 \Leftrightarrow \sigma(\alpha) = \alpha$ 이므로 $\sigma = \text{id}.$

$\therefore \ker \psi_\alpha = \{\text{id}\}, \quad \psi_\alpha$ 는 단사이다.

$(\mathbb{Z}_p, +)$ 는 유한집합이므로 ψ_α 는 전사이다.

그러므로 ψ_α 는 군-동형사상이다.

(III) $f(x)$ 의 두 근 $\alpha, \beta, \psi_\alpha = \psi_\beta$

$\beta = \alpha + k$ 인 $k \in \mathbb{Z}_p$ 있다. 이때 $\beta - \alpha = k \in \mathbb{Z}_p$ 이므로

$\sigma(\beta - \alpha) = \sigma(\beta) - \sigma(\alpha) = \sigma(k) = k = \beta - \alpha.$

즉, $\sigma(\beta) - \beta = \sigma(\alpha) - \alpha$ 이므로 $\psi_\beta = \psi_\alpha.$

20. ⑤

ㄱ. $E = \mathbb{Q}(\pm \sqrt{2}, \pm \sqrt{11}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{11}),$

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\alpha) \subset E, \quad E$ 는 \mathbb{Q} 위의 유한확대체이므로

$\mathbb{Q}(\alpha)$ 는 \mathbb{Q} 위의 유한확대체이다. (유한차원 벡터공간)

$\mathbb{Q}(\alpha)$ 의 임의의 원소 β 에 대하여 $\{1, \beta, \beta^3, \beta^4, \beta^5\}$ 은 \mathbb{Q} 위에서 일차종속이므로 $a_0 + a_1\beta + \dots + a_5\beta^5 = 0$ 인 모두는 0 이 아닌 $a_i \in \mathbb{Q}$ 있다.

따라서 β 는 $a_0 + a_1x + \dots + a_5x^5 \in \mathbb{Q}[x]$ 의 해.

그러므로 $\mathbb{Q}(\alpha)$ 는 \mathbb{Q} 위에서 대수적이다.

ㄴ. 그런 $\beta \in E$ 있다 하면 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\beta^2) \subset \mathbb{Q}(\beta) \subset E$ 이므로

$4 = [E : \mathbb{Q}] = [E : \mathbb{Q}(\beta)][\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}(\beta^2)][\mathbb{Q}(\beta^2) : \mathbb{Q}].$

4의 표준분해 2^2 이므로 홀수 소인수 없다. 모순.

ㄷ. $E = \mathbb{Q}(\gamma)$ 되는 $\gamma \in E$ 있다. (원시 원소 정리)

* $\gamma = \sqrt{2} + \sqrt{11}$

* 원시 원소 정리: 분리 가능, 유한 확대는 단순 확대

* 유한체와 표수 0인 체의 유한확대체는 단순 확대

21.

• R_3 가 \mathbb{Q} 의 확대체의 구조를 갖는다.

$f(x)$ 는 소수 3에 대한 아이젠슈타인 판정법에 의해 \mathbb{Q} 위에서 기약이고, \mathbb{Q} 는 체이므로 $\mathbb{Q}[x]$ 는 PID.

따라서 $(f(x))$ 는 극대아이디얼이므로 R_3 는 체이다.

환준동형사상 $\varphi : \mathbb{Q} \rightarrow R_3, \quad \varphi(q) = q + (f(x))$ 에 대하여 $\varphi(q) = \varphi(q)$ 이면

$p - q \in (f(x))$ 이므로 $p - q = 0, \quad p = q, \quad \varphi$ 는 단사.

따라서 R_3 는 \mathbb{Q} 의 확대체의 구조를 갖는다.

• 다항식 $f(x)$ 의 근의 존재성

① $f(x)$ 는 $R_1[x]$ 에서 기약이므로 1차 인수를 갖지 않는다. R_1 에 근 없다.

② $f(x) \in R_2[x]$ 는 대수학의 기본정리에 따라 근 있다. (중복포함 6개)

③ $\alpha = x + (f(x))$ 라 하면

$f(\alpha) = \alpha^6 + 12\alpha^4 - 3\alpha^3 - 108\alpha^2 + 24\alpha - 120 = f(x) + (f(x)) = 0 + (f(x)) = \bar{0}.$

R_3 에 $f(x)$ 의 근 있다.

④ $f(x) = x^6 - x^3 = x^3(x - 1)(x^2 + x + 1) \in \mathbb{Z}_2[x]$ 의 근 $x = 0, 1$ 있다.

$\mathbb{Z}_2 \leq F$ 이므로 $f(x)$ 는 $R_4 = \text{GF}(2^{1024}) = \text{SF}(x^{2^{1024}} - x/\mathbb{Z}_2)$ 에 근 있다.

* $x^2 + x + 1 \mid x^{2^2} - x \mid x^{2^{1024}} - x$ 이므로 $x^2 + x + 1$ 의 모든 근 R_4 에 있다.

* f 는 R_4 에 중복포함 6개 근 있다.

22. ③

* $[K : \mathbb{Z}_3] = 6$ 이므로 $|K| = |\mathbb{Z}_3|^6 = 3^6$ (벡터공간)

ㄱ. K 는 $x^{3^6} - x \in \mathbb{Z}_3[x]$ 의 분해체이다.

* K 는 $\mathbb{Z}_3[x]$ 의 6차 기약다항식으로도 만들 수 있다.

ㄴ. $f(x) = x^{3^6} - x, \quad \gcd(f(x), f'(x)) = 1$ 이므로 옳다.

ㄷ. $\sigma : K \rightarrow K, \quad \sigma(\alpha) = \alpha^3$ 인 $\alpha \in G(K/\mathbb{Z}_3)$ 에 대하여 $G(K/\mathbb{Z}_3) = \langle \sigma \rangle \cong \mathbb{Z}_6.$

\mathbb{Z}_6 의 위수 2인 부분군은 유일(1개)하므로 갈루아 정리에 의해

$|G(K/E)| = 2$ 가 되는 체 E 는 1개 있다.

* 순환군 $G(K/\mathbb{Z}_3)$ 의 원소 σ^3 일 때, $H = \langle \sigma^3 \rangle$ 에 의한 K 의 고정체 K_H 에 대하여 갈루아 정리에 의해 $G(K/K_H) = H, \quad [K : K_H] = |G(K/K_H)| = |H| = 2.$

* $F \subset K$: 분해, 분리, 유한(정규확대) $\Rightarrow [K : F] = |G(K/F)|$

23.

㉠: 참

$x, y \in F$ 에 대하여 $\sigma_p(x+y)=(x+y)^p=x^p+y^p=\sigma_p(x)+\sigma_p(y)$,

$\sigma_p(xy)=(xy)^p=x^py^p=\sigma_p(x)\sigma_p(y)$ 이므로 σ_p 는 환-준동형사상이다.

$\sigma_p(x)=0 \Leftrightarrow x^p=0 \Leftrightarrow x=0$ 이므로 σ_p : 단사, F 는 유한집합이므로 σ_p : 전사.

그러므로 σ_p 는 환동형사상이다.

㉡: 거짓

모든 $x \in \mathbb{Z}_p$ 에 대하여 $\sigma_p(x)=x^p=x$ 이다.

(\because) $x \in \mathbb{Z}_p$ 일 때 $x=0$ 이면 $0^p=0$ 이고, $x \neq 0$ 일 때 페르마 정리에 의해 $x^{p-1}=1, x^p=x$.

모든 $x \in \mathbb{Z}_p$ 에 대하여 $x^p=x$, 즉 $\sigma_p(x)=x$.

㉢: 참

$f(\alpha^p)=a_n\alpha^{pn}+a_{n-1}\alpha^{p(n-1)}+\cdots+a_1\alpha^p+a_0$

$=\sigma_p(a_n)\sigma(\alpha^n)+\cdots+\sigma_p(a_0)$

$=\sigma_p(a_n\alpha^n+\cdots+a_0)$

$=\sigma_p(f(\alpha))=\sigma_p(0)=0$.

즉 $f(\sigma_p(\alpha))=0$.

㉣: 참

$F^*=\langle \alpha \rangle$, $\text{ord}(\alpha)=|F^*|=p^n-1$ 이므로

$\alpha, \alpha^p, \alpha^{p^2}, \cdots, \alpha^{p^{n-1}}$ 은 서로 다른 n 개의 원소이고

$k=0, \cdots, n-1$ 에 대하여 $\text{ord}(\alpha^{p^k})=\frac{\text{ord}(\alpha)}{\gcd(\text{ord}(\alpha), p^k)}=p^n-1$ 이므로

$\alpha, \alpha^p, \alpha^{p^2}, \cdots, \alpha^{p^{n-1}}$ 은 F^* 의 생성원이다.

* $(-1) \cdot [p^n-1]+(p^{n-k}) \cdot p^k=1$

$\sigma_p(\alpha^{p^k})=\sigma_p^k(\alpha)$ 이므로 $f(\alpha^{p^k})=\sigma_p(f(\alpha^{p^{k-1}}))=\cdots=\sigma_p^k(f(\alpha))=\sigma_p^k(0)=0$.

그러므로 α^{p^k} 은 $f(x)$ 의 근이다.

24. ㉤

프로베니우스 동형사상 $\sigma_2: E \rightarrow E, \sigma_2(x)=x^2$ 에서

$\alpha \in E=\text{GF}(2^3)$ 가 기약다항식 $f(x)$ 의 근이므로 $\sigma_2(\alpha), \sigma_2^2(\alpha)$ 도 $f(x)$ 의 근.

즉, $\alpha, \alpha^2, \alpha^4=\alpha^2-\alpha+1$ 은 $f(x)$ 의 모든 근.

$\{\alpha+\beta, \alpha+\gamma\}=\{\alpha^2+\alpha, \alpha^2+1\}$

* $x^3+x^2+1=(x-\alpha)(x-\alpha^2)(x-\alpha^2+\alpha-1)$

* 근과 계수와의 관계

① $\alpha+\beta+\gamma=-1=1$.

② $\alpha\beta\gamma=\alpha^7=1, \alpha^{-1}=\alpha^6$.

* $E=\langle 1, \alpha, \alpha^2 \rangle_{\mathbb{Z}_2}, (E^*, \times)=\langle \alpha \rangle \cong (\mathbb{Z}_7, +)$

* 성질

① $\text{char} F=p, \sigma_p: F \rightarrow F, \sigma_p(u)=u^p$ 는 환동형사상

특히, $\{u^p \mid u \in F\}=F$

환-동형사상 σ_p : 유한체 F 의 Frobenius 동형사상

② 기약다항식 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_0 \in \mathbb{Z}_p[x]$ 일 때,

(i) $\sigma_p(f(x))=f(x)^p=a_n(x^p)^n+\cdots+a_0$

$=f(x^p)=f(\sigma_p(x))$

(ii) $u \in F$ 가 $f(u)=0$ 이면 $\sigma_p(u)$ 도 $f(x)$ 의 근

$(\sigma_p(x) \in F$ 가 $f(x)$ 의 근, $\sigma_p^2(u)$ 도 근, ...)

25.

25-1.

• (가)의 증명

$\beta_1=a_1+b_1\sqrt{2}+c_1\sqrt{3}+d_1\sqrt{6}, \beta_2=a_2+b_2\sqrt{2}+c_2\sqrt{3}+d_2\sqrt{6} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$,

$p, q \in \mathbb{Q}$ 에 대하여 벡터합 $+$, 스칼라곱 \times 를

$\beta_1+\beta_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{2}+(c_1+c_2)\sqrt{3}+(d_1+d_2)\sqrt{6}$

$p \times \beta_1=pa_1+pb_1\sqrt{2}+pc_1\sqrt{3}+pd_1\sqrt{6}$

라 정의하자.

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 은 단위원 1을 갖는 가환환이며,

임의의 0 아닌 원소가 곱셈 역원을 갖고,

$p \times (\beta_1+\beta_2)=p\beta_1+p\beta_2, (p+q) \times \beta_1=p\beta_1+q\beta_1$ 이므로

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 은 \mathbb{Q} 위의 벡터공간이다.

• (나)의 증명

$\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, $p, q \in \mathbb{Q}$ 에 대하여

$T(p\beta_1+q\beta_2)=\alpha(p\beta_1+q\beta_2)=p\alpha\beta_1+q\alpha\beta_2=pT(\beta_1)+qT(\beta_2)$ 이므로

T 는 선형사상이다.

• $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$T(1)=\sqrt{2}+\sqrt{3}, T(\sqrt{2})=2+\sqrt{6}, T(\sqrt{3})=3+\sqrt{6}, T(\sqrt{6})=3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$.

$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 고유다항식 $x^4-10x^2+1=f(x)$

케일리-해밀턴 정리에 의해

$0=(T^4-10T^2+I)(\beta)=(\alpha^4-10\alpha^2+1)\beta=f(\alpha)\beta, \forall \beta \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 이므로

$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}]=[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})][\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}]$

$\leq \deg(x^2-3)\deg(x^2-2)=4$.

$\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 이므로 $\mathbb{Q}(\alpha) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$,

$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}]=[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\alpha)][\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$

$f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ 는 기약이므로 $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]=\deg f(x)=4$.

이때 $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\alpha)]=1$ 이 되므로 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})=\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 이다.

* $f(x)$ 는 $\mathbb{Q}[x]$ 에서 (1차식들의 곱) or (2차식) \times (2차식)으로 나타낼 수 없다.

25-2.

• $\alpha=1+\sqrt{2}$ 일 때 행렬표현과 다항식과 차수

행렬 표현 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 고유다항식 $(x^2-2x-1)^2$.

α 를 근으로 갖는 기약 다항식 $f(x)=x^2-2x-1 \in \mathbb{Q}[x]$.

$[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]=\deg f(x)=2, [\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) : \mathbb{Q}]=4$.

따라서 $\mathbb{Q}(\alpha) \subsetneq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

• 유한확대체는 대수적확대체

$F \subset K$ 가 유한확대체라 하자.

$\alpha \in K$ 에 대하여 선형사상 $T: K \rightarrow K, T(v)=\alpha v$ 라 정의하자.

T 의 고유다항식 $f(x) \in K[x]$ 일 때, $f(\alpha)=0$ 이므로 α 는 F 위에서 대수적이다.

따라서 $F \subset K$ 는 대수적확대체.

26. $f(x)$ 는 소수 2에 대한 아이젠슈타인 판정에 의해 $\mathbb{Q}[x]$ 에서 기약이다.
 $[\mathbb{Q}(\theta) : \mathbb{Q}] = \deg f(x) = 3, \{1, \theta, \theta^2\}_{\mathbb{Q}}$ 는 $\mathbb{Q}(\theta)$ 기저.

$(3+\theta)^{-1} = a+b\theta+c\theta^2$ 라 하면
 $1 = (3+\theta)(a+b\theta+c\theta^2) = 3a+(3b+a)\theta+(3c+b)\theta^2+c\theta^3$
 $= (3a-2c)+(3b+a+2c)\theta+(3c+b)\theta^2$ 에서
 $3a-2c=1, \quad 3b+a+2c=0, \quad 3c+b=0.$
즉 $a=\frac{7}{19}, \quad b=-\frac{3}{19}, \quad c=\frac{1}{19}, \quad (3+\theta)^{-1} = \frac{7}{19}-\frac{3}{19}\theta+\frac{1}{19}\theta^2.$

* 다른 풀이
 $\theta+3=\alpha, \quad \theta=\alpha-3, \quad f(\theta)=0$ 이므로 $\alpha^3-9\alpha^2+25\alpha-19=0$ 에서
 $\alpha \cdot \frac{1}{19}(\alpha^2-9\alpha+25)=1.$
 $\alpha^{-1}=(\theta+3)^{-1}=\frac{1}{19}(\alpha^2-9\alpha+25), \quad \alpha=3+\theta$ 이므로 $\alpha^{-1}=\frac{1}{19}(\theta^2-3\theta+7).$

* 다른 풀이
 $0=\theta^3-2\theta+2=(\theta^2-3\theta+7)(3+\theta)-19$ 이므로 $\alpha^{-1}=\frac{1}{19}(\theta^2-3\theta+7).$

* $\deg(\theta, \mathbb{Q})$ 는 2의 거듭제곱이 아니므로 θ 작도 불가능.

27. x^2+1 의 해 $\pm i \notin \mathbb{Z}_3[x]$ 이므로 x^2+1 은 기약.

* \mathbb{Z}_3 에 제곱해서 $-1=2$ 되는 원소 없다.
 $\mathbb{Z}_3[x]$ 는 PID이므로 $\mathbb{Z}_3[x]\langle x^2+1\rangle$ 는 위수 $3^2=9$ 인 체.
 $F_9=\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2+1\rangle=\{a+bi \mid b\in \mathbb{Z}_3\}=\mathbb{Z}_3[i]$
 $=\{0, 1, 2, i, 1+i, 2+i, 2i, 1+2i, 2+2i\}$
 $=\{0+I, 1+I, \cdots, 2+2x+I\}, \quad I=\langle x^2+1\rangle$

* $F_9=\text{GF}(3^2)=\{x\in \overline{\mathbb{Z}_3} \mid x^{3^2}-x=0\}, \quad (F_9^*, \cdot)=\langle \alpha\rangle$ 인 $\alpha\in F_9$ 있으므로
 $F_9=\{0, 1, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^7\}.$

28. $f(x)$ 의 근 $\alpha\in \overline{F}$ 이 K 에 포함된다 하자.
 $F\subset F(\alpha)\subset K, \quad K$ 는 F 의 유한확대이므로
 $10=[K:F]=[K:F(\alpha)][F(\alpha):F]=[K:F(\alpha)]\deg f(x)=3\cdot [K:F(\alpha)]$ 에서
 $3\mid 10$, 모순. 이는 $\alpha\in K$ 가정한 데서 생긴 모순이다.
따라서 $f(x)$ 의 어떤 근도 K 에 포함되지 않는다.
즉, $\langle f(x)\rangle$ 는 $K[x]$ 의 극대이데알이다.

* $F\subset F(\alpha)\subset K(\alpha), \quad F\subset K\subset K(\alpha).$
* $f(x)\in F[x]\subset K[x], \quad f(\alpha)=0$ 이므로 $[K(\alpha):K]=\deg f(x)=3.$
* $[K(\alpha):F]=[K(\alpha):K][K:F]=3\cdot 10=30.$

29. $\langle p(x)\rangle\subset I\subset F[x]$ 인 $F[x]$ 의 아이디얼 I 라 하자.
 $F[x]$ 는 주아이디얼정역(PID)이므로
 $I=\langle f(x)\rangle=f(x)\cdot F[x]=\{f(x)g(x)\mid g(x)\in F[x]\}$
인 $f(x)\in F[x]$ 있다. (주아이디얼: 배수들의 집합)
 $p(x)\in I$ 이므로 $p(x)=f(x)g(x)$ 인 $g(x)\in F[x]$ 있다.
 $p(x)$ 는 기약다항식이므로 $f(x)$ 또는 $g(x)$ 는 $F[x]$ 의 단원(상수)이다.
* $U(F[x])=U(F)=F^*=F\setminus\{0\}$
 $f(x)\in F^*$ 이면 $I=F[x].$
 $g(x)\in F^*$ 이면 $f(x)=p(x)[g(x)]^{-1}\in \langle p(x)\rangle, \quad I=\langle p(x)\rangle.$
따라서 $\langle p(x)\rangle$ 는 $F[x]$ 의 극대이데알이다.

30. 한 근 $\alpha\in \overline{F}$ 택하자. $F(\alpha)$ 는 α 와 F 를 포함하는 최소체이다.

* 다른 풀이
 $F[x]$ 는 PID이므로 $\langle f(x)\rangle$ 는 $F[x]$ 의 극대이데알, $F[x]/\langle f(x)\rangle$ 는 체.
 $\phi:F\rightarrow F[x]/\langle f(x)\rangle, \quad \phi(a)=\bar{a}=a+\langle f(x)\rangle$ 라 하자.
 ϕ 는 환준동형사상, $\phi(a)=\phi(b)\Leftrightarrow \bar{a}=\bar{b}\Leftrightarrow a-b\in \langle f(x)\rangle$ 이므로 $a=b.$
 ϕ 는 단사, $F[x]/\langle f(x)\rangle$ 를 F 의 확대체로 간주할 수 있다.

$\alpha=x+\langle f(x)\rangle\in F[x]/\langle f(x)\rangle$ 에 대하여 $f(\alpha)$ 를 구하면
 $f(\alpha)=a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0$
 $=(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0)+\langle f(x)\rangle$
 $=f(x)+\langle f(x)\rangle=0+\langle f(x)\rangle=\bar{0}.$
따라서 $f(x)$ 의 근 α 포함하는 확대체 $F[x]/\langle f(x)\rangle$ 있다.

31. $\alpha\in E$ 라 하자. $F\subset F(\alpha)\subset E(\alpha)=E$ 는 유한확대이므로
 $F\subset F(\alpha)$ 는 유한확대이다.
 $[F(\alpha):F]=\deg(\alpha, F)<\infty$ 이므로 $\text{irr}(\alpha, F)=f(x)\in F[x]$ 에 대하여 $f(\alpha)=0.$
그러므로 $F\subset E$ 는 대수적 확대.

* 다른 풀이
 $\alpha\in E, \quad [E:F]=n<\infty$ 라 하자.
 E 를 F 의 벡터 공간이라 할 때, $n=\dim_F E.$
 $\alpha^0=1, \quad \alpha^1, \quad \alpha^2, \quad \cdots, \quad \alpha^n$ 은 F -일차 종속이므로
 $a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2+\cdots+a_n\alpha^n=0$
인 모두는 0이 아닌 $a_i\in F(0\leq i\leq n)$ 있다.

$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1\alpha+a_0\in F[x], \quad f(\alpha)=0.$
따라서 α 는 F 위에서 대수적이므로 E 는 F 위에서 대수적 확대체이다.

32. ㉓
 $\sqrt[4]{3}\in \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[4]{3}), \quad 3\in \mathbb{Q}, \quad \sqrt{3}\in \mathbb{Q}(\sqrt{3}), \quad \sqrt[4]{3}$ 은 작도가능.
 $\deg(\sqrt[5]{3}, \mathbb{Q})=\deg(x^5-3)=5$ 는 2의 거듭제곱이 아니므로
 $\sqrt[5]{3}$ 은 작도 불가능.

33. ㉓
㉠ 위수 4인 군 $(\mathbb{Z}_4, +), \quad V_4(\text{클라인 4원군})\cong (\mathbb{Z}_2\times \mathbb{Z}_2, +)$
㉡ 위수 4인 환 $(\mathbb{Z}_4, +, \times), \quad (\mathbb{Z}_2\times \mathbb{Z}_2, +, \times)$
 $\text{char}(\mathbb{Z}_4)=4, \quad \text{char}(\mathbb{Z}_2\times \mathbb{Z}_2)=2$
㉢ 위수 4인 유한체는 $\text{GF}(2^2)$ 과 동형이다.
㉣ H 가 정규부분군일 때 G/H 의 연산이 잘 정의되어 잉여군을 생각할 수 있다.
㉤ S 가 아이디얼일 때 잉여환 생각할 수 있다.
㉥ $V/W=\{v+W\mid v\in V\}$ 는 연산이 잘 정의된 상공간.

34. ㉓
 $p=q=0$ 일 때 $x^3+1=0$ 의 실근 -1 , 두 허근 $e^{\frac{\pi i}{3}}, \quad e^{\frac{2\pi i}{3}}.$
구하는 값 $e^{\pi}=-1.$

35. ㉠
 $D=a^2-a<0$ 일 때 즉, $0<a<1$ 일 때 허근 갖는다.
 $x=-a\pm\sqrt{a^2-a}=-a\pm i\sqrt{a-a^2}:=w, \quad \bar{w}.$
 $w^3=-2aw^2-aw=-2a(-2aw-a)-aw$
 $=2a^2+w(4a^2-a)$
 $=2a^2+(4a^2-a)(-a+i\sqrt{a-a^2})$ 이 실수
 $\Rightarrow 4a^2-a=0, \quad a=\frac{1}{4}.$

1. $0=f(x,tx),\ x=\frac{t^2}{t^4+1},\ y=\frac{t^3}{1+t^4}$ 이므로 교점 $\left(\frac{t^2}{1+t^4},\frac{t^3}{1+t^4}\right)$.

$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid f(x,y)\leq 0,\ y\geq 0\}$ 라 하자.

변수변환 $y=tx$.

$$(x,y)\in D\iff 0\leq x\leq \frac{t^2}{1+t^4},\ t\geq 0,$$

야코비 행렬식 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,t)}=\begin{vmatrix}1&0\\t&x\end{vmatrix}=x$ 이므로

$$\begin{aligned}D\text{의 넓이}\iint_D1dA&=\int_0^\infty\int_0^{t^2/1+t^4}x\,dxdt\\&=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{t^4}{(1+t^4)^2}dt\\&=\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{-t}{4(1+t^4)}\right]_0^\infty+\frac{1}{4}\int_0^\infty\frac{dt}{1+t^4}\right\}\\&=\frac{\sqrt{2}\pi}{32}.\end{aligned}$$

2. 1, $6\ln 2$
 $\iint_DdA=2\ln 2=2\times\int_a^{a+1}\frac{dx}{x}=2\ln\left(\frac{a+1}{a}\right),\ a=1.$

그런 정리에 따라 $\int_C(2x-y)dx+(2x-y)dy=3\times\iint_DdA=6\ln 2.$

3. 8, 3π
 $\int_0^{2\pi}\sqrt{(r')^2+r^2}\,d\theta$
 $=\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)}\,d\theta$
 $=\int_0^{2\pi}\left|2\sin\left(\frac{1}{2}\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right|\,d\theta$
 $=4\times\int_{-\pi/6}^{5\pi/6}|\sin u|\,du$
 $=8.$
 $\int_\alpha\kappa ds$
 $=\int_0^{2\pi}\frac{r^2+2(r')^2-rr''}{[r^2+(r')^2]^{3/2}}\cdot[r^2+(r')^2]^{1/2}\,d\theta$
 $\int_0^{2\pi}\frac{r^2+2(r')^2-rr''}{(r')^2+r^2}\,d\theta$
 $=\int_0^{2\pi}\frac{3}{2}\,d\theta$
 $=3\pi.$

4. 극좌표 변환, $g(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\sqrt{|8r^2-1|}\cdot r\,dr\,d\theta=\frac{\pi}{48}(7^{3/2}+1).$
변수 변환, $u=2(x+y),\ v=2(x-y),\ \frac{1}{J}=\left|\frac{2}{2}\frac{2}{-2}\right|=-8,\ |\mathcal{J}|=\frac{1}{8}.$
 $(x,y)\in D(t)\iff -u\leq v\leq u,\ u^2+v^2\leq 8,\ u\geq 2t,\ 0\leq t\leq 1.$
 $h(u)=\int_{-u}^u\sqrt{u^2+v^2-1}\,dv$ 라 하면 $g(t)=g(0)-\frac{1}{8}\int_0^{2t}h(u)du.$
 $g'(t)=-\frac{1}{4}h(2t),\ g'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}\cdot h(1)=-\frac{1}{4}.$

5. $\frac{\pi}{2}(1+a)^4,\ \frac{43}{20}\pi$

극좌표 변환 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ 라 하면

$$\iint_{D(a)}(x^2+y^2)dA=\int_0^{2\pi}\int_0^{1+a}r^3\,dr\,d\theta=2\pi\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^{1+a}=\frac{\pi}{2}(1+a)^4.$$

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega z(x^2+y^2)dV&=\int_0^1\iint_{D(z)}z(x^2+y^2)dx\,dy\,dz\\&=\int_0^1\frac{\pi}{2}z(1+z)^4dz\\&=\left[\frac{\pi}{10}z(1+z)^5\right]_0^1-\frac{\pi}{10}\int_0^1(1+z)^5dz\\&=\frac{32\pi}{10}-\frac{\pi}{60}[(1+z)^6]_0^1\\&=\frac{43}{20}\pi.\end{aligned}$$

(다른 설명)

$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ z=a$ 라 하면

야코비 행렬식 $J=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,a)}\right|=\begin{vmatrix}\cos\theta&-r\sin\theta&0\\\sin\theta&r\cos\theta&0\\0&0&1\end{vmatrix}=r$ 이므로

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega z(x^2+y^2)dV&=\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{1+a}ar^3\,dr\,d\theta\,da\\&=\int_0^1\frac{a(1+a)^4}{2}\pi\,da\\&=\int_1^2\frac{\pi}{2}(t-1)t^4\,dt\\&=\frac{43}{20}\pi.\end{aligned}$$

6. $\frac{1}{2},\ \frac{4}{e}$

$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ 라 하면

$$g(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1(r^2+1)^t r\,dr\,d\theta=\begin{cases}\frac{2^{t+1}-1}{t+1},\ t\neq-1,\\ \ln 2,\ t=-1\end{cases},\ g(-2)=\frac{1}{2},$$

로피탈 정리에 따라

$$\lim_{t\rightarrow 0}g(t)^{\frac{1}{t}}=\lim_{t\rightarrow 0}e^{\frac{\ln g(t)}{t}}=e^{\lim_{t\rightarrow 0}\frac{\ln g(t)}{t}}=e^{\lim_{t\rightarrow 0}\frac{g'(t)}{g(t)}}=e^{2\ln 2-1}=\frac{4}{e}.$$

7. $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\int_{\sqrt{1-y^2}}^y(-[x+y])\,dx\,dy=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\int_{\sqrt{1-y^2}}^y-1\,dx\,dy=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}.$

$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ 치환하면,

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\int_{\sqrt{1-y^2}}^yf(x,y)\,dx\,dy+\int_1^{\sqrt{2}}\int_0^yf(x,y)\,dx\,dy+\int_{\sqrt{2}}^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)\,dx\,dy\\&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,dr\,d\theta\\&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2\cos^2\theta\,dr\,d\theta=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4},\ \text{구하는 값}\ \frac{\pi-3}{4}.\end{aligned}$$

8. $\frac{4}{5},\ \frac{8}{5}$

$\int_0^1x^{\frac{2}{3}}dx=\frac{3}{5}$ 이므로 D 의 넓이는 $2\cdot\left(1-\frac{3}{5}\right)=\frac{4}{5}.$

그런 정리에 의해 선적분 값은 $\iint_{\text{int}(C)\cup\text{b}(C)}2dA=\frac{8}{5}.$

9. $\frac{\pi}{1-e^{-1}}$

$u=x-y, \ v=x, \ \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=1. \ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=1, \ (x,y)\in D_n \Leftrightarrow u^2+v^2\leq n$

$$\begin{aligned} &\iint_{D_n}e^{[(x-y)^2+x^2]}dxdy \\ &= \iint_{u^2+v^2\leq n}e^{-[u^2+v^2]}dA \\ &= \iint_{0\leq u^2+v^2<1}e^{-[u^2+v^2]}dA + \cdots + \iint_{n-1\leq u^2+v^2<n}e^{-[u^2+v^2]}dA \\ &= \iint_{0\leq u^2+v^2<1}e^{-0}dA + \cdots + \iint_{n-1\leq u^2+v^2<n}e^{-(n-1)}dA \\ &= e^{-0}\pi + e^{-1}(2\pi-\pi) + \cdots + e^{-(n-1)}(n\pi-(n-1)\pi) \\ &= \pi(1+e^{-1}+\cdots+e^{-(n-1)}). \end{aligned}$$

구하는 극한은 $\pi\cdot\frac{1}{1-e^{-1}}=\frac{\pi}{1-e^{-1}}.$

10. $e-e^{-1}$
 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix}= -1/2, \ (x,y)\in A \Leftrightarrow u+v\geq 0, \ u-v\geq 0, \ 1\leq u\leq 3$

$$\begin{aligned} &\iint_A\frac{1}{x+y}e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy= \int_1^3\int_{-u}^u\frac{1}{u}e^{\frac{v}{u}}\cdot\left|-\frac{1}{2}\right|dvdu \\ &= \int_1^3\frac{1}{2}[e^{\frac{v}{u}}]_{-u}^u du= \int_1^3\frac{1}{2}(e^1-e^{-1})du=e-e^{-1}. \end{aligned}$$

11. $\sin 1$
 $\iint_D3\cos(x^3)dA= \int_0^1\int_0^{x^2}3\cos(x^3)dydx= \int_0^13x^2\cos(x^3)dx= [\sin(x^3)]_0^1= \sin 1.$

12. 16
 $f_x=0=f_y$ 되는 $(x,y)=(2,2)$ 에서 $f(2,2)=4$
 D 의 경계 ∂D 에서 $f(x,y)$ 의 함숫값을 조사하면
 ① $0\leq x\leq 4, \ y=0$ 에서 $0\leq f(x,y)=4x\leq 16$
 ② $x=0, \ 0\leq y\leq 4$ 에서 $0\leq f(x,y)=y^2\leq 16$
 ③ $0\leq x,y\leq 4, \ x+y=4$ 에서 $4\leq f(x,y)=3y^2-12y+16\leq 16$
 최댓값 16, 최솟값 0, 구하는 값 16.

13. 8
 $f=3x+ye^x, \ \nabla f=(3+ye^x, e^x)$ 이므로 선적분의 기본정리에 의해
 $\int_C(3+ye^x)dx+e^xdy= \int_C\nabla f\cdot(dx, dy)=f(0,2)-f(-2,0)=8.$

* 다른 풀이(그린정리 적용)
 $(0,2)$ 에서 $(-2,0)$ 을 잇는 선분 L 라 하자.
 L 의 매개변수표현 $L(t)=(1-t)(0,2)+t(-2,0)=(-2t,2-2t), \ 0\leq t\leq 1$
 $C+L$ 은 반시계방향 단순폐곡선이다.
 $P=3+ye^x, \ Q=e^x,$ 그린정리에 의해
 $\int_{C+L}(3+ye^x)dx+e^xdy= \iint_{\text{int}(C+L)}Q_x-P_ydA=0.$
 $\int_C(3+ye^x)dx+e^xdy= -\int_LPdx+Qdy$
 $= -\int_0^1(3+(2-2t)e^{-2t})(-2dt)+e^{-2t}(-2dt)=8.$

14. 81
 $\int_0^2\int_0^9f(x,y)dydx+ \int_0^2\int_0^{\sin\sqrt{x}}(y-\sin\sqrt{x})dydx$
 $= \int_0^2\int_0^{\sin\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}dydx+ \int_0^2\int_{\sin\sqrt{x}}^9ydydx+ \int_0^2\int_0^{\sin\sqrt{x}}(y-\sin\sqrt{x})dydx$
 $= \int_0^2\int_0^9ydydx=2\cdot\frac{1}{2}\cdot9^2=81.$

15. 32π
 $P=e^{\sin x}-4x^2y, \ Q=e^{\cos y}+4xy^2$ 라 할 때
 C 는 양의 방향 단순폐곡선이므로 그린 정리에 의해
 $\int_{x^2+y^2=4}Pdx+Qdy$
 $= \iint_{x^2+y^2\leq 4}Q_x-P_ydA$
 $= \iint_{x^2+y^2\leq 4}4x^2+4y^2dA$
 $= \int_0^{2\pi}\int_0^24r^2\cdot rdrd\theta=2\pi\cdot16=32\pi.$

16. $\frac{7}{4}$
 $t=0$ 일 때 $x=0, \ y=f(0)=1, \ t=1$ 일 때 $x=3, \ y=f(3)=2.$
 주어진 두 점을 연결하는 직선의 기울기는 $\frac{1}{3}$ 이므로

$$\frac{1}{3}=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t}{4-2t} \text{에서 } t=\frac{1}{2}(x\neq\frac{1}{2}).$$

$t=\frac{1}{2}$ 에서 $x=c=2-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}. \ (y=\frac{5}{4})$

17. $\frac{1}{3}(1-\cos 1)$
 $\sqrt{y}\leq x\leq 1, \ 0\leq y\leq 1 \Leftrightarrow 0\leq x\leq 1, \ 0\leq y\leq x^2$ 이므로
 $\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^17y^2\sin(x^7)dx dy$
 $= \int_0^1\int_0^{x^2}7y^2\sin(x^7)dydx$
 $= \int_0^1\frac{7}{3}x^6\sin(x^7)dx$
 $= \frac{7}{3}\cdot\frac{1}{7}[-\cos(x^7)]_0^1=\frac{1}{3}(1-\cos 1).$

18. ④
 극좌표계를 활용하자. $(x,y)\in D \Leftrightarrow 0\leq\theta\leq 2\pi, \ 0\leq r\leq 1, \ J=r$
 $\iint_D\frac{|y|}{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}dxdy$
 $= \int_0^{2\pi}\int_0^1\frac{|r\sin\theta|}{\sqrt{r^2-4r\cos\theta+4}}\cdot rdrd\theta$
 $= 2\cdot\int_0^1\int_0^\pi\frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{r^2-4r\cos\theta+4}}d\theta dr$
 $= 2\cdot\int_0^1\frac{r}{2}(r^2-4r\cos\theta+4)^{1/2}\Big]_0^\pi dr$
 $= \int_0^12r^2dr$
 $= \frac{2}{3}.$

19. ②
 구면좌표계 활용, $x=\rho\sin\phi\cos\theta, \ y=\rho\sin\phi\sin\theta, \ z=2\rho\cos\phi$ 라 하면
 $(x,y,z)\in D \Leftrightarrow 0\leq\rho\leq 1, \ 0\leq\phi\leq\pi, \ 0\leq\theta\leq 2\pi$
 $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)}=2\times\rho^2\sin\phi=2\rho^2\sin\phi$ 이므로

$$\begin{aligned} \iiint_Dz^2dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^\pi\int_0^1(2\rho\cos\phi)^2\cdot|2\rho^2\sin\phi|d\rho d\phi d\theta \\ &= 2\pi\cdot\left(-\frac{1}{3}[\cos^3\phi]_0^\pi\right)\cdot\frac{8}{5}=\frac{32}{15}\pi. \end{aligned}$$

20. ⑤

C 는 반시계방향의 단순폐곡선이다.

$P=3+xy^2, \quad Q=2-xy^2$ 라 할 때 그린 정리를 적용하면

$$\begin{aligned} \int_C (3+xy^2)dx+(2-xy^2)dy &= \int_{x^2+y^2=4} Pdx+Qdy \\ &= \iint_{\text{int } C \cup C} Q_x-P_y \, dA = \iint_{x^2+y^2 \leq 4} (-x^2-y^2)dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 -r^2 \cdot r \, drd\theta \quad (\text{극좌표 변환}) \\ &= 2\pi \cdot (-4) = -8\pi. \end{aligned}$$

21. ③

$$\begin{aligned} \iint_R \sin\{(y-2x)^2\} \, dA &= \int_{-\frac{1}{2}}^0 \int_0^{2x+1} \sin\{(y-2x)^2\} \, dA \\ x=u, \quad y-2x=v &\text{라 하면} \\ \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} &= \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \\ -\frac{1}{2} \leq x \leq 0, \quad 0 \leq y \leq 2x+1 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq u \leq 0, \quad -2u \leq v \leq 1 \\ \Leftrightarrow -\frac{v}{2} \leq u \leq 0, \quad 0 \leq v \leq 1 &\text{이므로} \\ \iint_R \sin\{(y-2x)^2\} \, dA \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^0 \int_{-2u}^1 \sin(v^2) \cdot \left| \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} \right| \, dvdu \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^0 \int_{-2u}^1 \sin(v^2) \, dvdu \\ &= \int_0^1 \int_{-\frac{v}{2}}^0 \sin(v^2) \, dudv \\ &= \int_0^1 \frac{v}{2} \sin(v^2) \, dv \\ &= \left[-\frac{1}{4} \cos(v^2) \right]_0^1 = \frac{1}{4}(1-\cos 1). \end{aligned}$$

22. $2\ln 2$

$xy=u, \quad xy^2=v$ 라 하자. $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ y^2 & 2xy \end{vmatrix} = xy^2 = v$

$$\iint_A y \, dA = \int_1^2 \int_1^3 \frac{v}{u} \cdot \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \, dvdu = \int_1^2 \int_1^3 \frac{v}{u} \cdot \frac{1}{v} \, dvdu = 2\ln 2.$$

* 다른 풀이

$$\begin{aligned} R_1 &= \left\{ (x,y) \middle| \frac{1}{3} \leq x \leq 1, \quad \frac{1}{x} \leq y \leq \sqrt{\frac{3}{x}} \right\}, \\ R_2 &= \left\{ (x,y) \middle| 1 \leq x \leq \frac{4}{3}, \quad \frac{1}{\sqrt{x}} \leq y \leq \sqrt{\frac{3}{x}} \right\}, \\ R_3 &= \left\{ (x,y) \middle| \frac{4}{3} \leq x \leq 4, \quad \frac{1}{\sqrt{x}} \leq y \leq \frac{2}{x} \right\}, \\ R &= \sum_{i=1}^3 R_i, \\ \iint_R y \, dA &= \iint_{R_1} y \, dA + \iint_{R_2} y \, dA + \iint_{R_3} y \, dA \\ &= \int_{\frac{1}{3}}^1 \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{\frac{3}{x}}} y \, dydx + \int_1^{\frac{4}{3}} \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{\sqrt{\frac{3}{x}}} y \, dydx + \int_{\frac{4}{3}}^4 \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{\frac{2}{x}} y \, dydx \\ &= \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{1}{2} \left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx + \int_1^{\frac{4}{3}} \frac{1}{2} \left(\frac{2}{x} \right) dx + \int_{\frac{4}{3}}^4 \frac{1}{2} \left(\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} [3\ln x + x^{-1}]_{1/3}^1 + \frac{1}{2} [2\ln x]_1^{4/3} + \frac{1}{2} [-4x^{-1} - \ln x]_{4/3}^4 \\ &= 2\ln 2. \end{aligned}$$

23. $2\sqrt{2}-1$

$0 \leq y \leq 1, \quad y^{\frac{1}{3}} \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq x^3$ 이므로 주어진 반복적분은

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^{x^3} 6\sqrt{1+x^4} \, dydx = \int_0^1 6x^3 \sqrt{1+x^4} \, dx \\ &= 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot (1+x^4)^{\frac{3}{2}} \bigg|_0^1 = 2^{\frac{3}{2}} - 1 = 2\sqrt{2} - 1. \end{aligned}$$

24. $\frac{1}{2}$

발산 정리를 적용하자.

$$\int \int_S F \cdot \boldsymbol{n} \, dS = \iiint_{S \cup \text{int}(S)} \text{div} F \, dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 2z - 2y + 2yz \, dx dy dz = \frac{1}{2}.$$

* 다른 풀이: 실제 계산

$S_1 = \{(0,y,z) \mid 0 \leq y, z \leq 1\}, \quad S_2 = \{(1,y,z) \mid 0 \leq y, z \leq 1\},$
 $S_3 = \{(x,0,z) \mid 0 \leq x, z \leq 1\}, \quad S_4 = \{(x,1,z) \mid 0 \leq y, z \leq 1\},$
 $S_5 = \{(x,y,0) \mid 0 \leq x, y \leq 1\}, \quad S_6 = \{(x,y,1) \mid 0 \leq x, y \leq 1\}$ 의 외부 쪽을 향하는 단위 법선벡터 $\boldsymbol{n}_1 = (-1, 0, 0), \quad \boldsymbol{n}_2 = (1, 0, 0), \quad \boldsymbol{n}_3 = (0, -1, 0), \quad \boldsymbol{n}_4 = (0, 1, 0),$
 $\boldsymbol{n}_5 = (0, 0, -1), \quad \boldsymbol{n}_6 = (0, 0, 1), \quad S = \sum_{i=1}^6 S_i$ 이다.

$$\begin{aligned} \int \int_S F \cdot \boldsymbol{n} \, dS &= \sum_{i=1}^6 \iint_{S_i} F \cdot \boldsymbol{n} \, dS \\ &= \iint_{S_1} (-2xz) \, dS + \iint_{S_2} (2xz) \, dS + \iint_{S_3} (y^2) \, dS \\ &\quad + \iint_{S_4} (-y^2) \, dS + \iint_{S_5} (-yz^2) \, dS + \iint_{S_6} yz^2 \, dS \\ &= \int_0^1 \int_0^1 0 \, dydz + \int_0^1 \int_0^1 2z \, dydz + \int_0^1 \int_0^1 0 \, dx dz \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 (-1) \, dydz + \int_0^1 \int_0^1 0 \, dx dy + \int_0^1 \int_0^1 y \, dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 2z \, dydz + \int_0^1 \int_0^1 (-1) \, dydz + \int_0^1 \int_0^1 y \, dx dy \\ &= 1 - 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

25.

표면적 계산은 단지 선분의 변화량이 높이의 변화량 dx 를 따라 적분하였으므로 오류가 발생하였다. 따라서 구의 표면적은 단위면적소를 활용하여야 한다.

$y=f(x), \quad a \leq x \leq b$ 의 회전체의 표면적은 $S=2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{f'(x)^2+1} \, dx$

여기에서 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ 이므로

따라서 구의 겹넓이는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2-x^2} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx = 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2-x^2} \sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2} \, dx \\ &= 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2} \, dx \\ &= 2\pi r \int_{-r}^r 1 \, dx \\ &= 4\pi r^2 \end{aligned}$$

26. ③

$$\int_D e^{\frac{y}{x}} dydx = \int_0^1 \int_0^{x^2} e^{\frac{y}{x}} dydx = \int_0^1 xe^{\frac{y}{x}} \bigg|_{y=0}^{y=x^2} dx = \int_0^1 xe^x - x \, dx = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

27. ④ $\frac{3}{2}\pi$

도형의 면적 $S = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 d\theta$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 - 2\cos\theta + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta) d\theta = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\pi.$$

28. ㉔

시계방향으로 $\frac{\pi}{4}$ 회전하는 \mathbb{R}^2 의 회전변환행렬 R ,

$$R=\begin{bmatrix}\cos(-\frac{\pi}{4})-\sin(-\frac{\pi}{4})\\ \sin(-\frac{\pi}{4})\quad \cos(-\frac{\pi}{4})\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&1\\ -1&1\end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=R\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\text{에서}\quad \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=R^{-1}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=R^T\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&-1\\ 1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}\text{이므로}$$

주어진 조건에 대입하고 기호를 정리하면

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)\cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)=\frac{1}{2}\text{에서}\quad x^2-y^2=1,$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}}|x|=2\sqrt{2}\text{에서}\quad |x|=2,\quad \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)\text{에서}\quad y=0.$$

따라서 구하는 입체의 체적 V 는

$$x^2-y^2=1\text{과}\quad |x|=2\text{로 둘러싸인 도형을}$$

x 축을 기준으로 회전하여 얻은 입체의 부피이다.

$$V=2\times \int_1^2 \pi y^2 dx=2\int_1^2 \pi (x^2-1) dx=\frac{8}{3}\pi.$$

1.

“양 끝 점” $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} te^{-t^2} = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$

$\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{x} \right] = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ 이므로 $\frac{f(\sqrt{2})}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2e}}.$

$S \neq \emptyset$ 임은 자명하다.

$\frac{f(x)}{x} > 0$ 이므로 S 는 아래로 유계,

$\frac{f(x)}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{2e}} = \frac{f(\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$ (최댓값이 존재)이므로 S 는 위로 유계.

실수체에 관한 완비성 공리에 따라 S 의 상한과 하한이 모두 존재한다.

따라서 최소 상계(l.u.b) $\frac{1}{\sqrt{2e}},$ 최대 하계(g.l.b) 0.

$s > 0$ 에 대하여 $x = st$ 라 하면 $\frac{f(st)}{st} \leq \frac{1}{\sqrt{2e}}$ 이므로

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^1 \frac{f(x)}{s} e^{-\frac{x^2}{s^2}} dx \\ &= \int_0^{1/s} f(st) e^{-t^2} dt \\ &\leq \frac{s}{\sqrt{2e}} \int_0^{1/s} te^{-t^2/2} dt \\ &\leq \frac{s}{\sqrt{2e}} \int_0^\infty te^{-t^2/2} dt \\ &= \frac{s}{2\sqrt{2e}}. \end{aligned}$$

조임정리에 따라 $\lim_{s \rightarrow 0+} \int_0^1 \frac{f(x)}{s} e^{-\frac{x^2}{s^2}} dx = 0.$

2.

$p = \frac{1}{3}$ 일 때, $x > 0$ 이면 $|f(x)| \leq x^{1/3}$ 이므로 조임정리에 따라 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0.$

$f(0) = 0$ 이므로 f 는 $x = 0$ 에서 연속이다.

$p = -1$ 일 때, $L > 0$ 라 하자.

아르키메데스 원리에 따라 $L < 2N\pi$ 되는 $N \in \mathbb{N}$ 있다.

f 는 $\left[0, \frac{1}{2N\pi}\right]$ 에서 연속이고, $f\left(\frac{1}{2N\pi + \pi/2}\right) = 0 < L < 2N\pi = f\left(\frac{1}{2N\pi}\right)$ 이므로
중간값 정리에 따라 $f(x_0) = L$ 되는 x_0 있다.

3.

f 는 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$ 에서 전단사, 미분가능, $f' \neq 0$ 이므로 g 도 \mathbb{R} 에서 미분가능.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ g\left(1 + \frac{3}{n}\right) - g(1) \right\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+3h) - g(1)}{h} = 3g'(1) = \frac{3}{f'\left(\frac{5\pi}{4}\right)} = \frac{3}{2}.$$

$g(x) = t$ 라 하면 $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 이므로 $\int_0^\infty \frac{g(x)}{1+x^2} dx = \int_\pi^{\frac{3}{2}\pi} t dt = \frac{5}{8}\pi^2.$

(다른 설명)

$x = \tan\theta$ 라 하면 $\int_0^\infty \frac{g(x)}{1+x^2} dx = \int_\pi^{\frac{3}{2}\pi} \frac{\theta \cdot \sec^2\theta}{1+\tan^2\theta} d\theta = \int_\pi^{\frac{3}{2}\pi} \theta d\theta = \frac{5}{8}\pi^2.$

4.

$g(x) = f(x) - x$ 는 $[0, 1]$ 에서 연속이고 $(0, 1)$ 에서 미분가능하다.

$g(0) = f(0) \geq 0, \operatorname{im} f \subset [0, 1]$ 이므로 $g(1) = f(1) - 1 \leq 0.$

사잇값 정리에 따라 $g(a) = 0 = f(a) - a$ 가 되는 $a \in [0, 1]$ 있다.

$a \neq b$ 인 $b \in [0, 1]$ 에 대하여 $f(b) = b$ 이면 $g(a) = g(b) = 0$ 이므로

롤의 정리에 따라 $g'(c) = f'(c) - 1 = 0$ 이 되는 c 가 a 와 b 사이에 존재한다.
이는 $f'(x) \neq 1$ 라는 데 모순이다.

따라서 조건을 만족하는 a 는 유일하다.

5.

S 가 무한집합이면 $f(x) = 0 = f'(x)$ 인 실수 x 가 존재한다.

S 가 무한집합이라고 하자.

$f(x_n) = 0$ 되는 상수가 아닌 수열 $\{x_n\} \subset [-1, 1]$ 을 택하면

볼자노-바이어슈트라스 정리에 의해

$c \in [-1, 1]$ 로 수렴하는 $\{x_n\}$ 의 부분수열 있다.

부분수열 중에서 자연수 k 에 대해 $x_{n_k} \neq c$ 인 부분수열 $\{x_{n_k}\}$ 를 택하자.

f 는 연속이므로 $k \rightarrow \infty$ 일 때 $f(x_{n_k}) = f(c) = 0.$

f 는 미분가능하므로 $f'(c) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x_{n_k}) - f(c)}{x_{n_k} - c} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{0 - 0}{x_{n_k} - c} = 0.$

즉, $f(c) = 0 = f'(c)$

* 다른 설명

모든 $x \in \mathbb{R}$ 에 대하여 $f(x) \neq 0$ 이면 $S = \emptyset.$

모든 $x \in \mathbb{R}$ 에 대하여 $f'(x) \neq 0$ 이면 f 는 단사이므로 $f(x) = 0$ 되는 x 는

존재하지 않거나, 존재하더라도 1개 있다. (기껏해야 1개 존재한다.)

그러므로 명제 P 가 성립한다.

6. $n = 16$

직선 $y = x$ 를 따라 $f(x, y)$ 의 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 일 때 $f(x, y)$ 의 극한이

$f(0, 0) = 0$ 이 되기 위해서는 $\frac{x^{2n}}{2x^{30}} = \frac{1}{2}x^{2n-30} \rightarrow 0$ 이 되어야 하며,

이때 $2n - 30 > 0, n > 15.$

$n = 16$ 이면 $|f(x, y)| \leq \frac{|xy|}{2} \rightarrow 0 ((x, y) \rightarrow (0, 0))$ 이므로 구하는 값 16.

7.

$n = 1$ 일 때 $1 \leq a_1 \leq 2,$

$n = k$ 일 때 $1 \leq a_k \leq 2$ 라고 가정하면

$1 \leq 3 \leq a_{k+1}^5 = 2a_k^2 + 1 \leq 9 \leq 32$ 에서 $1 \leq a_{k+1} \leq 2.$

수학적 귀납법에 의해 $n \in \mathbb{N}$ 일 때 $1 \leq a_n \leq 2.$

$n = 1$ 일 때 $a_1 = 1 < 3^{\frac{1}{5}} = a_2.$

$n = k$ 일 때 $a_k \leq a_{k+1}$ 라고 가정하면

$a_{k+1} = (2a_k^2 + 1)^{\frac{1}{5}} \leq (2a_{k+1}^2 + 1)^{\frac{1}{5}} = a_{k+2}$ 이므로

수학적 귀납법에 의해 $n \in \mathbb{N}$ 일 때 $a_n \leq a_{n+1}.$

실수열 $\{a_n\}$ 은 위로 유계인 증가수열이므로 단조수렴정리에 의해 수렴.

* 극한 $\alpha \doteq 1.36396, x^5 - 2x^2 - 1$ 의 실근 1개, 허근 4개.

8. $x \neq 0$ 인 x 에 대하여 $\left| \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} - 0 \right| = \left| \frac{1}{x} f(x) \right| \rightarrow |f'(0)| = 0 (x \rightarrow 0)$

이므로 조임 정리에 의해 $g'(0) = 0.$

9. $\frac{1}{\ln 2}$

$\int_1^\infty [f(n)]^t dt = \left[\frac{f(n)^t}{\ln f(n)} \right]_{t=1}^\infty$ 가 수렴

$\Leftrightarrow f(n) \leq 1 \Leftrightarrow 10 - \sqrt{2} \leq n \leq 10 + \sqrt{2}.$

$n = 9, 10, 11$ 일 때 $a_n = -\frac{1/2}{\ln(1/2)}, 0, -\frac{1/2}{\ln(1/2)}$ 이므로

구하는 값 $\sum_{n=1}^\infty a_n = a_9 + a_{10} + a_{11} = -\frac{1}{\ln(1/2)} = \frac{1}{\ln 2}.$

10. $x=0$ 일 때 $f(0) \leq f(0)+M \cdot 0=f(0)$
 $x>0$ 일 때 f 는 $[0,x]$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 따라 $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(c)$ 인 $c \in (0,x)$ 있다.
가정에 의해 $f(x) \leq f(0)+Mx$.
 $g(x)=f(x)-x$ 는 $[0,\infty)$ 에서 미분가능하다.
 $g(0)=f(0)>0$,

$g(\alpha) \leq 0$ 되는 α 를 찾자.
 $g(\alpha)=f(\alpha)-\alpha \leq f(0)+M\alpha-\alpha=0$.

 $\alpha=\frac{f(0)}{1-M}>0$ 라 하면 $g(\alpha) \leq 0$.
중간값 정리에 의해 $g(x)=f(x)-x=0$ 되는 x 있다.
한편 $g'(x)=f'(x)-1 \leq M-1<0$ 이므로 g 는 단사.
그러므로 $f(x)=x$ 는 단 하나의 해를 갖는다.

11. $[a,b]$ 의 임의의 분할 P, Q 에 대하여 $L(f,P) \leq U(f,Q)$.
 $A \leq U(f,Q), L(f,P) \leq B$ 이므로 $A \leq B$ 이다.
 f 는 $[a,b]$ 에서 연속이므로 하이네 정리에 의해 균등연속.
 $\frac{\varepsilon}{b-a}>0$ 에 대하여 $\delta>0$ 가 존재해서 $|x-y|<\delta$,
 $x, y \in [a,b]$ 이면 $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$.
아르키메데스 원리에 의해 $\frac{b-a}{N}<\delta$ 인 $N \in \mathbb{N}$ 있다.
 $[a,b]$ 의 N 등분할 $P_N=\{x_0=a, x_1, \dots, x_N=b\}$ 라 하자.
 $k=1, 2, \dots, N$ 에 대하여 $I_k=[x_{k-1}, x_k]$ 에서 f 는 연속이므로
최대최소정리에 의해 $M(f, I_k)=f(x_{M_k}), m(f, I_k)=f(x_{m_k})$ 인 $x_{M_k}, x_{m_k} \in I_k$ 있다.
 $|x_{M_k}-x_{m_k}|<\frac{b-a}{N}<\delta, x_{M_k}, x_{m_k} \in I_k \subset [a,b]$ 이므로
$$U(f, P_N)-L(f, P_N)=\sum_{k=1}^N [M(f, I_k)-m(f, I_k)] \frac{b-a}{N}$$
$$=\frac{b-a}{N} \sum_{k=1}^n [f(x_{M_k})-f(x_{m_k})]$$
$$<\frac{b-a}{N} \cdot \sum_{k=1}^N \frac{\varepsilon}{b-a}=\varepsilon \text{ (리만판정법)}.$$

좌변 이항하면 $U(f, P_N)<L(f, P_N)+\varepsilon, B \leq A$.
앞서 보인 사실로부터 $A=B$ 이고 $n \geq N$ 인 n 에 대하여
 $L(f, P_n) \leq \sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x_k \leq U(f, P_n), L(f, P_n) \leq A=B \leq U(f, P_n)$ 이므로
 $\left| \sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x_k - A \right|<U(f, P_n)-L(f, P_n)<\varepsilon$.
그러므로 (다)의 극한 A 이다.

12. $3< r < 5$
 $x>0$ 일 때 $f'(x)=6x^5\sin\frac{1}{x^r}-rx^{-r+5}\cos\frac{1}{x^r}+rx^{r-1}\sin\frac{1}{x^2}-2x^{r-3}\cos\frac{1}{x^2}$.
 $x \leq 0$ 일 때 $f'(x)=0$ 이므로
 f' 이 $x=0$ 에서 연속
 $\Leftrightarrow f'(0)=0=\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$
 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0+} f'(x)=0=\lim_{x \rightarrow 0-} f'(x)$
 $\Leftrightarrow -r+5>0, r-1>0, r-3>0$
 $\Leftrightarrow 3< r < 5$.

* $x=0$ 에서 미분가능 $\Leftrightarrow r>1$

13. $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여 $M-\frac{1}{n}<f(x_n) \leq M$ 인 $x_n \in [0,1]$ 있다.
정리 1에 의해 $\{x_n\} \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}=x^* \in [0,1]$ 존재.
 $M-\frac{1}{n_k}<f(x_{n_k}) \leq M$ 이므로 조임정리에 따라 $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k})=M$.
 f 는 연속이므로 $f(x^*)=M$.

14. ①
 \neg . $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{(x+1)/(x\sqrt{x^4+1})}{(x+1)/x^3} \right]=1, \int_1^\infty \frac{x+1}{x^3}dx=\frac{3}{2}$ 이므로
극한비교판정에 의해 주어진 특이적분은 수렴한다.
 \neg . $[2,\infty)$ 에서 $\frac{1}{x}<\frac{1}{\ln x}, \int_2^\infty \frac{1}{x}dx=\infty$ 이므로
비교판정에 의해 주어진 특이적분은 발산한다.
 \sqsubset . $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 에서 $\frac{1}{\cos x + \sqrt{1-\sin x}} \geq \frac{1}{\cos x + \sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{1}{2} \sec x$,
 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec x dx = [\ln|\sec x + \tan x|]_0^{\pi/2} = \infty$ 이므로
비교판정에 의해 주어진 특이적분은 발산한다.

15. ⑤
* $x_n=\frac{1}{2n\pi}, y_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{6}}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n=0=\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)=\lim_{n \rightarrow \infty} 0=0, \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)=\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}=f(0)$,
 f 는 $x=0$ 에서 불연속.
 \neg . 그런 수열 $\{x_n\}$ 있다.
 \neg . 일반성을 잃지 않고 $a<b$ 라 하자.
① $ab>0$ 일 때 f 는 $[a,b]$ 에서 연속이므로 중간값정리에 의해 성립.
② $ab<0$ 일 때 충분히 큰 $N \in \mathbb{N}$ 에 대하여
 $0<\frac{1}{2N\pi}<b$ 이다. $p=\frac{1}{2N\pi+\frac{3}{2}\pi}, q=\frac{1}{2N\pi}$ 라 하면
 $[p,q] \subset (a,b)$ 이고 $-1=f(p) \leq f(a) < \gamma < f(b) \leq f(q)=1$ 이다.
 f 는 $[p,q]$ 에서 연속이므로 중간값정리에 의해 성립.
③ $ab=0$ 일 때 $a=0$ 인 경우 $b>0$ 이므로 ②와 비슷한 방법으로 성립.
 $b=0$ 인 경우 $a<0, -a>0$ 이므로
충분히 큰 $N \in \mathbb{N}$ 에 대하여 $0<\frac{1}{2N\pi}<-a$ 이다.
 $p=-\frac{1}{2N\pi}, q=-\frac{1}{2N+\frac{3}{2}\pi}$ 라 하면 $[p,q] \subset (a,b)$ 이고
 $-1=f(p) \leq f(a) < \gamma < f(b)=1/2 \leq f(q)=1$.
 f 는 $[p,q]$ 에서 연속이므로 중간값정리에 의해 성립.
 \neg . $(0,1)$ 에서 $g(x)=x\sin\frac{1}{x}$ 이고, g 는 $(0,1)$ 에서 연속이다.
 $\lim_{x \rightarrow 0+} g(x), \lim_{x \rightarrow 1-} g(x)$ 가 모두 존재하므로 연속확장정리에 의해
 g 는 $(0,1)$ 에서 균등연속이다.

16. ⑤
 \neg . 양변 미분, $f'(x)=-f'(-x)$ 에서 $f'(0)=0$.
* 우함수면 $f'(0)=0$
 \neg . $g(x)=x^2$ 은 \mathbb{R} 에서 미분가능하다.
코시 평균값 정리에 의해 $g'(c)[f(1)-f(0)]=f'(c)[g(1)-g(0)]$ 인
 $c \in (0,1)$ 있다.
이때 $2c[f(1)-f(0)]=f'(c), 0<c<1$ 이므로
 $f(1)-f(0)=\frac{f'(c)}{2c}, 0<c<1$.
 \sqsubset . $x<y$ 이면
 $0<(f')^3(x)-(f')^3(y)=[f'(x)-f'(y)][(f')^2(x)+f'(x)f'(y)+(f')^2(y)]$
이므로 $f'(x)<f'(y)$, 즉 f' 은 단조함수이다.
그러므로 f' 은 연속함수이다.

17. ②
 \neg . $a_n=\sin n, b_n=1+\frac{1}{n}, \{a_nb_n\}$ 는 진동한다.
 \neg . 유계 실수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하지 않으므로 $\{a_n\}$ 의 상극한과 하극한이 서로 다르다. 따라서 상극한을 α , 하극한을 β 라 할 때 각각 α, β 로 수렴하는 부분수열 $\{a_{n_k}\}, \{a_{m_k}\}$ 은 주어진 조건을 만족
 \sqsubset . $(-1)^n$ 의 상극한 1, $a_n<1-\varepsilon$ 을 만족시키는 n 의 개수는 무한하다.

18. ①

$0 \leq y \leq \sqrt{t}, y \leq x \leq \sqrt{t} \Leftrightarrow 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq \sqrt{t}$ 이므로
중적분으로 주어진 함수 $f(t)$ 의 식은

$$f(t)=\int_0^{\sqrt{t}}\int_0^x\frac{1}{2+\sin(x^2)}dydx=\int_0^{\sqrt{t}}\frac{x}{2+\sin(x^2)}dx$$

$\frac{x}{2+\sin(x^2)}$ 은 \mathbb{R} 에서 연속이다.

미적분학의 기본정리에 의해

$$f'(t)=(\sqrt{t})'\cdot\frac{x}{2+\sin(x^2)}\Big|_{x=\sqrt{t}}=\frac{1}{2\sqrt{t}}\cdot\frac{\sqrt{t}}{2+\sin t}=\frac{1}{4+2\sin t}.$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{6}.$$

19. ②

ㄱ. $x=0$ 일 때 $0, x\neq 0$ 일 때 $x^2\sin\frac{1}{x}$ 로 정의한 함수 $f(x), f'(0)=0,$

$x\neq 0$ 일 때 $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$ 이므로 f' 은 연속이 아니다.

f 를 x 축 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼 평행이동한 함수 $g(x)$ 는

$(0,1)$ 에서 미분가능하고 g' 은 $x=\frac{1}{2}$ 에서 불연속.

* f' 이 단조함수이면 연속된다.

ㄴ. f 는 $(0,1)$ 에서 단조감소, 연속이므로 f^{-1} 존재. (연속 역함수 정리)

* 이때 f^{-1} 는 $D=f((0,1))$ 에서 단조감소, 연속

ㄷ. D 에서 $f'\neq 0$ 이어야 미분가능하다.

* 예: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2, \tan\left[4\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right]$

20. ①

ㄱ. $[x\ln x-x]_0^1=-1$ 이므로 주어진 특이적분은 수렴.

ㄴ. f 의 불연속점의 집합 A 의 측도가 0이 아니므로 f 는 리만적분 불능.

* 다른 설명

상적분 $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 1dx=1,$ 하적분 $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 0dx=0$ 이므로

f 는 리만적분가능하지 않다.

ㄷ. 적분가능 조건만으로는 항상 성립하지 않는다. (연속 조건 필요)

* 반례: $0 \leq y \leq 1/2$ 에서 $0, 1/2 \leq y \leq 1$ 에서 1 로 정의한 함수 $f(y)$ 는 불연속점의 개수가 유한 개인 유계함수이므로 $[0,1]$ 에서 리만적분가능.

이때 $0 \leq x \leq 1/2$ 에서 $F(x)=0, 1/2 \leq x \leq 1$ 에서

$F(x)=x-1/2$ 이며 $x=1/2$ 에서 F 는 미분가능하지 않다.

21. ①

$1-t^3\sqrt{1+3t^2}$ 은 \mathbb{R} 에서 연속이다. 미적분의 기본 정리를 적용하면

$f'(x)=-2\cdot\left[1-t^3\sqrt{1+3t^2}\right]_{t=1-2x}-2\cdot\left[1-t^3\sqrt{1+3t^2}\right]_{t=1+2x}$ 에서

$$\begin{aligned} f'(0) &= -2\cdot(1-1\cdot\sqrt{4})-2\cdot(1-1\cdot\sqrt{4}) \\ &= -2\cdot(-1)-2\cdot(-1)=4. \end{aligned}$$

22. ④

ㄱ. 실수열 $\{x_n\}$ 이 코시 수열이므로 $\lim_{n\rightarrow\infty}x_n$ 이 존재하고, f 는 연속이므로

$\lim_{n\rightarrow\infty}f(x_n)$ 이 존재한다. 따라서 $\{f(x_n)\}$ 도 코시.

ㄴ. g : 디리클레 함수, $g\circ g\equiv 1$ 은 연속함수이지만 g 는 모든 점에서 불연속.

ㄷ. h 가 단사이므로 $h(0)\neq h(1)$. 일반성을 잃지 않고 $h(0)<h(1)$ 라 하자.

$h(x)<h(0)$ 인 $x\in(0,1)$ 있다 하면 중간값 정리에 의해

$$h(a)=\frac{h(0)+h(x)}{2}=h(b)\text{인 }a\in(0,x), b\in(x,1)\text{있다. }h\text{는 단사이므로 모순.}$$

따라서 h 는 순증가함수이다. ($h(0)>h(1)$ 라 하면 순감소함수)

그러므로 연속 역함수 정리에 의해 h^{-1} 는 $h([0,1])$ 에서 연속이다.

* 역함수의 연속

① 실함수 f 가 콤팩트 집합 K 에서 연속 $\Rightarrow f^{-1}$ 연속

② $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$: 단사, 연속 $\Rightarrow f$ 는 순증가(순감소)

③ (연속 역함수 정리) $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$: 순증가(순감소), 연속 $\Rightarrow f^{-1}$ 연속

23. ①

ㄱ. $(x+x^2)'\Big|_{x=0}=1=(x\cos x)'\Big|_{x=0}$ 이므로 미분가능할 것이라 추론 가능.

$$x\neq 0\text{인 }x\text{에 대하여 }\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}-1\right|\leq\max\{|x|,|\cos x-1|\}\rightarrow 0(x\rightarrow 0)$$

이므로 조임정리에 의해 $f'(0)=1$.

ㄴ. $g(z)=e^z$ 는 모든 $z\in\mathbb{C}$ 에서 $g'(z)\neq 0$ 이지만 주기가 $2\pi i$ 인 함수로서 단사함수가 아니다.

ㄷ. $F(x)=(\sin 2\pi x, e^x)$

24. ④

ㄱ. 비관정에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 이 수렴하고, x_n 은 0으로 수렴

ㄴ. 홀수열 $\frac{1}{n}$, 짝수열 -1 인 수열 $\{x_n\}$ 은 단 하나의 극한점 0을 갖지만 수렴하지는 않는다.

ㄷ. $n\in\mathbb{N}, |\sin x_n|\leq 1$ 이므로 볼자노-바이어슈트라스 정리에 의해 주어진 수열은 수렴하는 부분수열을 갖는다.

* 단조수렴정리

보통위상공간 \mathbb{R} 의 단조 수열이 수렴 \Leftrightarrow 유계

① 위로 유계인 증가수열은 수열집합의 상한에 수렴

② 아래로 유계인 감소수열은 수열집합의 하한에 수렴

25. ③

ㄱ. $f'(x)=\frac{1}{2}\cdot 4x\cdot(2x^2+3)^{-1/2}\rightarrow\sqrt{2} \ (x\rightarrow\infty)$ 이므로

$$\varepsilon=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{에 대하여 }M>0\text{이 존재해서 }x\geq M\text{이면 }\frac{\sqrt{2}}{2}<f'(x)<\frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

따라서 f 는 $[M,\infty)$ 에서 균등연속이다.

$\left[0,M+\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ 에서 f 는 연속이므로 하이네 정리에 의해 f 는 균등연속.

$\left[0,M+\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\cap[M,\infty)\neq\emptyset$ 이므로 f 는 구간 $[0,\infty)$ 에서 균등연속.

* $|f'(x)|=\left|\frac{2x}{\sqrt{2x^2+3}}\right|\leq\sqrt{2}$ 이므로 $[0,\infty)$ 에서 균등연속.

ㄴ. g 는 구간 $[1,\infty)$ 에서 연속, $[1,\infty)$ 에서 $g'(x)=e^{-x^2}\leq e^{-1^2}=e^{-1}$ 이므로 g 는 $[1,\infty)$ 에서 균등연속이다.

ㄷ. h 는 $[0,3)$ 에서 연속, $\lim_{x\rightarrow 3}h(x)$ 가 존재하지 않으므로 연속확장정리에 의해

h 는 $[0,3)$ 에서 균등연속이 아니다.

26. ①

ㄱ. 일반성을 잃지 않고 f' 이 단조증가 함수라 하자.

f' 이 $x=a$ 에서 불연속이라 하면 f' 이 단조증가하므로

$$\alpha:=\lim_{x\rightarrow a^-}f'(x)<\lim_{x\rightarrow a^+}f'(x):=\beta\text{이고,}$$

실수 조밀성에 의해 $f'(a)\neq k$ 인 $k\in(\alpha,\beta)$ 있다.

f' 이 단조이므로 $f'(a-1)<k<f'(a+1)$.

Darboux정리, $k=f'(c)$ 인 $c\in(a-1,a+1)$ 있다.

① $a-1<c<a$ 인 경우 $f'(c)\leq\alpha<k=f'(c)$

② $a<c<a+1$ 인 경우 $k=f'(c)<\beta\leq f'(c)$

두 가지 경우 모두 모순이다. 따라서 f' 은 연속함수이다.

* $\alpha=\sup\{f'(x)|x<a\}, \beta=\inf\{f'(x)|x>c\}$

ㄴ. $x=0$ 일 때 $0, x\neq 0$ 일 때 $x^2\sin\frac{1}{x}$ 로 정의한 함수 $f(x), g(x)=\sin x$ 는 주어진 명제를 만족하지 않는다.

* 로피탈 정리의 역은 성립하지 않는다.

ㄷ. $x=0$ 일 때 $0, x\neq 0$ 일 때 $x+2x^2\sin\frac{1}{x}$ 로 정의한 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(0)=1>0$ 이다.

임의의 $\delta>0$ 에 대하여 $\frac{1}{2N\pi}<\delta$ 인 $N\in\mathbb{N}$ 있다.

$x,y\in\left(0,\frac{1}{2N\pi}\right)\subset(0-\delta,0+\delta)$ 인 $x=\frac{1}{2N\pi+\pi/2}<\frac{1}{2N\pi-\pi/2}=y$ 에 대하여 $f(x)>f(y)$ 이다.

27.

① $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e = \frac{p}{q}$ (가약분수)라 하자.

양변에 $q^l = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot q$ 곱하면 $q^l \left[\sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} + \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \right] = p \cdot (q-1)!$.

$\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q^l}{n!} = p \cdot (q-1)! - \sum_{n=0}^q \frac{q^l}{n!}$, 우변은 정수이다.

$$\begin{aligned} \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q^l}{n!} &= \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1) \cdots (q+2)(q+1)} \\ &< \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^{n-q}} \\ &= \frac{1/(q+1)}{1-[1/(q+1)]} = \frac{1}{q} \leq 1 \end{aligned}$$

이므로 좌변은 정수가 아니다. 모순.

따라서 e 는 무리수.

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \right)^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{-\frac{1}{2}y^2} dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}r^2} r dr d\theta = 2\pi \cdot 1 = 2\pi. \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx > 0 \text{ 이므로 } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi}.$$

$$\text{그러므로 } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 1.$$

28. ④

ㄱ. $(n+1)^{\frac{1}{\log(n+1)}} = e^{\frac{1}{\log(n+1)} \cdot \log(n+1)} = e^1$, 상수수열.

ㄴ. $\frac{(n+1)^n}{n!} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n-1} \cdot \dots \cdot \frac{n+1}{1} \geq n+1$ 이므로 유계가 아니다.

따라서 발산한다.

ㄷ. $(1+a)^n = 1 + {}_nC_1 a^1 1^{n-1} + {}_nC_2 a^2 1^{n-2} + \dots$ 이므로

$$0 \leq x_n \leq \frac{1+na}{1+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \text{ 조임정리에 의해 } 0 \text{으로 수렴.}$$

29. ⑤

ㄱ. $r \in [-1, 1] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$, $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여 유리수 조밀성에 의해

$$r_n \in \left[r - \frac{1}{n}, r + \frac{1}{n} \right] \cap [-1, 1] \text{인 유리수열 } \{r_n\} \text{을 택하면 조임정리에 의해}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(r - \frac{1}{n} \right) = r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(r + \frac{1}{n} \right), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r$$

즉, $\{r_n\}$ 은 무리수 r 로 수렴하는 유리수 수열이다.

* 단조 유리수열을 택할 수도 있다.

$$f \text{는 연속이므로 } f(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = 1, \quad f \equiv 1.$$

ㄴ. $[-1, 1]$ 은 유계폐집합이므로 하이네-보렐 정리에 의해 \mathbb{R} 에서 cpt이므로 폐부분집합 S 는 cpt이다. g 는 연속이므로 $g(S)$ 은 \mathbb{R} 에서 cpt이고, 하이네-보렐 정리에 의해 $g(S)$ 은 유계폐집합이다.

ㄷ. 임의의 $x \in [-1, 1]$, $0 \leq |h(x) - h(0)| \leq \max \left\{ |x^2|, \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \right\} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0)$,

조임정리에 의해 $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0 = h(0)$. 따라서 h 는 $x=0$ 에서 연속이다.

30. ②

g 는 $[a, b]$ 에서 미분가능하므로 최대최소 정리에 의해

$\forall x \in [a, b], \quad g(x) \leq g(c)$ (최댓값)인 $c \in [a, b]$ 있다.

이때 $g(x) - g(c) \leq 0$ 인 $c \in (a, b)$ 임을 보이자.

$$c = a \text{이면 } 0 < g'(a) = f'(a) - k = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \leq 0,$$

$$c = b \text{이면 } 0 > g'(b) = f'(b) - k = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{g(x) - g(b)}{x - b} \geq 0.$$

두 경우 각각 모순, $a \in \text{int}[a, b] = (a, b)$.

따라서 g 는 (a, b) 에서 최댓값 $g(c)$ 를 갖고, $x=c$ 에서 미분가능하므로

내부 극값 정리에 의해 $0 = g'(c) = f'(c) - k, \quad f'(c) = k$ 이다.

* 다르부 정리: $[a, b]$ 에서 미분가능 함수 $f, \quad f'(a) < k < f'(b)$

$\Rightarrow f'(c) = k$ 인 $c \in (a, b)$ 있다.

* 내부 극값 정리: $f: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad a \in \text{int} D$ 에서 극값, $x=a$ 에서 미분가능

$\Rightarrow f'(a) = 0$.

* 최대최소 정리: f 가 콤팩트 집합에서 연속이면 최댓값과 최솟값 있다.

* 역함수의 미분: 구간 I 에서 순증가(순감소), 연속함수 f 가 $x=a$ 에서 미분가능하고 $f'(a) \neq 0$

$$\Rightarrow f^{-1}: f(I) \rightarrow \mathbb{R} \text{는 } y=f(a) \text{에서 미분가능, } (f^{-1})'(y) \Big|_{y=f(a)} = \frac{1}{f'(a)}$$

31. ①

ㄱ. 임의의 $\varepsilon > 0$ 에 대하여 $\delta = \varepsilon^2 > 0$ 라 하자.

$|x-y| < \delta = \varepsilon^2, \quad x, y \in [a, b]$ 에 대하여 $|f(x) - f(y)| \leq |x-y|^{1/2} < \varepsilon$ 이므로

f 는 $[a, b]$ 에서 균등연속이다. 따라서 f 는 리만적분가능하다.

ㄴ. 불연속점이 가산 개일 때도 리만적분가능하다.

ㄷ. 디리클레 함수 $f, \quad f^2 \equiv 1$ 은 리만적분가능하지만 f 의 불연속점의 집합 \mathbb{R} 은 측도(measure)가 0이 아니므로 리만적분가능하지 않다.

* 리만적분에 대한 르벡 판정법

$[a, b]$ 에서 유계인 함수 f 가 리만적분가능

$\Leftrightarrow f$ 의 불연속점 집합의 측도가 0(가산 개)

32. ⑤

ㄱ. $a_n = (-1)^n, |a_n|$ 이 0으로 수렴하면 $\{a_n\}$ 도 수렴.

ㄴ. $(-1)^n a_n$ 이 수렴한다고 하면 $\frac{(-1)^n a_n}{a_n} = (-1)^n$ 도 수렴하므로 모순, 0으로

수렴하면 $(-1)^n a_n$ 도 수렴.

ㄷ. $\varepsilon > 0, \quad n \geq N$ 일 때 $|a_{2n} - \alpha| < \varepsilon, |a_{2n-1} - \alpha| < \varepsilon$ 되는 $N \in \mathbb{N}$ 택하자. $m \geq N$ 일 때 $|a_m - \alpha| < \varepsilon$.

33. ③

ㄱ. 디리클레 함수

ㄴ. 무리수일 때 0, 유리수일 때 x 로 정의한 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이지만 임의의 $\delta > 0$ 에 대하여 $(0-\delta, 0+\delta)$ 에 속하는 한 점에서만 연속.

ㄷ. $\varepsilon = \frac{f(a)}{2} > 0, \quad |x-a| < \delta$ 인 x 일 때, $|f(x) - f(a)| < \frac{f(a)}{2}$ 되는 $\delta > 0$ 있다.

$$\text{이때 } 0 < \frac{f(a)}{2} < f(x) < \frac{3f(a)}{2},$$

즉 $\forall x \in (a-\delta, a+\delta), \quad f(x) > 0$ 인 $\delta > 0$ 있다.

34. ④

$$A = e^2, \quad B = e^{\sqrt{1+x^2}} \Big|_{x=2} = e^{\sqrt{5}}, \quad C = e-1, \quad C < A < B.$$

35. $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여 실수열 $\{x_n\}$ 을 $|f(x_{n+1})| \leq \frac{1}{5}|f(x_n)|$ 로 정의하자.

이때 $|f(x_n)| \leq \frac{1}{5^{n-1}}|f(x_1)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$.

$I \supset \{x_n\}$ 은 유계이므로 볼자노-바이어슈트라스 정리에 의해

$c \in I$ 로 수렴하는 부분수열 $\{x_{n_k}\}$ 있다.

f 는 I 에서 연속이므로 $\lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_{n_k})| = f(c) = 0$.

36. $f(x) = 3x - \frac{5}{2}, \quad a = -\frac{5}{4}$

f 는 다항함수이므로

\mathbb{R} 의 임의의 폐구간에 대해 미적분학의 기본정리를 적용할 수 있다.

$$x^2 \int_1^{x^2} f(t) dt - \int_1^{x^2} t f(t) dt = \frac{1}{2} x^6 + a x^4 + x^2 + a + 1.$$

양변 x 에 관하여 미분하면

$$2x \int_1^{x^2} f(t) dt + x^2 \cdot 2x f(x^2) - 2x \cdot x^2 f(x^2) \text{에서}$$

$$2x \int_1^{x^2} f(t) dt = 3x^5 + 4ax^3 + 2x, \quad \int_1^{x^2} f(t) dt = \frac{3}{2} x^4 + 2ax^2 + 1.$$

양변 x 에 관하여 미분하면 $2x f(x^2) = 6x^3 + 4ax, \quad f(x^2) = 3x^2 + 2a,$

$f(x) = 3x + 2a$. 주어진 식에 $x = 1$ 대입, $a = -\frac{5}{4}$.

그러므로 $f(x) = 3x - \frac{5}{2}$.

* 다른 풀이

$x^2 = u$ 라 치환하면 주어진 관계식은

$$u \int_1^u f(t) dt - \int_1^u t f(t) dt = \frac{1}{2} u^3 + a u^2 + u + a + 1.$$

$u = 1$ 대입, $a = -\frac{5}{4}$.

양변 u 에 관하여 미분하면 $\int_1^u f(t) dt = \frac{3}{2} u^2 - \frac{5}{2},$

한 번 더 미분하면 $f(u) = 3u + 2a, \quad f(x) = 3x - \frac{5}{2}.$

37. $x = y$ 이면 주어진 식이 성립한다. 일반성을 잃지 않고 $x < y$ 라 하자.

$f(t) = \sin t$ 는 $[x, y]$ 에서 연속이고 (x, y) 에서 미분가능.

평균값 정리에 의해 $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c)$ 인 $c \in (x, y)$ 있다.

$$|f'(t)| = |\cos t| \leq 1 \text{이므로} \quad \left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right| = |f'(c)| \leq 1 \text{에서}$$

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|.$$

* 코시의 평균값 정리

f, g : $[a, b]$ 에서 연속, (a, b) 에서 미분가능할 때

$$\Rightarrow g'(c)[f(b)-f(a)] = f'(c)[g(b)-g(a)]$$

* $\frac{g'(c)}{f'(c)} = \frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}$ 라 이해하고 모순 안되게 쓰면 된다.

38. 최대최소정리에 의해 $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$ 되는 $x_m, x_M \in [0, 1]$ 있다.

$f(x_m), f(x), f(x_M), x^n$ 은 $[0, 1]$ 에서 연속이므로 리만적분가능하다.

$$\frac{1}{n+1} f(x_m) \leq \int_0^1 f(x) x^n dx \leq \frac{1}{n+1} f(x_M) \text{에서}$$

$$f(x_m) \leq (n+1) \int_0^1 f(x) x^n dx \leq f(x_M) \text{이므로}$$

중간값 정리에 의해 문제의 식을 만족하는 $c \in [0, 1]$ 있다.

39. 미분가능

$$\frac{d}{dx}(x^2+1) \Big|_{x=0} = 0 = \frac{d}{dx}(1) \Big|_{x=0} \text{이므로 } f'(0) = 0 \text{일 것으로 예상할 수 있다.}$$

$$x \neq 0 \text{인 } x \in \mathbb{R} \text{에 대하여} \quad \left| \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \right| \leq \max \left\{ \left| \frac{x^2}{x} \right|, |0| \right\} = |x| \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0).$$

조임 정리에 의해 $f'(0) = 0$.

* Caratheodory 정리

f 가 $x = a$ 에서 미분 가능

$$\Leftrightarrow x = a \text{에서 연속인 함수 } F \text{가 존재해서 } f(x) - f(a) = F(x)(x-a)$$

40. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 4$

극한을 α 라 하면 $\alpha^3 = 6\alpha^2 - 8\alpha$ 에서 $\alpha = 0, 2, 4$ 중 단 하나이다.

주어진 실수열은 보통위상공간 \mathbb{R} 에서 유계 증가수열일 것이므로

$\alpha = 4$ 일 것이라 추론할 수 있다.

① $\{x_n\}$: 유계, $3 \leq x_n \leq 4$

$n = 1$ 일 때 $3 \leq x_1 = 3 \leq 4, \quad n = k$ 일 때 $3 \leq x_k \leq 4$ 라 가정하자.

$$27 \leq 30 \leq x_{k+1}^3 = 6x_k^2 - 8x_k \leq 64, \quad 3 \leq x_{k+1} \leq 4 \text{이므로}$$

$n \in \mathbb{N}$ 에 대하여 $3 \leq x_n \leq 4$ 이다.

② $\{x_n\}$: 증가수열

$$x_{n+1}^3 - x_n^3 = -x_n(x_n - 2)(x_n - 4) \geq 0, \quad x_{n+1} \geq x_n.$$

③ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 4$

$\{x_n\}$ 는 위로 유계인 증가수열이므로 단조수렴정리에 의해 \mathbb{R} 에서 수렴.

$$\alpha^3 = 6\alpha^2 - 8\alpha \text{에서 } \alpha = 4.$$

41. $|f(x) - f(1)| \leq \max\{|x-1|, |x^2-1|\} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 1)$

이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 1, \quad f$ 는 $x = 1$ 에서 연속.

$[0, 2]$ 에서 f 가 리만적분가능하다고 하자.

$$\overline{\int_0^2 f(x) dx} = \int_0^2 f(x) dx = \underline{\int_0^2 f(x) dx} \text{이다.}$$

$$\overline{\int_0^2 f(x) dx} = \frac{1}{2} + \frac{7}{3} \neq \underline{\int_0^2 f(x) dx} = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} \text{이므로 모순.}$$

이는 f 가 리만적분가능하다고 가정한 데 모순이다.

따라서 f 는 리만적분가능하지 않다.

* $[0, 2]$ 에서 f 의 불연속점들의 집합 $A = [0, 1) \cup (1, 2],$

A 의 측도(measure)는 0이 아니므로 르벡 정리에 따라 리만적분 불능.

42. 최대최소 정리에 의해 f 는 $[0, 1]$ 에서 유계이다.

하이네 정리에 의해 f 는 $[0, 1]$ 에서 균등연속이다.

임의의 $\frac{\varepsilon}{1-\delta}>0$ 에 대하여 $\delta>0$ 가 존재해서

$|x-y|<\delta$, $x, y\in[0, 1]$ 이면 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

아르키메데스 원리에 의해 $\frac{1-0}{N}<\delta$ 인 $N\in\mathbb{N}$ 있다.

$n\geq N$ 일 때 분할 $P_n=\left\{0, \frac{1}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}\right\}$ 라 하자.

$k=1, 2, \cdots, n$ 일 때 $I_k=\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ 에서 f 는 연속이므로

최대최소 정리에 의해 최댓값 $f(x_{M_k})=M(f, I_k)$, 최솟값 $f(x_{m_k})=m(f, I_k)$ 있다.

이제 상합과 하합의 차를 구하면

$$\begin{aligned} U(f, P_n)-L(f, P_n) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [M(f, I_k)-m(f, I_k)] \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [f(x_{M_k})-f(x_{m_k})] \\ &< \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varepsilon = \frac{1}{n} \cdot n\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

따라서 f 는 $[0, 1]$ 에서 리만적분가능하고

$$L(f, P_n) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq U(f, P_n),$$

$$L(f, P_n) \leq \int_0^1 f dx = \int_0^1 f dx = \overline{\int_0^1 f dx} \leq U(f, P_n).$$

그러므로 $n\geq N$ 일 때, $\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(x) dx\right| \leq U(f, P_n) - L(f, P_n) < \varepsilon$.

43. $\varepsilon>0$, $\mathbf{p}=(a, b)$, $\mathbf{x}=(x, y)$ 라 하자.

$d(\mathbf{x}, \mathbf{p})<\delta$ 일 때, $d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{p}))<\varepsilon$ 이 되는 $\delta>0$ 찾자.

$$\begin{aligned} d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{p})) &= d\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4} \left| \sqrt{3}(x-a) - (y-b) \right| + \frac{1}{4} \left| \sqrt{3}(x-a) + (y-b) \right| \\ &\leq \frac{\sqrt{3}}{2} (|x-a| + |y-b|) \text{이므로} \end{aligned}$$

$$\delta = \varepsilon \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\varepsilon}{\sqrt{3}} \text{으로 놓으면 } d(\mathbf{x}, \mathbf{p}) < \delta \text{일 때 } d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{p})) < \varepsilon.$$

그러므로 f 는 \mathbb{R}^2 에서 연속함수이다.

* (X, d) : 거리공간, $A\subset X$

$f: X\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=d(x, A)=\inf\{d(x, a) \mid a\in A\}$ 인 f 는 연속이다.

44. $2\sqrt{2}-1$

$\sqrt{1+x}$, \sqrt{x} 는 폐구간 $[0, 1]$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned} \lim_{n\rightarrow\infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \cdots + \sqrt{2n}}{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}} &= \lim_{n\rightarrow\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{k+1}}{\sum_{k=1}^n \sqrt{k}} = \lim_{n\rightarrow\infty} \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1+\frac{k}{n}}}{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}}} \\ &= \frac{\int_0^1 \sqrt{1+x} dx}{\int_0^1 \sqrt{x} dx} = 2\sqrt{2}-1. \end{aligned}$$

45.

하위 영역	배점	예상정답율(%)	관련사고영역	출제자
해석(실해석)	5	60	적용	좌준수
출제 내용	M.Stoll. Introduction to Real Analysis. Addison-wesley.			
관련자료	pp.13-119			

주어진 조건 $L-\frac{1}{n}<f(x_n)<L+\frac{1}{n^2}$ ($n=1, 2, \cdots$)과

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\left(L-\frac{1}{n}\right)=L, \quad \lim_{n\rightarrow\infty}\left(L+\frac{1}{n^2}\right)=L$$

이므로 샌드위치 정리(Sandwich Tehorem)에 의해

$$\lim_{n\rightarrow\infty} f(x_n) = L$$

한편, $x_n\in[a, b]$ ($n=1, 2, \cdots$)이고 $[a, b]$ 가 폐집합이므로

$$\lim_{n\rightarrow\infty} x_n = c \in [a, b] \quad \text{즉, } c \in [a, b]$$

f 가 점 c 에서 연속이므로 $\lim_{n\rightarrow\infty} f(x_n) = f(c)$ 이고

따라서, $f(c) = L$ 이다.

* 채점기준

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\left(L-\frac{1}{n}\right)=L \text{과 } \lim_{n\rightarrow\infty}\left(L+\frac{1}{n^2}\right)=L \text{을 쓰거나}$$

샌드위치 정리를 언급하면1점

(샌드위치 정리 대신에 Sandwich Theorem, Squeeze Principle,

Squeeze Theorem, 조임정리, 협공의 원리 라는 용어를 사용해도 무방...1점)

$\lim_{n\rightarrow\infty} f(x_n) = L$ 을 언급하면1점

f 가 c 에서 (또는 $[a, b]$ 에서) 연속이라는 서술과 함께

$(L=) \lim_{n\rightarrow\infty} f(x_n) = f(c)$ 라고 쓰면3점

46. 발산

$$[1, \infty) \text{에서 } \sqrt{1+2\sin^2 x + x^2} \leq \sqrt{3+x^2}.$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{3+x^2}} = \left[\ln|x + \sqrt{3+x^2}| \right]_1^\infty = \infty.$$

비교판정에 의해 주어진 이상적분은 발산한다.

* 다른 풀이

$$[1, \infty) \text{에서 } \sqrt{1+2\sin^2 x + x^2} \leq \sqrt{x^2 + 2x^2 + x^2} = 2x.$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{2x} = \left[\frac{1}{2} \ln x \right]_1^\infty = \infty \text{이므로 비교판정에 의해 주어진 이상적분은 발산.}$$

47. 조건과 L 이 선형사상이므로 $L(h)=L(h\cdot 1)=h\cdot L(1)$ 이다.

따라서 주어진 극한은

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h\rightarrow 0} \frac{|f(a+h)-f(a)-h\cdot L(1)|}{|h|} \\ &= \lim_{h\rightarrow 0} \left| \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - L(1) \right| \\ &= |f'(a) - L(1)| \end{aligned}$$

따라서 $L(1)=f'(A)$ 이 성립한다.

48.

(1) $f(t)=\log t$ 는 $[x, x+1]$ 에서 미분가능하다.

평균값 정리에 의해

$$\log(x+1)-\log x = \frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x} = f'(c) = \frac{1}{c} \text{인 } x < c < x+1 \text{ 있다.}$$

이때 $\frac{1}{c} < \frac{1}{x}$ 이므로 주어진 명제가 성립한다.

(2) $g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}=(x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ 라 하면

g 는 $(0, \infty)$ 에서 미분가능하고

$$g'(x) = 1 \cdot \ln \frac{x+1}{x} + (x+1) \cdot \left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \right] = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x} < 0 \text{이므로}$$

g 는 감소함수이다.

$$\text{그러므로 } g(a) < g(b), \quad \left(1+\frac{1}{a}\right)^{a+1} < \left(1+\frac{1}{b}\right)^{b+1}.$$

49. ②

$$2 = \int_1^2 1 \cdot \{f(x)\}^2 dx = x \cdot f^2(x) \Big|_1^2 - \int_1^2 x \cdot [2f(x)f'(x)] dx$$
$$= -2 \int_1^2 xf(x)f'(x)dx, \text{ 구하는 값 } -1.$$

50. ①

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln x} \text{라 하자.}$$
$$f'(x) = (1 - \ln x) \cdot \frac{f(x)}{x^2}, \quad x < e \text{일 때 } f \text{는 증가, } x > e \text{일 때 } f \text{는 감소한다.}$$

따라서 e 값 주변의 자연수 n 에서 $\sqrt[n]{n}$ 의 최댓값과 최솟값을 생각하자.

$n=1$ 일 때 $\sqrt[n]{n}=1$, $n=2$ 일 때 $\sqrt[n]{n}=\sqrt{2}$,
 $n=3$ 일 때 $\sqrt[n]{n}=\sqrt[3]{3}$, $n=4$ 일 때 $\sqrt[n]{n}=\sqrt[4]{4}$.
 $n=3$ 일 때 최대, $n=1$ 일 때 최소이다.

따라서 $M=\sqrt[3]{3}$, $m=1$, 구하는 $\frac{M}{m}=\sqrt[3]{3}$.

51. ①

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{\pi}{2} \text{이고 } x = \frac{\pi}{2} - t \text{로 치환하면}$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin t}{\cos t + \sin t} (-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx \text{이므로}$$
$$\frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx.$$

52. ①

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{x} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x^2 \ln \left(\cos \frac{1}{x} \right)}, \quad e^x \text{는 } x = -\frac{1}{2} \text{에서 연속}$$
$$= e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos t)}{t^2}} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

53. ②

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (x : \text{유리수}) \\ 1 & (x : \text{무리수}) \end{cases} \text{라 하자.}$$

f 는 $x=0$ 에서 연속이므로 $g(\lim_{x \rightarrow 0} f(x)) = g(f(0))$

(a) $f(0)$ 가 유리수인 경우 $g(f(0))=0$
무리수 조밀성에 의해 $f(0)$ 로 수렴하는 무리수열 $\{f(x_n)\}$ 을 택하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} g(f(x_n))=1$

(b) $f(0)$ 가 무리수인 경우 $g(f(0))=1$
유리수 조밀성에 의해 $f(0)$ 로 수렴하는 유리수열 $\{f(x_n)\}$ 을 택하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} g(f(x_n))=0$.

54. ③

$$f(\mathbb{R}) = f([0, 2\pi]), \quad [0, 2\pi] \text{에서 극값을 찾으면}$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \pi, \quad \frac{5}{4}\pi, \quad \frac{3}{2}\pi, \quad 2\pi$$

이때 f 의 최대, 최소는 $1, -1$. 구하는 값 2 .

55. ①

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \alpha), \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \alpha,$$
$$f(x) = \sqrt{2} \left| \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right| \text{의 주기 } p = \pi.$$
$$s = \int_0^{5\pi} f(x) dx = \sqrt{2} \int_0^{5\pi} \left| \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right| dx = \sqrt{2} \times 5 \times \int_0^{\pi} \sin x dx = 10\sqrt{2}.$$

56. ③

로피탈 정리에 의해

$$\alpha = \frac{\sec^2(\tan_{49} x) \cdot \sec^2(\tan_{48} x) \cdot \cdots \cdot \sec^2 x}{1} \Bigg|_{x=0} = 1,$$
$$\beta = \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{1}{x-1} \ln x} = e^1 = e.$$

$\therefore \alpha\beta = e$.

57. ③

$$\log x = t \text{치환, } \frac{dx}{x} = dt. \quad \int_1^{\infty} t^{-4} dt = \left[-\frac{1}{3} t^{-3} \right]_1^{\infty} = \frac{1}{3}.$$

58. ①

f' 이 연속이므로 미적분학의 기본정리를 적용하자.

$0 \leq x \leq 1$ 인 x 에 대하여

$$\int_0^x f'(t) dt = f(x) - f(0) = f(x) \leq \int_0^x M dt = Mx.$$
$$1 = \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 Mx dx = \frac{1}{2} M \text{에서 } M \geq 2.$$

59. ①

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{일 때 } |y| < \frac{\pi}{2} \text{에서 } y = \tan^{-1} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$
$$y' = \frac{(2x)'}{1 + (2x)^2} = \frac{2}{1 + 4x^2} \Bigg|_{x=\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \text{이므로 } \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{3} \right) \text{에서 법선의 방정식은}$$
$$y - \frac{\pi}{3} = -2 \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad y = -2x + \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}.$$

60. ④

$\ln x$ 는 $(0, \infty)$ 에서 연속이다.

$$f(n) = e^{\frac{1}{n} \ln [n(n+1) \cdots (2n-1)]} = e^{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln (n+k)} = e^{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left[n \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right]} = e^{\ln n \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right)}.$$
$$\frac{f(n)}{n} = \frac{n \cdot e^{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right)}}{n} = e^{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right)} \text{이므로}$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n} = e^{\int_1^2 \ln x dx} = e^{[x \ln x - x]_1^2} = e^{2 \ln 2 - 1} = \frac{4}{e}.$$

1. 모든 자연수 n 과 모든 $x \in [-L, L]$ 에 대하여

$$|f_n(x)| \leq \frac{|x^4 + \sqrt{n}x^3|}{n \cdot n} \leq \frac{L^4 + \sqrt{n}L^3}{n^2} \leq \frac{L^4 + L^3}{n^{3/2}},$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^4 + L^3}{n^{3/2}}$$
는 p -급수 판정에 따라 수렴하므로 바이어슈트라스 M -판정에 따라 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 는 $[-L, L]$ 에서 균등수렴.

실수 $a \in \mathbb{R}$ 라 하자. $\sum_{k=1}^n f_k(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이다.

아르키메데스 원리에 따라 $0 \leq |a| < N$ 인 $N \in \mathbb{N}$ 있다.

앞서 보인 결과로부터 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이다.

그러므로 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 는 \mathbb{R} 에서 연속이다.

2. 충분히 큰 자연수 n 과 모든 $x \in [0, \infty)$ 에 대하여

$$|f_n(x)| \leq \max\left\{\frac{1}{n^2 \ln(2n)}, \frac{1}{n^2}\right\} = \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$
은 수렴하므로 바이어슈트라스 M 판정에 따라 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 는 $[0, \infty)$ 에서 균등수렴.
$$a_n = \int_0^{\ln(2n)} f_n(x) dx = \frac{1}{2n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}.$$

3.

$$a_{n+1} = \int_0^1 (1-x^2)^{n+1} dx$$
$$= 2(n+1) \int_0^1 x^2 (1-x^2)^n dx \quad (\text{부분적분})$$
$$= 2(n+1) \int_0^1 \{1 - (1-x^2)\} (1-x^2)^n dx$$
$$= 2(n+1) \int_0^1 (1-x^2)^n - (1-x^2)^{n+1} dx$$
$$= 2(n+1)(a_n - a_{n+1}) \text{이므로}$$
$$a_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} a_n, \quad f(n) = \frac{2n+2}{2n+3}.$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left[\frac{(a_n)^\alpha}{(a_{n+1})^\alpha} - 1 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left[\left(\frac{2n+3}{2n+2} \right)^\alpha - 1 \right] = \frac{1}{2} \cdot g'(1) = \frac{\alpha}{2} \text{이므로}$$
$$(g(x) = x^\alpha, \quad h_n = \frac{1}{2n+2})$$

라베 판정에 따라 $\alpha > 2$ 일 때 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^\alpha$ 이 수렴한다.

$\alpha = 2$ 인 경우, $a_n > \int_0^1 1 - nx^2 dx > \int_0^{1/\sqrt{n}} 1 - nx^2 dx = \frac{2}{3\sqrt{n}}$ 이므로

$$a_n^2 > \frac{4}{3} \frac{1}{n}, \quad \sum \frac{1}{n}$$
은 발산하므로 비교판정에 따라 $\sum (a_n)^2$ 도 발산.

그러므로 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^\alpha$ 이 수렴하는 α 의 범위는 $\alpha > 2$.

4.

$$\left\| \frac{x}{1+e^{nx}} \right\|_{[0, \infty)} \leq \frac{(1/n)}{e^{n(1/n)}} = \frac{1}{en} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

$[0, \infty)$ 에서 $x^k(e^{-kx} - e^{-(k+1)x}) \leq (xe^{-x})^k(1 - e^{-x}) \leq \frac{1}{e^k},$

$$\sum \frac{1}{e^k} < \infty$$
이므로 바이어슈트라스 M -판정에 따라 $\sum_{k=0}^{n-1} x^k(e^{-kx} - e^{-(k+1)x})$ 는 균등수렴한다.

그러므로 $\{f_n\}$ 는 $[0, \infty)$ 에서 균등수렴.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$$
$$= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} x^n (e^{-nx} - e^{-(n+1)x}) dx$$
$$= \int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^x - x} dx$$
$$= [\ln(e^x - x)]_0^1$$
$$= \ln(e - 1).$$

5. $f_n'(x) = nx^{n-1}(1-x)^{n^2-1}(1-(n+1)x)$, 양 끝 점(경계) $f_n(0) = f_n(1) = 0$,

$$M_n = f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}.$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} \text{이므로 } \sum_{n=1}^{\infty} M_n x^n \text{의 수렴반경 } e.$$

$x \in [0, 1] \subset (-e, e)$ 에 대하여 $|f_n(x)| \leq M_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$ 이므로 바이어슈트라스 M 판정에 따라 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 는 $[0, 1]$ 에서 균등수렴.

6. $t = 1 + (\sin x)^{2n}$ 치환하면 $dt = 2n(\sin x)^{2n-1} \cos x dx$,

$$a_n = \int_1^2 \frac{4}{nt} dt = \frac{4 \ln 2}{n} \text{이므로}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+2} = 4 \ln 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = 4 \ln 2 \cdot \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) = 3 \ln 2.$$

$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 에서 $\{f_n\}$ 는 연속이므로 리만적분가능하다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{가 } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{에서 균등수렴한다고 가정하면}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{는 } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{에서 리만적분가능하므로}$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \ln 2}{n} \text{이며,}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \ln 2}{n}$$
는 p 급수 판정에 의해 발산하므로 모순이다.

7.

자연수 n 에 대하여 $f_n(x)=e^x-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}$ 는 $[0,1]$ 에서 미분가능하므로 테일러 정리에 따라 $f_n(x)=\frac{e^{t_x}}{n!}x^n$ 되는 t_x 가 0과 x 사이에 존재한다.

$x\in[0,1]$ 에 대하여 $|f_n(x)|\leq\frac{e}{n!},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e}{n!}=e(e-1)$ 이므로

($\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e}{n!}$ 은 비관정에 의해 수렴하므로)

바이어슈트라스 M 판정에 따라 $\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)$ 는 $[0,1]$ 에서 균등수렴한다.

$n\geq 1$ 이면 미적분 기본정리에 따라 $f_n'=f_{n-1}$. ($\{f_n\}$: 미분가능 함수열)

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)$ 라 하면

$\sum_{n=0}^{\infty}f_n(0)=f_0(0)+0=1,\sum_{n=1}^{\infty}f_n'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_{n-1}(x)$ 는 $[0,1]$ 에서 균등수렴하므로

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[f(x)]&=\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}f_n(x)\\&=\frac{d}{dx}f_0'(x)+\sum_{n=1}^{\infty}f_n'(x)\\&=e^x+\sum_{n=1}^{\infty}f_{n-1}(x)\\&=e^x+f(x).\end{aligned}$$

$\frac{d}{dx}(e^{-x}f(x))=1$ 이므로 $e^{-x}f(x)=x+C, f(0)=1$ 이므로 $f(x)=e^x(x+1)$.

(다른 설명)

$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)$ 는 $[0,1]$ 에서 미분가능하고, $g(0)=1$ 이므로

$g'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n'(x)=e^x+\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)=e^x+g(x)$ 이므로 $g'(x)e^{-x}=1+g(x)e^{-x}$.

$$\begin{aligned}\int_0^xg'(t)e^{-t}dt&=x+\int_0^xg(t)e^{-t}dt\\&=x+[-g(t)e^{-t}]_0^x+\int_0^xg'(t)e^{-t}dt=x-g(x)e^{-x}+g(0)+\int_0^xg'(t)e^{-t}dt\end{aligned}$$

$0=x-g(x)e^{-x}+1, g(x)=e^x(x+1)$.

8.

$$\begin{aligned}\|g_n(x)-x\|_{[0,1]}&=\left\|\int_0^x\{(x-y)^n\sin^n(xy)\}dy\right\|_{[0,1]}\\&\leq\left\|\int_0^x(x-y)^ndy\right\|_{[0,1]}\leq\frac{1}{n+1}\rightarrow 0\ (n\rightarrow\infty)\text{이므로}\end{aligned}$$

$[0,1]$ 에서 $\{g_n\}\Rightarrow x$.

$\{g_n\}$ 는 $[0,1]$ 에서 연속이므로 리만적분가능하다.

$$\lim_{n\rightarrow\infty}a_n=\lim_{n\rightarrow\infty}\int_0^1g_n(x)dx=\int_0^1g(x)dx=\frac{1}{2}.$$

9. $x\neq 0$ 일 때 $h(x)=\left[\tan^{-1}\left(\frac{t}{x^2}\right)\right]_{t=0}^{t=1}=\tan^{-1}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

$$\lim_{x\rightarrow 0}h(x)=\lim_{x\rightarrow 0}\tan^{-1}\left(\frac{1}{x^2}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

$\{h_n\}$ 은 $x=0$ 에서 연속이지만 h 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

만약, $\{h_n\}\Rightarrow h$ 이면 h 는 $x=0$ 에서 연속이 되어야 하므로 모순이다.

따라서 $\{h_n\}\not\Rightarrow h$.

10. 1

$$\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}|x-2n|\right)=\frac{n-|x-2n|}{n^2}\circlearrowright\text{이므로}$$

$n-|x-2n|\leq 0$ 일 때 $f_n(x)=0$,

$$n-|x-2n|\geq 0\text{일 때 }f_n(x)=\frac{n-|x-2n|}{n^2}\circlearrowright\text{이므로 }\int_0^{\infty}f_n=\int_n^{3n}f_n=1.$$

각 $x\in[0,\infty)$ 에 대하여 아르키메데스 원리에 의해 $x<N$ 인 $N\in\mathbb{N}$ 있다.

$n\geq N$ 일 때 $x\in[0,n]$ 이므로 $f_n(x)=0$.

$$\int_0^{\infty}\left(\lim_{n\rightarrow\infty}f_n\right)=0,\text{ 구하는 값 }1.$$

11. $x=0$ 일 때 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\tan^{-1}\frac{x}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}0=0$.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{n}\tan^{-1}\frac{x}{n}\right]=\frac{1}{n}\cdot\frac{1/n}{1+(x/n)^2}\leq\frac{1}{n^2},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}<\infty\text{이므로}$$

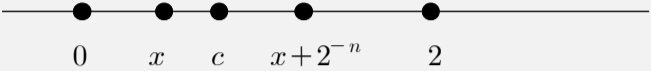
바이어슈트라스 M -판정에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2}<\infty$.

미분과 함수열에 관한 정리에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\tan^{-1}\frac{x}{n}$ 는 \mathbb{R} 에서 점별수렴하고,

$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ 이므로 f 는 \mathbb{R} 에서 균등연속이다.

12. $x\in[0,1]$ 일 때, 평균값정리에 의해

$g_n(x)=f'(c)$ 인 c 가 x 와 $x+2^{-n}$ 사이에 있다.



하이네 정리에 의해 f' 은 $[0,2]$ 에서 균등연속이므로

$\varepsilon>0$ 에 대하여 $\delta>0$ 가 존재해서

$|x-y|<\delta, x, y\in[0,2]$ 이면 $|f'(x)-f'(y)|<\varepsilon$.

한편 $(x+2^{-n})-x=2^{-n}\rightarrow 0\ (n\rightarrow\infty)$ 이므로

주어진 $\delta>0$ 에 대하여 $N\in\mathbb{N}$ 이 존재해서 $n\geq N$ 이면

$|c-x|<|(x+2^{-n})-x|<\delta$ 이므로

$|g_n(x)-f'(x)|=|f'(c)-f'(x)|<\varepsilon$, 즉 $\{g_n\}\Rightarrow f'$.

f' 은 $[0,1]$ 에서 연속이므로 미적분의 기본정리에 의해

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\int_0^1g_n=\int_0^1f'=f(1)-f(0).$$

13. $n\in\mathbb{N}$ 에 대하여 $f(x_n)=0$ 인 상수수열이 아닌 $\{x_n\}\subset(-1,1)$ 은

볼자노-바이어슈트라스 정리에 의해 $c\in(-1,1)$ 로 수렴하는 부분수열 있다.

이 수열의 부분수열로서 모든 자연수 k 에 대해 $c\neq x_{n_k}$ 인 $\{x_{n_k}\}$ 를 택하면

$$f(x_{n_k})=0,\lim_{k\rightarrow\infty}x_{n_k}=c.$$

(가)에 의해 $r>0$ 에 대해 $x\in(c-r,c+r)$ 이면

$$\|R_n(x)\|_{(c-r,c+r)}\leq\frac{3(n+1)^2}{(n+1)!}\cdot(2r)^{n+1}\rightarrow 0\ (n\rightarrow\infty)\text{이므로}$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

(나)에 의해 $(c-r,c+r)$ 에서 $f(x)=0$.

r 은 임의이므로 \mathbb{R} 에서 $f=0$, 모순이다.

그러므로 주어진 집합은 유한집합이다. (해의 개수는 유한하다.)

14. $\{f_n\}$ 은 $[-1,1]$ 에서 미분가능 함수열이다.

$0\in[-1,1]$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(0)=\sum_{n=1}^{\infty}0=0<\infty$,

$$|f_n'(x)|\leq\frac{e+1}{n^2},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e+1}{n^2}=\frac{(e+1)\pi^2}{6}<\infty\text{이므로}$$

바이어슈트라스 M -판정에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n'(x)$ 는 $[-1,1]$ 에서 균등수렴.

주어진 정리에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 는 $[-1,1]$ 에서 미분가능한 함수로 균등수렴.

15. $(-5,5]$

$$a_n=\frac{(-1)^nx^n}{5^n\sqrt{n}},\lim_{n\rightarrow\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{x}{5}\right|<1,\ |x|<5.$$

$x=5$ 일 때 교대급수 판정에 의해 수렴.

$x=-5$ 일 때 p -급수판정에 의해 발산.

구하는 수렴구간 $(-5,5]$.

16. $\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}\int_0^1 n^2 x e^{-2 n x} d x &=\left[n^2 x e^{-2 n x} \cdot\left(-\frac{1}{2 n}\right)\right]_0^1-\int_0^1 n^2\left(-\frac{1}{2 n}\right) e^{-2 n x} d x \\&=-\frac{n}{2} e^{-2 n}+\int_0^1 \frac{n}{2} e^{-2 n x} d x \\&=-\frac{n}{2} e^{-2 n}+\frac{n}{2}\left[-\frac{1}{2 n} e^{-2 n x}\right]_0^1 \\&=-\frac{n}{2} e^{-2 n}+\frac{1}{4}\left(1-e^{-2 n}\right)\end{aligned}$$

구하는 값 $\frac{1}{4}$.

17. ④

ㄱ. 양항급수로서 절대수렴하므로 주어진 급수도 수렴한다.

ㄴ. $\lim _{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n^2+1} \neq 0$ 이므로 일반항판정에 의해 발산한다.

ㄷ. $\lim _{n \rightarrow \infty} a_n=0, \lim _{n \rightarrow \infty} \frac{e^{a_n}-1}{a_n}=\lim _{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x}=1< \infty$
극한비교판정에 의해 주어진 급수는 수렴한다.

18. ④

ㄱ. f 는 $[0,1]$ 에서 연속이므로 하이네정리에 의해 옳다.

ㄴ. 점별수렴성만으로는 항상 성립하지 않는다.

ㄷ. 유계폐구간에서 정의된 함수열 $\left\{f_n\right\}$ 이 정의역의 한 점에서 수렴(점별수렴)하고 $\left\{f_n^{'}\right\}$ 이 균등수렴하면 $\left\{f_n\right\}$ 도 균등수렴한다.

19. (가)에 의해

$$\begin{aligned}2 \pi i &=\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{a \cos t+i b \sin t}(-a \sin t+i b \cos t) d t \\&=\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left(b^2-a^2\right) \cos t \sin t+i a b}{a^2 \cos ^2 t+b^2 \sin ^2 t} d t \text { 에서 }\end{aligned}$$

$$\text { 실수부와 허수부를 비교하면 } 2 \pi=\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a b}{a^2 \cos ^2 t+b^2 \sin ^2 t} d t \text { 에서 } K(a, b)=\frac{1}{a b} .$$

(다)에 의해

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} s_n(x) d x &=\sum_{m=1}^n \frac{1}{2 m^2} \int_{-\pi}^{\pi}|x| \cos (m x) d x \\&=\sum_{m=1}^n \frac{1}{m^2} \int_0^{\pi} x \cos (m x) d x \\&=\sum_{m=1}^n \frac{1}{m^2} \cdot \frac{(-1)^m-1}{m^2} .\end{aligned}$$

$$[-\pi, \pi] \text { 에서 }\left|\frac{1}{2 m^2}|x| \cos (m x)\right| \leq \frac{\pi}{2 m^2},$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi}{2 m^2}=\frac{\pi}{2} \cdot \zeta(2)=\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^3}{12}< \infty \text { 이므로 (라)에 의해 }\left\{s_n\right\} \Rightarrow s .$$

(나)와 (마)에 의해

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} s(x) d x &=\lim _{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} s_n(x) d x \\&=\lim _{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^m-1}{m^4} \\&=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n-1}{n^4} \\&=\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{(2 k-1)^4} \\&=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n^4}-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{(2 n)^4} \\&=-\frac{15}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \\&=-\frac{15}{8} \cdot \zeta(4)=-\frac{\pi^4}{48} .\end{aligned}$$

20. ③

$$a_n=\frac{n!}{n^n}(x-3)^n, \lim _{n \rightarrow \infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{|x-3|}{e}<1 \text { 에서 } 3-e< x < 3+e .$$

구하는 개수 5.

21. ③

① 하이네 정리에 의해 $[0,1]$ 에서 균등연속된다.

② $\lim _{n \rightarrow \infty} x_n^3=0, \lim _{n \rightarrow \infty} x_n=0$ (0으로 수렴 안하면 모순)이므로 $\left\{x_n\right\}$ 은 \mathbb{R} 에서 코시 수열이다. 한편 f 는 $x=0$ 에서 연속이므로 $\left\{f\left(x_n\right)\right\}$ 은 $f(0)$ 로 수렴한다. 따라서 $\left\{f\left(x_n\right)\right\}$ 는 코시 수열이다.

③ $f(x)=e^x, x_n=-n$

④ 서로 다른 두 실수 x, y 에 대하여 평균값 정리에 따라 $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|=|f'(c)| \leq M$ 이므로 $|f(x)-f(y)| \leq M|x-y|$ 인 $M>0$ 있다 (림쉬츠). 따라서 도함수가 유계이면 균등연속이다.

⑤ $\frac{1}{n}$ 은 단조 유계수열이므로 아벨 판정에 의해 옳다.

22. ⑤

ㄱ. 옳다.

ㄴ. f, g 가 $(0,1)$ 에서 연속이므로 옳다.

ㄷ. $(0,1)$ 에서 $\left\{g_n\right\} \Rightarrow g$ 이므로 $\varepsilon>0$ 에 대하여 $N \in \mathbb{N}$ 이 존재해서 임의의 $x \in(0,1)$ 에 대하여 $\left|f_N(x)-f(x)\right|< \varepsilon / 3$.
 g_N 은 $(0,1)$ 에서 균등연속이므로 $\delta>0$ 가 존재해서 $x, y \in(0,1),|x-y|< \delta$ 이면 $\left|f_N(x)-f_N(y)\right|< \varepsilon / 3$.
그러므로 $|x-y|< \delta, x, y \in(0,1)$ 이면 $\begin{aligned}|f(x)-f(y)| &\leq|f(x)-f_N(x)|+\left|f_N(x)-f_N(y)\right|+\left|f_N(y)-f(y)\right| \\&< \varepsilon / 3+\varepsilon / 3+\varepsilon / 3=\varepsilon .\end{aligned}$
* 연속확장정리

23.

$$(I) f(x)=p_3(x)+\frac{f^{(4)}\left(t_x\right)}{4!}(x-c)^4 \text { 인 } t_x \text {가 } x \text {와 } c \text {사이에 있다.}$$

가정에 의해 $f(x)=f(c)+\frac{f^{(4)}\left(t_x\right)}{4!}(x-c)^4$.
 $f^{(4)}$ 는 연속, $f^{(4)}(c)>0$ 이므로 $x \in(c-\delta, c+\delta)$ 일 때 $f^{(4)}(x)>0$ 인 $\delta>0$ 있다.
 $(c-\delta, c+\delta)$ 에서 $\frac{f^{(4)}\left(t_x\right)}{4!}(x-c)^4>0$ 이므로 $x \in(c-\delta, c+\delta)$ 일 때 $f(x) \geq f(c)$.
그러므로 f 는 $x=c$ 에서 극솟값을 갖는다.

(II) $x_1, x_2 \in(a, b)$ 라 하자.

$0 \leq t \leq 1$ 인 $t \in \mathbb{R}$ 에 대하여 $L_t:=(1-t) x_1+t x_2 \in(a, b)$ 이므로 $f(x)=f\left(L_t\right)+f'\left(L_t\right)+\frac{f''\left(t_x\right)}{2!}(x-L_t)^2$ 인 t_x 가 x 와 L_t 사이에 있다.
 $x_1-L_t=t\left(x_1-x_2\right), x_2-L_t=(t-1)\left(x_1-x_2\right)$ 이므로 $(1-t) f\left(x_1\right)+t f\left(x_2\right)=f\left(L_t\right)+(t-t^2) \frac{f''\left(t_x\right)}{2}\left(x_1-x_2\right)^2$.
 $0 \leq t \leq 1$ 일 때 $-t^2+t \geq 0$ 이고 가정에 의해 $\frac{f''\left(t_x\right)}{2}\left(x_1-x_2\right)^2 \geq 0$ 이므로 $(1-t) f\left(x_1\right)+t f\left(x_2\right) \geq f\left(L_t\right)$.
그러므로 f 는 (a, b) 에서 볼록함수이다.

$$(III) f(x)-p_n(x)=\frac{f^{(n+1)}\left(t_x\right)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} \text {인 } t_x \text {가 } x \text {와 } c \text {사이에 있다.}$$

가정에 의해
$$\begin{aligned}\left\|f(x)-p_n(x)\right\|_{(a, b)} &=\left\|\frac{f^{(n+1)}\left(t_x\right)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}\right\|_{(a, b)} \\&\leq \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot(b-a)^{n+1} \rightarrow 0 \quad(n \rightarrow \infty) \text { 이므로 } \\f(x) &=\lim _{n \rightarrow \infty} p_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n .\end{aligned}$$

24. ⑤

- ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n^2}{1/n\sqrt{n^2+7}} = 1 < \infty$ 이므로 극한비교판정에 의해 주어진 급수는 수렴한다.
- ㄴ. 양항 수열 $\left\{\sin \frac{\pi}{\sqrt{n}}\right\}$ 은 0으로 수렴하고 $n \geq 4$ 일 때 감소한다. 교대급수 판정에 의해 주어진 급수는 수렴한다.
- ㄷ. $a_n = \frac{2^n + 3^n}{4^n + 12^n} x^{2n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x^2}{4} \right| < 1$ 에서 $|x| < 2$, 수렴 반경 2.
- * $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{3}{12} |x^2| = \frac{1}{4} |x^2| < 1$.

25. ④

- ㄱ. $[0, 1]$ 에서 $|f_n(x)| \leq 2^{-n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$ 이므로 바이어슈트라스 M -판정에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ 은 균등수렴.
- ㄴ. $\sum_{k=1}^n f_k$ 은 $[0, 1] - \{r_k \mid k = 1, 2, \dots, n\}$ 에서 연속, $\{f_n\} \Rightarrow f$ 이므로 f 는 $[0, 1] - \{r_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 에서 연속.
- ㄷ. $\sum_{k=1}^n f_k$ 의 불연속점의 집합 A 의 측도 0이므로 $\sum_{k=1}^n f_k \in \mathfrak{R}([0, 1])$, 균등수렴하므로 $f \in \mathfrak{R}([0, 1])$.
- $$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sum_{k=1}^n f_k(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{2^k} \right]_{x=r_k}^{x=1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-r_n}{2^n}.$$
- 임의의 $n \in \mathbb{N}$, $1 > r_n$ 이므로 $f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$.
- 따라서 $\int_0^1 f(x) dx = f(1)$ 라 할 수 없다.

26.

- (I) $x \in I$ 에 대하여 $|x| < r < 1$ 인 $r > 0$ 을 택하자. $\left\{ \sum_{k=1}^n f_k \right\}$ 가 I 에서 점별수렴하고 $r \in I$ 이므로 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k$ 가 수렴한다. [정리 1]에 의해 $|a_k r^k| = |a_k| r^k \leq M$ 인 $M > 0$ 있다. 이때 $|a_k x^k| \leq \frac{M}{r^k}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{M}{r^k}$ 는 수렴하므로 [정리 2]에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < \infty$.
- (II) $[-a, a]$ 에서 $|f_n(x)| \leq M |a^n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} M |a^n| < \infty$ 이므로 [정리 6]에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ 은 $[-a, a]$ 에서 f 로 균등수렴.
- (III) I 에서 $f_n(x) = a_n x^n$ 은 미분가능, $f_n'(x) = n a_n x^{n-1}$.
- [정리 3]에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ 은 I 에서 $g \in \mathbb{R}^I$ 로 점별수렴한다. $c \in I$ 에 대하여 $|c| < a < 1$ 인 a 택하자. $x \in (-a, a) \subset I$ 일 때, [정리 4]에 의해 다음 식을 만족하는 t 가 x 와 c 사이에 있으며, $t \in (-a, a)$ 이므로
- $$\begin{aligned} |g(x) - g(c)| &\leq \sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| |x^{n-1} - c^{n-1}| \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| \cdot (|n-1| \cdot |t|^{n-2} \cdot |x-c|) \\ &\leq \left(\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) |a_n| \cdot a^{n-2} \right) \cdot |x-c|. \end{aligned}$$
- [정리 3]에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$ 은 I 에서 수렴하므로 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) |a_n| a^{n-2} = L > 0$, $|g(x) - g(c)| \leq L |x - c|$ (립쉬츠)이므로 g 는 $x = c \in I$ 에서 연속, 따라서 $g = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 은 I 에서 연속.
- [정리 5]에 의해 $G(x) = \int_0^x g(t) dt$ 라 할 때 $G' = g$.
- $$\int_0^x \left(\sum_{k=1}^n k a_k t^{k-1} \right) dt = \sum_{k=1}^n a_k x^k \circ \text{이므로} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x \left(\sum_{k=1}^n k a_k t^{k-1} \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = f(x).$$
- $$\left| G(x) - \int_0^x \left(\sum_{k=1}^n k a_k t^{k-1} \right) dt \right| \leq \int_0^x \sum_{k=n+1}^{\infty} k a_k |x|^{k-1} dt = \sum_{k=n+1}^{\infty} k a_k |x|^k.$$
- $$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n |x|^n < \infty \circ \text{이므로} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} k a_k |x|^k = 0.$$
- 조임정리에 의해 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| G(x) - \int_0^x \left(\sum_{k=1}^n k a_k t^{k-1} \right) dt \right| = 0$ 이므로 $G(x) = f(x), \quad g = G' = f'.$

27. ④

ㄱ. $\|f_n - 0\|_{[0, \infty)} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$ 이므로 $\{f_n\} \Rightarrow 0$,

$[0, \infty)$ 에서 $\frac{e^{-kx}}{k^3} \leq \frac{1}{k^3}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} = \zeta(3) < \infty$ 이므로
바이어슈트라스 M -판정에 의해 $\{g_n\}$ 은 균등수렴.

ㄴ. $n \rightarrow \infty$ 일 때,
$$\int_0^\infty f_n = \int_0^n \frac{x}{n^2} dx + \int_n^\infty 0 dx \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$\neq \int_0^\infty f.$$

ㄷ. $g_n(0) \rightarrow \zeta(3), \left| (-k) \cdot \frac{e^{-kx}}{k^3} \right| \leq \frac{1}{k^2}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ 이므로 바이어슈트
라스 M -판정에 의해 $\{g_n'\}$ 는 균등수렴한다.
그러므로 함수열과 미분에 관한 정리에 의해 $\{g_n\}$ 는 g 로 균등수렴하고,
 $\{g_n'\}$ 는 g' 으로 점별수렴. (유계폐구간에서는 균등수렴한다.)

28. ④

* 리만 제타 함수 $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

ㄱ. $x \in \mathbb{R}, \frac{1}{x^2 + k^3} \leq \frac{1}{k^3}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} = \zeta(3) < \infty$,
바이어슈트라스 M -판정에 의해 $\{f_n\}$ 은 균등수렴.
ㄴ. $\{f_n\}$ 은 균등수렴하는 연속함수열이므로 옳다.
ㄷ. $\{g_n\}$ 이 균등수렴하면 함수열 $\left\{ \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{x} \right\}$ 은 $\mathbb{R} - \{0\}$ 에서 0으로 균등수렴.
 $\|n^{-2}x^{-1}\|_{\mathbb{R} - \{0\}} = \infty$ 이므로 모순. $\{g_n\}$ 은 균등수렴하지는 않는다.
ㄹ. $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \frac{1}{x} \cdot \zeta(2) = \frac{1}{x} \cdot \frac{\pi^2}{6}$ 은 $\mathbb{R} - \{0\}$ 에서 연속.

29. ④

$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$, 수렴반경 1이므로 $|x| < 1$ 에서 항별 미분가능.
 $-(1+x)^{-2} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (-1)^n x^{n-1}, x \cdot (1+x)^{-2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^{n+1} x^n$.

* 멱급수(거듭제곱급수, power series) 성질

- ① 수렴반경 R 이면 $(-R, R)$ 에서 연속이고, 항별 미분, 항별 적분가능하다.
- ② (아벨정리) 수렴구간(반경) 내 콤팩트 집합 K 에서 균등수렴한다. 특히,
수렴반경 R 일 때 $[R, R]$ 에서 균등수렴할 필요충분조건은 $f(R), f(-R)$
이 존재
- ③ $\sum_n a_n x^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 의 수렴반경 R_1, R_2 ,
 $R = \min\{R_1, R_2\}$ 일 때 $|x| < R$ 에서 다음이 성립.

㉠
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

㉡
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k} \right) x^n \right]$$

30. ①

- ① $x=0, 1$ 일 때 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$,
 $0 < x < 1$ 일 때 $0 < 1 - x^2 < 1$ 이며
$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} nx(1-x^2)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{(1/1-x^2)^n \ln(1/1-x^2)} = 0.$$

따라서 $\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{2(n+1)} [(1-x^2)^{n+1}]_0^1 = \frac{1}{2}.$$
- ② $\mathcal{R}([0, 1])$ 의 함수열 $\{f_n\} \Rightarrow 0$ 이므로 옳다.
 - ③ 균등수렴하지는 않지만 옳다.
 - ④ $\mathcal{R}([0, 1])$ 의 함수열 $\{f_n\} \Rightarrow 0$ 이므로 옳다.
 - ⑤ 균등수렴하지는 않지만 옳다.

31. 극한값은 존재하지 않는다.

$x < 0$ 일 때 $(x^2)^{\frac{5}{2}} = -x^5, x > 0$ 일 때 $(x^2)^{\frac{5}{2}} = x^5$.
$$\frac{\left[\sin x - x + \frac{x^3}{6} \right]}{(x^2)^{5/2}} = \frac{x^5}{|x|^5} \left[\frac{1}{5!} - \frac{x^2}{7!} + \frac{x^4}{9!} - \frac{x^6}{11!} + \dots \right]$$

 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{5}{2}} = 1$ 이므로 주어진 극한의 좌극한은 $-\frac{1}{5!}$, 우극한은 $+\frac{1}{5!}$.
그러므로 주어진 극한값은 존재하지 않는다.

32. 단조감소 양항 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 이 수렴 $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
 $a_n = \frac{(2n-1)!}{(2^n \cdot n!)^2}$ 은 양항 수열이다. $0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4n^2 + 2n}{4n^2 + 8n + 4} < 1$ 이므로
 $\{a_n\}$ 은 단조감소, $0 < a_n \leq \frac{1}{2n} \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$ (조임정리)
교대급수 판정에 의해 주어진 급수는 수렴한다.

33. f 는 C^∞ 급 함수이므로 테일러 정리에 의해
$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!} x^{n+1}$$
인 t_x 가 0과 x 사이에 있다.
 $f(0) = 0, f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)! (1+x)^{-n} \Big|_{x=0} = (-1)^{n-1} (n-1)!$ 이므로
$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k.$$

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+1} (1+t_x)^{-n-1},$$

$$\|f_n(x) - f(x)\|_{[0, 1]} = \|R_n(x) - 0\|_{[0, 1]} \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$$
이므로
 $[0, 1]$ 에서 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$.

34. $0 \leq x < 1$ 일 때 $f(x) = 0, x = 1$ 일 때 $f(x) = 1$,
 $1 < x \leq 2$ 일 때 $f(x) = \frac{3}{2}$.
 $\{f_n\}$ 은 $[0, 2]$ 에서 연속함수열이다. 만약 $\{f_n\} \Rightarrow f$ 이면 f 도 연속이다.
 f 는 $x = 1$ 에서 불연속이므로 $\{f_n\} \not\Rightarrow f$.

35. 수렴

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(n+1)!}{(n+2)^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^n}{n!} \right] = \frac{1}{e} < 1$$
이므로
비판정에 의해 주어진 급수는 수렴한다.

36. * 출제오류

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \infty \neq 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.
 f 는 $x=0$ 에서 불연속이므로 미분가능하지도 않으며, n 번 미분가능하지도
않다.
그러므로 테일러급수도 존재하지 않으며 (1)의 결과를 근거로
실함수와 복소함수의 미분가능성이 갖는 특징의 차이도 무엇인지 알 수 없다.

* $x=0$ 일 때 0, $x \neq 0$ 일 때 $e^{-\frac{1}{x^2}}$ 으로 정의한 함수 $g(x)$ 에 대하여
 $g^{(n)}(0) = 0$ 이며 테일러급수 0이다.

37.

(1) 임의의 $x \in \mathbb{R}$ 에 대하여 $|2^{-n} \cos(3^n x)| \leq 2^{-n}$, $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = \frac{1}{1-2^{-1}} = 2$.

바이어슈트라스 M -판정에 의해 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(3^n x)$ 는 \mathbb{R} 에서 균등수렴.

(2) $\sum_{k=0}^n 2^{-k} \cos(3^k x) \in \mathfrak{R}(\mathbb{R})$ 이므로 $f \in \mathfrak{R}(\mathbb{R})$ 이고,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^n 2^{-k} \cos(3^k x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=0}^n 2^{-k} \cdot \int_0^{2\pi} \cos(3^k x) dx \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=0}^n 6^{-k} [\sin(3^k x)]_0^{2\pi} \right] = 0. \end{aligned}$$

38.

(1) $x=0$, 1일 때 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$,

$$\begin{aligned} 0 < x < 1 \text{일 때 } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1-x) n x^n = (1-x) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(1/x)^n} \\ &= (1-x) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1/x)^n \ln(1/x)} = 0. \end{aligned}$$

그러므로 $[0, 1]$ 에서 $f(x) = 0$

(2) $\|f_n - f\|_{[0, 1]} = f_n(n/n+1) = (1+1/n)^{-n-1} \rightarrow e^{-1} \quad (n \rightarrow \infty)$.

$\therefore \{f_n\} \not\Rightarrow f$.

39. 주어진 가정에 의해 임의의 다항식 $p(x)$ 에 대하여 $\int_0^1 f(x)p(x)dx = 0$.

바이어슈트라스 근사정리에 의해

$f(x)$ 로 균등수렴하는 다항함수열 $\{p_n(x)\}$ 있다.

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x)p_n(x)dx = \int_0^1 f(x)^2 dx, \quad f^2(\geq 0) \text{는 } [0, 1] \text{에서 연속이므로}$$

$$f^2 \equiv 0, \quad f \equiv 0.$$

40. 수렴

$$f(x) = \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}, \quad [1, \infty) \text{에서 } f \geq 0,$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} - e^{-\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{x} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) < 0, \quad f \text{는 감소함수} \end{aligned}$$

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = 2e^{-1} < \infty \text{이므로 적분판정에 의해 주어진 급수는 수렴한다.}$$

41. ㉠

㉠ $\|f_n(x) - f(x)\|_{\mathbb{R}} = \infty$, 균등수렴하지 않는다.

㉡ $\|f_n(x) - f(x)\|_{\mathbb{R}} = \infty$, 균등수렴하지 않는다.

㉢ $\|f_n(x) - f(x)\|_{\mathbb{R}} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \{f_n\} \Rightarrow f$.

42. ㉣

㉠ $f(x) = x$

㉡ $f(x) = x$

㉢ $f(x) = 1$

㉣ 가정에 의해 임의의 다항식 $p(x)$ 에 대하여

$$\int_{-1}^1 f(x)p(x)dx = 0. \text{ 바이어슈트라스 근사정리에 의해}$$

f 로 균등수렴하는 다항함수열 $\{p_n(x)\}$ 있다.

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 f(x)p_n(x)dx = \int_{-1}^1 f(x)^2 dx,$$

$f^2(\geq 0)$ 는 $[-1, 1]$ 에서 연속이므로 $f^2 \equiv 0, f \equiv 0$.

43. ㉡

$t \in [0, 1]$ 에 대하여 x 축 위에서 a 에서 b 를 잇는 선분 $ta + (1-t)b$,

$f(ta + (1-t)b)$ 는 f 의 $x=a$ 에서 $x=b$ 까지의 함숫값,

$tf(a) + (1-t)f(b)$ 는 $f(a)$ 에서 $f(b)$ 를 잇는 선분이다.

$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$ 는 $f(a), f(b)$ 를 잇는 선분이

$f([a, b])$ 보다 윗쪽에 그려진다는 것이다. (아래로 볼록)

$f(x) = \sin x \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ 는 조건을 만족하지 않는다.

44. ㉣ $\frac{1}{4}$

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 4|x| < 1, \text{ 수렴반경(구간) } \frac{1}{4}.$$

45. ㉣

㉠ $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 은 $[1, \infty)$ 에서 감소, $f \geq 0, f(n) = \frac{1}{1+n^2}$.

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \tan^{-1} x \Big|_1^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} < \infty \text{이므로}$$

적분 판정법에 의해 주어진 급수는 수렴

㉡ $a_n = \frac{n!}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}, b_n = \frac{1}{1+n^2}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 < \infty$ 이므로

극한비교판정에 의해 $\sum a_n, \sum b_n$ 은 동시에 수렴하거나 동시에 발산.

$\sum a_n$ 이 수렴하므로 $\sum b_n$ 도 수렴한다.

㉢ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{e^n}} = \frac{1}{e} < 1$ 이므로 제곱근 판정에 의해 $\sum \frac{n}{e^n}$ 은 절대수렴한다.

㉣ 코시 응집 판정 이용하자.

$$\left\{ \frac{\log n}{n} \right\}_{n=3}^{\infty} \text{은 감소하는 양항 수열이다.}$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log n}{n} \text{의 수렴성은 } \sum_{n=3}^{\infty} 2^n \cdot \frac{\log(2^n)}{2^n} = \sum_{n=3}^{\infty} n \log 2 \text{의 수렴성과 동치이다.}$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} n \log 2 \text{는 일반항판정에 의해 발산하므로 } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log n}{n} \text{는 발산한다.}$$

따라서 주어진 급수도 발산한다.

46. ㉠

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad 1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \cdots + \frac{2^n}{n!} + \cdots = e^2.$$

1. $X(t)=\begin{pmatrix} \alpha e^{-t}+\beta e^{5t} \\ -\alpha e^{-t}+2\beta e^{5t} \end{pmatrix}$

$X(t)=\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ 라 하면 $x'=x+2y, \ y'=4x+3y$ 에서 $y=\frac{x'-x}{2}$ 이므로

$x''-4x'-5x=0$ 에서 특성방정식 $t^2-4t-5=0, \ t=-1, \ 5$.

따라서 $x(t)=\alpha e^{-t}+\beta e^{5t}, \ y(t)=-\alpha e^{-t}+2\beta e^{5t}$.

그러므로 $X(t)=\begin{pmatrix} \alpha e^{-t}+\beta e^{5t} \\ -\alpha e^{-t}+2\beta e^{5t} \end{pmatrix}$.

2. $y=\alpha e^{-x}+\beta e^{4x}-\frac{1}{5}xe^{-x}$

$y''-3y'-4y=0$ 의 해 $y=e^{tx}$ 라 하면

$t^2-3t-4=0$ 에서 $t=-1, \ 4$ 이므로 $y=e^{-x}, \ e^{4x}$.

따라서 일반해는 $y=\alpha e^{-x}+\beta e^{4x}$ 이다.

$y''-3y'-4y=e^{-x}$ 의 특수해 $y=\gamma \cdot xe^{-x}$ 라 하면

$(-2\gamma+\gamma x)-3(\gamma-\gamma x)-4\gamma x=1$ 에서 $k=-\frac{1}{5}$.

그러므로 $y=\alpha e^{-x}+\beta e^{4x}-\frac{1}{5}xe^{-x}$.

3.

하위 영역	배점	예상 정답율(%)	출제근거 (이유)
고등수학(미분방정식)	4	75	자작

$y'=p$ 라 두면, $xp'+p=0 \dots\dots\dots 1$ 점

$\frac{p'}{p}=-\frac{1}{x}$ 에서 $\ln|p|=-\ln x+C$

$\therefore p=\frac{C_1}{x} \ (C_1=e^C) \dots\dots\dots 2$ 점

$y'(1)=2$ 에서 $C_1=2 \dots\dots\dots 3$ 점

$y'=\frac{2}{x}$ 에서 $y=2\ln x+C_2$

$y(1)=1$ 에서 $C_2=1 \dots\dots\dots 4$ 점

(답) $y=\ln x^2+1$ 또는 $2\ln x+1$

4. ④

5. ①

6. ②

7. ①