[연도별 기출문제]

[1993학년도 중등교사 신규임용 후보자 선정 경쟁시험]
[1994학년도 중등교사 신규임용 후보자 선정 경쟁시험]
[1995학년도 중등교사 신규임용 후보자 선정 경쟁시험]
[1996학년도 중등교사 신규임용 후보자 선정 경쟁시험]

[1996년 8월 6일 교원임용후보자경쟁시험 전국모의고사]
[1997학년도 중등교사 신규임용 후보자 선정 경쟁시험]
[1998학년도 중등교사 신규임용 후보자 선정 경쟁시험]
[1999학년도 중등교사 신규임용 후보자 선정 경쟁시험]
[1999학년도 추가 중등교사 신규임용 후보자 선정 경쟁시험]
[2000학년도 중등교사 신규임용 후보자 선정 경쟁시험]
[2001학년도 중등교사 신규임용 후보자 선정 경쟁시험]

[2002학년도 중등교사 신규임용 후보자 선정 경쟁시험]
[2003학년도 중등교사 신규임용 후보자 선정 경쟁시험]
[2004학년도 중등교사 신규임용 후보자 선정 경쟁시험]
[2005학년도 중등교사 신규임용 후보자 선정 경쟁시험]
[2006학년도 중등교사 신규임용 후보자 선정 경쟁시험]
[2007학년도 중등교사 신규임용 후보자 선정 경쟁시험]
[2008학년도 중등교사 신규임용 후보자 선정 경쟁시험]

[2009학년도 중등교사신규임용후보자선정경쟁시험 모의평가]
[2009학년도 중등교사신규임용후보자선정경쟁시험]
[2010학년도 중등교사신규임용후보자선정경쟁시험]
[2011학년도 중등교사신규임용후보자선정경쟁시험]
[2012학년도 중등교사신규임용후보자선정경쟁시험]
[2013학년도 중등교사신규임용후보자선정경쟁시험]

[2014학년도 중등학교교사 임용후보자 선정경쟁시험]
[2015학년도 중등학교교사 임용후보자 선정경쟁시험]
[2016학년도 중등학교교사 임용후보자 선정경쟁시험]
[2017학년도 중등학교교사 임용후보자 선정경쟁시험]
[2018학년도 중등학교교사 임용후보자 선정경쟁시험]
[2019학년도 중등학교교사 임용후보자 선정경쟁시험]

[2020학년도 중등학교교사 임용후보자 선정경쟁시험]
[2021학년도 중등학교교사 임용후보자 선정경쟁시험]
[2022학년도 중등학교교사 임용후보자 선정경쟁시험]
[2023학년도 중등학교교사 임용후보자 선정경쟁시험]
[2024학년도 중등학교교사 임용후보자 선정경쟁시험]
[2025학년도 중등학교교사 임용후보자 선정경쟁시험]
[2026학년도 중등학교교사 임용후보자 선정경쟁시험]

[1993학년도 중등교사 신규임용 후보자 선정 경쟁시험]

1. 영역 D가 $0 \le y \le x^2$, $0 \le x \le 1$일 때 $\int_D e^{\frac{y}{x}} dydx$의 값은? [1993]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$
③ $\frac{1}{2}$ ④ 1

2. 다음 함수 중 $f(ta+(1-t)b) \le tf(a)+(1-t)f(b)$를 만족시키지 않는 것은? (단, $0 \le t \le 1$) [1993]

① $f(x)=x^2$
② $f(x)=\sin x (0 \le x \le \frac{\pi}{2})$
③ $f(x)=\tan x (0 \le x \le \frac{\pi}{2})$
④ $f(x)=e^x$

3. 미분방정식 $y^2\frac{dy}{dx}=xy+x$의 해는? [1993]

① $x^2=(y-1)^2+\log(y+1)^2+c$
② $x^2=(y-1)^2+\log(y-1)^2+c$
③ $x^2=(y+1)^2+\log(y+1)^2+c$
④ $x^2=(y+1)^2+\log(y-1)^2+c$

4. 두 개의 동전을 동시에 6번 던졌다. 두 개 모두 앞면이 나오는 횟수를 X, 적어도 한 개가 뒷면이 나오는 횟수를 Y라 할 때, $(X-Y)^2$의 기댓값은? [1993]

① $\frac{27}{2}$ ② $\frac{27}{4}$
③ $\frac{9}{2}$ ④ $\frac{9}{4}$

5. 구간 $[0, 1]$에서 독립적으로 세 수 x_1, x_2, x_3를 취하여 이들의 최댓값을 확률변수 X로 할 때, X의 확률밀도함수 $f(x)$는? [1993]

① $f(x)=1$ ② $f(x)=2x$
③ $f(x)=3x^2$ ④ $f(x)=4x^3$

6. 점 $A(1, 2, 3)$에서 두 점 $B(-1, 2, 1)$, $C(4, 3, 2)$를 지나는 직선까지의 거리는? [1993]

① $\frac{\sqrt{6}}{6}$ ② $\frac{\sqrt{6}}{3}$
③ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ④ $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

7. 타원 $4x^2+y^2=4$에 내접하면서 한 변이 y축과 평행한 이등변삼각형의 면적의 최댓값은? [1993]

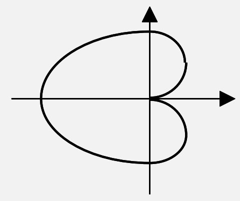
① $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{5\sqrt{6}}{3}$
③ $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ④ $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

8. 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^n$의 수렴반경은? [1993]

① 1 ② $\frac{1}{2}$
③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$

9. [그림]과 같은 곡선 $r=1-\cos\theta$로 둘러싸인 도형의 면적은? [1993]

① $\frac{1}{4}\pi$ ② $\frac{1}{2}\pi$
③ π ④ $\frac{3}{2}\pi$



10. $x=0$의 근방에서 연속인 함수$f(x)$에 대하여 등식
$$\lim_{x\to 0} g(f(x))=g(\lim_{x\to 0} f(x))$$
를 만족시킬 수 없는 것은? [1993]

① $g(x)=x|x|$
② $g(x)=\begin{cases}0 & (x : \text{유리수}) \\ 1 & (x : \text{무리수})\end{cases}$
③ $g(x)=e^x$
④ $g(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0)\end{cases}$

11. 두 조건
A : $x^2+y^2 \le k$,
B : $2x+y-3 \le 0$, $x+2y-2 \le 0$
에서 A가 B이기 위한 충분조건이 될 상수 k의 최댓값은? [1993]

① $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
③ $\frac{9}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$

12. x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6는 각각 1, 2, 3중의 한 값을 가지며 $\sum_{i=1}^{6}x_i=12$이다. 이 때 $\sum_{i=1}^{6}x_i^3$의 최댓값과 최솟값의 합은? [1993]

① 9 ② 10
③ 11 ④ 12

13. $a_1=3$, $a_{n+1}=3^n a_n$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 $a_n=3^{46}$일 때 n의 값은? [1993]

① 9 ② 10
③ 11 ④ 12

14. 정수 n에 대하여 $n-1<x\le n$일 때 $\{x\}=n$으로 정의한다. 이 때 $\sum_{k=1}^{64}\{\log_2 k\}$의 값은? [1993]

① 320 ② 321
③ 322 ④ 323

15. 임의의 실수 t에 대하여 $x=2^t+2^{-t}$일 때 부등식 $x^2-ax+b \ge 0$이 항상 성립하기 위한 상수 a,b의 조건을 $b \ge f(a)$라고 하자. 이 때 $f(0)+f(10)$의 값은? [1993]

① 21 ② 23
③ 25 ④ 27

16. 연립방정식 $\begin{cases} x+y+az=0 \\ x+ay+z=0 \\ ax+y+z=0 \end{cases}$이 $x=y=z=0$이외의 해를 갖도록 하는 a의 값들의 합은? [1993]

① -1 ② 0
③ 1 ④ 2

17. 방정식 $z^n=1$의 모든 해를 극형식으로 나타낼 때 편각 θ들의 합을 S_n이라 하자. 이 때 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$의 값은? [1993] (단, $0\le\theta<2\pi$)

① $\frac{\pi}{2}$ ② π
③ $\frac{3}{2}\pi$ ④ 2π

18. $xy=\frac{1}{2}$과 $|x+y|=2\sqrt{2}$로 둘러싸인 도형을 $y=x$를 축으로 회전시킬 때 생기는 입체의 체적은? [1993]

① $\frac{2}{3}\pi$ ② $\frac{4}{3}\pi$
③ 2π ④ $\frac{8}{3}\pi$

19. 정수 $2^{15}14^{10}+2$를 11로 나누었을 때의 나머지는? [1993]

① 1 ② 4
③ 7 ④ 10

20. 함수 $f(x)=\sin^3x+\cos^3x$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때 $M-m$의 값은? [1993]

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\sqrt{2}$
③ 2 ④ $2\sqrt{2}$

21. 다음 중 수학의 특성과 거리가 먼 것은? [1993]

① 계통성 ② 보편성
③ 형식성 ④ 추상성

22. 네 평면 $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=6$으로 이루어진 사면체에 내접하는 구의 반지름은? [1993]

① $2-\sqrt{2}$ ② $3-\sqrt{3}$
③ $\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{3}$

23. 세 집합

$$U=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\middle|\, a,\ b\ c\text{는 실수}\right\},$$

$$A=\left\{Y \,\middle|\, Y=X\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ X\in U\right\},\ B=\left\{Z \,\middle|\, Z=X\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ X\in U\right\}$$

에서 A와 B의 포함관계는? [1993]

① $A\subset B$ ② $A\supset B$
③ $A=B$ ④ $A\cap B=\varnothing$

24. 둘레의 길이가 $2a$인 직각삼각형에서 빗변의 길이가 x의 범위는? [1993]

① $\frac{(\sqrt{6}-1)a}{2}\le x<a$ ② $\frac{\sqrt{3}+1}{4}\le x<a$
③ $\frac{(\sqrt{2}+1)a}{3}\le x<a$ ④ $2(\sqrt{2}-1)a\le x<a$

25. 방정식 $2x+3y=55$ 를 만족하는 양의 정수해 (x,y)의 개수는? [1993]

① 10 ② 9
③ 8 ④ 7

26. 문제해결의 지도과정에 대하여 폴리아(G. Polya)는 문제의 이해, 계획의 작성, 계획의 실행, 반성의 4단계를 제시하였다. 다음 중 문제의 이해 단계에 해당되지 않는 것은? [1993]

① 그림을 그려라.
② 조건은 충분한가.
③ 적당한 기호를 사용하여라.
④ 비슷한 문제를 알고 있는가.

27. 집합 $G=\{i,a,b,c\}$가 곱셈에 관하여 군(group)을 이룰 때, 다음 설명 중 옳지 않은 것은? [1993]

① $a^2+b^2+c^2=1$
② G는 곱셈에 관하여 아벨군을 이룬다.
③ G의 적당한 부분집합H에 대하여 H가 덧셈군을 이룬다.
④ G의 적당한 진부분집합H에 대하여 H가 곱셈군을 이룬다.

28. $a+b=\sqrt{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, $a-b=\sqrt{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}$일 때 $a^4+3a^2b^2+b^4$의 값은? [1993]

① $2\sqrt{5}$ ② $6\sqrt{2}$
③ $4\sqrt{6}$ ④ 10

29. 세 벡터 $(1,1,0)$, $(1,x,1)$, $(0,1,-1)$가 일차종속이 될 x의 값은? [1993]

① -1 ② 0
③ 1 ④ 2

30. 함수 $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $g(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$이라 할 때 다음 중 틀린 것은? [1993]

① $f'(x)=g(x)$
② $\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=-1$
③ $f^{-1}(x)=\log(x+\sqrt{x^2-1})$
④ $f(x+y)=f(x)g(y)+g(x)f(y)$

31. 함수$f(x)=|\sin x+\cos x|$의 주기를 p라 할 때, $s=\int_0^{5p}f(x)dx$의 값은? [1993]

① $10\sqrt{2}$ ② $5\sqrt{2}$
③ $4\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{2}$

32. $\tan_1x=\tan x$, $\tan_kx=\tan(\tan_{k-1}x)(k=2,3,4,\cdots)$로 정의할 때 $\lim_{x\to0}\frac{\tan_{50}x}{x}=\alpha$, $\lim_{x\to1}x^{\frac{1}{x-1}}=\beta$라 하면 $\alpha\beta$의 값은? [1993]

① $-\frac{1}{e}$ ② $-e$
③ e ④ $\frac{1}{e}$

33. $\int_e^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^4} dx$의 값은? [1993]

① 1 ② $\frac{1}{2}$

③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$

34. 함수 $f(x)$는 $f(0)=0$, $\int_0^1 f(x)dx=1$을 만족하고 그 도함수 $f'(x)$는 연속이다. 이 때 구간 $[0,1]$에서의 도함수 $f'(x)$의 최댓값 M의 범위는? [1993]

① $M \geq 2$ ② $M \leq 2$

③ $M \geq \frac{1}{2}$ ④ $M \leq \frac{1}{2}$

35. 주머니 속에 앞면이 나올 확률이 각각 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$인 동전 C_1, C_2, C_3가 한 개씩 들어있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 동전을 꺼내 4번을 던졌더니 앞면이 2번 나왔다. 균형 잡힌 동전 C_2가 꺼내졌을 확률은? [1993]

① $\frac{6}{17}$ ② $\frac{7}{17}$

③ $\frac{8}{17}$ ④ $\frac{9}{17}$

36. 한 변의 길이가 1인 정삼각형ABC에서 변BC의 삼등분점을 M, N 이라 할 때 $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BM}$의 내적은? [1993]

① $\frac{7}{9}$ ② $\frac{8}{9}$

③ $\frac{13}{18}$ ④ $\frac{17}{18}$

37. 곡선 $y=\tan^{-1}2x$위의 x좌표가 $\frac{\sqrt{3}}{2}$인 점에서의 법선의 방정식은? (단, $|y|<\frac{\pi}{2}$) [1993]

① $y=-2x+\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}$ ② $y=-2x+\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$

③ $y=-2x-\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}$ ④ $y=-2x-\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}$

38. 다음 중 수렴하지 <u>않는</u> 무한급수는? [1993]

① $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ ② $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+2)!}$

③ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^n}$ ④ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n}$

39. n이 양의 정수이고,

$$f(n)=\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)}$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n}$의 값은? [1993]

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{2}{e}$

③ $\frac{3}{e}$ ④ $\frac{4}{e}$

40. 테일러급수를 이용하여 무한급수

$$1+2+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\cdots+\frac{2^n}{n!}+\cdots$$

의 합을 구하면? [1993]

① e^2 ② $2e$

③ e^3 ④ $3e$

[1994학년도 중등교사 신규임용 후보자 선정 경쟁시험]

1. 수학을 전개하는 공리론적 방법의 특성에 대하여 바르게 설명한 것은? [1994]
① 추상적인 기호를 사용하여 수학적 사실을 확신시킨다.
② 자명하다고 간주하는 사실에서 출발하여 추론규칙에 의해 새로운 사실을 밝혀낸다.
③ 직관 또는 귀납적 방법에 의해 특별한 사실을 유도한다.
④ 경험이나 관찰을 바탕으로 일반적인 법칙을 유도한다.

2. 집합 $\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$의 임의의 원소 A, B에 대하여 연산 △를
$$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$$
로 정의할 때, 연산 △에 대한 $\{1\}$의 역원은? [1994]
① $\{1,2\}$　② $\{2\}$
③ $\{1\}$　④ $\varnothing$

3. Dienes는 수학 개념은 점진적인 단계로 학습되어진다고 보고, 수학 개념의 학습 단계를 자유놀이, 게임, 공통성 탐구, 표현, 기호화, 형식화의 6단계로 제시하였다. 다음 학습 활동이 속하는 단계는? [1994]

$f(x)$에 대하여 $f(1)=8$, $f(2)=6$, $f(3)=4$, $f(4)=2$, $f(5)=0$임을 알고, $f(6)$의 값을 구한다.

① 게임단계
② 공통성 탐구 단계
③ 표현단계
④ 기호화 단계

4. 수학을 지도하는 목적으로서 거리가 가장 먼 것은? [1994]
① 실제적인 문제 해결에 수학을 활용할 수 있게 한다.
② 창조적 사고와 합리적 추론을 할 수 있게 한다.
③ 수학의 아름다움을 인식하게 하고, 지적인 만족감과 즐거움을 가지게 한다.
④ 계산 알고리즘의 실행 기능을 숙달하게 한다.

5. 우리나라 수학과 교육과정의 변천 과정 중에서 다음과 같은 특성을 보인 시기는? [1994]

집합의 도입 및 강화, 기호의 엄밀한 사용, 형식화의 추상화의 강화, 연역적 추론의 강조

① 제1차 교육과정기 (생활단원 학습기, 1955 ~ 1963)
② 제2차 교육과정기 (계통 학습기, 1963 ~ 1973)
③ 제3차 교육과정기 (현대화 운동기, 1973 ~ 1981)
④ 제4차 교육과정기 (반성기, 1981 ~ 1987)

6. 수학적 문제 해결 지도를 위한 좋은 문제의 성격으로서 거리가 먼 것은? [1994]
① 도전감을 주는 어려운 문제이지만 적절한 전략을 사용하면 해결될 수 있다.
② 복잡한 처리 과정을 거쳐 해결될 수 있다.
③ 일반화될 수 있거나 다양한 문제 장면으로 확장될 수 있다.
④ 다양한 방법으로 해결될 수 있다.

7. 현행(제5차) 중학교 수학과 교육과정의 지도 및 평가 상의 유의점에 대한 설명이다. 바른 것을 모두 고르면? [1994]

(가) 지도 내용의 배열은 지도 순서를 의미하는 것은 아니므로 필요에 따라서 지도 내용을 재조직할 수 있다. (나) 지도 내용은 학생들이 성취하여야 할 최고 기준을 나타낸 것이다. 따라서, 능력이 낮은 학생들에게는 어려운 내용을 생략하여 지도할 수 있다. (다) 문제 해결의 결과뿐만 아니라 해결 과정과 그 방법도 중요시하여야 한다. (라) 평가의 방법으로는 지필 검사를 사용하며, 관찰법은 객관성이 결여되므로 사용하지 않는다.

① (가), (나)　② (다), (라)
③ (나), (다)　④ (가), (다)

8. van Hiele의 기하 개념의 이해 발달 단계 중 정사각형은 직사각형임을 처음으로 이해하는 단계는? [1994]
① 분석단계　② 비형식적 연역 단계
③ 형식적 연역 단계　④ 엄밀 단계

9. $500! \times 200!$이 35^n으로 나누어떨어질 때, 정수 n의 최댓값은? [1994]
① 32　② 82
③ 114　④ 146

10. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_1=1$, $a_2=8$, $a_n=\sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}\,(n=3,4,\cdots)$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은? [1994]
① 3　② 4
③ 5　④ 6

11. $\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}$의 값을 구하면? [1994]
① $\frac{1}{\sqrt{e}}$　② $\frac{1}{2\sqrt{2}}$
③ $\frac{1}{e}$　④ $\frac{1}{2e}$

12. 복소수 z가 $0<|z|<1$ 을 만족할 때, 복소평면 위의 무한개의 점 z, z^2, z^3, z^4, $\cdots$ 를 차례로 연결해서 만들어 지는 선분들의 길이의 합은? [1994]
① $\frac{|z|}{1-|z|}$　② $\left|\frac{z}{1-z}\right|$
③ $\frac{|1-z^2|}{1}-|z|$　④ $\frac{|z-z^2|}{1-|z|}$

13. $(1+x+x^2)^5 = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_{10}x^{10}$일 때, $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10}$의 값은? [1994]
① 60　② 61
③ 121　④ 243

14. 벡터공간 $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$의 부분공간
$$W=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a-3b+2c+d=0\right\}$$
의 차원 $\dim(W)$는? [1994]
① 1　② 2
③ 3　④ 4

15. $1 \le x < 8$일 때, $f(x)=[\log_2 x]$에서 집합 $\{x|f(x+5)=f(x)+2\}$를 구하면? (단, $[t]$는 t를 넘지 않는 정수이다.) [1994]

① $\{x \mid 1 \le x < 2\}$
② $\{x \mid 2 \le x < 4\}$
③ $\{x \mid 1 \le x < 2,\ 3 \le x < 4\}$
④ $\{x \mid 2 \le x < 4,\ 6 \le x < 8\}$

16. 자연수의 집합을 $\mathbb{N}$, 실수의 집합을 $\mathbb{R}$이라 하고, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$의 기수(cardinal number)를 $\mathrm{car}\,\mathbb{N}=\aleph_0$, $\mathrm{car}\,\mathbb{R}=c$로 나타낸다. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은? [1994]

① $\aleph_0 c = c$　② $2^{\aleph_0} 2^{\aleph_0} = c^c$
③ $\aleph_0 + c = c$　④ $c^{\aleph_0} = c$

17. 이차방정식 $x^2+2ax+a=0$(a는 실수)이 허근을 갖고, 그 허근의 3제곱이 실수가 되게 하는 a의 값은? [1994]

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{2}{3}$
③ $\frac{3}{5}$　④ $\frac{5}{6}$

18. 미분방정식 $y'''-y''-y'+y=0$을 풀면? (아래의 c_1, c_2, c_3는 임의의 상수이다.) [1994]

① $y=c_1e^{x}+(c_2+c_3x)e^{-x}$
② $y=c_1e^{-x}+(c_2+c_3x)e^{x}$
③ $y=c_1e^{-x}+(c_2^x+c_3x^2)e^{x}$
④ $y=c_1xe^{-x}+(c_2+c_3x)e^{x}$

19. 곡선 $x=e^{-t}\mathrm{cost}$, $y=e^{-t}\mathrm{sint}$ $(0 \le t \le \theta)$의 길이를 $L(\theta)$라고 할때, $\lim_{\theta\to\infty} L(\theta)$의 값은? [1994]

① $\sqrt{e}-1$　② $1-\frac{1}{e}$
③ $\sqrt{3}$　④ $\sqrt{2}$

20. $a>0$일 때, 단위속력곡선(unit-speed curve)

$$X(t)=\left(a\cos\frac{t}{\sqrt{a^2+1}},\ a\sin\frac{t}{\sqrt{a^2+1}},\ \frac{t}{\sqrt{a^2+1}}\right)$$

의 곡률(curvature)은? [1994]

① $\frac{a}{a^2+1}$　② $\frac{\sqrt{a}}{a^2+1}$
③ $\frac{\sqrt{2}a}{a^2+1}$　④ $\frac{2a}{a^2+1}$

21. 꼬인 위치에 있는 두 직선 $l: x=y=\frac{z+1}{3}$, $m: \frac{x+2}{2}=-y,\ z=3$사이의 최단거리는? [1994]

① $\sqrt{6}$　② $\sqrt{5}$
③ $\sqrt{3}$　④ $\sqrt{2}$

22. 공간에 구면 $x^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$이 있다. z축 위의 점 $C(0,0,c)$를 지나 이 구면에 접하는 직선이 xy평면과 만나는 점을 P라고 할 때, 점P의 자취가 포물선이 되게 하는 c의 값을 c_1, c_2라고 하면 c_1+c_2는? [1994]

① 3　② 4
③ 5　④ 6

23. 서로 다른 두 벡터 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$가 주어져 있고, 벡터 $\overrightarrow{OX}=\vec{x}$는 $2|\vec{x}-\vec{a}|=|\vec{x}-\vec{b}|$를 만족하며 움직인다. 점 X의 자취를 $|\vec{x}-\vec{c}|=r$이라고 할 때 $\vec{c}$를 $\vec{a}$와 $\vec{b}$로 나타내면? [1994]

① $\vec{c}=\frac{4\vec{a}-\vec{b}}{3}$　② $\vec{c}=\frac{3\vec{a}-\vec{b}}{2}$
③ $\vec{c}=\frac{\vec{a}+3\vec{b}}{4}$　④ $\vec{c}=\frac{2\vec{a}+3\vec{b}}{5}$

24. xy평면위에 곡선$\begin{cases} x=\cos^3\theta \\ y=\sin^3\theta \end{cases}$이 있다. 이 곡선 위의 한 점에서의 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이의 최댓값은? [1994]

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{3}$
③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{5}$

25. $\sum_{i=1}^{9}\sum_{j=1}^{i} {}_iC_j$의 값은? [1994]

(단, 기호 ${}_iC_j$는 서로 다른 i개에서 j개를 택하는 조합의 수이다.)

① 1024　② 1020
③ 1017　④ 1013

26. 확률변수 (X, Y)는 $X \ge 0$, $Y \ge 0$이고, $f(x,y)=e^{-(x+y)}(X \ge 0,\ Y \ge 0)$을 확률밀도함수로 한다. $Z=X+Y$일 때, 확률 $\Pr(Z \le 1)$는? [1994]

① $1-\frac{2}{e}$　② $1-\sqrt{\frac{2}{e}}$
③ $\frac{1}{2}(1+\frac{2}{e})$　④ $\frac{1}{2}(1+\sqrt{\frac{2}{e}})$

27. 두 영역

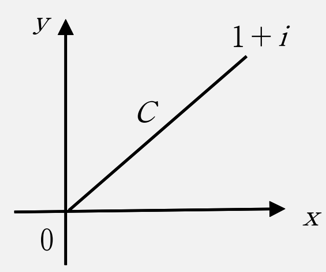
$$\{(x,y) \mid x^2+3y^2-2 \le 0\},\ \{(x,y) \mid |y| \ge |x|\}$$

의 공통부분의 넓이는? [1994]

① $\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$　② $\frac{4}{9}\pi$
③ $\frac{2\sqrt{5}}{9}\pi$　④ $\frac{5}{9}\pi$

28. 복소평면에서 $z=0$으로부터 $z=1+i$에 이르는 선분을 C라 하자. $f(z)=y-x-i\,3x^2$일 때, $\int_C f(z)dz$의 값은? [1994]

① $1-i$
② $1+i$
③ $2-i$
④ $2+i$



29. 위상공간 X의 부분집합 S에 대하여, S를 부분집합으로 갖는 모든 폐집합(Closed set)들의 교집합을 $\overline{S}$로 나타낸다. A와 B가 위상공간 X의 부분집합일 때, 옳지 <u>않은</u> 것은? [1994]

① $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$　② $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cap\overline{B}$
③ $A-\overline{B}\subset\overline{A-B}$　④ $\overline{\varnothing}=\varnothing$

30. 포물선 $z=4-x^2-y^2$과 xy평면으로 둘러싸인 입체의 부피는? [1994]

① π ② 2π
③ 4π ④ 8π

31. 정규분포를 따르고, 분산이 16인 모집단에서 크기가 64인 표본을 임의 추출하여 조사한 결과, 표본평균이 6.085이었다. 이 때, 가설: 「모평균은 5이다.」를 기각하기 위한 최소의 유의수준은? [1994]

〈표준정규분포표〉

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.88	0.4700
1.96	0.4750
2.17	0.4850
2.24	0.4875
2.58	0.4950

① 1% ② 2.5%
③ 3% ④ 5%

32. 수학자와 그의 업적에 관하여 잘못 짝지어진 것은? [1994]

① 가우스(Gauss) --------------------------쾨니히스베르크의 다리 문제
② 데자르그(Desargues) -------------------------------------사영기하
③ 리만(Riemann) ------------------------------------비유클리드 기하
④ 아르키메데스(Archimedes)-------------------구와 원기둥에 관한 연구

33. 두 선수 A, B가 반복되는 시합을 진행하여, 5번을 먼저 이기는 사람이 우승하고, 우승자에게는 1,600원의 상금을 주도록 하였다. A가 3번, B가 2번 이긴 상태에서 부득이한 사정으로 시합을 중단하였다. 상금 1,600원을 어떻게 배분하여 갖는 것이 타당한가? (단, 각 시합에서 이길 확률은 서로 같고, 비기는 경우는 없다.) [1994]

① A : 920원, B : 680원
② A : 960원, B : 640원
③ A : 1,100원, B : 500원
④ A : 1,200원, B : 400원

34. 다항식환에 대한 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? [1994]

(가) 체 $\mathbb{Z}_2=\{0,1\}$위에서의 다항식환 $\mathbb{Z}_2[x]$에서 기약인 이차 다항식은 x^2+x+1뿐이다.
(나) $\mathbb{Z}_4=\{0,1,2,3\}$위에서의 다항식환 $\mathbb{Z}_4[x]$는 정역이다.
(다) R이 가환환이면 R위의 다항식환 $R[x]$도 가환환이다.
(라) R이 정역이면 R위의 다항식환 $R[x]$도 정역이다.

① (가), (나) ② (다), (라)
③ (나), (다), (라) ④ (가), (다), (라)

35. 직교좌표평면 위의 임의의 점 $P(x,y)$에서 직선 $y=mx$ $(m\neq 0)$에 내린 수선의 발을 $P'(x',y')$이라고 할 때, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$를 만족하는 일차변환의 행렬 A는? [1994]

① $\dfrac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix} m & 1 \\ m^2 & m \end{pmatrix}$ ② $\dfrac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix} 1 & m \\ m & m^2 \end{pmatrix}$
③ $\dfrac{1}{m^2+2}\begin{pmatrix} 1 & m^2 \\ -m & m \end{pmatrix}$ ④ $\dfrac{1}{m^2+2}\begin{pmatrix} -1 & m \\ m^2 & m \end{pmatrix}$

[1995학년도 중등교사 신규임용 후보자 선정 경쟁시험]

1. 몇 개의 유사점을 기초로 하여 어떤 특수한 사실의 성질에서 그와 유사한 다른 특수한 성질을 추론하는 방법은? [1995]

① 연역 추리　② 귀납 추리
③ 유비 추리　④ 공리론적 추리

2. 정의(definition)로서 갖추어야 할 요건이 아닌 것은? [1995]

① 정의된 언어로 서술되어야 한다.
② 최소한의 언어로 서술되어야 한다.
③ 그 정의에 해당하는 실제 보기가 적어도 하나는 존재해야 한다.
④ 어떤 대상이라도 그 정의에 해당하는지 않는지 가릴 수 있는 기준이 되어야 한다.

3. Gagne는 인지 학습을 신호 학습, 자극-반응 학습, 연쇄 학습, 언어 연합 학습, 다중식별 학습, 개념 학습, 규칙 학습, 문제 해결 학습의 8가지 수준의 학습 유형으로 분류하고 있다. 〈보기〉의 학습 활동이 속하는 학습 유형은? [1995]

〈보기〉

아동에게 숫자를 5, 2, 7, 9, 8의 순서로 제시했을 때, 작은 수부터 큰 수부터 나열한다.

① 연쇄 학습
② 언어 연합 학습
③ 다중 식별 학습
④ 개념 학습

4. 〈보기〉는 현행 고등학교 수학과 교육과정의 지도 및 평가 상의 유의점 대한 설명이다. 옳은 것만 고른 것은? [1995]

〈보기〉

㉠ 수학은 계통성을 중시하므로 지도 내용이 배열은 재구성하지 않도록 하여 연계적 사고를 할 수 있도록 지도한다.
㉡ 실업계, 기타계 고등학교와 일반계 고등학교 직업 과정에서는 수학Ⅱ를 선택하여 지도할 수 있다.
㉢ 단원마다 진단 평가 및 형성 평가를 실시하고 필요에 따라서 보충학습과 심화학습을 실시하도록 한다.
㉣ 평가의 결과는 학생들에게 알려 줄 필요는 없으나, 교사는 수업에 대한 반성과 지도 방법이 개선에 활용하도록 한다.

① ㉠, ㉢　② ㉠, ㉣
③ ㉡, ㉢　④ ㉢, ㉣

5. 다음 인물 중에서 미적분의 발견과 관계가 깊은 수학자는? [1995]

㉠ Gauss	㉡ Newton
㉢ Riemann	㉣ Leibniz

① ㉠, ㉡　② ㉡, ㉢
③ ㉡, ㉣　④ ㉢, ㉣

6. 수학교육이 추구하는 방향이나 교육과정구성의 기본 입장이 아닌 것은? [1995]

① 수학의 응용이 강조되어야 한다.
② 학생의 자기 활동이 폭넓게 주어져야 한다.
③ 수학은 합리적인 논증의 표본으로 지도되어야 한다.
④ 사고 활동으로서의 수학은 구조주의적 입장에서 지도되어야 한다.

7. 수학교수-학습과정에서 발생적 원리의 특징이 아닌 것은? [1995]

① 학습자의 사전 이해와 결부시킨다.
② 교수-학습 과정의 주도권은 학습자가 갖게 한다.
③ 개념을 문맥으로부터 비형식적으로 도입한다.
④ 동기 유발을 지속적으로 유지시킨다.

8. 두 행렬 A, B가 유사(similar)행렬이고, A의 고유치(eigen value)가 1, 2, 3이면 행렬 B의 고유치는? [1995]

① 1, 2, 3　② -1, 2, 3
③ -1, -2, -3　④ 1, -2, -3

9. 실계수 삼차방정식 $x^3+px^2+qx+1=0$이 두 허근 α, α^2을 가질 때, 이 두 허근의 곱은? [1995]

① -1　② $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
③ 1　④ 2

10. 〈보기〉에서 옳은 것만 모두 고른 것은? [1995]

〈보기〉

㉠ 실수체 $\mathbb{R}$과 복소수체 $\mathbb{C}$는 동형(isomorphic)이다.
㉡ 5는 군(group) $\mathbb{Z}_{12}$의 생성원(generator)이다.
㉢ m과 n이 서로소이면 군 $\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n$과 군 $\mathbb{Z}_{mn}$은 동형이다. (m, n은 양의 정수)
㉣ 모든 군에서 교환법칙이 성립한다.

① ㉠　② ㉡, ㉢
③ ㉢, ㉣　④ ㉠, ㉡, ㉣

11. 집합 $A=\{1,2,3,4\}$의 임의의 부분집합X에 대하여 $X\sim(x_1,x_2,x_3,x_4)$는

$$x_i=\begin{cases}1 & (i\in X)\\ 0 & (i\notin X)\end{cases}(i=1,2,3,4)$$

으로 정의한다. $X\sim(1,1,0,1)$인 집합 X는? [1995]

① $\{1,2,3\}$　② $\{1,2,4\}$
③ $\{2,3,4\}$　④ $\{1,2,3,4\}$

12. U,V는 두 벡터 공간(vector space)이고, $\dim(U)=2$, $\dim(V)=8$, $\dim(U\cup V)=5$일 때, 벡터공간 $U\cap V$의 차원(dimension)은? [1995]

① 2　② 3
③ 4　④ 5

13. 두 함수 $f(x)=a^x+a^{-x}$, $g(x)=a^x-a^{-x}(x>0,\ a>1)$에 대하여 $f(x)f(y)=8$, $g(x)g(y)=4$를 만족하는 x의 값은? [1995]

① $\log_a(\sqrt{2}+1)$　② $\log_a(\sqrt{2}+2)$
③ $\log_a(2\sqrt{2}+3)$　④ $\log_a(\sqrt{3}+3)$

14. 실함수 $f(x)$가 폐구간 [-1, 1]에서 연속일 때, 다음 중 옳은 것은? (단, $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$) [1995]

① $\int_{-1}^{1} f(x)dx=0$이면 $f(x)=0$이다.

② $\int_{-1}^{1} f(x)\cos x dx=0$이면 $f(x)=0$이다.

③ $\int_{-1}^{1} f(x)\sin x dx=0$이면 $f(x)=0$이다.

④ $\int_{-1}^{1} f(x)x^n dx=0$이면 $f(x)=0$이다.

15. 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c(c>0)$의 그래프는 x축 위의 점 P에서 x축에 접하고, y축 위의 점 Q에 대하여 점대칭이고, x축과 점 R에서 만난다. 세 점 P, Q, R을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 3일 때, 계수 a, b, c의 합은? [1995]

① 2　② 1
③ -1　④ -2

16. 폐구간 $[1,2]$에서 정의된 실함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 연속이고, $f(1)=f(2)=0$, $\int_1^2 f^2(x)dx=2$일 때, $\int_1^2 xf(x)f'(x)dx$의 값은? [1995]

① -2　② -1
③ 1　④ 2

17. 다음 세 조건을 모두 만족하는 자연수 x, y의 곱은? [1995]

- x, y의 상용로그의 지표는 같다.
- x와 $\frac{1}{y}$의 상용로그의 가수는 같다.
- x^3y^2의 상용로그의 지표는 7이다.

① $50\sqrt{2}$　② 100
③ 500　④ 1000

18. 환(ring) $\mathbb{Z}_6$에서 $x^2-3x+2=0$의 해는 모두 몇 개인가? [1995]

① 5　② 4
③ 3　④ 2

19. 수열$\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=\sqrt[n]{n}$으로 주어질 때, a_n의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하면 $\frac{M}{m}$의 값은? [1995]

① $\sqrt[3]{3}$　② $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2}}$

③ $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[5]{5}}$　④ $\sqrt[5]{5}$

20. 정적분 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$의 값은? [1995]

① $\frac{\pi}{4}$　② $\frac{\pi}{3}$

③ $\frac{\pi}{2}$　④ π

21. 미분방정식 $\frac{d^2y}{dx^2}-xy=0$의 일반해를 멱급수 $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$ (c_n은 실수)로 나타낼 때, c_2와 c_3의 값은? [1995]

① $c_2=0,\ c_3=\frac{c_0}{6}$　② $c_2=0,\ c_3=\frac{c_1}{6}$

③ $c_2=1,\ c_3=\frac{c_0}{6}$　④ $c_2=1,\ c_3=\frac{c_1}{6}$

22. 복소적분 $\oint_{|z|=1} e^{\frac{1}{z^2}}dz$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$) [1995]

① $2\pi i$　② πi

③ $\frac{\pi}{2}i$　④ 0

23. 함수 $f(x)=x^2$, $g(x)=b-ax$ ($a>0$, b는 실수)가 다음 조건을 만족할 때, $a-b$의 값은? [1995]

- $\int_0^1 f(x)g(x)dx=0$
- $0\le x\le 1$는 두 함수의 교점은 오직 하나이고, 그 교점에서 함수 $y=f(x)$의 접선과 직선 $y=g(x)$는 수직으로 만난다.

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$

③ $\frac{3}{4}$　④ 1

24. 함수 $f(x)$가 $L^2[-\pi,\pi]$에 있고 모든 정수 n에 대하여 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx=0$ ($i=\sqrt{-1}$)을 만족할 때,

$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx$의 값은? [1995] (단 $L^2[-\pi,\ \pi]=\left\{f(x)\,\middle|\,\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx<\infty\right\}$)

① 0　② 1
③ 2　④ 3

25. 함수 $y=|x|(1-x^2)e^{x^2}$의 모든 극값들의 합은? [1995]

① $\frac{\sqrt{2e}}{4}$　② $\frac{\sqrt{2e}}{2}$

③ $\frac{\sqrt{2}}{4}e$　④ $\frac{\sqrt{2}}{2}e$

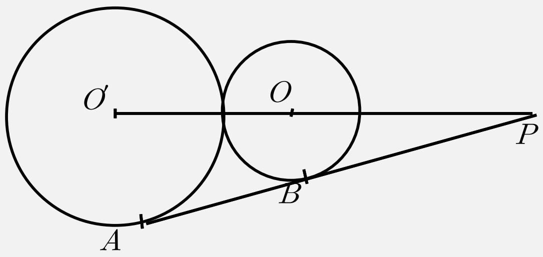
26. 100!를 101로 나누었을 때 나머지는? (단, $n!=1,2,3,\ \cdots,n$) [1995]

① 1　② 2
③ 99　④ 100

27. 삼각형 ABC의 외심을 O라 할 때, $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$를 만족하는 점 P는 이 삼각형의 무엇인가? [1995]

① 내심　② 무게중심
③ 수심　④ 방심

28. 그림에서 직선 AB는 외접하는 두 원 O, O'의 공통접선이고, 점 P는 직선 AB와 OO'의 교점이다.
$\overline{AB}=\overline{PB}=8$일 때, 원 O의 넓이는? [1995]
(단, 점 A, B는 접점)



① 4π ② $4\sqrt{2}\pi$
③ 8π ④ $7\sqrt{2}\pi$

29. 임의의 위상공간의 부분집합 S에 대하여, S를 부분집합으로 갖는 모든 폐집합들의 교집합을 $\overline{S}$로 나타낸다. X와 Y가 위상공간이고 f가 X에서 Y로의 함수일 때, f의 연속성과 동치가 <u>아닌</u> 것은? [1995]
① Y의 각 부분집합 B에 대하여 $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$이다.
② X의 각 부분집합 A에 대하여 $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$이다.
③ Y의 각 폐집합 B에 대하여 $f^{-1}(B)$는 X에서 폐집합이다.
④ X의 각 개집합 A에 대하여 $f(A)$는 개집합이다.

30. $w=\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ\,(i=\sqrt{-1})$일 때, $\dfrac{1}{|w+2w^2+3w^3+\cdots\cdots+18w^{18}|}$ 의 값은? [1995]
① $\dfrac{1}{9}\sin 10^\circ$ ② $\dfrac{1}{8}\sin 20^\circ$
③ $\dfrac{2}{9}\sin 10^\circ$ ④ $\dfrac{1}{9}\sin 20^\circ$

31. 다음 중 공간 $\mathbb{R}^5$상에 컴팩트(compact)집합이 <u>아닌</u> 것은? [1995]
① 유계인 폐집합(bounded closed set)
② 폐집합과 컴팩트 집합의 교집합
③ 컴팩트 집합의 폐부분 집합
④ 공간 $\mathbb{R}^5$

32. 확률변수 X가 [표]에 나타난 분포를 따를 때, X의 분산을 최대가 되게 하는 x의 값은? [1995]

X	1	3	5
P	y	$\frac{1}{3}$	x

① $\dfrac{1}{5}$ ② $\dfrac{1}{3}$
③ $\dfrac{1}{2}$ ④ $\dfrac{2}{3}$

33. $\mathbb{R}^3$위에서 다음 세 사영직선(projective line)이 공점선(concurrent line)이 될 k의 값은? [1995]

$$x_1-x_2+x_3=0$$
$$kx_1+x_2+3x_3=0$$
$$x_1-x_2+3x_3=0$$

① -2 ② -1
③ 0 ④ 1

34. 점(x, y)를 점(ry, rx)로 옮기는 일차변환 f와 점(x, y)를 점 $(x\sin\theta+y\cos\theta,\ x\cos\theta-y\sin\theta)$로 옮기는 일차변환 g에 의한 합성 변환 $g\circ f$를 나타내는 행렬의 모든 성분의 합은? [1995]
① $2r(\cos\theta+\sin\theta)$ ② $2r(\cos\theta-\sin\theta)$
③ $2r\sin\theta$ ④ $2r\cos\theta$

35. 확률변수 X와 Y의 결합밀도함수(joint density function)가 $f(x,y)=2e^{-(x+2y)}$ $(x>0,\ y>0)$일 때, 확률 $\Pr[X<Y]$은? [1995]
① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{1}{3}$
③ $\dfrac{1}{4}$ ④ $\dfrac{1}{5}$

[1996학년도 중등교사 신규임용 후보자 선정 경쟁시험]

1. 제6차 초・중등 수학과 교육과정의 중요특성이 아닌 것은? [1996]
① 학습 분량의 적정화
② 문제 해결력의 신장
③ 평가 방법의 개선
④ 수학의 구조와 학문의 계통성 중시

2. 사영기하에 대한 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? [1996]

㉠ 쌍대 원리가 성립하지 않는다.
㉡ 서로 다른 두 점을 지나는 직선은 오직 하나이다.
㉢ 어느 세 점도 동일 직선상에 있지 않은 네 점이 존재한다.

① ㉠, ㉡　② ㉡, ㉢
③ ㉠, ㉢　④ ㉡

3. 다음 곡선의 이차 곡률(Second curvature, torsion)을 구하면? [1996]

$$X=(\cos t)\vec{e_1}+(\sin t)\vec{e_2}+3t\,\vec{e_3}$$

(단, $\vec{e_1}=(1,0,0)$, $\vec{e_2}=(0,1,0)$, $\vec{e_3}=(0,0,1)$)

① $\frac{3}{10}$　② $\frac{3}{5}$
③ 1　④ 3

4. X_1, X_2는 확률식 독립변수(stochastically independent variables)이고,

$$\Pr(a<X_1<b)=\frac{2}{3},\ \Pr(c<X_2<d)=\frac{5}{8}$$

이다. 이 때, 사건 $a<X_1<b$, $-\infty<X_2<\infty$와 사건 $-\infty<X_1<\infty$, $c<X_2<d$의 합사건의 확률은? [1996]

① $\frac{3}{4}$　② $\frac{7}{8}$
③ $\frac{11}{12}$　④ $\frac{19}{24}$

5. 확률 변수 X의 확률밀도함수(p.d.f)가

$$f(x)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^x & (x=1,2,3,\cdots)\\ 0 & \text{이외의 경우}\end{cases}$$

으로 정의될 때, X의 분산은? [1996]

① 2　② 4
③ 6　④ 8

6. 직선 $x-2y=0$ 위를 움직이는 점 P와 두 정점 $A(1,3)$, $B(3,4)$가 있다. 이 때 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 값이 최소가 되는 점 P의 좌표는? [1996]

① $\left(3,\frac{3}{2}\right)$　② $\left(\frac{5}{2},\frac{5}{4}\right)$
③ $\left(\frac{8}{3},\frac{4}{3}\right)$　④ $(4,2)$

7. 다항식 $f(x)=x^2+x+1\in\mathbb{Z}_2[x]$는 기약 다항식(irreducible polynomial)이므로 $f(x)$로 생성되는 이데알 $\langle f(x)\rangle$는 ㉠이며, $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2+x+1)$은 위수가 ㉡인 유한체이다. ㉠, ㉡에 모두 옳은 것은? [1996]

	㉠	㉡
①	극대이데알(maximal ideal),	2
②	극대이데알(maximal ideal),	4
③	소이데알(prime ideal),	8
④	소이데알(prime ideal),	16

8. 두 실수 $\sqrt[4]{3}$와 $\sqrt[5]{3}$의 작도가능성에 다음 설명으로 옳은 것은? [1996]
① $\sqrt[4]{3}$: 작도 가능, $\sqrt[5]{3}$: 작도 가능
② $\sqrt[4]{3}$: 작도 불가능, $\sqrt[5]{3}$: 작도 가능
③ $\sqrt[4]{3}$: 작도 가능, $\sqrt[5]{3}$: 작도 불가능
④ $\sqrt[4]{3}$: 작도 불가능, $\sqrt[5]{3}$: 작도 불가능

9. 군, 환, 체, 벡터공간에 관한 다음 설명 중에서 옳은 것은? [1996]

㉠ 위수가 4인 모든 군은 동형이다.
㉡ 위수가 4인 모든 환은 동형이다.
㉢ 위수가 4인 모든 체는 동형이다.
㉣ 군 G의 임의의 부분군 H에 의한 상군(quotient group) G/H를 항상 만들 수 있다.
㉤ 환 R의 임의의 부분환 S에 의한 상환(quotient ring) R/S를 항상 만들 수 있다.
㉥ 벡터공간 V의 임의의 부분공간 W에 의한 상공간(quotient space) V/W를 항상 만들 수 있다.

① ㉠, ㉣　② ㉡, ㉤
③ ㉢, ㉥　④ ㉠, ㉡, ㉢

10. $\displaystyle\int_{|z|=3}\frac{z^3+3z-1}{(z-1)(z+2)}dz$의 값은? [1996]
(단, z는 복소수)

① $8\pi i$　② $12\pi i$
③ $16\pi i$　④ $20\pi i$

11. 가측(measurable)공간 X위에서 정의된 함수 f에 관한 다음 성질 중 동치인 것을 모두 고르면? [1996]

㉠ 모든 실수 a에 대하여 $\{x\mid f(x)>a\}$는 가측 집합이다.
㉡ 모든 실수 a에 대하여 $\{x\mid f(x)\geq a\}$는 가측 집합이다.
㉢ 모든 실수 a에 대하여 $\{x\mid f(x)<a\}$는 가측 집합이다.

① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉢
③ ㉡, ㉢　④ ㉠, ㉡, ㉢

12. 1에서 5까지의 번호가 붙여진 학생 5명이 1번부터 번호순으로 세워져 있다. 이 중에서 2명의 학생을 뽑아 서로의 위치를 바꾸어 놓는 시행을 3회 반복하였을 때, 첫 번째 학생이 1번일 확률은? [1996]

① $\frac{3}{10}$　② $\frac{1}{5}$
③ $\frac{2}{5}$　④ $\frac{7}{25}$

13. 표에서와 같은 규칙으로 빈칸에 자연수를 써 넣을 때, 위로부터 15번째이고 왼쪽으로부터 7째 칸에 있는 수는? [1996]
① 216
② 217
③ 218
④ 219

1	2	6	7	15	
3	5	8	14		
4	9	13			
10	12				
11					

14. 반지름의 길이가 a인 원이 원주 위의 점 P에서 x축과 접하고 있다. 이 원을 미끄러지지 않도록 하면서 x축 위에서 한 바퀴 굴렸을 때, 점 P의 자취의 길이는? [1996]

① $8a$ ② $9a$
③ $10a$ ④ $11a$

15. Skemp의 학습 이론에 관한 다음 설명 중에서 옳은 것을 모두 고르면? [1996]

㉠ 이 이론은 Piaget 심리학을 수학 교육에 적용한 것이다.
㉡ 이 이론은 동화, 조절에 의한 scheme의 자발적 구성 과정에 근거한다.
㉢ 이 이론은 개념의 계층론을 주장하여 학습에서의 준비성을 강조한다.

① ㉠, ㉡ ② ㉡, ㉢
③ ㉠, ㉢ ④ ㉠, ㉡, ㉢

16. 다음은 Piaget의 이론에 근거한 아동의 인지 발달 단계 중 어느 한 단계에 중요한 인지적 특성을 설명한 것이다. 이 단계는? [1996]

㉠ 가역적 사고가 가능하고, 전체와 부분 사이의 관계를 이해한다.
㉡ 양, 무게, 넓이, 부피 개념을 인식한다.
㉢ 실체적 경험과 관련된 추론을 한다.

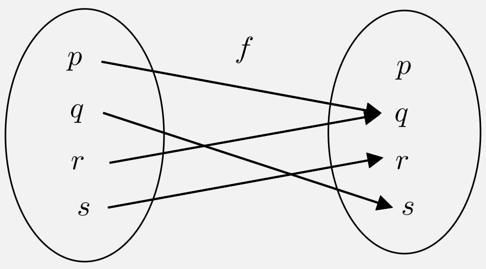
① 감각-운동단계 ② 전 조작단계
③ 구체적 조작 단계 ④ 형식적 조작단계

17. 다음 합동식을 만족하는 정수 x, y는 어느 것인가? [1996]

$$9^x \equiv y \pmod{19}$$

① $x=35,\ y=1$ ② $x=36,\ y=-1$
③ $x=36,\ y=1$ ④ $x=36,\ y=-1$

18. 집합 $X=\{p, q, r, s\}$위에서 정의된 위상(topology)을 $t=\{X,\ \varnothing,\ \{p\},\ \{q\},\ \{p, q\},\ \{q, r, s\}\}$이라 하자. 함수 $f: X \to X$가 그림과 같이 정의될 때, 함수 f가 연속이 아닌 점은? [1996]



① p
② q
③ r
④ s

19. 두 일차함수$f(x)=x$, $g(x)=2x-2$가 주어져 있다. 좌표 평면 위의 원점을 A_0, $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점을 A_1, A_1에서 y축에 평행한 직선을 그어 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점을 A_2, A_2에서 x축에 평행한 직선을 그어 $y=g(x)$의 그래프와 만나는 점을 A_1라 하고 같은 방법으로 점A_4, A_5, A_6, $\cdots$을 정할 때, $\triangle A_6A_1A_2+\triangle A_2A_3A_4+\triangle A_4A_5A_6+\cdots$의 값은? [1996]

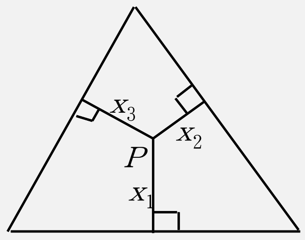
① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$
③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{3}{5}$

20. 오늘부터 n^7째 되는 날이 금요일이면 오늘부터 $(n+2)^7$째 되는 날은 무슨 요일인가? (단, n은 자연수) [1996]

① 금요일 ② 토요일
③ 일요일 ④ 월요일

21. 그림과 같은 정삼각형 내부에 있는 임의의 점 P에서 각 변까지의 거리를 각각 x_1, x_2, x_3라 하자. 이 때, x_1, x_2, x_3가 삼각형의 세 변의 길이가 될 확률은? [1996]

① $\frac{1}{2}$
② $\frac{1}{3}$
③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{5}$



22. $\left[x+\frac{1}{10}\right]+\left[x+\frac{2}{10}\right]+\cdots+\left[x+\frac{9}{10}\right]=53$일 때, $[10x]$의 값은? [1996]
(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.)

① 55 ② 56
③ 57 ④ 58

23. 1부터 20까지의 자연수를 임의로 나열하여 a_1, a_2, $\cdots$, a_{20}이라 할 때, $|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\cdots+|a_{19}-a_{20}|$의 최댓값은? [1996]

① 190 ② 195
③ 199 ④ 203

24. 수학 교수에서의 학습 위계에 관한 다음의 설명 중에서 옳지 않은 것은? [1996]

① 하위 과제는 상위 과제에 포함되거나 중요한 요소가 된다.
② 모든 상위 과제는 하위 과제보다 학습하기 어렵고 학습하는 데에도 항상 시간과 노력이 더 필요하다.
③ 특정한 위계에서 확인된 각각의 하위 기능들은 다른 위계에서도 역할을 한다.
④ 위계에 의하여 만든 진단 검사는 학생 개개인의 개별학습에도 유용하게 사용될 수 있다.

25. NCTM(1989년)에서는 학교수학 교육과정 및 평가규준(Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics)을 통하여 학생들을 위한 새로운 수학 교육의 목표를 제시하고 있다. 다음 중에서 이 목표에 제시되어 있지 않은 것은? [1996]

① 수학의 가치를 이해하는 것
② 자신의 능력에 자신을 가지는 것
③ 수학적 문제 해결자가 되는 것
④ 수학적 기초 기능을 훈련하는 것

26. 〈보기〉의 ㉠, ㉡에 들어갈 수학자가 옳게 짝지어진 것은? [1996]

〈보기〉

㉠은(는)일반 5차 다항식은 거듭 제곱근을 써서 풀 수 없음을 처음으로 증명하였다. ㉠의 연구는 ㉡의 연구에 영향을 끼쳤고, ㉡은(는) 일반n차 다항식의 가해성(solvability by radicals)은 특정한 군(group)의 성질과 연관되어 있음을 발견하였다.

	㉠	㉡		㉠	㉡
①	Gauss	Galois	②	Gauss	Abel
③	Abel	Galois	④	Galois	Gauss

27. 직선 $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+2}{2}$와 점 $(1,\ -3,\ -4)$를 포함하는 평면을 α라 할 때, 원점에서 평면 α까지의 거리는? [1996]

① $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
③ $\sqrt{3}$ ④ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

28. 실수집합 $\mathbb{R}$에서 정의된 〈보기〉의 함수열 $\{f_n\}$중에서 $f(x)$로 평등수렴(uniformly convergent)하는 것은? [1996]

㉠ $f_n(x)=\frac{x}{n},\ f(x)=0$
㉡ $f_n(x)=\frac{x^2+nx}{n},\ f(x)=x$
㉢ $f_n(x)=\frac{1}{n}\sin(nx+n),\ f(x)=0$

30. 평행사변형 $PQRS$에서 선분PQ를 $2:1$로 내분하는 점을 A, 선분 PS의 중점을 B라 하고, 선분 AS와 선분 BR의 교점을 C라 할 때, $\overrightarrow{PC}$를 $\overrightarrow{PQ}$와 $\overrightarrow{PS}$로 나타내면? [1996]

① $\frac{1}{4}\overrightarrow{PQ}+\frac{5}{8}\overrightarrow{PS}$
② $\frac{1}{4}\overrightarrow{PQ}+\frac{3}{4}\overrightarrow{PS}$
③ $\frac{3}{4}\overrightarrow{PQ}+\frac{3}{8}\overrightarrow{PS}$
④ $\frac{5}{8}\overrightarrow{PQ}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PS}$

31. $|z-10i|=6$을 만족하는 복소수 z의 편각을 θ라고 할 때, $8\sin\theta+6\cos\theta$의 최댓값과 최솟값의 곱은? [1996]

① 7 ② 14
③ 21 ④ 28

32. 미분방정식 $y''-2y'+10y=0,\ y(0)=4,\ y'(0)=1$을 만족시키는 $y=y(x)$에 대하여 $y(\pi)$는? [1996]

① $-e^{\pi}$ ② $-2e^{\pi}$
③ $-3e^{\pi}$ ④ $-4e^{\pi}$

33. 위상공간 (X,τ)와 집합 X위의 동치 관계 R이 주어져 있다. X/R을 X의 관계 R에 의한 동치류 전체의 집합이라 하고, 다음과 같은 함수를 정의한다.

$$f\ :\ X\to X/R,\ x\to \overline{x}$$

($\overline{x}$는 x를 포함하는 동치류)

이 때, 집합 X/R의 상위상(quotient topology) τ'과 f에 대한 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? [1996]

㉠ $U\in\tau'$이면 $f^{-1}(U)\in\tau$이다.
㉡ C가 X의 컴팩트(compact) 부분집합이면, $f(C)$는 X/R의 컴팩트(compact) 부분집합이다.
㉢ $V\in\tau$이면 $f(V)\in\tau'$이다.

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢
③ ㉡, ㉢ ④ ㉠, ㉡, ㉢

34. $p,\ q$가 양의 실수일 때, 집합 $S=\{n\,|\,p\le 3^{-n}q<243p,\ n$은 정수$\}$의 개수는? [1996]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5

35. 다음은 일반적인 수학과의 평가 과정을 단계별로 나타낸 것이다. □에 들어갈 가장 적절한 것은? [1996]

수학과 행동 분류표 작성
↓
과 제 분 석
↓
이원 분류표 작성
↓
□
↓
평가 문항 개발

① 목표의 상세화
② 기출 평가 문항의 검토
③ 관련 교과 지식의 개관
④ 학생의 수준 고려

[1996년 8월 6일 교원임용후보자경쟁시험 전국모의고사]

1. BASIC, LOGO등을 이용한 프로그래밍 과정을 수학교육에 도입했을 때의 바람직한 효과를 수학적 문제해결력 신장과 관련하여 약술하시오. [1997 모의]

2. 최근 수학교육의 새로운 목표로 부각되고 있는 의사소통 능력을 강화시킬 수 있는 수업방안에 대하여 약술하시오. [1997 모의]

3. 수학적 모델링(Modeling)과정이 무엇인지 간략히 기술하고, 이를 바탕으로 우리나라에서 일반적으로 행해지는 대수교육의 교수방법을 비판하고 대안을 제시하시오. [1997 모의]

4. 반힐(van Hiele)의 기하학적 사고발달 단계이론에서 제시된 5단계 중에서 첫 네 단계의 특징을 간략히 기술하고 이 단계이론을 바탕으로 우리나라 중학교 논증기하 지도의 문제점을 약술하시오. [1997 모의]

5. 최근 수학교육 개혁운동의 기본철학이라고 할 수 있는 구성주의(constructivism)의 핵심사항을 약술하고, 구성주의적 수업을 구현하기 위해서 고안된 딘즈(Z. P. Dienes)의 수학적 다양성의 원리와 지각적 다양성의 원리를 설명하시오. [1997 모의]

6. 비유클리드 기하학의 태동배경과 수학사적 의미에 대해 논하시오. [1997 모의]

7. $\displaystyle\int_{|z|=3}\frac{e^z-1}{z(z-1)(z-i)}dz$을 계산하시오. [1997 모의]

8. 어떤 학생이 반지름이 r인 구의 겉넓이를 계산하였다. 구의 중심을 원점에 놓고 높이가 x일 때 단면의 둘레의 길이를 계산해 보니 $2\pi\sqrt{r^2-x^2}$이었다. 따라서 구의 겉넓이는 $2\pi\displaystyle\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx=2\pi r\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=\pi^2r^2$이다. 그러나 겉넓이는 $4\pi r^2$이다. 오류를 지적하고 올바른 계산 방법을 제시하시오. [1997 모의]

9. 함수 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$에 대하여

$$\lim_{h\to 0}\frac{|f(a+h)-f(a)-L(h)|}{|h|}=0$$

이 성립한다. 단, $L:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$은 선형사상이다. 이때 $L(1)=f'(a)$이 성립함을 보이시오. [3점] [1997 모의]

10. 다음 파토(Fatou) 보조정리는 음이 아닌 가측함수열 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n dx \geq \int \lim_{n\to\infty} f_n dx$$

가 성립한다는 것이다. 이를 이용하여 르벡수렴정리(Lebesgue dominated convergence theorem)를 증명하시오. [4점] [1997 모의]

11. 선형 사상 $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$이

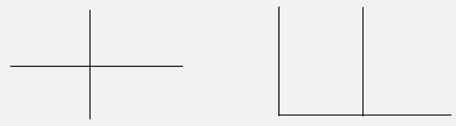
$$T(x,y,z)=(x+2y+3z,\ 4x+5y+6z,\ 7x+8y+9z)$$

로 정의될 때, $T(\mathbb{R}^3)$의 차원(dimension)을 구하시오. [3점] [1997 모의]

12. ϕ가 군준동형사상일 때 $\phi:H\to G$의 kernel이 H의 정규부분군임을 보이시오. [1997 모의]

13. 타원면(ellipsoid) E : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 의 가우스곡률(Gaussian curvature)을 K라 할 때 $\displaystyle\int_E KdE$ 를 계산하시오. [4점] [1997 모의]

14. 다음 두 평면도형이 위상적으로 동형이 아님을 보이시오. [4점] [1997 모의]



15. 독립적인 확률변수 $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ 각각이 모수(parameter) λ를 갖는 포아송(poisson)분포를 이루고 $S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$일 때, 중심극한정리(central limit theorem)를 이용하여

$$\lim_{n\to\infty}\Pr\left(\frac{S_n-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\leq x\right),\quad -\infty<x<\infty$$

의 값을 구하시오. [3점] [1997 모의]

16. 다음 문제를 해결해 보이시오. [총 7점] [1997 모의]

(1) $x>0$일 때, $\log(x+1)<\dfrac{1}{x}+\log x$ 임을 평균값의 정리를 이용하여 증명하시오.(단 log는 자연로그이다) [3점]

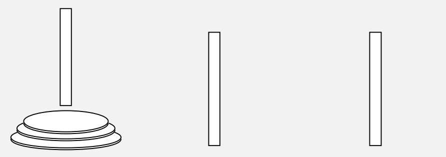
(2) $a>b>0$일 때 $\left(1+\dfrac{1}{a}\right)^{a+1}<\left(1+\dfrac{1}{b}\right)^{b+1}$ 을 증명하시오. [4점]

17. 공간상의 두 점 $A=(1,2,3)$, $B=(3,2,2)$과 평면 $2x+y+z=1$이 있을 때 평면위의 점 P에 대하여 $AP+BP$가 최소가 될 때 $\triangle APB$의 넓이를 구하시오. [7점] [1997 모의]

1. 미국 수학교사회(NCTM)의 「학교수학 교육과정 및 평가의 규준」(약칭 Standards)은 유치원부터 제12학년까지(K-12)를 3단계로 나누어 각 단계마다 교과과정 규준을 제시하고 있다. 각 단계의 규준 1부터 규준 4까지는 공통이다.

이 중 규준 2, 규준 3, 규준 4가 무엇인지 쓰고(2점), 이들 각 규준을 간략히 설명하시오. (2점) (총 4점) [1997]

2. 현행(제6차) 수학과 교육과정은 문제해결전략으로 ‘그림그리기’, ‘예상과 확인’, ‘표 만들기’, ‘규칙성 찾기’, ‘반례 들기’ 등을 들고 있다. 다음 문제를 통하여 가장 효과적으로 지도할 수 있는 문제해결전략을 아래의 예에서 한 가지 지적하시오(2점).
또 문제를 풀고, 그 전략을 어떻게 사용하였는지 풀이과정에 밝히시오(4점). (총 6점) [1997]

> 그림과 같이 세 개의 기둥과 크기가 서로 다른 4개의 구멍 뚫린 원판이 있다. 다음 규칙에 따라 기둥 1에 있는 4개의 원판을 다른 한 기둥으로 모두 옮기려고 한다. 이때 기둥 3개를 모두 이용할 수 있다. 최소 몇 번의 이동으로 가능하겠는가?
>
> - 규칙 1 : 한 번에 한 원판만 다른 기둥으로 옮길 수 있다.
> - 규칙 2 : 작은 원판 위에 큰 원판을 놓을 수 없다.
>
> 
>
> 기둥 1 기둥 2 기둥 3

3. Z. P. Dienes는 수학적 다양성의 원리(mathematical variety principle)와 지각적 다양성의 원리(perceptual variety principle)를 수학적 개념의 지도 원리로 제시하고 있다. 이 중 수학적 다양성의 원리가 무엇인지 간략히 서술하고(2점), 이 원리가 평행사변형의 개념지도에서 어떻게 적용될 수 있는지 구체적인 예를 들어 설명하시오. (4점) (총 6점) [1997]

4. 수학적 개념이나 원리를 지도할 때 시각적 모형(visual model)을 사용하기도 한다. (총 5점) [1997]

(1) 시각적 모형이 왜 교수-학습과정에 도움이 되는지 그 이유를 간략히 설명하시오. (3점)

(2) ‘등차수열의 합의 공식’을 지도할 때 도움이 되는 시각적 모형을 한 가지 제시하고, 그 모형을 설명하시오. (2점)

5. 고대 그리스의 3대 작도 문제가 근대에 와서야 작도 불가능한 것으로 알려지게 되었다. 3대 작도 문제가 무엇인지 쓰고(2점), 각각에 대해서 작도가 불가능한 이유를 갈루아(Galois)이론의 입장에서 간략히 서술하시오. (3점) (총 5점) [1997]

6. 군 G의 원소 a, b가 다음 두 조건을 만족하고 있다. $a^3=e$, $aba^{-1}=b^2$(e는 G의 항등원) b가 항등원이 아닐 때, b의 위수(Order)를 구하시오. [4점] [1997]

7. 실벡터공간 $\mathbb{R}^3$에서의 벡터 a에 대하여 선형사상

$$T(p)=a\times p+(p\cdot a)a \ \ (p\in\mathbb{R}^3)$$

가 정의되었다. 벡터 a의 크기가 $\sqrt{2}$일 때 T의 고유치를 구하고, T의 고유치는 그것뿐임을 보이시오. [5점] [1997]
(단, $u\times v$와 $u\cdot v$는 각각 벡터 u, v의 외적(Cross product)과 내적(Inner product)을 나타낸다.)

8. 실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$이라 할 때 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$는 연속이고, 거의 모든 점에서 $f=0$(즉, $f=0$ $a.\ e.$)이다. 이 때 f가 항등적으로 0임을 보이시오. [4점] [1997]

9. 복소적분 $\oint_U z^3\cos\frac{1}{z}dz$의 값을 구하시오. 단, U는 복소평면에서 원점 O을 품는 단위원이다. [4점] [1997]

10. 미분방정식 $xy''+y'=0\,(x>0)$, $y(1)=1$, $y'(1)=2$의 해를 구하시오. [4점] [1997]

11. 토러스(Torus) $S^1\times S^1$에서의 가우스곡률(Gaussian curvature) K에 대하여 $K(p)=0$이 되는 점 $p\in S^1\times S^1$가 적어도 하나 존재함을 증명하시오. [4점] [1997]

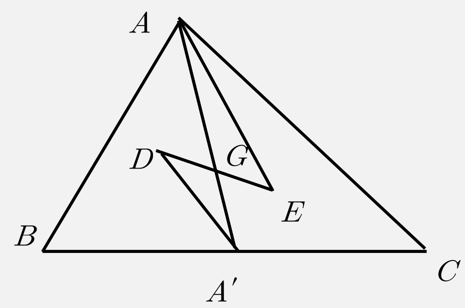
12. 정수 전체의 집합 $\mathbb{Z}$ 위에 위상(Topology) τ를 다음과 같이 정의한다.

$$\tau=\{U\subset\mathbb{Z}\mid U=\varnothing \text{ 또는 } U^c\text{는 유한집합}\}$$

이 때, 서로 다른 정수 a_n들로 이루어진 수열 $\{a_n\}$은 위상공간($\mathbb{Z}$, τ)에서 각각의 정수 m에 수렴함을 증명하시오. [5점] [1997]

13. 지수법칙 $a^m\div a^n$ (단 m, n은 자연수, $a\neq0$)의 중학교와 고등학교에서의 제시방법(2점)과 그 제시방법의 변환과정을 쓰시오.(5점) [1997]

14. 삼각형 ABC에서 $\overline{BC}$의 중점을 A'이라 하고, 무게중심을 G 라 하자. 삼각형 ABA'내부의 한 점 D에 대하여, $2\overline{DG}=\overline{GE}$ 되도록 G를 중심으로 $\overline{DG}$ 위의 반대 방향에 점 E를 잡는다. 이때, $\overline{DA'}\,//\,\overline{AE}$ 임을 보이시오. [4점] [1997]



15. 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} ke^{-3x} & (x\geq0) \\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

일 때 k의 값을 결정하고, X의 기댓값 $E(X)$를 구하시오. [5점] [1997]

[1998학년도 중등교사 신규임용 후보자 선정 경쟁시험]

1. 학교에서 수학을 가르쳐야 하는 데에는 여러 가지 이유가 있으나, 대체적으로 수학 교육의 세 가지 목적이 무엇인지 쓰고(2점), 이들 각각에 대하여 간략히 설명하시오(3점). [1998]

2. 실세계의 현상이나 문제 상황은 수학적 모델링을 통하여(적용하여) 해결될 수 있다. 수학적 모델링의 과정을 단계별로 설명하고[4점], 그 과정에 따라 다음에 주어진 문제 상황을 해결하시오[2점]. [총 6점] [1998]

높이가 9m인 대나무가 바람에 부러져서 그 끝이 나무 밑동에서부터 3m 떨어진 곳에 닿았다. 이 때 대나무는 몇 m 높이에서 부러졌는가?

3. 일반적으로 문제풀이의 과정을 중시하여 채점하는 방법으로 ‘총체적 점수화 방법’과 ‘분석적 점수화 방법’을 들 수 있으며, 여기서 분석적 점수화 방법이란 풀이과정을 몇 단계의 요소로 나누어 채점 요소를 세우고 각 요소에 점수를 할당하여(배점) 이것을 척도로 이용하는 방법을 말한다. 다음의 서술형 주관식 문항을 분석적 점수화 방법으로 채점하기 위한 모범답안[2점]과 이 답안을 10점 만점으로 하는 채점기준(즉, 채점요소와 배점)을 제시하시오[4점]. [1998]

A중학교의 작년의 학생 수는 1050명이고, 금년은 작년보다 남학생은 4% 증가하고, 여학생은 2% 감소하여 전체적으로 9명이 증가했다. 금년의 남녀 학생 수를 각각 구하여라.

4. 브루너(Bruner, J. S.)는 학생들의 지적 능력이나 경험에 맞는 적절한 수준에서 수학내용을 이해하도록 제시하는 표상 양식에 관하여 연구하였다. 그 중의 하나로, 타일이나 나무토막과 같은 구체물을 이용한 활동적 표상에 따른 인수분해 지도의 예를 들 수 있다. 이것을 x^2+5x+6의 인수분해를 통하여 보이시오[4점]. [1998]

5. 다음 급수의 수렴, 발산을 판정하시오. [5점] [1998]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$$

6. 다음 조화함수(Harmonic function)의 조화공액(Harmonic conjugate)을 구하시오. [7점] [1998]

$$u = \operatorname{Arg} z \quad (-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi)$$

7. 피보나치 수열 $\{f_n\}$은 다음과 같이 정의된다.

$$f_1 = f_2 = 1,\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}\ (n \ge 3)$$

피보나치 수열의 유래를 간단히 쓰고[3점], 다음 등식이 성립함을 보이시오[5점]. [총 8점] [1998]

$$f_{n+1} f_{n-1} = f_n^2 + (-1)^n\ (n \ge 2)$$

8. 환(Ring) R의 원소 a가 적당한 양의 정수 m에 대하여 $a^m = 0$으로 될 때, a를 R의 멱영원(Nilpotent element)이라고 한다. 가환환(Commutative ring) R의 멱영원 전체의 집합을 J라고 할 때, J는 R의 이데알(Ideal)임을 보이시오. [6점] [1998]

9. 2차원 아핀공간 A^2에서 $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$인 $\triangle ABC$를 $A'(1,-2)$, $B'(2,0)$, $C'(3,-1)$인 $\triangle A'B'C'$로 옮기는 아핀변환을 구하시오. [5점] [1998]

10. 집합 $X=\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5\}$상에 다음과 같은 위상이 주어졌다.

$$T=\{\phi,\ X,\ \{x_1\},\ \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3, x_4\},\ \{x_1, x_2, x_3, x_4\}\}$$

이 때, 집합 $\{x_2\}$의 폐포(The closure)를 구하시오. [4점] [1998]

11. 현행(제6차) 수학과 교육과정에 따르면, 중학교 3학년에서는 삼각비를 직각삼각형의 닮음의 성질을 바탕으로 직각이 아닌 한 예각에 대한 두 변의 길이의 비로 정의하여 다루도록 되어 있다. 고등학교 공통수학에서는 삼각비를 일반화시킨 삼각함수를 어떻게 정의하고 있는지 설명하시오. [5점] [1998]

12. 정사면체 $ABCD$의 꼭짓점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하면 H는 $\triangle BCD$의 수선임을 보이시오. [1998]

13. 평균이 m, 분산이 4인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기 n인 임의 표본을 추출하여 그 표본에서 얻은 평균을 $\overline{X}$라고 할 때, 다음 물음에 답하시오. (총 5점) [1998]

(1) $n=100$, $\overline{X}=10$일 때, 신뢰도 95%로 m의 신뢰구간을 구하시오. [2점]

(2) $|\overline{X}-m| \le \frac{1}{2}$인 확률이 95% 이상이 되게 하려면 n의 크기를 얼마로 하면 되는지 구하시오. [3점]

[1999학년도 중등교사 신규임용 후보자 선정 경쟁시험]

1. 제7차 수학교육과정에서는 국민공통기본교육 기간과 수준별 교육과정을 적용한다. [총 4점] [1999]

(1) 국민공통기본교육 기간을 간단하게 설명하고 이 기간 동안 수학과에서 운영하게 될 6개 내용영역을 쓰시오. [2점]

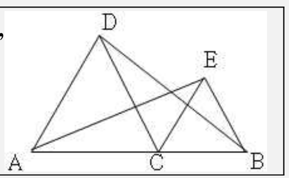
(2) 수준별 교육과정의 운영 형태를, 국민공통기본교육 기간과 그 기간 외로 나누어 설명하시오. [2점]

2. 다음 제안을 읽고 문제에 답하시오. [총 5점] [1999]

【증명의 교수-학습에 관한 제안】
증명방법을 찾으려면 먼저 명제를 잘 이해한 다음, 분석법과 종합법으로 양쪽 방향에서 가정과 결론의 간격을 메우는 시도를 해보아야 한다.

(1) 위의 제안에 따라 다음의 명제의 증명 방법을 찾고자 한다. 분석법에 의한 추론 과정을 쓰시오. [3점]

오른쪽 그림과 같이, 선분 AB위에 점 C를 잡고, 두 정삼각형 ACD와 BCE를 만들면, $\overline{AE}=\overline{DB}$ 이다.



(2) 분석법을 고려하지 않고 종합법으로만 증명을 지도할 때 생길 수 있는 문제점을 쓰시오. [2점]

3. Polya는 수학적 문제해결 과정을, Piaget는 수학적 사고 과정을 각각 연구하였다. [총 4점] [1999]

(1) Polya의 이론에 따를 때, 문제해결 과정의 네 번째 단계에서 하는 활동은 구체적으로 어떤 것인지 세 가지 예를 제시하시오. [2점]

(2) Piaget의 이론에 따를 때, (1)의 활동은 반영적 추상화(reflective abstraction)와 어떻게 관련되는지 설명하시오. [2점]

4. 역사발생적 원리에 따라 수학 수업을 하려면, 수학적 지식을 완성된 결과가 아니라 수학화의 과정으로 다루어야 한다. [총 6점] [1999]

(가) 물체의 운동을 연구하면서 함수의 개념화가 시작되었고, 이 때 양의 가변성과 종속성이 함수 관계로 표현되었다(1단계). 수학의 발전과 더불어 함수 개념의 외연은 확장되었고 그 내포 또한 변화되었다(2단계). 마침내 19세기에 Dirichlet는 대응으로서의 함수를 정의하였다(3단계)
(나) 두 집합 X, Y에 대하여 X의 각 원소에 Y의 원소가 하나씩만 대응될 때, 이 대응 f를 X에서 Y로의 함수라 한다(제 6차 교육과정, 고등학교 공통수학)

(1) 역사발생적 원리에 따라, (가)를 참고하여 (나)를 지도하는 수업을 계획하고자 한다. (가)의 1단계를 반영한 학습활동, 2단계를 반영한 학습활동을 각각 제시하시오. [4점]

(2) (가)를 고려하지 않고 (나)를 지도함으로써 생길 수 있는 문제점을 제시하시오. [2점]

5. 『기하학기초론』이라는 저서에서 Hilbert가 제시한 공리계의 특성과 이를 바탕으로 발전된 수리철학적 관점에 관하여 설명하시오.[3점] 그리고, 이 관점에 의하여 발전된 현대수학의 특징을 쓰시오.[2점] [총 5점] [1999]

6. 반복적분

$$I=\int_0^1\int_{y^{\frac{1}{3}}}^1 6\sqrt{1+x^4}\,dxdy$$

의 값을 구하시오. [4점] [1999]

7. $P^{-1}AP$가 대각행렬이 되도록 적당한 정칙행렬 P를 사용하여, 행렬

$$A=\begin{pmatrix}-5 & 9\\ -6 & 10\end{pmatrix}$$

를 대각화하시오. [6점] [1999]

8. 유한인 정역(finite integral domain) D는 체(field)임을 증명하시오. [5점] [1999]

9. 함수 $f:[0,1]\rightarrow R$ 가 정의역 $[0,1]$에서 연속이고, 조건

$$\int_0^1 f(x)x^n dx=0 \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

을 만족할 때, f는 상수함수임을 증명하시오. [5점] [1999]

10. 복소평면 $\mathbb{C}$에서 미분가능한 정함수(entire function)가 임의의 $z\in C$에 대하여 조건 $f(z)=f(z+2)=f(z+i)$를 만족하고, $f(0)=i$ 라고 한다. 이 때, $f(1+i)$의 값을 구하시오. (단, i는 허수단위) [6점] [1999]

11. 미분방정식

$$y''-3y'-4y=e^{-x}$$

의 일반해를 구하시오. [5점] [1999]

12. 거리공간 (X,d)에서 임의의 $x,y\in X$에 대하여, 다음과 같이 d_1이 정의되어 있다. 이 때, (X,d_1)은 유계(bounded)인 거리공간(metric space)이 됨을 증명하시오. [6점] [1999]

$$d_1(x,y):\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)},\ x,y\in X$$

13. $\mathbb{R}^3$공간에서 $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1$로 둘러싸인 정육면체 V의 표면을 S라 두고, 벡터장

$$F=2xz\boldsymbol{i}-y^2\boldsymbol{j}+yz^2\boldsymbol{k}$$

일 때, 면적분 $\int\int_S F\cdot \boldsymbol{n}dS$의 값을 구하시오. (단, $\boldsymbol{i}=(1,0,0)$, $\boldsymbol{j}=(0,1,0)$, $\boldsymbol{k}=(0,0,1)$ 이고, $\boldsymbol{n}$은 V의 외부 쪽을 향하는 S의 단위 법선벡터) [5점] [1999]

14. 다음 조건을 만족하는 정수해 (x,y,z)는 모두 몇 개인가? [4점] [1999]

$$\begin{cases}x+y-z=10\\ x>0,\ y>2,\ z<3\end{cases}$$

1. 제 7차 수학과 교육과정의 목표는 다음과 같다.

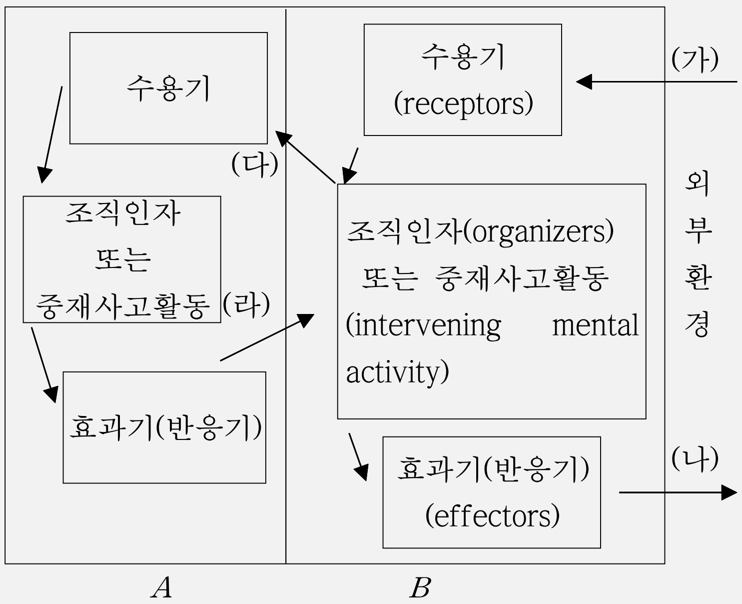
가.	여러 가지 생활 현상을 수학적으로 고찰하는 경험을 통하여 수학의 기초적인 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해할 수 있다.
나.	수학적 지식과 기능을 활용하여 생활 주변에서 일어나는 여러 가지 문제를 수학적으로 관찰, 분석, 조직, 사고하여 해결할 수 있다.
다.	수학에 대한 흥미와 관심을 지속적으로 가지고, 수학적 지식과 기능을 활용하여 여러 가지 문제를 합리적으로 해결하는 태도를 기른다.

제 7차 수학과 교육과정의 목표를 미국 수학 교사회(NCTM)의 『학교 수학 교육과정 및 평가의 규준』(약칭 Standards)의 초·중·고 과정에서 일관되게 제시하는 4가지 규준과 비교해 보았을 때, 다음 물음에 답하시오. [총 5점] [1999 추시]

(1) 이 4가지 규준 중 제 7차 교육과정과 공통점이 가장 많은 규준은 무엇인가? [2점]

(2) 공통점이 가장 적은 규준은 무엇인가? [3점]

2. 스켐프(Skemp)는 아래와 같은 그림으로 사고 과정을 설명하고 있다. 다음 물음에 답하시오. [총 6점] [1999 추시]



(1) 어떤 아동이 주어진 수학 문제는 해결했는데, 자신이 그 문제를 어떻게 풀었는지 그 과정을 설명할 수 없었다. 이 경우는 위의 그림에서 A와 B 가운데 어느 부분이 미숙하기 때문이며, 그 부분을 무엇이라 하는가? [3점]

(2) 위 (1)의 아동의 경우, 위의 그림 (가)와 (다)에서 이 아동이 인식하는 대상은 각각 구체적으로 무엇인가? [3점]

3. 다음은 기술 공학을 수학 교육에 활용하는 대상이다. 물음에 답하시오. [총5점] [1999 추시]

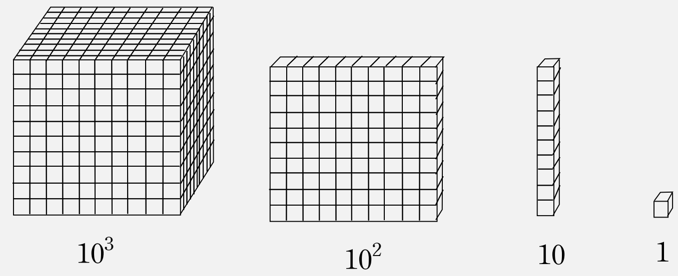
(1) 역동적 기하 소프트웨어를 활용하여 삼각형 내각의 합에 대해서 학생들과 함께 탐구해 보려고 한다. 생략된 마지막 부분 (라)에 어떤 활동 내용이 들어가면 가장 적절한가? [2점]

(가) 삼각형 ABC를 그린다.
(나) 각A, 각B, 각C의 크기를 각각 구한다.
(다) 각A, 각B, 각C의 크기를 모두 더한다.
(라)

(2) LOGO 언어로 '임의의 정다각형 그리는 절차'를 만들고자 한다. 생략된 절차 (나)를 완성하시오. 참고로 정삼각형을 그리는 절차는 다음과 같다. [3점]

```
TO TRIANGLE :SIDE
REPEAT 3 [ FD :SIDE RT 120]
END
(가) TO POLYGON :SIDE :N
(나)
(다) END
```

4. 자연수 10진법의 모델은 십진막대(base ten blocks)로 나타낼 수 있으며 그 모델은 다음과 같다. 다음 물음에 답하시오. [총 5점] [1999 추시]



(1) 앞에 제시된 10진법의 모델을 참고로 하여 5진법의 모델을 그리시오. (3차원 이외의 모델은 평면으로 그려도 되며, 자를 사용하지 않아도 됨) [2점]

(2) 아래의 5진법 덧셈을 위의 모델을 가지고 그림으로 설명하시오. (3차원 이외의 모델은 평면으로 그려도 되며, 자를 사용하지 않아도 됨) [3점]

$$\begin{array}{r} 3\ 2_{(5)} \\ +\ \ 2\ 4_{(5)} \\ \hline \end{array}$$

5. 비유클리드 기하학은 『원론』의 다섯 공준 가운데 평행선의 공준을 하나의 정리라 생각하고, 이를 증명해 보려는 가운데 탄생했다. 평행선의 공준은 "직선 l과 그 위에 있지 않은 점 P가 있을 때, P를 지나며 l과 만나지 않는 직선은 오직 하나 있다"이다. 물음에 답하시오. [총 4점] [1999 추시]

(1) 쌍곡기하(hyperbolic geometry)와 타원기하(elliptic geometry)에서의 평행선의 공준을 각각 서술하시오. [2점]

(2) 쌍곡기하와 타원기하 공간의 모델을 각각 그림으로 나타내고, 각각의 공간 모델에서 삼각형 내각의 합이 180°보다 작거나 크게 되는 것을 삼각형을 그려서 나타내시오. [2점]

6. 이상적분 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+2\sin^2 x+x^2}}$가 수렴하는지 또는 발산하는지 판정하시오. [5점] [1999 추시]

7. $R=\{(x,y)|1\le xy\le 2,\ 1\le xy^2\le 3\}$ 일 때, 중적분 $\displaystyle\iint_A y\,dA$를 구하시오. [5점] [1999 추시]

8. 미분방정식

$$X'=AX,\ A=\begin{bmatrix}1&2\\4&3\end{bmatrix}$$

의 일반해 $X=X(t)$를 구하시오. [5점] [1999 추시]

9. 집합 $X=\{a,b,c,d,e\}$위에 위상(topology) $\mathfrak{I}$가 다음과 같이 주어졌다.

$$\mathfrak{I}=\{\phi, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,e\}, \{a,b,c,d\}\}$$

이 때, 집합 $A=\{b,c\}$의 도집합(derived set) A'을 구하시오. [5점] [1999 추시]

10. 3차원 유클리드 공간 E^3의 폐곡면 S에는 가우스 곡률 K의 값이 양수가 되는 점이 항상 존재함을 증명하시오. [5점] [1999 추시]

11. 인구가 10만인 도시에서 시정(市政)에 대한 여론을 조사하였더니 남자 성인의 80%와 여자 성인의 90%가 시정(市政)을 지지하였다. 이 도시에서 남자 성인 400명과 여자 성인 400명을 임의로 뽑았을 때, 다음의 확률을 구하시오. [총 5점] [1999 추시]

(1) 적어도 700명이 시정(市政)에 대하여 지지할 확률. [3점]

(2) 시정(市政)에 대한 지지자 중 여자가 남자보다 25명 더 많을 확률. [2점]

※참고

$$\begin{aligned} P(Y-X\geq 25)=P(Z\geq -1.5) &= 0.5+P(0\geq Z\geq 1.5) \\ &= 0.5+0.4332 \\ &= 0.9332 \end{aligned}$$

<표준정규분포표>

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.5	.4332	.4354	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4528	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4941	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857

12. F가 체일 때, $F[x]$의 모든 이데알(ideal)은 주 이데알(principal)임을 증명하시오. [5점] [1999 추시]

13. E가 체 F 위에서 유한확대체(finite extension field)이면, E는 F 위에서 대수적 확대(algebraic extension)체임을 증명하시오. [5점] [1999 추시]

14. $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{(z^2+7)e^{2z}}{(z-3)(z+1)^2}dz$의 값을 구하시오. [5점] [1999 추시]

[2000학년도 중등교사 신규임용 후보자 선정 경쟁시험]

1. 계산기와 컴퓨터의 활용에 관한 다음 물음에 답하시오. [총 5점] [2000]

(1) 제 7차 수학과 국민공통기본 교육과정은 수학 교과의 교수·학습 방법에서 계산기나 컴퓨터의 활용에 관한 입장을 명시적으로 서술하고 있다. 계산기나 컴퓨터의 활용에 관하여 교육과정이 명시하고 있는 바를 기술하시오. [2점]

(2) 계산기나 컴퓨터의 소프트웨어를 활용하는 수학 교과수업에서 교수학적 변환이 행해질 때, 가장 우려되는 극단적인 현상의 유형을 명시하고, 구체적인 사례를 들어 설명하시오. [3점]

2. 다음은 수학문제와 어느 학생의 답안이다.

(문제)	놀이공원에서 회전그네를 타는데 어린이는 1인당 500원, 어른은 1인당 1200원을 내야 한다. 어린이 a명, 어른 b명이 모두 회전그네를 타려면 얼마의 비용이 필요한가?
(풀이)	$500\times a+1200\times b=500a+1200b=1700ab$
(답)	$1700ab$ (원)

학생이 기록한 답안 이외에 몇 가지 방법으로 확인한 결과, 이 학생의 오류는 체계적(systematic)이며 '+' 기호에 대한 인식부족에서 비롯된 것임이 밝혀졌다. [총 5점] [2000]

(1) 이 체계적 오류의 확인 과정에서 사용하였을 것으로 추정되는 방법을 2가지 이상 쓰시오. [2점]

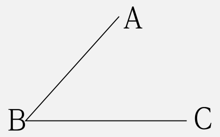
(2) 이 학생이 '+' 기호를 어떻게 인식하여 $1700ab$를 답으로 하였는가를 설명하고, 대수 학습을 성공적으로 하기 위하여 '+' 기호를 어떻게 인식해야 하는가를 기술하시오. [3점]

3. 주어진 각에 내접하는 단위원의 작도법을 폴리야(Polya)의 문제해결과정에 따라서 지도하려고 한다. [총 5점] [2000]

(1) 문제를 다음의 (가), (나) 중 하나로 제시하려고 한다. 문제해결의 각 단계에서 폴리야(Polya)가 제시하는 유용한 발문이나 권고를 근거로 할 때, 문제 (가)와 (나) 사이에 난이도 차이를 가정할 수 있는가? 판단 근거가 되는 폴리야의 단계와 발문을 구체적으로 언급하여 기술하시오. [3점]

(가) 임의로 크기가 주어진 예각 ∠ABC에 내접하는 단위원 O를 작도하시오.

(나) 주어진 각 ∠ABC에 내접하는 단위원 O를 작도하시오.



(2) 문제해결의 두 번째 단계에서 이 문제를 해결하는데 유용한 질문이나 권고를 구체적으로 3가지 이상 기술하시오. [2점]

4. 반힐레(Van Hiele) 모델은 기하 학습에 있어서 위계적인 사고 수준(수준1～수준5)의 존재를 가정하고 있다. [총 6점] [2000]

(1) 개념의 정의를 비로소 올바르게 사용할 수 있는 반힐레 수준(수준1～수준5)을 명시하시오. [2점]

(2) 반힐레 수준2와 수준3에서 사고의 특징을 각각 서술하고, 수준2에서 사고하는 학습자를 수준3으로 이행하게 하는데 효과적인 교수 활동을 구체적으로 예시하시오. [4점]

5. 방정식 $x^3+ax+b=0$(a, b는 실수)의 한 근이 $x=u+v$ 이다. 이 때, $\omega u+\omega^2 v$ 와 $\omega^2 u+\omega v$ 도 이 방정식의 근이 됨을 보이시오. 단,

$$u=\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}},\ v=\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}},\ \omega^3=1,\ \omega\neq 1$$

이다. [5점] [2000]

6. 곡면 $z=1-x^2-y^2$에서 $z\geq 0$인 부분을 S라 할 때, S 위에서의 면적분(surface integral) $\iint_S \frac{1}{\sqrt{5-4z}}dS$를 계산하시오. [5점] [2000]

7. 군 G의 임의의 원소 g에 대하여 $g^{-1}=g$ 이면, G는 가환군(commutative group)임을 보이시오. [5점] [2000]

8. 3×3행렬

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

에 대하여, A^{10}의 고윳값(eigenvalues)과 고유벡터(eigenvectors)를 모두 구하시오. [5점] [2000]

9. 연속함수 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$은 실수집합)에 대하여

$$L-\frac{1}{n}<f(x_n)<L+\frac{1}{n^2}\quad(n=1,2,\cdots)$$

을 만족하는 수열 $\{x_n\}$이 있다. 이 때, $\lim_{n\to\infty}x_n=c$ 라고 하면 $f(c)=L$ 임을 보이시오. [5점] [2000]

10. 정다면체에서 각 면의 중심에 점을 찍고 이웃한 면들에 찍힌 점을 이은 선분들을 모서리로 하는 정다면체를 원래 정다면체의 쌍대 정다면체라 한다. 이 때 다음 표를 완성하시오. [4점] [2000]

정다면체	면의 모양	한 꼭짓점에 모이는 모서리의 개수	쌍대 정다면체의 면의 모양	쌍대 정다면체
정4면체	정3각형	3	정(　)각형	정(　)면체
정6면체	정4각형	3	정(　)각형	정(　)면체
정8면체	정3각형	4	정(　)각형	정(　)면체
정12면체	정5각형	3	정(　)각형	정(　)면체
정20면체	정3각형	5	정(　)각형	정(　)면체

11. 반지름의 길이가 r인 원 $\alpha(s)$가 어떤 곡면 위에서 측지선(geodesic)일 때, 이 원의 법곡률(normal curvature) k_n을 구하시오. (여기에서 s는 호의 길이이고, 법곡률 k_n은 $\alpha''(s)$의 법성분(normal component)이다.) [5점] [2000]

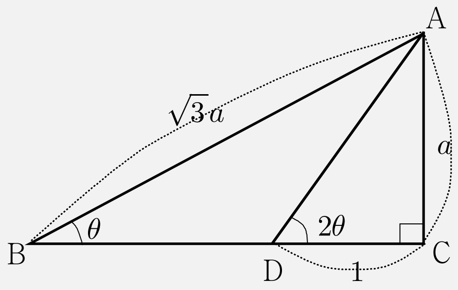
12. 미적분학의 역사에서 뉴턴, 라이프니츠, 페르마의 업적을 비교하여 약술하시오. [5점] [2000]

13. 아래 그림에서

$\overline{\mathrm{DC}}=1$, $\overline{\mathrm{AC}}=a$, $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{3}\,a$,

$\angle\mathrm{ACD}=90^\circ$, $\angle\mathrm{ABD}=\theta$, $\angle\mathrm{ADC}=2\theta$

일 때, a의 값을 구하시오. [5점] [2000]



14. 어떤 반에서 방학 후 여행에 대한 설문조사를 하였다. 강원도를 다녀온 학생이 전체의 $\dfrac{2}{5}$, 제주도를 다녀온 학생이 전체의 $\dfrac{1}{4}$이었다. 강원도를 다녀오지 않은 학생을 임의로 뽑았을 때, 이 학생이 제주도를 다녀오지 않았을 조건부 확률을 구하시오. (단, 강원도를 다녀올 사건과 제주도를 다녀올 사건은 서로 독립이다.) [5점] [2000]

[2001학년도 중등교사 신규임용 후보자 선정 경쟁시험]

1. 제 7차 교육과정이 제시하고 있는 단계형 수준별 교육과정에 따른 수업 운영방법과 1996년부터 학교 현장에서 실시되고 있는 중등학교 수준별 이동수업의 운영방법을 다음 각 관점에서 비교 설명하시오. [총 4점] [2001]
  (1) 학습 진도(進度)의 관점. [2점]
  (2) 교과내용 심도(深度)의 관점. [2점]

2. 수학적 지식 형성의 특성을 von Glasersfeld가 주장한 구성주의(constructivism) 학습관에 입각하여 설명하시오. [6점] [2001]

3. R. Skemp는 규칙의 근본 원리를 모르고 규칙만을 기억하여 문제해결에 적용할 수 있는 능력을 '도구적 이해(instrumental understanding)'라고 하고, 규칙의 적용방법과 이유를 아는 상태에서 보다 일반적인 수학적 관계로부터 특정한 규칙이나 알고리즘을 연역할 수 있는 능력을 '관계적 이해(relational understanding)'라고 하였다. 이와 관련한 다음 각 물음에 답하시오. [총 7점] [2001]
  (1) R. Skemp가 주장한 '도구적 이해'를 목표로 하는 수학 학습의 장점 3가지를 제시하시오. [3점]
  (2) R. Skemp가 주장한 '관계적 이해'를 목표로 하는 수학 학습의 장점 4가지를 제시하시오. [4점]

4. 아래 그림은 수학과 평가의 일반적인 절차를 6단계로 나누어 나타낸 것이다. 나머지 빈칸을 완성하시오. [4점] [2001]

1단계	평가 목적 선정
	↓
2단계	
	↓
3단계	
	↓
4단계	
	↓
5단계	평가 실시
	↓
6단계	

5. 곱셈군 G와 G의 정규부분군(normal subgroup) N이 주어져 있다. 집합 $G/N=\{gN \mid g\in G\}$에 연산 $(g_1N)(g_1N)=g_1g_2N$이 주어져 있을 때, 이 연산은 잘 정의된 연산(well-defined operation)이고, 군을 이루고 있음을 증명하시오.(6점) [2001]

6. $\mathbb{R}^2$의 두 기저(basis), $\alpha=\langle v_1, v_2\rangle$, $\beta=\langle u_1, u_2\rangle$에 대하여 $v_1=(0,1)$, $v_2=(1,0)$, $u_1=(1,-2)$, $u_2=(2,3)$일 때, 다음 물음에 답하시오. [총 4점] [2001]
(1) 선형변환 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(v_1)=u_1$, $f(v_2)=u_2$를 나타내는 행렬 A를 구하시오. [2점]
(2) 이 선형변환에 의하여 세 점 $P(-1,0)$, $Q(1,-1)$, $R(2,3)$이 옮겨지는 점을 각각 P', Q', R'이라 할 때, $\triangle P'Q'R'$의 넓이를 구하시오. [2점]

7. n이 임의의 정수일 때, 복소적분 $\displaystyle\int_{|z|=1} z^n dz$의 값을 구하시오. [5점] [2001]

8. 평면 $\mathbb{R}^2$상의 두 점 $x=(x_1, x_2)$와 $y=(y_1, y_2)$사이의 거리(metric)를 $d(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$으로 정의할 때, 행렬 $A=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4}\\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$에 의하여 표현되는 변환 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$가 거리공간 $\mathbb{R}^2$에서 연속함수임을 밝히시오. [5점] [2001]

9. 정적분을 이용하여 극한값
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\cdots+\sqrt{2n}}{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}$$
의 값을 구하시오. [5점] [2001]

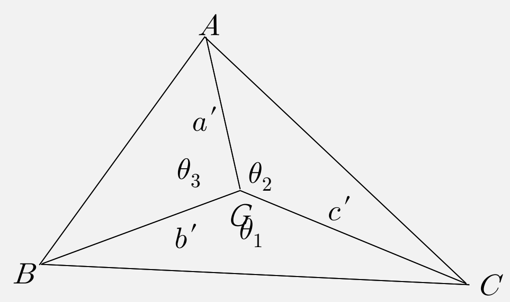
10. 다음 각 물음에 답하시오. [총 5점] [2001]
(1) 주어진 두 위상공간 X, Y에 대하여 X에서 Y로의 위상동형사상(homeomorphism)의 정의를 쓰시오. [2점]
(2) $X=\{a, b, c, d\}$위에 위상(topology)
$$\tau=\{X, \{a,b\}, \{c,d\}, \phi\}$$
이 주어져 있을 때, X에서 X로의 위상동형사상의 개수를 구하시오. [3점]

11. 곡선 $X=(4\cos t)e_1+(4\sin t)e_2+3te_3$에 대하여 다음 물음에 답하시오. [총 5점] [2001]
(단, e_1, e_2, e_3는 $\mathbb{R}^3$의 표준기저이다.)
 (1) 단위 접선 벡터를 구하시오. [2점]
 (2) 곡률을 구하시오. [2점]
 (3) 곡률반경을 구하시오. [1점]

12. 타원을 이루는 이차곡선 $ax^2+hxy+by^2+gx+fy+c=0$의 중심을 구하고자 한다. 타원의 중심 $P(x_0, y_0)$를 지나고 방향코사인이 l, m인 직선의 매개변수 방정식을 이용하여 x_0, y_0에 대한 연립방정식을 유도하는 아래 풀이 과정의 나머지 부분을 완성하시오. [5점] [2001]

<풀이과정>
$$ax^2+hxy+by^2+gx+fy+c=0 \quad \cdots\cdots ①$$
점 $P(x_0, y_0)$를 지나는 직선의 매개변수 방정식을 $\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt\end{cases}$ $\cdots\cdots ②$ 라 하자.
②식을 ①식에 대입하여 t에 관하여 정리하면
$$(al^2+hlm+bm^2)t^2+\{(2ax_0+hy_0+g)l+(hx_0+2by_0+t)m\}t$$
$$+ax_0^2+hx_0y_0+by_0^2+gx_0+fy_0+c=0 \cdots\cdots ③$$

13. $\triangle ABC$의 무게중심 G에 대하여
$$\overline{GA}=a',\ \overline{GB}=b',\ \overline{GC}=c',$$
$$\angle BGC=\theta_1,\ \angle CGA=\theta_2,\ \angle AGB=\theta_2$$
일 때, $\dfrac{a'}{\sin\theta_1}=\dfrac{b'}{\sin\theta_2}=\dfrac{c'}{\sin\theta_3}$임을 보이시오. [5점] [2001]

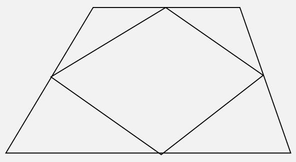


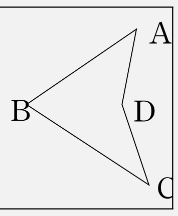
14. 400명이 모집 정원인 공무원 임용 시험에 5,000명이 응시하였다. 응시자 전체의 성적 분포는 100점 만점에 평균이 55점, 표준편차가 8점인 정규분포를 이루었다. 이 시험에서 모집정원의 120%를 1차 합격자로 선발하고자 할 때, 1차 합격자의 최저 점수를 구하시오.
(단, $\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1.3) = 0.4040$) [4점] [2001]

[2002학년도 중등교사 신규임용 후보자 선정 경쟁시험]

1. 다음의 가상 상황을 읽고 아래 물음에 답하시오. [총 6점] [2002]

미현이는 학교에서 평면 위에 있는 사각형의 네 변의 중점을 이으면 평행사변형이 된다는 정리를 공부하였다. 미현이는 이 정리를 바탕으로 다음과 같은 문제를 제기하였다.



> 오른쪽 그림과 같이 한 평면위에 있지 않은 공간에서의 네 점 A, B, C, D를 차례로 연결하여 만든 도형에서 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$의 중점을 각각 E, F, G, H라 할 때, 사각형 EFGH는 평행사변형일까?
>
> 
>

(1) 미현이가 제기한 문제의 내용이 옳은지의 여부를 판단하고 그 이유를 설명하시오. [1점]

(2) 이러한 문제제기(problem posing)활동의 수학교육적 의미를 세 가지만 진술하시오. [2점]

(3) 이러한 문제제기 활동의 수리철학적 의미를 Lakatos의 준경험주의(quasi-compiricism)입장에서 설명하시오. [3점]

2. 다음은 수행평가의 한 유형인 <프로젝트>에서 사용할 수 있는 가상적인 소재이다. A교사는 학생들에게 학교의 부지, 건물, 등이 배치되어 있는 설계도를 가져와서 학생들을 소집단으로 구성하고 각 소집단별로 다음 과제를 해결하게 한다.

> 다음 주에는 건물이 배치되어 있는 장소를 제외하고 나머지 땅에 잔디를 깔려고 한다. 가능한 한 최소 비용으로 이 작업을 마치려면 어느 정도의 예산이 필요한가?

제7차 수학과 교육과정의 세 가지 일반 목표 중에서 A교사가 위와 같은 수행평가를 실시했을 때 달성하고자 하는 목표와 가장 가까운 것 한 가지를 쓰시오. [4점] [2002]

3. 20세기 초 영국의 J. Perry, 미국의 E. H. Moore, 독일의 F. Klein등에 의해 주도된 <수학교육 근대화 운동>은 Euclid<원론>의 교육방식에 대한 비판이 주된 관심사였다. Euclid<원론>의 교육방식에 대한 이들 세 학자의 공통적인 비판을 세 가지로 요약하여 제시하시오. [5점] [2002]

4. 다음은 고등학교에서 롤(Rolle)의 정리를 도입하기 전에 실물자료, OHP 또는 컴퓨터를 통해 학생들에게 제시할 실세계 상황이다. 다음 물음에 답하여라. [총 5점] [2002]

> 땅에서 공중으로 쏘아올린 어떤 물체(공 또는 로켓)가 a초 후에 땅에 떨어진다고 할 때, 이 물체의 속도(velocity)가 0이 되는 시각이 존재한다.

(1) 위의 상황을 롤의 정리와 관련지어 설명하시오.[2점]

(2) 위와 같이 수학적 개념을 지도하는데 있어서 상황(context)과 관련 짓는 교수-학습의 장점을 세 가지로 요약하여 제시하시오.[3점]

5. $G=\mathbb{Z}_{11}-\{0\}$는 곱셈에 대하여 순환군(cyclic group)이 된다. 이 사실을 이용하여 단위원시 10-제곱근(법 11에 관한 원시근, primitive 10^{th}-root of unity)을 모두 구하여라. [5점] [2002]

6. 복소평면 $\mathbb{C}$에서 해석적인 정함수(entire function) f 가 임의의 $z\in\mathbb{C}$에 대하여 $\mathrm{Re}f(z)>1$을 만족시킨다. 이 때 상수함수임을 보여라. [5점] [2002]

7. 자연수 n에 대하여 $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$을

$$f_n(x)=n(1-x)x^n$$

으로 정의할 때, 다음 물음에 답하여라. [총 5점] [2002]

(1) 함수열 $\{f_n\}$이 점별수렴(pointwise convergence)하는 함수 f를 구하시오. [3점]

(2) 함수열 $\{f_n\}$이 f로 평등수렴(uniform convergence)하는지를 판별하시오. [2점]

8. 함수 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$가 연속일 때, 리만적분의 정의를 이용하여 극한

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

가 존재함을 보이시오. [5점] [2002]

9. V와 W가 n차원 실벡터공간이라 하자. 선형사상 $L:V\to W$에 대하여 $\ker L=\{0\}$이면 L은 동형사상(isomorphism)임을 보이시오. [5점] [2002]

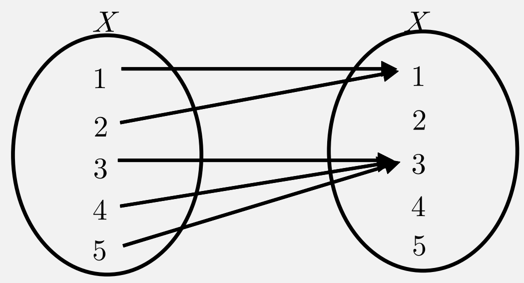
10. 체(field) F위의 기약 다항식(irreducible polynomial)

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in F[x]$$
$$(\text{단, } a_n\neq 0)$$

에 대하여 $f(x)$의 한 개의 근(root)을 포함하는 F의 확대체(extension field)가 존재함을 보이시오. [5점] [2002]

11. $X=\{1,2,3,4,5\}$이고
$\mathfrak{I}=\{X,\varnothing,\{1,2\},\{2\},\{3,4,5\},\{2,3,4,5\},\{4\},\{1,2,4\},\{2,4\}\}$이라 하자.

함수 $f:X\to X$를 아래와 같이 정의할 때 다음 물음에 답하시오. [총 5점] [2002]



(1) $f:(X,\mathfrak{I})\to(X,2^X)$가 연속임을 보이시오. [2점]

(2) $(X,\mathfrak{I})$에서 $\{2\}$와 $\{4\}$의 폐포(closure)를 각각 구하시오. [1점]

(3) 집합 $\{h\,|\,h:(X,\mathfrak{I})\to(X,2^X)$는 연속, $h(2)=1,\ h(4)=3\}$의 원소의 개수를 구하고, 그 이유를 설명하시오. [2점]

12. 곡선 $\alpha:[-1,1]\to\mathbb{R}^3$을 $\alpha(t)=\left(2t,\ t^2,\ \frac{1}{3}t^3\right)$으로 정의할 때, 다음 물음에 답하시오. [총 5점] [2002]

(1) $t=0$에서 곡선 α의 비꼬임(torsion)을 구하시오. [3점]

(2) $\phi=ydx+zdy+xydz$일 때, $\int_\alpha \phi$를 계산하시오. [2점]

13. 동전 2개를 던질 때 앞면이 나오는 개수를 확률 변수 X라 하고, 확률 변수 Y를

$$\mathrm{Y} = \begin{cases} 0, & \mathrm{X} = 0,\ 2 \\ 1, & \mathrm{X} = 1 \end{cases}$$

으로 정의할 때, 다음 물음에 답하시오. [총 5점] [2002]

(1) 다음 표를 완성하시오. [3점]

X의 확률 분포

X	P(X)
0	
1	
2	
합	1

Y의 확률 분포

Y	P(Y)
0	
1	
합	1

X와 Y의 결합 확률 분포

X \ Y	0	1	합
0			
1			
2			
합			1

(2) X와 Y의 공분산(covariance) σ_{XY}를 구하여라. [1점]

(3) X와 Y의 독립성 여부를 판별하시오. [1점]

14. 크기가 100KB, 150KB, 200KB, 250KB, 300KB인 다섯 개의 파일을 용량이 각각 1440KB인 같은 색의 구별이 안 되는 세 장의 플로피 디스켓에 저장하려고 한다. 디스켓 세 장 모두를 사용하여 다섯 개의 파일을 저장하는 방법의 수를 구하시오. (단, 디스켓에 저장하는 파일의 순서는 생각하지 않는다.) [5점] [2002]

1. 제 7차 수학과 교육과정 중, 국민 공통 기본 교육과정의 '4. 교수학습 방법'에서는 보충 과정과 심화 과정의 학습을 효율화하기 위하여 유의 사항을 제시하고 있다. 다음의 기본 과정을 지도한 후에 보충·심화 과정을 지도하려고 한다. 다음 물음에 답하시오. [총 6점] [2003]

> [7-가 단계]
> - 대영역: 수와 연산
> - 중영역: 자연수의 성질
> - 소영역: 최대공약수와 최소공배수를 구할 수 있다.

(1) 보충 과정의 내용 구성에 대한 유의 사항을 한 가지 제시하고, '최소공배수 구하기' 보충 과정 지도에 사용할 문제를 하나 만드시오. [3점]

(2) 심화 과정의 내용 구성에 대한 유의 사항을 한 가지 제시하고, '최소공배수 구하기' 심화 과정 지도에 사용할 문제를 하나 만드시오. [3점]

2. 다음과 같은 [문제]와 [학생 A의 풀이]에 대하여 주어진 [채점기준]으로 평가하려고 한다.

[학생 A의 풀이]에 타당한 점수를 [채점기준]에 근거하여 쓰고, 그 점수를 부여한 이유를 학생이 사용한 추론 양식과 관련하여 30자 이내로 서술하시오. [4점] [2003]

> [채점기준]
> 1점 - 문제이해 부족, 부정확한 수학적 표현
> 2점 - 그럴듯한 추론, 관찰을 수반한 풀이
> 3점 - 명확한 추론, 풀이과정의 경미한 실수
> 4점 - 명확한 추론, 바른 답
>
> [문제] 성숙한 토끼 한 쌍은 한 달이 지나면 한 쌍의 토끼를 낳으며, 새로 태어난 토끼 한 쌍은 2개월 후부터 매달 한 쌍의 토끼를 낳기 시작한다고 한다. 1월 1일에 성숙한 토끼 한 쌍을 사서 기르기 시작하면, n개월 후에는 몇 쌍의 토끼가 있게 되는가? (단, 토끼들은 죽지 않는다고 가정한다.)
>
> [학생 A의 풀이]
> 1개월 후부터 4개월 후까지 토끼의 쌍의 수를 세어보았더니 다음과 같다.
>
> 2, 3, 5, 8
>
> 이 수열은 제1계차가 1, 2, 3, ⋯ 인 등차수열이므로 n번째 항은
>
> $$a_n = 2 + \{1+2+3+\cdots+(n-1)\} = \frac{n^2-n+4}{2}.$$
>
> 따라서, n개월 후의 토끼의 쌍의 수는 $\dfrac{n^2-n+4}{2}$이다.

3. 다음에 제시된 수업 상황을 읽고 물음에 답하시오. [총 5점] [2003]

> 다은이는 다음 문제를 해결하려고 애쓰고 있다.
> 「학교에서 집까지의 거리는 200m이고, 집에서 경찰서까지의 거리는 250m이다. 집에서 학교와 경찰서를 바라본 각의 크기가 60° 일 때, 학교에서 경찰서까지의 거리를 구하여라.」
> 잠시 후 교사가 다가와 다음과 같이 말하였다.
> "다은아, 제2코사인 법칙을 적용하면 되지 않을까?"
> 다은이는 교사의 이러한 발문에 힘입어 문제를 쉽게 해결하였다.

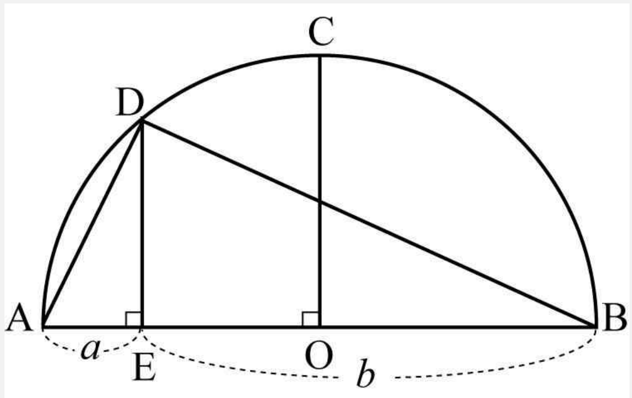
(1) 폴리아(G. Polya)의 수학 문제해결 교육론의 관점에서 볼 때, 교사가 다은이에게 한 발문이 바람직한 것인지 아닌지를 판단하고, 판단의 구체적인 이유를 교사의 발문과 관련하여 두 가지 서술하시오. [3점]

(2) 교수학적 변환(didactic transposition)의 관점에서 위에 제시된 수업 상황을 20자 내외로 평가하시오. [2점]

4. 수학 교사 A, B의 다음 대화를 읽고 물음에 답하시오. [총 5점] [2003]

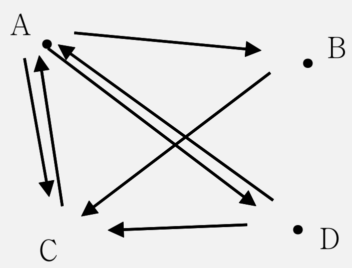
> 교사 A: 저는 학생들이 수학의 각 영역의 관련성을 인식하도록 가르치는 것이 바람직하다고 생각합니다. 예를 들면, 추상적인 식을 시각화한 자료는 식을 직관적으로 이해하게 해줄 뿐 아니라 대수와 기하의 연결성을 인식하게 하는 데에도 도움이 될 것입니다.
> 교사 B: 참 좋은 말씀입니다. 저는 수학의 역사가 수학을 가르치는 데 도움이 된다고 생각합니다. 예를 들면, '기존의 체계에서 인정된 성질이 그대로 유지되도록 하면서 체계를 확장하는 원리'가 수학의 역사상 수 체계의 확장에 유용하게 활용되었습니다. 이 원리는 학교에서 음수의 연산 법칙을 유도하거나 지수의 확장을 가르칠 때 활용될 수 있습니다.

(1) 교사 A는 부등식 $\sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2}$ $(a>0,\ b>0)$를 가르칠 때 사용하려고 다음 자료를 만들었다. 다음 그림이 어떻게 위의 부등식을 나타내고 있는지 설명하시오. (단, 그림에서 점 O는 원의 중심이다.) [1점]



(2) 교사 B는 다음 수학 시간에 지수의 확장을 가르치고자 한다. 교사 B의 진술에 들어 있는 원리를 사용하여, 지수의 정의를 지수가 자연수인 경우로부터 '$a^0 = 1,\ a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ (단, $a \neq 0$, n은 자연수)'로 확장해 가는 과정을 서술하시오. [4점]

5. 다음 그래프는 어느 도시의 A, B, C, D 네 지점 사이에서 자동차로 곧바로 갈 수 있는 경우를 화살표로 나타내고 있다. 예를 들면, A지점에서 B지점으로 향하는 화살표는 A지점에서 B지점으로 자동차로 곧바로 갈 수 있지만 B지점에서 A지점으로는 곧바로 갈 수 없음을 나타낸다. 다음 물음에 답하시오. [총 5점] [2003]



(1) 주어진 그래프를 인접행렬(adjacent matrix)로 나타내시오. [2점]

(2) 어떤 지점에서 다른 지점으로 갈 때, '곧바로 또는 한 지점을 거쳐서' 갈 수 있는지 없는지를 알 수 있는 행렬을 구하시오. (단, (1)에서 구한 인접행렬을 이용하시오.) [3점]

6. 다음 연립일차합동식의 해를 구하시오. [5점] [2003]

$$\begin{cases} 8x \equiv 4 \pmod{22} \\ 3x \equiv 5 \pmod{25} \end{cases}$$

7. 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간 V에 대하여 W_1, W_2를 V의 부분공간이라 하자. $V = W_1 + W_2$일 때, 임의의 $v \in V$에 대하여

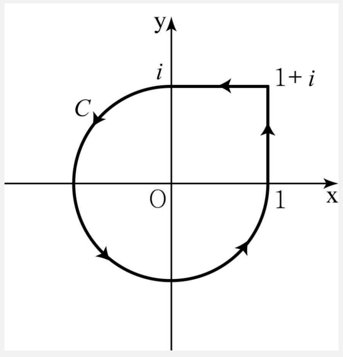
$$v = w_1 + w_2 (w_1 \in W_1,\ w_2 \in W_2)$$

로 유일하게 표현될 필요충분조건은 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$임을 증명하시오. [5점] [2003]

8. 체(field) F위의 다항식환 $F[x]$에서 $p(x) \in F[x]$가 기약다항식(irreducible polynomial)이면 $p(x)$로 생성된 이데알 $\langle p(x) \rangle$는 극대이데알(maximal ideal)임을 증명하시오. [5점] [2003]

9. 어떤 회사에서는 세 대의 기계 a, b, c로 같은 종류의 빵을 만들고 있다. 세 대의 기계는 각각 총생산량의 20%, 30%, 50%를 생산하고 있으며, 생산품의 불량률은 각각 0.5%, 1%, 2%이다. 생산된 빵을 임의로 한 개 택하여 검사했을 때, 그것이 불량품이었다고 하자. 이 불량품이 기계 a 또는 b에서 생산되었을 확률을 구하시오. [5점] [2003]

10. 곡선 C는 다음 그림과 같이 1, $1+i$, i를 연결한 두 선분과 단위원의 일부로 이루어져 있다. 이 때, $\int_C \bar{z}\,dz$의 값을 구하시오. (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.) [5점] [2003]



11. 실수의 집합 $\mathbb{R}$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오. [총 5점] [2003]

(1) 모든 n에 대하여 n계도함수 $f^{(n)}(x)$가 존재함을 보이고, 함수 f 의 $x=0$에서의 테일러급수를 구하시오. [3점]

(2) (1)의 결과를 이용하여 실함수(function of a real variable)와 복소함수(function of a complex variable)의 미분가능성이 갖는 특징의 차이를 서술하시오. [2점]

12. 함수항급수 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(3^n x)$ 대하여 다음 물음에 답하시오. [총 5점] [2003]

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(3^n x)$가 실수의 집합 $\mathbb{R}$에서 평등수렴(uniform convergence)함을 보이시오. [2점]

(2) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(3^n x)$라 할 때 f의 리만적분 가능성을 판별하고 $\int_0^{2\pi} f(x)dx$를 구하시오. [3점]

13. 다음 곡선의 곡률(curvature)과 열률(torsion, 비꼬임률)을 구하고, 두 값을 모두 이용하여 곡선의 종류가 무엇인지 쓰시오. [5점] [2003]

$$\mathrm{x}(\theta)=\left(\cos\theta-2,\ \cos\theta+2,\ \sqrt{2}\sin\theta\right)$$
(단, $0 \le \theta < 2\pi$)

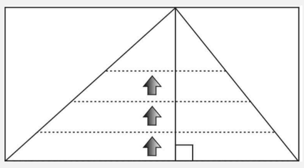
14. 위상공간 X가 T_2공간(hausdorff space)일 때, 임의의 컴팩트 집합(compact set) $A \subset X$와 임의의 $x \in X-A$에 대하여 다음 조건을 만족하는 개집합(open set) U, $V \subset X$가 존재함을 증명하시오. [5점] [2003]

조건 : $x \in U$, $A \subset V$, $U \cap V = \varnothing$

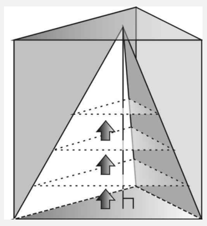
[2004학년도 중등교사 신규임용 후보자 선정 경쟁시험]

1. A 학생이 B 학생에게 삼각뿔의 부피를 구하는 공식이 (밑면의 넓이)×(높이)×$\frac{1}{3}$ 임을 아래와 같이 설명하였다. 다음 물음에 답하시오. [총 5점] [2004]

[그림 1]과 같이 삼각형이 직사각형에 내접해 있고, [그림 2]와 같이 삼각뿔이 삼각기둥에 내접해 있는 경우를 생각해 보자.



[그림 1]



[그림 2]

삼각형의 넓이를 구하는 공식이 (밑변의 길이)×(높이)×$\frac{1}{2}$인 것은 잘 알고 있지?

[그림 1]의 삼각형을 보면, 화살표를 따라 위로 올라갈수록 그 폭이 점점 줄어드니까 삼각형의 넓이는 외접하는 직사각형의 넓이보다 당연히 작지? 마찬가지로 [그림 2]의 삼각뿔을 보면 위로 올라갈수록 단면의 넓이가 줄어드니까 삼각뿔의 부피도 외접하는 삼각기둥의 부피보다 작은 것이 당연해.

[그림 1]과 [그림 2]는 모두 삼각형과 관련이 있어. 그리고 [그림 1]의 삼각형에는 밑변과 높이가 있는데, [그림 2]의 삼각뿔에는 밑면과 높이가 있어. 삼각뿔의 부피는 외접하는 삼각기둥의 부피의 절반보다 더 작아 보이니까 $\frac{1}{3}$쯤 될 것 같아.

그래서 삼각뿔의 부피를 구하는 공식은 삼각형의 넓이를 구하는 공식과 비슷하게 될 것 같지 않니? 즉 삼각형의 넓이를 구하는 공식에서 ‘밑변의 길이’ 대신에 ‘밑면의 넓이’로 바꾸고 $\frac{1}{2}$을 $\frac{1}{3}$로 바꾸어서 (밑면의 넓이)×(높이)×$\frac{1}{3}$이 된다고 생각할 수 있겠지.

(1) 앞의 설명은 A 학생이 유추(유비추리)적 사고를 통하여 삼각뿔의 부피를 구하는 공식을 이해하고 있음을 보여 준다. A 학생이 유추적 사고를 했다고 말할 수 있는 근거를 A 학생의 말을 인용하여 설명하시오. [3점]

(2) 만일 어떤 교사가 A 학생처럼 유추적 사고를 통하여 특정 수학 내용을 직관적으로 이해하도록 지도했다면, 이를 보완하기 위하여 취할 수 있는 지도 방법을 쓰고, 그 방법이 유추적 사고의 어떤 측면을 보완할 수 있는지 설명하시오. [2점]

- 지도 방법 :
- 보완할 수 있는 측면 :

2. 다음은 제 7차 수학과 교육과정에 속하는 내용의 일부를 제시한 것이다. 물음에 답하시오. [총 6점] [2004]

(가) 도수의 합이 다른 두 집단의 분포를 비교하는 방법에 대하여 알아본다. (7-나 단계)
(나) 실생활 문제에서 합동인 도형과 닮은 도형을 찾아본다. (8-나 단계)
(다) 식의 일부를 치환하여 전개하는 다항식의 곱셈을 할 수 있다. (9-가 단계)
(라) 자연 현상에서 주기적 상황을 조사하여 삼각함수와 관련시킬 수 있다. (10-나 단계)

(1) 위의 (가)~(라)에는 공통적인 특징이 있다. 이러한 특징을 가지는 내용을 교육과정에서 1가지만 쓰시오. (단, 7-가 단계에서 10-나 단계까지의 내용 중, 실생활의 문제를 해결하는 것에 관한 내용 이외의 것으로 제시하시오.) [1점]

(2) 현재 7-나 단계에서 상대도수에 관한 내용이 다뤄지고 있다. 상대도수의 개념을 처음 지도할 때와 (가)의 내용을 지도할 때 적합한 문제 상황의 구체적인 예를 각각 하나씩 제시하시오. [2점]

- 상대도수의 개념을 처음 지도할 때 :
- (가)의 내용을 지도할 때 :

(3) 위의 (가), (다)와 같은 내용은 학생들의 학습 부담을 줄이려는 의도를 보여주는 예이다. 이처럼 학습 내용을 줄이려는 경향은 우리나라의 제4차 수학과 교육과정부터 나타나고 있다. 20세기 중반 이후의 수학 교육의 발달사에 비추어 볼 때, 이러한 경향을 초래한 요인을 3가지만 제시하시오. [3점]

3. 다음은 수학 문제해결 교육과 관련하여 교사들이 주고받은 대화의 일부이다.

(1) 문제해결 지도를 위한 문제들은 실생활로부터 만들어진 문장제이어야 합니다.
(2) 수학 교과서에 나오는 전형적인 문제들도 적절히 변형시키면 문제해결 지도에 적합한 문제로 활용할 수 있다고 생각합니다.
(3) 문제해결 교육과 학생들의 수학적 사고의 훈련은 별로 상관이 없다고 생각합니다.
(4) 해법이 다양한 문제일수록 그 문제는 문제해결 지도에 적합한 문제가 된다고 생각합니다.
(5) 문제해결 지도는 일반적인 수학 수업과는 관련시키지 않는 것이 좋습니다.
(6) 문제해결을 잘 하기 위해서 수학 교과서에서 흔히 보는 연습 문제는 풀 필요가 없다고 생각합니다.

대화 내용 중 문제해결 교육과 관련하여 옳지 않게 말한 대화의 번호를 3개만 쓰고, 각각에 대하여 옳지 않다고 생각하는 이유를 설명하시오. [총 5점] [2004]

4. A 교사가 학생들에게 ‘둘레의 길이가 100m인 도형의 넓이’라는 조건을 사용하여 조별로 문제를 만들고 해결하여 발표하고, 보고서로도 제출하게 하였다. 이때 가능한 한 일상생활이나 다른 분야와 연계된 풍부한 배경을 가진 문제를 만들도록 하였다.

A 교사는 학생들의 조별 발표를 관찰하고 보고서를 검토하면서 수학적 의사소통 능력에 초점을 두어 평가하려고 한다. 이때, 수학적 의사소통 능력을 평가하기 위한 항목을 2가지만 쓰시오. [총 4점] [2004]

5. 다음 행렬의 고유치(eigen value)와 고유공간(eigen space)을 구하시오. [총 5점] [2004]

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

6. 다음 두 이차합동식의 해가 존재하는지 판별하시오. [총 5점] [2004]

(1) $x^2 \equiv 97 \pmod{101}$ [2점]

(2) $x^2 + 2x \equiv 28 \pmod{89}$ [3점]

7. 무한 순환군(infinite cyclic group) G에 대하여 $\sigma : G \to G$를 아래와 같이 정의할 때, 다음 물음에 답하시오. [총 5점] [2004]

$$\sigma(g) = g^{-1} \quad (\text{단, } g^{-1}\text{는 } g\text{의 역원})$$

(1) σ가 동형사상(isomorphism)임을 보이시오. [2점]

(2) G에서 G로의 동형사상은 항등사상(identity map)과 σ 뿐임을 보이시오. [3점]

8. 아래와 같이 정의된 수열 $\{x_n\}$은 유계인 증가수열임을 보이고 $\lim_{n \to \infty} x_n$의 값을 구하시오. (단 x_n은 실수이고 $x_n^k = (x_n)^k$이다.) [총 4점] [2004]

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_{n+1}^3 = 6x_n^2 - 8x_n \end{cases}$$

9. 폐구간 $[0, 2]$에서 정의된 함수 f가 아래와 같을 때, 다음 물음에 답하시오. [총 6점] [2004]

$$f(x) = \begin{cases} x, & x\text{는 유리수} \\ x^2, & x\text{는 무리수} \end{cases}$$

(1) 함수 f는 $x=1$에서 연속임을 보이시오. [3점]

(2) 함수 f의 리만(Riemann) 적분가능성을 판별하시오. [3점]

10. 복소평면 $\mathbb{C}$ 에서 해석적인 함수(entire function) f 가 다음 두 조건을 모두 만족시키면 $f(z)=z$임을 보이시오. [5점] [2004]

(ⅰ) $f(1)=1$
(ⅱ) 임의의 $z\in\mathbb{C}$ 에 대하여 $\lvert f(z)\rvert \le \lvert z\rvert$

11. 곡선 $\mathrm{x}(\mathrm{t})=(3t,\ 3t^2,\ 2t^3)$위의 모든 점에서 단위접선벡터(unit tangent vector)와 평면 $x+z=0$이 이루는 각을 구하시오. [5점] [2004]

12. 실수 전체 집합 $\mathbb{R}$ 의 멱집합(power set)의 부분집합

$$\mathscr{F}=\{\mathbb{R}-\{p\}\mid p\in\mathbb{R}\}$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오. [총 5점] [2004]

(1) $\mathscr{F}$를 부분기저(subbase)로 갖는 위상(topology) $\mathfrak{T}$를 구하시오. [2점]

(2) 위상공간$(\mathbb{R},\mathfrak{T})$에서 자연수 전체 집합 $\mathbb{N}$의 도집합(derived set)을 구하시오. [3점]

13. 같은 종류의 물건 n개를 m명의 학생에게 나누어주는 경우의 수를 $f(n,m)$이라 할 때, 다음 물음에 답하시오. [총 5점] [2004]

(1) $f(6,3)$의 값을 구하시오. [1점]

(2) 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명하시오. [4점]

$$\boxed{f(1,m)+f(2,m)+\ \cdots\ +f(n,m)=f(n,m+1)-1}$$

14. 2003년도 전국학력평가에 응시한 수험생 중에서 자연계 수험생 64명, 인문계 수험생 9명을 임의로 선택하여 수리 영역의 점수를 조사하였다. 그 결과 자연계 수험생은 평균이 48점, 표준편차가 5.6점이었고, 인문계 수험생은 평균이 42점, 표준편차가 7.5점이었다. 자연계와 인문계에 응시한 수험생 전체의 수리 영역 점수가 각각 정규분포를 이룬다고 가정하고 두 집단의 평균점수를 추정하려 한다. 다음 물음에 답하시오. [총 5점] [2004]

(1) 아래의 표준정규분포표를 이용하여 자연계 수험생 전체의 수리영역 평균점수를 신뢰도 95%의 신뢰구간으로 추정하시오. [2점]

표준정규분포표($\mathrm{P}(0\le Z\le z)$)

z	.05	.06
1.6	.4505	.4515
1.7	.4599	.4608
1.8	.4678	.4686
1.9	.4744	.4750

(2) 아래의 $t-$ 분포표를 이용하여 인문계 수험생 전체의 수리 영역 평균점수를 신뢰도 95% 의 신뢰구간으로 추정하시오. [3점]

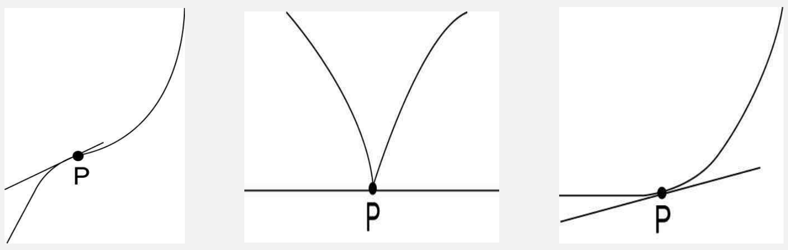
t - 분포표($\mathrm{P}(t\ge t_\alpha)=\alpha$)

자유도 \ α	0.05	0.025
7	1.895	2.365
8	1.860	2.306
9	1.833	2.262
10	1.1812	2.228

[2005학년도 중등교사 신규임용 후보자 선정 경쟁시험]

【1～2】다음은 제7차 수학과 교육과정 수학Ⅱ의 다항함수의 미분법 중 미분계수 영역에 대한 수행평가 결과에서 나타난 오류 유형과 오류를 바로잡기 위한 교수 방안이다.

(가) 박 교사는 미분계수를 가르친 후, 학생들이 미분계수의 기하학적 의미를 이해하고 있는지를 알아보기 위하여 몇 개의 그래프를 주고 주어진 점 P에서 접선을 그리도록 하였다. 그 결과 나타난 대표적인 오류 유형은 다음과 같다.

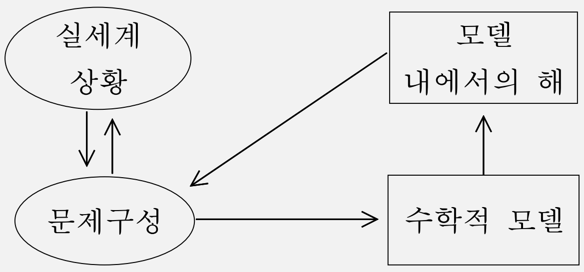


(나) 박 교사는 평가결과를 분석한 후 프로이덴탈(Freudenthal)의 수학화 교수·학습 방법과 미분 개념의 역사발생적 과정을 토대로 수업을 하는 것이 미분계수에 대한 개념적 이해와 접선 개념에 대해 학생들이 가지고 있는 장애 수정에 도움이 될 것이라 생각했다.

1. (가)에서의 수행평가 결과에서 나타난 오류의 원인을 인식론적 장애(epistemological obstacle)의 관점에서 3줄 이내로 설명하시오. [3점] [2005]

2. 프로이덴탈의 수학화 교수·학습 방법과 미분 개념의 역사발생적 과정을 토대로 미분계수 개념의 교수·학습을 위한 내용 요소를 순서를 고려하여 3가지 제시하시오. [4점] [2005]

3. 다음 그림은 실세계 상황을 수학적 모델로 표현하여 문제를 해결하는 수학적 모델링 과정이다.



아래에 제시된 실세계 상황과 이 상황으로부터 구성된 문제를 중학교 수준에서 해결하기 위한 수학적 모델을 2가지 제시하시오. [2점] [2005]

실세계 상황: 철수는 생일을 맞이하여 친구 5명을 생일 모임에 초대하였다. 모임에 참석한 6명이 서로 악수를 나누고 있다.
문제: 모임에 참석한 6명이 빠지지 않고 모두 악수를 할 때 악수는 몇 번 이루어지는가?

4. 다음은 문제설정(problem posing)에 관한 설명이다.

브라운(Brown)과 월터(Walter)는 '만일 그렇지 않으면 어떻게 될까?(what-if-not)' 라는 문제설정 전략을 제시하였다. 이들이 제시하는 문제설정 전략은 출발점 선택, 속성 나열하기, '만일 그렇지 않으면 어떻게 될까?' 를 이용한 문제설정, 문제해결의 단계로 이루어진다.

김 교사는 피타고라스 정리를 일반화한 것이 제이코사인 법칙이라는 것을 보이기 위한 수업을 진행하고자 한다. 이 때, 위의 문제설정 전략에 따라 설정할 수 있는 문제를 하나 제시하고, 설정된 문제를 해결하시오. (단, 문제해결 과정을 식으로 제시할 것) [5점] [2005]

5. 다음에 주어진 상황을 읽고, 피아제(Piaget)의 균형(평형)이론에 비추어 밑줄 친 (a)와 (b)의 장면에서 학생의 상태를 해석하시오. [3점] [2005]

김 교사는 학생들에게 확률 개념을 지도하였다. 이 수업 후에 A학생에게 주사위를 한 번 던져서 1의 눈이 나올 확률은 얼마인지 물었을 때 (a) 학생은 $\frac{1}{6}$이라고 답하였다. 다음에 교사는 똑같은 2개의 동전을 던질 때 모두 앞면이 나올 확률이 얼마인지 물어보았고, 이 학생은 전체 경우의 수가 3이므로 확률이 $\frac{1}{3}$이라고 답하였다. 이에 대하여, (b) 교사는 전체 경우의 수가 4이므로 정답은 $\frac{1}{4}$이라고 말하였다.

6. 다음은 라카토스(Lakatos)의 준경험주의 입장과 수학적 지식의 성장 과정을 요약한 것이다.

(가) 수학은 '추측-증명-반박' 의 논리에 의한 추측의 끊임없는 개선을 통해 성장하는 준경험 과학이다.
(나) 라카토스가 제시한 수학적 지식의 성장 과정은 다음과 같다.
- 1단계 : 수학적 추측을 제기하는 단계
- 2단계 : 추측을 부분추측으로 분해하는 단계(사고실험)
- 3단계 : 반례가 등장하고 추측과 증명을 반박하는 단계
- 4단계 : 증명을 검토하여 증명과 추측을 개선하는 단계

<보기>는 어떤 학생의 추측과 증명을 나타낸 것이다. 위 (나)의 3, 4단계를 근거로 잠정적으로 참으로 받아들일 수 있는 개선된 추측과 그 과정을 제시하시오. [4점] [2005]

<보기>

<소박한 추측>

미분가능한 함수 $f(x)$는 $f'(a)=0$일 때 $x=a$ 에서 극값을 갖는다.

<증명(사고실험)>

1단계 : 미분가능한 함수 $f(x)$는 $f'(a)=0$ 일 때, $x=a$ 의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀐다.

2단계 : $f'(x)$의 부호가 바뀌므로 이 함수는 $x=a$에서 극값을 갖는다.

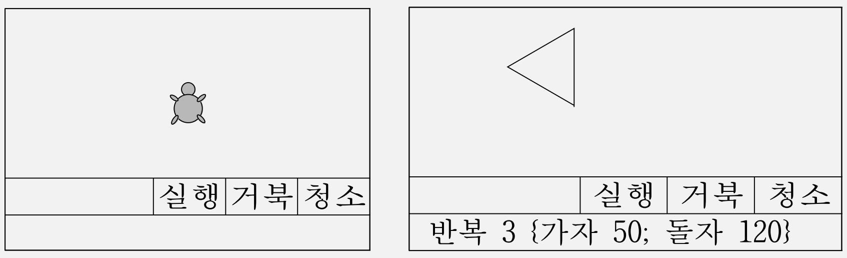
7. 다음은 컴퓨터를 활용한 수학 수업에 대하여 김 교사가 갖고 있는 신념이다.

수학적 개념, 원리, 법칙에 대한 귀납적 발견을 위하여 컴퓨터를 활용하는 활동은 그 목적을 분명히 해야 한다. 컴퓨터의 시각적·조작적 기능은 학생이 수학에 보다 쉽게 접근할 수 있게 해 주지만, 이것만으로는 부족하고 조작에 대한 반성이 반드시 요구된다.

김 교사는 로고(LOGO)와 비슷한 소프트웨어를 활용하여 ‘정n각형의 외각의 합은 $360°$이다’라는 명제를 지도 하고자 한다. 김 교사가 시범을 보인 한 변의 길이가 50인 정삼각형을 그리는 활동과 기본 명령어는 다음과 같다.

<정삼각형을 그리는 활동>

‘반복 3 {가자 50; 돌자 120}’이라고 입력한 후 화면의 ‘실행’ 버튼을 누른다.



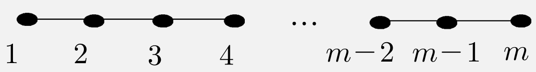
<초기화면> <완성된 화면>

<기본 명령어>

- 가자 x : 거북이 이동하면서 길이가 x인 선분을 그린다.
- 돌자 y : 거북의 진행 방향을 y^{o} 만큼 시계반대방향으로 바꾼다.
- 반복 n {$\cdots$} : 괄호 안에 있는 명령어를 n번 반복하여 실행한다.
- 거북 : 화면의 거북을 사라지게 하거나 다시 나타나게 한다.

김 교사는 이후에 학생들에게 위의 소프트웨어를 활용하여 정사각형과 정오각형을 그려보게 하였다. 학생들이 주어진 명제를 발견하기 위해 자신의 탐구 활동을 반성하여 반드시 알아내야 하는 사실을 2가지 제시하시오. [5점] [2005]

8. 단순그래프 G와 음이 아닌 정수 n에 대하여, n보다 작거나 같은 개수의 색으로 그래프 G를 적절하게 색칠하는(즉, 변으로 연결된 두 꼭짓점을 서로 다른 색으로, 모든 꼭짓점을 칠하는) 방법의 수를 $P_G(n)$이라 하면 $P_G(n)$은 n에 대한 다항식이다. 또, m개의 꼭짓점을 가진 선형 그래프(linear graph 또는 path graph) L_m은 다음과 같다.



이 때, $G=L_m$의 다항식 $P_G(n)$을 구하고, $P_G(n)$을 사용하여 이 그래프를 적절하게 색칠하는 데 필요한 색의 최소 개수를 구하시오. [5점] [2005]

9. 확률변수 X가 구간 $[1,5]$에서 균등분포(uniform distribution)를 이룰 때, X의 확률밀도함수, 평균, 분산을 각각 구하시오. [3점] [2005]

10. 1부터 1008까지의 자연수 중 1008과 서로소(relatively prime)인 자연수의 개수를 구하시오. [2점] [2005]

11. 선형사상 $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$는 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$에 의한 곱이다. 즉, $x\in\mathbb{R}^3$에 대하여 $Tx=Ax$이다. T의 핵(kernel)의 차원(dimension)과 T의 상(image)의 차원을 각각 구하시오. [5점] [2005]

12. 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+1)^n}$의 수렴·발산을 판정하시오. [4점] [2005]

13. 실수 집합 $\mathbb{R}$에서 정의된 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$을 다음과 같이 정의하자.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & ,\ x\text{가 유리수} \\ 1 & ,\ x\text{가 무리수} \end{cases}$$

$x=0$에서 f가 미분가능(differentiable)한지 판정하시오. [4점] [2005]

14. 유리수 집합 $\mathbb{Q}$가 실수 집합 $\mathbb{R}$에서 조밀(dense)함을 증명하시오. 즉, x와 y가 실수이고 $x<y$이면, $x<r<y$를 만족시키는 유리수 r이 존재함을 보이시오. [5점] [2005]

15. 복소평면 $\mathbb{C}$ 안의 영역(domain) D에서 정의된 함수 $f:D\to\mathbb{C}$가 해석적(analytic)이고, 모든 $z\in D$에 대해 $\mathrm{Im}\,f(z)=2\mathrm{Re}\,f(z)$가 성립한다. $f(z)$는 D에서 상수임을 보이시오. [5점] [2005]

16. 개집합(open set) $D\subseteq\mathbb{R}^2$에 대하여 미분가능한 함수 $z=f(x,y):D\to\mathbb{R}$의 그래프로 이루어지는 곡면 G의 법선과 z축과의 사잇각을 θ라 할 때 다음을 보이시오.

$$\iint_G \cos^2\frac{\theta}{2}\,dS=\frac{1}{2}S(G)+\frac{1}{2}A(D)$$

(단, $S(G)$는 곡면의 겉넓이, $A(D)$는 영역 D의 넓이로 둘 다 유한이고, $dS=\sec\theta\,dA$이다.) [3점] [2005]

17. 호의 길이 s로 나타낸 매개변수 곡선 $\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}^3$가 $\alpha''(s)\neq 0$이고 $\alpha(s)+\dfrac{1}{\kappa(s)}N(s)$가 고정된 점이면, α는 원의 일부임을 보이시오. [3점] [2005]

(단, $\kappa(s)$는 $\alpha(s)$의 곡률(curvature)이고, $N(s)$는 주법선벡터 (principal normal vector)이다.)

18. 다음 조건을 만족시키는 실위상공간 $\mathbb{R}$의 부분집합 $W,\ X,\ Y,\ Z$의 예를 (증명 없이) 하나씩 구하시오.

(1) $Y,\ Z$는 연결집합(connected set)이다.

(2) $Y\subset W\subset Z,\ Y\subset X\subset Z$

(3) W는 연결집합이다.

(4) X는 연결집합이 아니다.

여기에서 기호 $A\subset B$는 A가 B의 진부분집합임을 나타낸다. [2점] [2005]

19. 체 K는 체 F의 대수적 확대체(algebraic extension field)로서

$$[K:F]=10\ (\text{즉, } [K:F]=\dim_F K=10)$$

이다. F위의 기약다항식(irreducible polynomial) $f(x)$의 차수(degree)가 3일 때, $f(x)$의 어떤 근도 K에 포함되지 않음을 보이시오. [4점] [2005]

20. 위상공간 X와 전사함수 $g:X\to Y$에 의한 집합 Y 위의 상위상(quotient topology)은 $g^{-1}(O)$가 X에서 개집합(open set)이 되는 Y의 부분집합 O로 이루어지는 Y 위의 위상이다. 실위상공간 $X=\mathbb{R}$과 정수 집합 $Y=Z$에 대하여 전사함수 $f:X\to Y,\ f(x)=[x]$에 의한 Y 위의 상위상을 구하시오. (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수이다.) [4점] [2005]

【21~22】환 준동형사상(ring homomorphism)

$$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$$

는 다음과 같이 정의된다.

$$f(x)=(x+3\mathbb{Z},\ x+5\mathbb{Z},\ x+7\mathbb{Z})$$

21. f의 핵(kernel)을 구하시오. [2점]

22. $f(x)=(2+3\mathbb{Z},\ 3+5\mathbb{Z},\ 4+7\mathbb{Z})$를 만족시키는 정수 x를 모두 구하시오. [3점] [2005]

[2006학년도 중등교사 신규임용 후보자 선정 경쟁시험]

1. 다음은 폴리아(G. Polya)가 문제해결과 관련하여 말한 ‘보조문제’에 대한 설명이다.

제시된 문제에 대한 풀이의 발견은 원래의 문제를 해결하는 데 도움을 줄 수 있는 적절한 보조문제에 좌우되는 경우가 많다. 보조문제를 생각함으로써 여러 가지 이득을 얻을 수 있다. 보조문제의 결과가 현재의 문제해결의 실마리가 될 수도 있고, 보조문제를 해결한 방법이 현재의 문제해결에 이용될 수도 있다.

<보기>에서 ①이 ②의 보조문제가 될 수 있는지 판단하고, 그 이유를 구체적으로 쓰시오. [4점] [2006]

<보기>

① 1 부터 100 까지의 자연수의 합 구하기

② 첫째항이 a 이고 공차가 d 인 등차수열의 첫째항부터 제n 항까지의 합 구하기

2. 다음은 8-가 단계 수학에 있는 ‘유리수와 소수’ 단원의 수업 계획을 교사의 관점에서 제시한 것이다.

학습 목표 : 유한소수로 나타내어지는 분수의 특징을 알 수 있다.

수업 계획 :

① 칠판에 학습 목표를 쓴다.

② 여러 가지 분수를 제시하고 그것을 소수로 나타내 보게 한 후, 유한소수와 무한소수의 뜻을 설명한다.

③ 위의 분수 중에서 유한소수로 나타내어지는 분수와 무한소수로 나타내어지는 분수를 각각 기약분수로 나타내었을 때, 분모의 소인수가 어떤 특징을 가지는지 알아보도록 한다.

위의 수업 계획 중에서 ③을 사회적 구성주의의 지식관을 반영하여 진행하고자 한다. 이때, 학생들이 객관화된 수학적 지식을 얻기까지 거쳐야 할 활동 과정을 쓰고, 그 결과 얻어져야 할 지식을 학습 목표와 관련하여 쓰시오. [5점] [2006]

- 활동 과정:
- 그 결과 얻어져야 할 지식(학습 목표와 관련):

【3~4】다음 교사의 대화를 읽고 물음에 답하시오.

김교사: 저는 수학 수업에서 지식의 구조, 곧 기본적인 아이디어를 다루는 것이 중요하다고 생각합니다. 그러한 아이디어는 학생의 사고양식에 맞게 세 가지 표현으로 재구성할 수 있습니다. 세 가지 표현을 이용하면 어떤 지식이든 어떤 수준의 학습자라도 이해할 수 있도록 적절한 형태로 제시할 수 있습니다.

박교사: 저는 지식의 표현 방법도 중요하지만, 그 지식의 지도 순서도 중요하다고 생각합니다. 그래서 저는 학생들에게 일반적인 개념이나 원리를 먼저 지도하고, 이 개념을 발판으로 하여 이어지는 학습 내용을 점점 특수화하고 세분화하는 형태로 지도할 때 학생들에게 의미 충실한 학습이 될 수 있다고 생각합니다.

3. 김 교사의 생각에 반영되어 있는 이론을 참고하여, 위의 대화에서 김 교사가 말한 ‘세 가지 표현’이 무엇인지 쓰시오. 그리고 김 교사가 “삼각형의 세 내각의 이등분선은 한 점에서 만난다.”는 성질을 지도하고자 할 때, 가장 낮은 수준의 학생들도 이해할 수 있도록 삼각형 모양의 종이를 활용하여 이 성질을 표현하는 과정을 구체적으로 쓰시오. [4점] [2006]

- 세 가지 표현:
- 과정:

4. 박 교사는 다항식의 곱셈과 관련된 <보기>의 학습 내용을 ①에서부터 순서대로 지도하려고 한다. 이때, 박 교사가 계획한 학습 내용의 지도 순서와 관련하여, 그의 생각에 반영되어 있는 학습 지도 원리를 쓰고, 그 원리에 입각하여 <보기>의 학습 내용 지도 순서를 구체적으로 해석하시오.[4점] [2006]

<보기>

① $(a+b)(c+d)$의 전개

② $(a+b)^2$의 전개

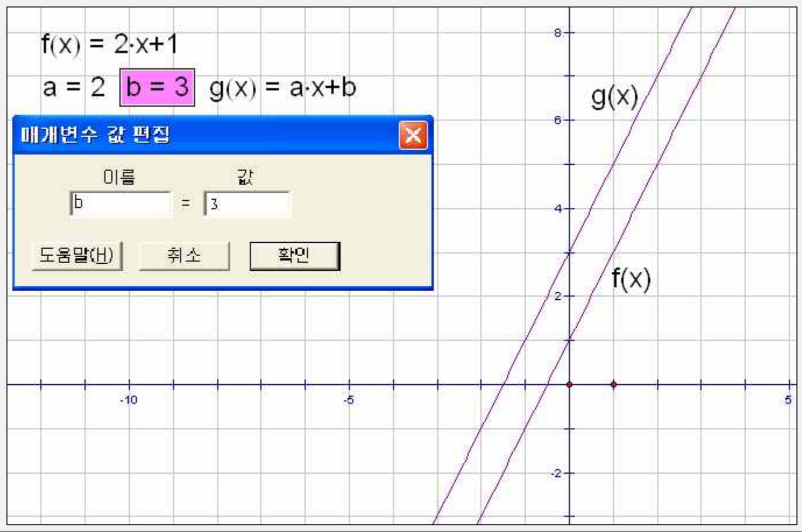
③ 101^2의 계산

- 원리:
- 해석:

5. 최 교사는 “기울기가 같은 두 일차함수의 그래프는 서로 평행하거나 일치한다.”는 학습 내용을 지도하려고 한다. 다음은 최 교사가 수업에 사용하기 위해 만든 학습 자료와 그 학습 자료를 활용한 학습 활동에 대한 계획이다.

<학습 자료>

탐구형 소프트웨어를 이용하여 컴퓨터 화면에 함수$f(x)=2x+1$의 그래프를 그린다. 매개변수 입력창에 a, b의 값을 입력하면 그 값에 따라 새로운 함수 $g(x)=ax+b$의 그래프가 동일한 화면에 그려지도록 한다.



<학습 활동>

활동①: 위 학습 자료에서 a 의 값을 2로 입력하여 고정한다.

활동②: b의 값에 3을 입력하여 $g(x)$의 그래프를 그리고, $f(x)$와 $g(x)$의 두 그래프 사이의 관계를 관찰한다.

활동③: b의 값을 바꾸어 입력하여 $g(x)$의 그래프를 그리고, $f(x)$와 $g(x)$의 두 그래프 사이의 관계를 관찰한다.

활동④: 활동 ③의 과정을 여러 번 반복해서 실행한다.

딘즈(Z. P. Dienes)가 제시하는 수학 학습 원리 중 ‘수학적 다양성의 원리’를 쓰고, 지도하려는 학습 내용에 대한 최 교사의 수업 계획을 수학적 다양성의 원리의 관점에서 평가하시오. [5점] [2006]

6. 다음은 제 7차 수학과 교육과정의 ‘평가’ 항목에서 제시하고 있는 내용의 일부이다.

① <u>객관식 선다형 위주의 평가</u>를 지양하고, ② <u>주관식 지필 검사, 관찰, 면담 등 다양한 평가</u> 방법을 활용하여 종합적인 수학 학습 평가가 이루어질 수 있게 한다.

제 7차 수학과 교육과정에서 제시하고 있는 수학 학습 평가의 목적을 학생과 교사의 측면에서 각각 쓰고, 수학 학습 평가에서 ①에 비해 ②가 갖는 장점을 인지적 영역과 정의적 영역의 측면에서 각각 쓰시오. [4점] [2006]

7. 실수 집합을 $\mathbb{R}$이라 하자. 선형변환(linear transformation) $L:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$은 $\mathbb{R}^n$의 임의의 두 점 x, $\mathrm{y}(\mathrm{x}\neq\mathrm{y})$를 잇는 선분 $\{(1-t)\mathrm{x}+t\mathrm{y}\,|\,0\le t\le 1\}$을 $\mathbb{R}^m$에 포함되는 선분 (또는 점)으로 보내는 것을 보이시오. [4점] [2006]

8. 평균값 정리를 이용하여, 임의의 두 실수 x, y에 대하여 다음 식이 성립함을 보이시오. [4점] [2006]

$$|\sin x-\sin y|\le|x-y|$$

9. 정수환 $\mathbb{Z}$에서 가환환 $\mathbb{Z}_6$으로 가는 환준동형사상(ring homomorphism) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_6$를 다음과 같이 정의하자.

$$f(n)\equiv 4n \pmod 6$$

위의 f를 이용하여, 두 개의 환 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$와 $2\mathbb{Z}_6$이 동형(isomorphic)임을 보이시오. [4점] [2006]
(단, $\mathbb{Z}_6=\{0,1,2,3,4,5\}$는 6을 법(modulo)으로 하는 덧셈과 곱셈 연산을 가지는 가환환이다.)

10. 복소수의 집합을 $\mathbb{C}$라 하고, 2차 정사각행렬의 일반선형군을 $GL(2,\mathbb{C})$라고 하자. 행렬의 사원수군(quaternion group) Q는 $GL(2,\mathbb{C})$의 부분집합

$$\{I, A, A^2, A^3, B, BA, BA^2, BA^3=AB\}$$

으로, 위수 8인 부분군이다. 이 때, Q의 모든 부분군이 정규부분군임을 보이시오. [4점] [2006]
(단, $GL(2,\mathbb{C})=\left\{\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}\,\middle|\, ad-bc\neq 0,\ a,b,c,d\in\mathbb{C}\right\}$,
$I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0&i\\i&0\end{bmatrix}$이다.)

11. K고등학교 전체 학생을 같은 인원수의 9팀으로 나누면 1명이 남고, 같은 인원수의 10팀으로 나누면 2명이 남으며, 같은 인원수의 11팀으로 나누면 10명이 남는다. K고등학교 전체 학생 수 x가 $x\equiv a \pmod{990}$을 만족할 때, 정수 a의 값을 구하시오. (단, $0\le a<990$) [4점] [2006]

12. 자연수

$$N=a\times10^4+b\times10^3+c\times10^2+d\times+e$$

에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족하는 N의 개수를 구하시오. [4점] [2006]

(i) $\{a,b,c,d,e\}\subset\{1,2,3,4,5,6,7\}$
(ii) $\{1,3,5,7\}\subset\{a,b,c,d,e\}$

13. 실수 집합을 $\mathbb{R}$이라 할 때, 모든 자연수 n에 대하여 함수 f_n을 다음과 같이 정의하자.

$$f_n:[0,2]\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\frac{3x^n}{2x^n+1}$$

함수열 (f_n)의 극한함수 f를 구하고, (f_n)이 f로 평등수렴(uniform convergence)하는지 판정하시오. [4점] [2006]

14. 실수 집합을 $\mathbb{R}$이라 하자. n차 다항식 x^n이 주어질 때, 함수 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$가 연속이면 다음 식을 만족하는 $c\in[0,1]$가 존재함을 보이시오. [5점] [2006]

$$(n+1)\int_0^1 f(x)x^n\,dx=f(c)$$

15. 복소평면 $\mathbb{C}$ 안의 영역(domain) $D=\{z\,|\,|z|<2\}$에서 정의된 함수 $f:D\to\mathbb{C}$가 해석적(analytic)이고, 모든 $z\in D$에 대하여 $|f(z)|\le\sqrt{5}$이다. $f(0)=2+i$일 때, $f(1)+f'(i)$의 값을 구하시오. [4점] [2006]

16. 3차원 유클리드공간 $\mathbb{R}^3$에 있는 곡면 $\mathrm{x}(\theta,\phi)$를 다음과 같이 정의하자.

$$\mathrm{x}(\theta,\phi)=((2+\sin\phi)\cos\theta,\ (2+\sin\phi)\sin\theta,\ \cos\phi)$$

이 때, 곡면 위의 점 $\mathrm{x}(0,0)$에서의 접평면(tangent plane)의 방정식을 구하고, 그 접평면과 곡면 $\mathrm{x}(\theta,\phi)$의 교선의 방정식을 구하시오. (단, $-\infty<\theta<\infty$, $-\infty<\phi<\infty$) [5점] [2006]

17. 위상공간 X, Y에 대하여 사상 $f:X\to Y$가 다음 조건을 만족할 때, f를 폐사상(closed map)이라 한다.

임의의 폐집합(closed set) $A\,(\subset X)$에 대하여, $f(A)$는 폐집합이다.

보통위상(usual topology) 공간 $\mathbb{R}$에 대하여 사상 $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$를 $f(x,y)=x$로 정의할 때, f는 연속사상임을 보이고 폐사상은 아님을 보이시오. [4점] [2006]

18. 집합 $X=[-1,1]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-1\le x\le 1\}$에 다음과 같이 위상 $\mathfrak{I}$를 정의할 때, 위상공간 $(X,\mathfrak{I})$는 컴팩트(compact, 긴밀)공간임을 보이시오. [4점] [2006]

$$\mathfrak{I}=\{U\subset X\,|\,0\notin U\}\cup\{U\subset X\,|\,(-1,1)\subset U\}$$

19. 정육면체 모양의 주사위가 있다. 이 주사위의 두 면에는 3, 나머지 네 면에는 1, 2, 4, 5가 각각 하나씩 적혀 있다. 이 주사위를 288번 던질 때, 짝수 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면, X는 이항분포 $B(n,p)$를 따른다. 이 때, X의 평균 $\mathrm{E}(X)$와 분산 $\mathrm{V}(X)$를 구하고, 짝수 눈이 88번 이상 112번 이하로 나올 확률 $\mathrm{P}(88\le X\le 112)$를 정규근사시켜 구하시오. (단, $\mathrm{P}(88\le X\le 112)$를 구하는 과정에서 연속성 수정(continuity correction)은 하지 않는다. 그리고 Z가 표준정규확률변수일 때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$, $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$이다.) [4점] [2006]

【1~2】음수 지도에 관한 다음 두 교사의 대화를 읽고 물음에 답하시오.

김 교사 : 음수 개념의 역사적 발생 과정을 살펴보면, 많은 수학자들이 음수를 수로 인정하기 어려워하였습니다. 학생들도 수학자들과 마찬가지로 ①음수개념과 그 연산의 의미를 크기 또는 양과 관련지어 파악하기 때문에 음수를 수로 받아들이기 어려워합니다.

박 교사 : 동의합니다. 그래서 저는 먼저 ②구체적인 음수지도 모델을 도입하고, 규칙성을 탐구하여 연산의 원리를 발견하는 ③귀납적 외삽법, 기존의 수 체계에서 성립하는 성질을 이용하여 음수를 논리적으로 정의하는 방식인 ④형식 불역의 원리(principle of the permanence of equivalent forms)를 이용하여 음수의 연산을 지도합니다.

1. ①의 예와 ②의 예를 각각 2가지 쓰시오. [4점] [2007]

2. ③에 따라 지도할 때 '$2\times(-1)=-2$'를 어떻게 설명하는지 쓰고, ④에 따라 지도할 때 '-1'을 어떻게 정의하는지 쓰시오. [4점] [2007]

3. 다음은 수학 7-나 단계에서 학습하는 내용 요소와 평가 문항이다. 다음에 제시된 평가 문항의 문제점을 보완하기 위해 면담을 이용한 평가를 계획하려고 한다.

① 내용 요소 : 히스토그램
② 평가 문항 : 도수분포표를 그래프로 나타낸 것을 무엇이라고 하는가?

①을 ②의 문항으로 평가할 때의 문제점을 쓰고, 면담을 이용한 평가의 의의를 하시오. 또한 ①을 면담에 의해 평가할 때 활용할 수 있는 ①과 직접 관련된 질문을 한 가지 쓰시오. [4점] [2007]

4. 다음은 제7차 수학과 교육과정에서 제시하고 있는 수학 Ⅱ의 공간도형 영역에 대한 '학습 지도상의 유의점'이다.

<학습 지도상의 유의점>
① 공간도형의 성질을 관찰과 직관에 의해 이해하도록 한다.
② 공간도형은 공리계를 사용하지 않고 간단히 다룬다.

'공간에서 서로 다른 두 직선의 위치 관계'의 구체적인 학습 내용을 쓰고, 이 내용을 ①에 입각하여 도입하는 방법을 예를 들어 설명하시오. 또한 ②의 이유를 수학적 추론교육과 관련지어 쓰시오.[4점] [2007]

- 학습 내용:
- 도입 방법:
- 이유:

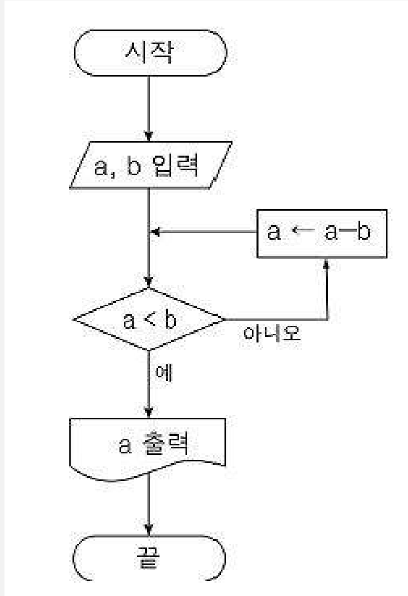
5. 다음은 무한수열의 수렴에 관한 수업에 앞서 최 교사가 교과서와 교사용 지도서를 분석하면서 기록한 내용이다.

① 교과서에서는 직관적이고 자연스러운 사고에 따라 무한수열의 수렴을 정의한다.
② 지난 해에 ①과 같이 정의를 배운 학생 중에는 '$1, 1, 1, 1, \cdots$'과 같은 상수수열이 수렴하지 않는다는 오개념을 가진 경우가 있었다.
③ 바이어슈트라스(Weierstrass)는 엄밀하지만 자연스러운 사고에 역행하는 방식으로 무한수열의 수렴을 정의하였다.

①과 ③에서 '무한수열의 수렴의 정의'를 각각 제시하고, 이를 토대로 최 교사가 ③에서 '자연스러운 사고에 역행한다'고 판단하는 근거를 쓰시오. 또한 ②에 제시된 오개념의 원인을 ①과 관련하여 구체적으로 쓰시오. [5점] [2007]

- 무한 수열의 수렴의 정의
- 판단 근거
- 오개념의 원인

6. 알고리즘은 문제해결에 필요한 유한 번의 계산 절차 또는 처리 순서를 말한다. 음이 아닌 정수 a와 자연수 b에 대해 어떤 값을 구하는 알고리즘을 다음과 같이 순서도로 표현하였다.



이 알고리즘은 컴퓨터가 자료를 처리하는 특정 방식을 반영하고 있다. 수열의 정의에서 사용되기도 하는 이 방식이 무엇인지, 이 알고리즘이 입력값 a, b에 대하여 어떤 값을 출력하는지 각각 쓰시오. 그리고, 이미 익숙한 연산을 '알고리즘과 순서도'로 수학 교과에서 지도하는 의의를 이 사례와 관련하여 쓰시오.[5점] [2007]

- 방식
- 출력값:
- 지도의 의의

7. 행렬 $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$가 대각화가능함을 보이고, $P^{-1}AP$가 대각행렬이 되는 행렬 P를 하나 구하시오. [4점] [2007]

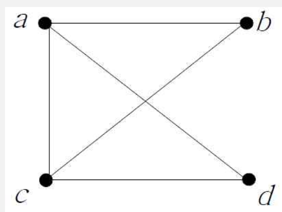
8. 교대급수판정법을 기술하고, 교대급수판정법을 이용하여 무한급수

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!}{(2^n\cdot n!)^2}$$

가 수렴함을 보이시오. [4점] [2007]

9. 곡선 $\alpha:(0,\infty)\to\mathbb{R}^3$, $\alpha(t)=(t^3+t,\, t^2+1,\, t)$가 있다. 이 곡선의 접촉평면($\alpha'(t)$와 $\alpha''(t)$를 포함하는 평면)과 xy-평면이 이루는 각이 45°가 되는 t의 값을 구하시오. (단, $\mathbb{R}^3$은 3차원 유클리드공간이다.) [4점] [2007]

10. 그림과 같이 주어진 그래프에서 꼭짓점 a, b, c, d 순서의 인접행렬(adjacency matrix) A에 대하여 A^4은 다음과 같다.



$$A^4=\begin{pmatrix}15 & 9 & 14 & 9 \\ 9 & 10 & 9 & 10 \\ 14 & 9 & 15 & 9 \\ 9 & 10 & 9 & 10\end{pmatrix}$$

인접행렬 A를 구하고, 행렬 A^4에서 1행 3열의 값 14가 무엇을 의미하는지 쓰시오. [4점] [2007]

11. 정수 x, y, z에 관한 합동식

$$x^2+y^2\equiv 3z^2 \pmod 4$$

의 해집합은

$$\{(x,y,z)\mid x\equiv y\equiv z\equiv 0 \pmod 2\}$$

임을 보이시오. [4점] [2007]

12. 정이면체군 $D_3 = \langle a, b \mid a^2 = b^3 = 1, a^{-1}ba = b^{-1} \rangle$과 대칭군 $S_3 = \langle (1\,2), (1\,2\,3) \rangle$이 동형(isomorphic)임을 보이시오. [4점] [2007]

13. 구간 $[0, 2]$에서 정의된 두 함수 f와 α가 다음과 같을 때, f는 α에 관하여 Riemann-Stieltjes 적분가능함을 보이고, RS-적분 $\int_0^2 f\,d\alpha$의 값을 구하시오. [4점] [2007]

$$f(x) = \begin{cases} x & , 0 \le x < 1 \\ 2x & , 1 \le x \le 2 \end{cases},$$
$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 & , 0 \le x \le 1 \\ 2 & , 1 < x \le 2 \end{cases}$$

14. 복소평면에서 C는 꼭짓점이 -1, $1-i$, $1+i$인 삼각형이고 방향이 반시계방향으로 주어졌을 때, $\int_C \frac{dz}{z(z-2)}$의 값을 구하시오. [4점] [2007]

15. X를 $\mathscr{B} = \{V \subset X \mid V$와 V^c는 모두 열린집합(open set)$\}$을 기저(basis)로 갖는 위상공간이라 하자. 그리고 F를 닫힌집합(closed set), p를 F에 속하지 않는 X의 점이라고 할 때, $f(p) = 0$이고 $f(F) = \{1\}$인 연속함수 $f: X \to \mathbb{R}$가 존재함을 보이시오. (단, $\mathbb{R}$은 실수 전체의 집합이다.) [4점] [2007]

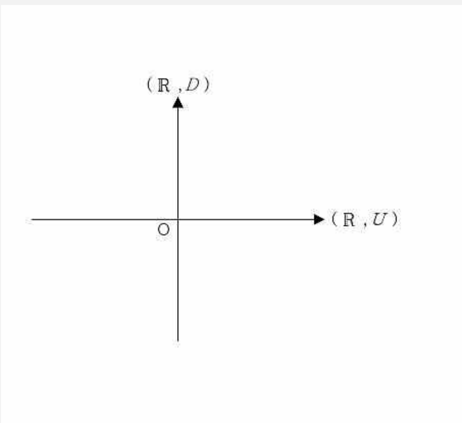
16. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$에 대하여

$$X_1 = (\mathbb{R}, U), \; X_2 = (\mathbb{R}, D)$$

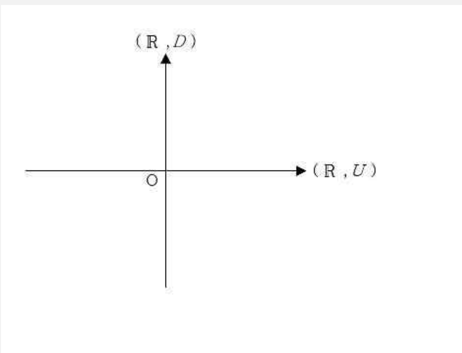
라고 하자. 여기서 U는 보통위상(usual topology)이고 D는 이산위상(discrete topology)이다.

$X = X_1 \times X_2$를 X_1과 X_2의 곱공간이라 하자. X의 부분집합 $A = (-1, 1) \times (-1, 1)$에 대하여 A의 폐포(closure)와 경계(boundary)를 (증명없이) 각각 그림으로 나타내시오. [4점] [2007]

- 폐포



- 경계



17. 확률변수 X가 이항분포 $B(n, p)$를 따를 때, X의 평균(기댓값)이 np임을 보이시오. [4점] [2007]

18. 위수가 9인 체(field) F_9를 구성하고, F_9를 원소나열법으로 나타내시오. [5점] [2007]

19. 다음은 테일러(Taylor) 정리와 관련된 내용이다.

> $0 \in (a, b)$이고 함수 f가 (a, b)에서 무한 번 미분가능할 때, f의 n차 도함수를 $f^{(n)}$으로 나타내고
> $$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \; R_n(x) = f(x) - f_n(x)$$
> 로 놓으면
> $$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!} x^{n+1}$$
> 이 되는 t_x가 0과 x사이에 존재한다.

함수 $f(x) = \ln(1+x)$에 대하여 $f_n(x)$를 구하고, $R_n(x)$를 이용하여 구간 $[0, 1]$에서 f_n이 f로 평등수렴(uniform convergence)함을 보이시오. [5점] [2007]

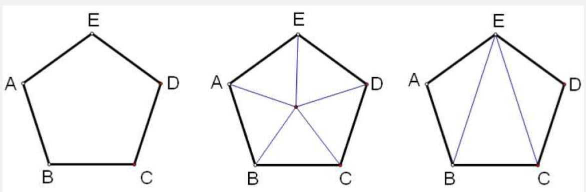
1. 제 7차 수학과 교육과정에서는 '수학학습의 평가가 ①학생 개개인의 수학학습을 돕고, ② 교사 자신의 수업 방법을 개선' 하는 데 기여할 것을 평가 목적의 하나로 명시하고 있다. 다음 문항을 위에 기술한 평가 목적에 보다 부합하도록 재구성하고, 재구성한 근거를 ①과 ②의 관점에서 문항 내용과 관련지어 서술하시오. (단, 문항을 재구성할 때, 주어진 명제는 변형하지 않도록 한다.) [4점] [2008]

다음 명제의 참, 거짓을 판별하시오.
답 : ____________
명제 : 이차함수 $y=ax^2+bx+c$는 x절편과 y절편을 모두 갖는다.

- 재구성 문항 :
- 재구성한 근거
  ①의 관점 :
  ②의 관점 :

2. 김 교사는 사회적 구성주의를 적용한 수학 수업을 실천해 왔다. 사회적 구성주의에서는 개인의 주관적 지식이 공표를 통해 사회에 알려지고 공적인 비판과 합의를 통해 객관적 지식으로 변환해 간다고 본다. 다음은 7-나 단계 '다각형의 내각의 크기의 합' 에 관한 수업에서 김 교사와 학생들이 나눈 대화의 일부이다.

김 교사 : 이런 오각형에서 내각의 크기의 합이 얼마일지 생각해 봅시다. [그림 1]
(학생들의 소집단 토론이 진행된다.)
김 교사 : 자, 이제 발견한 사실을 발표해 볼까요?
학생 A : 오각형의 내각의 크기의 합은 $5\times180^\circ$가 됩니다.
김 교사 : 학생 A가 오각형의 내각의 크기의 합이 $5\times180^\circ$라는 의견을 제시하였습니다. 이 의견에 대한 질문이 있습니까?
학생 B : 왜 $5\times180^\circ$가 된다고 생각하는지 설명해주세요.
학생 A : 이렇게 잘라서 각의 크기를 모두 합하면 $5\times180^\circ$가 됩니다. [그림 2]
학생 B : 오각형을 이렇게 자르면 내각의 크기의 합이 $3\times180^\circ$가 되는데요? [그림 3]



[그림 1] [그림 2] [그림 3]

이 대화 속에서 학생 A와 학생 B는 각기 구별되는 주관적 지식을 제안하였다. 김 교사는 두 학생의 주관적 지식이 합의된 객관적 지식으로 변환해 가도록 안내하려고 한다. 안내 과정을 두 단계로 나누어, 김 교사가 각 단계별로 할 수 있는 주요한 질문과 그 질문의 의도를 사회적 구성주의의 관점에서 각각 제시하시오. [4점] [2008]

- 1단계 질문:
- 1단계 질문의 의도:
- 2단계 질문:
- 2단계 질문의 의도:

3. 스켐프(R. Skemp)는 수학적 개념에 대한 이해 유형의 일부로 도구적 이해와 관계적 이해를 비교하여 설명하였고, 수학 학습-지도에서는 궁극적으로 수학적 개념에 대한 관계적 이해를 목표로 해야 한다고 주장하였다. 김 교사가 학생들이 '이항' 을 어떻게 이해하고 있는지 알아보기 위해 일차방정식 문제를 풀게 하였더니, 학생 A와 학생 B가 아래와 같이 동일한 방법으로 문제를 풀었다.

(문제) 방정식 $3x+7=19$를 풀어라.
(학생 A와 학생 B의 풀이)
$3x+7=19$ ㉠
$3x=19-7$
$3x=12$
$x=4$

잠시 후 김 교사는 학생 A와 학생 B에게 ㉠의 과정을 각자 설명해 보라고 하였다. 김 교사는 두 학생의 설명을 듣고 나서, 학생 A는 '이항' 에 대하여 도구적 이해를 하고 있고, 학생 B는 관계적 이해를 하고 있다고 판단하였다. 학생 A와 학생 B가 ㉠의 과정을 어떻게 설명했을지 각각 제시하시오. (단, 두 학생 모두 '이항' 이라는 용어는 사용하지 않았고, 그 설명이 7-가 단계의 수준을 넘지 않았다고 한다.) [4점] [2008]

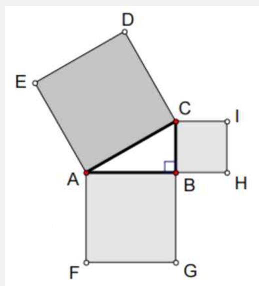
- 학생 A의 설명 :
- 학생 B의 설명 :

4. 다음은 공학 도구를 활용하여 피타고라스 정리의 기하학적 의미를 탐구하는 과정에서 김 교사와 학생들이 나눈 대화의 일부이다. (단, 모든 학생들의 수학 지식이 $9-$나 단계의 수준을 넘지 않는다고 한다.)

(김 교사는 공학 도구를 가지고 피타고라스 정리의 기하학적인 의미를 [그림 1]을 이용하여 설명한 후, 학생들에게 직접 작도하여 확인해 보도록 하였다.)

$\mathrm{BCIH}=1.86\mathrm{cm}^2$
$\mathrm{ABGF}=5.80\mathrm{cm}^2$
$\mathrm{CDEA}=7.66\mathrm{cm}^2$

$\mathrm{CDEA}-(\mathrm{BCIH}+\mathrm{ABGF})=0.00\mathrm{cm}^2$

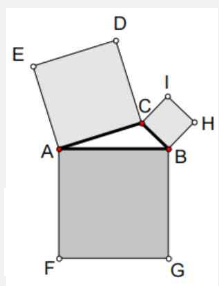


[그림 1]

(진영이는 실수로 [그림 2]와 같이 직각삼각형이 아닌 삼각형을 작도하여 관찰하고 있다.)
진영: (혼잣말로) 이렇게 그린 다음 … 이것을 움직이면 … 음 …….

$\mathrm{DEAC}=4.92\mathrm{cm}^2$
$\mathrm{FGBA}=7.87\mathrm{cm}^2$
$\mathrm{HICB}=0.91\mathrm{cm}^2$

$\mathrm{FGBA}-(\mathrm{DEAC}+\mathrm{HICB})=2.04\mathrm{cm}^2$



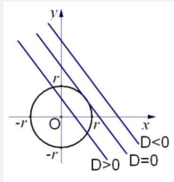
[그림 2]

김 교사: ①아! 진영이는 제이코사인 법칙을 발견했구나. 정말 대단하네!

공학 도구를 활용한 수업에서 나타날 수 있는 극단적인 교수 현상 중 ①에 해당하는 것을 제시하고, 제시한 현상의 의미를 위의 상황과 관련지어 설명하시오. [4점] [2008]

- ①에 해당하는 극단적인 교수 현상 :
- 현상의 의미 :

5. 경호가 배우는 10－나 단계의 교과서에 원 $x^2+y^2=r^2$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식' 을 구하는 과정이 다음과 같이 나와 있다.

> 원과 직선의 방정식을 각각
> $$x^2+y^2=r^2 \quad \cdots\cdots ①$$
> $$y=mx+n \quad \cdots\cdots ②$$
> 이라 하면, 이들 교점의 좌표는 이 두 방정식을 연립하여 풀었을 때의 해이다. ②를 ①에 대입하여 y를 소거하면
> $$x^2+(mx+n)^2=r^2$$
> 이 식을 정리하면
> $$(m^2+1)x^2+2mnx+n^2-r^2=0 \quad \cdots\cdots ③$$
> 이때, $m^2+1\neq 0$이므로 ③은 x에 대한 이차방정식이다. 따라서 ③의 판별식을 D라 하면 원 ①과 직선 ② 사이에는 다음과 같은 관계가 있다.
> [1] $D>0 \Leftrightarrow$ 서로 다른 두 점에서 만난다.
> [2] $D=0 \Leftrightarrow$ 한 점에서 만난다. (접한다)
> [3] $D<0 \Leftrightarrow$ 만나지 않는다.
>
> 
>
>
> 특히 [2]의 경우 $\frac{D}{4}=m^2n^2-(m^2+1)(n^2-r^2)=0$이므로, 원과 직선이 접할 때 $n=\pm r\sqrt{m^2+1}$임을 알 수 있다.
> 결국 구하는 접선의 방정식은 $y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$이다.

피아제(J. Piaget)는 반영적 추상화의 메커니즘을 '반사와 반성' 이라는 두 가지 성분으로 설명하였다. 경호가 위의 내용을 학습하는 과정에서 '반사와 반성' 이 일어날 수 있는 상황을 찾아 한 가지만 제시하고, 그 상황이 '반사와 반성' 과정에 해당한다고 할 수 있는 이유를 설명하시오. [5점] [2008]

- '반사와 반성' 이 일어나는 상황 :
- 이유 :

6. 다음은 박 교사가 학생들의 수학적 추론 능력을 알아보기 위해 제시한 문제이다.

> 카드의 앞면과 뒷면에 각각 1과 2, 3과 4, 5와 6, 7과 8, 9와 10이 적힌 다섯 장의 카드가 있다.
>
> | | | | | | |
> |---|---|---|---|---|---|
> | 앞 | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 |
> | 뒷 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
>
> 다섯 장의 카드를 책상 위에 배열하였을 때, 보이는 다섯 개의 수 중 짝수가 2개인 경우 그 다섯 개의 수의 합이 얼마인지 구하시오.

이 문제에 대하여 철수가 다음과 같은 풀이를 제시하였다.

> 보이는 다섯 개의 수가 1, 4, 6, 7, 9일 경우, 2, 3, 5, 8, 9 일 경우, 그리고 1, 3, 6, 7, 10일 경우를 살펴보면, 그 합이 모두 27이 됨을 알 수 있습니다. 다른 경우도 마찬가지일 것이므로 답은 27일 것입니다.

철수가 제시한 풀이에 나타난 수학적 추론의 유형을 쓰고, 이러한 유형의 추론이 철수의 문제해결 과정에서 어떤 역할을 하였는지 설명하시오. 그리고 철수의 풀이에서 보완되어야 할 점을 기술하시오. [5점] [2008]

- 수학적 추론의 유형 :
- 역할 :
- 보완점 :

7. 정수 x, y, z에 관한 다음 방정식의 일반해를 구하시오. [4점] [2008]
$$3x+4y+5z=2$$

8. 정수 집합 $\mathbb{Z}$위의 다항식환(polynomial ring)을 $\mathbb{Z}[x]$라 하자. $\mathbb{Z}[x]$의 두 원소 a와 bx에 의해 생성되는 $\mathbb{Z}[x]$의 이데알(ideal) $I=(a, bx)$에 대하여 다음을 증명하시오. (단, a, $b\in\mathbb{Z}$) [5점] [2008]

> I가 단항이데알(principal ideal)이면, $a=0$ 또는 a는 b의 약수이다.

9. 유리수체 $\mathbb{Q}$위의 기약다항식(irreducible polynomial)
$$f(x)=x^3-2x+2$$
에 대하여 $f(x)$의 한 근(root) θ를 포함하는 $\mathbb{Q}$의 확대체(extension field)를 $\mathbb{Q}(\theta)$라 하자. 이 때, $\mathbb{Q}(\theta)$에서 $3+\theta$의 곱셈에 대한 역원을 구하시오. [4점] [2008]

10. 실수체 $\mathbb{R}$위의 벡터공간 $P_2=\{a+bx+cx^2 \mid a, b, c\in\mathbb{R}\}$에 대하여 선형변환(linear transformation) $T: P_2\to P_2$가 다음을 만족한다고 하자.
$$T(1+x)=1+x^2$$
$$T(x+x^2)=x-x^2$$
$$T(1+x^2)=1+x+x^2$$
이 때, $T(4+2x+3x^2)$을 구하시오. [4점] [2008]

11. 실수 집합을 $\mathbb{R}$이라 하고 폐구간 $I=[0,1]$에서 정의된 연속함수 $f: I\to\mathbb{R}$가 다음 조건을 만족한다고 하자. 임의의 $x\in I$에 대하여, 적당한 $y\in I$가 존재하여 다음이 성립한다.
$$|f(y)|\le\frac{1}{5}|f(x)|$$
이때, $f(c)=0$을 만족하는 $c\in I$가 존재함을 증명하시오. [5점] [2008]

12. 매클로린(Maclaurin) 급수를 이용하여 다음 극한값을 구하시오. [4점] [2008]
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x+\frac{x^3}{6}}{(x^2\cos x)^{\frac{5}{2}}}$$

13. 다음 관계식
$$\int_1^{x^2}(x^2-t)f(t)\,dt=\frac{1}{2}x^6+ax^4+x^2+a+1$$
을 만족하는 다항함수(polynomial function) $f(x)$와 상수 a를 구하시오. [4점] [2008]

14. 복소방정식 $z+e^{-z}=2$는 $|z-2|<2$에서 오직 한 개의 복소수 근을 가짐을 보이고, 그 근이 실근임을 보이시오. [4점] [2008]

15. $\mathbb{R}$을 실수 집합이라 하고, $\mathfrak{J}$를 $\mathbb{R}$위에서의 여가산 위상(cocountable topology)이라 하자. 즉,
$$\mathfrak{J}=\{U\subset\mathbb{R} \mid \mathbb{R}-U\text{는 가산집합(countable set)}\}\cup\{\varnothing\}$$
이다. $\mathbb{Q}$를 유리수 집합이라 하고 $A=\mathbb{R}-\mathbb{Q}$를 무리수 집합이라 할 때, A의 내부(interior), 유도집합(derived set), 폐포(closure), 경계(boundary)를 증명 없이 각각 구하시오. [4점] [2008]

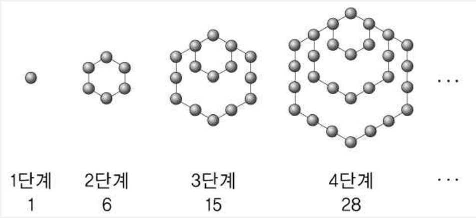
16. 공집합이 아닌 위상공간 X의 두 부분집합 A와 B가 각각 X에서 조밀(dense)하다고 하자. 이때, B가 X에서 열린 집합이면 $A\cap B$가 X에서 조밀함을 증명하시오. [4점] [2008]

17. $\mathbb{R}$을 실수 집합이라 할 때, 곡면 $\mathbf{x}: \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$,
$$\mathbf{x}(u, v)=\left(u-\frac{u^3}{3}+uv^2,\ v-\frac{v^3}{3}+u^2v,\ u^2-v^2\right)$$
에 대하여 다음 물음에 답하시오. [4점] [2008]

(1) 곡면 위의 점 $\mathbf{x}(1, 1)$에서의 법벡터(normal vector) $\vec{n}$을 구하시오.

(2) 위 (1)에서 구한 법벡터 $\vec{n}$과 $\vec{n}$을 xy-평면에 정사영(projection)한 벡터가 이루는 각을 α라 할 때, $\cos\alpha$를 구하시오.

18. 다음 그림과 같은 규칙으로 구슬이 배열되어 있다.



n단계에서의 구슬의 개수를 a_n이라 할 때, 두 항 a_n과 a_{n+1}사이의 점화 관계(recurrence relation)를 구하고, a_n을 n에 관한 다항식으로 나타내시오. [4점] [2008]

19. 동전 n개를 동시에 던져서 모두 앞면이 나오면 n점을 얻고, 그렇지 않으면 0점을 얻는다고 하자. 이 규칙에 따라 동전 n개를 동시에 던지는 시행에서 얻을 수 있는 점수의 기댓값 E_n을 구하고, E_n이 최대가 되는 n을 모두 구하시오. (단, n은 자연수이다.) [4점] [2008]

1. 수학교육의 발달 과정에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은? [2009 모의] [2점]

① 심리학은 수학교육학에 연구 방법론을 제공해 주어 학문적 정체성 확보에 도움을 주었다.

② 20세기 초의 페리(J.Perry), 무어(E. Moore), 클라인(F. Klein)이 중심이 된 수학교육 운동에서는 논리적 엄밀성에 기반을 둔 수학교육을 강조하였다.

③ 수학 및 과학 기술의 급격한 진보에 따른 변화에 대응하고자 제2차 세계 대전 후 수학교육 개혁 운동이 일어났다.

④ 수학교육 현대화 운동의 결과로 나타난 학생들의 수학 학력 저하는 '기본으로 돌아가기 운동(Back-to-Basics Movement)'을 야기시켰다.

⑤ 폴리아(G. Polya)는 수학적 발견술 지도가 문제해결 교육의 핵심이라고 하였으며, 1980년대 이후 학교수학에서는 문제해결을 강조하고 있다.

2. 2006년 8월에 수학과 국민 공통 기본 교육과정이 개정 고시되었다. 제7차 수학과 교육과정과 비교할 때, 다음 중 2006년 개정 수학과 교육과정에서 변화된 내용으로 옳지 않은 것은? [2점] [2009 모의]

① 수학과 교육과정에서 초등학교와 중, 고등학교의 내용 영역의 구분이 다르게 설정되었다.

② 단계형 수준별 교육과정을 개정하여, 학생의 능력과 수준, 적성, 희망 등을 고려하여 학교 상황에 맞게 수준별 수업을 운영할 수 있게 하였다.

③ 학생의 미래 생활과 학습의 필요성을 고려하여 중학교 3학년의 교육 내용에 중앙값과 최빈값의 개념을 도입하였다.

④ 학생들의 수학적 능력 신장을 위하여 수학적 추론 및 문제해결력뿐만 아니라 수학적 의사소통 능력의 신장을 강조하였다.

⑤ 중학교 3학년 수학 수업 시수를 주당 4시간으로 늘려 보충, 심화 수업을 할 수 있게 하였다.

3. 문제와 문제해결 방법이 <보기>에 제시되어 있다. 각 방법 속에 나타난 전략을 올바르게 짝지은 것은? [1.5점] [2009 모의]

ㄱ. [문제] 방정식 $2x+1=7$을 풀어라

(문제해결 방법) x에 1을 대입하여 등식이 성립하는지 살펴본 후 성립하지 않으면 버리고, 성립하는 값이 나올 때까지 다른 수를 시도해 본다.

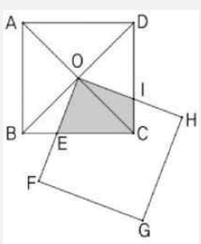
ㄴ. [문제] 방정식 $2^x-2^{3-x}=2$를 풀어라.

(문제해결 방법) 2^x을 y로 치환하여 y의 방정식으로 변형한 후, y의 값을 구하고 그 결과를 이용하여 x의 값을 구한다.

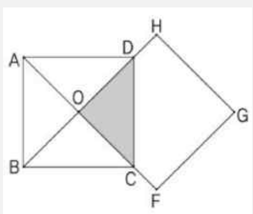
ㄷ. [문제] 한 변의 길이가 4cm인 두 정사각형이 있다.

[그림 1]과 같이 한 정사각형의 한 꼭짓점이 다른 정사각형의 대각선의 교점에 있을 때, 색칠한 부분의 넓이를 구하여라.

(문제해결 방법) [그림 2]를 이용하여 [그림 1]의 색칠한 부분의 넓이를 구한다.



[그림 1]

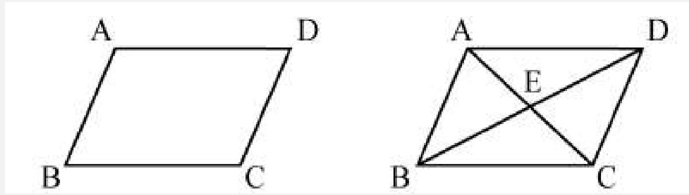


[그림 2]

	ㄱ	ㄴ	ㄷ
①	예상과 확인	단순화 하기	특수화 하기
②	거꾸로 풀기	식 세우기	그림 그리기
③	예상과 확인	일반화 하기	단순화 하기
④	거꾸로 풀기	특수화 하기	단순화 하기
⑤	단순화 하기	거꾸로 풀기	그림 그리기

4. 김 교사는 '평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다'는 성질을 가르치고 있다. 스켐프(R. Skemp)가 제안한 '이해'의 유형 가운데 철수의 대답과 가장 관련이 깊은 것은? [2점] [2009 모의]

김 교사 : 여기에 평행사변형이 있습니다([그림 1]). 평행사변형의 두 대각선을 그렸을 때([그림 2]), 이 두 대각선은 어떤 성질이 있는지 이야기해 볼까요?



[그림 1] [그림 2]

철 수 : 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분해요. 그러니까 선분 AE의 길이와 선분 EC의 길이가 같고, 선분 BE의 길이와 선분 ED의 길이가 같아요.

김 교사 : 아! 그렇군요. 그럼 어떻게 그렇다는 것을 알 수 있지요?

철 수 : 그림에서 보면 바로 똑같다는 것을 알 수 있어요. 초등학교 때 그렇게 배운 것으로 기억하고 있는데, 그 이유는 잘 모르겠어요.

① 도구적 이해　② 관계적 이해
③ 논리적 이해　④ 형식적 이해
⑤ 기호적 이해

5. 오수벨(D. Ausubel)의 '점진적 분화의 원리'를 사용한 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2점] [2009 모의]

ㄱ. 삼각형, 사각형, 오각형 등의 내각의 합을 구해보게 한 후, n각형의 내각의 합이 $180^\circ \times (n-2)$임을 지도하였다.

ㄴ. 함수 $f(x)$에서 변수 x와 $f(x)$의 관계로부터 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 합성함수 $g(f(x))$를 이해시켰다.

ㄷ. $a>0$, $a\neq 1$, $M>0$, $N>0$일 때, $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$이 성립한다는 것을 학습한 후에 이전에 학습한 지수법칙 $a^m a^n=a^{m+n}$을 재인식하도록 하였다.

ㄹ. 이항연산에서 역원의 개념을 지도한 후 복소수의 곱셈에 대한 역원을 지도하였다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄹ　⑤ ㄱ, ㄴ

6. 수학적 개념을 구성주의 관점으로 지도한 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2점] [2009 모의]

<보기>

ㄱ. '공간에서 한 평면에 속하지 않는 두 직선은 꼬인 위치에 있다'고 정의를 말해 주고, 그 정의에 대한 예를 보여주면서 꼬인 위치의 개념을 지도하였다.

ㄴ. 양팔저울을 가지고 무게를 비교하는 실험을 교사가 직접 실행해 보여주고, 양팔저울을 특성으로부터 등식의 성질을 유도하면서 일차방정식을 지도하였다.

ㄷ. 학생들에게 다양한 평행사변형을 그려서 공통된 성질을 찾아보게 한 후, 이 성질을 활용하여 평행사변형이 되는 조건을 써보게 하면서 평행사변형을 지도하였다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

7. 반 힐레(van Hieles)는 기하 학습의 수준을 제0수준 ~ 제4수준의 다섯 가지로 구분하였다. 경호의 응답 내용을 근거로 볼 때, 경호가 도달한 수준은? [2점] [2009 모의]

김 교사 : (직사각형을 칠판에 제시하고 묻는다.)
이 도형은 무엇일까요?
경 호 : 직사각형이요.
김 교사 : 이 도형과 정사각형의 중요한 차이점은 무엇인가요?
경 호 : 직사각형은 네 각의 크기가 모두 같기만 하면 되지만, 정사각형은 네 각의 크기가 같아야 할 뿐만 아니라 네 변의 길이도 모두 같아야 합니다. 음... 그리고요, 정사각형은 항상 직사각형이 되지만 직사각형은 정사각형이 되지 않을 때도 있어요.

① 제0수준 - 시각적 인식 수준(recognition)
② 제1수준 - 기술적/분석적 인식 수준(analysis)
③ 제2수준 - 관계적/추상적 인식 수준(ordering)
④ 제3수준 - 형식적 연역 수준(deduction)
⑤ 제4수준 - 엄밀한 수학적 수준(rigor)

8. 차 교사는 확률변수의 평균에 대한 성질 $\mathrm{E}(kX)=k\mathrm{E}(X)$의 증명을 다음과 같은 방법으로 지도하였다.

모둠 활동 자료로 학급 학생들의 키를 미터(m) 단위와 센티미터(cm) 단위로 각각 기록한 두 개의 표를 만들었다. 모둠별로 이 두 개의 표를 모두 나누어 준 뒤 하나의 표를 선택하여 평균을 구하도록 하였다. 이어지는 학급 토론에서 모둠별로 구한 평균을 비교해보니 165와 1.65로 나뉘었다. 다음은 학급 토론 내용이다.
차 교사: 같은 자료를 가지고 평균을 구했는데 두 개의 다른 값이 나왔어요. 그럼 두 값 가운데 하나가 틀렸다고 주장해도 될까요?
(학생들이 각자의 모둠에서 두 표를 비교한다.)
선 아: 두 표에서 사용한 단위가 달라요. 1m = 100cm이니까, 아마도 단위가 센티미터인 자료를 사용한 모둠에서는 평균이 165가 나온 것 같고, 미터 단위를 사용한 모둠에서는 1.65가 나온 것 같아요. 즉, 센티미터 단위로 정리한 자료가 미터 단위로 정리한 자료의 100배가 되니까 그 평균도 100배가 된 것 같아요.
차 교사: 선아의 추측을 식으로 표현하면 $\mathrm{E}(100X)=100\mathrm{E}(X)$인데, 선아의 추측이 맞나요?
정 덕: 네. 우리 반 학생 30명의 키를 x_1, x_2, $\cdots$, x_{30}이라고 하면 평균은
$$\frac{100x_1+\cdots+100x_{30}}{30}=100\left(\frac{x_1+\cdots+x_{30}}{30}\right)$$
이 됩니다. 그러니까 $\mathrm{E}(100X)=100\mathrm{E}(X)$가 성립해요.
지 현: 30개의 자료에 대해 성립한다고 해서 모든 경우에 성립한다고 할 수는 없어요.
차 교사: 정덕이는 지현이의 주장이 타당하다고 생각해요?
정 덕: 아니요, 30을 N으로 바꾸면
$$\frac{100x_1+\cdots+100x_N}{N}=100\left(\frac{x_1+\cdots+x_N}{N}\right)$$
자료의 크기가 N인 경우로 일반화할 수 있어요.
차 교사: 정덕이는 각 자료에 곱해지는 수가 100인 특수한 경우에 대해 증명을 했는데 100이 아닌 임의의 상수의 곱으로 일반화할 수 있을까요?
경 이: 정덕이가 쓴 등식에서 100을 일반적인 상수 k로 바꾸어 쓰면
$$\mathrm{E}(kX)=k\mathrm{E}(X)$$
가 성립할 것 같아요.

위의 지도 과정에서 드러난 차 교사의 증명 지도에 대한 수리철학적 관점으로 가장 알맞은 것을 <보기>에서 두 개만 고른 것은? [2점] [2009 모의]

<보기>

ㄱ. 증명은 의미를 고려하지 않고 특별한 규칙에 따라 행해지는 일련의 기호조작이다.
ㄴ. 증명은 수업 상황에서 제기된 수학적 추측에 대한 설명과 확신의 수단이다.
ㄷ. 증명은 제기된 추측을 반박하고 재구성하는 계속적인 발견의 과정이다.
ㄹ. 증명은 가정에서 결론에 도달하는 단계적 절차로서 종합적 방식이다.

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄴ, ㄹ ⑤ ㄷ, ㄹ

9. 교수・학습의 측면에서 계산기 활용의 장점을 언급한 두 명의 교사를 <보기>에서 옳게 고른 것은? [2점] [2009 모의]

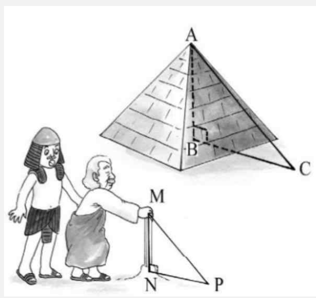
<보기>

ㄱ. 김 교사: 사칙계산을 배우는 초기 단계에서 계산기를 이용하면 계산을 빨리할 수 있으므로, 학생들에게 연산의 의미와 구조에 대한 지식을 깊이 있게 전달할 수 있어요.
ㄴ. 이 교사: 학생들에게 '$16^{-\frac{1}{2}}=(\quad)$'를 지필 또는 계산기를 이용하여 풀게 했는데 약 99%의 학생이 계산기를 이용하여 풀고 난 후 0.25라고 답했습니다. 학생들이 소수를 사용하는 것에 더 익숙하므로, 앞으로는 수업 시간에 분수보다 소수를 주로 사용하는 것이 좋겠습니다.
ㄷ. 최 교사: 함수 $y=ax+b(a\neq 0)$의 그래프를 그릴 수 있는 학생들이 그래픽 계산기를 사용하여 a와 b의 값이 변하는 것에 따라 그래프의 모양을 관찰하면 그래프의 성질을 발견하는 데 도움이 됩니다.
ㄹ. 박 교사: $\sqrt{2}$가 순환하지 않는 무한소수임을 탐구하는 과정에서
$$1=1^2<2<2^2=4,$$
$$1.96=1.4^2<2<1.5^2=2.25,$$
$$1.9881=1.41^2<2<1.42^2=2.0164$$
등의 계산을 계산기가 도와주므로 편리하지요.

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄹ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄴ, ㄹ ⑤ ㄷ, ㄹ

[10 ~ 11] 다음은 닮음의 응용과 관련된 수업 상황이다. 물음에 답하시오.

김 교사 : 탈레스는 맑은 날 지면에 막대기를 수직으로 세우고 막대기의 길이, 막대기 그림자의 길이, 피라미드 그림자의 길이를 동시에 측정한 뒤, 닮은 삼각형의 성질을 이용하여 피라미드의 높이를 계산했다고 합니다. 탈레스는 위의 세 값을 가지고 어떻게 피라미드의 높이를 구했을까요?



우선, 높이는 지면과 수직이니까 $\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{MNP}=90^\circ$이고 같은 시간대에 측정했으니까 $\angle\mathrm{ACB}=\angle\mathrm{MPN}$이에요. 따라서 $\triangle\mathrm{ABC}$와 $\triangle\mathrm{MNP}$는 닮음이에요. 닮은 도형에서는 대응변의 길이 사이의 비가 같으니까, $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{MN}}:\overline{\mathrm{NP}}$이지요? 이 비례식을 풀면, 피라미드의 높이는 $\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{MN}}}{\overline{\mathrm{NP}}}$입니다.
소 현 : 만일 피라미드 그림자 BC의 길이는 오후 2시에 측정하고 막대기 그림자 NP의 길이는 오후 5시에 측정해도 피라미드의 높이 $\overline{\mathrm{AB}}$에 대한 위의 식이 성립하나요?
김 교사 : ____(가)____

10. 교사의 중요한 역할 중 하나는 학생들의 인지발달과 경험을 고려하여 창의적으로 사고할 수 있도록 지도하는 것이다. 이 사실을 고려할 때, 다음 중 (가)에 들어갈 김 교사의 말로 가장 적절한 것은? [2009 모의] [2점]

① 두 그림자의 길이를 재는 시각이 달라도 $\triangle\mathrm{ABC}$와 $\triangle\mathrm{MNP}$는 닮은 도형이므로 피라미드의 높이를 구하는 식은 항상 위와 같이 성립해요.
② 두 그림자의 길이를 재는 시각이 다르면 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}$가 $\overline{\mathrm{MN}}:\overline{\mathrm{NP}}$와 같지 않으므로 피라미드의 높이를 구할 수 없어요.
③ 낮 동안 그림자의 길이는 그렇게 많이 변하지 않으니까 측정 시각은 피라미드의 높이 계산에 영향을 주지 않아요.
④ 태양의 고도가 다른 상황이 2시의 $\triangle\mathrm{ABC}$와 5시의 $\triangle\mathrm{MNP}$를 비교하면서 두 삼각형 사이의 유사점과 차이점을 찾아보세요.
⑤ 태양의 고도가 다른 상황인 2시의 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{MN}}$과 5시의 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{MN}}$을 비교하면서 생각해 보세요.

11. 다음 중 위의 수업 상황에 드러난 수학의 특성 가운데 가장 거리가 먼 것은? [2009 모의] [2점]

① 계통성 ② 실용성 ③ 일반성
④ 이상성 ⑤ 논리성

12. 중학교 2학년의 ‘삼각형의 성질’ 단원에 있는 ‘삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만난다’라는 명제를 증명하려고 한다. 2006년 개정 수학과 교육과정에 비추어 볼 때, 학생이 알아야 하는 선수지식과 관련이 있는 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2점] [2009 모의]

<보기>

ㄱ. 삼각형에서 두 변과 그 끼인각이 같으면 그 삼각형은 합동이다.
ㄴ. 삼각형의 세 내각의 이등분선은 한 점에서 만난다.
ㄷ. 직각삼각형에서 직각을 끼고 있는 두 변의 길이를 각각 a, b라 하고 빗변의 길이를 c라 할 때, $a^2+b^2=c^2$이다.

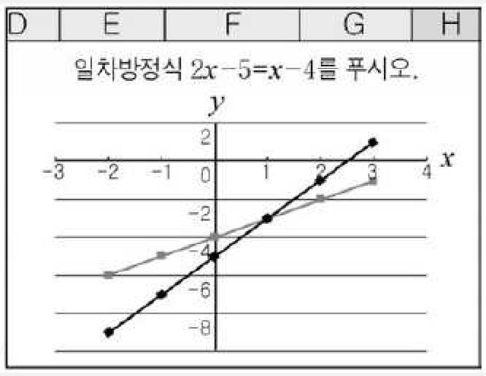
① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

13. ‘변수’는 변화하는 대상(variable object)’, ‘다가이름(polyvalent name)’, ‘자리지기(placeholder)’ 등과 같이 다양한 수학적 의미를 가지고 있다. 일차방정식 $2x-5=x-4$의 풀이에 대한 다음 수업에 반영된 변수 개념에 관한 설명으로 가장 적절한 것은? [2.5점] [2009 모의]

스프레드시트를 이용하여 일련의 x값에 대해 두 일차식 $2x-5$와 $x-4$의 값을 계산하여 두 식의 값이 같아지는 x값을 찾도록 한다([그림 1]).
[그림 1]의 표의 값을 그래프로 나타내어 두 식의 값이 같아지는 x값 근처에서 그래프가 서로에게 접근해가는 것을 시각적으로 확인할 수 있도록 한다([그림 2]).

	A	B	C	D
1	일차방정식 $2x-5=x-4$를 푸시오.			
2	x	$2x-5$	$x-4$	
3	−2	−9	−6	
4	−1	−7	−5	
5	0	−5	−4	
6	1	−3	−3	
7	2	−1	−2	
8	3	1	−1	
9	4	3	30	
10				

[그림 1]



[그림 2]

① 미지수와 동일한 개념이다.
② 변화 관계를 표현하는 동적 개념이다.
③ 이항(移項)을 이용한 일차방정식 풀이에 사용된 변수와 동일한 개념이다.
④ 근의 공식을 이용한 이차방정식 풀이에 사용된 변수와 동일한 개념이다.
⑤ 명제 ‘평면 위의 세 점 A, B, C에 대하여 $\overline{AB}+\overline{BC}\geq\overline{AC}$이다’에 사용된 변수 A, B, C와 동일한 개념이다.

14. 다음은 ‘평균’에 대한 이해 및 문제해결 능력을 평가하기 위한 문항과 채점기준이다. 이 기준에 따라 채점할 때, 아래에 제시된 답안의 평가 결과로 가장 적절한 것은? [2.5점] [2009 모의]

<문항>

어떤 네 수의 평균이 17이다. 그 네 수 가운데 세 수는 15, 18, 16이다. 나머지 한 수는 얼마인가? 풀이 과정을 모두 제시하고 구한 값이 답이 되는 이유를 설명하시오.

등급	채 점 기 준
A	• 평균의 의미를 이해하고 있다. • 사용한 전략이 적절하며 정확하게 사용되었다. • 옳은 답을 제시하였다.
B	• 평균의 의미를 이해하고 있다. • 사용한 전략은 적절하지만 전략 사용에서 사소한 실수나 생략이 나타났다. • 답은 옳을 수도 있고 틀릴 수도 있다.
C	• 평균의 의미를 부분적으로 이해하고 있다. • 전략의 사용이 부분적으로 불완전하거나 부정확하다. • 답은 옳을 수도 틀릴 수도 있다.
D	• 평균의 의미에 대한 이해가 초보적이다(예 : 자료의 합만 구한 경우). • 문제해결 과정에 분명히 드러난 전략이 없다. • 답은 옳을 수도 있고 틀릴 수도 있다.
E	• 평균의 의미를 전혀 파악하지 못했다. • 의미 없는 계산이 제시되어 있고, 설명이 제시되지 않았거나 설명이 단순히 문제를 재진술하고 있다. • 답은 옳을 수도 있고 틀릴 수도 있다.

<답안>

먼저 알고있는 세수를 다 더한 뒤
네번째 수를 찾기 위해
여러가지 수를 더해서 평균을 구해봤다.

15
16
18
49

49 + 17 = 56　　4)56 = 14, 4, 16, 16, 0

49 + 20 = 69　　4)69 = 17, 4, 29, 28, 1

답은 20 이다.

① A　② B　③ C
④ D　⑤ E

15. 실수의 집합 $\mathbb{R}$ 위에서 정의된 벡터공간 $\mathbb{R}^4$의 두 벡터 $\mathrm{a}=(a_1, a_2, a_3, a_4)$, $\mathrm{b}=(b_1, b_2, b_3, b_4)$에 대하여 내적 $\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}$를 $\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4$로 정의하자. 두 벡터 $(1, 0, 1, -1)$과 $(1, 2, 2, 0)$이 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값은? [1.5점] [2009 모의]

① $\frac{\sqrt{3}}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{4}$
④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

16. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 다음 중 $P^{-1}AP$가 대각행렬이 되도록 하는 행렬 P는? [2점] [2009 모의]

① $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

17. 절댓값이 10 이하인 두 정수 x, y가

$$32x+14y=(32, 14)$$

를 만족시킬 때, $|x|+|y|$의 값은? (단, (a, b)는 a와 b의 최대공약수이다.) [2점] [2009 모의]

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

18. 정수의 곱셈에서 법 m에 대한 3의 위수(order of 3 modulo m)를 ord_m3으로 나타낸다.

$$r=\mathrm{ord}_5 3$$
$$s=\mathrm{ord}_7 3$$
$$t=\mathrm{ord}_{35} 3$$

일 때, 세 수 r, s, t의 곱 rst의 값은? [2점] [2009 모의]

① 48 ② 144 ③ 288
④ 24^2 ⑤ 35^2

19. 유한군에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은? [2점] [2009 모의]

① 치환군 S_3은 위수(order)가 2인 세 개의 부분군을 갖는다.
② 위수가 6인 순환하지 않는 모든 유한군은 비가환군이다.
③ 위수가 소수 p인 군 G는 $p-1$개의 생성원(generator)을 갖는다.
④ 유한군 G가 자명하지 않은 진부분군(nontrivial proper subgroup)을 갖지 않으면 G는 가환군이다.
⑤ a를 항등원으로 갖는 군 $G=\{a, b, c, d\}$에 대하여 $b^2=c$이면 G는 순환군이 아니다.

20. 다음은 환과 그 환의 극대이데알(maximal ideal)을 순서쌍으로 나타낸 것이다. 잘못 짝지어진 것은? (단, $\langle a\rangle$는 a로 생성된 이데알을 나타낸다.) [2점] [2009 모의]

① $(\mathbb{Z}_5[x], \langle x^3+3x+2\rangle)$
② $(\mathbb{Z}_6, \langle 3\rangle)$
③ $(\mathbb{Q}[x], \langle x^5-4x+22\rangle)$
④ $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$
⑤ $(\mathbb{Z}[x], \langle 3x^3+x^2+x-2\rangle)$

21. 체 F위의 다항식환 $F[x]$에서 I를 영이 아닌 진이데알(nontrivial proper ideal) 이라고 하자. 다음 명제 중 나머지 네 개의 명제와 동치가 아닌 것은? [2점] [2009 모의]

① I의 영이 아닌 모든 원소는 기약다항식의 곱으로 표현할 수 있다.
② $I=\langle p(x)\rangle$인 기약다항식 $p(x)\in F[x]$가 존재한다.
③ $F[x]/I$의 영이 아닌 모든 원소는 곱셈에 대한 역원을 갖는다.
④ I를 포함하는 $F[x]$의 진이데알은 I 뿐이다.
⑤ $g(x)$, $h(x)\in F[x]$에 대하여 $g(x)h(x)\in I$이면 $g(x)\in I$ 이거나 $h(x)\in I$이다.

22. 다항식환 $\mathbb{Z}_2[x]$에서 기약인 다항식 x^3+x^2+1의 한 근 α를 포함한 단순확대체(simple extension field)를 E라고 하자. 확대체 E에서 다항식 x^3+x^2+1의 나머지 두 근을 β, γ라 할 때, 집합 $\{\alpha+\beta, \alpha+\gamma\}$와 같은 것은? [2.5점] [2009 모의]

① $\{0, 1+\alpha\}$ ② $\{1+\alpha, \alpha^2\}$ ③ $\{\alpha^2, \alpha+\alpha^2\}$
④ $\{1+\alpha^2, \alpha+\alpha^2\}$ ⑤ $\{\alpha^2, 1+\alpha+\alpha^2\}$

23. 좌표평면에서 세 점 $(0, 0)$, $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $(0, 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형과 그 내부를 R라고 할 때, 다음 중적분의 값은? [2점] [2009 모의]

$$\iint_R \sin\{(y-2x)^2\}\,dA$$

① $\frac{1}{4}(1-\cos 2)$ ② $\frac{1}{2}(1-\cos 1)$ ③ $\frac{1}{4}(1-\cos 1)$
④ $\frac{1}{2}(1-\sin 2)$ ⑤ $-\frac{1}{4}(1-\cos 1)$

24. 실수열(sequence of real numbers)의 수렴성에 관한 설명으로 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? [1.5점] [2009 모의]

<보기>

ㄱ. 수열 $\{|a_n|\}$이 0이 아닌 실수로 수렴하면 $\{a_n\}$은 수렴한다.
ㄴ. 수열 $\{a_n\}$이 0이 아닌 실수로 수렴하면 $\{(-1)^n a_n\}$은 수렴하지 않는다.
ㄷ. 부분수열 $\{a_{2n}\}$과 $\{a_{2n-1}\}$이 같은 실수로 수렴하면 수열 $\{a_n\}$은 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

25. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$에서 $\mathbb{R}$로의 함수에 대한 설명으로 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2점] [2009 모의]

<보기>

ㄱ. 모든 점에서 불연속인 함수가 존재한다.
ㄴ. 함수 f가 점 a에서 연속이면 열린구간 $(a-\delta, a+\delta)$에 속하는 모든 점에서 f가 연속이 되는 양수 δ가 존재한다.
ㄷ. 함수 f가 점 a에서 연속이고 $f(a)>0$이면 열린구간 $(a-\delta, a+\delta)$에 속하는 모든 점에서 f의 함숫값이 양이 되는 양수 δ가 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

26. $|x|<1$일 때 $\frac{x}{(1+x)^2}$의 매클로린 급수(Maclaurin series)는? [2점] [2009 모의] [도움말 : $|x|<1$일 때 $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$이다.]

① $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$ ② $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$
③ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!}x^n$ ④ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^n$
⑤ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2-n+2}{2}x^n$

27. 다음 극한값 A, B, C 사이의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은? [2점] [2009 모의]

$$A=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$$

$$B=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_2^x e^{\sqrt{1+t^2}}dt$$

$$C=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots+e^{\frac{n}{n}}\right)$$

① $A<B<C$ ② $A<C<B$ ③ $B<C<A$
④ $C<A<B$ ⑤ $C<B<A$

28. 다음 함수열 $\{f_n\}$ 중에서

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n(x)dx$$

가 성립하지 않는 것은? [2.5점] [2009 모의]

① $f_n(x)=nx(1-x^2)^n$ ② $f_n(x)=\dfrac{x^n}{n}$

③ $f_n(x)=x^n$ ④ $f_n(x)=\dfrac{\sin(nx^2)}{n}$

⑤ $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$

29. 복소함수에 대한 설명으로 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2점] [2009 모의평가]

<보기>

ㄱ. 함수 $f(z)=\mathrm{Log}(z+3)$은 영역 $D=\{z\mid z=x+iy,\ x>-2,\ y>-1\}$에서 해석적(analytic)이다. (단, $\mathrm{Log}(z+3)$은 $z+3=re^{i\theta}$라 할 때, $r>0$, $-\pi<\theta<\pi$인 범위에서 정의된 함수이다.)

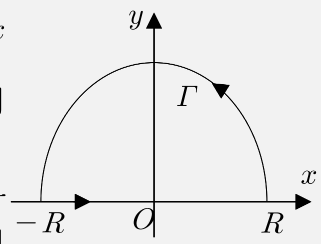
ㄴ. 모든 복소수 $z=x+iy$(x, y는 실수)에 대하여 $f'(z)=xy^3$인 정함수(entire function) f는 존재하지 않는다.

ㄷ. 복소평면에 어떤 단일폐곡선 C가 있다. 함수 $f(z)$가 곡선 C와 그 내부에서 연속이고 $\int_C f(z)dz=0$이라 하면, $f(z)$는 C의 내부에서 해석적이다.

① ㄴ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

30. 다음은 복소적분을 이용하여 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx$를 구하는 과정이다. (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [2점] [2009 모의평가]

함수 $f(z)=\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$이라 하면 $\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{x^2}{(x^2+1)^2}dx$는 복소평면에서 실축(real axis)을 따른 $f(z)$의 적분을 나타낸다.



$R>1$이라고 하자. 그림과 같이 $-R$에서 R까지의 선분과 상반평면(upper half plane)에서 반지름이 R인 반원 Γ로 구성된 폐곡선을 C라 하면

$$\int_C f(z)dz=\int_{-R}^{R}f(x)dx+\int_\Gamma f(z)dz$$

이다. 이때 $\int_C f(z)dz=\boxed{\text{(가)}}$ 이다.

또한 $\left|\int_\Gamma f(z)dz\right|\le\varphi(R)$이고 $\lim_{R\to\infty}\varphi(R)=0$을 만족시키는 함수 $\varphi(R)=\boxed{\text{(나)}}$ 가 존재한다.

그러므로 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}f(x)dx=\boxed{\text{(다)}}$ 이다.

	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi R^2}{(R^2-1)^2}$	$\frac{\pi}{3}$
②	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi R^3}{(R^2-1)^2}$	$\frac{\pi}{3}$
③	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi R^4}{(R^2-1)^2}$	$\frac{\pi}{2}$
④	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi R^3}{(R^2-1)^2}$	$\frac{\pi}{2}$
⑤	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi R^2}{(R^2-1)^2}$	$\frac{\pi}{2}$

31. 자연수 n에 대하여 집합

$$A_n=\left(-\infty,\,-\frac{1}{n}\right]\cup\left[\frac{1}{n},\,\infty\right)$$

일 때, 집합 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$의 여집합 $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)^c$은? [1.5점] [2009 모의]

① $\varnothing$ ② $\{0\}$ ③ $(-1,\,1)$
④ $[-1,\,1]$ ⑤ $\mathbb{R}$

32. 정수 전체의 집합 $\mathbb{Z}$에서 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$로의 함수 $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$가 다음과 같이 정의되어 있다.

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=2k,\ k\in\mathbb{Z}-\{0\}\\ 0, & x=0\\ -1, & x=2k-1,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$\mathbb{R}$에 보통위상(usual topology)이 주어져 있을 때, 함수 f가 연속이 되도록 하는 $\mathbb{Z}$의 최소의 위상을 $\mathfrak{I}$라고 하자. 위상 $\mathfrak{I}$의 원소가 아닌 것은? (단, 최소의 위상은 원소의 개수가 가장 작은 위상을 뜻한다.) [2점] [2009 모의]

① $\varnothing$
② $\{0\}$
③ $\mathbb{Z}-\{0\}$
④ $\{2k\mid k$는 자연수$\}$
⑤ $\{2k-1\mid k$는 정수$\}\cup\{0\}$

33. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$에

$$\{V \subset \mathbb{R} \mid V\text{의 여집합은 유한집합}\} \cup \{\varnothing\}$$

을 기저(basis, base)로 하는 위상이 주어져 있을 때, 연결집합을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2점] [2009 모의]

<보기>

ㄱ. $\{0, 1\}$
ㄴ. $(0, 1) \cup \{3\}$
ㄷ. $(-1, 0) \cup (0, 1)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

34. 위상공간 X의 부분집합 A의 내부(interior)와 경계(boundary)를 각각 Int(A), Bd(A)라고 할 때, 다음은 희수가 $\mathrm{Int}(A) = A - \mathrm{Bd}(A)$임을 증명한 답안이다.

(경우 1) A가 열린 집합(open set)일 때 : 집합 A의 외부(exterior)를 Ext(A)라 하면 $\mathrm{Int}(A) = A$이므로 $\mathrm{Bd}(A) \subset \mathrm{Ext}(A)$이다. 따라서 $A - \mathrm{Bd}(A) = A = \mathrm{Int}(A)$이다.
(경우 2) A가 닫힌 집합(closed set)일 때 : 이 경우 A의 폐포(closure) $\overline{A}$는 A와 같으므로 $A = \overline{A} = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Bd}(A)$이다. 그런데 일반적으로 집합 B, C에 대하여 $D = B \cup C$이면 $B = D - C$이므로 $\mathrm{Int}(A) = A - \mathrm{Bd}(A)$이다.

희수의 답안을 보고 옳게 말한 학생을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2.5점] [2009 모의]

<보기>

(현정) 희수가 맞게 풀었네.
(기태) 위와 같이 (경우 1)과 (경우 2)로 나누어 증명하는 것은 옳지 않아.
(수연) '$D = B \cup C$이면 $B = D - C$'는 일반적으로 성립하지 않아.
(영호) $\mathrm{Int}(A) = A$인 경우는 $\mathrm{Bd}(A) \subset \mathrm{Ext}(A)$이 아니라 $\mathrm{Bd}(A) = \varnothing$이야.

① 현정 ② 기태, 수연 ③ 기태, 영호
④ 수연, 영호 ⑤ 기태, 수연, 영호

35. 다음 곡선 $\alpha(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$에 대하여 단위속력을 갖는 재매개곡선(unit-speed reparametrization)을 구하는 과정이다. (가), (나)에 알맞은 것은? (단, $\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$, $\sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$이다.) [2점] [2009 모의]

주어진 곡선 α의 속력 $\|\alpha'(t)\|$를 구하면

$$\|\alpha'(t)\| = \boxed{\text{(가)}}$$

이므로
곡선 α의 호길이 함수(arc-length function) $s(t)$는

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\|\, du = \sqrt{2}\sinh t$$

따라서 호길이 함수의 역함수는

$$t = t(s) = \sinh^{-1}\frac{s}{\sqrt{2}}$$

이므로
곡선 α에 대하여 단위속력을 갖는 재매개곡선 $\beta(s)$는

$$\beta(s) = \alpha(t(s)) = \left(\sqrt{1 + \frac{s^2}{2}},\ \boxed{\text{(나)}},\ \sinh^{-1}\frac{s}{\sqrt{2}}\right).$$

	(가)	(나)
①	$\sqrt{2}\cosh t$	$\sqrt{2}s$
②	$\sqrt{2}\cosh t$	$\dfrac{s}{\sqrt{2}}$
③	$\sqrt{2}\lvert\sinh t\rvert$	$\sqrt{2}s$
④	$\sqrt{2}\lvert\sinh t\rvert$	$\dfrac{s}{\sqrt{2}}$
⑤	$\sinh\dfrac{\lvert t\rvert}{\sqrt{2}}$	$\cosh\dfrac{s}{\sqrt{2}}$

36. 정칙곡면(regular surface) M의 점 p에서의 주곡률방향(principal direction)이 u_1, u_2이고 이에 대응하는 주곡률(principal curvature)이 각각 1과 $\dfrac{1}{3}$이다. 점 p에서의 단위접벡터(unit tangent vector) v가 u_1과 이루는 각이 $\dfrac{\pi}{3}$일 때, v방향의 법곡률(normal curvature)은? [2점] [2009 모의]

① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{1}{4}$
④ $\dfrac{1}{5}$ ⑤ $\dfrac{1}{6}$

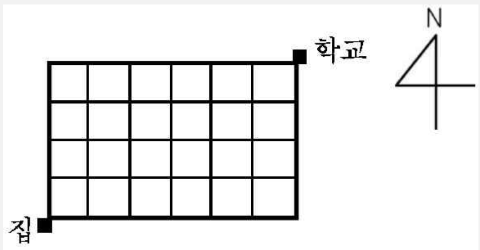
37. 두 팀이 줄다리기를 하는데 세 번 먼저 이기는 팀이 우승한다. 각 시합에서 두 팀이 이길 확률은 각각 $\dfrac{1}{2}$이고, 각 시합은 독립적으로 진행된다고 가정한다. 우승팀이 결정될 때까지의 시합 횟수의 기댓값과 가장 가까운 자연수는? [2점] [2009 모의평가]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

38. 어떤 TV 프로그램의 시청률을 조사하기 위하여 임의표본으로 n가구를 선택하려고 한다. 과거의 경험으로 볼 때 이와 비슷한 프로그램의 시청률은 20%를 넘지 않는다는 것을 알고 있다. 95% 신뢰도로 표본조사에서 얻은 표본비율과 실제 시청률의 차이가 5% 이하가 되도록 하는 최소 표본크기 n이 속하는 구간은? (단, $33^2 = 1089$이고, 39.2^2은 1537로 계산한다. 또 $\Phi(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$일 때, $\Phi(1.65) = 0.95$, $\Phi(1.96) = 0.975$이다.) [2점] [2009 모의평가]

① $[100, 200)$ ② $[200, 300)$ ③ $[300, 400)$
④ $[400, 500)$ ⑤ $[500, 600)$

39. 그림은 집과 학교 사이의 도로를 나타낸 것이다. 굵은 선은 대로(大路)를, 가는 선은 소로(小路)를 나타낸다. 직선 도로를 따라갈 때, 한 교차로와 다음 교차로 사이를 구간이라 하자. 집에서 출발하여 각 교차로에서 동쪽 또는 북쪽 방향만을 택하여 학교까지 갈 때, 대로를 두 구간만 지나는 경로의 개수는? [2점] [2009 모의]



① 30 ② 32 ③ 60
④ 120 ⑤ 210

40. 다섯 마리의 물고기 A, B, C, D, E가 있다. A는 B를, B는 C를, C는 D를, D는 E와 A를 잡아먹는다. 잡아먹히는 물고기가 생기지 않도록 다섯 마리의 물고기를 서로 다른 모양의 어항 4개에 넣는 방법의 수는? (단, 빈 어항이 남아 있어도 된다.) [2점] [2009 모의]

① 36 ② 108 ③ 144
④ 216 ⑤ 252

1. 학생들이 증명에 대한 생각을 이해하는 것은 증명 지도 방법을 개선하는 데 도움이 된다. 다음을 읽고 물음에 답하시오. [25점] [2009모의 2차, 1교시]

(가) **증명에 대한 학생들의 대화**

학생 갑: 수업 시간에 선생님의 증명을 보면 간단명료하고, 심지어 감탄까지 나와. 그런데 나 혼자 증명을 하려고 하면 도대체 어떻게 해야 할지 모르겠어.

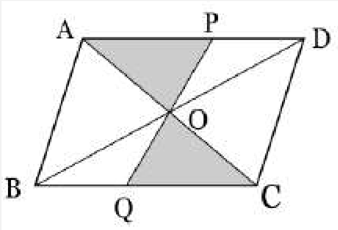
학생 을: 삼각형과 관련된 증명은 항상 합동인 삼각형만 찾으면 돼.
그래서 나는 크기와 모양이 비슷한 삼각형을 먼저 찾아보곤 해.

학생 병: 평행사변형의 대변의 길이가 같다는 것을 초등학교에서 이미 배웠는데, 중학교에서 그것을 왜 증명하는지 이해가 안 돼.

학생 정: 더 이해가 안 되는 것은, 선생님은 항상 한 삼각형에 대해서만 증명을 하고는 모든 삼각형에 대해서 증명을 했다고 하시는 거야!

(나) **중학교 2학년 학습 내용**

평행사변형 ABCD의 두 대각선의 교점 O를 지나는 한 직선이 $\overline{AD}$, $\overline{BC}$와 만나는 점을 각각 P, Q라 하면 $\overline{PO}=\overline{QO}$이다.



1-1. (가)에 등장하는 학생들의 증명에 대한 생각과 그 원인을 각각 분석하고, 그 결과를 근거로 증명 지도 개선 방안에 관하여 논하시오. [12점]

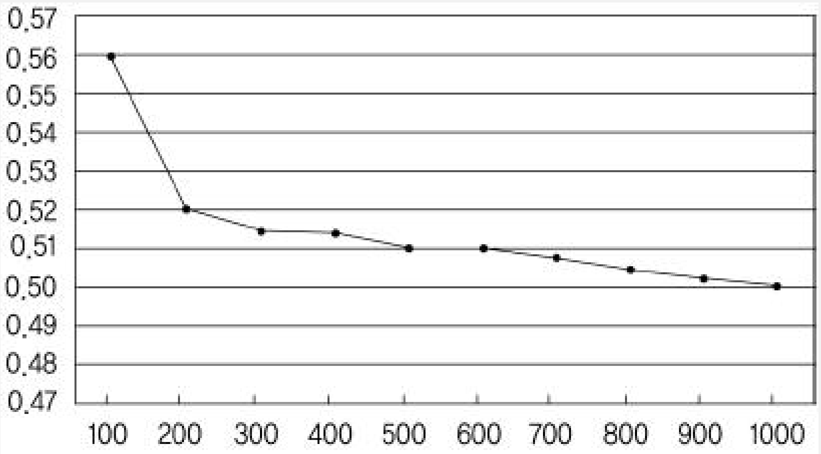
1-2. 문항 1-1에서 논한 증명 지도 개선 방안을 근거로 (나)의 학습 내용에 대한 지도 방법을 제시하시오. [13점]

2. 다음을 읽고 물음에 답하시오. [20점] [2009모의 2차, 1교시]

(가) **김 교사가 지도한 중학교 2학년 '확률의 뜻'에 대한 수업 내용 요약**

다음은 한 개의 동전을 여러 번 반복하여 던졌을 때, 앞면이 나온 횟수를 조사하고 그 상대도수를 구하여 표와 그래프로 나타낸 것이다.

던진 횟수	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
앞면이 나온 횟수	56	104	154	205	255	306	355	403	452	500
앞면이 나온 상대도수	0.5600	0.5200	0.5133	0.5125	0.5100	0.5100	0.5071	0.5038	0.5022	0.5000



동전을 던진 횟수가 많아질수록 상대도수는 일정한 값 0.5에 가까워진다.

같은 조건 아래에서 실험이나 관찰을 여러 번 되풀이할 때, 어떤 사건 A가 일어나는 상대도수가 일정한 값에 가까워지면 이 일정한 값을 사건 A가 일어날 확률이라고 한다.

그러나 실험이나 관찰을 여러 번 하지 않더라도 다음과 같이 확률을 생각할 수 있다.

일반적으로 어떤 시행에서 일어날 수 있는 모든 경우의 수가 n이고, 각각의 경우가 일어날 가능성이 같다고 할 때, 어떤 사건 A가 일어날 수 있는 경우의 수가 a이면 사건 A가 일어날 확률 p는 다음과 같다.

$$p = \frac{(\text{사건 } A\text{가 일어날 경우의 수})}{(\text{모든 경우의 수})} = \frac{a}{n}$$

(나) **확률에 대한 중학교 2학년 학생 갑의 수학 일기**

오늘은 수학 시간에 확률에 관하여 학습하였다.

주사위를 던졌을 때, 나올 수 있는 경우는 1, 2, 3, 4, 5, 6으로 모두 6가지이다. 1의 눈이 나올 수도 있고 나오지 않을 수도 있기 때문에 1의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다. 그러고 보니 모든 확률은 $\frac{1}{2}$이다. 왜냐하면 어떤 사건이 일어나는 경우와 일어나지 않는 경우로 항상 생각할 수 있기 때문이다. 그럼 오늘 우리나라에서 지진이 일어날 수도 있고 지진이 일어나지 않을 수도 있기 때문에 지진이 발생할 확률은 $\frac{1}{2}$이 된다. 동전을 던져서 앞면이 나올 확률이 $\frac{1}{2}$인데, 그러면 지진 발생 확률과 동전을 던졌을 때 앞면이 나올 확률이 같다는 말인가? 아휴, 머리가 아프다. 내일 선생님께 여쭈어보아야겠다!

2-1. 중학교 2학년에서 (가)와 같이 확률 개념을 직관적으로 도입할 경우, 학생들은 확률에 대한 오개념을 가질 수 있다. (가)에서 확률에 대한 오개념을 일으킬 수 있는 부분 2가지를 찾아 쓰고, 관련된 오개념 2가지를 설명하시오. 또, '큰수의 법칙'을 쓰고, 이를 이용하여 수학적 확률과 통계적 확률 사이의 관계를 설명하시오. [10점]

2-2. (나)와 같이 생각하고 있는 학생 갑의 확률에 대한 오개념을 분석하고, 그와 같은 오개념을 갖고 있는 학생에게 정육면체와 직육면체 주사위를 사용하여 확률 개념을 지도할 수 있는 방안을 제시하시오. [10점]

3. 유리수체를 $\mathbb{Q}$라 할 때,

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2},\ \sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \mid a,\, b,\, c,\, d \in \mathbb{Q}\}$$

는 $\mathbb{Q}$의 유한확대체(finite extension field)이다. $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$일 때, 물음에 답하시오. [2009 모의 2차, 2교시]

> (가) $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$이 체 $\mathbb{Q}$위에서의 벡터공간이 되도록 벡터합과 스칼라곱을 정의할 수 있다.
>
> (나) 임의의 $\beta \in \mathbb{Q}(\sqrt{2},\ \sqrt{3})$에 대하여 다음과 같이 정의된 함수 T는 선형변환(linear transformation)이다.
>
> $$T\ :\ \mathbb{Q}(\sqrt{2},\ \sqrt{3}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2},\ \sqrt{3}),\ \ T(\beta) = \alpha\beta$$
>
> (다) $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\ \sqrt{3})$에 속하는 임의의 원소 $\beta = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$을 $[\beta] = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$
>
> 와 같이 나타내기로 하자.
> 4×4 행렬 A를 $A = \left([T(1)]\,[T(\sqrt{2})]\,[T(\sqrt{3})]\,[T(\sqrt{6})]\right)$이라 하면,
> $[T(\beta)] = A[\beta]$로 나타낼 수 있다.

3-1. 위에 제시된 (가)와 (나)를 증명하고, (다)의 행렬 A를 구하시오. 또, 선형변환 T의 고윳값(eigenvalue)과 행렬 A의 고윳값이 같다는 사실을 이용하여 $f(\alpha) = 0$을 만족시키는 영이 아닌 다항식 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$를 구한 후, 이로부터 $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\ \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$임을 보이시오. [14점]

3-2. $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$을 $\alpha = 1 + \sqrt{2}$로 바꾸어, 문항 (1)과 같은 방법으로 $f(\alpha) = 0$을 만족시키는 영이 아닌 다항식 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$를 구하고, 이를 이용하여 $\mathbb{Q}(1 + \sqrt{2})$가 $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\ \sqrt{3})$의 진부분체(proper subfield)임을 보이시오. 또, 지금까지의 결과를 종합하여 유한확대체는 대수적확대체(algebraic extension field)임을 설명하시오. [6점]

4. <정의 1>은 고등학교 『수학 Ⅰ』에서 유리수 지수와 수열의 극한을 이용하여 무리수 지수를 예시적으로 정의한 것이고, <정의 2>는 실수의 완비성(completeness)을 이용하여 실수 지수를 정의한 것이다. 유리수의 조밀성과 유리수 지수에 관한 성질이 성립함을 가정하고, 물음에 답하시오. [20점] [2009모의 2차, 2교시]

<정의 1>

무리수 $\sqrt{2}=1.41421356\cdots$에 한없이 가까워지는 수의 나열 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, $\cdots$에 대하여 다음 수들은 어떤 일정한 수에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.

$$3^1,\ 3^{1.4},\ 3^{1.41},\ 3^{1.414},\ 3^{1.4142},\ 3^{1.41421},\ \cdots\ (*)$$

이때, 이 수들이 가까워지는 일정한 수를 $3^{\sqrt{2}}$로 정의한다.

<정의 2>

두 실수 $a(a>1)$와 x에 대하여 a^x을 다음과 같이 정의한다.

$$a^x=\sup\{a^r \mid r<x,\ r\text{은 유리수}\}$$

(단, $\sup S$는 집합 S의 상한(supremum)이다.)

4-1. 위로 유계인 단조 증가(monotone increasing) 수열은 수렴함을 증명하고, 이 사실을 이용하여 <정의 1>의 수열 (*)이 수렴함을 밝히시오. 또, 다음 (가)와 (나)를 밝히고, <정의 2>에 따라 $a>1$일 때 두 실수 x와 y에 대하여 $a^xa^y=a^{x+y}$임을 보이시오. [14점]

(가) <정의 2>에서 모든 실수 x에 대하여 a^x이 유일하게 결정된다.
(나) 유리수 t와 두 실수 x와 y에 대하여 $t<x+y$이면,
두 유리수 r와 s가 존재하여 $r<x$, $s<y$, $t<r+s$가 성립한다.

4-2. 두 실수 x와 y에 대하여 $e^{x+iy}=e^x(\cos x+i\sin y)$로 정의한다. 두 복소수 $a(a\neq 0)$와 b에 대하여 $a^b=e^{b\log a}$로 정의할 때, b가 정수, 유리수, 무리수, 허수인 경우로 나누어, a^b이 나타내는 값의 개수에 대하여 간단히 쓰시오. 그리고 로그의 한 분지에서 $a^ba^c=a^{b+c}$가 성립함을 보이시오. [6점]

5. 구 또는 원환면(torus) 등의 회전체는 여러 가지 대칭성을 지녀서 아름답게 보인다. 그러나 평면으로 둘러싸인 다면체와 달리 회전체의 속성을 파악하기는 쉽지 않다. 회전체는 얼마나 굽어져 있을까? 회전체의 위상적 성질은 어떻게 결정될까? 가능한 모양은 무엇일까? 우리는 이런 의문을 다음과 같이 수학적으로 다룰 수 있다.

열린구간 (a, b)에서 정칙곡선(regular curve)인 $\alpha(u)=(g(u), h(u), 0)$을 회전시킨 회전면 M에 대하여 다음을 읽고 물음에 답하시오.
(단, $a \le u \le b$이고, $g(u)$와 $h(u)$는 도함수가 연속인 함수이며 $h(u) \ge 0$이다.) [2009 모의 2차, 2교시]

회전면 M의 좌표조각(coordinate patch)이 $\mathrm{x}(u, v)=(g(u), h(u)\cos v, h(u)\sin v)$라 할 때, (공식 1) E, F, G는 다음 제1 기본형식의 계수이다. $$Edu^2+2Fdudv+Gdv^2=(\mathrm{x}_u du+\mathrm{x}_v dv)\cdot(\mathrm{x}_u du+\mathrm{x}_v dv)$$ (공식 2) 정칙곡면(regular surface)인 회전면의 가우스 곡률 K는 다음과 같이 계산할 수 있다. $$K=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u+\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v\right\}$$ (공식 3) $\int\int_M KdA=\int_0^{2\pi}\int_a^b K\lVert\mathrm{x}_u\times\mathrm{x}_v\rVert\,du\,dv$

5-1. 위에 주어진 공식을 이용하여 다음 전곡률(total curvature)을 계산하시오. [6점]

$$\int\int_M KdA$$

5-2. 회전면 M의 회전축을 구하고, M이 긴밀(compact) 정칙곡면이 되기 위한 h 및 도함수 h', g'의 조건을 찾으시오. 이때, h의 조건에 따라 회전면 M이 어떤 곡면과 위상동형인지 결정하고, 문항 (1)의 결과로 구한 전곡률로부터 오일러 표수(Euler characteristic)를 구하시오. [9점]

1. 2007년 개정 수학과 교육과정의 내용에 대한 설명으로 옳지 않은 것은? [2점] [2009]

① 고등학교 1학년의 학습 내용이었던 ‘두 원의 위치관계’를 중학교 1학년으로 이동하였다.
② 중학교 3학년에 있던 ‘무리수의 도입은 무한소수를 소재로 한다’라는 학습-지도상의 유의점을 삭제하였다.
③ 고등학교 1학년의 수와 연산 영역에 ‘조건’, ‘진리집합’, ‘모든’, ‘어떤’이라는 용어를 도입하였다.
④ ‘적분과 통계’ 과목에 ‘중복조합’ 및 ‘표본비율과 모비율의 관계’에 대한 내용을 도입하였다.
⑤ ‘기하와 벡터’ 과목에 ‘일차변환과 행렬’ 및 ‘복소수의 극형식’에 대한 내용을 도입하였다.

2. 다음은 학교수학에 관한 두 가지 입장을 나타낸 것이다. 이에 대한 설명으로 적절하지 않은 것은? [2점] [2009]

(가) 학생들이 수학을 통하여 현상을 이해하는 안목을 기를 수 있게 하기 위해서는 학생들에게 수학의 구조를 가르쳐야 한다. 이때, 수학의 구조를 가르친다는 것은 학생들이 수학자와 본질적으로 동일한 일을 하게 하는 것으로, 어떤 수준의 학생에게도 그 본질은 적절한 형태로 제공될 수 있다.
(나) 수학의 구조를 가르친다는 명분으로 완성된 형식적 수학을 구체적으로 번역하여 학생들에게 제공하려는 하향식 구성은 반교수학적인 전도이며, 학생들 스스로 발전적인 조작의 가능성을 갖지 못하는 지식을 제공하는 데 그칠 우려가 있다.

① ‘새수학(New Math)’ 운동은 (가)와 같은 관점에서 출발하였다.
② (가)에서 어떤 수준의 학생에게도 수학자가 하는 일과 본질적으로 같은 것을 제공할 수 있다는 생각은 브루너(J. Bruner)의 EIS 이론으로 뒷받침되었다.
③ (가)의 입장을 따른다면 수학사의 대역적인 학습 과정을 단축된 형태로 재현하는 방식의 지도가 바람직하다.
④ (나)의 입장에서 (가)에 대한 대안은 현상을 정리, 조직하는 수단으로서 수학을 학습하게 해야 한다는 것이다.
⑤ (나)의 입장을 따른다면 알고리즘, 사고패턴 및 문제 해결 전략 등의 수학적 사고를 재발명에 의해 학습하는 것이 바람직하다.

3. 다음은 함수 개념을 도입할 때 사용할 수 있는 예이다. 이에 대한 설명으로 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2점] [2009]

(가) 매분 2 km의 속력으로 직선 운동하는 기차가 P 지점을 지난지 x분 후에 P 지점으로 $y$km 떨어진 지점을 지난다. x, y 사이의 관계식을 표로 나타내어라.
(나) 넓이가 12cm^2인 직사각형의 가로의 길이가 $x$cm이면 세로의 길이는 $y$cm이다. x, y 사이의 관계를 식으로 나타내어라.
(다) 다음 그림에서 각 나라와 그 나라의 수도를 연결하여라.

<보기>

ㄱ. 역사 발생적 원리에 따라 함수 개념을 지도한다면 (가)와 (나)로부터 출발하여 (다)로 나아가는 것이 바람직하다.
ㄴ. 집합론을 토대로 한 현대 수학에서는 함수 개념을 (가)와 (나)가 아니라 (다)와 같은 맥락으로 설명한다.
ㄷ. 2007년 개정 수학과 교육과정에서는 비례 관계를 초등학교에서 지도하게 하고, 중학교에서는 (다)와 같은 맥락만으로 함수 개념을 도입하게 하였다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

4. 다음은 대수 학습에서 어려움을 겪고 있는 중학생의 사례이다. 이에 대한 설명으로 적절한 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2점] [2009]

(가영) $a=3,\ b=4$일 때 $2ab$의 값을 234라고 썼다.
(나현) $S=\{1,2,3\}$일 때 집합 $\{a+b \mid a, b \in S\}$를 $\{3,4,5\}$라고 썼다.
(다은) a는 양수이고 $-a$는 음수라고 생각한다.

<보기>

ㄱ. 스켐프(R. Skemp)에 따르면 가영이는 수와 연산에 관한 스키마를 가지고 있지 않다.
ㄴ. 나현이의 오류는 a와 b가 서로 다른 수를 나타낸다고 하는 문자에 대한 잘못된 이해로 해석될 수 있다.
ㄷ. 다은이는 문자가 나타내는 대상을 제한된 범위에서만 생각하는 것으로 볼 수 있다.
ㄹ. 갈등상황을 제공하는 것은 나현이와 다은이가 산술적 사고에서 대수적 사고로 이행하는 데 방해가 된다.

① ㄱ, ㄹ ② ㄴ, ㄷ ③ ㄱ, ㄴ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ, ㄹ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ ,ㄹ

5. 박 교사는 확률과 통계 단원에서 조합의 개념을 도입하는 수업을 한 후 다음과 같이 수업 일지를 썼다.

도입	5명씩 이루어진 각 모둠에서 2명을 대표로 뽑는 방법이 몇 가지인지 모둠별로 알아보라고 하였는데, A 모둠에서는 가위바위보를 하자, 제비뽑기를 하자는 등 의견이 분분하였고, B 모둠에서는 각 경우를 수형도로 나타낼 것인지, 표로 나타낼 것인지 결정하느라 많은 시간을 소비하였다.
전개	도입에서 너무나 많은 시간을 소비하여 ${}_nC_r$의 정의를 곧바로 제시한 후……. (이하 생략)

도입부에서 나타나는 교수학적 현상과 관련된 설명으로 적절하지 않은 것은? [2점] [2009]

① 이러한 현상은 수학적 지식의 개인화, 배경화 과정을 간과함으로써 일어난다.
② 이와 같은 현상을 메타-인지적 이동(meta-cognitive shift)이라고 부른다.
③ 문제해결 지도에서 발견술 자체가 지도 목적이 되는 것도 유사한 현상으로 이해할 수 있다.
④ 학생들의 활동을 강조하는 수업에서는 활동의 규약을 많이 만들수록 이와 같은 문제가 발생하기 쉽다.
⑤ 도입부와 같은 활동 없이 곧바로 전개 부분부터 수업이 시작된다면 형식적 고착이 일어날 가능성이 높다.

6. 다음은 수학에서 정의를 확장하거나 정리를 일반화할 때 고려되는 어떤 원리를 설명한 것이다.

기존의 수 체계에서 인정된 성질이 유지되도록 수 체계를 확장하고 연산과 관계를 확장하듯이, 어떤 대수적 또는 기하적 구조를 확장할 때에는 기존의 체계가 가지고 있는 기본적인 성질이 유지되도록 하면서 그 구조를 확장해야 한다.

학교 수학에서 설명되는 다음 사례 중 위의 원리와 가장 거리가 먼 것은? [2.5점] [2009]

① 중학교에서 한 점으로부터 같은 거리에 있는 점들로 정의되었던 원이 고등학교에서는 좌표평면 위에서 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$으로 정의된다.
② 중학교에서 $a^n=a\times a\times\cdots\times a$로 자연수 n에 대해서만 정의되었던 지수가 고등학교에서는 지수법칙 $a^{m+n}=a^m a^n$에 의해 정수 지수도 정의된다.
③ 중학교에서 직각삼각형의 변의 길이의 비로 정의되었던 삼각비가 고등학교에서는 좌표를 이용하여 둔각이나 음의 각에 대해서도 정의되는 삼각함수로 설명된다.
④ 음수 -2와 -3이 각각 $(-2)+2=0$과 $(-3)+3=0$을 뜻하는 자연수의 덧셈에 대한 역원으로 정의되면, 교환법칙과 결합법칙에 의해 $(-2)+(-3)$은 $-(2+3)$을 의미하도록 정의하는 것이 자연스럽다.
⑤ 음수가 도입되기 전에는 $x+y=3$의 그래프를 1사분면의 사분면으로만 그릴 수 있지만, 음수가 도입되고 나면 그 그래프를 자연스럽게 직선으로 그릴 수 있다.

7. 연결주의(connectionism)에 입각한 손다이크(E. L. Thorndike)의 관점에서 수학 학습-지도를 설명한 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2점] [2009]

<보기>

ㄱ. 계산이 부정확하다는 것은 관련 본드(bond)가 약하다는 것을 의미한다.
ㄴ. 계산의 기초적인 학습은 연역적인 설명보다는 귀납적인 확인을 통해 이루어지는 것이 효과적이다.
ㄷ. 추론적 사고는 연습의 법칙으로 설명될 수 없으므로 훈련을 통하여 얻을 수 없다.
ㄹ. 수 개념은 양의 측정 활동을 통해 구성되므로 사칙연산도 지속적으로 측정 활동과 관련지어 다루는 것이 바람직하다.

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄴ, ㄹ
④ ㄱ, ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄷ, ㄹ

8. 어떤 수학적 개념이 구성되기 위해서는 그림과 같이 구체적인 ‘행동’이 정신적인 ‘과정’이 되고, 그 ‘과정’이 하나의 ‘대상’으로 인식된 후 구조화되어 ‘스키마’가 되는 단계를 거치게 된다.

행동 Action ⇨ 과정 Process ⇨ 대상 Object ⇨ 스키마 Schema

⇑
[단계 A]

다음 사례 중 그림에서 지시하는 [단계 A]와 가장 거리가 먼 것은? [2점] [2009]

① 자연수를 끝없이 셀 수 있다는 가능적 무한(potential infinity)의 개념에서 완결된 무한 즉, 현실적 무한(actual infinity)을 인식하는데 이르게 되었다.
② 점화식 $a_{n+1}=2a_n+1$로 정의된 수열의 첫 번째 항이 1로 주어진 것으로부터 그 다음의 3개 항이 3, 7, 15임을 알게 되었다.
③ 삼각형과 삼각형이 아닌 것을 구별하던 아동이 삼각형의 성질에 관심을 가지게 되었다.
④ ‘2+3=5’를 ‘2와 3을 더한 결과가 5’라고 생각하는 것을 넘어서 ‘2+3’과 ‘5’가 동등한 의미를 가지는 것으로 생각하게 되었다.
⑤ 실수의 집합에서 두 실수를 대응시키는 함수를 다루다가 함수를 원소로 하는 새로운 집합을 생각하게 되었다.

9. 다음은 문제해결에 어려움을 겪는 학생들의 이야기이다. 이에 대한 설명으로 적절하지 않은 것은? [2점] [2009]

(가) 나는 개념과 원리를 제대로 이해하고 있는 것 같은데, 막상 문제를 풀 때는 아무 생각도 안 나고 내가 아는 어떤 내용을 적용해야 할지 모르겠어.
(나) 나는 문제를 풀 때, 전에 풀었던 비슷한 문제가 생각나지 않으면 어떻게 그 문제에 접근해야 할지 모르겠어.
(다) 나는 3분가량 지나도 문제가 풀리지 않으면 그 문제를 포기하게 돼.
(라) 나는 수업 시간에 풀어보았던 문제인데도 약간만 수가 변형되어 나오면 못 풀겠다니까.
(마) 나는 계산하는 데 시간이 너무 많이 걸려서 문제를 끝까지 못 푸는 경우가 많다는 게 문제야.

① 숀펠트(A. H. Shoenfeld)에 따르면 (가)와 같은 학생은 문제 해결과 관련된 요인 중 ‘통제력(control)’이 부족하다고 할 수 있다.
② (나)와 같은 학생은 문제해결에 필요한 알고리즘이나 법칙에 대한 지식이 부족하다.
③ (다)의 사례는 수학이나 문제해결에 대한 가치관이나 선입견이 문제해결에 영향을 미친다는 것을 보여 준다.
④ (라)와 같은 학생에게는 문제 제기(problem posing) 활동이 유용할 수 있다.
⑤ (마)와 같은 학생에게 문제해결의 경험을 제공하기 위해서 계산기를 보조 수단으로 활용할 수 있다.

10. 다음 수업 상황에 포함되어 있는 사고 방법을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2점] [2009]

교 사 : 오늘은 수학자들이 오랫동안 도전하고 있는 문제를 소개하려 합니다. 다음을 보고, 추측할 수 있는 사실을 말해 봅시다.

6=3+3	8=3+5	10=3+7	20=3+17
36=5+31	48=11+37	66=19+47	72=31+41

학생A : 좌변에 있는 수는 모두 짝수입니다.
교 사 : 좋아요. 그럼 우변에 있는 수들은요?
학생B : 짝수는 모두 홀수 두 개의 합으로 나타낼 수 있다는 건가요?
학생C : 그건 너무 당연하지 않아요? 그 정도가 아닌 것 같은데요.
학생A : 아하, 우변에 있는 수들은 모두 소수이군요!
학생B : 짝수는 모두 두 소수의 합으로 나타낼 수 있다는 겁니까?
학생A : 그런데 2의 경우는 짝수이지만 두 소수의 합으로 나타낼 수는 없어요.
학생C : 그렇다면 2보다 큰 짝수는 모두 두 소수의 합으로 나타낼 수 있다......?
교 사 : 그래요. 학생C가 말한 것을 ‘골드바흐(Goldbach)의 추측’이라고 하는데, 아직까지 아무도 증명하지는 못했어요.

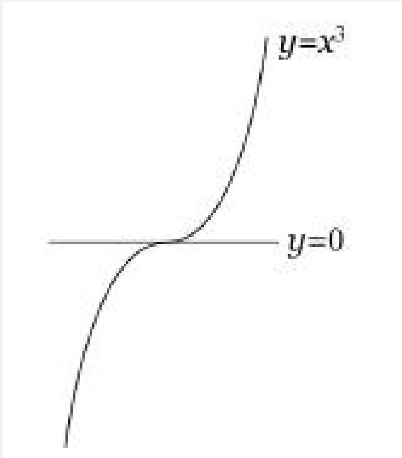
<보기>

ㄱ. 유비추론 ㄴ. 귀납 추론 ㄷ. 분석법 ㄹ. 일반화 ㅁ. 반례 들기

① ㄱ, ㄴ, ㄷ ② ㄱ, ㄴ, ㅁ ③ ㄴ, ㄷ, ㄹ
④ ㄴ, ㄹ, ㅁ ⑤ ㄷ, ㄹ, ㅁ

11. 다음은 수학 학습 과정에서 학생들이 갖는 오개념의 사례이다.

· 아무것도 없는 것을 5명에게 나누어준다는 것은 불가능하므로 0÷5는 불능이다.
· 순환소수 0.999⋯는 1이 아니라 1에 한없이 가까워지는 수이다.
· 곡선의 접선은 그 곡선을 스치고 지나가야 하므로 다음 그림의 직선은 접선이 아니다.



위와 같은 유형의 오개념과 관련한 설명으로 적절한 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2점] [2009]

<보기>

ㄱ. 일상적인 언어, 과도한 일반화, 은유 등의 영향으로 이러한 오개념이 발생한다.
ㄴ. 이러한 오개념을 극복하는 학습으로부터 형성된 신념을 바탕으로 학생들은 이차 직관을 형성한다.
ㄷ. 이러한 오개념을 극복하기 위해서는 구체적인 활동을 통해 직관적으로 지도하는 교수학적 노력이 필요하다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

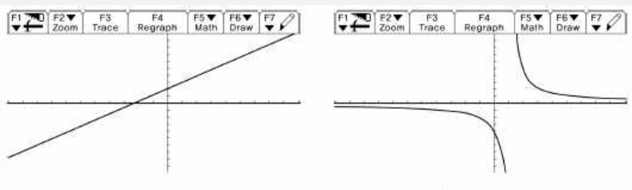
12. 다음 수업 상황에 대한 설명으로 가장 적절한 것은? [2점] [2009]

교 사: 이번 시간에는 유리함수 $f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x-1}$의 그래프를 그려보겠습니다. 먼저 이 그래프의 특징에 대해 알 수 있는 것을 자유롭게 이야기해 봅시다.

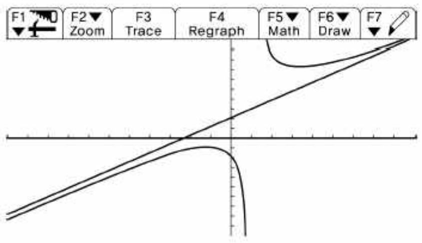
학 생A: $f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x-1}=x+2+\dfrac{4}{x-1}$이므로 이 그래프는 직선 $y=x+2$와 쌍곡선 $y=\dfrac{4}{x-1}$를 각각 그린 후 y값을 더해서 그릴 수 있지 않을까요?

학 생B: $f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x-1}=x+2+\dfrac{4}{x-1}$이므로 이 그래프는 $x\to\pm\infty$일 때 직선 $y=x+2$와 비슷해질 것 같습니다.

교 사: 그러면 그래프 계산기로 직선 $y=x+2$와 쌍곡선 $y=\dfrac{4}{x-1}$를 각각 그린 후 두 함수를 더해 보면서 여러분이 생각했던 것을 확인해 봅시다.



$y=x+2$의 그래프 $y=\dfrac{4}{x-1}$의 그래프



$y=\dfrac{x^2+x+2}{x-1}$의 그래프

교 사: 다음 시간에는 도함수를 이용하여 이 그래프의 개형을 그려 보겠습니다.

① 한 점의 근방에서 그래프의 변화를 관찰하는 국소적 접근과 함수의 정의역 전체에서 그래프를 해석하는 전체적 접근을 통합하여 함수의 그래프를 지도하고 있다.
② 그래프 표현과 대수식 표현 사이의 번역 활동을 통하여 이와 유사한 문제의 해결에서 유리함수의 개념을 유연하게 활용할 수 있도록 지도하고 있다.
③ 그래프 계산기를 사용하여 직선, 쌍곡선을 비롯한 여러 가지 그래프를 구체적으로 그려보고 있으므로 이 수업은 '수학적 다양성의 원리'를 적용한 것이다.
④ 대수식의 시각화를 통하여 유리함수와 관련된 추측이 참임을 확인하는 경험적 정당화 활동을 하고 있다.
⑤ 그래프 표현과 대수식 표현 사이의 연계성을 통하여 학생들에게 대수식 조작의 의미를 반성하도록 하고 있다.

13. 다음은 김 교사가 삼각함수 단원을 수업한 후 수행평가를 위하여 만든 과제이다. 이 과제로 평가할 수 있는 항목으로 가장 거리가 먼 것은? [2점] [2009]

1. 우리 도시의 지난 2년간 월평균 온도를 조사하시오.
2. x축을 월, y축을 월평균 온도로 하고, 이 자료를 순서쌍 (x, y)로 하여 좌표평면 위에 나타내시오.
3. 이 점들이 나타낼 수 있는 적당한 삼각함수를 찾는 과정을 자세히 기록하시오.
4. 내년 우리 도시의 월별 온도를 예측하시오.

① 주기함수에 대한 이해를 바탕으로 하여 과제를 논리적으로 해결하는 과정을 평가할 수 있다.
② 자연현상을 수학적 모델링을 통하여 이해하고 분석하는 능력을 평가할 수 있다.
③ 문제 해결에 필요한 식, 그래프, 기호의 정확한 사용 능력을 평가할 수 있다.
④ 주어진 문제 상황에 수학적 개념과 원리를 적용하는 능력을 평가할 수 있다.
⑤ 수학의 유용성과 수학적 활동의 가치에 대한 신념을 평가할 수 있다.

14. 다음 교사들의 의도에 적합한 평가 방법이 가장 알맞게 연결된 것은? [2점] [2009]

(가) 학생들이 미분과 적분 단원을 학습하는 동안 수학적 이해가 발달하는 과정을 전체적으로 평가하고 싶습니다. 또, 학생 스스로의 반성적인 자기 평가도 이루어지면 더 좋겠습니다.
(나) 수학 공부를 아주 열심히 하는데 성적은 항상 낮은 학생이 있습니다. 이 학생의 메타-인지적인 능력을 평가할 필요가 있다고 생각합니다.
(다) 스스로 문제를 찾고, 이를 해결하기 위해 자신의 추론 능력이나 알고리즘을 사용하는 능력, 자신의 아이디어를 다른 사람에게 전달하는 능력을 평가하고 싶습니다.

	(가)	(나)	(다)
①	관찰과 면담	수학저널 쓰기	포트폴리오
②	포트폴리오	관찰과 면담	프로젝트
③	포트폴리오	프로젝트	수학저널 쓰기
④	프로젝트	관찰과 면담	포트폴리오
⑤	수학저널 쓰기	포트폴리오	프로젝트

15. 각 성분이 실수인 4×4 행렬 A의 고윳값(eigenvalue)이 1, -1, 2, 4일 때, 행렬 A의 특징으로 항상 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? [1.5점] [2009]

<보기>

ㄱ. A의 행렬식(determinant)은 -8이다.
ㄴ. A의 자취(trace)는 6이다.
ㄷ. A는 대칭행렬(symmetric matrix)이다.
ㄹ. A의 계수(rank)는 4이다.

① ㄱ, ㄴ ② ㄴ, ㄷ ③ ㄷ, ㄹ
④ ㄱ, ㄴ, ㄹ ⑤ ㄱ, ㄷ, ㄹ

16. 유한차원 내적공간 V의 부분공간 $W(W\neq V)$에 대하여 선형사상 P를 V에서 W로의 정사영(orthogonal projection)이라 하자. P에 관한 설명 중 옳지 않은 것은? [2점] [2009]

① $\mathrm{Im}(P)=W$ 이다.
② $\mathrm{Ker}(P)\cap W=\{0\}$이다.
③ 임의의 $w\in W$ 에 대하여 $P(w)=w$이다.
④ 임의의 $v\in V$에 대하여 $P(P(v))=P(v)$이다.
⑤ P를 나타내는 행렬은 가역행렬이다.

17. <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [2점] [2009]

<보기>

ㄱ. 정수 a, b가 서로소이기 위한 필요충분조건은 적당한 정수 s, t에 대하여 $as+bt=1$이 성립하는 것이다.
ㄴ. 양의 정수 m과 n에 대하여, 2^m-1과 2^n-1이 서로소이기 위한 필요충분조건은 m과 n이 서로소인 것이다.
ㄷ. 양의 정수가 25진법으로 표현될 때 3자리수이기 위한 필요충분조건은 5진법으로 표현될 때 6자리수인 것이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

18. 원시근(primitive root)과 관련된 <보기>의 명제 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [2점] [2009]

<보기>

ㄱ. 19는 원시근을 갖는다.
ㄴ. 3은 8의 원시근이다.
ㄷ. 1보다 큰 정수 m의 원시근 g와 양의 정수 i, j에 대하여, $g^i \equiv g^j \pmod{m}$이면 $i \equiv j \pmod{\phi(m)}$이다.
(단, $\phi(m)$은 1, 2, $\cdots$, m 중 m와 서로소인 수의 개수이다.)

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 군에 대한 <보기>의 명제 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [2점] [2009]

<보기>

ㄱ. 위수가 8인 군은 아벨군(가환군)이다.
ㄴ. 부분군의 개수가 유한인 군은 유한군이다.
ㄷ. 위수가 27인 아벨군 중에서 동형이 아닌 것의 종류는 3가지이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. $\mathbb{Z}$가 정수환이고, $\mathbb{Z}[x]$는 $\mathbb{Z}$ 위의 다항식환이며,

$$\mathbb{Z}[i]=\{a+bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \text{ (단 } i^2=-1)$$

는 복소수체의 부분환이다. 다음 중 옳지 않은 것은? [2점] [2009]

① $\mathbb{Z}$는 $\mathbb{Z}[x]$의 부분환이다.
② $\mathbb{Z}[x]$와 $\mathbb{Z}[i]$는 서로 환동형이다.
③ $\mathbb{Z}[x]$는 유일인수분해 정역(unique factorization domain)이다.
④ $\mathbb{Z}$의 분수체(field of quotients)는 유리수체 $\mathbb{Q}$와 동형이다.
⑤ $\mathbb{Z}[x]$의 원소 중 곱셈에 대한 역원을 갖는 것은 ± 1뿐이다.

21. E는 체 F의 확대체이고, $F[x]$는 F 위의 다항식환이다. $\alpha \in E$가 F 위에서 대수적(algebraic)일 때, 함수 $\phi_\alpha : F[x] \to E$는 $f(x) \in F[x]$에 대하여 $\phi_\alpha(f(x)) = f(\alpha)$로 정의된 환준동형사상이다. <보기>에서 항상 성립하는 것을 모두 고른 것은? [2점] [2009]

<보기>

ㄱ. $\mathrm{Ker}(\phi_\alpha) \neq \{0\}$
ㄴ. $F[x]/\mathrm{Ker}(\phi_\alpha)$와 E는 서로 환동형이다.
ㄷ. $\mathrm{Ker}(\phi_\alpha)$는 $F[x]$의 소아이디얼(prime ideal)이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

22. 체 K가 체 F 위의 확대체이고 $\mathrm{Aut}(K)$를 K에서 K로의 자기동형사상(automorphism) 전체의 집합이라 할 때, $\mathrm{Aut}(K)$의 부분군 $\mathrm{G}(K/F)$를

$$\mathrm{G}(K/F) = \{\sigma \in \mathrm{Aut}(K) \mid \text{모든 } a \in F\text{에 대하여 } \sigma(a) = a\}$$

로 정의하자. 체 K가 체 $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ 위의 차수(degree) 6인 유한확대체일 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [2.5점] [2009]

<보기>

ㄱ. 체 K는 $\mathbb{Z}_3$ 위의 분해체(splitting field)이다.
ㄴ. 체 K는 $\mathbb{Z}_3$ 위의 분리확대체(separable extension field)이다.
ㄷ. $\mathbb{Z}_3$와 K 사이에는 $\mathrm{G}(K/E)$의 위수가 2가 되는 체 E가 3개 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

23. <보기>에 주어진 x_n을 일반항으로 하는 실수열 중 수렴하는 수열을 모두 고른 것은? [1.5점] [2009]

<보기>

ㄱ. $x_n = (n+1)^{\frac{1}{\log(n+1)}}$
ㄴ. $x_n = \dfrac{(n+1)^n}{n!}$
ㄷ. $x_n = \dfrac{1+na}{(1+a)^n}$ (단, a는 양의 실수)

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

24. 닫힌구간(폐구간) $[-1, 1]$에서 정의된 실함수 f, g, h에 대한 설명으로 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2점] [2009]

<보기>

유리수 전체의 집합을 $\mathbb{Q}$라 할 때,
ㄱ. 연속함수 f가 모든 $q \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}$에 대하여 $f(q)=1$이면 f는 항등적으로 1이다.
ㄴ. 함수 g가 연속이고 $[-1, 1]$의 부분집합 S가 닫힌 집합(폐집합)이면 $g(S)$는 닫힌 집합이다.
ㄷ. $h(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q} \\ x \sin \dfrac{1}{x}, & x \in [-1, 1] - \mathbb{Q} \end{cases}$로 정의된 함수 h는 $x=0$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

25. 실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$라 하자. 다음 정리의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [2점] [2009]

<정 리>

함수 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 미분가능하고 $f'(a) > f'(b)$이면, $f'(a) > k > f'(b)$인 실수 k에 대하여 $f'(c) = k$를 만족시키는 점 $c \in (a, b)$가 존재한다.

◇ 참고 : f가 열린구간 (a, b)에서 미분가능하고 a에서의 우미분계수와 b에서의 좌미분계수가 존재할 때 '$f : [a, b] \to \mathbb{R}$가 $[a, b]$에서 미분가능하다' 라고 한다.

<증 명>

함수 $g : [a, b] \to \mathbb{R}$를 $g(x) = f(x) - kx$로 정의하면, g는 연속이므로 어떤 점 $c \in [a, b]$에서 $\boxed{\text{(가)}}$을 갖는다. 그런데 $\boxed{\text{(나)}}$이(하)므로 $g(x_1) > g(a)$와 $g(x_2) > g(b)$를 각각 만족시키는 점 x_1, $x_2 \in (a, b)$가 존재하게 되어 a와 b에서 g는 $\boxed{\text{(가)}}$을 가질 수 없다. 따라서 g는 점 $c \in (a, b)$에서 $\boxed{\text{(가)}}$를 갖고 $\boxed{\text{(다)}}$이(하)므로, $g'(c) = 0$이다. 그러므로 $f'(c) = k$를 만족시키는 점 $c \in (a, b)$가 존재한다.

	(가)	(나)	(다)
①	최솟값	g가 감소	g'이 연속
②	최댓값	$g'(a) > 0$이고 $g'(b) < 0$	g가 미분가능
③	최댓값	g가 증가	g가 미분가능
④	극댓값	$g'(a) > 0$이고 $g'(b) < 0$	g'이 연속
⑤	최솟값	$g'(a) > 0$이고 $g'(b) < 0$	g가 미분가능

26. 닫힌구간 $[a, b]$에서 정의된 실함수 f, g에 대한 설명으로 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2점] [2009]

<보기>

ㄱ. 임의의 $x, y \in [a, b]$에 대하여 $|f(x)-f(y)| \le |x-y|^{\frac{1}{2}}$ 을 만족하면, f는 $[a, b]$에서 리만적분가능하다.

ㄴ. $[a, b]$에서 리만적분가능한 함수의 불연속점은 기껏해야 유한개이다.

ㄷ. g^2이 $[a, b]$에서 리만적분가능하면 g도 $[a, b]$에서 리만적분가능하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

27. 실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$라 하자. 자연수 n에 대하여 $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$와 $g_n : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$를 각각

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x^2 + k^3},\ \ g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 x}$$

로 정의할 때, 함수열 $\{f_n\}$과 $\{g_n\}$에 대한 설명으로 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2.5점] [2009]

<보기>

ㄱ. $\{f_n\}$은 균등수렴(평등수렴, uniform convergence)한다.

ㄴ. $\{f_n\}$의 극한함수는 연속이다.

ㄷ. $\{g_n\}$은 균등수렴한다.

ㄹ. $\{g_n\}$의 극한함수는 연속이다.

① ㄱ, ㄴ ② ㄷ, ㄹ ③ ㄱ, ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄴ, ㄹ ⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

28. 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=4$ 위를 반시계방향으로 한 바퀴 도는 곡선을 C라 할 때, 다음 선적분의 값은? [2점] [2009]

$$\int_C (3+yx^2)dx + (2-xy^2)dy$$

① 4π ② -4π ③ $-\frac{16\pi}{3}$
④ $\frac{16\pi}{3}$ ⑤ -8π

29. 복소수 전체의 집합 $\mathbb{C}$에서 $\mathbb{C}$로의 정함수(entire function) f가 모든 $z \in \mathbb{C}$에 대하여 두 조건

$$|f(z)| \le 2|ze^z|,\ \ f'(1)=1$$

을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [2점] [2009]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ e ⑤ $2e$

30. 집합 X에서 X로의 함수 f를 $f(t) = \begin{cases} t\cos\frac{1}{t}, & t \ne 0 \\ 0, & t=0 \end{cases}$ 으로 정의할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\mathbb{R}$는 실수 전체의 집합이고 $\mathbb{C}$는 복소수 전체의 집합이다.) [2점] [2009]

<보기>

ㄱ. $X=\mathbb{R}$일 때 f는 $t=0$에서 연속이다.

ㄴ. $X=\mathbb{C}$일 때 f는 $t=0$에서 연속이다.

ㄷ. $X=\mathbb{C}$일 때 $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{1-2n}}{(2n)!}$ 은 모든 $t \in \mathbb{C}-\{0\}$에 대하여 성립한다.

ㄹ. $X=\mathbb{C}$일 때 $\int_{|t|=1} f(t)dt = 2\pi i$이다.

① ㄱ, ㄷ ② ㄱ, ㄹ
③ ㄴ, ㄹ ④ ㄱ, ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄷ, ㄹ

31. 두 확률변수 X와 Y는 독립이고, 각각 다음과 같은 확률밀도함수(probability density function)를 동일하게 갖는다.

$$f(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & \text{그 외의 } t \end{cases}$$

이 때, Y가 X와 X^2사이의 값이 될 확률은? [2점] [2009]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{5}$
④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{7}$

32. $1, 2, 3, 4$의 숫자가 중복되지 않게 한 개씩 각 면에 새겨져 있는 사각연필이 있다. 이 사각연필을 굴렸을 때 각 면이 나올 확률이 같다고 하자. 이 사각연필을 80번 굴렸을 때 윗면에 나온 수의 합이 216 이상일 확률을 x라 할 때, 표준정규분포함수 $\Phi(z)$를 이용하여 x를 가장 가깝게 나타낸 것은? (단, '표준정규분포함수'는 $\mathbb{Z}$가 표준정규확률변수일 때 확률 $\Phi(z) = \mathrm{P}(Z \le z)$로 정의된다.) [2점] [2009]

① $1-\Phi(0.2)$ ② $\Phi(0.2)$ ③ $1-\Phi(0.9)$
④ $\Phi(0.9)$ ⑤ $1-\Phi(1.6)$

33. A고등학교에는 체조 선수가 5명이 있다. 어떤 체조 선수권 대회에 출전하기 위해서는 학교에서 실시하는 두 번의 자격 테스트를 통과해야 하는데, 1차 테스트를 통과한 사람만이 2차 테스트에 도전할 수 있다고 한다. 1차, 2차 테스트를 통과한 선수들의 집합을 각각 S, T라고 할 때, 두 집합 S, T가 구성될 수 있는 방법의 수는? (단, 각 테스트에 통과한 선수가 한 명도 없을 수 있다.) [2점] [2009]

① 2^5 ② $6 \cdot 2^5$ ③ 3^5
④ $10 \cdot 2^5$ ⑤ 4^5

34. 사각형 R의 내부에 7개의 점이 찍혀있다. 사각형 R의 4개의 꼭짓점을 포함한 11개의 점들 중에서 두 점씩 적당히 선택하여 두 점을 양 끝점으로 하는 선분을 그리되, 어떤 두 선분도 교차되지 않게 하면서 사각형 R를 삼각형과 사각형만으로 분할하였다. 각 점의 차수(degree)가 4일 때, 분할의 결과로 생긴 삼각형의 개수는? (단, 사각형 R의 4개의 변도 선분으로 생각한다.) [2점] [2009]

<도움말>

- 선분(변, edge)은 곧은 선 또는 구부러진 선을 모두 의미한다.
- 삼(사)각형이란 세(네) 개의 점과 세(네) 개의 선분으로 둘러싸인 도형을 말한다.
- '사각형 R를 분할한다.'라는 것은 사각형 R를 내부가 겹치지 않는 다각형들로 빈틈없이 채운다는 것이다.

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

35. 실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$라 하자. 3차원 유클리드 공간에 놓인 정칙 곡선 $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$에 대하여 곡선 $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$을 $\beta(t) = 2\alpha(-2t)$로 정의하자. $t=0$일 때 α의 비틀림(열률, torsion)을 $\tau(0)$이라 하면 $t=0$일 때 β의 비틀림은? (단, 모든 점에서 α의 곡률과 비틀림은 모두 양수이다.) [2점] [2009]

① $\frac{1}{2}\tau(0)$ ② $-\frac{1}{2}\tau(0)$ ③ $-2\tau(0)$
④ $\tau(0)$ ⑤ $-\tau(0)$

36. 다음은 3차원 유클리드 공간에 놓인 곡면

$$M: \ X(u, v) = (u, v, u^3 + 2v),$$
$$(-\infty < u < \infty, -\infty < v < \infty)$$

위의 측지삼각형(geodesic triangle)의 내각의 합을 구하는 과정이다. (가), (나), (다), (라)에 알맞은 것은? [2점] [2009]

> 곡면 M은 yz평면 위의 직선 $l_0 : x=0, z=2y$를 xz평면 위의 곡선 $C: y=0,$ $\boxed{(가)}$을 따라 평행이동시킴으로써 얻어진다. 곡면 M의 각 점 p에 대하여 p을 지나면서 l_0와 평행인 직선을 단위속력을 갖도록 매개화한 곡선을 $l_p = l_p(t)$라 하면 l_p는 M의 점근곡선이고, 동시에 $\boxed{(나)}$이 된다. 따라서 모든 점에서 M의 가우스곡률(Gaussian-curvature) K는 $\boxed{(다)}$를 만족한다. 곡면 M의 임의의 측지삼각형 $\triangle$에 대하여 가우스-보네(Gauss-Bonnet)의 공식을 적용하면 $\iint_{\triangle} KdA = (\triangle\text{의 내각의 합}) - \pi$ 이므로, 곡면 M의 모든 측지삼각형의 내각의 합은 $\boxed{(라)}$.

<도움말>

- 점근곡선(asymptotic curve): 곡선 위의 각 점에서 접선방향의 법곡률(normal curvature)이 0이 되는 곡면 위의 정칙곡선.
- 주요곡선(principal curve): 곡선 위의 각 점에서 접선 방향의 법곡률이 주요곡률(principal curvature)이 되는 곡면위의 정칙곡선
- 측지선(geodesic) : 곡선 위의 각 점에서 측지곡률 (geodesic curvature)이 0이고, 일정한 속력을 갖는 곡면위의 정칙곡선.

	(가)	(나)	(다)	(라)
①	$z=x^3$	측지선	$K \geq 0$	π보다 크다.
②	$z=x^{\frac{1}{3}}$	주요곡선	$K=0$	π이다.
③	$z=x^{\frac{1}{3}}$	측지선	$K \leq 0$	π보다 작다.
④	$z=x^3$	주요곡선	$K \leq 0$	π보다 작다.
⑤	$z=x^3$	주요곡선	$K=0$	π이다.

37. 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$와 $A=\{2, 4, 6\}$에 대하여 $R=\{(a, b)|a, b\in A\}\cup\{(x, x)|x\in X\}$라 하자. 임의의 $x\in X$에 대하여 $[x]=\{y\in X|(x, y)\in R\}$라 할 때, 집합 $X/R=\{[x]\,|\,x\in X\}$의 원소의 개수는? [1.5점] [2009]

① 3　② 4　③ 5
④ 6　⑤ 7

38. 집합 $X=\{a, b, c, d\}$에 대하여 $(X, \mathfrak{I})$를 위상공간이라 하고, 임의의 $x\in X$에 대하여

$$N(x)=\{V\subseteq X \mid V\text{는 } (X, \mathfrak{I})\text{에서 } x\text{의 근방}\}$$

이라 할 때, 다음이 성립한다고 하자.

$$N(a)=\{V\subseteq X| \{a, c\}\subseteq V\}$$
$$N(b)=\{V\subseteq X| \{b, c\}\subseteq V\}$$
$$N(c)=\{V\subseteq X \mid \{c\}\subseteq V\}$$
$$N(d)=\{X\}$$

단, 'V는 $(X, \mathfrak{I})$에서 x의 근방'이란 $x\in U\subseteq V$를 만족시키는 $U\in\mathfrak{I}$가 존재함을 의미한다. <보기>에서 $\mathfrak{I}$의 원소를 모두 고른 것은? [2점] [2009]

<보기>

ㄱ. $\{a, b\}$　ㄴ. $\{a, c\}$
ㄷ. $\{a, b, c\}$　ㄹ. $\{a, c, d\}$

① ㄱ　② ㄴ, ㄷ　③ ㄴ, ㄹ
④ ㄱ, ㄷ, ㄹ　⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

39. 실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$, 유리수 전체의 집합을 $\mathbb{Q}$라 하자. $\mathfrak{I}$를 $\mathbb{R}$ 위의 보통위상(usual topology)이라 하고, $(\mathbb{Q}, \mathfrak{I}_{\mathbb{Q}})$를 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$의 부분공간이라 하자. 함수 $j: \mathbb{Q}\to\mathbb{R}$를 임의의 $r\in\mathbb{Q}$에 대하여 $j(r)=r$로 정의할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [2.5점] [2009]

<보기>

ㄱ. 함수 $j: (\mathbb{Q}, \mathfrak{I}_{\mathbb{Q}}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{I})$는 연속이다.
ㄴ. A가 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$의 콤팩트(compact) 부분공간이면 $j^{-1}(A)$는 $(\mathbb{Q}, \mathfrak{I}_{\mathbb{Q}})$의 콤팩트 부분공간이다.
ㄷ. 임의의 위상공간 X와 함수 $f: X \to (\mathbb{Q}, \mathfrak{I}_{\mathbb{Q}})$에 대하여 $j\circ f: X \to (\mathbb{R}, \mathfrak{I})$가 연속이면 $f: X\to(\mathbb{Q}, \mathfrak{I}_{\mathbb{Q}})$가 연속이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

40. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$위에서 위상 $\mathfrak{I}_1$과 $\mathfrak{I}_2$를 다음과 같이 정의하자.

$\mathfrak{I}_1$은 $\{[a, b)\,|\,a, b\in\mathbb{R}\}$를 기저(base)로 하는 위상
$\mathfrak{I}_2=\{\mathbb{R}, \varnothing, \{0, 1\}\}$

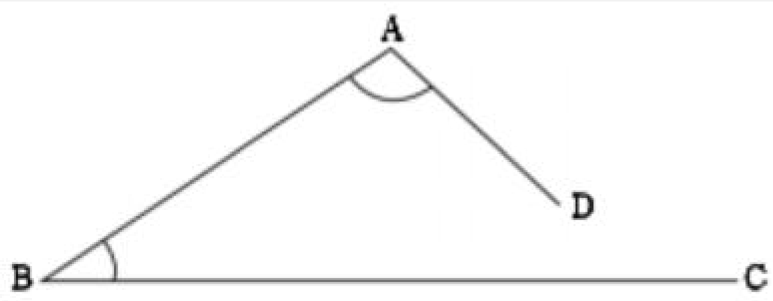
위상공간 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_i)$ $(i=1, 2)$에서 원소 0을 포함하는 성분(component)을 A_i $(i=1, 2)$라고 할 때, 옳은 것은? (단, $[a, b)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\leq x<b\}$이고, 위상공간 X에서 '성분'은 X의 극대 연결 부분공간을 의미한다.) [2점] [2009]

① $A_1=\{0\},\ A_2=\mathbb{R}$　② $A_1=\{0\},\ A_2=\{0, 1\}$
③ $A_1=\mathbb{R},\ A_2=\mathbb{R}$　④ $A_1=\mathbb{R},\ A_2=\{0, 1\}$
⑤ $A_1=\mathbb{R},\ A_2=\{0\}$

1. 다음은 김 교사가 중학교 1학년 학생을 대상으로 삼각형의 결정조건을 지도하는 수업의 일부이다. 다음을 읽고 물음에 답하시오. [2009 2차, 1교시]

김 교사: 지금까지 여러 모둠이 발표한 결과에 따르면, 세 변의 길이가 모두 주어진 경우, 두 변의 길이와 그 끼인각이 주어진 경우, 한 변의 길이와 양 끝각의 크기가 주어진 경우로 삼각형의 결정조건을 정리할 수 있습니다. 다른 경우를 발견한 모둠이 있습니까?

가영: 저희 모둠에서는 두 각과 한 변이 주어졌는데 그 두 각이 주어진 변의 양 끝각이 아닌 경우에 삼각형이 결정되는지 알아보려 했어요. (칠판에 아래의 그림을 그린다.)



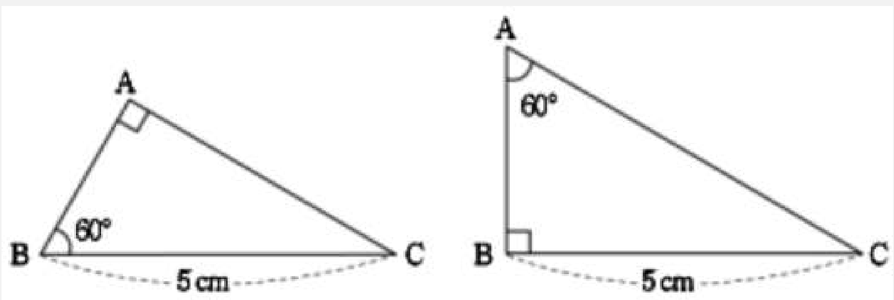
여기서 선분 BC는 주어진 변이고 각 A와 각 B가 주어진 각이에요. 그런데 이 그림에서 보면 삼각형 모양이 만들어지지 않아요. 그러면 이 경우는 삼각형을 결정할 수 없나요?

김 교사: ㉠여기서 선분 AB와 선분 AD는 길이가 주어지지 않은 것이라서 늘이거나 줄일 수 있어요. 이 그림에서 선분 AB의 길이를 늘려서 선분 AD의 연장선이 점 C를 지나도록 하면 삼각형은 만들어지겠지요.

나영: 하지만 그 그림에서 각 A의 크기와 각 B의 크기를 서로 바꾸면 다른 삼각형이 만들어져요.

김 교사: ㉡(전체 학생을 향해) 나영이가 한 말을 이해했어요? (학생들이 이해를 못하는 상황) 그럼 나영이는 지금 한 말을 다른 친구들이 이해할 수 있도록 좀 더 자세히 설명해 보겠어요?

나영: 예를 들어, 한 변의 길이가 5cm이고 두 각의 크기가 90˚, 60˚인 삼각형을 다음과 같이 그릴 수 있어요.



김 교사: 네. 잘했어요. 나영이가 설명한 것처럼 가영이네 모둠이 제시한 조건은 삼각형의 결정조건이라고 할 수 없습니다.

다영: 선생님, 질문이 있는데요. 그럼 두 변의 길이와 그 끼인각이 아닌 다른 한 각이 주어진 경우는 삼각형의 결정 조건이 되나요?

1-1. 2007년 개정 수학과 교육과정에서는 학생 스스로 문제를 해결하면서 개념, 원리, 법칙을 탐구하고, 수학적 사실을 추측하고 이를 정당화 또는 증명하여, 수학적 사고력과 의사소통능력을 신장하고 수학에 대한 긍정적 태도를 함양하도록 지도할 것을 권고하고 있다. 이러한 관점에서 밑줄 친 부분 ㉠과 ㉡ 각각에 대하여 장점 또는 개선이 필요한 점을 한 가지 찾아 그 근거와 함께 설명하시오. [10점]

1-2. 김 교사는 다영이의 질문을 아래와 같이 문제로 만들어 과제로 내 주었다. [문제]에 대한 모범 답안을 만들고, 과제물을 평가할 수 있는 채점 기준을 다음 <조건>에 따라 작성하시오. 그리고 아래의 <학생 과제물 사례>에 있는 [풀이]를 위에서 작성한 채점 기준의 채점 영역별로 평가한 결과를 근거와 함께 서술하시오. [20점]

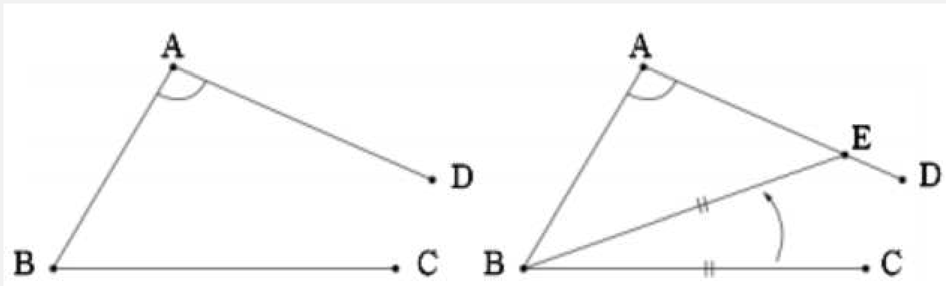
<조건>

- 분석적 점수화 방법을 적용하여 채점 기준을 작성하되, 배점은 고려하지 않는다.
- 채점 기준은 채점 영역과 채점 요소로 구성한다.
- 채점 영역을 먼저 '문제해결'과 '수학적 추론과 정당화'로 구분하고, '문제해결' 영역은 다시 '문제의 이해', '계획의 작성 및 실행', '반성'의 3가지 하위 영역으로 구분한다.
- 위에서 밑줄 친 4가지 채점 영역 각각에 대하여 채점 요소가 2가지만 포함되도록 채점 기준을 구성한다.

<학생 과제물 사례>

[문제] 두 변의 길이와 그 끼인각이 아닌 다른 한 각의 크기가 주어진 경우는 삼각형의 결정조건이 되는지 판단하고, 그 이유를 설명해 보세요.

[풀이] 나는 두 변의 길이와 그 끼인각이 아닌 다른 한 각의 크기가 주어진 경우는 삼각형의 결정조건이 된다고 생각한다. 내 생각이 맞는지 알아보기 위해 컴퓨터 프로그램을 이용하여 직접 그려 보았다. 다음은 컴퓨터 화면을 캡쳐한 것이다.



[그림 1] [그림 2]

[그림 1]에서 선분 AB와 선분 BC는 길이가 주어진 두 변을 나타내고 각 A는 크기가 주어진 각을 나타낸다. 여기서 선분 BC의 길이가 변하지 않도록 꼭짓점 B를 중심으로 선분 BC를 돌려서 [그림 2]와 같이 선분 AD와 만나도록 한다. 이때 생기는 교점을 E라고 하면 삼각형 ABE가 만들어진다. 선분 BC를 꼭짓점 B를 중심으로 회전시킨 이유는 선분 BC의 길이를 유지하면서 세 번째 꼭짓점을 구할 수 있기 때문이다.

이처럼 문제의 조건을 이용하여 삼각형을 실제로 만들어 낼 수 있으므로 두 변의 길이와 그 끼인각이 아닌 다른 한 각의 크기가 주어진 경우는 삼각형의 결정조건이 된다.

2. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$에 대하여 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x,y)\mid x, y\in\mathbb{R}\}$에 다음과 같은 위상이 각각 주어져 있다.

(1) $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$의 임의의 두 점 $p=(p_1,\ p_2),\ q=(q_1,\ q_2)$에 대하여 거리함수(metric) d가

$$d(p,\ q)=\sqrt{(p_1-q_1)^2+(p_2-q_2)^2}$$

으로 주어질 때, d에 의하여 유도된 위상 $\mathfrak{I}_1$

(2) (1)의 위상 $\mathfrak{I}_1$을 이용하여 다음과 같이 정의된 위상 $\mathfrak{I}_2$

$\mathfrak{I}_2=\{(\mathbb{R}\times\mathbb{R})-F\mid F$는 $(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\ \mathfrak{I}_1)$에서 콤팩트 부분집합$\}\cup\{\varnothing\}$

$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$의 부분집합 $Y=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mid x+y=1\}$을 위상공간 $(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\ \mathfrak{I}_1)$의 부분공간으로 생각할 때는 Y_1로 나타내고, 위상공간 $(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\ \mathfrak{I}_2)$의 부분공간으로 생각할 때는 Y_2로 나타내자.

부분공간 $Y_1,\ Y_2$가 각각 T_2공간(또는 Hausdorff 공간), 콤팩트(compact) 공간, 연결공간이 되는지 설명하시오. [20점] [2009 2차, 1교시]

3. 다음은 곱셈순환군의 생성원(generator)과 소체(prime field) 위의 다항식의 근 사이의 관계에 대한 명제와 한 학생의 증명이다. 다음을 읽고 물음에 답하시오. [2009 2차, 2교시]

〈명 제〉

소수 p와 양의 정수 $n(\geq 2)$에 대하여, F를 소체 $\mathbb{Z}_p=\{0, 1, 2, \cdots, p-1\}$을 포함하고 위수가 p^n인 체라 하고, 곱셈순환군 $F^*=F-\{0\}$의 생성원을 α라고 하자. 소체 $\mathbb{Z}_p$ 위의 n차 다항식 $f(x)$가 α를 근으로 가지면, $f(x)$는 F^*의 생성원 중에서 서로 다른 n개를 근으로 갖는다.

〈민주의 증명〉

F^*는 α에 의하여 생성된 곱셈순환군이므로

$$F^*=\langle\alpha\rangle=\{1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \cdots,\ \alpha^{p^n-2}\},\ \alpha^{p^n-1}=1$$

로 나타낼 수 있다.

한편, $\sigma_p: F\to F,\ \sigma_p(x)=x^p$은 환동형사상이고 ……… ㉠

모든 $x\in\mathbb{Z}_p$에 대하여 $\sigma_p(x)=x^p=x$이므로 모든 $x\in F$에 대하여 $\sigma_p(x)=x$이다. ……… ㉡

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in\mathbb{Z}_p[x]$$

로 놓으면, $f(\alpha)=0$이므로 $f(\alpha^p)=0$이다. ……… ㉢

따라서 F^*의 생성원 중에서 서로 다른 n개의 생성원 $\alpha,\ \alpha^p,\ \alpha^{p^2},\ \cdots,\ \alpha^{p^{n-1}}$이 $f(x)$의 근이 된다. ……… ㉣

3-1. 〈민주의 증명〉의 밑줄 친 부분 ㉠~㉣에서 옳은 것은 증명하고, 옳지 않은 것은 증명의 흐름에 맞도록 옳게 고친 다음 증명하시오. [20점]

3-2. 윤 교수는 민주와 면담을 하여 〈민주의 증명〉에서 나타난 오류가 다른 영역의 문제를 풀거나 증명을 할 때에도 반복적으로 나타남을 확인하였다. 그 오류의 원인을 〈민주의 증명〉 과정과 관련하여 설명하시오. 그리고 같은 원인을 가지는 오류의 사례를 중·고등학교 수학 학습 수준에서 제시하고, 그 오류를 교정할 수 있는 교수·학습 방법을 설명하시오. [10점]

4. 다음 (가), (나), (다)를 아래의 〈조건〉에 따라 각각 증명하고, (가)와 (나)의 의미를 비교하여 설명하시오. 그리고 (다)와 관련된 다음 명제

'실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$에서 정의된 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가 C^{∞}급 함수이고 유계(bounded)이면 상수함수이다'

가 성립하면 그 이유를 설명하고, 성립하지 않으면 반례를 제시하시오. [20점] [2009 2차, 2교시]

(가) 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$의 두 원소 a, b(단, $a<b$)에 대하여, 닫힌 구간 $I=[a, b]$에서 $\mathbb{R}$로의 두 함수 f, g가 연속이고, 모든 $x\in I$에 대하여 $g(x)>0$이라고 하자. 그러면

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

를 만족하는 $c\in I$가 존재한다.

(가) 복소평면 $\mathbb{C}$에 있는 중심이 z_0이고 반지름이 $r(>0)$인 닫힌 원판 $B=\{z\in\mathbb{C} \mid |z-z_0|\le r\}$에서 정의된 함수 $f:B\to\mathbb{C}$가 해석적(analytic)이면

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})\,d\theta$$

이다.

(나) 복소평면 $\mathbb{C}$에서 정의된 함수 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$가 $\mathbb{C}$에서 해석적이고 유계이면 상수함수이다.

〈조 건〉

- (가), (나), (다)를 증명할 때, 각 증명에 다음 중 한 가지 이상을 사용하시오.
  - 최대·최소의 정리
  - 중간값의 정리
  - 코시(Cauchy)의 적분 공식

〈참 고〉

- 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가 C^{∞}급 함수라는 것은 모든 자연수 n에 대하여 $\mathbb{R}$에서 n계도함수 $f^{(n)}$이 존재하고 $f^{(n)}$이 연속임을 뜻한다.

1. 2007년 개정 수학과 교육과정에서 기하 영역과 관련된 교육 내용 및 교수·학습 상의 유의점으로 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? [1.5점] [2010]

<보기>

ㄱ. 중학교 1학년에서 점, 선, 면, 각, 원에 대한 성질은 직관적으로 탐구한다.
ㄴ. 중학교 2학년에서 삼각형과 사각형의 성질은 증명 없이 직관적으로 이해하는 정도로 다룬다.
ㄷ. 중학교 3학년에서 피타고라스 정리의 역은 증명 없이 문제 상황을 통해 간단히 다룬다.
ㄹ. 고등학교의 '기하와 벡터'에서 공간도형의 성질은 관찰과 직관에 의해 이해한 후 증명을 하도록 한다.

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄱ, ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ, ㄹ ⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

2. 다음의 학습 원리를 명시적으로 제시한 수학교육자에 대한 설명 중 적절하지 않은 것은? [2점] [2010]

- 활동적(능동적) 학습의 원리 : 학습자는 주어진 상황에서 배워야 할 내용을 스스로 발견해야 한다.
- 최선의 동기유발의 원리 : 학습자는 배울 내용에 대해서 흥미를 가져야 하며 학습 활동에서 즐거움을 찾을 수 있어야 한다.
- 비약 없는 단계의 원리 : 효과적인 학습은 탐구단계를 지나 언어화와 개념형성 단계로 나아가야 하며 학습자의 정신적 태도의 통합과 형성에 기여해야 한다.

① 수학교육을 통한 인성교육에도 관심을 기울였다.
② 데카르트의 사고 규칙을 참조하여 자신의 이론을 체계화하려 하였다.
③ 교사는 소크라테스 대화법의 산파로서의 역할을 해야 한다고 하였다.
④ 귀납보다는 전형적인 예에 의한 예제적 접근을 대표적인 개념 학습 방식으로 제시하였다.
⑤ 새수학(New Math) 운동에 반대하며 그 대안으로 수학 지도에 있어서 역사 발생적 방법에 주목할 것을 주장하였다.

3. 라카토스(I. Lakatos)의 수리철학에 대한 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [2점] [2010]

<보기>

ㄱ. 수학은 증명과 반박을 통해 확증된다.
ㄴ. 증명 분석은 이론적 개념을 생성하는 도구이다.
ㄷ. 연역적 추측은 수학적 발견의 수단이 될 수 있다.
ㄹ. 수학적 발견에 있어서 직관과 귀납의 역할을 강조하였다.

① ㄱ, ㄴ ② ㄴ, ㄷ ③ ㄴ, ㄹ
④ ㄱ, ㄷ, ㄹ ⑤ ㄴ, ㄷ ,ㄹ

4. 다음은 학생의 수학 학습에 대한 정의적 태도 평가를 위한 교사용 관찰 점검표이다. <보기>에서 적절한 설명을 모두 고른 것은? [2점] [2010]

정의적 태도 관찰 점검표

학생 이름 : ________

항목	세부 관찰 항목	매우 그렇다	그렇다	보통이다	그렇지 않다	매우 그렇지 않다
수학에 대한 흥미와 호기심	수학 시간에 즐거워한다.					
	수학적 개념이나 원리를 알려고 한다.					
수학에 대한 자신감	어려운 수학 문제를 잘 풀 수 있다고 생각한다.					
과제집착력과 의지	주어진 문제를 끝까지 해결한다.					
	모르는 점은 교사와 친구에게 질문하여 알려고 한다.					

<보기>

ㄱ. 위의 관찰 점검표는 교사가 평가를 위해 관찰해야 할 학생의 행동 목록을 제공하므로 기록한 자료의 분석을 수월하게 한다.
ㄴ. '발견술에 대한 지식을 많이 가지고 있다'는 정의적 태도 평가를 위한 세부 관찰 항목으로 적합하다.
ㄷ. 위의 관찰 점검표는 학생이 자신의 수학적 태도를 스스로 자기 평가하는 데에도 활용될 수 있다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

5. <A>와 <B>에 대한 설명으로 적합하지 않은 것은? [2.5점] [2010]

<A>

실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$라 하고, $E\subset\mathbb{R}$일 때, 함수 $f:E\to\mathbb{R}$, $a\in E$라 하자. 임의의 $\varepsilon>0$에 대해서 적당한 $\delta(\varepsilon)>0$가 존재하여 $|x-a|<\delta$인 모든 $x\in E$에 대해서 $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$이면, f는 $x=a$에서 연속이라고 한다.

<B>

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여
(ⅰ) 함숫값 $f(a)$가 정의되고,
(ⅱ) 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재하며,
(ⅲ) $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$를 만족할 때,
함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 한다.

① <A>는 해석학의 산술화 결과로 만들어진 함수의 연속성에 대한 정의이다.
② <B>는 <A>를 학생의 사고와 실제적 상황을 고려하여 탈개인화(depersonalization) 및 탈배경화(decontextualization)한 결과이다.
③ <A>를 <B>로 변환하는 과정에서는 교사, 학생, 지식 사이의 삼원적 관계 속에서 교수 상황을 고려해야 한다.
④ <B>는 x의 값이 변화함에 따라 $f(x)$의 값이 변화해 가는 과정에 초점을 맞춘다.
⑤ <A>는 한 점 근방에서 근접성을 보존한다는 아이디어를 개념화한 것이다.

6. 김 교사는 <A>에 대한 토론 활동 후 <B>를 지도하는 수업 계획을 세웠다. 김 교사의 수업 계획과 관련된 의견 중 수학화 교수·학습 이론의 관점에서 적절한 것은? [2점] [2010]

<A>

- 오늘 최저 기온은 -5℃이고 최고 기온은 6℃였다. 오늘 기온이 0℃인 순간이 있었을까?
- 오늘 보니 우리 딸의 키가 나보다 크다. 나와 우리 딸의 키가 같은 순간이 있었을까?

<B>

함수 $f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이고, $f(a) \neq f(b)$일 때, $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여

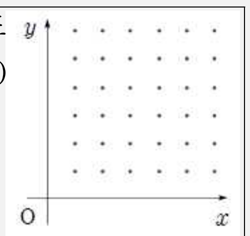
$$f(c) = k \text{ (단, } a < c < b)$$

인 c가 적어도 하나 존재한다.

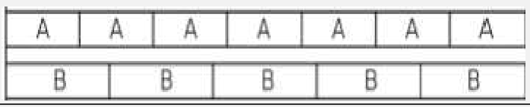
① <A>에 대한 토론 활동에 교사가 개입하는 것은 적절하지 못하다.
② 본질로 정리되어야 할 현상이 <A>에서 먼저 제공되어 반교수학적 전도가 일어날 가능성이 있다.
③ 귀납에 의한 개념 획득을 강조해야 하므로 <A>에 가능한 많은 예를 제시하는 것이 중요하다.
④ <B>가 <A>에서 주어진 현상을 정리할 수단이므로 <B>가 먼저 제시되어야 한다.
⑤ <B>는 더 높은 수준에서는 정리되어야 할 현상으로 다루어질 수 있다.

7. 학생들이 다음 문제를 풀 때 겪을 수 있는 장애에 대한 설명 중 적절한 것은? [2점] [2010]

<문제1> 원점과 1사분면을 지나는 모든 직선은 적어도 하나의 격자점(x좌표와 y좌표가 양의 정수인 점)을 지나는가?
(예, 아니오)



<문제2> 길이가 다른 두 종류의 막대 A와 B가 있다고 하자. 동일 출발선에서 막대를 계속 이어 붙여 막대 A를 늘어놓은 전체 길이와 막대 B를 늘어놓은 전체 길이가 같게 되도록 하는 것이 항상 가능한가?
(예, 아니오)

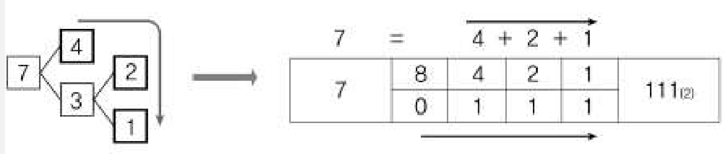


① 유리수에 대한 유추적 모델을 가지고 있는 경우에는 발생하지 않는다.
② 유리수의 조밀성을 이해하면 극복할 수 있는 장애이다.
③ 정수에 대한 스키마를 유리수에 대한 스키마로 재구성하면 극복된다.
④ 직선을 직접 그어보거나, 막대를 계속 이어 붙여 보는 활동을 통해 극복된다.
⑤ 이런 장애는 직관이 수학적 사고를 방해할 수 있음을 보여주는 예이다.

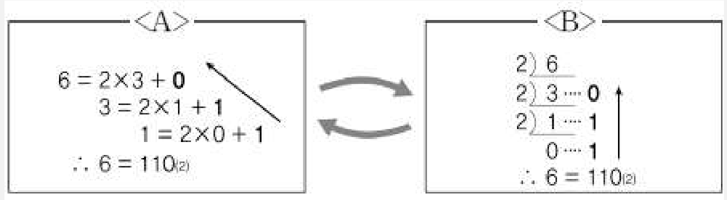
[8-9] 다음은 주어진 수를 이진법으로 나타내는 알고리즘을 지도하기 위한 김 교사의 수업 계획과 수업을 한 후 어느 학생을 평가한 내용이다. 이를 보고 물음에 답하시오.

[가] 수업 계획

<1단계> 주어진 수를 8, 4, 2, 1의 합으로 나타내고, 이를 이진법으로 나타내는 활동을 한다.

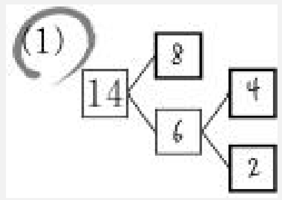


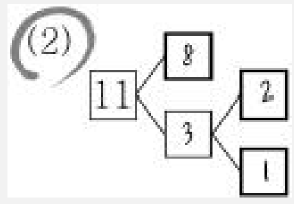
<2단계> <A>와 <B>를 관련시키면서, 수를 이진법으로 나타내는 알고리즘을 명하고 적용하는 활동을 한다.



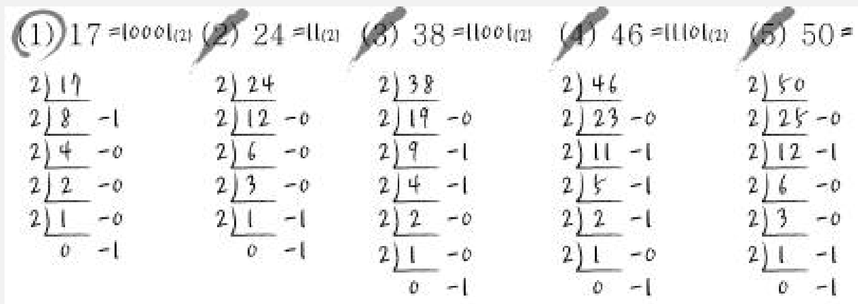
[나] 예은이의 성취도 평가 답안지

1. 다음 빈칸에 알맞은 수를 넣어라.





2. 다음 수를 이진법으로 나타내어라.



8. [가], [나]에 대한 설명 중 가장 적절한 것은? [2점] [2010]

① <1단계>는 딘즈(Z. Dienes)의 개념 형성 과정 중 자유놀이 단계에 해당한다.
② 딘즈에 따르면, 지각적으로 다양한 상황은 혼란을 제공하므로 <1단계>에서 한 가지 지도 수단을 사용하는 것이 효과적이다.
③ <1단계>에서는 오수벨(D. Ausubel)의 통합 조정의 원리가 적용되고 있다.
④ <2단계>에서 김 교사는 스켐프(R. Skemp)가 말하는 도구적 이해를 의도하고 있다.
⑤ 김 교사가 사용한 지도 수단이 [나]에서 평가의 대상이 되는 현상을 볼 수 있다.

9. [나]에서 예은이가 범한 오류에 대한 <보기>의 설명 중 적절한 것을 모두 고른 것은? [2점] [2010]

<보기>

ㄱ. 예은이는 [나]에서 2번의 (5)에 대한 답으로 $10011_{(2)}$이라고 할 가능성이 많다.
ㄴ. 예은이의 오류를 교정하기 위해서는 <2단계> 활동에 대한 반성보다 <1단계> 활동을 연습시키는 것이 필요하다.
ㄷ. 예은이가 [나]에서 2번의 (1)에서 정답을 맞힌 것은 주어진 수의 특성에 기인한 것으로 보인다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

10. 2007년 개정 수학과 교육과정에 제시된 교수·학습 방법과 관련된 내용 중, 다음의 수업 계획에서 알 수 있는 것과 가장 거리가 먼 것은? [1.5점] [2010]

<역동적 기하 소프트웨어를 활용한 수업 계획>

<1단계> 삼각형의 각 변의 중점을 연결하여 새로운 삼각형을 만들고 두 삼각형의 넓이의 비를 알아본다.
<2단계> 넓이의 비가 항상 4:1이 되는 이유를 각자 생각해 보고 모둠별 토의를 거쳐서 각 모둠에서 학생 한 명이 모둠의 의견을 발표한다.
<3단계> 사각형의 각 변의 중점을 연결하여 새로운 사각형을 만들고 두 사각형 넓이의 비를 알아본다.
<4단계> 넓이의 비가 항상 2:1이 되는 이유를 생각해 보고 모둠별 토의를 거쳐서 각 모둠에서 학생 한 명이 모둠의 의견을 발표한다.
<5단계> 다른 다각형에 대해서도, 각 변의 중점을 연결하여 새로운 다각형을 만들고 두 다각형 넓이의 비에 대해 탐구한다.

① 탐구학습, 협동학습 등 다양한 교수·학습 방법을 사용한다.
② 구체적 조작 활동과 탐구 활동을 통하여 원리와 법칙을 발견하게 한다.
③ 귀납, 유추 등을 통해서 학생 스스로 수학적 사실을 추측하게 하고, 이를 정당화하거나 증명해 보도록 한다.
④ 수학적 의사소통 능력을 신장하도록 한다.
⑤ 학생 개인의 학습 능력과 수준을 고려한다.

11. 다음 문제에 대한 학생 A와 학생 B의 풀이 사례와 관련하여 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [2점] [2010]

<문제>

수열 $\{a_n\}$이 $a_{n+1}=2a_n+1$, $a_1=1$을 만족하면,
수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=2^n-1$임을 보이시오.

<학생 A의 풀이>

$n=1$인 경우, $a_n=2^n-1$에 $n=1$을 대입하면 $a_1=1$이므로 성립한다.
$n=k$일 때, $a_k=2^k-1$이 성립한다고 가정하자.
$n=k+1$일 때, $a_{k+1}=2^{k+1}-1$이므로, 이를 이용하면

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2^{k+1}-1 \\ &= 2(2^k-1)+1 \\ &= 2a_k+1 \end{aligned}$$

이 되어 주어진 점화식이 만족된다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=2^n-1$이다.

<학생 B의 풀이>

주어진 점화식을 만족하는 수열의 항을 몇 개 구해 보면
$a_1=1$, $a_2=3$, $a_3=7$, $a_4=15$, $a_5=31$, $\cdots$이다.
이때, $b_1=a_2-a_1=2$, $b_2=a_3-a_2=4$, $b_3=a_4-a_3=8$, $b_4=a_5-a_4=16$이므로
수열 $\{a_n\}$의 계차수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 2이고 공비가 2인 등비수열이다.
계차수열을 이용하여 a_n을 구하면 $a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=1+2\times\frac{2^{n-1}-1}{2-1}=2^n-1$이다.
따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=2^n-1$이다.

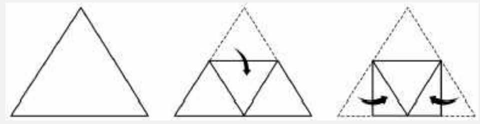
<보기>

ㄱ. 학생 A는 연역적 증명을 시도하였다.
ㄴ. 학생 A는 전제조건과 증명해야 할 것을 혼동하고 있다.
ㄷ. 학생 B의 풀이는 확실성을 보장할 수 있는 방식이다.

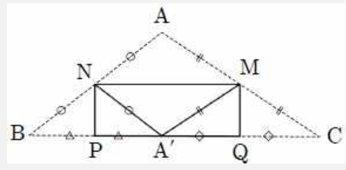
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12. 가을, 봄비, 설빈이가 각이 겹치지 않게 하면서 삼각형의 세 꼭짓점이 한 변에서 만나도록 접는 방법에 대해 이야기하고 있다. 학생들의 대화에 대한 설명 중 옳은 것은? [2점] [2010]

가을 : 정삼각형의 각이 겹치지 않으면서 세 꼭짓점이 한 변에서 만나게 접는 방법을 보여 줄게. 이렇게 접으면 돼.



봄이 : 그런데 어떤 삼각형이라도 그렇게 접을 수 있는 일반적인 방법이 있어?
설빈 : 접는 방법을 찾아보는 것이 어때? 삼각형 ABC를 그려서 접은 상태를 생각해 보자. 그러니까 세 꼭짓점이 한 변에서 만났다고 해보자. 점 N, P, Q, M은 접히는 지점을 나타내고, 점 A′은 세 꼭짓점이 모이는 지점이라고 하자. 그러면, $\overline{AN}=\overline{A'N}=\overline{BN}$이고 $\overline{AM}=\overline{A'M}=\overline{CM}$이 되잖아.



그러면, 점 N은 변 AB의 중점이 되고, 점 M은 변 AC의 중점이네.
가을 : 방금, 삼각형의 세 꼭짓점이 한 변에서 만나게 되는 것을 증명했네.
봄이 : 아직 증명이 마무리된 건 아니야.

① 가을이는 증명의 필요성을 제기하고 있다.
② 가을이는 분석법의 한계를 지적하고 있다.
③ 가을이는 연역적으로 증명하였다.
④ 봄이는 증명의 일반성에 대해 잘못 이해하고 있다.
⑤ 설빈이는 필요조건을 찾아가는 분석법을 구사하였다.

13. 다음은 학생들의 수학적 의사소통 능력을 신장하기 위해 만든 문제 [가]와 학생들의 대화 [나]이다. [가]와 [나]에 대한 설명 중 가장 적절한 것은? [2점] [2010]

[가] 문제
<A>는 어떤 두 학급의 수학 성적을 각각 50점 미만인 집단과 50점 이상인 집단으로 나누어 비교한 것이다. 이로부터 추론해낼 수 있는 것을 말해보시오.

반	집단별 평균		학급 평균
1	50점 미만	20	45
	50점 이상	80	
2	50점 미만	10	60
	50점 이상	70	

<A> 1반과 2반의 수학 성적 비교

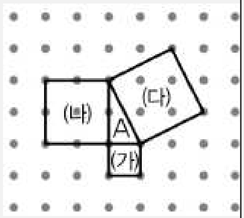
[나] 학생들의 대화
예 리: ㉠ 두 집단의 평균이 모두 높은 1반이 오히려 평균은 2반보다 낮다는 것은 불가능해.
효 진: <A>에서 학급 평균이 아니라 최빈값을 구한 것은 아닐까?
예 리: 만일 모든 학생의 성적이 다르면 최빈값이 0이지. 그러니까 최빈값으로 두 반을 비교하는 것은 의미가 없어.
효 진: 어떤 점수에 해당하는 학생 수가 가장 많으면 그 학생 수가 최빈값이니까 최빈값은 여러 개가 있을 수 있어. 그래서 최빈값으로 두 반의 성적을 비교하는 것이 의미가 없지.
예 리: 그럼 <A>에서 학급 평균이 아니라 중앙값을 구한 것은 아닐까?
효 진: 잘 모르겠다.
교 사: ㉡ 1반에서 50점 이상인 학생들과 50점 미만인 학생들 주 어느 쪽이 더 많을까요?
예 리: 학급 평균이 역전될 수 있겠네요! 1반의 학생들 중 50점 이하가 절반이 넘으면 돼요.
효 진: 그렇구나. 그렇다면, 2반에서는 학생들 중 50점 이상이 절반이 넘겠네요.

① [가]는 수학적 추론을 요구하므로 의사소통 능력 신장을 위한 문제로 적합하지 않다.
② [가]의 정보가 부족하여 [나]에서 학생들이 ㉠의 옳고 그름을 정확히 판단하지 못하였다.
③ [나]에서 학생들이 거꾸로 풀기 전략을 이용하여 산포도를 구하고 있다.
④ [나]의 ㉡에서는 학생들이 해야 할 생각을 교사가 대신하여 주르뎅 효과(쥬르단식 외면치레, Jourdain effect)가 나타났다.
⑤ [나]에서 예리와 효진이 모두 최빈값에 대한 오개념을 드러내고 있다.

14. 다음은 피타고라스 정리를 지도하는 예시이다. 이를 반 힐레(P. M. van Hiele)의 교수・학습 단계 이론에 비추어 설명한 <보기>의 내용 중 적절한 것을 모두 고른 것은? [2.5점] [2010]

<1단계> 학습할 주제를 학생들에게 소개한다.

<2단계> 직각삼각형을 만들고 이 삼각형의 밑변, 높이, 빗변을 한 변으로 갖는 각각의 정사각형을 만든다. 그리고 각각의 정사각형 넓이를 구한다.
(단, 밑변의 길이와 높이는 양의 정수)



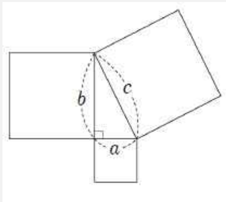
<3단계> 다른 직각삼각형을 몇 개 더 만들어 보고 각각의 삼각형에 <2단계>를 실시한다.

<4단계> 결과를 모두 다음과 같이 표에 기록한다.

직각 삼각형	밑변의 길이	높이	(가)의 넓이	(나)의 넓이	(다)의 넓이
A	1	2	1	4	5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

<5단계> 표를 보고 정사각형 넓이 사이의 규칙성을 찾아본다.

<6단계> 직각삼각형의 밑변의 길이, 높이, 빗변의 길이를 각각 a, b, c라 하고 그 각각의 변을 한 변으로 갖는 정사각형 넓이 사이의 규칙성을 식으로 표현한다.



<7단계> 역동적 기하 소프트웨어를 사용하여 다양한 직각삼각형에 대해서 $a^2+b^2=c^2$이 성립하는지 알아본다.

<보기>

ㄱ. <2단계>부터 <4단계>는 학습 주제를 탐구하고 구조를 점진적으로 파악하는 안내된 탐구 단계(제한적 탐구 단계, directed orientation)이다.

ㄴ. <6단계>는 학습한 아이디어를 명확하게 하는 발전/명료화 단계(explication)이다.

ㄷ. <7단계>는 다양한 해결 방법을 찾은 후 새로운 관련성을 찾는 자유탐구 단계(free orientation)이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 정수 전체의 집합을 $\mathbb{Z}$라 하고 모든 자연수 n에 대하여 집합 A_n과 B_n을 다음과 같이 정의하자.

$$A_n=\{x\in\mathbb{Z}\mid x\le n\},\ B_n=\{x\in\mathbb{Z}\mid x\ge -n\}$$

<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [1.5점] [2010]

<보기>

ㄱ. $\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n\cap B_n)=\{-1,0,1\}$

ㄴ. $\mathbb{Z}\cap\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n^c\cap B_n^c)\right)=\varnothing$

ㄷ. $\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n-B_n)=\{x\in\mathbb{Z}\mid x\le -1\}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 위에서 여가산위상(countable complement topology) $\mathfrak{I}$를 다음과 같이 정의하자.

$$\mathfrak{I}=\{U\subseteq\mathbb{R}\mid \mathbb{R}-U\text{는 가산집합}\}\cup\{\varnothing\}$$

<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [2점] [2010]

<보기>

ㄱ. 위상공간 $(\mathbb{R},\mathfrak{I})$는 T_1-공간이다.

ㄴ. 위상공간 $(\mathbb{R},\mathfrak{I})$는 분리(분해)가능공간(separable space)이다.

ㄷ. 위상공간 $(\mathbb{R},\mathfrak{I})$의 부분집합 A가 콤팩트(compact)이기 위한 필요충분조건은 A가 유한집합인 것이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

17. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 위에서 $\{[a,b)\mid a,b\in\mathbb{R}\}$를 기저(base)로 하는 위상을 $\mathfrak{I}_1$이라 하자.

집합 $A=\{1,2,3,4\}$에 대하여 다음과 같이 정의된 함수 $f:(\mathbb{R},\mathfrak{I}_1)\to A$를 생각하자.

$$f(x)=\begin{cases}1, & x<0\\ 2, & x=0\\ 3, & 0<x\le 1\\ 4, & x>1\end{cases}$$

함수 f에 의해서 만들어진 A 위에서의 상위상(quotient topology)을 $\mathfrak{I}$라 할 때, 위상공간 $(A,\mathfrak{I})$에서 열린 집합(open set)의 총 개수는? (단, $[a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x<b\}$이다.) [2점] [2010]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

18. 자연수 전체의 집합을 $\mathbb{N}$이라 하자. 집합 $X=\{n\in\mathbb{N}\mid n\ge 2\}$의 각 원소 n에 대하여

$$B_n=\{k\in X\mid k\text{는 } n\text{의 약수}\}$$

라 하고, $\{B_n\mid n\in X\}$를 기저로 하는 X 위에서의 위상을 $\mathfrak{I}$라 하자. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은? [2.5점] [2010]

① 집합 $\{2,4,6,8,10\}$은 열린 집합이다.
② 소수 전체의 집합은 열린 집합이다.
③ 소수 전체의 집합은 X에서 조밀(dense)하다.
④ 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $\{x\}$의 폐포(closure)는 $\{nx\mid n\in\mathbb{N}\}$이다.
⑤ 함수 $f:(X,\mathfrak{I})\to(X,\mathfrak{I}')$을 $f(x)=x$로 정의할 때, f는 $x=2$에서 연속이다. 여기서 $\mathfrak{I}'$은 X 위에서의 이산위상(discrete topology)이다.

19. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡선 γ를 두 곡면

$$S_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2-y^2=1,\ x>0\},$$
$$S_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid z=xy\}$$

의 교선이라 하자. 이때 γ 위의 점 $q=(1,0,0)$에서의 γ의 접선벡터와 수직이고 점 q를 포함하는 평면에 속하는 점은? [2점] [2010]

① $(0,1,1)$ ② $(1,0,1)$
③ $(1,1,1)$ ④ $(1,-1,-1)$
⑤ $(-1,1,-1)$

20. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 두 곡면

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid z^2-x^2-y^2=2\},$$
$$P=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid z=2\}$$

의 교선을 α라 하자. 이때 곡면 S 위에 놓인 곡선으로서 α의 측지곡률(geodesic curvature)의 절댓값은? [2010]

① 0 ② $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ⑤ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

21. <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [2점] [2010]

<보기>

ㄱ. 부정방정식 $7x+31y=2$의 정수해가 존재한다.

ㄴ. 합동식 $6x\equiv 22\pmod{32}$의 정수해는 법 32에 대하여 1개뿐이다.

ㄷ. 합동식 $x^2+10x+20\equiv 0\pmod{17\cdot 23}$의 정수해가 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

22. 정수 2는 법 29에 대한 원시근(primitive root)이다. 1보다 크거나 같고 28보다 작거나 같은 정수 중 합동식 $x^4 \equiv 1 \pmod{29}$의 해를 모두 곱한 값을 m이라 할 때, $2^k \equiv m \pmod{29}$를 만족시키는 최소의 양의 정수 k는? [2점] [2010]

① 1　② 4　③ 7
④ 14　⑤ 28

23. 행렬 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$에 대한 다음 명제 중 옳지 않은 것은? [2점] [2010]

① A의 고유다항식(characteristic polynomial)은 $x^3 - 6x^2 - 9x + 54$이다.
② A는 항등행렬이 아닌 두 개의 가역행렬(정칙행렬)의 곱으로 나타낼 수 있다.
③ A의 수반행렬(adjoint matrix)의 행렬식(determinant)은 A의 행렬식의 제곱과 같다.
④ A^2의 모든 고윳값(eigenvalue, characteristic value)들의 합은 36이다.
⑤ 함수 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$를 임의의 $v \in \mathbb{R}^3$에 대하여 $T(v) = Av$로 정의할 때, T는 정칙선형사상이다.

24. 실수체 $\mathbb{R}$ 위에서 정의된 벡터공간 $\mathbb{R}^3$에 관련된 <보기>의 명제 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [1.5점] [2010]

<보기>

ㄱ. 유리수 전체의 집합 $\mathbb{Q}$에 대하여 $\mathbb{Q}^3$는 $\mathbb{R}^3$의 부분공간이다.
ㄴ. $\mathbb{R}^3$의 부분공간 $U = \{(x, y, z) \mid z = x + 5y\}$에 대하여 $\mathbb{R}^3$가 U와 W의 직합(direct sum) $U \oplus W$와 같게 되는 $\mathbb{R}^3$의 부분공간 W가 존재한다.
ㄷ. 선형사상 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x - y, 2y, x - 3z)$에 대하여 T의 핵(kernel) $\ker(T)$의 차원은 1이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

25. 군 G가 유한군(finite group)이고 H와 K가 G의 부분군일 때, 다음 명제 중 옳지 않은 것은? [1.5점] [2010]

① G와 H의 부분군의 개수가 같으면 $G = H$이다.
② G가 아벨군(가환군)이면 HK는 G의 정규부분군(normal subgroup)이다.
③ G의 위수(order)가 12이면 G는 단순군(simple group)이다.
④ G가 순환군(cyclic group)이면 H와 K는 모두 아벨군이다.
⑤ $H^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in H\}$는 G의 부분군이다. (단, a^{-1}는 a의 역원이다.)

26. 잉여군(quotient group, factor group)에 관련된 <보기>의 명제 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [2.5점] [2010]

<보기>

ㄱ. 군 G의 위수가 40이면, 위수가 5인 정규부분군 H와 위수가 8인 잉여군 G/H가 존재한다.
ㄴ. 군 $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$의 잉여군의 집합
$$X = \{G/N \mid N\text{은 } G\text{의 정규부분군}\}$$
에 속하며 서로 동형이 아닌 잉여군은 모두 4개이다.
ㄷ. 정수의 집합에서 정의된 덧셈군 $\mathbb{Z}$의 부분군 $6\mathbb{Z}$에 의한 잉여군 $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$는 모두 3개의 부분군을 갖는다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

27. 정수환 $\mathbb{Z}$에 관련된 다음 명제 중 옳지 않은 것은? [2점] [2010]

① $\mathbb{Z}$의 부분환은 무한히 많이 존재한다.
② $\mathbb{Z}$와 $\mathbb{Z}$의 부분환 $3\mathbb{Z}$는 환동형(ring isomorphic)이다.
③ $\mathbb{Z}$의 부분환 $17\mathbb{Z}$는 $\mathbb{Z}$의 극대아이디얼(maximal ideal)이다.
④ $\mathbb{Z}$의 주아이디얼(principal ideal)은 무한히 많이 존재한다.
⑤ $\mathbb{Z}$의 원소 a가 소원(prime element)이면, a는 기약원(irreducible element)이다.

28. 체 $\mathbb{Q}$는 유리수체이고 $\mathbb{Q}[x]$는 다항식환이다. 체 E를 다항식 $f(x) = (x^2 - 2)(x^2 - 11) \in \mathbb{Q}[x]$의 분해체(splitting field)라 하자. 체 E의 부분체와 관련된 <보기>의 명제 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [2.5점] [2010]

<보기>

ㄱ. 원소 $\alpha \in E$를 첨가한 단순확대체(simple extension field) $\mathbb{Q}(\alpha)$에 속하는 모든 원소는 $\mathbb{Q}$ 위에서 대수적(algebraic)이다.
ㄴ. 체 $\mathbb{Q}(\beta^2)$ 위에서 체 $\mathbb{Q}(\beta)$의 차수(degree) $[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}(\beta^2)]$가 1보다 큰 홀수가 되는 원소 $\beta \in E$가 존재한다.
ㄷ. 차수 $[E : \mathbb{Q}(\gamma)]$가 1인 원소 $\gamma \in E$가 존재한다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄱ, ㄷ

29. 상수수열이 아닌 실수열 $\{x_n\}$에 대한 <보기>의 명제 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [1.5점] [2010]

<보기>

ㄱ. $\lim\limits_{n \to \infty} \left| \dfrac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \dfrac{1}{3}$ 이면 수열 $\{x_n\}$은 수렴한다.
ㄴ. 집합 $\{x_n \mid n\text{은 자연수}\}$가 단 하나의 극한점 (집적점, limit point, cluster point, accumulation point)을 가지면 수열 $\{x_n\}$은 수렴한다.
ㄷ. 수열 $\{\sin x_n\}$은 수렴하는 부분수열을 갖는다.

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

30. 실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$라 할 때, <보기>에서 균등연속함수(uniformly continuous function)를 모두 고른 것은? [1.5점] [2010]

<보기>

ㄱ. $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2x^2 + 3}$
ㄴ. $g : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \displaystyle\int_1^x e^{-t^2} dt$
ㄷ. $h : [0, 3) \to \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 3}$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

31. 실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$, 복소수 전체의 집합을 $\mathbb{C}$라 하자. 집합 X가 $\mathbb{R}$ 또는 $\mathbb{C}$일 때, 미분가능한 함수

$$f_i : X \to X \ (i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

가 상수함수가 될 충분조건으로 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2점] [2010]

<보기>

ㄱ. $X=\mathbb{R}$일 때 $f_1^{(n)}(0) = 0 \ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$

ㄴ. $X=\mathbb{C}$일 때 $f_2^{(n)}(0) = 0 \ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$

ㄷ. $X=\mathbb{R}$일 때 $f_3\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0 \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

ㄹ. $X=\mathbb{C}$일 때 $f_4\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0 \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(단, $f_i^{(0)}=f_i$이고 $f_i^{(n)}$은 f_i의 n계 도함수이다.)

① ㄱ, ㄷ ② ㄱ, ㄹ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄴ, ㄹ ⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

32. 실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$라 하자. 미분가능한 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$와 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$에 대한 <보기>의 명제 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [2.5점] [2010]

<보기>

ㄱ. f'이 단조함수(monotone function)이면 f'은 연속함수이다.

ㄴ. $L\in\mathbb{R}$일 때, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=L$ 이면 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$이다.

ㄷ. 어떤 점 $c\in\mathbb{R}$에서 $g'(c)>0$이라 하자. 그러면 적당한 양수 δ 가 존재해서 임의의 $x, y\in(c-\delta, c+\delta)$에 대하여 $x<y$이면 $g(x)<g(y)$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

33. 실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$라 하자. 자연수 n 에 대하여 함수 $f_n : [0,\infty)\to\mathbb{R}$와 $g_n : [0,\infty)\to\mathbb{R}$를 각각

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{n^2}, & x \le n \\ 0, & x > n \end{cases}, \quad g_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-kx}}{k^3}$$

로 정의할 때, 함수열 $\{f_n\}$과 $\{g_n\}$에 대한 <보기>의 명제 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [2.5점] [2010]

<보기>

ㄱ. $\{f_n\}$과 $\{g_n\}$은 모두 균등수렴(평등수렴, 고른수렴, uniform convergence)한다.

ㄴ. $\{f_n\}$의 극한함수를 f라 하면 수열 $\left\{\displaystyle\int_0^\infty f_n(x)\,dx\right\}$는 $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$로 수렴한다.

ㄷ. $\{g_n\}$의 극한함수를 g라 하면 $\{g_n'\}$은 g'으로 점별수렴(pointwise convergence)한다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

34. 3차원 공간 $\mathbb{R}^3$에서 영역

$$D = \left\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+\frac{z^2}{4} \le 1\right\}$$

일 때, 다음 삼중적분의 값은? [1.5점] [2010]

$$\iiint_D z^2\,dx\,dy\,dz$$

① $\dfrac{64}{15}\pi$ ② $\dfrac{32}{15}\pi$ ③ $\dfrac{16}{15}\pi$
④ $\dfrac{8}{15}\pi$ ⑤ $\dfrac{4}{15}\pi$

35. 다음은 주어진 문제의 풀이를 단계별로 제시한 것이다. (가), (나), (다), (라)에 알맞은 것은? [2.5점] [2010]

<문제>

복소수 전체 집합을 $\mathbb{C}$라 하자. $D=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<2\}$이고, 함수 $f : D\to\mathbb{C}$가 D에서 해석적(analytic)이라 하자. $f(0)=f'(0)=0$, $f''(0)\neq 0$이고 $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{i}{12}$이며 모든 $z\in D$에 대해서 $|f(z)|\le 3$일 때, $f\left(\dfrac{2i}{3}\right)$의 값은?

<풀 이>

<1단계> 함수 f가 D에서 해석적이므로 $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$이 되고, 따라서 $f(z) = \boxed{(가)}\cdot g(z)$의 꼴이다. (단, $g(z)$는 D에서 해석적이며 $g(0)\neq 0$ 이다.)

<2단계> $0<r<2$인 r에 대하여 $|z| = r$일 때, $|g(z)|\le\boxed{(나)}$ 이 성립한다. 여기서 최대 절댓값 정리(maximum modulus theorem)를 적용하면 $|z|\le r$일 때, $|g(z)|\le\boxed{(나)}$ 이다. 이 명제는 임의의 $r<2$에 대하여 성립하므로 모든 $z\in D$에 대하여 $|g(z)|\le\boxed{(다)}$ 이다.

<3단계> 위의 결과와 $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{i}{12}$를 사용하여 $g(z)$를 구할 수 있고, 이를 이용하면 $f\left(\dfrac{2i}{3}\right)=\boxed{(라)}$ 임을 알 수 있다.

	(가)	(나)	(다)	(라)
①	z	$\dfrac{3}{r}$	$\dfrac{3}{2}$	$\dfrac{i}{12}$
②	z	$\dfrac{3}{r}$	$\dfrac{3}{2}$	$-\dfrac{1}{3}$
③	z^2	$\dfrac{3}{r}$	$\dfrac{3}{2}$	$\dfrac{i}{12}$
④	z^2	$\dfrac{3}{r^2}$	$\dfrac{3}{4}$	$-\dfrac{1}{3}$
⑤	z^2	$\dfrac{3}{r^2}$	$\dfrac{3}{4}$	$-\dfrac{i}{3}$

36. 복소평면에서 곡선 C가 $C : z(t)=e^{it} \ (0\le t\le 2\pi)$로 나타내지는 단위원일 때, 다음 복소적분값 A, B에 대하여 $\dfrac{A}{B}$의 값은? [2점] [2010]

$$A = \int_C \left(e^{z^2}+z^2 e^{\frac{1}{z}}\right)dz$$

$$B = \int_C \frac{1-z}{\sin z}\,dz$$

① $\dfrac{1}{6}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{1}{3}$
④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ 1

37. 빨간색, 노란색, 파란색 구슬이 각각 20개씩 들어 있는 바구니에서 30개의 구슬을 한꺼번에 꺼낸다고 하자. 꺼낸 구슬 중 빨간색, 노란색, 파란색 구슬의 개수를 각각 x, y, z라 할 때, 서로 다른 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는? [2점] [2010]

① 331 ② 341 ③ 351
④ 361 ⑤ 371

38. 단순평면그래프(simple planar graph)에 대한 〈보기〉의 명제 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [2점] [2010]

〈보기〉

ㄱ. 완전이분그래프 $K_{3,4}$는 평면그래프가 아니다.

ㄴ. 모든 꼭짓점의 차수(degree)가 6 이상인 평면그래프가 존재한다.

ㄷ. 꼭짓점의 개수가 30인 평면그래프를 변(edge)이 교차하지 않게 평면에 그렸을 때, 하나의 면(face)만 사각형이고 나머지 면은 모두 삼각형이면 변의 개수는 83이다. (단, 여기서 삼각형(사각형)이라 함은 3(4)개의 변으로 둘러싸인 면을 의미하고, 외부영역(unbounded region)도 면으로 간주한다.)

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

39. 이산형 확률변수 X의 적률생성함수(moment generating function)가 다음과 같다.

$$M_X(t) = \mathrm{E}[e^{tX}] = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}e^{-t} + \frac{2}{5}e^{t} \quad (t\text{는 실수})$$

이때 확률변수 $Y = X^2$의 평균과 분산은? [2점] [2010]

	평균	분산
①	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{25}$
②	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{25}$
③	$\frac{1}{5}$	$\frac{14}{25}$
④	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{25}$
⑤	$\frac{3}{5}$	$\frac{14}{25}$

40. 과거 조사에 의하면 어느 지역의 초등학교 5학년 학생들의 신장은 평균 141.0cm이었다. 줄넘기 운동이 또래 아이들의 신장 발육에 도움이 되는지를 알아보고자 체육 활동에서 이 운동을 적극 권장하여 실시하여 왔다. 이 운동을 꾸준하게 실시한 또래 아이들 중 임의로 추출한 81명의 신장을 조사한 결과 평균 142.2cm, 표준편차 6.0cm이었다. 줄넘기 운동이 아이들의 신장 발육에 도움이 된다고 할 수 있는지를 유의수준 $\alpha = 0.05$로 다음 단계와 같이 검정할 때, (가), (나), (다)에 알맞은 것은? (단, 이 지역 아이들의 과거와 현재의 생활환경과 영양 섭취 등은 같고, 아이들의 신장은 정규분포를 따른다고 가정한다.) [2점] [2010]

〈1단계〉 가설설정

귀무가설 H_0에 대한 대립가설 H_1 : $\boxed{\text{(가)}}$

〈2단계〉 검정통계량과 분포

표본의 크기가 $n = 81$로 충분히 크므로 귀무가설 H_0가 참이라는 가정 하에서 검정통계량 $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$는 표준정규분포 $N(0, 1)$에 근사한다. (단, $\overline{X}$는 표본평균, μ는 모평균, S는 표본 표준편차이다.)

〈3단계〉 유의수준 $\alpha = 0.05$에 대한 기각역은 $\boxed{\text{(나)}}$

〈4단계〉 검정통계량의 관측값을 구한다.

〈5단계〉 결론

검정통계량의 관측값을 기각역과 비교한 결과 줄넘기 운동이 신장 발육에 $\boxed{\text{(다)}}$

※ 참고 : $Z \sim N(0, 1)$일 때, $P(|Z| \le 1.645) = 0.90$, $P(|Z| \le 1.96) = 0.95$ 이다.

	(가)	(나)	(다)
①	$\mu > 141.0$	$Z \ge 1.645$	도움이 된다고 할 수 있다.
②	$\mu > 141.0$	$Z \ge 1.96$	도움이 된다고 할 수 있다.
③	$\mu > 141.0$	$\lvert Z \rvert \ge 1.96$	도움이 된다는 충분한 증거가 없다.
④	$\mu > 142.2$	$Z \ge 1.96$	도움이 된다는 충분한 증거가 없다.
⑤	$\mu > 142.2$	$Z \ge 1.645$	도움이 된다는 충분한 증거가 없다.

1. 다음은 중학교 1학년에서 정수의 덧셈과 곱셈을 지도한 후, 유리수의 정의와 유리수의 덧셈, 곱셈을 지도하는 두 교사의 방법이다. 물음에 답하시오. [30점] [2010 2차, 1교시]

<김 교사>

- 유리수는 분모($\neq 0$), 분자가 정수인 분수 꼴로 나타낼 수 있는 수이다.

  예를 들면 $\frac{2}{3}$, $\frac{-3}{5}$, $\frac{7}{-2}$, $\frac{-5}{-6}$ 등이다.

- 유리수의 계산은 초등학교에서 다룬 분수의 계산법을 따른다.

  예를 들면 $\frac{3}{-4}+\frac{5}{7}=\frac{3\times 7+(-4)\times 5}{(-4)\times 7}=\frac{1}{-28}$이다.

<정 교사>

- 유리수 $\frac{b}{a}$는 방정식 $a\times x=b$의 해이다(단, a와 b는 정수이고 $a\neq 0$).

  예를 들면 $\frac{-2}{3}$는 $3\times x=-2$의 해이다.

- 유리수의 계산은 정수의 덧셈과 곱셈에 대한 결합법칙, 교환법칙, 분배법칙에 형식불역의 원리(principle of the permanence of equivalent forms)를 적용하여 지도한다.

< 참고사항 >

초등학교에서 다루는 분수의 계산법 :

$$\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{b\times c+a\times d}{a\times c},\ \frac{b}{a}\times\frac{d}{c}=\frac{b\times d}{a\times c},\ \frac{b}{a}=\frac{b\times c}{a\times c}$$

(단, a, b, c, d는 자연수)

1-1. 김 교사의 방법으로 수업을 받은 학생들이 $\left(-\frac{2}{3}\right)\times\frac{4}{5}$를 계산할 수 있도록 하기 위해서 김 교사가 추가해야 할 설명이 무엇인지 제시하고, 김 교사의 방법과 추가한 설명에 따라 $\left(-\frac{2}{3}\right)\times\frac{4}{5}$의 계산과정을 상세하게 쓰시오. [10점]

1-2. 정 교사는 학생들에게 $\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{5}{7}$와 $\left(-\frac{3}{4}\right)\times\frac{5}{7}$를 계산하는 방법을 지도하려고 한다. 이를 위해 정 교사가 고려해야 할 구체적인 내용을 다음 순서에 따라 서술하시오. [20점]

① 형식불역의 원리의 상세한 의미

② 추가로 정의해야 할 수학적 대상에 대한 설명

③ $\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{b\times c+a\times d}{a\times c}$, $\frac{b}{a}\times\frac{d}{c}=\frac{b\times d}{a\times c}$의 유도

(단, a, b, c, d는 정수이고 $a\neq 0$, $c\neq 0$)

④ $\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{5}{7}$와 $\left(-\frac{3}{4}\right)\times\frac{5}{7}$의 상세한 계산 과정

2. 곡면 X, Y가 다음과 같이 각각 주어져 있을 때, 물음에 답하시오. [2010 2차, 1교시]

① 사각형

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$$

상의 동치관계 $\sim$가 다음과 같이 주어졌다고 하자.

$(x,0)\sim(x,1),\ 0\le x\le 1$

$(0,y)\sim(1,y),\ 0\le y\le 1$

$X=D/\sim$는 D상의 동치관계 $\sim$에 의해 유도된 상공간(quotient space)이다. 단, D상의 위상은 $\mathbb{R}^2$상의 보통위상(usual topology)에 대한 상대위상(relative topology, subspace topology)이다.

② Y는 아래 좌표조각 $\mathbf{x}$와 같이 보통 매개화(usual parametrization)에 의해 표현된 원환면(torus of revolution)이다.

$$\mathbf{x}(u,v)=((2+\cos u)\cos v,\ (2+\cos u)\sin v,\ \sin u)$$

곡면 X가 T_2공간(Hausdorff space)이 됨을 보이시오. 또한 곡면 X와 Y상의 가우스곡률(Gaussian curvature)을 구체적으로 비교해 봄으로써 가우스곡률이 서로 다르게 주어질 수 있음을 보이고, 이와 같은 현상에 비추어 가우스-보네(Gauss-Bonnet) 정리의 의미를 설명하시오. [20점]

3. 다음은 실수 e에 관한 두 교사의 대화이다. 물음에 답하시오. [2010 2차, 2교시]

김 교사:	실수 e가 무리수임을 무한급수를 이용해 보일 수 있습니다. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$으로 정의되는 수 e가 무리수임을 증명하려면, 먼저 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$이 수렴함을 보여야 합니다. 한편 무한급수 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$이 수렴하고 그 합이 e와 같음을 보일 수 있습니다. 이 사실에 귀류법을 적용하면 ①$\underline{e\text{가 무리수}}$임을 증명할 수 있습니다.
정 교사:	실수 e와 관련된 내용 중, 표준정규분포의 확률밀도함수에 대한 특이적분(improper integral) ②$\underline{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx=1}$을 이중적분(double integral)의 성질을 사용하여 증명할 수 있습니다.
박 교사:	네, 맞습니다. 그렇지만, 고등학교 학생들이 김 선생님과 정 선생님의 증명 과정을 이해하기는 어렵다고 생각합니다. 저는 ③$\underline{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2.7182\cdots=e\text{임을 직관적으로 이해시킨}}$ 후, 학생들이 여러 극한값을 능숙하게 구하도록 하는 데에 많은 시간을 할애합니다. 그리고 e가 무리수임이 알려져 있음을 간략하게 언급하는 정도로만 다룹니다. 한편, 표준정규분포의 확률밀도함수에 대한 것도 여러 통계 문제를 해결하는 데에 초점을 맞추어 지도합니다.

3-1. 김 교사와 정 교사가 제시한 방법에 따라 밑줄 친 ①과 ②를 각각 증명하시오. [20점]

3-2. 2007년 개정 수학과 교육과정에서는 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상을 학습 소재로 하여 수학적 개념・원리・법칙을 도입하고, 계산 능력 배양을 목표로 하지 않는 경우의 복잡한 계산 수행, 수학적 개념・원리・법칙의 이해 등을 위하여 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구를 활용하여 수학 학습의 효과를 높이도록 권고하고 있다.

박 교사가 이러한 권고사항에 따라 밑줄 친 ③을 위해 시도할 것으로 예상되는 지도 방안 한 가지를 그 근거와 함께 제시하시오. [10점]

4. 정수환 $\mathbb{Z}$ 위의 다항식환 $\mathbb{Z}[x]$에 속하는 다항식 $f(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x) = x^6 + 12x^4 - 3x^3 - 108x^2 + 24x - 120$$

환 R_n $(n = 1, 2, 3, 4)$을 다음과 같이 정의할 때, 잉여환(factor ring, quotient ring) $R_3 = \mathbb{Q}[x]/(f(x))$가 유리수체 $\mathbb{Q}$의 확대체의 구조를 갖는다는 것을 증명하고, 각각의 R_n $(n = 1, 2, 3, 4)$ 안에서 다항식 $f(x)$의 근의 존재성을 증명하시오. [20점] [2010 2차, 2교시]

① $R_1 = \mathbb{Q}$

② $R_2 = \mathbb{C}$ (단, $\mathbb{C}$는 복소수체)

③ $R_3 = \mathbb{Q}[x]/(f(x))$ (단, $(f(x))$는 $f(x)$에 의하여 생성된 주아이디얼(principal ideal))

④ $R_4 = F$ (단, F는 $\mathbb{Z}_2$위에서의 차수(degree)가 $[F : \mathbb{Z}_2] = 2^{10}$인 체)

1. 제 3차 수학과 교육과정부터 현재까지 우리나라 수학과 교육과정 변천 과정에서 나타난 주요 특징으로 적절하지 않은 것은? [1.5점] [2011]

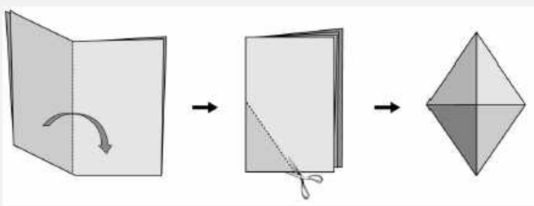
① 수학적 구조를 강조하고 집합 개념을 토대로 수학을 전개하며 수학의 논리적 엄밀성을 강조하였다.
② 학생의 생활 경험을 중시함으로써 생기는 단점을 해소하기 위하여 수학의 체계를 근간으로 수학 본연의 계통성을 중시하는 방향으로 선회하였다.
③ 단계형 수준별 교육과정으로 개인의 능력과 적성 등을 고려한 수학교육을 도모하였다.
④ 계산력 향상을 목표로 하지 않는 복잡한 계산과 문제해결력 향상 등을 위하여 계산기나 컴퓨터를 가능하면 적극적으로 활용할 수 있게 하였다.
⑤ 최소의 필수 기본 지식 및 기능을 정선하고 문제 해결력과 정의적 측면을 강조하였다.

2. 라카토스(I. Lakatos)는 반례의 출현과 오류를 수정해 가는 과정이 수학의 발달에서 중요하다고 하였다. 반례를 찾는 활동이 수학교육 측면에서 지니는 긍정적 효과로 적절하지 않은 것은? [2점] [2011]

① 반례를 찾는 과정에서 기존에 학습한 수학적 지식을 통합하거나 견고하게 만들 수 있다.
② 반례를 찾는 과정을 통해 비판적 사고력을 신장시킬 수 있다.
③ 예외적인 경우를 찾는 활동을 통해 이전의 추측에서 고려하지 못한 부분을 생각해 보게 함으로써 사고의 엄밀성을 강화시킬 수 있다.
④ 결과에 이르게 된 과정이나 관련된 지식을 재음미시켜 수학적 힘을 신장시킬 수 있다.
⑤ 반례를 찾아 명제가 거짓임을 밝힘으로써 수학에서 거짓 명제가 의미 없다는 인식을 강화시킬 수 있다.

3. 다음은 중학교 도형 단원에서 선분의 수직이등분선 작도 방법의 도입을 위해 고안된 활동이다. 이 활동에 대한 설명으로 적절한 것만을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2점] [2011]

[활동] 그림과 같이 직사각형 모양의 색종이를 네 꼭짓점이 한 점에서 만나도록 가로와 세로로 한 번씩 접은 후, 점선을 따라 가위로 잘라 펼쳐 봅시다.



<보기>

ㄱ. 파푸스(Pappus)의 '분석법적 아이디어'를 교수학적으로 구현한 것이다.
ㄴ. 주어진 선분의 양 끝점에서 거리가 같은 두 점을 찾기 위하여 컴퍼스를 이용할 수 있음을 알게 해 준다.
ㄷ. 이 활동을 통해 찾아낸 작도 방법이 논리적으로 옳음을 정당화하기 위해서는 후속적인 절차가 필요하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

4. 피아제(J. Piaget)의 인지발달 이론에서 핵심적인 개념 중의 하나는 '반영적 추상화(reflective abstraction)'이다. 이 개념과 관련된 수학적 활동이나 과정의 예로 적절하지 않은 것은? [2.5점] [2011]

① 구체적인 세기를 통한 덧셈 활동이 덧셈 알고리즘으로 공식화되는 과정
② x를 $2x$로 대응시키는 활동이 함수 $y=2x$의 그래프 전체로 대상화(encapsulation)되는 과정
③ 다양한 모양을 보고 공통적인 외형을 인식하는 활동
④ 다양한 삼각형에서 두 변의 중점을 연결한 선분이 밑변의 길이의 반이 되고 밑변과 평행하다는 점을 확인하여 '삼각형의 중점연결정리'에 대한 가설을 설정하는 활동
⑤ 원 모양으로 배열되어 있는 공깃돌을 시계 방향과 시계 반대방향으로 각각 세어 본 후 결과가 같음을 확인하여 '세는 순서에 관계없이 개수는 일정하다.'고 인식하는 활동

5. 다음은 문제와 이에 대한 학생 (가)와 학생 (나)의 풀이 방법이다. 문제 풀이 방법에 대한 설명으로 가장 적절한 것은? [2점] [2011]

[문제] 수직선 위의 두 점 A(-3), B(5)를 이은 선분 AB를 $3:1$로 내분하는 점 P의 좌표를 구하고 그 이유를 쓰시오.

[풀이]
학생 (가) : 두 점 사이의 거리는 $5-(-3)=8$이고, $3:1$로 내분하므로 선분 AB는 네 등분되고 한 등분 길이는 $8\div 4=2$이다. 선분 AP의 길이는 한 등분 길이의 3배이므로 $2\times 3=6$이고, 이것을 A(-3)에 더하면 내분점 P는 $-3+6=3$이다. 따라서 내분점 P의 좌표는 P(3)이다.

학생 (나) : 수직선 위의 두 점에 대해 선분을 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표를 구하는 공식은 $\mathrm{P}\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}\right)$이다. 이 공식에서 분모는 주어진 비의 두 수를 더하는 것이고, 분자는 비의 앞 수와 수직선의 오른쪽 좌표를 곱하고, 비의 뒤 수와 수직선의 왼쪽 좌표를 곱하여 더한 것이다. 분모는 $3+1=4$이고 분자는 $3\times 5+1\times(-3)=15-3=12$이므로, 구하는 내분점 P의 좌표는 P$(3)$이다.

① (가)의 풀이에서 내분점의 공식이 구조적 대상으로 다루어지고 있다.
② (가)의 풀이에서 수직선 위에서의 조작 활동을 통해 내분점의 공식이 유도되고 있다.
③ (나)의 풀이에서 내분점을 구하는 절차적 지식이 사용되고 있다.
④ (나)의 풀이에서 내분점을 구하는 절차에 대한 반성 활동이 이루어지고 있다.
⑤ (가)와 (나)의 풀이에서 내분점의 공식에 대한 형식화된 개념 정의가 사용되고 있다.

6. 다음은 일차함수 단원에 나오는 문제와 풀이이다. 수학적 모델링 관점에서 볼 때, 이 풀이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 모두 고른 것은? [1.5점] [2011]

[문제] 운동 중 분당 최대 한계 심장 박동수 h회와 신체 나이 a세 사이에는 $h=-0.8a+176$인 관계식이 성립한다고 하자. 신체 나이가 15세에서 20세가 되었을 때 운동 중 분당 최대 한계 심장 박동 수의 변화를 구하는 과정을 설명하시오.

[풀이] $a=15$를 대입하면 $h=-0.8\times 15+176=164$ 이고, $a=20$을 대입하면 $h=-0.8\times 20+176=160$이므로 $164-160=4$이다. 따라서 신체 나이가 15세에서 20세가 되었을 때 운동 중 분당 최대 한계 심장 박동 수는 4만큼 감소한다.

<보기>

ㄱ. 실세계 상황을 수학 문제로 단순화시키는 활동이 포함되어 있다.
ㄴ. 수학적 모델 내에서 찾은 해를 해석하는 활동이 포함되어 있다.
ㄷ. 수학적 모델을 탐색하고 수정하는 활동이 포함되어 있다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

7. 유추한 결과가 <u>거짓</u>인 것만을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2점] [2011]

<보기>

ㄱ. ‘두 양수 x, y에 대하여 $\sqrt{xy} \le \dfrac{x+y}{2}$가 성립한다.’ 에서 “세 양수 x, y, z에 대하여 $\sqrt[3]{xyz} \le \dfrac{x+y+z}{3}$가 성립한다.” 로 유추

ㄴ. ‘사다리꼴의 넓이는

$$\{(\text{아랫변의 길이})+(\text{윗변의 길이})\}\times(\text{높이})\times\frac{1}{2}$$

이다.’ 에서 “각뿔대의 부피는

$$\{(\text{아랫면의 넓이})+(\text{윗면의 넓이})\}\times(\text{높이})\times\frac{1}{3}$$

이다.” 로 유추

ㄷ. ‘삼각형의 세 중선은 한 점에서 만난다.’ 에서 사면체 각 면의 무게중심과 그 면에 마주보는 꼭짓점을 연결한 선을 사면체의 중선이라고 하면, “사면체의 네 중선은 한 점에서 만난다.” 로 유추

① ㄱ　　② ㄴ　　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　　⑤ ㄴ, ㄷ

8. 김 교사는 미분과 적분의 계산 방법을 지도한 후 ‘정적분의 활용’ 단원에서 속도와 거리 사이의 관계를 설명하고, 읽을거리 <A>를 학생들에게 제공하였다. 프로이덴탈(H. Freudenthal)의 수학화 이론 관점에서 볼 때, <A>와 김 교사의 수업에 대한 설명으로 적절하지 <u>않은</u> 것은? [2.5점] [2011]

<A>

14세기 수학자 오렘(Oresme)은 등가속도 운동 상황을 시각화하기 위해 그래프를 창안하였다. 먼저 일정하게 속력이 변하면서 움직이는 물체가 이동한 거리를 조사할 때, 동일한 시간 간격에서 속력이 같은 양만큼 증가한다는 것을 이용하여, 높이가 속력이고 폭이 시간 간격인 직사각형을 연결하여 그래프로 나타내었다. 그리고 오렘은 시간 간격을 매우 작게 함으로써 직선과 수평선 사이의 삼각형의 넓이가 움직인 거리와 같다는 것을 보였다. 오렘에 의해 도입된 그래프 표현과 위의 아이디어는 이후 미적분학의 기본 정리 등을 포함한 미적분 발달에 결정적인 역할을 하게 되었다.

① <A>에서 수학자 오렘이 한 것처럼 학생은 수학화 과정을 경험하는 것이 바람직하다.
② <A>에서 그래프는 등가속도 운동이라는 현상을 조직화하기 위한 수단으로 이용된다고 볼 수 있다.
③ <A>에서 그래프는 수학화를 위한 모델이라고 할 수 있다.
④ 김 교사의 수업은 수학화 이론의 역사 발생적 원리를 따랐다고 볼 수 있다.
⑤ 김 교사의 수업은 수학화 활동보다 수학화 결과를 강조한 것이라 볼 수 있다.

9. 다음은 어느 교사가 출제한 고등학교 로그 단원의 평가 문항이다. 2007년 개정 수학과 교육과정에서 제시하고 있는 인지적 영역의 평가 항목 중 이 문항으로 평가하고자 하는 것으로 가장 적절한 두 개를 <보기>에서 고른 것은? [2점] [2011]

빛이 어떤 유리 한 장을 통과할 때마다 밝기가 1% 씩 감소한다고 할 때, 빛이 이 유리 n장을 통과하면 밝기는 $(1-0.01)^n$배가 된다. 밝기가 100 럭스(Lux)인 빛이 이 유리 10장을 통과했을 때 빛의 밝기를 소수점 아래 둘째 자리까지 구하시오.
(단, $\log 9.036 = 0.9560$, $\log 9.90 = 0.9956$으로 계산한다.)

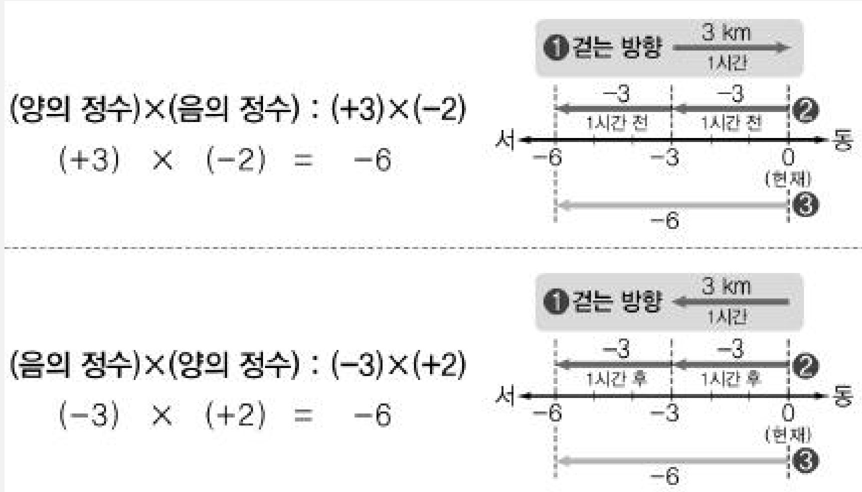
<보기>

ㄱ. 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고 적용하는 능력
ㄴ. 수학적 사고 과정과 결과를 합리적으로 의사소통하는 능력
ㄷ. 수학적 지식과 기능을 활용하여 타당하게 추론하는 능력
ㄹ. 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직하는 능력

① ㄱ, ㄷ　　② ㄱ, ㄹ　　③ ㄴ, ㄷ　　④ ㄴ, ㄹ　　⑤ ㄷ, ㄹ

10. <A>와 <B>는 2007년 개정 수학과 교육과정에 따른 중학교 1학년 교과서의 일부분이다. <A>와 <B>에서 음수의 연산을 다루는 방식에 관한 설명으로 적절하지 <u>않은</u> 것은? [2점] [2011]

<A>



<B>

①

5×	2	=	10
5×	1	=	5
5×	0	=	0
5×	(−1)	=	□
5×	(−2)	=	□

②

2	×5 =	10
1	×5 =	5
0	×5 =	0
(−1)	×5 =	□
(−2)	×5 =	□

(1) 위 ①에서 규칙을 찾아보고, □안에 알맞은 수를 말하여 보자.
(2) 위 ②에서 규칙을 찾아보고, □안에 알맞은 수를 말하여 보자.

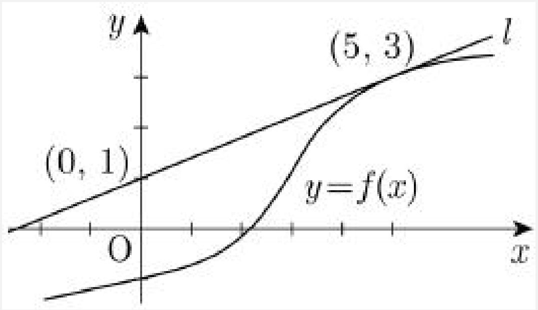
① <A>에서 음의 부호는 다중적인 의미를 가지지만 이것은 음수 개념 자체가 갖는 본질이라고 볼 수 있다.
② <A>와 같은 방식은 $(-6)\div(-3)=2$ 꼴의 나눗셈은 설명할 수 없다는 한계를 지닌다.
③ <A>와 같이 음수의 연산을 직관적 방법으로 지도하더라도 음수의 계산에 숙달되도록 많은 훈련이 필요하다.
④ <B>는 자연수 체계에서 인정된 성질이 유지되도록 수 체계와 연산을 확장하는 ‘형식불역의 원리’에 따라 음수의 곱셈을 도입하고 있다.
⑤ <B>와 같은 귀납적 확장은 기하학적으로 보면 반직선이나 선분이 직선으로 확장되면서 얻어지는 결과이다.

11. 다음은 고등학교 2학년 확률과 미적분에 대한 평가 문항과 이에 대한 정답률 및 답지 반응률이다. 최 교사는 이 자료에 근거하여 학생들의 이해 상태를 판단하였다. 적절하게 판단한 것만을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2점] [2011]

1. 공정한 동전을 6번 던질 때 '앞면-앞면-앞면-앞면-앞면-앞면'의 순서로 나올 확률을 a, '앞면-앞면-뒷면-뒷면-앞면-뒷면'의 순서로 나올 확률을 b라 하자. 옳은 것은?

① $a<b$　　② $a>b$　　③ $a=b$

2. 그림과 같이 직선 l이 점 $(5,3)$에서 곡선 $y=f(x)$에 접할 때, $f'(5)$의 값을 구하시오.



3. 다음 정적분의 값을 구하시오.

(1) $\int_{-3}^{3}|x+2|\,dx$　　(2) $\int_{-2}^{1}(3x^2-4x+2)\,dx$

문항 번호		정답률(%)	답지 반응률(%)		
			①	②	③
1		25	70	5	25
2		17			
3	(1)	45			
	(2)	93			

<보기>

ㄱ. 사건의 독립성에 대한 이해가 부족한 경향이 있다.
ㄴ. 미분계수의 기하학적 의미에 대한 이해가 부족한 경향이 있다.
ㄷ. 스켐프(R. Skemp)의 관점에서 보면 정적분에 대한 '관계적 이해'가 이루어졌다고 볼 수 있다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12. 다음은 어느 교사가 수학 I '수열의 수렴과 극한값 계산'을 지도한 수업 장면이다. 이 교사는 수열의 수렴을 정의하고 극한값 구하는 문제를 풀이한 다음, 그 결과를 그래프 계산기로 보여주고 있다. 이 수업 장면에 대한 설명으로 적절하지 <u>않은</u> 것은? [2점] [2011]

<수열의 수렴 정의>

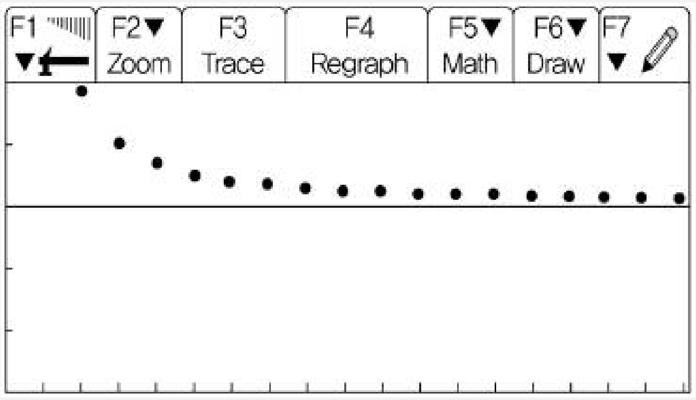
수열 $\{a_n\}$에서 n의 값이 한없이 커질 때 a_n의 값이 일정한 수 α에 한없이 가까워지면 이 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다고 하고, α를 극한값 또는 극한이라 한다.

기호: $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ 또는 $n\to\infty$일 때, $a_n\to\alpha$

[문제] $\dfrac{3n^2+2n-1}{n^2-1}$의 극한값은?

[풀이] $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+2n-1}{n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}}=\dfrac{3+0-0}{1-0}=3$

[그래프 계산기 결과 화면]



① 그래프 계산기로 그린 수열 그래프를 수학적 대상으로 조작함으로써 학생이 추측하도록 유도하고 있다.
② 그래프 계산기를 사용한 시각화를 통해 즉각적인 피드백을 제공하고 있다.
③ 이 수렴 정의는 학생에게 상수(constant) 수열의 극한값이 존재하지 않는다는 오개념을 유발시킬 수 있다.
④ 이 수렴 정의는 직관적 정의로서 n이 변함에 따라 a_n이 변화하는 동적인 측면을 표현하고 있다.
⑤ '한없이 커질 때… 한없이 가까워진다.'는 학생이 수열의 수렴을 일상적 언어로 이해하도록 정의한 것이다.

13. 다음은 중학교 수업의 한 장면이다. 이 장면에 대한 설명으로 적절한 것만을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2점] [2011]

교 사: 삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만나고 이 점이 삼각형의 외심이 된다는 것을 배웠습니다. 사각형의 경우에는 어떨까요?
자 영: 글쎄요. 아마도 사각형은 삼각형과 비슷하므로 네 변의 수직이등분선은 한 점에서 만날 것 같아요.
교 사: 확인해 봅시다.
[교사는 동적 기하 소프트웨어를 사용하여 다양한 예를 보여 준다.]
교 사: 한 점에서 만날 수도 있고 아닐 수도 있군요. 그럼 어떤 사각형일 때 한 점에서 만날까요? 삼각형 세 변의 수직이등분선의 교점이 삼각형의 어떤 중심인지 한번 생각해 보세요.
[대답 없음]
자 영: 삼각형에서 세 변의 수직이등분선의 교점은 외심입니다. 만약 사각형의 네 변의 수직이등분선이 한 점에서 만난다면 그 점이 이 사각형의 외심이 되지 않을까요? 실제로 외심이 됩니다. 이 외심은 사각형의 외접원의 중심입니다. 정리하면 사각형이 원에 내접한다면 네 변의 수직이등분선은 한 점에서 만납니다.

<보기>

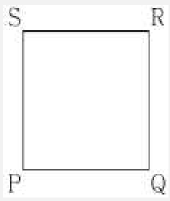
ㄱ. 동적 기하 소프트웨어를 학생 주도형의 구성주의적 관점에서 사용하고 있다.
ㄴ. 가르쳐야 한다는 교수학적 계약에 의한 압박으로, 토파즈효과(토파즈식 외면치레, Topaze effect)가 나타날 가능성이 있다.
ㄷ. 학생의 유추와 이에 대한 교사의 반례 제시를 포함하고 있다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

14. 반 힐레(P. M. van Hiele)의 기하 학습 수준을 알아보기 위해 문항을 개발하였다. 문항 A는 m 수준, 문항 B는 n 수준의 도달 여부를 판단하기 위한 것이다. 반 힐레 이론의 관점에서 이 두 수준에 대한 설명으로 가장 적절한 것은? [2점] [2011]

〈문항 A〉

사각형 PQRS는 정사각형이다. 옳은 것은?
① 선분 PR와 선분 RS의 길이는 같다.
② 선분 PS와 선분 QS의 길이는 같다.
③ 선분 QS와 선분 PR는 서로 수직이다.
④ 선분 PS와 선분 QR는 서로 수직이다.
⑤ 각 Q의 크기는 각 R의 크기보다 크다.



〈문항B 〉

두 문장
S: ΔABC의 세 변의 길이는 같다.
T: ΔABC에서 $\angle$B와 $\angle$C는 같다.
에 대하여 옳은 것은?
① S와 T는 동시에 참일 수 없다.
② S가 참이면 T도 참이다.
③ T가 참이면 S도 참이다.
④ S가 거짓이면 T도 거짓이다.
⑤ ① ~ ④ 모두 거짓이다.

① m 수준에서 다음 수준으로의 이행은 교육 내용이나 방법보다는 나이나 신체의 성숙에 달려 있다.
② m 수준에서 추론하는 학생은 공리, 정의, 정리, 증명의 의미와 역할을 이해할 수 있다.
③ m 수준에서는 도형이라는 대상을 도형의 성질이라는 수단에 의해 사고한다.
④ n 수준에서는 명제가 사고의 대상이 되며 명제 사이의 논리적 관계가 정리의 수단으로 등장한다.
⑤ n 수준에서 다음 수준으로의 이행을 위해서는 '안내된 탐구', '자유로운 탐구', '발전/명확화', '통합'의 4단계 순서로 교수·학습이 이루어져야 한다.

15. 각 성분이 실수인 3×3 정칙행렬(가역행렬) A의 수반행렬(adjoint matrix)을 adj$A$라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 모두 고른 것은? [2점] [2011]

〈보기〉

ㄱ. 임의의 자연수 n에 대하여 $(\mathrm{adj}A^n)=(\mathrm{adj}A)^n$이다.
ㄴ. 행렬 A의 전치행렬(transpose matrix)을 A^T라 할 때, $\mathrm{adj}(A^T)=(\mathrm{adj}\,A)^T$이다.
ㄷ. $\mathrm{adj}(\mathrm{adj}A)=A$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 정사각행렬(square matrix)에 대한 설명으로 옳은 것만을 〈보기〉에서 모두 고른 것은? [2점] [2011]

〈보기〉

ㄱ. 정칙행렬은 대각화가능(diagonalizable)하다.
ㄴ. 행렬 A의 전치행렬이 대각화가능하면 A는 대각화가능하다.
ㄷ. 선형사상

$$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y, z) = (x, x+y, y+z)$$

의 $\mathbb{R}^3$의 표준기저(standard basis)에 대한 행렬은 대각화가능하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

17. 소수(prime number)에 대한 〈보기〉의 명제 중 옳은 것만을 모두 고른 것은? [2점] [2011]

〈보기〉

ㄱ. p가 소수일 때, $p!+1$을 나누는 소수는 p보다 크다.
ㄴ. 홀수인 소수 p는 합동식 $(p-2)! \equiv 1 \pmod p$를 만족시킨다.
ㄷ. 홀수인 소수 $p(p \neq 3)$은 합동식 $3^{p-1} \equiv 1 \pmod{2p}$를 만족시킨다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 이차합동식 $x^2+44 \equiv 0 \pmod{111}$의 정수해는 법 111에 대하여 m개다. m의 값은? [2점] [2011]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

19. 덧셈군 $G = \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_7$에 대한 설명으로 옳은 것만을 〈보기〉에서 모두 고른 것은? [1.5점] [2011]

〈보기〉

ㄱ. G의 모든 부분군(subgroup)은 정규부분군(normal subgroup)이다.
ㄴ. G의 원소 $(3, 1)$의 위수(order)는 28이다.
ㄷ. G는 순환군(cyclic group)이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. $\mathbb{Z}$는 정수환이고 $\mathbb{Q}$는 유리수환이다. 환준동형사상(ring homomorphism) $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$가 일대일(injective)사상일 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 모두 고른 것은? [2점] [2011]

〈보기〉

ㄱ. 임의의 정수 n에 대하여 $g(n) = n$이다.
ㄴ. $\mathbb{Z}$의 임의의 아이디얼(ideal) I에 대하여 $g(I)$는 $\mathbb{Q}$의 아이디얼이다.
ㄷ. $\mathbb{Q}$의 임의의 아이디얼 J에 대하여 $g(I)=J$가 성립하는 $\mathbb{Z}$의 아이디얼 I가 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

21. 환 $\mathbb{Z}_{24}$위의 다항식환(polynomial ring) $R = \mathbb{Z}_{24}[x]$에 대하여 옳은 것은? [2.5점] [2011]

① R는 정역(integral domain)이다.
② R는 8개 이상의 단원(unit)을 갖는다.
③ R는 환 $\mathbb{Z}_4[x] \times \mathbb{Z}_6[x]$와 동형이다.
④ 다항식 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$은 $\mathbb{Z}_{24}$에서 오직 3개의 근을 갖는다.
⑤ 주아이디얼(principal ideal) $I = \langle x^2+12 \rangle$에 대하여 잉여환(factor ring, quotient ring) R/I는 체이다.

22. 유한체(finite field) $\mathbb{Z}_p$(p는 소수) 위의 다항식

$$f(x)=x^{p^4}-x\in\mathbb{Z}_p[x]$$

에 대하여 체 K가 $\mathbb{Z}_p$ 위에서의 $f(x)$의 분해체(splitting field)일 때, <보기>에서 옳은 것만을 모두 고른 것은? [2점] [2011]

<보기>

ㄱ. 임의의 원소 $\alpha\in K$에 대하여 $\alpha^{p^4}=\alpha$이다.

ㄴ. $\mathbb{Z}_p\subsetneq L\subsetneq K$를 만족시키는 중간체(intermediate field) L은 오직 한 개 존재한다.

ㄷ. 갈루아 군(Galois group) $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Z}_p)$는 위수(order)가 4인 순환군(cyclic group)이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

23. 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$를

$$f(x)=\int_{1+2x}^{1-2x}\left(1-t^3\sqrt{1+3t^2}\right)dt$$

로 정의할 때, $f'(0)$의 값은? (단, $\mathbb{R}$는 실수 전체의 집합이다.) [2점] [2011]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

24. <보기>에서 옳은 것만을 모두 고른 것은? [2점] [2011]

<보기>

ㄱ. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^2+7}}$은 수렴한다.

ㄴ. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{\pi}{\sqrt{n}}$는 수렴한다.

ㄷ. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{4^n+12^n}x^{2n}$의 수렴반경은 2이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

25. 실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 모두 고른 것은? [2점] [2011]

<보기>

ㄱ. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가 연속함수이고 실수열 $\{x_n\}$이 코시수열(Cauchy sequence)이면 $\{f(x_n)\}$도 코시수열이다.

ㄴ. 함수 $g:[0,1]\to[0,1]$에 대하여 합성함수 $g\circ g$가 연속함수이면 g도 연속함수이다.

ㄷ. $h:[0.1]\to\mathbb{R}$가 연속인 단사함수이면 역함수 $h^{-1}:h([0,1])\to[0,1]$도 연속함수이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

26. 실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$라 하고 복소수 전체의 집합을 $\mathbb{C}$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 모두 고른 것은? [2점] [2011]

<보기>

ㄱ. 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$를

$$f(x)=\begin{cases}x+x^2, & x\text{는 유리수}\\ x\cos x, & x\text{는 무리수}\end{cases}$$

로 정의하면 f는 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄴ. 해석함수(analytic function) $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$가 모든 $z\in\mathbb{C}$에 대하여 $g'(z)\neq 0$이면 g는 단사함수이다.

ㄷ. 벡터함수 $F:[0,1]\to\mathbb{R}^2$이 연속함수이고 구간 $(0,1)$에서 미분가능하면, $F(1)-F(0)=F'(c)$를 만족시키는 점 $c\in(0,1)$이 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

27. 실수열 $\{r_k\}$ $(0<r_k<1,\ k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이 있다. 자연수 n에 대하여 함수 $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$를

$$f_n(x)=\begin{cases}0 &, x\le r_n\\ \dfrac{1}{2^n} &, x>r_n\end{cases}$$

로 정의하면 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$가 수렴한다. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 모두 고른 것은? (단, $\mathbb{R}$는 실수 전체의 집합이다.) [2.5점] [2011]

<보기>

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$은 $[0,1]$에서 균등수렴(고른수렴, 평등수렴, uniform convergence)한다.

ㄴ. f는 $[0,1]-\{r_k\,|\,k\text{는 자연수}\}$에서 연속이다.

ㄷ. $\int_0^1 f(x)dx=f(1)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

28. 좌표평면에서 영역 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$일 때, 다음 이중적분의 값은? [2점] [2011]

$$\iint_D\frac{|y|}{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}dxdy$$

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

29. 복소평면에서 곡선 C는 $C:z(t)=e^{it}(0\le t\le 2\pi)$로 나타내어지는 단위원이다. 자연수 n에 대하여 복소적분

$$\int_C z^n(e^z+e^{\frac{1}{z}})dz$$

의 값을 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$의 값은? [1.5점] [2011]

① 0 ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{3}{4}$ ⑤ 1

30. 복소수 $z=x+iy$ $(x, y$는 실수$)$에 대한 정함수(entire function) $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(-1+i)$의 값은?(단, u와 v는 실숫값 함수이다.) [2점] [2011]

> (가) 임의의 복소수 $z=x+iy$에 대하여 $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$ 이다.
>
> (나) $f(1)=0,\quad f(i)=1+i$

① $1-i$ ② $1+i$ ③ $1-2i$
④ $1+2i$ ⑤ $2-i$

31. 함수 $f: X\to Y$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 모두 고른 것은? [1.5점] [2011]

<보기>

ㄱ. 임의의 $B\subseteq Y$에 대하여 $f(f^{-1}(B))\subseteq B$이다.
ㄴ. 임의의 $A\subseteq X$와 $B\subseteq Y$에 대하여 $f^{-1}(f(A)\cap B)=A\cap f^{-1}(B)$이다.
ㄷ. 임의의 $A\subseteq X$와 $B\subseteq Y$에 대하여 $f(A\cap f^{-1}(B))=f(A)\cap B$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

32. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$의 부분집합 A에 대하여

$$c(A)=\begin{cases} A, & A\text{는 가산(countable)집합} \\ \mathbb{R}, & A\text{는 비가산(uncountable)집합} \end{cases}$$

로 정의할 때, 다음 조건을 만족시키는 $\mathbb{R}$ 위의 위상(topology)을 $\mathfrak{I}$라 하자.

> 임의의 $A\subseteq B$에 대하여 위상공간 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$에서 A의 폐포(closure)는 $c(A)$이다.

$\operatorname{int}(\mathbb{Z})$, $\operatorname{int}([0,1])$, $\operatorname{int}(\mathbb{R}-\mathbb{Z})$를 옳게 나타낸 것은? [2점] [2011]
(단, $\operatorname{int}(A)$는 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$에서 A의 내부(interior), $\mathbb{Z}$는 정수 전체의 집합, $[0,1]=\{x\in\mathbb{R}\mid 0\le x\le 1\}$이다.)

	$\operatorname{int}(\mathbb{Z})$	$\operatorname{int}([0,1])$	$\operatorname{int}(\mathbb{R}-\mathbb{Z})$
①	$\varnothing$	$\varnothing$	$\mathbb{R}-\mathbb{Z}$
②	$\varnothing$	$[0,1]$	$\varnothing$
③	$\varnothing$	$[0,1]$	$\mathbb{R}-\mathbb{Z}$
④	$\mathbb{Z}$	$\varnothing$	$\varnothing$
⑤	$\mathbb{Z}$	$[0,1]$	$\varnothing$

33. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 위의 두 위상 $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_2$를

$$\mathfrak{I}_1=\{\mathbb{R}, \varnothing, \mathbb{Q}, \mathbb{R}-\mathbb{Q}\},\quad \mathfrak{I}_2=\{\mathbb{R}, \varnothing, \mathbb{N}, \mathbb{R}-\mathbb{N}\}$$

으로 정의하자. $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_1)$과 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_2)$의 적공간(곱공간, product space) $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_1)\times(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_2)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 모두 고른 것은? (단, $\mathbb{Q}$는 유리수 전체의 집합, $\mathbb{N}$은 자연수 전체의 집합이다.) [2점] [2011]

<보기>

ㄱ. $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_1)\times(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_2)$는 연결(connected)공간이다.
ㄴ. $[0,1]\times[0,1]$는 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_1)\times(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_2)$에서 조밀(dense)하다.
ㄷ. 함수 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$를

$$F(x)=\begin{cases} (x,\ 1), & x\text{는 유리수} \\ (x,\ -1), & x\text{는 무리수} \end{cases}$$

로 정의하면 $F: (\mathbb{R}, \mathfrak{I}_1)\to(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_1)\times(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_2)$는 연속함수이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

34. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 위의 보통위상(usual topology)을 $\mathfrak{I}$라 하고, 함수 $f:\mathbb{R}\to[0,1)$을 $f(x)=x-[x]$로 정의하자. 집합 $[0,1)$ 위의 위상 $\mathfrak{I}_0$을

$$\mathfrak{I}_0=\{G\subseteq[0,1)\mid f^{-1}(G)\in\mathfrak{I}\}$$

로 정의하자. <보기>에서 옳은 것만을 모두 고른 것은? [2.5점] [2011]
(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이고, $[a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x\le b\}$이다.)

<보기>

ㄱ. $[0, \frac{1}{2})\in\mathfrak{I}_0$
ㄴ. $([0,1), \mathfrak{I}_0)$은 콤팩트(compact)공간이다.
ㄷ. 함수 $h: [0,1)\to\mathbb{R}$를 $h(x)=1-x$로 정의하면 $h: ([0,1), \mathfrak{I}_0)\to(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$는 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

35. 좌표공간에서 곡선 $\gamma(t)=(a\cos t, a\sin t, bt)$ 는 두 점 $\mathrm{P}(2,0,4\pi)$, $\mathrm{Q}(2,0,8\pi)$를 지난다. 점 P에서 Q까지 곡선 $\gamma(t)$의 길이가 $4\sqrt{10}\pi$일 때, $a+b$의 값은? (단, $a>0$이고, $b>0$이다.) [2점] [2011]

① $\frac{8}{3}$ ② 3 ③ $\frac{10}{3}$
④ $\frac{11}{3}$ ⑤ 4

36. 현수선(catenary) $y=2\cosh\left(\frac{x}{2}\right)$를 x축을 중심으로 회전시켜 생기는 회전면 M의 가우스곡률(Gaussian curvature)을 K라고 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 모두 고른 것은? (단, $\cosh t=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$이다.) [2점] [2011]

<보기>

ㄱ. $K(p)>0$인 점 p가 존재한다.
ㄴ. K의 최솟값은 $-\frac{1}{4}$이다.
ㄷ. M은 평면과 거리동형(isometric)이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

37. 확률밀도함수(probability density function)가 두 상수 a, b에 대하여

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ a, & 0\le x<1 \\ be^{1-x}, & 1\le x<\infty \end{cases}$$

인 분포를 따르는 모집단이 있다. 이 모집단에서 크기가 2인 표본을 임의로 추출하였을 때, 표본평균 $\overline{X}$의 평균이 $\frac{3}{2}$이다. a^2+b^2의 값은? [1.5점] [2011]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{5}{9}$
④ $\frac{7}{9}$ ⑤ 1

38. 한 개의 주사위를 던져 나온 눈의 수를 X라 하고, 나온 눈의 수와 같은 개수의 동전을 던져 나오는 앞면의 수를 Y라 하자.

$X=m$이 주어질 때 Y의 조건부 확률함수(조건부 확률질량함수, conditional probability function)를 $p_{Y|X}(n|m)$, Y의 확률함수를 $p_Y(n)$이라고 하자. $p_{Y|X}(n|m)$, $p_Y(0)$을 옳게 나타낸 것은? [2.5점] [2011]

	$p_{Y\|X}(n\|m)$	$p_Y(0)$
①	$\dfrac{{}_m\mathrm{C}_n}{6\cdot 2^m}$	$\dfrac{67}{6\cdot 64}$
②	$\dfrac{{}_m\mathrm{C}_n}{6\cdot 2^n}$	$\dfrac{63}{6\cdot 64}$
③	$\dfrac{{}_m\mathrm{C}_n}{2^m}$	$\dfrac{67}{6\cdot 64}$
④	$\dfrac{{}_m\mathrm{C}_n}{2^m}$	$\dfrac{63}{6\cdot 64}$
⑤	$\dfrac{{}_m\mathrm{C}_n}{2^n}$	$\dfrac{61}{6\cdot 64}$

39. 어느 회사에서 신입 사원을 채용하려고 한다. 면접 위원 A, B, C, D 면접 점수표에 각각 점수를 1점에서 6점까지 줄 수 있다. 면접 점수의 합이 14점이 되는 면접 점수표의 가짓수는? (단, 각 면접 위원이 주는 점수는 자연수이다.) [2점] [2011]

면접 점수표

면접 위원	A	B	C	D	계
점수					14

① 138 ② 142 ③ 146
④ 150 ⑤ 154

40. G는 꼭짓점이 $v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_n(n\geq 3)$이고 변의 개수가 $m(m\geq 1)$인 단순 그래프(simple graph)이다.

G의 인접행렬(adjacency matrix)과 근접행렬(결합행렬, incidence matrix)을 각각 A와 B라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 모두 고른 것은? [2점] [2011]

<보기>

ㄱ. A^2의 대각합(trace), 즉 모든 (i,i)성분의 합은 $2m$이다.

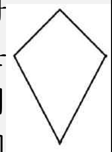
ㄴ. 자연수 $k\geq 3$에 대하여 A^k의 대각합은 G에서 길이가 k인 회로(cycle)의 개수이다.

ㄷ. BB^T의 (i,i)성분은 꼭짓점 v_i의 차수(degree)와 같다. (단, B^T는 행렬 B의 전치행렬이다.)

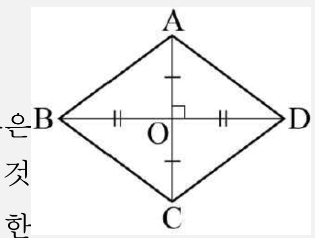
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1. 다음은 고등학교 1학년 수학 수업에서 명제의 필요충분조건을 지도하는 장면의 일부이다. 다음을 읽고 물음에 답하시오. [30점] [2011 2차, 1교시]

정 교사: 중학교에서 마름모를 어떻게 정의했죠?
다　래: ‘네 변의 길이가 같은 사각형’입니다.
정 교사: 마름모의 성질을 모두 말해 볼까요?
다　래: 마주보는 두변이 평행합니다. 마주보는 두 각의 크기가 같습니다, 두 대각선이 서로 수직입니다.
정 교사: 그렇다면 ‘두 대각선이 서로 수직인 사각형은 마름모이다.’가 참일까요?
다　래: 예, 모든 마름모의 두 대각선이 서로 수직이므로 참일 것 같습니다.
서　우: 아닙니다. 두 대각선이 서로 수직이지만 마름모가 아닌 사각형이 있습니다.
정 교사: 그렇군요. 두 대각선이 서로 수직이지만 마름모가 아닌 사각형이 있네요. 이것은 어떤 명제가 참이지만 그 명제의 역은 참이 아닌 예가 됩니다. 그러면 이런 반례를 제외시키기 위해서는 ‘두 대각선이 서로 수직이다.’는 조건을 어떻게 바꿔야 할까요?



서　우: 아! 알았습니다. 제가 제시한 반례에서는 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분하지 않습니다. 조건을 ‘두 대각선이 서로 다른 것을 수직이등분한다.’로 바꾸면 될 것 같습니다.
정 교사: 그러면 명제 ‘두 대각선이 서로 다른 것을 수직이등분하는 사각형은 마름모이다.’가 됩니다. 이 명제는 참일까요?
서　우: 예, 그럴 것 같습니다.
정 교사: 누가 증명해 볼까요?



승　호: 제가 증명해 보겠습니다. 도달해야 할 결론은 사각형 ABCD에서 네 변의 길이가 같다는 것입니다. 먼저 $\overline{AB}=\overline{AD}$임을 보이려면 직각을 한 변으로 가지는 삼각형이 합동이면 됩니다. 즉, $\triangle AOB \equiv \triangle AOD$여야 하지요. 그런데 조건에서 두 대각선이 서로 수직이등분하므로 $\overline{BO}=\overline{DO}$이고 $\overline{AO}$는 공통, 그리고 끼인각이 $90°$로 같습니다. 따라서 $\triangle AOB \equiv \triangle AOD$이므로 $\overline{AB}=\overline{AD}$가 됩니다. 이와 같은 방법으로 $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{CB}$, $\overline{CD}$가 모두 같다는 것을 증명할 수 있습니다.
정 교사: 훌륭합니다. 방금 승호가 증명한 명제를 조건 p와 q를 써서 나타내 봅시다.

> p : 사각형은 네 변의 길이가 같다.
> q : 사각형은 두 대각선이 서로 다른 것을 수직이등분한다.

승호가 증명한 명제는 무엇이죠?
다　래: $q \to p$입니다.
정 교사: 그렇다면 $p \to q$는 어떤 명제입니까?
서　우: ‘마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 수직 이등분한다.’입니다.
정 교사: 그것은 참인가요?
서　우: 예, 중학교에서 참임을 증명했습니다.
정 교사: 이처럼 명제 $p \to q$와 $q \to p$가 동시에 참일 때 p와 q는 서로 ‘필요충분조건’이라고 합니다. 이것은 두 명제가 논리적으로 서로 같다는 뜻입니다. 이 사실을 마름모의 정의에 적용하면 어떻게 될까요?
다　래: 마름모의 정의를 ‘두 대각선이 서로 다른 것을 수직이등분하는 사각형’으로 대체할 수 있다는 뜻입니다.
승　호: <u>㉠선생님, 너무 헷갈립니다. 중학교에서 ‘네 변의 길이가 같은 사각형’은 마름모의 정의, ‘두 대각선이 서로 다른 것을 수직이등분한다.’는 마름모의 성질이라고 배웠는데, 이 성질이 정의가 될 수 있다는 것을 이해할 수 없습니다.</u>
정 교사: 좋은 질문입니다. 마름모의 정의를 바꿔도 되는 논리적인 이유가 무엇일까요?
학생들: …….
정 교사: 지난 시간에 진리집합을 배웠죠? p의 진리집합은 무엇인가요?
서　우: 마름모 전체의 집합입니다.
정 교사: q의 진리집합은 무엇인가요?
다　래: $p \to q$가 참이고 $q \to p$도 참이기 때문에 그것 또한 마름모 전체의 집합입니다.
승　호: 아! 그렇군요. p와 q의 진리집합이 마름모 전체의 집합으로 서로 같기 때문에 q를 마름모의 정의로 대체해도 되겠네요.
정 교사: 그렇습니다. p와 q가 서로 필요충분조건이라는 말은 p와 q의 진리집합이 서로 같다는 말과 같게 되고, 따라서 q를 마름모의 정의로 대체할 수 있게 됩니다.

1-1. ㉠에서 승호가 겪는 혼란을 잘 설명할 수 있는 개념을 브루소(G. Brousseau)의 수학 교수학적 상황론(Theory of Didactical Situations in Mathematics)에서 찾아 그 뜻을 쓰고, 이 개념을 사용하여 승호의 혼란을 설명하시오. [10점]

1-2. 위에 제시된 정 교사의 수업은 ‘발생적 원리’와 ‘대화와 토론 방법’을 따라 설계되고 실행되었다. 여기서 발생적 원리란, 완성된 최종 산물을 제시하는 방식으로 수학을 가르치는 것이 아니라 그 완성품까지 만들어가는 과정을 경험시키는 방식으로 가르쳐야 한다는 것을 말한다. 이러한 수업을 설계하는 과정에서 교사가 수행해야 할 준비 활동에 대하여 서술하시오. 그리고 다음 <논점>을 중심으로 정 교사의 교수·학습 방법과 소크라테스의 산파법과의 차이점을 설명하시오. 이 때, 정 교사의 교수·학습 방법에 대한 설명에서는 그 근거를 위의 수업 장면에서 찾아 함께 제시하시오. [20점]

<논점>
(가) 수업의 주도권
(나) 추측과 반박

2. 유한체 $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \cdots, p-1\}$ (p는 소수) 위의 다항식환 $\mathbb{Z}_p[x]$에 속하는 다항식 $f(x) = x^p - x - a(a \neq 0)$에 대하여 K는 $f(x)$의 $\mathbb{Z}_p$위에서의 분해체(splitting field), $G(K/\mathbb{Z}_p)$는 K의 $\mathbb{Z}_p$ 위에서의 갈루아 군(Galois group)이라 하자. $f(x)$의 한 근 α와 모든 $\sigma \in G(K/\mathbb{Z}_p)$에 대하여 $\psi_\alpha(\sigma) = \sigma(\alpha) - \alpha$일 때, 다음 세 명제가 참임을 증명하시오. [20점] [2011 2차, 1교시]

〈명 제〉

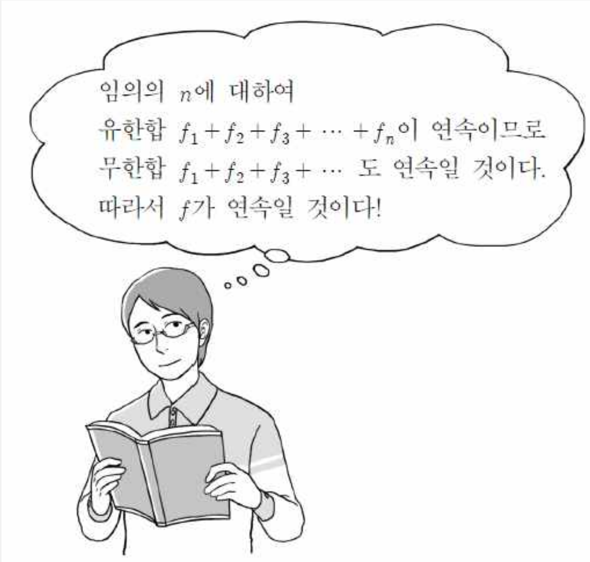
(Ⅰ) $\psi_\alpha(\sigma) \in \mathbb{Z}_p$이고 $K = \mathbb{Z}_p(\alpha)$이다.

(Ⅱ) 함수 $\psi_\alpha : G(K/\mathbb{Z}_p) \to (\mathbb{Z}_p, +)$는 군 동형사상이다. (단, $(\mathbb{Z}_p, +)$는 덧셈군이다.)

(Ⅲ) $f(x)$의 두 근 α, β에 대하여 $\psi_\alpha = \psi_\beta$이다.

3. 구간 $I=(-1,1)$에서 정의되고 함숫값이 실수인 연속함수열 $\{f_n\}$이 있다. 함수열 $\left\{\sum_{k=1}^{n} f_k\right\}$가 I에서 함수 f로 점별수렴(pointwise converge)할 때, 물음에 답하시오. [30점] [2011 2차, 2교시]

'함수 f는 연속함수인가'에 대하여 경규는 다음과 같이 생각하였다.



3-1. 경규의 생각이 속하는 추론 유형을 폴리아(G. Polya)의 문제해결 4단계 이론에 따른 문제해결 지도에 활용하는 방안을 기술하시오. 그리고 적절한 중등학교 수학 문제를 사례로 들어 이 활용 방안을 구체화하시오. [10점]

3-2. $f_n(x)=a_n x^n$일 때, 다음 세 명제가 참임을 보이시오. [20점]

〈정 리〉

(Ⅰ) 모든 $x\in I$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$가 수렴한다.

(Ⅱ) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$은 구간 $[-a,a]$ $(0<a<1)$에서 f로 평등수렴(균등수렴, 고른수렴, uniformly converge)한다.

(Ⅲ) f는 I에서 미분가능하고, 모든 $x\in I$에 대하여 $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n{}'(x)$이다.

※ 다음 6개의 정리는 필요하면 증명 없이 사용한다.

[정리 1] 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 수열 $\{a_n\}$은 유계이다.

[정리 2] 모든 n에 대하여 $|b_n|\le a_n$이고 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$도 수렴한다.

[정리 3] 두 거듭제곱급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$과 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$의 수렴반경은 서로 같다.

[정리 4] 연속함수 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$가 구간 (a,b)에서 미분가능하면

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$$

를 만족시키는 $c\in(a,b)$가 존재한다.

[정리 5] 연속함수 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$에 대하여 함수 $F:[a,b]\to\mathbb{R}$를 $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$로 정의하면 F는 구간 (a,b)에서 미분가능하고 $F'=f$이다.

[정리 6] 구간 I에서 정의된 함수열 $\{f_n\}$에 대하여 다음을 만족시키는 수열 $\{M_n\}$이 존재하면 함수급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$은 I에서 평등수렴한다.

> 모든 자연수 n과 모든 $x\in I$에 대하여 $|f_n(x)|\le M_n$이고 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$이 수렴한다.

4. 함수 $f:\mathbb{R}^3 \to [0, \infty)$는 다음 <조건>을 만족시킨다.

<조 건>

(가) f는 연속인 전사(surjective) 함수이다.

(나) $f^{-1}([0,\ 2011])$은 콤팩트 공간(compact space)이다.

(다) $S = f^{-1}(\{1\})$이라 하면, S는 매끄러운 곡면(smooth surface)이다.

단, $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\}$이고 $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$이다.

$\mathbb{R}$와 $\mathbb{R}^3$에는 보통위상(usual topology)을 사용하고, 이들의 부분집합에는 상대위상(부분공간위상, relative topology, subspace topology)을 사용한다.

함수 ϕ : $S \to \mathbb{R}$를

$$\phi(x, y, z) = x + y + z$$

로 정의할 때, 다음 세 명제가 참임을 증명하시오. [20점] [2011 2차, 2교시]

<조 건>

(Ⅰ) 위상공간 $\mathbb{R}^3 - S$는 연결되지 않은 공간(비연결공간, disconnected space)이다.

(Ⅱ) ϕ는 최솟값을 가진다.

(Ⅲ) ϕ가 최솟값을 갖는 점에서 S의 가우스 곡률(Gaussian curvature)은 음이 아닌 실수이다.

[2012학년도 중등교사신규임용후보자선정경쟁시험]

1. 19세기 말에 일어난 수학교육 근대화 운동에 대한 설명 중 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [1.5점] [2012]

<보기>

ㄱ. 독일에서는 과학이 장려되면서 학교교육에서 사회생활에 필요한 응용수학을 더 많이 다루어야 한다는 주장이 설득력을 얻어 수학교육을 개선하려는 시도가 이루어졌다. 이런 관점에서 클라인(F. Klein)은 교사들과 함께 메란(Meran) 교육과정이라는 김나지움(Gymnasium)의 수학교수요목을 작성하였다.

ㄴ. 영국에서는 산업혁명으로 등장한 노동자 계급에 대한 교육이 요구되면서 학교수학에서 순수수학을 강조해야 할 필요성이 높아졌다. 이런 관점에서 페리(J. Perry)는 대수 공식을 이용하는 지식과 능력을 길러야 한다고 주장하였다.

ㄷ. 미국에서는 산업이 급격히 발전하면서 상공업적 실리, 실익을 추구하는데 직접적인 도움이 되는 교육이 중시되었다. 이런 사회 분위기에서 무어(E. Moore)는 학교수학의 내용과 방법이 보다 풍부해져야 한다고 주장하였다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

2. 프로이덴탈(H. Freudenthal)의 수학화 방식에 따라 기하를 지도할 때, 학생들의 국소적 조직화에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2012]

<보기>

ㄱ. 반 힐레(P. van Hiele)가 제시한 기하 학습 수준에서 도형을 그 성질에 기초하여 인식하는 분석적 수준에 해당하는 활동이다.

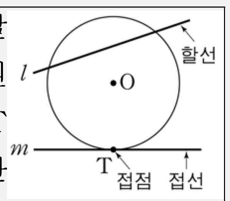
ㄴ. 학습자가 자신의 실제로부터 시작하여 기하 지식 체계를 조직하는 활동이다.

ㄷ. 수학자가 이론을 정립할 때 행하는 활동으로서 유클리드(Euclid) 『원론』의 조직화 방식과 동일하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

3. 접선에 대한 설명으로 옳지 <u>않은</u> 것은? [2점] [2012]

오른쪽 그림과 같이 한 직선 l이 원 O와 두 점에서 만날 때, 직선 l을 원 O의 할선이라고 한다. 또한 직선 m이 원 O와 한 점 T에서 만날 때, 직선 m을 원 O의 접선, 점 T를 접점이라고 한다. 이때 직선 m이 원 O에 접한다고 한다.



① 2007년 개정 교육과정에 따르면 위의 설명은 중학교 1학년 <수학>에서 원과 직선의 위치 관계를 이용하여 접선을 정의하는 방식이다.
② 위의 설명은 이차함수의 그래프의 접선을 정의하는 데 적용할 수 있다.
③ $y=|x|$의 그래프는 위에 제시된 접선의 정의를 개선하기 위한 반례로 활용할 수 있다.
④ 2007년 개정 교육과정에 따르면 고등학교 1학년 <수학>에서는 이차함수의 그래프에 접하는 직선의 방정식을 구할 때 판별식을 활용한다.
⑤ 2007년 개정 교육과정에 따르면 <미적분과 통계 기본>에서 접선은 미분가능성 및 미분계수의 기하학적 의미를 설명하면서 할선의 극한으로 다룬다.

4. A 학생이 연립방정식의 활용 문제를 다음과 같이 해결하였다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2012]

[문제]
두 자연수의 합이 65이고 큰 수는 작은 수의 3배보다 5가 크다고 할 때, 두 자연수를 구하여라.

[A 학생의 풀이 과정]
1단계) 큰 수를 x, 작은 수를 y로 놓는다.
2단계) x, y를 사용하여 문제의 뜻에 따라 연립방정식을 세우면 다음과 같다.

$$\begin{cases} x+y=65 \\ x=3y+5 \end{cases}$$

3단계) 이 연립방정식을 풀면 $x=50$, $y=15$이다.
4단계) 구한 해가 문제의 뜻에 맞는지 확인해 보면

$$50+15=65,\ 50=3\times15+5$$

이므로 문제의 뜻에 맞는다.

<보기>

ㄱ. 1단계는 문제에 주어진 조건과 구하려는 것 사이의 관계를 파악하는 단계로 폴리아(G. Polya)가 말한 문제해결 계획을 수립하는 단계에 해당한다.

ㄴ. 숀펠드(A. Schoenfeld)가 언급한 문제해결 성공요인중 통제(control)는 위의 모든 단계에 적용될 수 있다.

ㄷ. 4단계는 찾은 답이 문제의 조건에 합당한지 확인하는 단계로 폴리아가 말한 반성 단계에 해당한다.

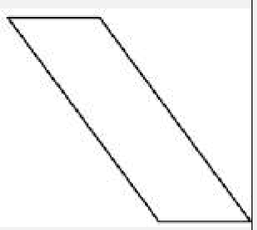
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

5. 수 개념에는 다양한 측면이 있으므로 수 개념 지도에도 다양한 관점과 방법이 존재한다. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은? [2점] [2012]

① 프로이덴탈(H. Freudenthal)에 따르면 음수를 방정식의 근으로 정의하고 형식불역의 원리를 적용하여 음수의 연산을 지도해야 한다.
② 수직선 모델에서 음수를 표현하기 위한 음의 부호는 상황에 따라 왼쪽 방향이나 반대 방향을 뜻하므로 다중적인 의미를 갖는다.
③ 듀이(J. Dewey)에 다르면 고정 단위를 이용한 측정 활동을 하는 동안에 학생들이 분석과 종합의 과정을 경험하도록 수 개념을 지도해야 한다.
④ 피아제(J. Piaget)는 수 개념 지도에서 포함 관계에 의한 집합의 분류 활동과 서열화 활동에 대한 반영적 추상화를 강조한다.
⑤ 1960년대 미국에서 일어난 새수학 운동(New Math Movement)에서는 집합론의 기수(cardinal number) 개념을 강조하였다.

6. 어떤 교사 모임에서 문제해결의 심리학적 배경이 된 형태(게슈탈트) 심리학에 대해 연구하고 토론하였다. 논의 주제는 베르트하이머(M. Wertheimer)의 생산적 사고(productive thinking)에 관한 것으로 다음과 같다.

> [논의 주제]
> 베르트하이머는 수업 시간에 학생들에게 오른쪽 그림과 같은 평행사변형을 제시하고 이 도형의 넓이를 구하게 하였더니, 학생들은 도형의 밑변과 수직이 되게 선을 긋지 못하였다. 결과적으로 학생들은 평행사변형의 넓이를 올바르게 구하지 못하였다.



위의 논의 주제와 관련한 교사들의 대화 중 옳지 않은 것은? [2점] [2012]

① 김 교사: 평행사변형을 직사각형으로 변형하면 (밑변)×(높이) 공식을 적용할 수 있는데, 학생들이 평행사변형과 직사각형의 관련성을 이해하지 못했습니다.

② 이 교사: 베르트하이머의 생산적 사고는 공식의 맹목적인 적용이나 시행착오를 의미하는 것이 아닙니다.

③ 박 교사: 학생들이 평행사변형의 넓이를 구하는 데 어려움을 겪는 것은 평행사변형의 넓이를 구하는 방법에 관한 구조적 이해, 즉 '통찰'이 결여되었기 때문입니다.

④ 정 교사: 베르트하이머는 생산적인 사고 과정을 분리, 분류, 조직화 등의 사고 조작을 통해 문제의 '내적인 구조적 관련성'을 파악해 가는 것으로 간주하였습니다.

⑤ 강 교사: 베르트하이머는 전체에 대한 부분의 구조적 기능을 파악하여, 부분의 구조적 특성에 합치되는 방향으로 전체의 재구조화가 일어남을 강조하였습니다.

7. 미적분의 역사적 발달과 관련한 설명 중 옳지 않은 것은? [1.5점] [2012]

① 고대 그리스 시대에는 극한 개념이 없었기 때문에, 아르키메데스(Archimedes)는 실진법(착출법, method of exhaustion)으로 포물선과 할선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하였다.

② 갈릴레이(G. Galilei)는 낙하하는 물체가 움직인 거리는 그 물체의 속도를 나타내는 직선과 시간 축 사이에 생기는 삼각형의 넓이라고 보는 관점을 제시하였다.

③ 카발리에리(B. Cavalieri)의 불가분량법(method of indivisibles)에서 평면도형의 불가분량은 현이고, 입체도형의 불가분량은 단면이다.

④ 뉴턴(I. Newton)이 미분의 아이디어를 설명할 때 아주 작은 양 o을 사용한 것에 대해 버클리(G. Berkeley)는 o을 엄밀하지 않게 이중적으로 사용했다고 비판하였다.

⑤ 라이프니츠(G. Leibniz)는 물체의 운동과 그 변화를 나타내기 위해 역학적 관점에서 미분의 아이디어를 생각하였다.

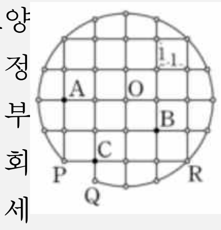
8. 반 힐레(P. van Hiele)는 학생들의 사고 발달 및 학습 수준의 상승이 교사의 지도 과정에서 다음과 같은 단계들을 거쳐 이루어진다고 하였다. 이 단계들을 옳은 순서로 나열한 것은? [2점] [2012]

> (가) 학생은 교사가 제공한 자료로 교사의 안내 하에 학습 주제를 탐구하면서 해당 분야의 구조를 점진적으로 파악하게 된다.
> (나) 학생은 예전의 경험과 교사의 도움말을 토대로 탐구 분야의 구조에 대한 자신의 견해를 표현하며 관계 체계를 형성하기 시작한다.
> (다) 학생은 교사가 제공한 자료를 토대로 교사와의 충분한 논의를 통해 탐구 분야에 친숙해지기 위한 활동을 하면서 학습 주제를 파악하게 된다.
> (라) 학생은 자신의 학습을 재검토하여 그동안 배운 새로운 개념에 대한 탐구 활동을 개관하며 전체를 조망하게 되면서 사고 수준의 비약에 이르게 된다.
> (마) 학생은 보다 복잡한 과제 해결에 도전하여 여러 가지 해결 방법을 찾아봄으로써 탐구 분야의 구조에 정통하게 된다.

① (가) → (나) → (다) → (마) → (라)
② (나) → (단) → (가) → (라) → (마)
③ (나) → (다) → (가) → (마) → (라)
④ (다) → (가) → (나) → (마) → (라)
⑤ (다) → (나) → (가) → (라) → (마)

9. 최 교사는 기하 영역에서 실생활과 관련된 문제를 학생들에게 제시하고 학생들이 문제를 해결하는 동안 아래와 같은 발문을 하였다.

> [문제]
> 그림은 어느 도시의 도로망을 나타낸 것으로, 정사각형 모양을 이루는 간선 도로는 교차로 간의 거리가 모두 1로 일정하고, 도시의 순환 도로는 O를 중심으로 하는 원의 일부로 되어 있다. A, B, C 대리점을 소유하고 있는 한 유통 회사에서 순환 도로 위의 P, Q, R 중 한 곳에 물품 창고를 세우려고 한다. 이때 물품 창고에서 도로를 따라 A, B, C 대리점에 이르는 거리의 합이 최소인 곳이 가장 적당하다고 하면, 어디에 세우는 것이 가장 좋겠는가?



> [교사 발문]
> (가) 그림의 O가 원점이 되도록 도로망을 좌표평면 위에서 생각해 보아라.
> (나) A, B, C는 각각 좌표평면의 어느 점과 대응되는가?
> (다) P에서부터 A, B, C까지의 거리의 합을 구해 보아라.
> (라) 위의 (다) 과정을 Q, R에 대해서도 적용해 보아라.

최 교사의 발문과 관련하여 다음 중 옳은 것은? [2.5점] [2012]

① (가)와 (나)는 원리나 공식 등의 내용을 이해하는 데 도움을 주는 반면, (다)와 (라)는 그 내용과 관련된 문제를 익숙하게 연습시키는 데 적절하다.

② (가)와 (나)는 이 문제의 풀이 방법이 떠오르지 않을 때 관련된 유사한 문제를 먼저 풀어 보게 하는 것으로, 이는 문제를 수월하게 해결하는 수단이 된다.

③ (가), (나), (다)는 문제해결을 위한 계획 단계에, (라)는 검토 단계에 제시하는 것이 적절하다.

④ (다), (라)와 같은 발문은 자칫하면 학생들이 스스로 탐구하거나 시행착오를 거쳐 학습할 수 있는 환경을 방해할 수 있다.

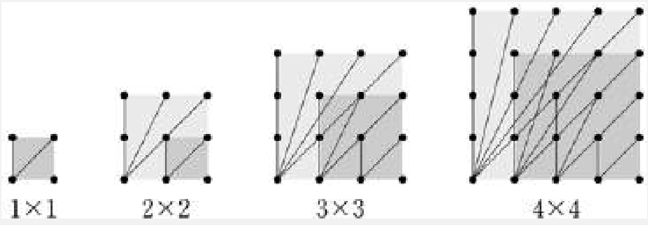
⑤ 위와 같은 발문은 전반적으로 학생들의 개인화와 배경화를 강조하기보다는 형식화된 수학 지식을 전달하기 위함이다.

10. 김 교사는 수업 시간에 학생들에게 한 변의 길이가 5인 기하판, 즉 5×5 기하판에 못을 연결하여 서로 다른 길이의 선분을 최대한 몇 개나 만들 수 있는지 찾아보게 하였다. 그 결과, A 학생은 풀이 과정을 다음과 같이 제시하고 20으로 답하였으나, 실제로 정답은 19이다.

[A 학생의 풀이 과정]

5×5 기하판 위에 1×1 정사각형부터 시작하여 4×4 정사각형에 이르기까지 서로 다른 길이의 선분의 수를 모두 구해 보았다. 그 결과, 다음과 같은 규칙을 얻었다.

(서로 다른 길이의 선분의 수)=(이전 정사각형에서 구한 선분의 수)+(새로 만든 선분의 수)



정사각형의 크기	서로 다른 길이의 선분의 수
1×1	$2=2$
2×2	$(2)+3=5$
3×3	$(2+3)+4=9$
4×4	$(2+3+4)+5=14$

이 규칙을 5×5 정사각형에 적용한 결과, 서로 다른 길이의 선분의 수는 $(2+3+4+5)+6=20$(개)이다.

A 학생이 해결한 방법과 관련하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2012]

<보기>

ㄱ. A 학생이 5×5 정사각형에 자신이 발견한 규칙을 적용한 것은 선입견이나 부주의 등으로 인하여 관찰해야 할 사례를 간과하고 조급하게 일반화한 것이다.

ㄴ. A 학생은 일부 사례로부터 일반적 결론을 이끌어내기 위하여 수학적 귀납법을 사용하였다.

ㄷ. A 학생은 1×1 정사각형부터 4×4 정사각형까지 서로 다른 길이의 선분의 수를 구한 방식을 형식불역의 원리에 의해 5×5 정사각형에 적용하였다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

11. 다음은 중학교 수업에서 유리수와 순환소수의 관계를 지도하는 상황의 일부이다.

교 사: 지난 시간에 여러분은 순환소수를 배웠어요. 오늘은 유리수와 순환소수의 관계를 배워 봅시다. 순환소수의 예를 한 가지만 들어 볼까요?

학 생: 0.99999⋯가 있습니다.

교 사: 좋아요. 순환소수 0.99999⋯에서는 9가 무한히 반복되는데, 그렇다면 0.99999⋯는 1과 같을까요?

학 생: 1에 아주 가까이 가기는 하지만 1은 아닐 것 같습니다.

교 사: 그럼0.99999⋯를 분수로 고쳐서 1과 같은지 알아봅시다.

$$x=0.99999\cdots\cdots①$$

라고 놓읍시다. ①의 양변에 10을 곱하면

$$10x=9.99999\cdots\cdots②$$

이고, ②에서 ①을 변끼리 빼면

$$9x=9$$

이므로 $x=\frac{9}{9}=1$입니다.

위의 수업 상황과 관련하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2.5점] [2012]

<보기>

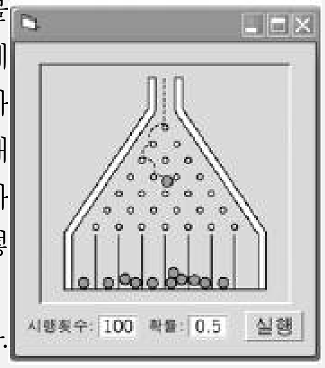
ㄱ. 학생의 순환소수에 대한 생각에는 가능적 무한(잠재적 무한, potential infinity) 개념이 반영되어 있다.

ㄴ. APOS(Action Process Object Schema) 이론에 의하면 교사가 지도하는 극한 개념은 학생의 극한 개념이 '내면화'된 수준에 해당한다.

ㄷ. 교사가 $0.99999\cdots=1$임을 보이는 과정은 무한급수가 수렴하지 않는 경우에 적용하였을 경우 모순된 결과를 가져올 수 있다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12. 다음은 모의실험 프로그램을 활용한 수업이다.



교사: 오늘 수업에서는 컴퓨터로 모의실험을 해 볼 거예요. 위쪽에서 공을 떨어뜨리면 판 위에 규칙적으로 박혀 있는 못에 공이 부딪혀 바닥에 있는 빈칸 가운데 하나로 들어가게 돼요. 100개의 공을 하나씩 떨어뜨렸을 때 바닥에 있는 칸들에 들어간 공의 개수는 어떻게 분포될지 한번 예상해 보세요.

학생: 각 칸에 들어가는 공의 개수가 비슷할 것 같습니다.

교사: 그럼 이 프로그램으로 실험을 해 볼까요?
(모의실험 프로그램을 실행한다.)

교사: 자, 어떤 결과가 나왔나요?

학생: 각 칸에 들어간 공의 개수가 비슷하지 않습니다.

교사: 왜 그럴까요?

학생: 아무래도 가운데 칸으로 떨어지기가 쉬울 테니까 공이 양 끝에 있는 칸으로 떨어질 가능성이 가운데 칸으로 떨어질 가능성보다 낮을 것 같습니다.

교사: 그렇지요. 지금 여러분은 바닥에 있는 칸들에 들어간 공의 개수가 따르는 분포가 근사적으로 정규분포를 이룬다는 것을 알아냈어요.

위의 수업 상황과 관련하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2012]

<보기>

ㄱ. 위의 수업에서는 조르단 효과(주르뎅 효과, Jourdain effect)가 발생하였다.

ㄴ. 위의 모의실험 프로그램은 중심극한정리(central limit theorem)를 학습할 수 있는 환경을 제공한다.

ㄷ. 위의 모의실험 프로그램은 이 수업에서 학생들의 학습을 안내하는 교사의 역할을 대신하였다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. 다음 문항과 관련하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2012]

> [문항]
> 다음은 세 명의 야구 선수 A, B, C가 최근 5경기에서 기록한 안타 수이다. 경기 당 안타 수가 가장 고른 선수는 누구이겠는가? 그 이유를 설명하여라.
>
> A: 1, 3, 3, 1, 2
> B: 0, 4, 0, 4, 2
> C: 1, 3, 0, 4, 2

<보기>

ㄱ. 현재 수학 학습의 평가에서는 2007년 개정 교육과정에 제시된 내용의 수준과 범위를 준수해야 하므로, 이 문항은 중학교 2학년에서 다뤄질 수 있다.
ㄴ. 이 문항은 분산, 표준편차 등의 수학 용어를 사용하여 수학적으로 표현해 봄으로써 의사소통 능력을 기르는 데 도움이 될 수 있다.
ㄷ. 이 문항은 해결 결과뿐만 아니라 해결 과정도 중시하고 있다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

14. 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간 $\mathbb{R}^4$의 서로 다른 벡터 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5로 생성되는 벡터공간

$$V=\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\rangle$$

에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2012]

<보기>

ㄱ. 벡터공간 V와 $\mathbb{R}^n$이 동형(isomorphic)이 되는 자연수 n이 존재한다.
ㄴ. 집합 $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$가 V의 기저(basis)인 벡터 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5가 존재한다.
ㄷ. $\dim V=2$인 벡터 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5가 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 실수체 $\mathbb{R}$위에서 정의된 벡터공간

$$V=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle|\, a, b, c, d\in\mathbb{R}\right\}$$

와 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$에 대하여 선형사상 $L: V\to V$를

$$L(B)=AB-BA$$

로 정의하자. V의 부분공간(subspace) $\mathrm{im(L)}=\{L(B)\mid B\in V\}$의 차원은? [2점] [2012]

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

16. 정수 x_0과 27은 서로소이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$x_n\equiv 16x_{n-1} \pmod{27},\ 0<x_n<27$$

이 성립할 때, $x_n\equiv x_0 \pmod{27}$이 되는 최소의 자연수 n의 값은? [2점] [2012] (단, 2는 법 27에 관한 원시근(primitive root)이다.)

① 4 ② 9 ③ 13
④ 18 ⑤ 26

17. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2012]

<보기>

ㄱ. 연립합동식$\begin{cases} x\equiv 4 \pmod{28} \\ x\equiv 6 \pmod{36} \end{cases}$의 정수해가 존재한다.
ㄴ. 홀수인 소수 p에 대하여 합동식 $x^4\equiv -1 \pmod{p}$의 정수해가 존재하면 $p\equiv 1 \pmod{8}$이다.
ㄷ. 부정방정식 $x^2+2x+5-65y^2=2011$의 정수해가 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

18. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [1.5점] [2012]

<보기>

ㄱ. 무한순환군(infinite cyclic group) G는 덧셈군 $\mathbb{Z}$와 서로 동형(isomorphic)이다.
ㄴ. 두 덧셈군 $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_{18}\times\mathbb{Z}_{15}$와 $\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_{10}\times\mathbb{Z}_{36}$은 서로 동형이다.
ㄷ. 위수(order)가 360인 순환군의 생성원(generator)은 모두 96개이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 체 $\mathbb{Z}_3$위의 행렬에 대하여 연산이 행렬의 곱셈인 군

$$G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle|\, a, b, c\in\mathbb{Z}_3,\ ac\neq 0\right\}$$

이 있다. 군 G에서 곱셈군 $\mathbb{Z}_3^*=\mathbb{Z}_3-\{0\}$으로의 군준동형사상(group homomorphism)

$$\phi: G\to\mathbb{Z}_3^*,\ \phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right)=ac$$

의 핵(kernel) $\ker(\phi)$와 동형인 군은? [2.5점] [2012] (단, S_3은 3차의 대칭군(symmetric group)이고, A_4는 4차의 교대군(alternating group)이다.)

① $\mathbb{Z}_3$ ② S_3 ③ $\mathbb{Z}_6$
④ $\mathbb{Z}_9$ ⑤ A_4

20. 복소수체의 부분환 $\mathbb{Z}[i]=\{a+bi\mid a, b\in\mathbb{Z}\}$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2012]

<보기>

ㄱ. $\mathbb{Z}[i]$는 주아이디얼 정역(principal ideal domain)이다.
ㄴ. $\mathbb{Z}[i]$의 단원(unit)은 모두 6개이다.
ㄷ. $\mathbb{Z}[i]$의 주아이디얼(principal ideal) $\langle 2\rangle$는 극대아이디얼(maximal ideal)이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

21. 체 $\mathbb{Z}_2$의 유한확대체(finite extension field) F가 $[F:\mathbb{Z}_2]=6$을 만족시키고, $\alpha\in F$에 대하여 함수

$$\varphi_\alpha : \mathbb{Z}_2[x] \to F,\ \varphi_\alpha(f(x))=f(\alpha)$$

는 대입준동형사상(evaluation homomorphism)이다. 옳지 않은 것은? [2점] [2012]

① 체 F는 위수(order)가 64인 유한체이다.
② φ_α의 핵 $\ker(\varphi_\alpha)$는 $\mathbb{Z}_2[x]$의 주아이디얼(principal ideal)이다.
③ α의 기약다항식 $\mathrm{irr}(\alpha,\ \mathbb{Z}_2)$는 $\mathbb{Z}_2[x]$에서 다항식 $x^{64}-x$를 나눈다.
④ 기약다항식 $\mathrm{irr}(\alpha,\ \mathbb{Z}_2)$의 차수(degree)가 4인 $\alpha\in F$가 존재한다.
⑤ φ_α의 상 $\mathrm{im}(\varphi_\alpha)$는 F의 부분체(subfield)이다.

22. 멱급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}(x-3)^n$을 수렴하도록 하는 정수 x의 개수는? [1.5점} [2012]

① 1　② 3　③ 5
④ 7　⑤ 9

23. 양의 실수 t에 대하여 함수 f를

$$f(t)=\int_0^{\sqrt{t}}\int_y^{\sqrt{t}}\frac{1}{2+\sin(x^2)}dxdy$$

로 정의할 때, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$의 값은? [2점] [2012]

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{5}$　③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{1}{2}$

24. 연속함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$와 실수열 $\{x_n\}$에 대하여 옳지 않은 것은? [2.5점] [2012]

① 닫힌구간 $[0,1]$에서 f는 균등연속(평등연속, 고른연속, uniformly continuous)이다.
② 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^3$이 수렴하면 수열 $\{f(x_n)\}$은 코시수열(Cauchy sequence)이다.
③ f가 단조증가이고 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}f(x_n)$이 수렴하면 $\{x_n\}$은 수렴한다.
④ f가 미분가능하고 f의 도함수가 유계이면 f는 균등연속이다.
⑤ 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$이 수렴하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n}$도 수렴한다.

25. 열린구간 $(0,1)$에서 미분가능한 함수 $f:(0,1)\to\mathbb{R}$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2012]

<보기>

ㄱ. f의 도함수 f'은 연속이다.
ㄴ. 모든 $x\in(0,1)$에 대하여 $f'(x)<0$이면 f의 역함수 $f^{-1}:D\to(0,1)$이 존재한다. (단, D는 f의 치역이다.)
ㄷ. f의 역함수 $f^{-1}:D\to(0,1)$이 존재하면 f^{-1}는 미분가능하다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

26. 닫힌구간 $[0,1]$에서 연속함수열 $\{f_n\}$이 함수 f로 균등수렴(평등수렴, 고른수렴, uniform convergence)하고, 열린구간 $(0,1)$에서 균등연속함수열 $\{g_n\}$은 함수 g로 균등수렴한다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2012]

<보기>

ㄱ. f는 $[0,1]$에서 적분가능하다.
ㄴ. f와 g의 곱 fg는 $(0,1)$에서 연속이다.
ㄷ. g는 $(0,1)$에서 균등연속이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

27. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2012]

<보기>

ㄱ. 특이적분(이상적분, improper integral) $\int_0^1 \ln x dx$가 수렴한다.
ㄴ. 닫힌구간 $[0,1]$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}\\ 0, & x\in[0,1]-\mathbb{Q}\end{cases}$$

는 $[0,1]$에서 리만(Riemann)적분가능하다.
ㄷ. $[0,1]$에서 적분가능한 함수 f에 대하여

$$F(x)=\int_0^x f(y)dy$$

로 정의된 함수 F는 열린구간 $(0,1)$에서 미분가능하다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

28. 복소평면에서 $C=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|=5\}$가 반시계방향으로 한 바퀴 도는 곡선일 때,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\cos z}{\sin z}dz$$

의 값은? [2점] [2012]

① -1　② 0　③ 1
④ 2　⑤ 3

29. 복소평면에서 영역 $D=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<1\}$에 대하여 연속함수 $f:D\to\mathbb{C}$가 해석적(analytic, holomorphic)이기 위한 필요충분조건을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2012]

<보기>

ㄱ. D에서 $f(z)$로 수렴하는 멱급수 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$이 존재한다.
ㄴ. D에 포함되는 모든 단순닫힌경로(단순폐곡선, simple closed contour) C에 대하여 $\int_C f(z)dz=0$이다.
ㄷ. D에서 $\frac{dF}{dz}=f$를 만족하는 해석함수 F가 존재한다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

30. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$의 멱집합(power set) $\wp(\mathbb{R})$에 대하여 $X=\wp(\mathbb{R})-\{\varnothing\}$이라 하자. 집합 X에서의 관계(relation) $\sim$을

$$A\sim B \Leftrightarrow A\cap B\neq\varnothing\ \ (A,\ B\in X)$$

로 정의할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [1.5점] [2012]

<보기>

ㄱ. 관계 $\sim$은 반사적(reflexive)이다.
ㄴ. 관계 $\sim$은 대칭적(symmetric)이다.
ㄷ. 관계 $\sim$은 추이적(transitive)이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

31. 위상공간 X에서 부분집합 A의 내부(interior)와 폐포(closure)를 각각 $\mathrm{int}(A)$, $\overline{A}$로 나타낼 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2012]

<보기>

ㄱ. $\mathrm{int}(X-A)=X-\overline{A}$
ㄴ. $\overline{\mathrm{int}(\overline{A})}=\overline{A}$
ㄷ. $X-\overline{A\cap B}=(X-\overline{A})\cup(X-\overline{B})$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

32. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$에서 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$를

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in\mathbb{Q} \\ 0, & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$$

로 정의하자. $\mathbb{R}$ 위의 보통위상(usual topology) $\mathfrak{I}$에 대하여

$$\{f^{-1}(G)\mid G\in\mathfrak{I}\}$$

로 정의된 $\mathbb{R}$ 위의 위상을 $\mathfrak{I}_0$이라 하자. 위상공간 $(\mathbb{R},\mathfrak{I}_0)$에 대하여 옳지 않은 것은? (단, $\mathbb{Q}$는 유리수 전체의 집합이다.) [2.5점] [2012]

① $(\mathbb{R},\mathfrak{I}_0)$에서 $\sqrt{2}$는 $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$의 내점(interior point)이다.
② $(\mathbb{R},\mathfrak{I}_0)$에서 $\mathbb{Q}$의 경계(boundary)는 $(\mathbb{R}-\mathbb{Q})\cup\{0\}$이다.
③ 구간 $(-1,1)$에 대하여 $(-1,1)\cup(\mathbb{R}-\mathbb{Q})$는 $(\mathbb{R},\mathfrak{I}_0)$에서 열린집합(open set)이다.
④ 구간 $[-1,1]$에 대하여 $[-1,1]\cup(\mathbb{R}-\mathbb{Q})$는 $(\mathbb{R},\mathfrak{I}_0)$에서 닫힌집합(closed set)이다.
⑤ $(\mathbb{R},\mathfrak{I}_0)$에서 0은 $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$의 집적점(극한점, accumulation point, cluster point, limit point)이다.

33. $\mathbb{R}^2$ 위의 점 $q=(0,1)$과 집합 $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y=0\}$에 대하여 $X=A\cup\{q\}$라 하자. X 위의 위상 $\mathfrak{I}$를

$$\mathfrak{I}=\wp(A)\cup\{U\subseteq X\mid q\in U,\ A-U\text{가 유한집합}\}$$

으로 정의할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $\wp(A)=\{U\mid U\subseteq A\}$이다.) [2점] [2012]

<보기>

ㄱ. $(X,\mathfrak{I})$는 콤팩트공간(compact space)이다.
ㄴ. $(X,\mathfrak{I})$는 정규공간(normal space)이다.
ㄷ. $(X,\mathfrak{I})$는 분리가능공간(가분공간, separable space)이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

34. 3차원 공간 $\mathbb{R}^3$에 놓여 있는 정규곡선(정칙곡선, regular curve) C에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2012]

<보기>

ㄱ. C 위의 모든 점에서 곡률(curvature)이 0이면 C는 직선이거나 직선의 일부이다.
ㄴ. C 위의 모든 점에서 열률(비틀림률, 꼬임률, torsion)이 정의되고 그 값이 0이면 C는 적당한 평면에 놓여 있다.
ㄷ. C 위의 모든 점에서 곡률이 양의 상수로 일정하면 C는 원이거나 원의 일부이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

35. 2차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^2$에서 3차원 공간 $\mathbb{R}^3$ 상의 매끄러운 곡면(smooth surface) S 위로의 등장사상(등거리사상, isometry)

$$f:\mathbb{R}^2\to S$$

가 존재할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2012]

<보기>

ㄱ. f의 역사상 f^{-1}도 등장사상이다.
ㄴ. S의 모든 점에서 가우스 곡률(Gaussian curvature)이 0이다.
ㄷ. S의 모든 점에서 평균곡률(mean curvature)이 0이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

36. 상자 A에 빨간 공 2개와 흰 공 3개가 들어 있고, 상자 B에 빨간 공 2개와 흰 공 m개가 들어 있다. 상자 A가 선택될 확률이 $\frac{1}{3}$이고 상자 B가 선택될 확률이 $\frac{2}{3}$이다. 두 상자 A, B 중 하나를 선택하여 그 상자에서 임의로 추출한 한 개의 공이 흰 공일 때, 이 흰 공이 상자 A에서 추출되었을 조건부 확률이 $\frac{2}{7}$이다, m의 값은? [2점] [2012]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

37. 두 이산형 확률변수 X와 Y의 결합확률질량함수(joint probability mass function) $f(x,y)=\mathrm{P}(X=x,\ Y=y)$를

$$f(x,y)=\frac{3x-y}{12},\ \ x=1,2\ \ y=1,2$$

라 하자. $Y=1$일 때, X의 조건부 기댓값(조건부 평균) $\mathrm{E}(X\mid Y=1)$의 값은? [2점] [2012]

① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{13}{9}$
④ $\frac{12}{7}$ ⑤ $\frac{9}{5}$

38. 정규분포 $N(\mu_1,36)$과 $N(\mu_2,64)$를 각각 따르는 두 모집단 X,Y가 서로 독립이라 하자. 모집단 X에서 추출된 크기가 n인 확률표본의 표본평균을 $\overline{X}$, 모집단 Y에서 추출된 크기가 n인 확률표본의 표본평균을 $\overline{Y}$라 하자. 모평균의 차 $\mu_1-\mu_2$에 대한 95% 신뢰구간의 길이가 4.9일 때, n의 값은? (단, $Z\sim N(0,1)$일 때, $\mathrm{P}(|Z|\le 1.96)=0.95$이다.) [2점] [2012]

① 36 ② 49 ③ 64
④ 81 ⑤ 100

39. 숫자 1, 2, 3, 4, 5를 다음 규칙

(가) 1, 2, 3은 각각 홀수 번 사용한다.
(나) 4와 5의 사용 횟수는 각각 음이 아닌 정수이다.

에 따라 일렬로 나열하여 8자리 자연수를 만들려고 할 때, 만들 수 있는 서로 다른 자연수의 개수는? [2점] [2012]

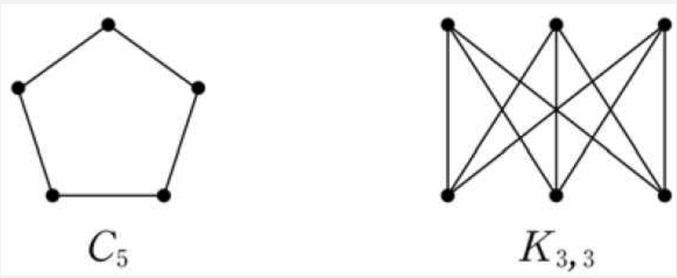
① $\frac{1}{8}(5^8-3^9-6)$　② $\frac{1}{8}(5^8-3^9+2)$　③ $\frac{1}{8}(5^8-3^9+10)$

④ $\frac{1}{8}(5^8-3^9+18)$　⑤ $\frac{1}{8}(5^8-3^9+26)$

40. 꼭짓점을 공유하지 않는 두 그래프, 회로(cycle) C_5와 완전이분그래프(complete bipartite graph) $K_{3,3}$에 대하여 다음 조건을 만족하는 그래프를 G라 하자.

(가) $V(G)=V(C_5)\cup V(K_{3,3})$
(나) $E(G)=E(C_5)\cup E(K_{3,3})\cup\{xy \mid x\in V(C_5),\, y\in V(K_{3,3})\}$

그래프 G의 모든 꼭짓점(vertex)의 차수(degree)의 합이 m, 그래프 G의 채색수(chromatic number)가 n일 때, $m+n$의 값은? [2점] [2012] (단, 그래프 H에 대하여 $V(H)$는 H의 꼭짓점의 집합, $E(H)$는 H의 변(edge)의 집합이고, xy는 두 꼭짓점 x와 y가 양 끝점(endpoint)인 변이다.)



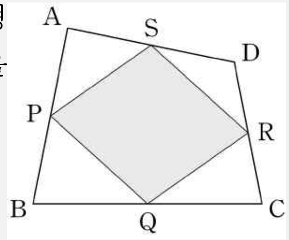
① 91　② 92　③ 93

④ 94　⑤ 95

1. 다음 〈수업상황 A〉와 〈수업상황 B〉를 보고 물음에 답하시오. [30점] [2012 2차, 1교시]

〈수업상황 A〉

학생들이 기하 탐구형 소프트웨어를 이용하여, 사각형 ABCD의 변의 길이를 변화시키면서 각 변의 중점을 연결하여 만든 사각형 PQRS의 성질을 탐구하고 있다.



김 교사: 사각형 PQRS는 어떤 사각형인 것 같아요?
학　 생: 평행사변형인 것 같은데요.
김 교사: 그러면, 사각형 PQRS가 평행사변형이라는 것을 어떻게 보일 수 있을까요?
학　 생: 두 변 PQ와 SR, 그리고 PS와 QR가 각각 평행인 것을 보이면 됩니다.
김 교사: 서로 평행인 것은 어떻게 보일 수 있을까요?
학　 생: 잘 모르겠는데요.
김 교사: 이 문제에서 사용할 수 있는 성질이나 조건에는 어떤 것이 있을까요?
학　 생: 중점이요.
학　 생: 평행이요.
김 교사: 중점, 평행하면 생각나는 정리 없어요?
학　 생: 삼각형의 중점 연결 정리요.
김 교사: 좋아요. 그 정리를 이 문제에 이용하려면 어떻게 하면 될까요?
학　 생: 삼각형을 만들면 돼요. 점 A와 C를 연결하면 삼각형 ACD를 만들 수 있어요
김 교사: 그러면 무엇을 알 수 있지요?
학　 생: 중점 연결 정리 때문에 AC와 SR가 평행이에요.
김 교사: ㉠중점 연결 정리를 적용할 수 있는 삼각형은 삼각형 ACD뿐일까요?
학　 생: ㉡삼각형 ABC도 있습니다. 아! 그러면 PQ와 AC도 평행이니까, PQ와 SR도 평행이 돼요. 그리고 선분 BC를 그으면 PS와 QR도 평행이 되어 한꺼번에 증명이 돼요.

(교사가 어떤 문제를 칠판에 제시한다,)

김 교사: ㉢이제 여러분들이 해 볼 차례입니다. 평소에 선생님이 문제를 해결하는 방식을 따라해 보면서, 이 문제를 스스로 해결해 보세요.
학　 생: ㉣선생님처럼 해 보니까, 이제 문제를 어떻게 풀어야 하는지 알겠어요.

〈수업상황 B〉

최 교사: 삼각형 모양의 종이가 준비되었지요? 한 꼭짓점에서 두 변이 겹치도록 접었다가 펼쳐보세요. 다른 꼭짓점에서도 똑같이 해 보세요. 접은 두 선이 만나는 점이 있지요?
학　 생: 네.
최 교사: 그 점으로부터 삼각형의 세 변에 이르는 거리를 재어 보세요.

(학생들의 측정 활동이 이어진다.)

최 교사: 어떤 사실을 추측할 수 있어요?
학　 생: 삼각형의 두 내각의 이등분선의 교점으로부터 세 변에 이르는 거리가 같은 것 같습니다.
최 교사: 그러면, 명제 ㉤ '삼각형 ABC와 두각 A와 B의 이등분선의 교점으로부터 세 변에 이르는 거리가 같다.' 를 증명할 수 있을까요?
학　 생: 네. 지난 시간에 한 것처럼 하면 될 것 같아요.
최 교사: 우리가 지난 시간에 어떻게 했지요?
학　 생: 분석법을 이용하여, 삼각형 ABC의 두 변 AB와 BC의 수직이등분선이 교점으로부터 각 꼭짓점에 이르는 거리가 같다고 가정하고서

……(중략)……

그러고 나서 종합법을 이용하여 정리하니까 증명이 되었어요.
최 교사: 그래요. 이번에도 비슷하게 한번 해 볼까요?
학　 생: 네.
최 교사: 그럼, 삼각형 ABC의 두 각 A와 B의 이등분선의 교점으로부터 삼각형의 각 변에 이르는 거리가 같다고 가정하고 시작해 봅시다.

1-1. 〈수업상황 A〉에서 ㉠과 ㉡에 나타난 수준의 변화 과정과 ㉢과 ㉣에 나타난 교수·학습 방법의 특성을 비고츠키(L. Vygotsky)의 학습심리학의 관점에서 각각 구체적으로 설명하시오. [10점]

1-2. 2007년 개정 수학과 교육과정의 교수·학습 방법에서 수학적 사고와 추론 능력을 발전시키기 위하여 권고한 유의사항에 근거하여, 〈수업상황 A〉와 〈수업상황 B〉에 공통으로 나타난 수업의 특징을 구체적으로 설명하시오.

그리고 〈수업상황 B〉에서 명제 ㉤의 증명에 분석법과 종합법을 적용하는 과정을 구체적으로 제시하고, 명제를 증명할 때 분석법과 종합법을 함께 이용하는 활동의 수학교육적 의의를 설명하시오. [20점]

2. 아래의 명제는 함수의 극소, 곡선의 볼록, 급수의 수렴에 대한 성질을 나타낸다. 테일러(Taylor) 정리를 이용하여 명제 (Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ)이 참임을 각각 증명하시오. [20점] [2012 2차, 1교시]

실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$라 하고, (a, b)를 $\mathbb{R}$의 열린 구간이라 하자.

(Ⅰ) 함수 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$가 (a, b)에서 C^4급 함수이고 $c \in (a, b)$에 대하여

$$f'(c) = f''(c) = f^{(3)}(c) = 0,\ f^{(4)}(c) > 0$$

이면, f는 $x = c$에서 극솟값(local minimum)을 갖는다.

(Ⅱ) 함수 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$가 (a, b)에서 2계도함수를 갖고 모든 $x \in (a, b)$에 대하여 $f''(x) \geq 0$이면, f는 (a, b)에서 볼록함수(convex function)이다.

(Ⅲ) 함수 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$가 (a, b)에서 C^∞급 함수이고 $c \in (a, b)$라 하자. 임의의 자연수 k에 대하여 모든 $t \in (a, b)$에서 $|f^{(k)}(t)| \leq 2^k$이면, 임의의 $x \in (a, b)$에 대하여 다음 식이 성립한다.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

※ 아래의 정리는 증명 없이 사용한다.

[테일러 정리]

함수 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$가 (a, b)에서 $(n+1)$계도함수 $f^{(n+1)}$을 가질 때, $c \in (a, b)$에 대하여

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

이라 하자. 그러면 임의의 $x \in (a, b)$에 대하여 다음 식을 만족하는 점 t_x가 x와 c사이에 존재한다.

$$f(x) = p_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

〈참 고〉

- 함수 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$가 자연수 n에 대하여 (a, b)에서 C^n급 함수라는 것은 (a, b)에서 n계도함수 $f^{(n)}$이 존재하고 $f^{(n)}$이 연속임을 뜻한다.
- 함수 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$가 $0 \leq t \leq 1$을 만족하는 임의의 실수 t와 (a, b)의 임의의 두 점 x_1, x_2에 대하여 다음을 만족하면 f를 (a, b)에서 볼록함수라 한다.

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

- 함수 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$가 (a, b)에서 C^∞급 함수라는 것은 모든 자연수 n에 대하여 (a, b)에서 n계도함수 $f^{(n)}$이 존재하고 $f^{(n)}$이 연속임을 뜻한다.

3. 다음은 대수학 강의 시간에 박 교수와 학생이 나눈 대화의 일부분이다. 다음을 읽고 물음에 답하시오. [30점] [2012 2차, 2교시]

박 교수: 지금까지 다항식 환에 대한 다음 정리를 증명하였습니다.

〈 정 리 〉

F가 체이면 다항식 환 $F[x]$가 주 아이디얼 정역(principal ideal domain)이다.

학생 A: 네. 체 위에서의 다항식 환이 주 아이디얼 정역임을 이해하였습니다.

박 교수: 이 정리를 출발점으로 하여, ㉠브라운(S.Brown)과 월터(M. Walter)가 제시한 '만약 그렇지 않다면 어떻게 될까(What if not)' 전략에 따라 수업을 진행하고자 합니다. 그럼, 이 전략에 따라 새로운 문제를 만드는 단계까지 진행하고 그 결과를 발표해 봅시다.

학생 B: 앞의 정리를 바탕으로 다음과 같은 새로운 명제를 만들었습니다.

〈 명 제 〉

다항식 환 $R[x]$가 주 아이디얼 정역이면 R는 체이다.

박 교수: 참 잘 만든 명제입니다. 사실 이 명제는 참입니다. 이제 이 명제를 증명해 봅시다.

3-1. 문제해결 과정에서 문제제기(문제설정, problem posing) 활동의 중요성을 3가지만 제시하시오. 그리고 아래의 정리를 출발점으로 하여, ㉠의 단계에 따라 이 정리가 n차방정식인 경우로 일반화될 수 있음을 구체적으로 설명하시오(단, 모든 근의 합과 모든 근의 곱에 대한 성질만 유도하시오.). [10점]

〈 정리 〉

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α_1과 α_2라 하면

$\alpha_1+\alpha_2=-\frac{b}{a}$이고 $\alpha_1\alpha_2=\frac{c}{a}$이다.

3-2. 학생 B가 만든 〈명제〉가 참임을 증명하시오. [20점]

4. $\mathbb{R}^3$ 안의 두 곡면 X와 Y가 구간 I에서 정의된 단위속력곡선 $\alpha : I \to X \cap Y$를 따라 수직으로 만난다.

집합 $A = \{\alpha(t) \mid t \in I\}$ 위의 위상 $\mathfrak{I}_A$가 $\mathbb{R}^3$ 위의 보통위상(usual topology)에 대한 상대위상(relative topology)일 때, 곡선 α와 집합 A는 다음 조건을 만족한다.

〈조 건〉

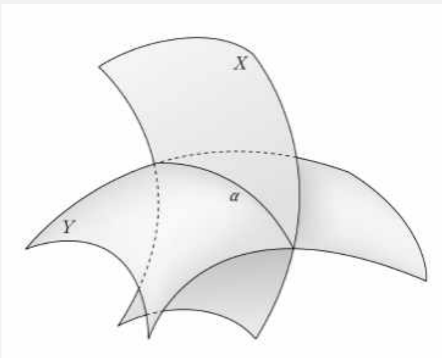
(가) 곡선 α는 X의 주요곡선이다.
(나) 모든 $t \in I$에 대하여 $\alpha''(t)$는 X와 수직이다.
(다) 위상공간 $(A,\ \mathfrak{I}_A)$는 콤팩트(compact)가 아니다.

위상 $\mathfrak{I}_A$를 이용하여 집합 X위의 위상 $\mathfrak{I}$를 다음과 같이 정의하자.

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_A \cup \{X - F \mid F\text{는 } (A,\ \mathfrak{I}_A)\text{에서 콤팩트 부분집합}\}$$

아래의 명제는 조건 (가), (나)로부터 얻을 수 있는 기하적 성질 (Ⅰ)과 조건 (다)로부터 얻을 수 있는 위상적 성질 (Ⅱ), (Ⅲ)을 나타낸 것이다. 명제 (Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ)이 참임을 각각 증명하시오. [20점] [2012 2차, 2교시]

(Ⅰ) 곡선 α 위의 모든 점에서 Y의 가우스 곡률(Gaussian curvature)은 0이다.
(Ⅱ) A는 $(X,\ \mathfrak{I})$에서 조밀한 부분집합(dense subset)이다.
(Ⅲ) 연속함수 $f : (X,\ \mathfrak{I}) \to Y$에 대하여 $f|_A : A \to Y$가 상수함수이면 f는 상수함수이다. (단, Y 위의 위상은 $\mathbb{R}^3$ 위의 보통위상에 대한 상대위상이다.)



※ 아래의 정리는 증명 없이 사용한다.

[정리 1]
곡면 X위의 정칙곡선 $\alpha : I \to X$위에서 정의된 X의 미분가능한 단위법벡터장(unit normal vector field)을 $\mathrm{N}_X(t)$라 하자(단, $t \in I$). $\alpha'(t)$가 점 $\alpha(t)$에서 X의 주요방향이면, 실수 k가 존재하여 $\mathrm{N}_X{}'(t) = k\alpha'(t)$를 만족한다. 또한 그 역도 성립한다.

[정리 2]
X가 위상공간이고 Y가 T_2 공간(Hausdorff 공간)일 때, 두 연속함수 $f,\ g : X \to Y$에 대하여 집합 $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$는 X의 닫힌 부분집합(closed subset)이다.

〈참 고〉

◦ 단위속력곡선(unit speed curve) : 곡선 위의 각 점에서 속력이 1인 정칙곡선(regular curve)
◦ 주요곡선(principal curve) : 곡선 위의 각 점에서 접선방향이 주요방향(principal direction)인, 곡면 위의 정칙곡선

1. 제 2차 세계대전 후 일어난 '수학교육 현대화 운동'에 대한 설명으로 옳은 것은? [1.5점] [2013]

① 논리적 엄밀성을 강조하지는 않았으나, 대수적 구조는 강조하였다.
② 무어(E. Moore)는 학교수학에서 순수수학과 응용수학을 극명하게 구분하려는 잘못된 경향이 만연해 있음을 비판하였다.
③ 톰(R. Thom)은 학교수학에서 엄밀한 공리적 취급은 타당하지 않으며, 집합과 논리와의 결합은 잘못된 것이라고 비판하였다.
④ 듀돈네(J. Dieudonné)는 현대수학의 조기 도입을 주장하였으나, 응용적 가치가 높은 유클리드 기하의 내용은 강조하였다.
⑤ 클라인(F. Klein)은 미적분과 해석기하를 조기에 도입하되, 그 기초적인 내용을 자연 현상과 관련지어 지도하자는 입장을 취하였다.

2. 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 교육 내용 및 교수・학습상의 유의점에 대한 설명으로 옳은 것은? [2점] [2013]

① 지수와 로그는 '수학 Ⅱ' 과목에서 다루고, 지수함수와 로그함수는 '미적분 Ⅱ' 과목에서 다룬다.
② 중학교에서 다루었던 집합은 '수학 Ⅱ' 과목으로 이동하였으나, 함수를 다루는 데 필요한 정의역, 공역, 치역 용어는 중학교에서 다룬다.
③ 중학교에서 이진법은 삭제하였으나, 실생활에서 유용하게 활용되는 근삿값과 오차의 한계는 중학교에서 다룬다.
④ 중학교에서 작도는 삼각형을 작도하는 정도로만 다루고, 이를 이용하여 삼각형의 결정조건을 이해하도록 한다.
⑤ 등식의 성질, 정비례, 반비례, 줄기와 잎 그림, 회전체는 초등학교 학습량 경감을 위하여 중학교로 이동하여 다룬다.

3. 스켐프(R. Skemp)의 이해와 관련된 설명 중 옳지 않은 것은? [2점] [2013]

① 등식의 성질을 이해하지 못하고 이항하여 일차방정식을 푸는 것은 도구적 이해의 예이다.
② 도구적 이해는 문제를 푸는 공식에 초점을 두기 때문에 관계적 이해보다 기억의 지속력이 더 강하다.
③ 관계적 이해를 통해 만족감을 얻게 되면, 새로운 자료도 관계적으로 이해하게 되고 능동적으로 찾게 된다.
④ 새로운 개념을 지도할 때 동화나 조절이 잘 이루어지도록 기존의 스키마를 잘 활용하는 것은 관계적 이해를 도모하기에 적절하다.
⑤ 관계적 이해는 무엇을 해야 할지 왜 그런지를 모두 알고 있고 일반적인 수학적 관계로부터 특수한 규칙이나 절차를 연역할 수 있는 능력이다.

4. 딘즈(Z. Dienes)는 놀이를 통한 수학 개념의 학습 과정을 다음과 같이 여섯 단계를 제시하였다.

1단계	2단계	3단계	4단계	5단계	6단계
자유 놀이	(가)	(나)	(다)	(라)	형식화

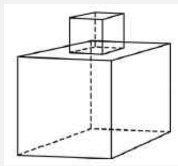
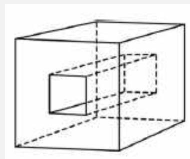
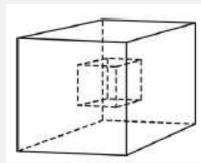
위의 (가), (나), (다), (라)에 들어갈 것으로 모두 옳은 것은? [2점] [2013]

	(가)	(나)	(다)	(라)
①	게임	표현	공통성의 탐구	기호화
②	게임	공통성의 탐구	표현	기호화
③	게임	공통성의 탐구	기호화	표현
④	공통성의 탐구	표현	게임	기호화
⑤	공통성의 탐구	게임	표현	기호화

5. 다음은 다면체에 대한 오일러(L. Euler)의 추측, 이에 대한 개략적 증명, 그와 관련된 세 가지 사례를 제시한 것이다. 라카토스(I. Lakatos)의 오류주의 수리철학의 입장에서 옳은 설명인 것은? [2.5점] [2013]

[오일러의 추측]
다면체의 꼭짓점, 모서리, 면의 개수를 각각 V, E, F라 할 때, $V-E+F=2$이다.

[개략적 증명]
[1단계] 탄력이 좋고 속이 비어 있는 다면체를 상상하고서 그 다면체의 어떤 한 면을 제거한 후, 제거된 면에 다른 면들이 평면 그물처럼 펼쳐지도록 만든다. 이때, 면이 1개 줄게 되므로, 본래의 다면체에 대하여 $V-E+F=2$ 임을 보이는 것을 평평한 그물에 대해 $V-E+F=1$ 임을 보이는 것과 같다.
[2단계] 모든 면이 삼각형이 될 때까지 각 면에 대각선을 긋는다. 대각선을 1개 그을 때마다, E, F는 각각 1개씩 늘어나므로 $V-E+F$의 값은 변하지 않는다.
[3단계] 삼각형으로 분할된 그물에서, 모서리와 면을 1개씩 없애거나 모서리 2개, 꼭짓점 1개, 면 1개를 없애는 방식으로, 삼각형을 하나씩 제거하여 단 하나의 삼각형만 남도록 한다. 삼각형을 제거하는 과정에서 $V-E+F$의 값은 변하지 않고 마지막에 남은 삼각형에 대해 $V-E+F$의 값은 1이 되므로, 원래의 추측을 증명한 것이다.

사례 ㉠	사례 ㉡	사례 ㉢
		
정육면체에 작은 정육면체 볏이 달린 입체	정육면체에 네모 구멍이 뚫린 입체	정육면체 속에 작은 정육면체가 비어 있는 입체

① 사례 ㉠은 [1단계]와 [2단계]를 통과하지만 [3단계]는 통과하지 못한다.
② 사례 ㉢은 [1단계]를 통과하지 못하는 국소적 반례인 동시에 추측을 반박하는 전면적 반례이다.
③ 괴물배제법은 사례 ㉠, ㉢과 같은 전면적 반례를 수용해서 원래의 추측이 틀렸다고 인정하는 방법이다.
④ 사례 ㉠은 [1단계]에 대한 국소적 반례인데, 그 반례를 가지고 [1단계]를 분석하는 과정을 통해 '단순 연결된 면을 가진 다면체'라는 개념을 생성해 낼 수 있다.
⑤ 예외배제법은 사례 ㉠, ㉡과 같은 전면적 반례를 다면체의 예외적인 경우로 인정하고 원래의 추측에 그 예외를 언급한 조건절을 첨가하는 것이기 때문에, 다면체의 정의를 정교화하는 데 기여한다.

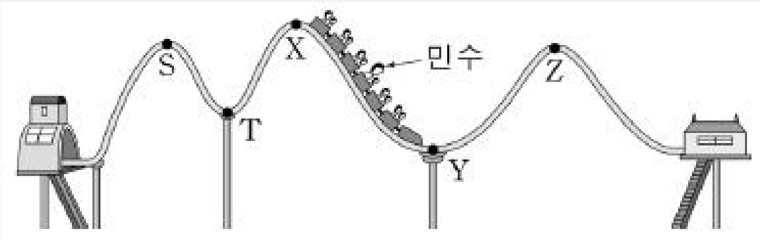
6. 폴리아(G. Polya)의 수학관 및 수학 문제해결 교육론에 대한 설명으로 가장 적절한 것은? [2점] [2013]

① 수학 문제해결 과정에서 학생이 교사의 시범을 모방하는 것은 바람직하지 않다.
② 수학적 지식의 발견은 귀납에 의해서가 아니라 하나의 전형적인 예에 대한 관찰에 의해 이루어진다.
③ 수학 문제해결 과정에서 인내하고 작은 진전의 가치를 인식하는 것과 같은 정의적 측면의 교육을 중요시하였다.
④ 수학 문제해결 과정에서 문제와 관련된 요소를 재조직하고 그 요소 사이의 관련성을 파악하게 하는 측면을 간과하였다.
⑤ 문제제기 활동은 해결의 실마리나 단서를 찾고 주의를 집중하는 데 방해가 되므로 문제해결의 계획 단계에서 하지 않는 것이 바람직하다.

7. 다음은 함수의 극대와 극소에 대한 수업 상황 [가], [나]에서 교사와 학생이 나눈 대화의 일부이다.

[가]

김 교사: 오늘은 함수의 극대와 극소에 대하여 알아보려고 합니다. ([그림]을 제시하며) 이 그림은 놀이 공원의 궤도 열차가 움직이는 모습을 옆에서 바라본 것입니다. 이 열차에 타고 있는 민수가 바로 앞의 승객과 바로 뒤의 승객보다 위에 위치하게 되는 지점을 말해 보세요. 또 민수가 바로 앞의 승객과 바로 뒤의 승객보다 아래에 위치하는 지점을 말해 보세요.



[그림]

학생 A: [그림]의 점 S, X, Z에서 민수가 바로 앞의 승객과 바로 뒤의 승객보다 위에 위치하게 됩니다. 그리고 점 T와 Y에서 아래에 위치합니다.

김 교사: 네, 그래요. 연속인 함수 $f(x)$의 그래프가 [그림]의 궤도 열차가 지나가는 길과 같은 모양일 때, 함수 $f(x)$의 증감상태를 살펴봅시다.

[나]

박 교사: 함수 $g(x)=|x|$는 극값을 갖나요?

학생 B: $g(x)=|x|$의 그래프 모양이 뾰족해서 극값을 갖지 않습니다. 함수들이 극값을 가질 때는 그 그래프 모양이 항상 매끄러운 곡선이었거든요.

박 교사: 극값을 갖는지 알려면 극대, 극소의 정의를 알아야 합니다. (곧 바로 함수의 극대와 극소의 정의를 말한 후) $g(x)=|x|$는 $x=0$의 좌우에서 감소상태가 증가상태로 바뀌죠?

학생 B: (대답 없음)

박 교사: 그러니까 $x=0$에서 극솟값을 갖겠죠?

학생 B: (대답 없음)

위의 수업 상황 [가], [나]에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2013]

<보기>

ㄱ. [가]에서 김 교사는 함수의 극대와 극소의 의미를 개인화/배경화(personalization, contextualization) 시키고 있다.

ㄴ. [나]에서 학생 B는 함수의 그래프가 매끄러운 곡선 모양일 때만 극값을 가진다는 개념이미지를 지니고 있다.

ㄷ. [나]에서는 조르단 효과(주르뎅 효과, Jourdain effect)가 나타났다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

8. 함수의 역사적 발달과 관련된 설명 중 옳은 것은? [1.5점] [2013]

① 함수는 주로 정적인 맥락, 즉 여러 상황에 대한 동시 고려의 필요성이 제기되는 맥락에서 17세기 무렵부터 의식적으로 사용되기 시작하였다.

② 함수 기호 $f(x)$는 17세기말 라이프니츠(G. W. Leibniz)와 베르누이(J. Bernoulli)의 서신 교환에서 사용되었다.

③ 오일러(L. Euler)는 함수를 '어떤 양이 다른 양에 종속된다면 후자의 함수'라고 표현하였고, 이후에 '변하는 것과 어떤 상수가 결합된 크기'로 새롭게 표현하였다.

④ 디리클레(Dirichlet) 함수의 출현은 독립변수와 종속변수의 구분이 명확해지는 결정적 계기가 되었다.

⑤ 부르바키(Bourbaki) 학파는 집합 이론에 기초하여 '순서쌍의 집합의 부분집합'이 어떤 특정한 조건을 만족할 때, 그 부분 집합을 함수로 정의하였다.

9. 다음은 중학교에서 다루는 피타고라스 정리에 관한 [문제]이다.

[문제]

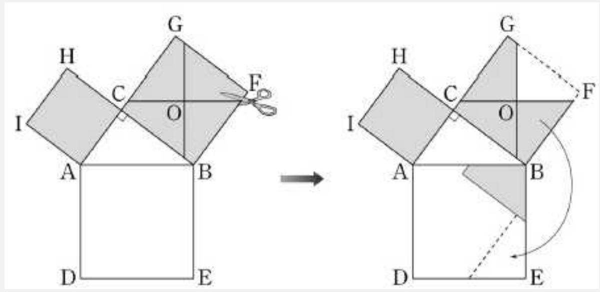
직각삼각형 ABC의 각 변을 한 변으로 하는 정사각형을 그려서 다음과 같은 [단계 1], [단계 2]를 통해 피타고라스 정리가 성립함을 설명하여라.

[단계 1]

정사각형 CBFG의 두 대각선의 교점 O를 지나고 두 변 AB와 BE에 평행인 선분을 각각 긋고, 그어진 선을 따라 4개의 사각형을 오린다.

[단계 2]

[단계 1]에서 오려 낸 4개의 사각형과 정사각형 ACHI를 정사각형 ADEB에 채워 본다.



[단계 1] [단계 2]

위의 [문제]에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2013]

<보기>

ㄱ. 수학적 아이디어를 구체적 조작과 탐구 활동을 통하여 정당화할 수 있는 예이다.

ㄴ. 반 힐레(P. van Hiele)가 제시한 기하 학습 수준에서 도형의 구성 요소와 성질에 주목하여 이를 인식하는 기술적/분석적 수준에 해당하는 활동의 예이다.

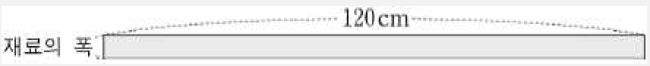
ㄷ. 2009 개정 교육과정에 따른 중학교 수학과 교육과정에 비추어 볼 때, 위의 [문제]를 해결한 후 가정, 결론 용어를 사용하는 연역적 증명 방법에 의한 교수・학습이 뒤따라야 한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

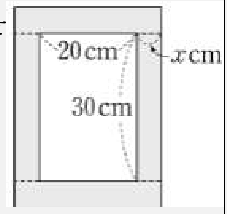
10. 다음은 A 교사가 제시한 과제와 B 모둠이 제출한 답안이다. 이와 관련된 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2.5점] [2013]

[A 교사가 제시한 과제]

사진을 액자에 넣기 위해 액자틀을 만들 때, 사진의 크기나 액자틀의 폭에 따라 필요한 재료의 길이가 달라진다. 가로의 길이 20cm, 세로의 길이 30cm인 사진을 넣기 위해 직사각형 모양의 액자를 만들려고 한다. 아래 그림과 같은 120cm 길이의 재료를 남김없이 사용하여 액자틀을 만들었다면 액자틀의 폭은 얼마인가? (단, 액자틀의 폭과 재료의 폭은 같으며, 재료의 두께는 고려하지 않는다.)



[B 모둠의 답안]



[가] 이 문제를 해결하기 위해서 필요한 액자틀의 폭을 $x$cm, 재료의 길이를 $y$cm라 한다.

[나] 액자틀의 가로의 길이는 $20+2x$(cm)이므로,

$y=2\{(20+2x)+30\}=4x+100$이다.

[다] 문제에서 주어진 재료의 길이는 120cm이므로,

$120=4x+100$

$x=5$

따라서 폭이 5cm인 액자틀을 만들 수 있다.

[라] 우리 모둠에서는 사진의 크기와 액자틀의 폭이 달라짐에 따라 필요한 재료의 길이에 대해서도 알아보았다. 그 결과, 사진의 가로의 길이가 $a$cm, 세로의 길이가 $b$cm, 액자틀의 폭이 $x$cm일 때, 필요한 재료의 길이를 $y$cm라 하면 $y=2\{(a+2x)+b\}=4x+2(a+b)$이다.

<보기>

ㄱ. [가]는 수직적 수학화에 해당한다.

ㄴ. [나]에서는 문제 상황에 영향을 미치는 요인들의 관계를 수학적으로 해석하여 주어진 문제 상황에 적합한 모델을 구축하였다.

ㄷ. [라]는 [가], [나], [다]를 통해 얻은 결과를 일반화한 것이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11. 확률과 통계의 교수·학습에 대한 논의 중 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2013]

<보기>

ㄱ. 물리적으로 비대칭적인 압정이나 윷은 라플라스(P.S. Laplace)의 고전적 확률 정의가 적용되지 않는 상황이 있음을 이해시키는 데 교수·학습 소재로 이용될 수 있다.

ㄴ. 2009 개정 교육과정에 따른 중학교 수학과 교육과정에 의하면, 확률은 실험이나 관찰 상황에서 구한 상대도수로서의 의미와 경우의 수의 비율로서의 의미를 연결하여 이해하게 한다.

ㄷ. 어느 도시 인구의 40% 정도가 안경을 쓴 사람이라고 할 때 5명 중 2명은 반드시 안경을 쓴 사람일 것이라 생각하는 것과 같이, 학생들이 '작은 표본이어도 모집단과 유사하다.' 고 생각하는 경향은 교수·학습을 통해 교정되어야 할 필요가 있다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12. 다음은 김 교사가 평가도구 개발 단계에서 제작한 고등학교의 도형의 방정식에 대한 문항과 그 채점 기준이다. 이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2013]

[문항]

어떤 공장에서 제품 A, B를 P, Q 두 팀으로 나누어 생산하고 있다. 이때 제품 A, B를 각각 1톤 생산하는 데 필요한 시간과 제품에서 얻는 이익은 아래 표와 같다.

제품	1톤 생산하는 데 필요한 시간		이익
	P팀	Q팀	
A	2시간	2시간	30만원
B	1시간	3시간	20만원

하루에 일하는 시간이 P팀은 8시간, Q팀은 12시간을 초과할 수 없다고 할 때, 이 공장에서 하루에 제품 A, B를 생산하여 얻을 수 있는 최대 이익은 얼마인지 구하여라. 풀이 과정과 답을 쓰시오. [10점]

[문항 정보]

평가 목표	행동 영역			
부등식의 영역을 활용하여 최대, 최소 문제를 해결할 수 있다.	계산	이해	추론	문제해결

[채점 기준]

채점 요소	배점
문제 상황을 연립부등식으로 나타낸다.	2점
연립부등식이 나타내는 영역을 좌표평면 위에 나타낸다.	3점
하루 이익이 최대인 경우를 찾는다.	3점
최대 이익(130만원)을 구한다.	2점

<보기>

ㄱ. [문항]은 주어진 수학 외적 상황과 수학 내용의 관련성을 파악하여 문제를 해결한다는 측면에서 볼 때, [문항 정보]의 행동 영역에서 문제해결로 분류하는 것이 적절하다.

ㄴ. [문항]은 개방형 문제(open-ended problem)로서, 수학적 개념과 기능을 학생들이 얼마나 습득하고 이를 적용할 수 있는지를 평가하기에 적합하다.

ㄷ. [채점 기준]은 분석적 점수화 방법에 따라 만들어진 기준으로, 주어진 문제를 해결하는 데 필요한 과정을 구체화하여 각 과정별로 채점 요소를 정해 점수를 부여한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간 $\mathbb{R}^5$에 속하는 벡터 v_1, v_2, v_3에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [1.5점] [2013]

<보기>

ㄱ. v_1, v_2, v_3이 일차독립이면 $v_1+v_2+v_3$, v_2+v_3, v_3도 일차독립이다.
ㄴ. 집합 $\{av_1+bv_2+cv_3 | a, b, c \in \mathbb{R}\}$는 $\mathbb{R}^5$의 부분공간이다.
ㄷ. 5차 정사각행렬 A에 대하여 두 방정식 $Ax=v_1$, $Ax=v_2$가 모두 해를 가지면 방정식 $Ax=2v_1+v_2$도 해를 가진다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간 $\mathbb{R}^3$에 대하여 선형사상 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$을 $T(x, y, z)=(x+y-2z, y, x-2z)$로 정의하자. T의 상(image) $\mathrm{im}(T)$와 T의 핵(kernel) $\ker(T)$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2.5점] [2013]

<보기>

ㄱ. $\mathrm{im}(T)$의 차원은 1이다.
ㄴ. 벡터 $(1, 0, 0)$의 $\ker(T)$ 위로의 직교정사영(orthogonal projection)은 $\frac{2}{5}(2, 0, 1)$이다.
ㄷ. 벡터 (x, y, z)의 $\ker(T)$ 위로의 직교정사영을 $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$로 나타낼 때, 행렬 A의 고유치(eigenvalue, characteristic value)를 모두 더한 값은 1이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 정수 3은 법 50에 대한 원시근(primitive root)이다. 1보다 크거나 같고 25보다 작거나 같은 정수 중 합동식

$$x^{12} \equiv -9 \pmod{50}$$

의 해를 모두 더한 값은? [2점] [2013]

① 22 ② 24 ③ 26
④ 28 ⑤ 30

16. 소수 $p(p>2)$에 대하여 $-2p$가 $935(=5\times 11\times 17)$의 이차잉여(quadratic residue)일 때, p의 이차잉여만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2013]

<보기>

ㄱ. -11 ㄴ. 5 ㄷ. 17

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

17. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2013]

<보기>

ㄱ. 함수 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$을 $f(k)=([k]_2, [k]_3)$으로 정의할 때, $\ker(f) = 6\mathbb{Z}$이다. (단, $[k]_n$은 $\mathbb{Z}$에서 법 n에 대한 k의 합동류(congruence class)이고, $\ker(f)$는 f의 핵(kernel)이다.)
ㄴ. 군 G의 잉여군(quotient group, factor group) $G/Z(G)$가 순환군(cyclic group)이면 G는 아벨군(가환군)이다. (단, $Z(G)$는 G의 중심(center)이다.)
ㄷ. 위수(order)가 400인 아벨군 중에서 서로 동형이 아닌 것의 종류는 8가지이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

18. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2013]

<보기>

ㄱ. 환 $\mathbb{Z}_n$의 0이 아닌 원소 a가 영인자(zero divisor)이면 a는 단원(unit)이 아니다.
ㄴ. 정역(integral domain) R의 표수(characteristic) n이 양수이면 n은 소수이다.
ㄷ. 다항식 $x^7+9x^4+3x^2-15x+12$는 $\mathbb{Q}[x]$에서 기약(irreducible)이다.

① ㄴ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 실수 $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$일 때, 환 $\mathbb{Z}[\alpha]=\{a+b\alpha | a, b \in \mathbb{Z}\}$와 행렬환 $M_2(\mathbb{Z}_3)$에 대하여 환준동형사상(ring homomorhpism) $\varphi : \mathbb{Z}[\alpha] \to M_2(\mathbb{Z}_3)$을 다음과 같이 정의하자.

$$\varphi(a+b\alpha)=\begin{pmatrix} [a+b]_3 & [b]_3 \\ [b]_3 & [a]_3 \end{pmatrix}$$

(단, $[k]_3$은 $\mathbb{Z}$에서 법 3에 대한 k의 합동류이다.)

φ의 핵(kernel) $\ker(\varphi)$와 φ의 상(image) $\mathrm{im}(\varphi)$에 대하여 옳은 것은? (단, $\langle a \rangle$는 a로 생성되는 주아이디얼(principal ideal)이고, F_n은 위수가 n인 유한체이다.) [2점] [2013]

① $\ker(\varphi)=\langle 3 \rangle$이고, $\mathrm{im}(\varphi)$는 F_9와 환동형이다.
② $\ker(\varphi)=\langle 3 \rangle$이고, $\mathrm{im}(\varphi)$는 $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$과 환동형이다.
③ $\ker(\varphi)=\langle 9 \rangle$이고, $\mathrm{im}(\varphi)$는 F_{27}과 환동형이다.
④ $\ker(\varphi)=\langle 9 \rangle$이고, $\mathrm{im}(\varphi)$는 $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3$과 환동형이다.
⑤ $\ker(\varphi)=\langle 9 \rangle$이고, $\mathrm{im}(\varphi)$는 $\mathbb{Z}_{27}$과 환동형이다.

20. F는 체 $\mathbb{Z}_2$의 유한확대체(finite extension field)이다. $[F : \mathbb{Z}_2]=60$일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2013]

<보기>

ㄱ. K가 F의 부분체(subfield)이면 $\mathbb{Z}_2 \subseteq K$이다.
ㄴ. F의 두 부분체 K_1과 K_2가 $[F : K_1]=5$, $[F : K_2]=10$을 만족하면 $K_2 \subseteq K_1$이다.
ㄷ. F의 두 부분체 K_1과 K_2가 $[F : K_1]=6$, $[F : K_2]=10$을 만족하면 $K_1 \cap K_2 = \mathbb{Z}_2$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 모든 항이 양수인 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴할 때, 수렴하는 급수만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2013]

<보기>

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$
ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{{a_n}^2+1}$
ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{a_n}-1)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

22. 수렴하는 이상적분(특이적분, improper integral)만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2013]

<보기>

ㄱ. $\int_1^\infty \frac{x+1}{x\sqrt{x^4+1}}dx$

ㄴ. $\int_2^\infty \frac{1}{\ln x}dx$

ㄷ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x+\sqrt{1-\sin x}}dx$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

23. 정의역이 실수 전체의 집합인 함수

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & (x\neq 0)\\ \frac{1}{2} & (x=0)\end{cases}$$

에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2013]

<보기>

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}x_n=0$이고 $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(0)$인 순감소(strictly decreasing) 수열 $\{x_n\}$이 존재한다.
ㄴ. $f(a)<\gamma<f(b)$이면 $f(c)=\gamma$를 만족시키는 c가 a와 b사이에 존재한다.
ㄷ. 함수 $g(x)=xf(x)$는 구간 $(0, 1)$에서 균등연속 (평등연속, 고른연속, uniformly continuous)이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

24. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 f에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2013]

<보기>

ㄱ. 모든 양수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$이면 $f'(0)=0$이다.
ㄴ. $f(1)-f(0)=\frac{f'(c)}{2c}$를 만족시키는 실수 c가 0과 1 사이에 존재한다.
ㄷ. $(f')^3$이 단조증가(monotone increasing)함수이면 f'은 연속함수이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

25. 구간 $[0, 1]$에서 미분가능한 함수열 $\{f_n\}$이 함수 f로 점별수렴(pointwise convergence)한다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2013]

<보기>

ㄱ. 함수열 $\{f_n\}$이 균등수렴(평등수렴, 고른수렴, uniform convergence)하면 f는 균등연속(평등연속, 고른연속, uniformly continuous)함수이다.
ㄴ. 함수 f가 $[0, 1]$에서 리만적분가능(Riemann integrable)하면 $\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$이다.
ㄷ. 함수열 $\{f_n'\}$이 균등수렴하면 함수열 $\{f_n\}$도 균등수렴한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

26. 실수열 $\{a_n\}$에 대하여, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2013]

<보기>

ㄱ. $\{a_n\}$이 유계(bounded)이고 실수열 $\{b_n\}$이 코시수열(Cauchy sequence)이면 $\{a_nb_n\}$은 코시수열이다.
ㄴ. $\{a_n\}$이 유계이고 수렴하지 않으면, $\{a_n\}$의 수렴하는 부분수열(subsequence)중 $\lim_{k\to\infty}a_{n_k}\neq\lim_{k\to\infty}a_{m_k}$인 부분수열 $\{a_{n_k}\}$, $\{a_{m_k}\}$가 존재한다.
ㄷ. $\{a_n\}$의 상극한(limit superior, $\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n$, $\lim_{n\to\infty}\sup a_n$)이 1이면, 임의의 $\varepsilon>0$에 대하여 $a_n<1-\varepsilon$을 만족시키는 n의 개수는 유한하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

27. 두 실수 a와 b에 대하여 복소함수

$$f(x+iy)=(x^3-2axy-bxy^2)+i(2x^2-ay^2+bx^2y-y^3)\ (x,\ y\text{는 실수})$$

가 정함수(entire function)일 때, a^2+b^2의 값은? [1.5점] [2013]

① 10 ② 13 ③ 17
④ 18 ⑤ 20

28. <조건>을 만족시키는 고립특이점(isolated singularity) $z=0$을 갖는 복소함수만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2.5점] [2013]

<조건>

임의의 $w\in\mathbb{C}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}z_n=0$이고 $\lim_{n\to\infty}f(z_n)=w$인 수열 $\{z_n\}$이 존재한다.

<보기>

ㄱ. $f(z)=z\sin\frac{1}{z}$

ㄴ. $f(z)=\frac{\sin z}{e^z-1}$

ㄷ. $f(z)=\frac{1}{\sin z}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

29. 실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$, 유리수 전체의 집합을 $\mathbb{Q}$라 할 때, 가산집합(countable set)만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [1.5점] [2013]

<보기>

ㄱ. $\mathbb{Q}\times(\mathbb{R}-\mathbb{Q})$
ㄴ. $\{F\mid F$는 $\mathbb{Q}$의 유한부분집합$\}$
ㄷ. 상집합(quotient set) $\mathbb{R}/\sim$
(단, $\sim$은 $\mathbb{R}$에서

$$x\sim y \Leftrightarrow x-y\in\mathbb{Q}$$

로 정의된 동치관계(equivalence relation)이다.)

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

30. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$에 대하여 $\{[a,\ b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$를 기저(base)로 하는 $\mathbb{R}$ 위의 위상을 $\mathfrak{I}$라 하자. 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$를 $f(x) = |x|$로 정의하고,

$$\mathfrak{I}_1 = \{f^{-1}(G) \mid G \in \mathfrak{I}\}$$

라 하자. 위상공간 $(\mathbb{R},\ \mathfrak{I}_1)$에서 집합 $(-2,\ 1)$의 내부(interior) A와 집합 $[1,\ 2)$의 내부 B를 옳게 나타낸 것은? (단, $|x|$는 x의 절댓값이고, $(a,\ b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, $[a,\ b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$이다.) [2점] [2013]

① $A = \varnothing,\ B = \varnothing$
② $A = \varnothing,\ B = (1,\ 2)$
③ $A = (-1,\ 1),\ B = \varnothing$
④ $A = (-1,\ 1),\ B = (1,\ 2)$
⑤ $A = (-1,\ 1),\ B = [1,\ 2)$

31. 자연수 전체의 집합 $\mathbb{N}$과 자연수 n에 대하여 $A_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \ge n\}$이라 하고, $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$을 기저(base)로 하는 $\mathbb{N}$ 위의 위상을 $\mathfrak{I}$라 하자. $X = (\mathbb{N},\ \mathfrak{I})$라 하고, $Y = [0,\ 1]$을 $(\mathbb{R},\ \mathfrak{I}_u)$의 부분공간(subspace)이라 할 때, 적공간(product space) $X \times Y$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2013]
(단, $[0,\ 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le 1\}$이고, $\mathfrak{I}_u$는 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 위의 보통위상(usual topology)이다.)

<보기>

ㄱ. 집합 $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\} \times (Y \cap \mathbb{Q})$는 $X \times Y$에서 조밀(dense)하다.
(단, $\mathbb{Q}$는 유리수 전체의 집합이다.)
ㄴ. 함수 $f : X \to X \times Y$를 $f(n) = \left(2n,\ \dfrac{1}{n}\right)$로 정의하면 f는 연속함수이다.
ㄷ. $X \times Y$는 콤팩트공간이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

32. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 위의 보통위상(usual topology) $\mathfrak{I}_u$에 대하여 $X = (\mathbb{R},\ \mathfrak{I}_u)$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $(a,\ b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$이다.) [2.5점] [2013]

<보기>

ㄱ. X의 부분공간(subspace) $\mathbb{Q}$는 연결(connected)공간이다. (단, $\mathbb{Q}$는 유리수 전체의 집합이다.)
ㄴ. X의 부분공간 $(-2,\ -1) \cup (0,\ 1) \cup \{\sqrt{2}\}$의 성분(component)의 개수는 3이다.
ㄷ. $Y = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$가 X의 부분공간일 때, $f(5) \ne f(6)$인 연속함수 $f : X \to Y$가 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

33. 좌표공간에서 두 단위속력 곡선

$$\alpha(t) = \left(3\cos\frac{t}{5},\ 3\sin\frac{t}{5},\ \frac{4}{5}t\right),\ \beta(t) = \left(3\cos\frac{t}{5},\ 3\sin\frac{t}{5},\ -\frac{4}{5}t\right)$$

에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2013]

<보기>

ㄱ. 곡선 α의 곡률(curvature) κ_α와 곡선 β의 곡률 κ_β에 대하여 $\kappa_\alpha = \kappa_\beta$이다.
ㄴ. 곡선 α의 열률(꼬임률, 비틀림률, torsion) τ_α와 곡선 β의 열률 τ_β에 대하여 $\tau_\alpha = -\tau_\beta$이다.
ㄷ. $\beta(t) = L(\alpha(t))$이고 L을 나타내는 행렬의 행렬식이 1인 직교변환(orthogonal transformation) L이 존재한다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

34. 좌표공간에 원환면(torus)

$$T = \{(x,\ y,\ z) \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\}$$

과 평면

$$P = \{(x,\ y,\ z) \mid y + z = 0\}$$

이 있다. 원환면 T와 평면 P의 교집합에 놓여있는 단위속력곡선

$$\alpha : (-1,\ 1) \to T \cap P$$

가 $\alpha(0) = (1,0,0)$을 만족시킬 때, 점 $(1,0,0)$에서 곡선 α의 원환면 T에 대한 법곡률(normal curvature)의 절댓값은? [2점] [2013]

① 0 ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{2}{3}$
④ 1 ⑤ $\dfrac{4}{3}$

35. 동전 3개를 동시에 던져서 모두 앞면이 나오는 경우를 성공이라고 하자. 동전 3개를 동시에 던지는 시행을 독립적으로 반복할 때, 5번 성공할 때까지의 시행 횟수를 확률변수 X라 하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2013]

<보기>

ㄱ. $\mathrm{P}(X \le 4) = 0$
ㄴ. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(X = k) = 1$
ㄷ. $\mathrm{P}(X = 13) = {}_{12}\mathrm{C}_4 \left(\dfrac{1}{8}\right)^5 \left(\dfrac{7}{8}\right)^8$

① ㄴ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

36. 연속확률변수 X의 확률밀도함수(probability density function) $f(x)$가 $f(x) = \dfrac{2}{3}x\ \ (1 < x < 2)$이다. 확률변수 $Y = \dfrac{2}{X}$에 대하여 Y의 기댓값 $\mathrm{E}[Y]$의 값은? [2점] [2013]

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ 1
④ $\dfrac{4}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{3}$

37. 어느 지역의 성인 300명을 대상으로 조사한 결과, 영양제를 주 2회 이상 복용하는 사람이 180명이었다. 이 지역의 성인 중 영양제를 주 2회 이상 복용하는 사람의 비율에 대한 99% 신뢰구간은? (단, $\sqrt{2}$는 1.41로 계산하고, $Z \sim N(0,1)$일 때 $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58) = 0.99$이다. 소수점 아래 다섯째 자리에서 반올림한다.) [2점] [2013]

① $(0.5472,\ 0.6528)$ ② $(0.5372,\ 0.6628)$
③ $(0.5272,\ 0.6728)$ ④ $(0.5172,\ 0.6828)$
⑤ $(0.5072,\ 0.6928)$

38. 점화식 $d_0 = 1,\ d_1 = \dfrac{3}{2} + 4\sqrt{5},\ d_n = 3d_{n-1} - d_{n-2}\ \ (n \ge 2)$에 대하여 $d_n = ap^n + bq^n$일 때, $a + b + p + q$의 값은? [2점] [2013] (단, $a,\ b,\ p,\ q$는 상수이다.)

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

39. $A,\ B,\ C,\ D,\ E$ 다섯 종류의 과자가 있다. 이 중에서 A 과자를 4개 이상 포함하지 않도록 과자 12개를 택하는 경우의 수는? (단, 각 종류의 과자는 12개 이상씩 있다.) [2점] [2013]

① 1310 ② 1315 ③ 1320
④ 1325 ⑤ 1330

40. 꼭짓점의 개수가 6인 단순그래프(simple graph)에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2013]

<보기>

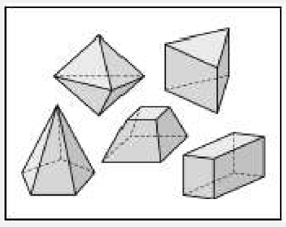
ㄱ. 꼭짓점의 차수(degree)가 4, 4, 3, 3, 2, 0인 단순그래프가 존재한다.
ㄴ. 꼭짓점의 차수가 2, 2, 2, 2, 2, 2인 단순그래프는 유일하다.
ㄷ. 꼭짓점의 차수가 d_1, d_2, d_3, d_4 ,d_5, d_6 $(d_1 > d_2 > d_3 > d_4 > d_5 > d_6 > 0)$인 단순그래프가 존재한다.

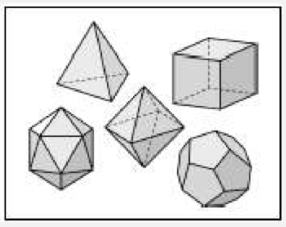
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1. 다음은 중학교 1학년 기하 영역의 정다면체에 관한 수업의 일부이다. [30점] [2013 2차, 1교시]

(상략)

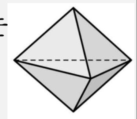
교 사: 그러면 이제부터 정다면체에 대해서 함께 생각해 보려고 해요. 여기 오른쪽에는 정다면체인 입체도형을 모아 놓았고 왼쪽에는 정다면체가 아닌 입체도형을 모아 놓았어요. 이 두 부류의 입체도형을 비교하면서 정다면체를 뭐라고 약속하면 좋을지 서로의 의견을 말해 보도록 합시다.





학 생1: 정다면체인 입체도형은 모든 면이 정삼각형이거나 정사각형, 정오각형이에요. 아, 그러면 정다면체는 모든 면이 합동인 정다각형으로 이루어져 있는 입체도형이라고 약속하면 될 것 같아요.

학 생2: 선생님! 그러면 저 입체도형도 정다면체가 될 수 있는 거 아니에요?



교 사: 그래요? 왜 그렇다고 생각하나요?

학 생2: 저 입체도형도 모든 면이 합동인 정삼각형으로 이루어졌어요.

교 사: ㉠지금은 정다면체가 무엇인지 약속하려고 하는 거니까 미리 정해져 있다고 주장하기보다는 학생 2가 말하는 입체도형이 왜 정다면체가 될 수 없는지 그 이유를 구체적으로 말해 주면 정다면체가 무엇인지 약속하는 데 도움이 될 거예요.

학 생1: 오른쪽에 놓인 입체도형은 다른 특징을 가지고 있는 것 같아요.

교 사: 그러면 우리가 아까 정다면체가 무엇인지 약속한 것에다 어떤 것을 추가하면 될까요?

학 생1: 아까 정한 약속에다가 각 꼭짓점에 모인 면의 개수가 같다는 것을 추가하면 되겠네요.

학 생2: 학생 1의 말을 들으니 정다면체는 모든 면이 합동인 정다각형으로 이루어져야 하고, 각 꼭짓점에 모이는 면의 개수가 모두 같은 입체도형으로 약속하면 될 것 같아요.

교 사: 지금까지 여러분의 토론을 종합해 보면 정다면체는 모든 면이 합동인 정다각형으로 이루어져 있고, 각 꼭짓점에 모인 면의 개수가 모두 같다는 것으로 약속할 수 있어요.

(하략)

1-1. 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정은 학교 수학에서 인지적 능력 개발 및 정의적 태도 개선과 더불어 인성 함양을 강조하고 있다. 위의 상황에서 교사는 학생들이 수학 학습자로서 바람직한 인성과 태도를 함양하기 위한 수업을 하고 있다. 밑줄 친 ㉠에서 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정이 제시하는 인성 함양을 위한 교수·학습 방법 관련 유의사항을 어떻게 반영하고 있는지 설명하시오. [10점]

1-2. ‘프로이덴탈(H. Freudenthal)의 수학화 과정으로서 국소적 조직화’와 ‘사회적 구성주의에 따른 수학적 지식의 구성 과정에서의 사회적 합의’에 대하여 각각 기술하고, 이와 각각 관련지어 위 수업에서 나타난 교수·학습 과정을 설명하시오. [20점]

2. 사상 $\Phi : \mathbb{R}[x] \to S$는 실수체 $\mathbb{R}$위의 다항식환 $\mathbb{R}[x]$에서 단위원(identity, unity) $1(\neq 0)$을 포함하는 정역(integral domain) S로의 환준동형사상(ring homomorphism)이다. Φ에 대한 다음 명제의 참, 거짓을 판정한 후 참인 명제는 증명하고 거짓인 명제는 거짓인 이유를 설명하시오. [20점] [2013 2차, 1교시]

〈명 제〉

(I) $\Phi(\mathbb{R}[x]) = S$이면 S는 주 아이디얼 정역(principal ideal domain)이다.

(II) $\Phi(\mathbb{R}[x]) = S$이고 $I = \langle x^2+2x+2 \rangle$이면 잉여환(factor ring, quotient ring) $S/\Phi(I)$의 아이디얼(ideal)은 3개 존재한다.
(단, $I = \langle x^2+2x+2 \rangle$는 다항식 x^2+2x+2로 생성되는 주 아이디얼 (principal ideal)이다.)

(III) $S = \mathbb{Z}$이면 잉여환 $\mathbb{R}[x]/\ker\Phi$의 아이디얼은 모두 1개 존재한다.
(단, $\mathbb{Z}$는 정수환이고 $\ker\Phi$는 Φ의 핵(kernel)이다.)

※ 아래 제시된 성질은 필요하면 증명 없이 사용할 수 있다.

〈조 건〉

(가) $\mathbb{R}[x]$는 주 아이디얼 정역이다.

(나) S의 아이디얼 J에 대하여 $\Phi^{-1}(J)$는 $\mathbb{R}[x]$의 아이디얼이다.

(다) $p(x) \in \mathbb{R}[x]$가 기약다항식(irreducible polynomial)이면 $\langle p(x) \rangle$는 $\mathbb{R}[x]$의 극대 아이디얼(maximal ideal)이다.

(라) $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$일 때, $\Phi(f(x))\,\Phi(g(x)) = 0$이면 $\Phi(f(x)) = 0$ 또는 $\Phi(g(x)) = 0$이다.

3. 0 이상의 정수 n에 대하여 $n+1$차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^{n+1}$에서 원점 O로부터 거리가 1인 위치에 있는 점들의 모임을 n차원 구라고 하고

$$S^n = \left\{\zeta = (x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, \|\zeta\|^2 = 1\right\}$$

로 나타낸다. 예를 들어, S^1은 원, S^2는 구면이다.

(단, $\|\zeta\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2}$이고, S^n의 위상은 $\mathbb{R}^{n+1}$ 위의 보통위상(usual topology)의 상대위상(relative topology)이다.) [30점] [2013 2차, 2교시]

학생 갑과 을이 제시된 n차원 구의 정의를 보고 다음과 같은 대화를 나누었다.

> 갑: S^1, S^2는 모두 연결 공간(connected space)이네. 아마도 '모든 S^n이 연결 공간이다.' 라는 명제는 참인 것 같아. 그래서 다음과 같이 증명해 보았어.
>
> - 1단계: 사상 $g : (\mathbb{R}^{n+1} - \{O\}) \to S^n$을 $g(\zeta) = \dfrac{\zeta}{\|\zeta\|}$로 정의하면 이 사상은 연속(continuous)이고 전사(surjective)이다.
> - 2단계: 연결 공간의 연속사상에 대한 상(image)은 연결 공간이다.
> - 3단계: $\mathbb{R}^{n+1} - \{O\}$은 연결 공간이다.
> - 4단계: 2단계와 3단계로부터 S^n도 연결 공간이다.
>
> 을: 음, 의심스러운데? $S^0 = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\} = \{-1, 1\}$이잖아.
> 즉, S^0은 연결 공간이 아니지.
>
> 갑: 아, 그럼 그 반례에 대해 이렇게 대응해야겠구나!
>
> | 개선된 추측(명제) |
> |---|

3-1. 라카토스(I. Lakatos)는 수학적 지식이 증명과 반박의 논리에 의해 추측이 개선되는 과정을 통해 성장한다고 주장하였다. 추측에 대한 반례가 출현할 때 라카토스가 제시한 대응 방법 중 다음에 제시된 (가), (나), (다)에 대해 기술하시오. 그리고 위의 상황에서 나타난 반례에 대한 대응을 보조정리합체법을 이용하여 개선된 추측(명제)과 함께 구체적으로 설명하시오. [10점]

> (가) 괴물배제법(monster-barring method)
> (나) 예외배제법(exception-barring method)
> (다) 보조정리합체법(lemma-incorporation method)

3-2. 3차원 구

$$S^3 = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\right\}$$

에 대한 질문 (Ⅰ), (Ⅱ)에 답하시오. [20점]

> (Ⅰ) S^3에 대해서 다음과 같은 동치관계로 정의된 상공간(quotient space)을 $S^3/\sim$라 하자.
>
> $$(x_1, y_1, z_1, w_1) \sim (x_2, y_2, z_2, w_2) \Leftrightarrow w_1 > 0,\ w_2 > 0$$
>
> 이때 다음 (가), (나)의 참, 거짓을 판단하고 그 이유를 설명하시오.
>
> > (가) $S^3/\sim$은 컴팩트(compact)이다.
> > (나) $S^3/\sim$과 S^3은 위상동형(homeomorphic)이다.
>
> (Ⅱ) 사영사상
>
> $$p : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ p(x, y, z, w) = (x, y, z)$$
>
> 에 대하여
>
> $$H = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, y + z + w = 0\right\}$$
>
> 와 S^3의 교집합 $H \cap S^3$을 생각하면, $M = p(H \cap S^3)$는 $\mathbb{R}^3$에서 점 $(1, 0, 0)$을 포함하는 정규곡면(정칙곡면, regular surface)이 된다. 이때 M의 점 $(1, 0, 0)$에서의 가우스곡률(Gaussian curvature)을 구하시오.

4. 두 양수 a, b에 대하여

$$K(a,\, b) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt$$

를 구하시오. 그리고 실수 x에 대하여

$$s_n(x) = \sum_{m=1}^{n} K(m,\, 2m)|x|\cos(mx),$$

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$$

라 할 때 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} s(x)\,dx$를 구하시오. [20점] [2013 2차, 2교시]

※ 아래 제시된 성질은 필요하면 증명 없이 사용할 수 있다.

<성 질>

(가) 복소평면에서 두 양수 a, b에 대하여

$C:\ z(t) = a\cos t + ib\sin t\ (0 \le t \le 2\pi)$일 때 $\displaystyle\int_C \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i$이다.

(나) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

(다) 자연수 m에 대하여 $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos(mx)\,dx = \frac{(-1)^m - 1}{m^2}$이다.

(라) 구간 I에서 정의된 함수열 $\{f_n\}$이 있다. 모든 자연수 n과 모든 $x \in I$에 대하여 $|f_n(x)| \le M_n$이고 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$이 수렴하면 함수급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$은 I에서 평등수렴(균등수렴, uniform convergence)한다.

(마) 닫힌구간 $[a, b]$에서 적분 가능한 함수열 $\{f_n\}$이 f로 평등수렴하면 f도 적분 가능하고 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$이다.

[2014학년도 중등학교교사 임용후보자 선정경쟁시험]

기입형A [1 ~ 15]

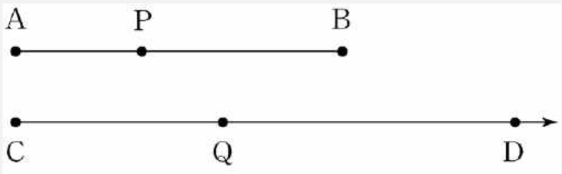
1. 프로이덴탈(H. Freudenthal)의 수학화 교수・학습 이론에 따르면, 아래의 2가지 사항은 현상으로부터 본질에 이르는 접근이 아니라 학습자에게 본질을 부과하는 접근이다. 프로이덴탈은 이와 같은 교수학적 접근 방식을 무엇이라 하였는지 쓰시오. [2점, 기입형A] [2014]

- 기성 수학의 전개 순서에 따라 학교수학의 교재를 구성하는 것
- 수학화 과정에 대한 경험은 생략하고 기성 지식을 초등화해 가르치는 것

2. 다음은 어떤 수학적 개념의 원형과 그 개념에 들어있는 아이디어를 다룬 교사 교육용 자료의 일부이다.

- 이 개념의 원형은 다음과 같다.

[그림]과 같이 선분 AB와 반직선 CD에 대하여, 선분 AB 위의 점 P와 반직선 CD 위의 점 Q가 각각 A와 C로부터 같은 속도로 동시에 출발하여 각각의 선을 따라 움직인다고 하자. 이때 점 P의 속력은 PB의 거리에 비례하고, 점 Q의 속력은 일정하다고 하자.



[그림]

이때, 거리 CQ를 거리 PB의 (   )(이)라고 하였다.

- 다음은 이 개념에 들어있는 아이디어를 활용한 계산의 한 예이다.

n	$\cdots$	1005	$\cdots$	1009	$\cdots$	2014	$\cdots$
$(1.0001)^n$	$\cdots$	1.1057181	$\cdots$	1.1061604	$\cdots$	1.2231016	$\cdots$

이 표를 활용하면, $1.1057181 \times 1.1061604$의 근삿값을 쉽게 얻을 수 있다.

… (하략) …

(   ) 안에 들어갈 용어가 무엇인지 쓰시오. 그리고 수학을 완성된 생산품으로 제공하는 것이 아니라 수학이 발생해 온 과정을 경험하게 하기 위해 수학적 개념의 원형이나 그 개념에 들어있는 아이디어를 활용하는 교수・학습 원리가 무엇인지 쓰시오. [2점, 기입형A] [2014]

3. 다음은 중학교 2학년 기하 영역의 평행사변형의 성질을 다루는 수업의 일부이다.

교사: 측정 활동을 통해 알아낸 평행사변형의 성질 '두 쌍의 대각의 크기가 각각 같다.'가 왜 성립하는지 설명해 보도록 하지요.
학생: 어려워요.
(이 문제를 해결한 학생이 없는 듯 보인다.)
교사: <u>시간이 없으니 어쩔 수 없네. 대각선을 그어 평행사변형을 두 삼각형으로 나누면, 그 두 삼각형이 합동이 돼요. 그러면 그 성질이 성립한다는 것을 바로 보일 수 있을 것입니다.</u>
학생: 합동이 되니까 성립하네요.
교사: 그러면 다음 내용을 공부합시다.

밑줄 친 부분에서 학생 스스로 학습할 환경을 교사가 제거하는 현상이 발생하고 있다. 여기서 이 교수학적 현상은 '교사는 수학적 지식을 가르쳐야 하고 학생은 그것을 배워야 한다.'는 압박에 의해 발생한다고 할 수 있다. 브루소(G. Brousseau)의 수학 교수학적 상황론(Theory of Didactical Situations in Mathematics)에서 이러한 현상을 설명할 수 있는 개념과 이러한 압박을 설명할 수 있는 개념을 각각 쓰시오. [2점, 기입형A] [2014]

4. 다음은 중학교 1학년 기하 영역에서 모든 다각형의 외각의 크기의 합이 360°임을 알아내는 수업 상황이다.

(학생들은 삼각형의 외각의 크기의 합이 360°임은 알고 있지만, 아직은 n각형의 외각의 크기의 합을 구할 수 없는 상태이다.)

…(상략)…

교사: (그림을 제시하며) 다각형의 각 꼭짓점에서 내각과 외각의 크기의 합은 얼마인가요?
학생: 180° 입니다.
교사: 그러면 n각형의 모든 내각과 외각의 크기의 합은 얼마인가요?
학생: $180^\circ \times n$입니다.
교사: 외각의 크기의 합은 어떻게 구할 수 있을까요?
학생: 잘 모르겠어요.
교사: 내각과 외각의 관계를 생각해 보면 외각의 크기의 합을 구할 수 있지 않을까요?
(다각형에 외각과 내각을 표시하면서 외각과 내각의 관계를 떠올리게 한다.)
학생: 아! 알겠어요. 내각과 외각의 크기의 합에서 내각의 크기의 합을 빼면 될 것 같아요.
교사: 내각의 크기의 합은 알고 있지요?
학생: 네. $(n-2)\times 180^\circ$ 입니다.
교사: 그러면 외각의 크기의 합을 구하는 식을 나타낼 수 있을까요?
학생: (외각의 크기의 합)$=180^\circ \times n-$(내각의 크기의 합)$=180^\circ \times n-180^\circ \times (n-2)=360^\circ$ 입니다.
교사: 잘했어요. 따라서 다각형에서 외각의 크기의 합은 언제나 360°로 일정함을 알 수 있어요.

…(하략)…

위 상황에서 교사는 학생의 근접 발달 영역에서 교사의 사고 과정을 모방할 수 있는 시범이나 실마리를 제공하고 있다. 이러한 교수・학습 상황에서 학생들이 과제를 수행해 나가는 데 있어서 도움을 적절히 조절하며 제공하는 것을 비고츠키(L. Vygotsky) 학파는 무엇이라 하는지 쓰시오. [2점, 기입형A] [2014]

5. 10과 서로소인 양의 정수 m에 대하여 m^{18}의 마지막 두 자리 수가 21이다. m^{294}의 마지막 두 자리 수를 구하시오. [2점, 기입형A] [2014]

6. 위수(order)가 $2014=2\times19\times53$인 순환군(cyclic group) G에 대하여 G의 부분군의 개수를 m, G에서 위수가 38인 원소의 개수를 n이라 하자. $m+n$의 값을 구하시오. [2점, 기입형A] [2014]

7. 반복적분 $\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1 7y^2\sin(x^7)\,dx\,dy$의 값을 구하시오. [2점, 기입형A] [2014]

8. 거듭제곱급수(멱급수, power series) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{5^n\sqrt{n}}$의 수렴구간을 구하시오. [2점, 기입형A] [2014]

9. 양수 $r>0$에 대하여 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x)=\begin{cases} x^6\sin\dfrac{1}{x^r}+x^r\sin\dfrac{1}{x^2}, & x>0 \\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

함수 f의 도함수 f'이 $x=0$에서 연속이기 위한 필요충분조건을 r에 대한 부등식으로 나타내시오. [2점, 기입형A] [2014]

10. $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 n^2xe^{-2nx}\,dx$의 값을 구하시오. [2점, 기입형A] [2014]

11. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 비틀림률(열률, 꼬임률, torsion)과 곡률(curvature)이 각각 상수 τ, 1인 단위속력 곡선 α에 대하여, 곡선 β를 다음과 같이 정의하자.

$$\beta(s)=\int_0^s N(t)dt$$

여기서 $N(t)$는 곡선 α의 주법벡터장(단위주법벡터장, principal normal vector field, unit principal normal vector field)이다. 곡선 β의 곡률과 비틀림률을 각각 $\kappa_\beta(>0)$, τ_β라 할 때 $\kappa_\beta+\tau_\beta$의 값을 구하시오. [2점, 기입형A] [2014]

12. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에 놓인 곡면

$$M: X(u,v)=\left(u\cos v,\ u\sin v,\ \frac{1}{2}u^2\right)\ (u\ge 0,\ 0\le v\le 2\pi)$$

에 포함되는 영역 $S=\{X(u,v)\,|\,0\le u\le 1,\ 0\le v\le \pi\}$가 있다.
S의 경계(boundary) ∂S의 측지곡률을 κ_g라 할 때, ∂S의 측지곡률합(전측지곡률, total geodesic curvature) $\int_{\partial S}\kappa_g ds$의 절댓값을 구하시오. (단, s는 호의 길이를 나타내는 매개변수이다.) [2점, 기입형A] [2014]

◦ 도움말 정칙곡선(정규곡선, regular curve) α_1, α_2, $\cdots$, α_n들로 이루어진 조각별 정칙곡선(piecewise regular curve) α의 측지곡률합은 $$\int_\alpha \kappa_g ds=\sum_{i=1}^n\int_{\alpha_i}\kappa_g ds$$ 로 정의된다.

13. 좌표평면 $\mathbb{R}^2$ 위에 곡선

$$C=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,14ax^2+2a^2xy+14ay^2+x+y-1=0\right\}$$

이 주어져 있다. 곡선 C를 원점을 중심으로 시계방향으로 45°만큼 회전이동 했을 때, 초점이 x축에 있는 쌍곡선이 되는 자연수 a 중에서 가장 작은 수를 구하시오. [2점, 기입형A] [2014]

14. 자연수 전체의 집합 $\mathbb{N}$에서 위상 $\mathfrak{I}$를

$$\mathfrak{I}=\{G\subseteq\mathbb{N}\,|\,\mathbb{N}-G\text{는 유한집합}\}\cup\{\varnothing\}$$

으로, 함수 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$을

$$f(n)=\begin{cases}1, & 1\le n<5\\ 2, & 5\le n<10\\ 3, & 10\le n\end{cases}$$

으로 정의하자. $\mathfrak{I}_d$를 $\mathbb{N}$에서 이산위상(discrete topology)이라 하고, 집합 A를

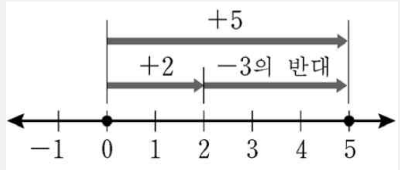
$$A=\left\{n\in\mathbb{N}\,\middle|\,f:(\mathbb{N},\mathfrak{I})\to(\mathbb{N},\mathfrak{I}_d)\text{는 }n\text{에서 불연속}\right\}$$

이라 할 때, 집합 A의 원소의 개수를 구하시오. [2점, 기입형A] [2014]

15. 어느 도시의 성인 중 20%가 A 통신사를 이용한다고 한다. 이 도시의 성인 400명을 임의로 조사할 때, A 통신사를 이용하는 성인이 80명 이상 92명 이하가 될 확률을 이항분포의 정규근사를 이용하여 구하면 $P(0\le Z\le k)$이다. k의 값을 구하시오. (단, Z는 표준정규분포를 따르는 확률변수이고 연속성 보정은 하지 않는다.) [2점, 기입형A] [2014]

서술형A [1~6]

1. 다음은 정수의 사칙연산을 지도하기 위한 셈돌 모델, 수직선 모델, 귀납적 외삽법에 대한 예시이다.

셈돌 모델	$2+(-3)=-1$	●● + ○○○ = ○
수직선 모델	$2-(-3)=5$	
귀납적 외삽법	$2\times(-3)=-6$	$2\times2=4$ $2\times1=2$ $2\times0=0$ $2\times(-1)=-2$ $2\times(-2)=-4$ $2\times(-3)=-6$

정수의 사칙연산을 지도할 때, 셈돌 모델의 약점과 이를 보완할 수 있는 수직선 모델의 장점을 각각 쓰시오. 그리고 정수의 사칙연산을 지도할 때, 수직선 모델의 약점과 이를 보완할 수 있는 귀납적 외삽법의 장점을 각각 쓰시오. [3점, 서술형A] [2014]

2. $\mathbb{R}$ 위의 보통위상(usual topology)을 $\mathfrak{I}$, 함수 $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$를 $f(n)=n^2$이라 하고, $\mathbb{Z}$ 위의 위상 $\mathfrak{I}_1=\{f^{-1}(G)\,|\,G\in\mathfrak{I}\}$라 하자. $A=\{0\}\cup\mathbb{N}$, $B=\{-1,1\}$이라 할 때, 적공간(product space) $(\mathbb{Z},\mathfrak{I}_1)\times(\mathbb{Z},\mathfrak{I}_1)$에서 $A\times B$의 폐포(closure) $\overline{A\times B}$와 $A\times B$의 내부(interior) $(A\times B)^\circ$를 구하시오. 이를 이용하여 $(\mathbb{Z},\mathfrak{I}_1)\times(\mathbb{Z},\mathfrak{I}_1)$에서 $A\times B$의 경계(boundary) $b(A\times B)$를 구하는 과정을 쓰시오.
(단, $\mathbb{N}$은 자연수 전체의 집합, $\mathbb{Z}$는 정수 전체의 집합, $\mathbb{R}$는 실수 전체의 집합이다.) [3점, 서술형A] [2014]

3. 다항식환 $\mathbb{Z}_{2014}[x]$에서 $f(x)=x^2-14$를 두 일차식의 곱

$$f(x)=(ax+b)(cx+d)$$

로 나타낼 수 없음을 증명하시오. [4점, 서술형A] [2014]

4. 연속함수 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$에 대해 집합 $\{f(x)|x\in[0,1]\}$의 상한(최소상계, supremum, least upper bound) M이 존재한다. <정리 1>을 증명 없이 이용하여 $f(x^*)=M$을 만족하는 $x^*\in[0,1]$이 존재함을 증명하시오. [4점, 서술형A] [2014]

<정리 1>
유계인 실수열은 수렴하는 부분수열을 갖는다.

5. 두 연속확률변수 X와 Y의 결합확률밀도함수(joint probability density function) $f(x,y)$를

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{5}xy(1-x+y) & ,\ 0<x<1,\ 1<y<3\\ 0 & ,\ \text{그 외의 경우}\end{cases}$$

라 하자.

Y의 주변확률밀도함수(marginal probability density function) $f_Y(y)$를 구하고, 이를 이용하여 $Y=2$가 주어졌다는 가정 하에 X의 조건부확률밀도함수(conditional probability density function) $f_{X|Y}(x|2)$와 X의 조건부기댓값(conditional expectation) $\mathrm{E}[X|Y=2]$를 구하시오. [3점, 서술형A] [2014]

6. 자연수 n에 대하여, 방정식

$$x+y+z=n\ (\text{단, } 1\le x\le 7,\ 0\le y,\ 0\le z)$$

을 만족하는 정수해의 개수를 a_n이라 하자. a_n의 생성함수 $f(x)$를 구하고, 이를 이용하여 a_{15}를 구하시오. [3점, 서술형A] [2014]

서술형B [1 ~ 3]

1. 다음은 폴리아(G. Polya)의 수학적 문제해결 교육론에 근거해 어떤 문제를 해결한 과정의 일부이다.

> **<이해 단계>**
> 문제에서 구하려는 것과 주어진 것을 파악하면서 문제를 분석한다. 구하려는 것을 x로 놓는다.
>
> **<계획 단계>**
> 문제에서 구하려는 것과 주어진 것 사이의 관계를 파악하고, 그러한 관계를 나타내는 방정식을 세운다. 이때 방정식이 참이라고 하자.
>
> $$\sqrt{2x-6}=3-x$$
>
> **<실행 단계>**
> 양변을 제곱하여 정리하면 $x^2-8x+15=0$이고, $(x-3)(x-5)=0$이므로 $x=3$ 또는 $x=5$이다.
> 그런데 이 조건은 주어진 방정식이 참이 되기 위한 필요조건이다.
>
> **<반성 단계>**
> $x=3$ 또는 $x=5$가 주어진 방정식을 참이 되게 하는 충분조건도 되는지 알아본다. $x=3$은 충분조건이지만 $x=5$는 충분조건이 아니다. 따라서 $x=3$이 주어진 방정식을 참이 되게 하는 필요충분조건이다.
> $x=3$이 문제의 상황에 부합하는지의 여부를 점검한다.

위 문제해결 과정에서는 수학적 발견술인 분석법이 사용되고 있다. <계획 단계>와 <실행 단계>에서 분석법이 어떻게 사용되고 있는지 각각 설명하시오. [3점, 서술형B] [2014]

2. 다항식 x^6+3의 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위에서의 분해체(splitting field)를 K라 하면 갈루아군 $\mathrm{G}(K/\mathbb{Q})$의 위수(order)는 6임을 증명하시오. [4점, 서술형B] [2014]

3. 자연수 전체의 집합 $\mathbb{N}$에 대하여, 집합 $X=\mathbb{N}\cup\{-1,\ -2,\ -3\}$ 위에 $\wp(\mathbb{N})\cup\{\mathbb{N}\cup\{-1\}-F\,|\,F$는 $\mathbb{N}$의 유한부분집합$\}\cup\{\{-2,\ -3\}\}$을 기저(base)로 하는 위상을 $\mathfrak{I}$라 하자.

> ① $\mathbb{N}\subsetneq A\subsetneq X$, $A\neq\mathbb{N}\cup\{-1\}$이고
> $(A,\ \mathfrak{I}_A)$가 콤팩트(compact)이다.
> ② $\mathbb{N}\subsetneq B\subsetneq X$이고 $(B,\ \mathfrak{I}_B)$가 콤팩트가 아니다.

①을 만족하는 A를 모두 구하고, ②를 만족하는 B의 예를 하나 제시하고 예가 되는 이유를 설명하시오. (단, $\wp(\mathbb{N})=\{G\,|\,G\subseteq\mathbb{N}\}$이고, $Y\subset X$일 때, $\mathfrak{I}_Y=\{G\cap Y\,|\,G\in\mathfrak{I}\}$이다.) [3점, 서술형B] [2014]

논술형B [1~2]

1. 다음은 중학교에서 확률 개념을 도입하는 수업의 일부이다. 이 수업 이전에, 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에 따라 ‘가능성’은 초등학교 5-6학년군에서 다루어졌고 ‘상대도수’, ‘사건’, ‘경우의 수’는 중학교에서 이미 다루어졌다고 하자.

김 교사: 오늘은 가능성의 크기를 어떻게 구하는지에 대해 공부하려고 해요. 이와 관련해 일어날 가능성이 가장 큰 사건을 찾는 활동을 해 봅시다. 예를 들어 두 주사위를 던졌을 때, 두 주사위의 눈의 합이 나올 수 있는 사건의 수는 11입니다. 합이 2인 사건부터 12인 사건까지 나올 수 있는 것이지요. 그 11가지 사건 중에서 일어날 가능성이 가장 큰 사건은 무엇일까요?

학생들: 11가지 사건이 일어날 가능성은 서로 같을 것 같은데요.

김 교사: 그러면 두 주사위를 던지는 실험을 통해 여러분의 예상이 맞을지에 대해 알아보도록 하지요.

12개의 모둠을 편성해서 모둠마다 두 주사위를 30번씩 던지고, 던진 횟수에 대해서 각 사건이 나온 횟수를 기입하는 방식으로 상대도수를 나타낸 아래의 표를 완성하였다.

	두 주사위의 눈의 합										
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
30회 상대도수	$\frac{(1)}{30}$	$\frac{(2)}{30}$	$\frac{(2)}{30}$	$\frac{(3)}{30}$	$\frac{(4)}{30}$	$\frac{(5)}{30}$	$\frac{(5)}{30}$	$\frac{(3)}{30}$	$\frac{(3)}{30}$	$\frac{(1)}{30}$	$\frac{(1)}{30}$
60회 상대도수	$\frac{(2)}{60}$	$\frac{(3)}{60}$	$\frac{(5)}{60}$	$\frac{(5)}{60}$	$\frac{(9)}{60}$	$\frac{(11)}{60}$	$\frac{(9)}{60}$	$\frac{(6)}{60}$	$\frac{(6)}{60}$	$\frac{(3)}{60}$	$\frac{(1)}{60}$
360회 상대도수	$\frac{(9)}{360}$	$\frac{(21)}{360}$	$\frac{(32)}{360}$	$\frac{(38)}{360}$	$\frac{(51)}{360}$	$\frac{(59)}{360}$	$\frac{(50)}{360}$	$\frac{(39)}{360}$	$\frac{(31)}{360}$	$\frac{(19)}{360}$	$\frac{(11)}{360}$

김 교사: 우리가 예상한 것과 상당히 다른 결과가 나온 이유가 뭘까요? 왜 그런지 생각해 봅시다.

학생 A: 제 생각에는 11가지 사건이 일어날 가능성이 원래부터 서로 같지 않아서 그런 것 같아요. 각 사건에 들어있는 경우의 수를 잘 세어야 해요.

김 교사: 그 가능성이 어떻게 서로 다른지에 대해 자세히 설명해줄 수 있나요?

학생 A: 네. 두 주사위의 눈의 합이 나오는 사건의 수는 11이 맞습니다. 하지만 두 주사위의 눈이 나오는 경우의 수는 $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $\cdots$, $(5,6)$, $(6,1)$, $\cdots$, $(6,6)$과 같이 36입니다.

이후, 학생 A는 두 주사위의 눈의 합이 2인 사건부터 12인 사건 각각에 포함된 경우들을 언급하면서, 전체 경우의 수에 대한 해당 사건에 포함된 경우의 수를 세어서 11가지 각 사건이 일어날 가능성이 $\frac{1}{36}$, $\frac{2}{36}$, $\frac{3}{36}$, $\frac{4}{36}$, $\frac{5}{36}$, $\frac{6}{36}$, $\frac{4}{36}$, $\frac{3}{36}$, $\frac{2}{36}$, $\frac{1}{36}$임을 설명하였다.

김 교사: 실험 결과에서 합이 2인 사건부터 12인 사건까지의 상대도수가 서로 비슷하지 않은 이유가 무엇인지 알겠어요?

학 생 들: 네. 알 것 같아요. 원래 가능성이 서로 달랐기 때문에 실험 결과에서도 서로 다르게 나온 것 같아요.

학생 B: 그러고 보니까, 학생 A가 제시한 각각의 가능성이 실험을 통해 나온 각각의 상대도수와 거의 같아요.

김 교사: 좋은 관찰입니다. …(중략)…어떤 사건이 일어날 가능성을 확률이라 합니다. 이제 우리가 오늘 했던 활동을 바탕으로 일반적으로 확률을 어떻게 구하면 될지 생각해 볼까요?

학생 A: 어떤 사건이 일어날 확률을 구할 때에는 그 사건에 들어있는 경우의 수를 전체 경우의 수로 나누면 구할 수 있어요.

학생 B: ㉠<u>선생님, 다른 상황에서도 어떤 사건이 일어날 확률을 구할 때 각각의 경우는 항상 같은 가능성을 가지고 있다고 생각하면 되는 거지요?</u>

김 교사: ㉡<u>지금 질문한 내용이 중요합니다. 여러분이 확률을 구해야 하는 상황에서 흔히 잘못 생각하는 부분이 있어요. 정육면체 주사위와 직육면체 주사위를 던진다고 생각해 봅시다. …(중략)… 실험도 해 볼까요. …(중략)… 이런 점을 잘 고려해서, 어떤 사건이 일어날 확률은 어떻게 구하면 되고 이때 무엇에 유의해야 하는지 정리해 볼까요.</u> …(하략)…

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 중학교 확률과 통계 영역 〈교수·학습상의 유의점〉 2가지 사항과 확률 직관에 대한 피시바인(E. Fischbein)의 이론을 적용하여, 김 교사는 ‘경우의 수의 비율’로 확률 개념을 도입하고 있다.

김 교사의 수업에서 확률과 통계 영역의 〈교수·학습 상의 유의점〉 2가지 사항이 각각 어떻게 적용되고 있는지 설명하시오. 그리고 학생이 확률을 배우기 이전부터 가지고 있던 ‘확률 직관의 특성’과 ‘확률 직관의 발달의 특성’에 대한 피시바인의 이론을 각각 설명하고, 위의 밑줄 친 ㉠과 ㉡에서 그러한 피시바인의 이론이 어떻게 적용되고 있는지 각각 설명하시오. [10점, 논술형B] [2014]

2. 다음 4개의 복소함수

$$f_1(z)=z,\ f_2(z)=\overline{z},\ f_3(z)=e^z,\ f_4(z)=e^{\overline{z}}$$

로 생성되는 복소 벡터 공간

$$\{a_1f_1+a_2f_2+a_3f_3+a_4f_4 \mid a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{C}\}$$

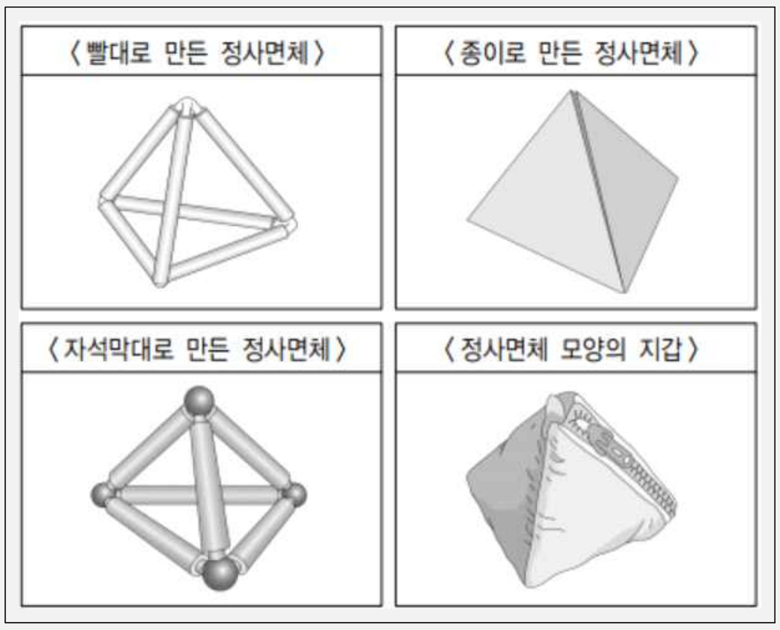
를 V라 하자. 여기서 $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.
복소평면 $\mathbb{C}$상의 시계반대방향의 단위원 $C : |z|=1$에 대하여 사상(map) $T : V \to \mathbb{C}$를 다음과 같이 정의하자.

$$T(f)=\int_C f(z)dz$$

T가 선형사상임을 증명하시오. 선형사상 T의 핵(kernel) $\ker(T)$의 기저를 구하고, $\ker(T)$를 이용하여 $T^{-1}(2)=\{f\in V \mid T(f)=2\}$를 나타내시오. [10점, 논술형B] [2014]

기입형A [1~10]

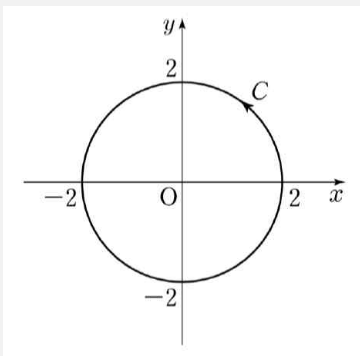
1. 중학교 기하 수업에서 다음과 같은 자료를 이용하여 정사면체에 대해 학습하였다.



위 자료들은 서로 다르게 보이지만, 구조적으로는 같은 구체물이다. 딘즈(Z. Dienes)의 수학 학습 이론에서 볼 때, 이러한 다양한 형태의 구체물을 활용한 수업은 어떤 원리를 적용한 것인지 쓰시오. [2점, 기입형A] [2015]

2. 다음 그림과 같이 반시계 방향의 단순닫힌곡선(simple closed curve) C : $x^2+y^2=4$가 주어졌을 때,

$\int_C (e^{\sin x}-4x^2y)dx+(e^{\cos y}+4xy^2)dy$의 값을 구하시오. [2점, 기입형A] [2015]



3. 매개변수방정식 $x=4t-t^2$, $y=t^2+1(0\le t\le 1)$로 주어진 곡선 $y=f(x)$가 있다. 이 곡선 위의 두 점 $(0, f(0))$, $(3, f(3))$을 연결하는 직선의 기울기와 곡선 위의 점 $(c, f(c))$에서의 접선의 기울기가 같게 되는 값 c를 구간 $(0, 3)$에서 구하시오. [2점, 기입형A] [2015]

4. 좌표공간 $\mathbb{R}^3$에서 원점과 점 $(1, 2, 3)$을 지나는 직선을 회전축으로 하여 180° 회전이동하는 변환을 T라 하자. 벡터 (x, y, z)에 대하여 $T(x, y, z)=A\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$가 되는 행렬 A의 특성다항식(고유다항식, characteristic polynomial)을 구하시오. [2점, 기입형A] [2015]

5. 모집단 A는 어떤 지역의 20세 남자들로 이루어져 있다. 모집단 A에 속하는 남자의 키는 평균 175cm, 표준편차 5cm인 정규분포를 따른다고 한다. 모집단 A에서 임의로 뽑은 남자의 키(cm)와 몸무게(kg)를 각각 확률변수 X, Y라 할 때 $Y=\frac{2}{5}X+\alpha$가 성립한다고 하자. 여기서, α는 평균 0, 표준편차 $2\sqrt{3}$인 정규분포를 따르는 확률변수이고, X와 α는 독립이다. 확률 $\mathrm{P}(Y>72)=\mathrm{P}(Z>k)$일 때, k의 값을 구하시오. (단 Z는 표준정규분포를 따르는 확률변수이다.) [2점, 기입형A] [2015]

6. 두 연속확률변수 X와 Y는 독립이고, X와 Y의 확률밀도함수(probability density function)를 각각 $f_X(x)=2x(0<x<1)$, $f_Y(y)=1(0<y<1)$이라고 하자. $M=\left[\frac{X}{Y}\right]$라 할 때, 확률 $\mathrm{P}(M=2)$를 구하시오. (단 $[a]$는 a보다 크지 않은 최대정수이다.) [2점, 기입형A] [2015]

7. 좌표공간 $\mathbb{R}^3$에서 두 곡선 $\alpha(t)=(2t, t^2, at^3)$, $\beta(t)=(t, bt, t^2)$이 합동이 되도록 하는 두 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하시오. [2점, 기입형A] [2015]

8. 덧셈군 $G=\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_6$에서 $(5, 5)\in G$로 생성된 부분군을 H라 하자. 잉여군(quotient group, factor group) G/H에서 원소 $(3, 3)+H$의 위수(order)를 구하시오. [2점, 기입형A] [2015]

9. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$에 다음 조건 ①, ②에 의해 정의되는 부분집합족(family of subsets) $\mathcal{B}$를 기저로 하는 위상 $\mathfrak{I}$가 주어졌다고 하자.

① 모든 정수 m에 대하여, $\{m\}\in\mathcal{B}$이다. ② 모든 정수 n과 음이 아닌 모든 정수 k에 대하여, $(n, n+2^{-k})\in\mathcal{B}$이다.

위상공간 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$에서 집합 $A=\left\{\frac{1}{2}\right\}$의 도집합(derived set) A'을 구하시오. [2점, 기입형A] [2015]

10. 자연수 전체의 집합 $\mathbb{N}=\{1, 2, 3, \cdots\}$에 대하여, 집합 $X=\{(m, n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\mid m\ge 12$ 혹은 $n\ge 6\}$에 다음과 같이 위상 $\mathfrak{I}$가 주어졌다고 하자.

$$\mathfrak{I}=\{G\subset X\mid X-G\text{는 유한집합}\}\cup\{\phi\}$$

함수 $f: X\to\mathbb{N}$을 $f(m, n)=m+n$으로 정의하고, $\mathbb{N}$의 위상을 $\mathfrak{I}_{\mathbb{N}}=\{U\subset\mathbb{N}\mid f^{-1}(U)\in\mathfrak{I}\}$라 하자. 위상공간 $(\mathbb{N}, \mathfrak{I}_{\mathbb{N}})$의 연결성분(connected component)의 개수를 구하시오. [2점, 기입형A] [2015]

서술형A [1~4]

1. 다음은 박 교수가 수학 교육론 강의 시간에 라카토스(I. Lakatos)의 준경험주의를 주제로 진행한 강의의 일부이다.

박 교수: 하나의 추측을 제기하고, 그 추측을 부분추측으로 분해하는 1가지 사례를 말해 봅시다.

민 태: 교수님, 제가 말해 보겠습니다. 방정식 $ax^2+bx+c=0$은 두 실근을 가진다는 추측을 제기하고, 다음과 같이 세 단계로 분해하여 보았습니다.

> 1단계: 함수 $f(x)=ax^2+bx+c$의 그래프는 포물선이고,
> 실근의 개수는 그래프가 x축과 만나는 점의 개수와 같습니다.
> 2단계: 그래프의 꼭짓점 (p, q)는
> $\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$인데, a의 부호를 기준으로 생각하면, $a>0$일 때 $p<0$, $q<0$이고, $a<0$일 때 $p>0$, $q>0$입니다.
> 3단계: 포물선의 모양을 생각하면, $a>0$일 때 꼭짓점이 제3사분면, $a<0$일 때 꼭짓점이 제1사분면에 있으므로
> 그래프가 x축과 만나는 점은 2개입니다.

박 교수: 민태가 제기한 추측을 통해 라카토스의 준경험주의 관점에서 수업을 진행해 봅시다.

혜 수: 교수님, ㉠ 방정식 $x^2-4x+4=0$은 근이 $x=2$이고, 하나의 실근만을 가집니다.

학 생 들: 맞아요. 민태의 처음 추측이 틀렸어요.

현 덕: 저는 다르게 생각합니다. ㉡ 어떤 추측이 항상 참이 된다고는 생각하지 않습니다. 그러나 지금 이 경우에는 혜수가 말한 것을 예외로 인정하면 민태의 추측을 옹호할 수 있습니다.

박 교수: 어디 한번 봅시다. 만약 혜수의 말이 옳다면, 민태의 부분추측은 어디가 잘못되었을까요?

혜 수: 2단계가 잘못된 것 같습니다. $a>0$일 때 b의 값을 함께 고려해 보겠습니다. 만약 $b=0$이면 $p<0$이 아니라 $p=-\dfrac{b}{2a}=0$이 됩니다.

박 교수: 그렇군요. 그러면 부분추측을 수정해야겠군요. 2단계와 3단계를 합쳐서 수정해 봅시다. 그리고 처음의 추측도 수정해야겠군요.

은 영: 교수님, 1단계도 이상한데요? 함수 $f(x)=ax^2+bx+c$의 그래프는 항상 포물선인가요?

혜 수: 아닌 것 같습니다. …(중략)…

민 태: 교수님, 지금까지의 논의를 통해 볼 때 다음과 같이 정리할 수 있습니다. $a\neq0$인 방정식 $ax^2+bx+c=0$은 $b^2-4ac>0$일 때, 두 실근을 갖습니다.

위 상황에서 ㉡의 관점에서 ㉠과 같은 반례가 출현할 때, 이 반례에 대한 라카토스의 대응 방법을 무엇이라고 부르는지 적고, 이러한 대응 방법으로 인해 발생할 수 있는 현상에 대해 쓰시오. 또, 위 강의 내용을 참고하여 라카토스의 준경험주의 관점에서 수학적 지식의 성장 과정을 설명하시오. [5점, 서술형A] [2015]

2. 다음은 김 교사가 정 교사의 수업을 참관한 후, 김 교사가 작성한 수업참관일지와 정 교사가 작성한 수업소감문의 일부이다.

(가) 김 교사의 [수업참관일지]

정 교사는 도입 단계에서 다음과 같은 사실을 제시하여 학생의 학습 동기를 유발하고자 하였다.

$$1+3+5+7=16=4^2$$

이로부터, "연속한 홀수의 합은 어떤 수의 제곱이 될까?"라고 발문을 하면서,

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=\square^2$$

이라는 탐구과제를 학생들에게 제시하였다. 학생들은 이 탐구과제를 수행하는 과정에서 아래와 같은 특수한 몇몇 사례를 조사하였다.

$$1=1=1^2$$
$$1+3=4=2^2$$
$$1+3+5=9=3^2$$
$$1+3+5+7=16=4^2$$
$$1+3+5+7+9=25=5^2$$

학생들은 구체적인 사례에 대한 관찰로부터 새로운 추측

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

을 발견하였다. 이러한 발견 이후, ㉠정 교사는 수학적 귀납법을 이용하여 탐구과제에 대한 수업을 계속 진행하였다.

…(후략)…

(나) 정 교사의 [수업소감문]

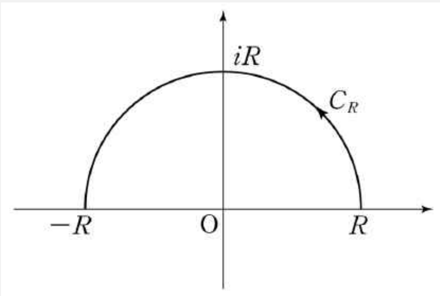
학생들은 자신들이 관찰한 구체적인 사례로부터 공통점에 주목하여 새로운 추측을 잘 이끌어 내었다. 하지만, 조금 아쉬운 점은

㉡$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

이 성립함을 보여 주는 시각적 모형(visual model)을 학생들에게 제공해 주지 못했다는 것이다.

위의 [수업참관일지]를 통해 볼 때, 정 교사의 수업에서 학생들이 사용했을 추론 유형을 적고, 이 추론 유형의 특성에 근거하여 ㉠의 이유를 설명하시오. 또, [수업소감문]에 제시된 ㉡에 해당하는 구체적인 예를 하나 제시하시오. [5점, 서술형A] [2015]

3. 복소평면 $\mathbb{C}$에서 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 R인 반원을 $C_R=\{Re^{it}\in\mathbb{C}\mid 0\le t\le\pi\}$라고 할 때, $a>0$과 $b>0$에 대하여 $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{ze^{ibz}}{z^2+a^2}dz=0$임을 보이고 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ibx}}{x^2+a^2}dx$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [5점, 서술형A] [2015]



4. 다음 삼차 합동방정식에 대하여 $\mathbb{Z}_{2015}$에 속하는 해의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [5점, 서술형A] [2015]

$$x^3-8\equiv0 \pmod{2015} \quad (\text{참고 : } 2015=5\times13\times31)$$

서술형B [1~4]

1. 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 중학교 수와 연산 영역 <교수・학습상의 유의점>에 '유한소수를 순환소수로 나타내는 것은 다루지 않는다.' 고 명시되어 있다. 이 유의점이 명시되어 있는 이유를 구체적인 사례와 함께 쓰시오. 또, <보기>와 같이 순환소수를 분수로 고치는 학습 내용을 지도할 때, 유의해야 할 점을 교육과정에 근거하여 서술하시오. [5점, 서술형B] [2015]

<보기>

순환소수 $0.\dot{7}$을 분수로 나타내어 보자.

$0.\dot{7}$을 x라고 하면

$$x = 0.7777\cdots \qquad \cdots\cdots①$$

이고, ①의 양변에 10을 곱하면

$$10x = 7.7777\cdots \qquad \cdots\cdots②$$

이다. 이때 ①과 ②의 소수 부분이 같으므로

②에서 ①을 변끼리 빼면 $9x = 7$이다.

따라서 $x = \dfrac{7}{9}$이다.

즉, $0.\dot{7} = \dfrac{7}{9}$임을 알 수 있다.

$$\begin{array}{r} 10x = 7.7777\cdots \\ -)\quad x = 0.7777\cdots \\ \hline 9x = 7 \end{array}$$

2. 프로이덴탈(H. Freudenthal)은 교실 수업을 위한 사고실험(thought-experiment)을 그의 교수・학습 이론에서 제안하고 있다. 다음은 사고실험에 대해 두 교사가 나눈 가상 대화의 일부이다.

최 교사: 사고실험이 중요하다고 하는데, 정말인가요?

김 교사: 그럼요. 다음 수업 시간에 가르칠 학습 내용을 1가지만 말씀해 주세요.

최 교사: 네, 삼각함수의 덧셈정리 중에서 $\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$임을 증명하는 문제가 있어요. 교과서에서는 좌표평면에서 점의 좌표를 이용하여 증명하고 있어요.

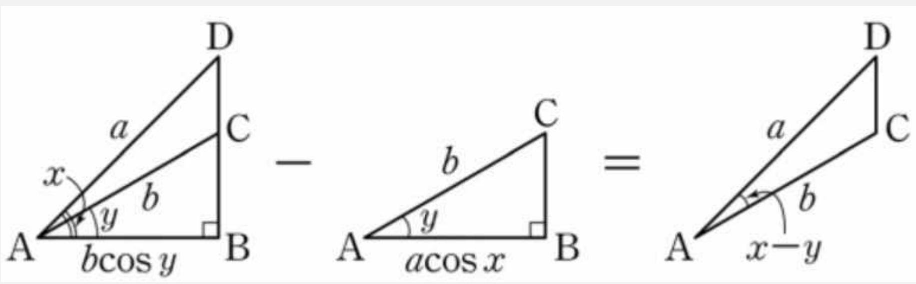
김 교사: 예전에 이 문제를 지도하면서 수업 시간에 겪은 어려움 중에 기억나는 것이 있나요?

최 교사: 학생들에게 적절한 질문을 하지 못했고, 예상하지 못한 학생들의 궁금증에 충분한 답을 주지도 못했어요. 예를 들어, 한 학생이 좌표를 이용하지 않고도 삼각함수의 덧셈정리를 증명할 수 있는지 질문하였을 때, 제가 좀 망설였던 것 같아요.

김 교사: 김 교사: 그렇습니다. 학생의 눈높이에 맞는 수학 수업을 위해서는 수업에 앞서 철저한 준비가 필요합니다.

최 교사: 그렇군요.

김 교사: 삼각함수의 덧셈정리 문제로 다시 돌아가 볼까요? 이 문제에 대한 어느 수학자의 접근 방법을 찾아보면, '삼각형 ABD의 넓이에서 삼각형 ABC의 넓이를 뺀 것은 삼각형 ACD의 넓이와 같다' 는 사실을 이용하고 있습니다.



(김 교사는 위 그림을 이용하여 삼각함수의 덧셈정리에 대하여 논의한다.)

최 교사: 최 교사: 그렇군요. 좌표를 이용하지 않고도 학생들을 증명으로 안내할 수 있고, 직관적으로도 이해시킬 수 있네요.

김 교사: 지금까지 나눈 대화를 통해 사고실험에 대해 정리해 볼까요.

…(후략)…

프로이덴탈의 교수・학습 원리의 관점에서 사고실험의 역할을 적으시오. 또, 교실 수업에서 사고실험을 통해 얻을 수 있는 의의를 위 가상 대화에 근거하여 2가지 제시하시오. [5점, 서술형B] [2015]

3. 곡면

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x = (y^2+z^2)^2\}$$

위의 점 $p = \left(\dfrac{1}{4}u^4, u, 0\right)(u>0)$에서 접평면(tangent plane)을 $T_p(M) = \{v_p \in \mathbb{R}^3 \mid v_p$는 p에서의 곡면 M의 접벡터$\}$라 하고 이 점에서의 주곡률(principal curvature)을 각각 $\kappa_1(u)$, $\kappa_2(u)$라 하자. 또 $T_p(M)$에 속하는 두 개의 단위접벡터(unit tangent vector) w_p와 $(0, 0, 1)_p$가 이루는 각이 $\dfrac{\pi}{6}$라고 하자. 점 p에서 곡면 M의 가우스 곡률 $K(u)$를 풀이 과정과 함께 쓰고, w_p 방향으로의 법곡률(normal curvature) $\kappa_n(w_p)$를 $a\kappa_1(u) + b\kappa_2(u)$ (a, b는 상수)로 나타낼 때 ab의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [5점, 서술형B] [2015]

4. 다음 조건 ①, ②에 의해 정의된 그래프 G의 변(edge)의 개수를 구하고, G는 평면그래프(planar graph)가 아님을 보이시오. 그리고 그래프 G의 채색수(chromatic number) $\chi(G)$를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [5점, 서술형B] [2015]

① 그래프 G의 꼭짓점의 집합은 아홉 개의 원소로 구성된 $V(G) = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$이다.

② 두 꼭짓점 v_a와 v_b는 두 정수 a와 b가 서로소일 때만 인접한다. 예를 들어, v_2와 v_7은 인접하지만, v_4와 v_{10}은 인접하지 않는다.

논술형B [1~2]

1. 실수 $\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}$을 근으로 가지는 다항식 $f(x) = x^9 + 3x^6 + 165x^3 + 1$은 13을 법으로 하여 $f_{13}(x) = x^9 + 3x^6 + 9x^3 + 1$과 합동이고 $f_{13}(x)$는 $\mathbb{Z}_{13}[x]$에서 기약다항식임이 알려져 있다.

이를 이용하여, $f(x)$가 $\mathbb{Q}[x]$에서 기약임을 보이시오. 그리고 $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3})$라 할 때 차수(degree) $[K : \mathbb{Q}]$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰고, 다항식 $g(x) = (x^3-2)(x^3-3) \in \mathbb{Q}[x]$의 분해체(splitting field) E에 대하여 갈루아 군 $\mathrm{G}(E/\mathbb{Q})$의 위수(order)를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [10점, 논술형B] [2015]

2. 다음을 읽고 물음에 답하시오.

유계인 닫힌구간 $[a, b]$에서 유계함수 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$와 $[a, b]$의 분할 P에 대한 하합(lower sum)과 상합(upper sum)을 각각 $L(f, P)$, $U(f, P)$로 나타내고,

$$A = \sup\{L(f, P) \mid P\text{는 } [a, b]\text{의 분할}\}$$
$$B = \inf\{U(f, P) \mid P\text{는 } [a, b]\text{의 분할}\}$$

이라 두자. 이때 $[a, b]$의 임의의 분할 P, Q에 대하여 $L(f, P) \le U(f, Q)$이므로

$$A \le B \cdots (가)$$

가 성립한다. 만약

$$A \ge B \cdots (나)$$

도 성립하면 f는 $[a, b]$에서 리만적분가능하다고 한다. 한편, 고등학교 교과서에서는 "함수 f가 $[a, b]$에서 연속이면 극한

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \left(\Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_k = a + k\Delta x\right) \cdots (다)$$

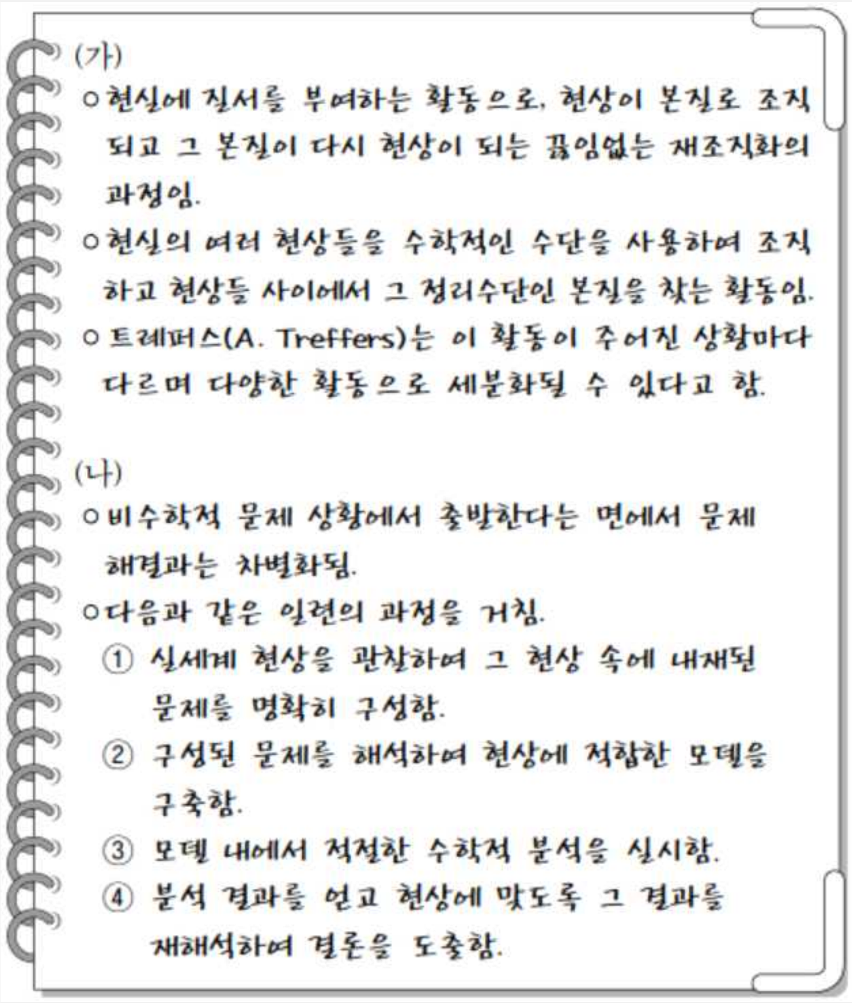
는 항상 존재함이 알려져 있다." 라고 설명하고 이 극한을 정적분의 정의로 사용하고 있다.

부등식 (가)를 증명하고, $[a, b]$에서 정의된 연속함수 f에 대하여 (나)가 성립함을 증명하시오. 그리고 이를 토대로 $[a, b]$에서 정의된 연속함수 f의 경우, (다)의 극한 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$가 존재함을 보이시오. [10점, 논술형B] [2015]

[2016학년도 중등학교교사 임용후보자 선정경쟁시험]

기입형A [1~8]

1. 다음은 수학교육론 강의 시간에 다양한 현상과 결부된 개념을 학습한 다음, 이를 요약한 것이다. (가)와 (나)의 설명에 해당하는 개념을 순서대로 쓰시오. [2점, 기입형A] [2016]



(가)

○ 현실에 질서를 부여하는 활동으로, 현상이 본질로 조직되고 그 본질이 다시 현상이 되는 끊임없는 재조직화의 과정임.

○ 현실의 여러 현상들을 수학적인 수단을 사용하여 조직하고 현상들 사이에서 그 정리수단인 본질을 찾는 활동임.

○ 트레퍼스(A. Treffers)는 이 활동이 주어진 상황마다 다르며 다양한 활동으로 세분화될 수 있다고 함.

(나)

○ 비수학적 문제 상황에서 출발한다는 면에서 문제해결과는 차별화됨.

○ 다음과 같은 일련의 과정을 거침.

① 실세계 현상을 관찰하여 그 현상 속에 내재된 문제를 명확히 구성함.

② 구성된 문제를 해석하여 현상에 적합한 모델을 구축함.

③ 모델 내에서 적절한 수학적 분석을 실시함.

④ 분석 결과를 얻고 현상에 맞도록 그 결과를 재해석하여 결론을 도출함.

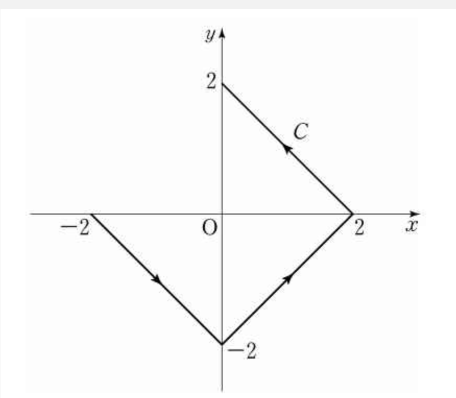
2. 군 준동형사상(group homomorphism) $f : \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_{12}$를 $f(x,\ y) = 9x$로 정의하자. f의 핵(kernel)을 K라 할 때, 잉여군(상군, factor group, quotient group) $(\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_6)/K$의 위수(order)를 구하시오. (단, 양의 정수 n에 대하여 $\mathbb{Z}_n$은 위수가 n인 덧셈 순환군(additive cyclic group)이다.) [2점, 기입형A] [2016]

3. 이차함수 $f(x) = \frac{1}{2}(x-10)^2$과 양의 정수 n에 대하여 a_n을 특이적분(이상적분, improper integral) $\int_1^\infty (f(n))^t dt$의 수렴 또는 발산에 따라 다음과 같이 정의하자.

$$a_n = \begin{cases} \int_1^\infty (f(n))^t dt, & \int_1^\infty (f(n))^t dt \text{가 수렴} \\ 0, & \int_1^\infty (f(n))^t dt \text{가 발산} \end{cases}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값을 구하시오. [2점, 기입형A] [2016]

4. 그림과 같이 좌표평면에서 곡선 C는 점 $(-2,0)$에서 시작하여 점 $(0,-2)$와 점 $(2,0)$을 지나 점 $(0,2)$까지 선분으로 연결한 경로이다. $\int_C (3+ye^x)dx + e^x dy$의 값을 구하시오. [2점, 기입형A] [2016]



5. 좌표평면에서 영역 D가

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 9\}$$

일 때, 함수 $f : D \to \mathbb{R}$를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x,y) = \begin{cases} y & , y \ge \sin\sqrt{x} \\ \sin\sqrt{x} & , y < \sin\sqrt{x} \end{cases}$$

두 반복적분의 합

$$\int_0^2 \int_0^9 f(x,y)dydx + \int_0^2 \int_0^{\sin\sqrt{x}} (y - \sin\sqrt{x})dydx$$

의 값을 구하시오. [2점, 기입형A] [2016]

6. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 단위속력곡선(unit speed curve) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$의 점 $\gamma(s)$에서의 곡률(curvature) $\kappa(s)$는 $\kappa(s) = \sqrt{s^4+4s^2+3}$이다. 곡선 $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$을 $\alpha(t) = \gamma(t) + \gamma'(t)$로 정의할 때, $t=0$에서 $t=1$까지 곡선 α의 길이를 구하시오. [2점, 기입형A] [2016]

7. 앞면이 나올 확률이 $p(0<p<1)$인 동전을 학생 A가 n번 던지고, 학생 B가 $2n$번 던진다. 학생 A가 던져서 앞면이 나온 횟수와 학생 B가 던져서 앞면이 나온 횟수의 합이 2일 때, 학생 A가 던져서 앞면이 나온 횟수가 1일 확률이 $\frac{6}{13}$이다. n의 값을 구하시오. [2점, 기입형A] [2016]

8. 두 연속확률변수 X, Y가 서로 독립이고, 확률밀도함수(probability density function)가 각각

$$f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}(x>0),$$

$$f_Y(y) = e^{-y}(y>0)$$

이다. 확률변수 $Z = X+2Y$의 확률밀도함수 $g(z)$를 구하시오. [2점, 기입형A] [2016]

서술형A [9 ~ 14]

9. 다음은 역사 발생적 원리에 대한 설명과 예비 교사가 작성한 수업 계획서의 일부이다.

(가) 역사 발생적 원리

수학이 발생된 것으로 파악하고 학습자가 학습 과정에서 수학의 발생을 경험하게 하는 원리이다. 이 원리는 클레로(A. Clairaut), 클라인(F. Klein), 퇴플리츠(O. Toeplitz) 등이 주장하였다.

(나) 수업 계획서

- 단원 제목: 삼각함수
- 지도 순서

1단계 함수 정의하기 ⇨ 2단계 표로 나타내기 ⇨ 3단계 그래프로 그리기 ⇨ 4단계 현실에 응용하기

-1단계에서는 함수 $y=\sin x$를 정의한다.
-2단계에서는 함수 $y=\sin x$에서 x와 y사이의 관계를 표로 나타낸다.
-3단계에서는 2단계에서 작성한 표를 바탕으로 그래프를 그린다.
-4단계에서는 함수 $y=\sin x$와 관련된 응용문제를 다룬다.

역사 발생적 원리에 따라 수학 수업을 진행할 때, 수학 교수·학습에서의 의의를 1가지 쓰시오. 또한 이 원리에 기초하여 (나)에서 제시한 지도 순서를 재구성하고, 그 이유를 지도 내용과 관련지어 설명하시오. [4점, 서술형A] [2016]

10. 다음은 수학 교사를 위한 '평가' 연수 시간에 이루어진 대화의 일부이다.

김 강사: 서술형 평가의 중요성에 대해 말씀을 드렸습니다. 혹시 질문이 있으세요?

박 교사: 서술형 평가는 선택형 평가와 비교해 장점도 있지만, 채점의 어려움이 걱정입니다.

김 강사: '총체적 점수화 방법'을 적용하여 채점하면 좋을 듯 합니다. <자료1>로 설명해 볼게요.

<자료1>

(선택형) $\sqrt{28x}$가 정수가 되는 100 이하의 모든 양의 정수 x의 합은?
① 7 ② 28 ③ 35 ④ 70 ⑤ 98

정답률(%)	답지반응률(%) ①	②	③	④	⑤
51	4	12	25	8	51

(서술형) $\sqrt{28x}$가 정수가 되는 100 이하의 모든 양의 정수 x의 합을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [10점]

…(중략)…

박 교사: 아, 풀이 전반에 걸쳐 하나의 점수를 부여하는 방법이군요. 다른 채점 방법도 있나요?

김 강사: 네, '분석적 점수화 방법'이 있습니다. 문제를 해결하는 데 필요한 내용이나 과정을 몇 단계로 구분하여 단계별로 점수를 부여하는 방법입니다. <자료2>는 <자료1>의 (서술형) 문제에 대해 어느 교사가 작성한 채점 기준표와 학생 A의 답안입니다.

<자료2>

채점 기준표

채점 영역	채점 요소	배점
문제 이해	제곱근의 성질 $\sqrt{a^2}=a(a\ge 0)$을 이해함	2
문제해결	$\sqrt{28x}$를 $\sqrt{2^2\times 7\times x}$ 또는 $2\sqrt{7x}$로 고침	3
	$\sqrt{2^2\times 7\times x}$ 또는 $2\sqrt{7x}$를 이용하여 만족하는 수를 모두 구함	3
답 구하기	만족하는 모든 수의 합을 구함	2

학생 A의 답안

$\sqrt{x^2}=x(x\ge 0)$이므로 $\sqrt{28x}$가 정수가 되기 위해서는 $x=28$이고, 또한 $\sqrt{28x}=\sqrt{2^2\times 7\times x}=2\sqrt{7x}$이므로 $2\sqrt{7x}$가 정수가 되기 위해서는 $x=7$이다.
따라서 만족하는 모든 양의 정수의 합은 35이다.

…(중략)…

박 교사: 네, 서술형 평가 실시에 큰 도움이 될 것 같습니다.

교사의 수업 개선에 초점을 맞추어 서술형 평가의 장점을 <자료1>, <자료2>와 관련지어 서술하시오. 또한 <자료2>의 채점 기준표에 근거하여 '학생 A의 답안'을 채점한 점수를 쓰고, 그 점수를 부여한 이유를 설명하시오. [4점, 서술형A] [2016]

11. 함수 $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ 가 구간 $[0, \infty)$ 에서 미분가능하다. 모든 점 $x \in [0, \infty)$ 에 대하여 $|f'(x)| \le M$ 이고 $f(0) > 0$ 일 때, $f(x) \le f(0) + Mx$ 임을 보이시오. 또한 $0 \le M < 1$ 이면 방정식 $f(x) = x$ 는 단 하나의 해를 가짐을 보이시오. (단, M 은 상수이다.) [4점, 서술형A] [2016]

12. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 에서 $\{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ 를 기저(base, basis)로 하는 위상을 $\mathfrak{I}_l$ 라 하고, $\{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ 를 기저로 하는 위상을 $\mathfrak{I}_u$ 라 하자. 적공간(곱공간, product space) $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_l) \times (\mathbb{R}, \mathfrak{I}_u)$ 에서 집합

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \le 1\}$$

의 내부(interior) A° 를 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 A 의 폐포(closure) $\overline{A}$ 와 A 의 경계(boundary) $b(A)$ 를 구하시오.
(단, $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$, $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$ 이다.) [4점, 서술형A] [2016]

13. 정수 23은 법(modulo) 89에 대한 원시근(primitive root)이고, 89는 소수이다. 정수 $a = 23^{41}$ 에 대하여 $a^n \equiv 23 \pmod{89}$ 를 만족하는 가장 작은 양의 정수 n 의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형A] [2016]

14. 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위에서 대수적인 원소 α 와 단순확대체(simple extension field) $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ 가 있다. F가 K의 부분체이고

$$\mathrm{irr}(\alpha, F) = x^r + a_1 x^{r-1} + a_2 x^{r-2} + \cdots + a_r$$
$$(a_1, a_2, \cdots, a_r \in F)$$

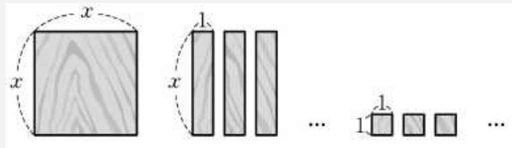
일 때, $F = \mathbb{Q}(a_1, a_2, \cdots, a_r)$ 임을 보이시오.

또한 $\alpha = \sqrt{2} + i$ 이고 $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 일 때, $\mathrm{irr}(\alpha, F)$ 를 구하시오. [4점, 서술형A] [2016]
(단, $i = \sqrt{-1}$ 이고, $\mathrm{irr}(\alpha, F)$ 는 F위에서 α 의 기약다항식(최소다항식, irreducible polynomial, minimal polynomial)이다.)

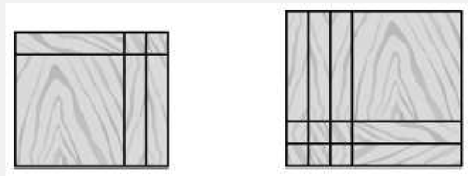
서・논술형B [1~8]

1. 다음은 브루너(J. Bruner)의 학습 이론을 적용하여 진행한 수업의 일부이다.

교 사: 나무로 된 교구를 이용하여 인수분해 공식의 원리를 발견하는 수업을 하겠습니다. 한 변의 길이가 x인 정사각형, 두 변의 길이가 각각 1과 x인 직사각형, 한 변의 길이가 1인 정사각형 모양의 교구가 있어요. 자유롭게 도형을 만드는 활동을 시작해 보세요.



학생들: 네. (교구를 가지고 활동을 하면서 교구에 대한 충분한 친밀감을 가진다.)
교 사: 이제 교구에 익숙해졌나요? 한 가지 질문을 할게요. 주어진 세 종류의 교구를 최소한 한 개씩 사용하여 직사각형을 만들 수 있을까요? (학생들은 다음과 같은 직사각형을 구성하고, 교사는 학생이 구성한 직사각형을 칠판에 그린다.)



학생 1: 교구로 직사각형을 만들었더니, 참 재미있어요. 이것으로 다른 활동을 할 수 있나요?
교 사: 다른 활동을 할 수 있지만, 수학적 원리, 개념 등을 찾는 것에 집중해 봅시다. 여러분이 만든 직사각형의 넓이를 가로의 길이와 세로의 길이를 이용하여 표현할 수 있을까요?
학생 2: 잘 모르겠어요. 교구로 다른 모양을 만들어 보는 것이 더 재미있을 것 같아요.
교 사: 그러면 새로운 직사각형을 더 만들어 보고, 두 변의 길이와 직사각형의 넓이를 어떻게 나타낼 수 있는지 각자 공책에 기록해 봅시다.
(잠시 후 교사는 계속 질문을 한다.)
학생들: (교사의 질문에 집중하지 못하고, 활동에 집중한다.)
…(중략)…
교 사: 이제 수업 시간이 별로 남지 않았어요.

위 수학 수업이 브루너의 이론을 반영하였음을 보여 주는 근거 1가지를 찾아, 그 이유와 함께 서술하시오. 또한 위 수업 상황에서 가장 두드러지게 나타나는 극단적인 수학 교수학적 현상을 쓰고, 이 현상을 수업 상황과 관련지어 설명하시오. [4점, 서술형B] [2016]

2. 점화식

$$a_0 = 1, \ a_n = \frac{1}{2} a_{n-1} + \frac{1}{2^n} \ (n \ge 1)$$

을 만족하는 수열 $\{a_n\}$의 생성함수와 $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n$ 의 값을 각각 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B] [2016]

3. 2차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^2$ 의 단위벡터(unit vector) u 에 대하여 선형사상 $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 을

$$T(\mathrm{x}) = \mathrm{x} - 2(\mathrm{x} \cdot \mathrm{u})\mathrm{u}$$

로 정의하자. 모든 벡터 x 에 대하여 $\|T(\mathrm{x})\| = \|\mathrm{x}\|$ 임을 보이시오.

또한 $\mathrm{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 일 때, $\mathbb{R}^2$ 의 기저(basis) $\mathcal{B} = \{(1, 0), (1, 1)\}$ 에 대한 T 의 행렬 $[T]_{\mathcal{B}}$ 를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, 두 벡터 x, y 에 대하여 $\mathrm{x} \cdot \mathrm{y}$ 는 x 와 y 의 점곱(유클리드 내적, dot product, Euclidean inner product)이고, $\|\mathrm{x}\|$ 은 x 의 유클리드 노름(Euclidean norm)이다.) [4점, 서술형B] [2016]

4. 양의 정수 n에 대하여 함수 $f_n : [-1,\ 1] \to \mathbb{R}$를

$$f_n(x) = e^{\frac{x}{n^2}} - \cos\frac{x}{n^2}$$

로 정의 할 때, 함수급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$가 구간 $[-1,\ 1]$에서 미분가능한 함수로 평등수렴(균등수렴, 고른수렴, uniform convergence)함을 보이시오. [5점, 서술형B] [2016]

※ 다음 정리는 필요하면 증명 없이 사용할 수 있다.

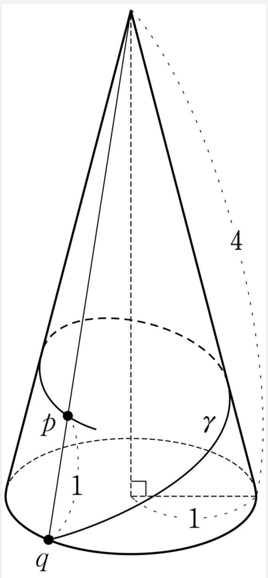
<정 리>

구간 $[a,\ b]$에서 정의된 미분가능한 함수열 $\{f_n\}$에 대하여, 다음 두 조건 (가), (나)를 모두 만족하는 함수급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$는 $[a,\ b]$에서 미분가능한 함수로 평등수렴한다.

(가) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$가 수렴하는 점 $x_0 \in [a,\ b]$가 존재한다.

(나) 함수급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n{}'(x)$가 $[a,\ b]$에서 평등수렴한다.

5. 그림과 같이 3차원 유클리드 공간에 밑면이 반지름의 길이가 1인 원이고 모선의 길이가 4인 원뿔이 있다. 이 원뿔의 옆면에 있는 점 p와 밑면에 있는 점 q는 같은 모선 위에 있고, 선분 pq의 길이는 1이다. 점 q에서 출발하여 원뿔의 옆면을 돌아 점 p를 지나는 측지선(geodesic) γ에 대하여 점 p에서 원뿔의 옆면의 주곡률(principal curvature)을 각각 κ_1, κ_2라 하고, 점 p에서 측지선 γ의 곡률(curvature)을 κ라 하자. κ_1, κ_2의 값을 구하고, 이를 이용하여 κ의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B] [2016]



6. 체 K는 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위에서 차수(degree)가 $[K:\mathbb{Q}] = 270$인 갈루아 확대체(정규확대체, Galois extension field, normal extension field)이고, 갈루아 군(Galois group) $G(K/\mathbb{Q})$는 순환군(cyclic group)이다. $\sqrt{2}$가 K의 원소일 때, $\sqrt{2}$를 포함하는 K의 부분체의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [5점, 서술형B] [2016]

7. 복소함수 $f(z) = \dfrac{e^z}{e^{2z}+1}$ $(|z| < \dfrac{\pi}{2})$의 점 $z_0 = 0$에 관한 테일러(Taylor) 급수 전개를 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$이라 하자.

음이 아닌 모든 정수 n에 대하여 $a_{2n+1} = 0$임을 보이시오.

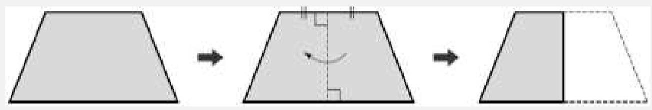
또한 복소평면에서 시계반대방향의 단위원 $C : |z| = 1$에 대하여 $\int_C \dfrac{f(z)}{z^3} dz$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [5점, 서술형B] [2016]

8. 다음은 수업 준비를 위한 교사용 보조 자료이다. 수학적 사실을 정당화하는 과정에서 두드러지게 나타나는 추론 유형을 (가), (나)에서 각각 하나씩 찾고, 이 두 유형의 추론을 기초로 정당화의 지도 방법을 <작성 방법>에 따라 논술하시오. [10점, 논술형B] [2016]

<한 가지 수학적 사실을 정당화하는 두 가지 접근>

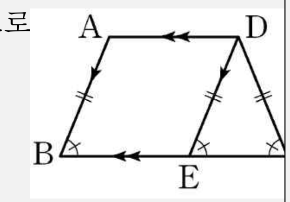
밑변의 양 끝각의 크기가 같은 사다리꼴에서 평행하지 않은 한 쌍의 대변의 길이는 서로 같음을 설명하시오.

(가)
밑변의 양 끝각의 크기가 같은 사다리꼴 모양의 종이를 준비한다. 그림과 같이 윗변의 수직이등분선을 따라 접는다.



평행하지 않은 한 쌍의 대변이 일치하므로, 대변의 길이는 서로 같다.

(나)
그림과 같이 $\overline{AD} /\!/ \overline{BC}$이고 $\angle B = \angle C$인 사다리꼴 ABCD가 있다. $\overline{AB} = \overline{DC}$임을 보이자. 점 D에서 $\overline{AB}$에 평행한 $\overline{DE}$를 그으면, 동위각의 성질에 의해서 $\angle DEC = \angle B$이다. 그런데 $\angle B = \angle C$이므로 $\angle DEC = \angle C$이다.
따라서 $\triangle DEC$는 이등변삼각형이므로 $\overline{DE} = \overline{DC}$이다.
또한 □ABED는 평행사변형이므로 $\overline{AB} = \overline{DE}$이다.
따라서 $\overline{AB} = \overline{DE}$이고 $\overline{DE} = \overline{DC}$이므로 $\overline{AB} = \overline{DC}$이다.



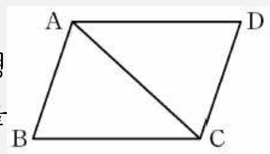
<작성 방법 >

- 서론, 본론, 결론의 형식을 갖출 것.
- 서론 부분에는 (나)와 같은 방법만으로 지도할 때 생길 수 있는 문제점을 포함할 것.
- 본론 부분에는 아래 요소를 포함하여 작성할 것.
  -폴리아(G. Polya)의 관점에서 두 추론의 역할
  -반 힐레(P. van Hiele)의 기하 학습 수준 이론에서 학습 수준을 제1수준~제5수준으로 구분할 때, 제3수준과 제4수준이 주는 시사점
- 결론 부분에는 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 '교수·학습 방법'에 제시된 수학적 추론 능력을 신장시키기 위한 유의사항을 포함할 것.

기입형A [1~8]

1. 다음은 중학교 1~3학년군 기하 영역의 작도와 합동 단원 수업의 일부이다.

김 교사: 지금까지 삼각형의 합동 조건을 배웠습니다. 이제 삼각형의 합동 조건을 이용하여 다음을 설명해 봅시다.

> 사각형 ABCD에서 $\overline{AD}//\overline{BC}$, $\overline{AB}//\overline{DC}$일 때, 삼각형 ABC와 삼각형 CDA가 합동임을 설명하시오.
>
> 
>

(김 교사는 위 문제에서 두 삼각형이 합동임을 연역적으로 설명한다.) ……①

학생 A: ∠ACB = ∠CAD, ∠BAC = ∠DCA이고 변AC가 공통이라는 조건을 어떻게 찾았는지 궁금합니다.

김 교사: 좋은 질문입니다. 위의 문제는 삼각형 ABC와 삼각형 CDA가 합동임을 보이는 것입니다. ㉠이런 문제를 만났을 때 우선 이 두 삼각형이 합동이 된다고 생각하고, 합동이 되기 위해서는 어떤 조건을 만족해야 하는지를 찾아봅시다.

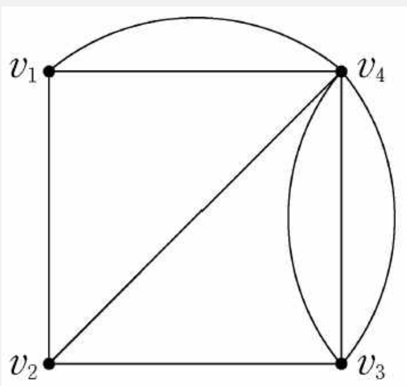
학생 B: 그림에서 변 AC가 공통이니까 ∠ACB=∠CAD, ∠BAC=∠DCA이어야 할 것 같아요.

김 교사: 잘 찾았어요. 그리고 그 양 끝각의 크기가 각각 같기 위해서는 두 대변이 평행이어야 합니다. 이것은 문제에서 조건으로 주어져 있습니다. ㉡문제에 대한 ①의 설명에서는 문제에서 주어진 조건과 찾아낸 세 조건을 이용하여 두 삼각형이 합동임을 보이고 있습니다.

…(하략)…

김 교사는 ㉠에서 풀이 계획을 발견하는 방법을 설명하고 ㉡에서 그 계획을 실행하는 방법을 설명하고 있다. ㉠과 ㉡에 해당하는 방법을 순서대로 쓰시오. [2점, 기입형A] [2017]

2. 다음 그래프의 인접행렬(adjacency matrix)을 A라 할 때, A의 모든 성분의 합을 구하시오. [2점, 기입형A] [2017]



3. $\mathbb{Z}_{60}$의 잉여환(factor ring, quotient ring)으로 나타내어지는 모든 체(field)의 직접곱(직적, direct product)을 R라 하자. 환 R의 표수(characteristic)를 구하시오. [2점, 기입형A] [2017]

4. 좌표평면에서 영역 D가

$$D=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x^2\}$$

일 때, 중적분 $\iint_D 3\cos(x^3)\,dA$의 값을 구하시오. [2점, 기입형A] [2017]

5. 좌표평면의 영역

$$D=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 4,\ 0\le y\le 4,\ x+y\le 4\}$$

에서 함수 $f(x,y)=4x-2xy+y^2$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. [2점, 기입형A] [2017]

6. 복소수 $z=x+iy$ (x, y는 실수)에 대한 함수

$$f(z)=(x^n y+xy^n+x+y)+i\,v(x,\ y)$$

가 $z=1$에서 해석적(analytic)이 되도록 하는 자연수 n의 값과 이때의 $f'(1)$의 값을 각각 구하시오. (단, $v(x,\ y)$는 실숫값 함수이다.) [2점, 기입형A] [2017]

7. 연속확률변수 X의 확률밀도함수(probability density function) $f_X(x)$는

$$f_X(x)=\frac{2}{9}x-\frac{2}{9}\quad(1<x<4)$$

이다. X와 같은 분포를 따르고 서로 독립인 2개의 연속확률변수 X_1, X_2에 대하여 $Y=\min\{X_1,X_2\}$일 때, 확률 $\mathrm{P}\left(Y<\frac{5}{2}\right)$를 구하시오. (단, $\min\{a,b\}$는 a와 b 중 크지 않은 수이다.) [2점, 기입형A] [2017]

8. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$의 한 평면에 있고 곡률(curvature)이 양인 단위속력곡선(unit speed curve) $\gamma : \mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$에 대하여, 점 $\gamma(s)$에서의 접선벡터(tangent vector)를 $\boldsymbol{T}(s)$, 주법선벡터(principal normal vector)를 $\boldsymbol{N}(s)$라 하자. 곡선 $\beta : \mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ 을 $\beta(s)=\frac{1}{2}\boldsymbol{T}(s)+\boldsymbol{N}(s)$로 정의할 때, 모든 양수 t에 대하여 $s=0$에서 $s=t$까지 곡선 β의 길이는 $3t$이다. $s=1$일 때, 곡선 γ의 곡률을 구하시오. [2점, 기입형A] [2017]

서술형A [9～14]

9. 다음은 투키(J. Tukey)가 제안한 탐색적 자료 분석의 관점을 적용한 중학교 3학년 통계 영역 수업의 일부이다.

김 교사: 지난 시간에 우리가 사는 지역의 환경 보전을 위하여 탄소 배출량 줄이기 프로젝트를 수행하기로 결정하였습니다. 프로젝트의 자료를 수집하기 위하여 전체 학생 647명 중 100명을 대상으로 설문 조사를 실시하였고 수집한 자료를 다음 표와 같이 정리하였습니다. 이 표를 이용하여 우리 지역 탄소 배출량 자료의 특징을 알아봅시다.

연번	탄소 배출량	가족 구성원 수	탄소 소비와 관련된 생활 특징
1	340.03	4	절수기를 사용함
2	676.14	6	조부모님과 함께 거주함.
3	457.33		플러그 뽑기를 생활화함.
99	3503.1	4	가족이 외출하는 시간이 많음.
100	405.78	3	컴퓨터 사용 시간이 많음

학생 A: 이 표만으로는 자료의 특징을 찾기 어렵습니다.
김 교사: 어떻게 하면 자료의 특징을 알 수 있을지 함께 생각해 봅시다.
학생 B: 저는 평균으로 자료의 특징을 찾아보려고 합니다.
김 교사: 평균과 같은 대푯값을 구해 보는 것도 좋은 생각입니다. 이와 같이 수치로 나타내는 방법 이외에도 자료의 특징을 쉽게 파악할 수 있는 다른 방법은 (㉠).
학생 B: 평균으로 자료의 특징을 찾아보려고 표를 살펴보니 빈칸이 하나 있고 99 번의 탄소 배출량은 소수점이 잘못 표시되어 있는 것 같습니다. 이런 경우에도 평균을 이용해도 될지 궁금합니다.
김 교사: 좋은 질문입니다. 이와 같이 평균을 이용하기 어려운 상황에서는 (㉡).
…(하략)…

탐색적 자료 분석의 관점에서 괄호 안의 ㉠과 ㉡에 김 교사가 제시할 수 있는 지도 내용을 각각 쓰시오. 그리고 탐색적 자료 분석의 관점에서 ㉠과 ㉡의 지도 내용이 적절한 이유를 서술하시오. [4점, 서술형A] [2017]

10. 고등학교 확률과 통계의 순열과 조합 단원 수업에서 학생의 추론 능력을 평가하기 위하여 서술형 평가를 실시하였다. 다음은 박 교사가 실시한 평가 문항과 채점 기준표, 그리고 이 평가 문항에 대한 한 학생의 답안이다.

(가) 평가 문항과 채점 기준표

- 평가 문항

다음 등식의 참, 거짓을 판단하고 그 이유를 설명하시오. [4점]

$${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n = 2^n$$

- 채점 기준표

점수	채점 기준
4	- 일반성을 보장하는 추론 유형을 사용하여 참이라고 판단한 경우
2	- 일반성을 보장하는 추론 유형을 사용하였으나 사소한 오류로 인해 거짓이라고 판단한 경우 - 일반성을 보장할 수 없는 추론 유형을 사용하여 참이라고 판단한 경우
1	- 추론 과정에 대한 서술 없이 참이라고 판단한 경우
0	- 그 외의 경우

(나) 학생의 답안

$n=1$일 때, ${}_1\mathrm{C}_0 + {}_1\mathrm{C}_1 = 2$

$n=2$일 때, ${}_2\mathrm{C}_0 + {}_2\mathrm{C}_1 + {}_2\mathrm{C}_2 = 4 = 2^2$

$n=3$일 때, ${}_3\mathrm{C}_0 + {}_3\mathrm{C}_1 + {}_3\mathrm{C}_2 + {}_3\mathrm{C}_3 = 8 = 2^3$이 된다.

따라서 이 등식은 참이다.

위 (나) 학생의 답안에 나타난 추론의 유형을 쓰고, 그 유형의 특성을 설명하시오. 그리고 (가)의 채점 기준표에 근거하여 위 학생의 답안을 채점한 점수를 쓰고, 학생의 추론적 사고가 가진 제한점을 보완할 수 있는 지도 방안을 1가지 서술하시오. [4점, 서술형A] [2017]

11. 복소평면 $\mathbb{C}$의 영역 $D=\{z\in\mathbb{C} \mid 0<|z|<1\}$에 대하여 함수 $f : D\to\mathbb{C}$는 해석적(analytic)이다.

임의의 $z\in D$에 대하여 함수 $f(z)$가 부등식

$$|f(z)| \le 1+\ln\left(\frac{1+|z|}{2|z|}\right)$$

를 만족시킨다. $z=0$은 함수 $f(z)$의 제거 가능 특이점(없앨 수 있는 특이점, removable singular point)임을 보이고, $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$일 때 $f\left(\frac{1+i}{3}\right)$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형A] [2017]

12. 좌표평면 $\mathbb{R}^2$에서 거리함수(metric, distance function) $d : \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 는

$$d(p,q)=\begin{cases}0, & p=q\\ \max\{\|p\|,\|q\|\}, & p\ne q\end{cases}$$

이다. d에 의해 유도된 $\mathbb{R}^2$ 상의 거리위상(metric topology)을 $\mathfrak{I}_d$라 하자. 위상공간 $(\mathbb{R}^2,\ \mathfrak{I}_d)$의 부분집합

$$A=\{(x,\ 0)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x<1\}$$

의 폐포(closure) $\overline{A}$를 풀이 과정과 함께 쓰시오.

또한 $(\mathbb{R}^2,\ \mathfrak{I}_d)$에서 콤팩트(compact)인 무한 부분집합 B의 예를 하나 제시하시오. [4점, 서술형A] [2017]

(단, $p=(x,\ y)$에 대하여 $\|p\|=\sqrt{x^2+y^2}$이고 $\max\{a,\ b\}$는 a와 b 중 작지 않은 수이다.)

13. $1\le k\le 2016$인 자연수 k에 대하여 $a_k=k!\times(2017-k)!$일 때, 르장드르 기호(Legendre symbol)의 합

$$\sum_{k=3}^{2014}\left(\frac{a_k}{2017}\right)$$

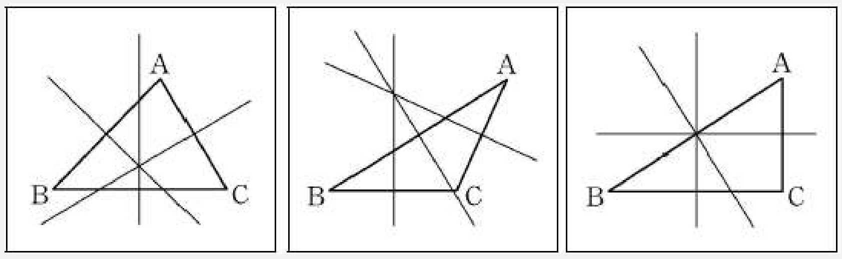
의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. (참고 : 2017은 소수이다.) [4점, 서술형A] [2017]

14. 두 연속확률변수 X, Y는 서로 독립이고 각각 구간 $(0,\ 2)$에서 균등분포(uniform distribution)를 따른다.

확률변수 $Z=X+Y$의 확률밀도함수(probability density function) $f_Z(z)$와 평균 $\mathrm{E}[Z]$를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형A] [2017]

서 · 논술형B [1 ~ 8]

1. 다음은 김 교사가 딘즈(Z. Dienes)의 수학 학습 이론과 프로이덴탈(H. Freudenthal)의 수학화 교수 · 학습론을 반영하여 작성한 수업 계획의 일부이다.

학습 목표	삼각형의 외심의 성질을 이해하고 설명할 수 있다.
교수 · 학습 방법	협력 학습
교실 환경	컴퓨터, 빔 프로젝터
준비물	삼각형 모양의 색종이, 자, 컴퍼스
교수 · 학습 활동 순서	(1) 종이 접기를 이용하여 '삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만난다.' 는 것을 확인하게 한다. (2) 탐구형 소프트웨어를 이용하여 삼각형의 모양을 다양하게 변화시키면서 (1)에서 찾은 성질이 성립함을 보여 준다.  (3) 지난 시간에 학습한 선분의 수직이등분선의 성질을 이용하여 다음 순서로 삼각형의 외심의 성질을 확인하게 한다. ① 삼각형 ABC에서 두 변 AB, BC의 수직이등분선을 그리시오. ② 두 수직이등분선의 교점을 표시하시오. ③ 변 AC의 수직이등분선을 그리시오. ④ 변 AC의 수직이등분선이 어디를 지나는지 확인하시오. (4) 모둠 토론을 통하여 삼각형의 외심의 성질에 대하여 형식적인 정당화를 하게 한다. (5) 모둠별 토론 결과를 발표하게 한다.

딘즈의 수학적 다양성의 원리를 위의 계획된 수업 상황과 관련지어 설명하시오. 그리고 프로이덴탈의 국소적 조직화가 수학 교수 · 학습에서 갖는 의의 1가지를 계획된 수업 상황과 관련지어 서술하시오. [4점, 서술형B] [2017]

2. 위수(order)가 200인 군 G가 부분군 H와 정규 부분군(normal subgroup) N을 가진다. H와 N의 위수가 각각 8과 40일 때, H가 N의 부분군임을 보이시오. [4점, 서술형B] [2017]

3. 3차원 유클리드 내적 공간 $\mathbb{R}^3$에서 두 벡터 $\boldsymbol{v_1}=(1,\ 2,\ 2)$, $\boldsymbol{v_2}=(1,\ -1,\ 2)$로 생성된 부분공간을 V라 하자. V의 임의의 정규직교기저(orthonormal basis) $B=\{\boldsymbol{u_1},\ \boldsymbol{u_2}\}$에 대하여 B에 의해 결정되는 네 실수 a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}가 존재하여

$$\boldsymbol{v_1}=a_{11}\boldsymbol{u_1}+a_{12}\boldsymbol{u_2},\ \boldsymbol{v_2}=a_{21}\boldsymbol{u_1}+a_{22}\boldsymbol{u_2}$$

일 때, $|a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}|$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, 두 벡터 $\boldsymbol{u}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\boldsymbol{v}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$의 유클리드 내적은 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$이다.) [4점, 서술형B] [2017]

4. 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$는 미분가능하고 도함수 f'이 $\mathbb{R}$에서 연속이다. 자연수 n에 대하여 함수 g_n을

$$g_n(x)=2^n\{f(x+2^{-n})-f(x)\}$$

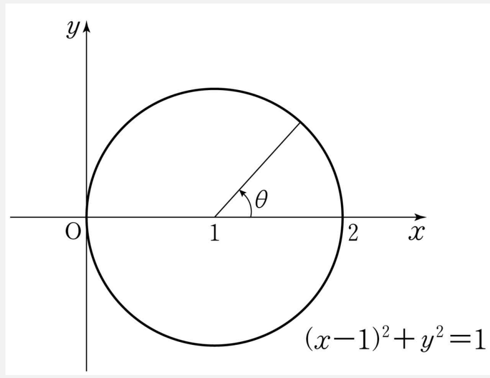
라 하자. 함수열 $\{g_n\}$이 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 f'으로 평등수렴(균등수렴, 고른수렴, uniform convergence)함을 보이시오.

또한 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 g_n(x)dx=f(1)-f(0)$임을 보이시오. [4점, 서술형B] [2017]

5. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡선 γ를 두 곡면

$$S_1=\{(x,\ y,\ z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x^2+y^2+z^2=4,\ z>0\},$$
$$S_2=\{(x,\ y,\ z)\in\mathbb{R}^3\,|\,(x-1)^2+y^2=1,\ z>0\}$$

의 교선이라 하자. 아래 그림에서의 각 $\theta(0<\theta<2\pi)$를 매개변수로 하는 곡선 $\gamma:(0,2\pi)\to\mathbb{R}^3$의 매개변수표현(parametrized representation) $\gamma(\theta)$를 하나 구하시오. 또한 곡면 S_1 위에 놓인 곡선으로서 γ의 점 $(0,0,2)$에서의 측지곡률(geodesic curvature)의 절댓값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B] [2017]



6. 유리수 체 $\mathbb{Q}$ 위에서 대수적인 원소 α에 대하여 단순 확대체(simple extension field) $K=\mathbb{Q}(\alpha)$는 $\mathbb{Q}$ 위의 갈루아 확대체(정규 확대체, Galois extension field, normal extension field)이고 차수(degree)는 $[K:\mathbb{Q}]=100$이다. 갈루아 군(Galois group) $\mathrm{G}(K/\mathbb{Q})$가 $\sigma(\alpha)=\alpha^{-1}$을 만족시키는 자기동형사상(automorphism) σ를 가질 때, K의 부분체 $F=\mathbb{Q}(\alpha+\alpha^{-1})$의 $\mathbb{Q}$ 위의 차수 $[F:\mathbb{Q}]$를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [5점, 서술형B] [2017]

7. 상수함수가 아닌 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가 무한 번 미분가능하고 모든 실수 x와 자연수 n에 대하여

$$|f^{(n)}(x)|\le n^2(|x|+2)$$

를 만족시킬 때, 집합 $\{x\in\mathbb{R}\,|\,f(x)=0,\ |x|<1\}$이 유한집합임을 보이시오. [5점, 서술형B] [2017]

※ 다음 정리들은 필요하면 증명 없이 사용할 수 있다.

(가) $c\in(a,\ b)$이고 함수 $f(x)$가 열린구간 $(a,\ b)$에서 $(n+1)$번 미분가능할 때,

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k,\ R_n(x)=f(x)-T_n(x)$$

로 놓으면 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$이 되는 t_x가 c와 x사이에 존재한다.

(나) 함수 $g(x)$가 $|x-c|<r$ $(r>0,\ c$는 상수$)$인 모든 $x\in\mathbb{R}$에 대하여

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n$$

일 때, 모든 자연수 n에 대하여 $x_n\neq c,\ g(x_n)=0$이고 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$인 수열 $\{x_n\}$이 존재하면 $|x-c|<r$인 모든 $x\in\mathbb{R}$에 대하여 $g(x)=0$이다.

8. 2015 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 중학교 함수 영역에서는 함수 개념을 도입하기 전에 다양한 상황을 그래프로 나타내고 해석하는 것을 다루도록 하고 있다. 이에 두 예비 교사 A와 B는 함수 그래프 지도 이론과 기존의 교과서 자료를 이용하여 함수 영역에 추가된 성취기준에 대한 수업을 설계해 보았다.

다음은 설계한 수업의 [학습 목표], [(가) 예비 교사 A의 활동지], [(나) 예비 교사 B의 활동지]이다. 두 활동지 (가)와 (나)에 기초하여 그래프 지도 방식을 비교하고, (가)와 (나)를 이용하여 수학 수업을 실행하기 위해 수업 장면에서 교사가 살펴보아야 할 사항을 〈작성 방법〉에 따라 논술하시오. [10점, 논술형B] [2017]

[학습 목표]

학습 목표(성취기준): 다양한 상황을 그래프로 나타내고, 주어진 그래프를 해석할 수 있다.

[(가) 예비 교사 A의 활동지]

※ 그림과 같은 3개의 용기에 일정한 속도로 물을 따른다고 할 때, 물음에 답하시오.

(ㄱ) (ㄴ) (ㄷ)

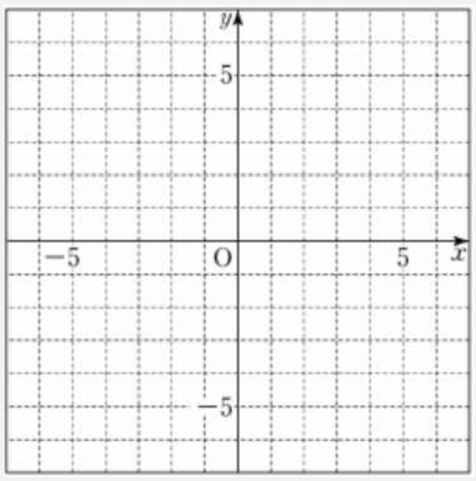
1. 각 용기에 물을 채울 때 시간에 따라 변하는 물의 높이를 대략적인 그래프 개형으로 나타내어 보시오.
2. 그래프를 보고 시간에 따른 물의 높이의 변화를 설명해 보시오.

[(나) 예비 교사 B의 활동지]

1. 1분에 1L씩 일정한 속도로 물이 나오는 수도꼭지에 물통에 물을 받고 있다. 물을 받는 시간을 x(분), 받은 물의 양의 y(L)라 할 대, 다음 표를 완성하시오.

x(분)	1	2	3	4	5
y(L)					

2. 위의 표를 이용하여 다음 좌표평면 위에 그래프를 그리시오.



3. 위의 그래프를 보고 받은 물의 양의 변화를 설명하시오.

〈작성 방법〉

- 크라벤담(H. Krabbendam)의 질적 접근과 양적 접근의 관점에서 그래프 지도 방식을 비교하여 제시할 것.
- 폴리아(G. Polya)의 문제해결 이론에 근거하여 (가)와 (나)의 문제를 해결하는 반성 단계에서 적절한 교사의 공통 발문 1가지와 그 발문이 적절한 이유를 제시할 것.
- (가)와 (나)를 이용하는 수업 장면에서 주의해야 할 극단적인 교수학적 현상을 수업 상황과 관련지어 각각 1가지씩 다르게 제시할 것.
- 중학교 함수 영역의 그래프에 대한 교수·학습 방법에서 유의해야 할 사항을 2015 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에 근거하여 제시할 것.
- 서론, 본론, 결론의 형식을 갖출 것.

기입형A [1~8]

1. 다음은 2015 개정 교육과정에 따른 중학교 수학과 교육과정에 제시된 내용 체계의 일부와 수학과 교육과정의 변화에 대한 두 교사의 가상 대화이다.

[내용 체계]

영역	핵심 개념	내용 요소		
문자와 식	다항식	• 문자의 사용과 식의 계산	• 식의 계산	• 다항식의 곱셈과 인수분해
	방정식과 부등식	• 일차방정식	• 일차부등식과 연립일차방정식	• 이차방정식
확률과 통계	확률		• 확률과 그 기본 성질	
	통계	• 자료의 정리와 해석		• 대푯값과 산포도 • (㉠)

[가상 대화]

교사 A: 2015 개정 교육과정에 따른 중학교 '수학' 과목 교육 과정의 내용 영역은 수와 연산, 문자와 식, 함수, 기하, 확률과 통계입니다.

교사 B: 맞아요. 그런데, 2009 개정 교육과정에 따른 중학교 '수학' 과목 교육과정과 어떤 차이가 있나요?

교사 A: 네, 내용 체계에서 확률과 통계 영역의 제시 순서가 바뀌었어요. 그리고 내용 요소에 새롭게 추가된 것이 있어요.

교사 B: 그렇군요. 그러면 문자와 식 영역에도 변화가 있나요?

교사 A: 문자와 식 영역의 내용 중 일부가 바뀌었어요. 다항식의 곱셈과 인수분해를 통합하여 학습하도록 하였고, ㉡2009 개정 교육과정에 따른 중학교 '수학' 과목 교육과정의 문자와 식 영역 '용어와 기호'에 있던 내용 중, 2015 개정 교육과정에 따른 고등학교 '수학' 과목 교육과정의 문자와 식 영역 '학습 요소'로 이동한 것이 있어요.

위 [내용 체계]에서 괄호 안의 ㉠에 들어갈 내용 요소와 [가상 대화]의 ㉡에 해당하는 학습 요소를 순서대로 쓰시오. [2점, 기입형A] [2018]

2. 위수(order)가 각각 10과 n인 두 순환군(cyclic group) $\mathbb{Z}_{10}$과 $\mathbb{Z}_n$의 직접곱(직적, direct product) $\mathbb{Z}_{10}\times\mathbb{Z}_n$이 순환군이 되도록 하는 10 이상이고 100 이하인 자연수 n의 개수를 구하시오. [2점, 기입형A] [2018]

3. 자연수 n에 대하여 함수 $f_n : [0. \infty)\to\mathbb{R}$를

$$f_n(x)=\max\left\{0,\ \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}|x-2n|\right)\right\}$$

으로 정의할 때,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)\,dx+\int_0^\infty\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)dx$$

의 값을 구하시오. (단, $\max\{a, b\}$는 a와 b 중 작지 않은 수이다.) [2점, 기입형A] [2018]

4. 좌표평면에서 영역 A가

$$A=\left\{(x, y)\in\mathbb{R}^2\,|\, x\ge 0,\ y\ge 0,\ 1\le x+y\le 3\right\}$$

일 때, 변수변환 $2x=u+v$, $2y=u-v$를 사용하여 중적분

$$\iint_A \frac{1}{x+y}e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dxdy$$

의 값을 구하시오. [2점, 기입형A] [2018]

5. 확장 복소평면(extended complex plane) $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$에서 정의된 일차분수변환(선형분수변환, linear fractional transformation, bilinear transformation) T가

$$T(0)=2,\ \ T(1)=2i,\ \ T(\infty)=-2$$

를 만족시킬 때, $T(2i)$의 값을 구하시오. [2점, 기입형A] [2018]

6. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 $\alpha(2)=(0,0,0)$인 단위 속력곡선(unit speed curve) $\alpha : \mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$에 대하여 곡선 $\beta : \mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$을

$$\beta(t)=\int_2^t\left(\alpha(s)+s^2N(s)\right)ds$$

라 하자. 두 벡터 $\alpha'(2)$, $\beta''(2)$가 서로 수직일 때, $t=2$에서 α의 곡률(curvature) κ의 값을 구하시오.

(단, $N(s)$는 곡선 α의 주법벡터장(principal normal vector field)이다.) [2점, 기입형A] [2018]

7. 두 이산확률변수 X, Y의 결합확률분포가 다음과 같다.

X \ Y	0	1	2	3
0	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	0	$\frac{1}{5}$
1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$
2	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	0

조건 $Y=1$이 주어졌을 때, 확률변수 X의 조건부기댓값(conditional expectation) $\mathrm{E}[X|\,Y=1]$을 구하시오. [2점, 기입형A] [2018]

8. 점화식

$$a_1=1,\ a_2=1,\ 6a_n=5a_{n-1}-a_{n-2}\ (n\ge 3)$$

의 특성다항식(고유다항식, characteristic polynomial)과 이 점화식을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n을 각각 구하시오. [2점, 기입형A] [2018]

서술형A [9 ~ 14]

9. 다음 (가), (나)는 교사 A와 B가 다항식의 곱셈을 지도하는 수업 상황이다.

(가) 교사 A의 수업 상황

교사 A: 다항식의 곱셈에 대한 또 다른 공식을 공부하겠습니다. 다음 공식을 기억하세요.

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$$

학 생: 네, 알겠습니다.

교사 A: 그러면 $(x+3)^3$을 전개해 볼게요.

$$\boxed{\begin{aligned}(x+3)^3 &= x^3+3\times x^2\times 3+3\times x\times 3^2+3^3\\ &= x^3+9x^2+27x+27\end{aligned}}$$

교사 A: 이제 공식을 이용하여 $(5x+2)^3$을 각자 전개해 보세요.

학 생: (잠시 후) 공식에 대입하여 전개해 보니 $125x^3+150x^2+60x+8$이 되었어요.

교사 A: 맞습니다. 공식을 이용하여 또 다른 문제를 풀어 볼까요?

…(하략)…

(나) 교사 B의 수업 상황

교사 B: $(a+b)^3$을 어떻게 전개하는지 공부하겠습니다.

학 생: 네, 선생님.

교사 B: 중학교 때 배운 공식 $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$을 기억하고 있나요?

학 생: 네. ㉠$(a+b)^2$을 $(a+b)(a+b)$로 바꾸어 전개하면 $(a+b)(a+b) = a^2+ab+ab+b^2$이므로 $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$이 되는 것을 알고 있어요.

교사 B: 맞아요, 그렇다면 $(a+b)^3$은 어떻게 전개할까요?

학 생: 잘 모르겠어요.

교사 B: $(a+b)^3$을 두 다항식의 곱으로 나타낼 수 있을까요?

학 생: $(a+b)^3$은 $(a+b)$와 $(a+b)^2$의 곱입니다.
즉, $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2$이에요.

교사 B: 그러면 $(a+b)(a+b)^2$을 전개할 수 있을까요?

학 생: $(a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2)$이므로 분배법칙을 이용하여 전개하면 될 것 같아요.

(잠시 후)

㉡아하, 그러면 $(a+b)(a^2+2ab+b^2) = a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$이므로 $(a+b)^3$은 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$이네요. 이제 $(a+b)^3$을 어떻게 전개하는지 확실히 알게 되었으니, 혼자서도 할 수 있어요.

교사 B: 그래요. 그러면 $(5x+2)^3$은 여러분이 직접 전개해 볼까요?

…(하략)…

위 (가)의 수업 상황에서 발생할 수 있는 극단적인 교수학적 현상이 무엇인지 쓰고, 그 이유를 설명하시오. 또한 위 (나)의 수업 상황에서 ㉠에서 ㉡으로의 '실제적 발달 수준(actual development level)'의 변화 과정을 비고츠키(L. Vygotsky) 학파의 '비계설정(scaffolding)'에 근거하여 설명하시오. [4점, 서술형A] [2018]

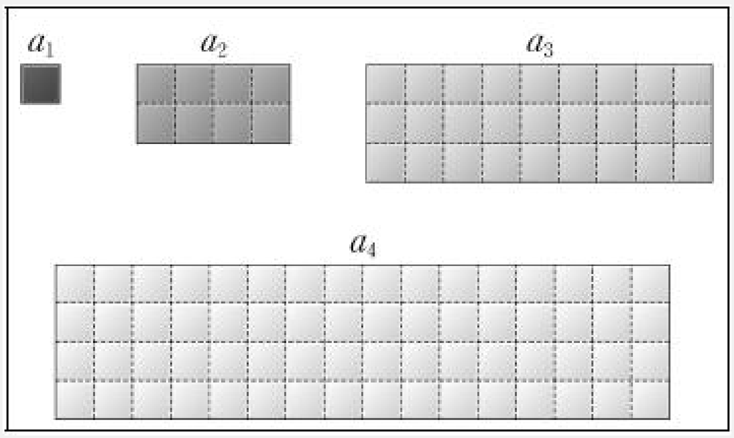
10. 다음은 딘즈(Z. Dienes)의 이론에 기초하여 탐구 활동을 강조한 수학 수업에서 사용할 교구 제작 및 활용을 위한 계획서의 일부이다.

[교구 제작 및 활용을 위한 계획서]

<제작 계획>

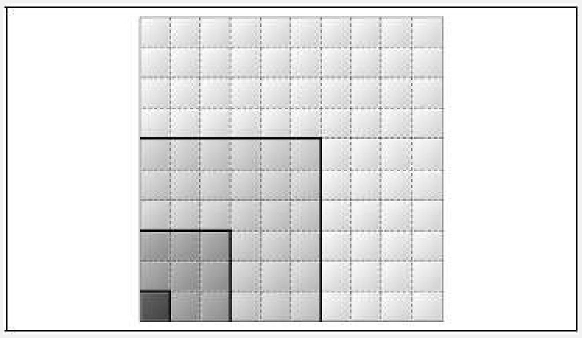
- 1단계: 한 변의 길이가 1인 정사각형 조각들을 사용하여 (가)와 같이 직사각형 모양 4개를 만든다. 이때 각 직사각형 모양을 만드는 데 사용된 정사각형 조각의 개수는 a_1, a_2, a_3, a_4이다.

(가)



- 2단계: (가)에서 각각의 직사각형 모양을 만드는 데 사용된 모든 정사각형 조각들을 재배치하면 (나)와 같은 큰 정사각형 모양으로 만들 수 있다.

(나)



<활용 계획>

- (가)에 있는 정사각형 조각의 총 개수는 $a_1+a_2+a_3+a_4$임을 파악한다.
- (나)에 있는 큰 정사각형의 한 변의 길이는 $1+2+3+4$임을 파악한다.
- (가)와 (나)에 있는 정사각형의 조각의 개수는 서로 같다는 것을 인식한다.

…(하략)…

※ 필요하면 a_1, a_2, …, a_n에서 n의 값에 따른 교구를 추가로 만들어 사용할 수 있다.

위 교구를 활용한 고등학교 수열 단원 수학 수업에서 학습자가 형성하기를 기대하는 일반화된 식을 쓰고, 그 식을 어떻게 유도하였는지 위 교구와 관련지어 설명하시오. 또한 딘즈의 개념 형성 이론의 관점에서, 수학 학습을 위해 고안된 교구 또는 구체물 속에 내포되어 있어야 하는 것이 무엇인지 쓰시오. [4점, 서술형A] [2018]

11. $f(0)=f'(0)=0$인 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$에 대하여 함수 g를

$$g(x)=\begin{cases} f(x)\cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right), & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

이라 하자. 함수 g가 $x=0$에서 미분가능함을 보이고, $g'(0)$의 값을 구하시오. [4점, 서술형A] [2018]

12. 위상공간 $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{I}_u)$의 부분공간(subspace)

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<4\}$$

와 집합

$$X=\{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$$

에 대하여 함수 $f:A\to X$를

$$f(x,y)=[x^2+y^2]$$

으로 정의하자. 집합 X 위의 위상 $\mathfrak{I}$를

$$\mathfrak{I}=\left\{U\subseteq X \mid f^{-1}(U)\in\mathfrak{I}_u\right\}$$

로 정의할 때, 3을 원소로 갖는 X의 모든 열린집합(open set)의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오.

또 위상공간 $(X, \mathfrak{I})$에서 집합 $B=\{1, 2\}$의 도집합(derived set) B'을 구하시오. [4점, 서술형A] [2018]

(단, $\mathfrak{I}_u$는 $\mathbb{R}^2$ 위의 보통위상(usual topology)이고, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.)

13. 합동식

$$x^{n+5}-x^n-x^5+1\equiv 0 \pmod{131}$$

의 법 131에 대한 해의 개수가 5가 되도록 하는 130 이하의 자연수 n의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형A] [2018]

14. 다음 두 조건을 만족시키는 유한체(finite field) $\mathbb{Z}_5$ 위의 다항식환(polynomial ring) $\mathbb{Z}_5[x]$의 아이디얼(ideal) I의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형A] [2018]

(가) 잉여환(factor ring, quotient ring) $\mathbb{Z}_5[x]/I$의 위수(order)는 25이다.
(나) $\mathbb{Z}_5[x]/I$의 극대 아이디얼(maximal ideal)의 개수는 2이다.

서 · 논술형B [1~8]

1. 다음은 2015 개정 교육과정에 따른 중학교 수학과 교육과정의 수와 연산 영역에 제시된 <교수 · 학습 방법 및 유의 사항>과 <평가 방법 및 유의 사항>의 일부이다.

<교수 · 학습 방법 및 유의 사항>
• 다양한 상황을 이용하여 음수의 필요성을 인식하게 한다.
• 정수의 사칙계산의 원리는 여러 가지 ㉠모델을 이용하여 직관적으로 이해하게 할 수 있다.
<평가 방법 및 유의 사항>
• 정수, 유리수와 관련하여 지나치게 복잡한 계산을 포함하는 문제는 다루지 않는다.
• ㉡사칙계산 이외의 이항연산 문제는 다루지 않는다.

셈돌 모델을 이용하여 $(+3)-(-2)$를 계산하는 방법을 그림과 함께 설명하고, ㉠방법의 한계를 보완하기 위한 지도 방안을 서술하시오. 또 ㉡에 해당하는 수학 문제를 하나 제시하시오. [4점, 서술형B] [2018]

2. 어느 회사의 입사 시험 지원자들의 필기시험 점수와 면접시험 점수는 각각 정규분포 $N(82, 6^2)$, $N(80, 8^2)$을 따르고 서로 독립이라고 한다. 이 회사의 입사 시험 지원자 중에서 임의로 뽑은 한 지원자의 필기시험 점수를 확률변수 X, 면접시험 점수를 확률변수 Y라 하자. 이 지원자의 평균 점수를 $T=\dfrac{X+Y}{2}$라 할 때, 평균 점수가 90점 이상일 확률은 $\mathrm{P}(T\geq 90)=\mathrm{P}(Z\geq k)$이다. 이때 k의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, Z는 표준정규분포를 따르는 확률변수이다.) [4점, 서술형B] [2018]

3. 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간 $\mathbb{R}^3$의 기저(basis) $\{v_1, v_2, v_3\}$에 대하여 세 벡터 v_1+v_2, v_1+v_3, v_2+v_3이 일차독립임을 보이시오. 또 모든 성분이 실수인 3×3 행렬 A가

$$(A-I)(v_1+v_2)=0,$$
$$(A-2I)(v_1+v_3)=0,$$
$$(A-3I)(v_2+v_3)=0$$

을 만족시킬 때, A의 행렬식(determinant) $\det(A)$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, I는 3×3 단위행렬이다.) [4점, 서술형B] [2018]

4. 정함수(entire function) $f(z)$가 모든 복소수 z에 대하여 부등식

$$|f(z)|\leq|e^z-1|$$

을 만족시킨다. $f(1)=1$일 때, $f'(0)$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B] [2018]

※ 다음 정리는 필요하면 증명 없이 사용할 수 있다.

<정리>
양수 r에 대하여 영역 $\{z\in\mathbb{C} \mid 0<\lvert z-a\rvert<r\}$에서 함수 $g(z)$가 해석적이고 유계이면 $\lim\limits_{z\to a} g(z)$가 존재하고 함수 $$h(z)=\begin{cases} g(z), & 0<\lvert z-a\rvert<r \\ \lim\limits_{w\to a} g(w), & z=a \end{cases}$$ 는 $z=a$에서 해석적이다.

5. 곡면

$$X(u, v)=\left(u\cos v,\ u\sin v,\ \frac{1}{u}\right)\ (u>0,\ -\pi<v<\pi)$$

위의 점 $p=(1, 0, 1)$에서 주곡률(principal curvature) k_1, $k_2(k_1>k_2)$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.

또한 점 p에서 단위접벡터(unit tangent vector) $w=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)$ 방향으로의 법곡률(normal curvature)을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B] [2018]

6. 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위의 기약다항식(irreducible polynomial) $f(x)$의 $\mathbb{Q}$ 위의 분해체(splitting field) K에 대하여 갈루아 군(Galois group) $G(K/\mathbb{Q})$가 아벨군(abelian group)이다.

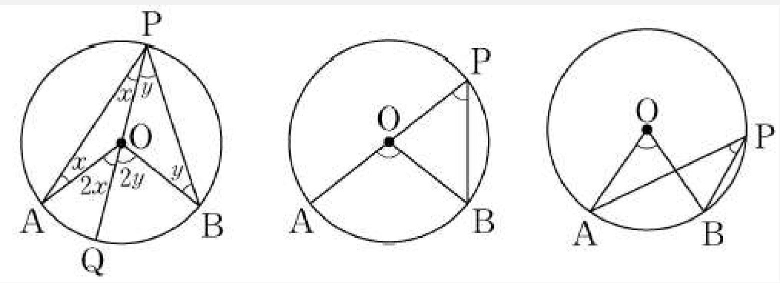
이때 $G(K/\mathbb{Q})$의 위수(order)가 $f(x)$의 차수 $\deg(f(x))$와 같음을 보이시오. 또 $\deg(f(x))=2018$일 때 K의 모든 부분체(subfield)의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (참고: $2018=2\times 1009$이고 1009는 소수이다.) [5점, 서술형B] [2018]

7. 함수항 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\tan^{-1}\frac{x}{n}$가 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$에서 점별수렴(pointwise convergence)함을 보이시오. 또 함수 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\tan^{-1}\frac{x}{n}$는 균등연속(고른연속, 평등연속, uniformly continuous)임을 보이시오. (단, $\tan^{-1}:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$는 탄젠트함수의 역함수이다.) [5점, 서술형B] [2018]

8. 다음 〈자료 1〉은 원주각의 성질을 지도하는 수업 상황의 일부이고, 〈자료 2〉는 원주각의 성질을 활용하는 수업 계획서의 일부이다. 〈자료 1〉과 〈자료 2〉에 나타난 수업 양상과 이 수업에서 강조되는 수학 교과 역량에 대하여 〈작성 방법〉에 따라 논술하시오. [10점, 논술형B] [2018]

〈자료 1〉

교　사: [그림 1]에서 원주각과 중심각 사이의 관계를 살펴보았어요. 일반적으로 원주각과 중심각 사이에는 어떤 관계가 성립하는지 발표해 볼까요?



[그림 1]　　[그림 2]　　[그림 3]

학생 A: 한 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$이라는 관계를 찾을 수 있습니다.

교　사: 자신의 생각을 잘 말해 주었어요. 다른 의견이 있나요?

학생 B: 선생님, 한 호에서 여러 개의 원주각을 만들 수 있습니다. [그림 2], [그림 3]의 경우는 [그림 1]과 다르므로 이 관계가 성립하지 않을 것 같습니다. [그림 1]와 같이 중심 O가 $\angle$APB의 안쪽에 있을 때에만 원주각의 크기가 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$입니다.

학생 A: [그림 2], [그림 3]에서도 $\angle$APB는 호 AB에 대한 원주각이므로, 점 P의 위치에 관계없이 성립할 것 같아요.

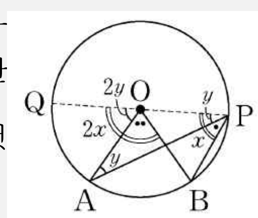
학생 B: 원주각은 맞지만, 점 P의 위치가 변하기 때문에 각의 크기도 변할 것입니다. 따라서 성립하지 않을 것 같아요.

교　사: 두 학생의 의견이 서로 다르네요. 왜 그렇게 생각했는지 누가 말해 볼까요?

학생 A: 제가 말해 볼게요. [그림 3]의 경우, [그림 4]와 같이 지름 $\overline{\mathrm{PQ}}$를 그으면 삼각형의 두 내각과 이웃하지 않는 한 외각의 크기에 대한 성질을 이용하여 [그림 1]처럼 원주각과 중심각 사이의 관계를 설명할 수 있어요.

학생 C: 맞아요. [그림 2]의 경우에도 비슷한 방법으로 설명할 수 있어요.

학생 B: 그러네요. 점 P의 위치에 관계없이 모든 경우에 성립한다는 것을 알게 되었어요. 이것을 간단히 $\angle\mathrm{APB}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{AOB}$라고 표현해도 좋을 것 같아요.



[그림 4]

…(중략)…

교　사: 지금까지 여러분들의 토론을 종합하면, '한 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같고, 그 크기는 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$이다'라고 합의할 수 있습니다.

〈자료 2〉

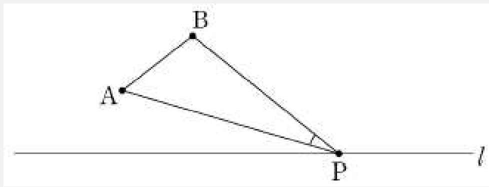
- 도입: 교사는 선수 학습 내용을 확인하고, 실세계 현상을 기초로 하는 비수학적 문제 상황을 제시한다. 학생은 제시된 문제가 현실과 결부되어 있음을 이해하고 탐색한다.

[문제] 그림과 같이 도로 한쪽 편에 스크린이 설치되어 있다. 스크린이 있는 반대편에서 도로를 따라 이동하면서 스크린을 촬영하려고 한다. 스크린 좌우 양 끝점과 카메라가 이루는 각의 크기가 최대가 되는 카메라의 위치를 결정하시오.

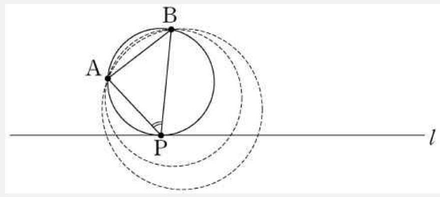
- 전개

① 1단계: 주어진 실세계 문제에서 수학적 측면을 알아내고 규칙성을 발견하도록 한다.

② 2단계: 현실과 결부된 문제 상황을 다음과 같이 변환한다. 선분 AB와 직선 l이 주어져 있다. 점 P가 직선 l 위를 움직일 때, $\angle$APB의 크기가 최대가 되는 점 P의 위치는?



③ 3단계: 문제를 다음과 같이 수학적으로 해결한다. 두 점 A, B를 지나는 다양한 크기의 원을 작도하고, 호 AB에 대한 원주각의 크기를 이용하여 문제를 해결한다.



…(하략)…

〈작성 방법〉

- 서론, 본론, 결론의 형식을 갖출 것.
- 서론 부분에는 사회적 구성주의와 급진적 구성주의의 차이점, 현실주의적 수학교육에서 수학화의 의미를 각각 제시할 것.
- 본론 부분에는 다음을 포함할 것.

첫째, 〈자료 1〉의 수업 상황을 사회적 구성주의 이론의 '객관화된 수학 지식을 얻기까지 거쳐야 할 과정'의 관점에서 분석한 내용.

둘째, 〈자료 2〉의 수업 계획서를 현실주의적 수학교육 이론의 '수학화 과정'의 관점에서 분석한 내용.

- 결론 부분에는 〈자료 1〉에서 의사소통 역량, 〈자료 2〉에서 문제 해결 역량이 각각 강조되는 이유를 2015 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 '교수·학습 방법' 중 문제해결 능력, 의사소통 능력 함양을 위해 제시한 사항에 근거하여 각각 설명할 것.

기입형A [1~8]

1. 김 교사는 반 힐레(P. van Hiele)의 수학 학습 수준 상승을 위한 교수·학습 5단계를 적용하여 고등학교 조합 단원의 수업을 계획하였다. 다음은 김 교사가 계획한 수업 과정을 순서 없이 나열한 것이다.

단계	교수·학습 활동
(가)	학생이 학습할 조합에 친숙해질 수 있도록 서로 다른 4개의 학용품 중에서 2개를 선택하는 경우의 수를 구해보게 한다. 학생과 대화를 통해서 학습 주제를 소개한다.
(나)	학생은 예전의 경험과 교사의 도움말을 토대로 조합의 구조에 대한 의견을 표현해 봄으로써 그 구조를 명확히 하고, 관계 체계를 형성한다.
(다)	교사는 수형도 등 다양한 방법으로 구할 수 있는 간단한 조합 문제를 제시하여 학생이 해결해 보도록 안내한다.
(라)	교사는 여러 교과서에 제시된 다양한 탐색적 과제로 구성한 활동지를 제공하여, 학생이 과제를 해결하는 동안 조합의 구조에 정통하게 한다. 또한 실생활 문제를 해결해 봄으로써 다양한 상황에서 조합의 필요성과 유용성을 인식하게 한다.
(마)	학생은 조합과 이전 시간에 학습한 순열의 관련성을 파악하고, 전체적으로 조망하면서 사고 수준의 비약에 이른다.

교수·학습 5단계에 따라 (가)~(마)를 순서대로 배열하고, (마) 단계의 명칭을 쓰시오. [2점, 기입형A] [2019]

2. $\mathbb{Z}_7[x]$는 유한체(finite field) $\mathbb{Z}_7$ 위의 다항식환(polynomial ring)이다. $\mathbb{Z}_7[x]$의 주 아이디얼(단항이데알, principal ideal) $I=\langle x^2-x\rangle$에 대하여 잉여환(상환, factor ring, quotient ring) $\mathbb{Z}_7[x]/I$의 단원(unit, unit element)의 개수를 구하시오. [2점, 기입형A] [2019]

3. 다음과 같이 정의된 함수 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$가 $(0,0)$에서 연속이 되도록 하는 자연수 n의 최솟값을 구하시오. [2점, 기입형A] [2019]

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^n y^n}{x^{30}+y^{30}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

4. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 영역 D_n이

$$D_n=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-y)^2+x^2\le n\}$$

일 때, 다음 극한값을 구하시오. [2점, 기입형A] [2019]

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} e^{-\lfloor (x-y)^2+x^2\rfloor}\,dxdy$$

(단, $\lfloor x\rfloor$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

5. 복소평면에서 곡선 C가

$$C: z(t)=\begin{cases}e^{i\pi t}, & 0\le t\le 1\\ t-2, & 1<t\le 3\end{cases}$$

일 때, 복소적분

$$\int_C (x^2-y^2-y)+i(2xy-x)\,dz$$

의 값을 구하시오. (단, x, y는 실수이고 $z=x+iy$는 복소수이다.) [2점, 기입형A] [2019]

6. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡선 C가

$$C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=x^3-ax+a,\ z=x-1\}$$

일 때, 이 곡선의 비틀림률(열률, 꼬임률, torsion) τ를 구하시오. 또한 점 $(1,1,0)$에서 곡선 C의 곡률(curvature)이 3이 되도록 하는 a의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [2점, 기입형A] [2019]

7. 두 개의 부품 ㉮와 ㉯로 구성된 시스템이 있다. 이 시스템의 수명은 작동을 시작한 후 두 부품 중 하나가 고장 날 때까지 걸리는 시간이다. 부품 ㉮가 고장 날 때까지 걸린 시간 X와 부품 ㉯가 고장 날 때까지 걸린 시간 Y는 서로 독립이고, 두 확률변수 X, Y의 확률밀도함수는 각각

$$f_X(x)=\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}\ \ (x>0)$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{10}e^{-\frac{y}{10}}\ \ (y>0)$$

이다. 이 시스템의 수명 Z에 대하여 확률 $\mathrm{P}(Z>10)$을 구하시오. [2점, 기입형A] [2019]

8. 특정 프로젝트에 지원한 5명의 위원 A, B, C, D, E가 있다. 다음은 이 5명의 위원이 작업할 수 있는 요일을 각각 ○ 기호로 표시한 것이다. 이 프로젝트를 수행하기 위하여 5명의 위원 중 4명을 선발하여 서로 다른 요일에 배치하는 경우의 수를 구하시오. (단, 선발된 위원은 일주일 중 하루만 작업한다.) [2점, 기입형A] [2019]

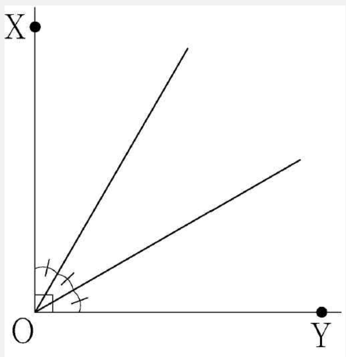
위원 \ 요일	월	화	수	목	금	토	일
A	○	○	○	○			
B	○		○				
C	○	○		○			
D					○	○	
E					○		○

서술형A [9 ~ 14]

9. 다음은 어느 예비교사가 수학 교육론 강의 시간에 분석법을 이용하여 직각의 삼등분선의 작도 문제를 해결한 과정이다.

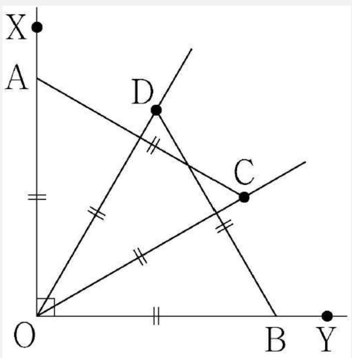
[문제] 직각 XOY의 삼등분선을 작도하시오.

[해결 과정] 우선 직각 XOY의 삼등분선이 [그림 1]과 같이 작도되었다고 가정한다.



[그림 1]

삼등분선을 작도하기 위하여 필요한 도형은 직각을 삼등분하는 두 반직선 위의 두 점임을 알 수 있다. 직각을 삼등분하면 한 각의 크기가 30°이므로, [그림 2]와 같이 $\triangle AOC$와 $\triangle DOB$가 정삼각형이 되도록 하는 두 점 C, D를 작도하면 된다.



[그림 2]

이를 토대로 직각 XOY의 삼등분선을 작도하는 절차를 정리하면 다음과 같다.

① 점 O를 중심으로 하는 원을 작도하고, 이 원이 두 반직선 OX, OY와 만나는 두 점을 각각 A, B라 한다.

② 점 A를 중심으로 하여①에서 작도한 원과 반지름의 길이가 같은 원을 작도하고, ①에서 작도한 원과 만나는 점을 C라 한다.

③ 점 B를 중심으로 하여 ①에서 작도한 원과 반지름의 길이가 같은 원을 작도하고, ①에서 작도한 원과 만나는 점을 D라 한다.

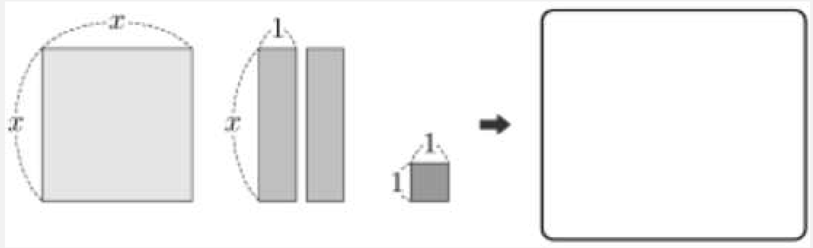
④ 점 O와 점 C, 점 O와 점 D를 각각 이으면 직각의 삼등분선이 된다.

위 과정에서 수학적 발견술인 분석법이 어떻게 적용되었는지 그 근거와 함께 서술하시오. 그리고 작도 문제 해결 교육에서 분석법을 이용하는 의의를 스켐프(R. Skemp)가 제시한 도구적 이해와 관계적 이해의 관점에서 각각 설명하시오. [4점, 서술형A] [2019]

10. 다음은 김 교사가 박 교사의 수업을 참관한 후 작성한 참관일지의 일부이다.

박 교사는 도입 단계에서 다음과 같은 탐구 활동을 제시하여 학생의 학습 동기를 유발하고자 하였다.

[그림 1]과 같이 한 변의 길이가 x인 정사각형 모양 1개, 가로와 세로의 길이가 각각 1과 x인 직사각형 모양 2개, 한 변의 길이가 1인 정사각형 모양 1개가 있다. 물음에 답하시오.



[그림 1] [그림 2]

(1) [그림 1]의 사각형 4개를 모두 이용하여 만든 정사각형 모양을 [그림 2]의 빈칸에 그려 넣고, 그린 정사각형의 넓이를 (한 변의 길이)^{2}으로 나타내시오.

(2) [그림 1]의 사각형 4개의 넓이를 각각 구하여 그 합을 식으로 나타내시오.

(3) 위 (1)과 (2)의 결과를 등식으로 나타내시오.

학생은 탐구 활동을 통하여 $x^2+2x+1=(x+1)^2$이 성립함을 인식하였다.

박 교사는 학생이 구한 식을 이용하여 인수분해의 뜻을 알려주고, 이것이 이전 시간에 학습한 다항식의 곱셈 공식과 어떤 관계가 있는지 찾아보도록 안내하였다.

학생은 다항식의 곱셈 공식을 이용하여 다음과 같은 인수분해 공식을 이끌어 내었다.

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

…(하략)…

피아제(J. Piaget)는 활동에 대한 일반적 조정으로부터의 추상화를 무엇이라고 하였는지 쓰시오. 그리고 이 추상화의 예를 위 참관일지의 상황에서 1가지 찾아, 이 추상화의 과정을 반사와 반성으로 구분하여 그 근거와 함께 설명하시오. [4점, 서술형A] [2019]

11. 함수 $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가

$$h(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+t^2}dt, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

일 때, 극한값 $\displaystyle\lim_{x\to 0}h(x)$를 풀이 과정과 함께 쓰시오.

또한 자연수 n에 대하여 함수 $h_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가

$$h_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{nx^2}{n^2x^4+k^2}$$

일 때, $\mathbb{R}$에서 함수열 $\{h_n\}$이 h로 평등수렴(균등수렴, 고른수렴, uniform convergence)하는지를 판별하고 그 이유를 쓰시오. [4점, 서술형A] [2019]

12. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 위의 위상

$$\mathfrak{I}=\{U\subseteq\mathbb{R}\mid \mathbb{R}-U\text{는 유한집합}\}\cup\{\varnothing\}$$

에 대하여, $(\mathbb{R},\ \mathfrak{I})$의 두 부분공간(subspace) $A=[0,1]\cup[2,3)$과 $B=\{3,4,5\}$의 위상을 각각 $\mathfrak{I}_A$, $\mathfrak{I}_B$라 하자. 집합 $X=A\cup B$에서 $\mathfrak{I}_A\cup\mathfrak{I}_B$를 기저(base, basis)로 하는 위상을 $\mathfrak{I}'$이라 할 때, 위상공간 $(X,\ \mathfrak{I}')$에서 집합 $C=\left\{3-\dfrac{1}{n}\ \middle|\ n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{3\}$의 경계(boundary) $\mathrm{b}(C)$를 구하시오. 또한 $(X,\ \mathfrak{I}')$이 컴팩트 공간(compact space)임을 보이시오. (단, $[0,1]=\{x\in\mathbb{R}\mid 0\le x\le 1\}$, $[2,3)=\{x\in\mathbb{R}\mid 2\le x<3\}$이고 $\mathbb{N}$은 자연수 전체의 집합이다.) [4점, 서술형A] [2019]

13. 3차원 유클리드 내적 공간 $\mathbb{R}^3$의 세 벡터 $\boldsymbol{v_1}=(1,0,0)$, $\boldsymbol{v_2}=(1,1,1)$, $\boldsymbol{v_3}=(0,-1,1)$에 대하여 두 벡터 $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$로 생성된 부분공간을 W_{12}라 하고 두 벡터 $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_3}$으로 생성된 부분공간을 W_{13}이라 하자. $\mathbb{R}^3$의 벡터 $\boldsymbol{u}$에 대하여 부분공간 W위로의 $\boldsymbol{u}$의 정사영(orthogonal projection)을 $\mathrm{proj}_W\boldsymbol{u}$라 하고, 실수 k에 대하여 선형변환 $T_k:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$을

$$T_k(\boldsymbol{u})=\mathrm{proj}_{W_{12}}\boldsymbol{u}+\mathrm{proj}_{W_{13}}\boldsymbol{u}+k\boldsymbol{u}$$

로 정의하자. T_k의 역변환(inverse transformation)이 존재하지 않도록 하는 모든 k의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 T_k의 랭크(계수, 계급수, 유효차수, rank)가 2인 k의 값을 구하시오. (단, 두 벡터 $\boldsymbol{u_1}=(a_1,a_2,a_3)$, $\boldsymbol{u_2}=(b_1,b_2,b_3)$의 유클리드 내적은 $\boldsymbol{u_1}\cdot\boldsymbol{u_2}=\displaystyle\sum_{i=1}^{3}a_ib_i$이다.) [4점, 서술형A] [2019]

14. G는 위수(order)가 150인 군(group)이다. 위수가 6인 G의 부분군(subgroup)이 유일하게 존재할 때, 위수가 30인 G의 부분군이 존재함을 보이시오. [4점, 서술형A] [2019]

서 · 논술형B [1~8]

1. 다음은 수학 수업에서 발생할 수 있는 교수 · 학습 현상을 분석하기 위하여 수집한 수학 교사와의 면담 내용의 일부이다.

<김 교사의 사례>

"학생들이 ㉠수 개념을 크기와 관련짓는 것은 자연수를 학습하는 상황에서는 유용하지만, 음수를 학습하게 될 때는 오히려 그것이 수 개념을 확장하는 데 방해가 되는 것 같아요."

<박 교사의 사례>

"저는 수학 시간에 열심히 가르치는데, 학생들이 잘 이해하지 못하는 경우가 종종 있어요. 그래서 ㉡학생들에게 이해할 시간을 주지 않고 문제 해결을 위한 명백한 실마리를 성급하게 제공하거나 유도 질문을 통해 답을 가르쳐 주는 경우가 많습니다."

브루소(G. Brousseau)의 수학 교수학적 상황론에서 ㉠을 설명할 수 있는 개념을 쓰고, 이를 극복하기 위하여 역사 발생적 측면에서 음수의 정의를 어떻게 도입할 수 있는지를 서술하시오. 그리고 ㉡과 같은 극단적인 교수 현상을 설명할 수 있는 개념을 쓰고, 이 현상이 일어나는 이유를 설명하시오. [4점, 서술형B] [2019]

2. 어느 지역 고등학생들의 몸무게(kg)는 정규분포 $N(\mu,9^2)$을 따른다고 한다. 이 지역의 고등학생 중에서 임의로 추출한 36명의 몸무게에 대한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자.

$$\mathrm{P}(|\overline{X}-\mu|>c)=0.1$$

을 만족시키는 상수 c의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.

또한 36명의 표본으로부터 관측된 표본평균의 값이 60일 때, 모평균 μ에 대한 90% 신뢰구간(confidence interval)을 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z에 대하여 $\mathrm{P}(Z<1.64)=0.95$이고, 모평균에 대한 신뢰구간은 양면신뢰구간(two-sided confidence interval)을 의미한다.) [4점, 서술형B] [2019]

3. 자연수 m에 대하여 집합 T_m을

$$T_m=\{a\in\mathbb{N}\mid a^{\varphi(8m)}\equiv 1 \pmod{8m},\ 1\le a\le 8m\}$$

으로 정의할 때, 집합 T_m의 원소의 개수가 $4\varphi(m)$이 되도록 하는 100이하의 자연수 m의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $\mathbb{N}$은 자연수 전체의 집합이고, $\varphi(n)$ $(n\in\mathbb{N})$은 n 이하의 자연수 중에서 n과 서로소인 수의 개수로 정의되는 오일러 $\varphi-$함수이다.) [4점, 서술형B] [2019]

4. 실숫값을 갖는 두 함수

$$u(x,y),\ v(x,y)=e^{-y}(x\cos x-y\sin x)$$

와 복소수 $z=x+iy$ (x, y는 실수)에 대하여, $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$가 정함수(entire function)이다.

곡선 C가 $x=\cos t$, $y=\sin t$ $(0\le t\le 2\pi)$로 정의된 원일 때,

$$\int_C -yu(x,y)dx+xu(x,y)dy=6\pi$$

이다. $f(0)$의 값과 함수 $u(x,y)$를 각각 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B] [2019]

※ 다음 정리는 필요하면 증명 없이 사용할 수 있다.

<정리>

복소평면의 열린 집합 D에서 해석적인 함수 $f:D\to\mathbb{C}$에 대하여, $r>0$이고 $\{z\in\mathbb{C}\mid |z-z_0|\le r\}\subset D$이면

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{it})\,dt$$

이다.

5. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡면 $M: z=\frac{1}{4}(x^4+y^4)$과 평면 $H: x+y-z=d$가 한 점 p에서 접할 때, 상수 d의 값을 구하시오. 또한 접점 p에서 곡면 M의 가우스곡률(Gaussian curvature) K의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B] [2019]

6. 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위에서 대수적인 두 실수 a, b에 대하여 단순 확대체(simple extension) $K=\mathbb{Q}(a+bi)$가 $\mathbb{Q}$ 위의 갈루아 확대체(정규 확대체, Galois extension field, normal extension field)이고 갈루아군(Galois group) $G(K/\mathbb{Q})$가 아벨군(abelian group)이라 하자.

$a^2+b^2 \in \mathbb{Q}$이고 $b \neq 0$일 때, $G(K/\mathbb{Q})$의 위수(order)는 짝수임을 보이시오. 또한 $G(K/\mathbb{Q})$의 위수를 $2m$이라 할 때, 자연수 m의 각각의 양의 약수 d에 대하여 $\mathbb{Q}[x]$에 속하고 모든 근이 실수이며 차수가 d인, $\mathbb{Q}$ 위의 기약다항식(irreducible polynomial)이 존재함을 보이시오. (단, $i=\sqrt{-1}$이고 $\mathbb{Q}[x]$는 $\mathbb{Q}$ 위의 다항식환(polynomial ring)이다.) [5점, 서술형B] [2019]

7. 실수열 $\{a_n\}$을

$$a_1=1,\ a_{n+1}=(2a_n^2+1)^{\frac{1}{5}}\ (n \geq 1)$$

로 정의하자. 모든 자연수 n에 대하여 $1 \leq a_n \leq 2$임을 보이고, 수열 $\{a_n\}$이 수렴함을 보이시오. [5점, 서술형B] [2019]

8. <자료 1>은 절대부등식을 증명하는 수업 과정에서 학생이 새로운 추측을 제기하는 상황이고, <자료 2>는 김 교사가 <자료 1>의 수업 과정에서 제기된 추측의 증명을 지도하기 위해 작성한 교수·학습 계획서의 일부이다. <자료 2>를 토대로 <자료 1>에서 추측한 명제의 증명을 지도하기 위한 교수·학습 방안을 <작성 방법>에 따라 논술하시오. [10점, 논술형B] [2019]

<자료 1>

김 교사: 지금까지 두 실수 x, y에 대하여 절대부등식

$$x^2+y^2 \geq xy$$

가 성립함을 증명해 보았습니다.

학생 1: 선생님, 오늘 배운 절대부등식을 보면 세 실수 x, y, z에 대하여 부등식

$$x^2+y^2+z^2 \geq xyz$$

도 성립할 것 같습니다.

학생 2: 저는 부등식

$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$$

가 성립할 것 같습니다.

김 교사: 모두 좋은 추측입니다. 두 추측은 모두 참일까요? 여러분은 어떻게 생각합니까?

학생들: (서로 다른 반응을 보이며 호기심을 가진다.)

김 교사: 그럼 다음 시간에 확인해 봅시다.

<자료 2>

(가) 증명 지도 계획

- 수학에 대한 다음 2가지 관점을 활용한다.

관점	수학관
A	수학은 준경험적이고 오류 가능하며 인간의 창조적 활동의 산물이다. 수학적 지식은 절대적 진리도 아니고 절대적 확실성도 갖지 않으며 끊임없는 개선의 여지가 있다.
B	수학의 형성 과정에서 사회의 역할을 강조한다. 수학적 지식은 절대적인 진리로서 객관적인 것이 아니라 사회적으로 객관적인 것이다.

- 명제는 다음과 같이 증명한다.

[명제]

세 실수 x, y, z에 대하여 부등식

$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$$

가 성립한다.

[증명]

세 실수 x, y, z에 대하여

$$x^2+y^2 \geq 2xy$$
$$y^2+z^2 \geq 2yz$$
$$z^2+x^2 \geq 2zx$$

이므로, $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$이다.

…(중략)…

(나) 평가 계획

- 교수·학습 과정에서 학생의 의사소통 능력과 태도 및 실천 능력을 평가한다.
- 관찰 평가 도구

관찰 항목		이름			
		S1	S2	…	S21
의사소통	㉠				
	다양한 관점을 존중하며 다른 사람의 아이디어를 이해한다.				

- 자기 평가 도구

점검 항목		그렇다	보통이다	그렇지 않다
태도 및 실천	㉡			
	다른 사람의 의견을 존중하며 협력하였다.			

<작성 방법>

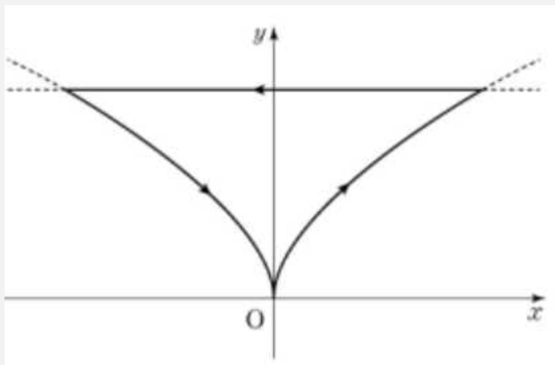
- 서론, 본론, 결론의 형식을 갖출 것.
- 서론 부분에는 <자료 1>에서 학생이 사용한 추론 유형과 이 추론에 근거하여 보완해야 할 점을 제시할 것.
- 본론 부분에는 다음 요소를 포함할 것.
  - <자료 2>의 관점 A에서 본 증명의 의미와 그 의미를 근거로 한 교사의 활동 1가지
  - <자료 2>의 관점 B에서 본 증명의 의미와 그 의미를 근거로 한 교사의 활동 1가지
  - 2015 개정 수학과 교육과정의 '교수·학습 방법'에서 의사소통 능력, 태도 및 실천 능력 함양을 위해 강조한 사항을 근거로 하여 <자료 2>의 ㉠과 ㉡에 들어가는 항목 각각 1가지

기입형A [1 ~ 4]

1. 다음은 함수와 관련한 수학사 자료를 순서 없이 제시한 것이다. (가)~(마)를 함수 개념이 발생한 순서대로 배열하시오. [2점, 기입형A] [2020]

(가)	고대 바빌로니아나 그리스에서 천문학을 연구했던 사람들은 태양, 달, 행성 등의 변화를 관찰하여 수표를 작성하였다. 이 시기 사람들은 수표를 사용하여 천체 운동을 서술하고 주기성을 발견하였다. 삼각함수의 기원을 이 시기에서 찾을 수 있다.
(나)	비에트(F. Viète)가 문자를 사용하는 방식을 발전시키고 데카르트(R. Descartes)가 해석기하학을 창안한 것에 기초하여 함수를 대수적으로 연구하게 되었다. $f(x)$라는 기호를 처음으로 사용한 오일러(L. Euler)는 변수와 상수가 결합된 방식에 따라 함수를 분류했다. 이 시기에 이르러 독립변수와 종속변수의 구분이 명확해졌다.
(다)	해석학을 엄밀하게 만들기 위해 함수의 연속성과 미분가능성에 대한 연구가 이루어졌다. 데데킨트(R. Dedekind), 칸토어(G. Cantor) 등이 실수의 구조를 엄밀하게 하여 해석학을 발전시켰다. 부르바키(Bourbaki) 학파는 집합론에 기초하여 ‘순서쌍의 집합의 부분집합’이 어떤 특정한 조건을 만족할 때 그 부분집합을 함수로 정의하였다.
(라)	이 당시 학자들은 주로 운동을 나타내는 곡선을 중심으로 곡선의 접선, 곡선 아래의 넓이, 곡선의 길이, 곡선을 따라 움직이는 점의 속도 등을 연구하였다, 갈릴레이(G. Galilei)는 등가속도 운동을 하는 물체가 움직인 거리와 시간의 관계를 연구하였는데, 과학에서 이루어진 운동에 대한 연구가 함수를 개념화하는 데 기여하였다.
(마)	푸리에(Fourier) 급수나 디리클레(Dirichlet) 함수에 대한 연구 결과로 인하여 함수 개념을 새롭게 정의할 필요성이 생겨났다. 일가성과 임의성을 가지는 대응으로 함수를 정의함으로써 한 변수의 각 값에 다른 변수의 유일한 값이 대응되느냐 되지 않느냐라는 논리적 조건에만 관심을 갖게 되었다.

2. 좌표평면에서 곡선 $y^3 = x^2$과 직선 $y=1$로 둘러싸인 부분을 D라 하고 영역 D의 경계(boundary)를 시계반대방향으로 한 바퀴 도는 곡선을 C라 하자. 영역 D의 넓이와 선적분 $\int_C -y\,dx + x\,dy$의 값을 각각 구하시오. [2점, 기입형A] [2020]



3. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡선

$$\gamma(t) = (2t - \cos t,\, t + \sin t,\, 2t+1)\ \ (0 < t < 2\pi)$$

위의 점 $\gamma(t_0)$에서의 접벡터(tangent vector)가 벡터 $(6, 2, 4)$와 평행하다. t_0의 값과 $t = t_0$일 때 곡선 γ의 비틀림률(열률, 꼬임률, torsion)을 각각 구하시오. [2점, 기입형A] [2020]

4. 대칭군(symmetric group) S_5와 덧셈 순환군(additive cyclic group) $\mathbb{Z}_{12}$의 직접곱(직적, direct product) $S_5 \times \mathbb{Z}_{12}$에 대하여, S_5의 원소 $\sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 2\,4\,5\,1\,3 \end{pmatrix}$의 위수(order)와 $S_5 \times \mathbb{Z}_{12}$의 원소 $(\sigma, 9)$의 위수를 각각 구하시오. [2점, 기입형A] [2020]

서술형A [5 ~ 12]

5. 두빈스키(E. Dubinsky)는 스키마 구성을 설명하는 APOS 이론을 제안하였다. A는 행동(Action), P는 과정(Process), O는 대상(Object), S는 스키마(Schema)를 의미한다. 다음은 수학교육론 강의 시간에 교수가 APOS 이론을 설명하기 위해 제시한 두 고등학생의 학습 일지이다.

> 민수의 학습 일지
>
> 나는 $(5x^3 + x^2 - 4x - 2) \div (x-2)$와 같은 형태의 나눗셈 문제를 조립제법으로 풀 수 있다. 그런데 선생님께서 오늘 수업 시간에 조립제법에서 사용하는 여러 값을 차례로 입력하면 나눗셈 결과가 나오는 컴퓨터 프로그램을 보여주시면서, 프로그램 안에 포함된 계산 과정을 설명해보라고 하셨다. 이 컴퓨터 프로그램을 잘 모르는 내 친구는 잘 설명했는데, 이 프로그램을 잘 다루는 나는 설명하지 못해서 속상했다.
>
> 재희의 학습 일지
>
> 나는 오늘 수업 시간에 함수와 관련된 어려움을 겪었다. “두 함수 f, g의 합 $f+g$를 두 수의 합 2+1처럼 생각하면 된다.” 라고 하신 선생님 말씀이 잘 이해되지 않았다. 내가 아는 함수는 x의 값을 넣으면 y의 값이 나오는 것이었는데…. “함수 f나 g를 2나 1과 같은 수처럼 다룰 수 있을까?” 라는 의문이 들었다.

민수의 학습 일지에 서술된 상황을 ‘행동’ 및 ‘과정’과 관련지어 설명하고,

재희의 학습 일지에 서술된 상황을 ‘과정’ 및 ‘대상’과 관련지어 설명하시오. [4점, 서술형A] [2020]

6. 다음은 윤 교사가 고등학교 수학 '도형의 방정식' 단원에서 사용한 활동 과제 중 3가지를 나타낸 것이다.

(1) 다음 [그림 1], [그림 2], [그림 3]은 축구공이 골라인을 나타내는 직선 l을 지나가는 상황을 차례로 찍은 사진이다. [그림 1], [그림 2], [그림 3]에서 각각 직선 l을 x축으로 하여 좌표축을 설정하고 축구공을 나타내는 원을 식으로 표현하시오.

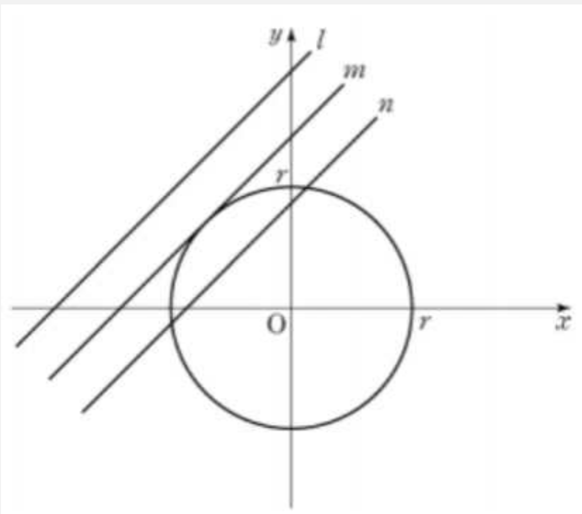
※준비물: 삼각자

[그림 1]

[그림 2]

[그림 3]

(2) 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 알아보시오.



(3) 원 $x^2+y^2=r^2$과 직선 $y=px+q$의 위치 관계를 이차방정식의 판별식을 이용하여 설명하시오.

트레퍼스(A. Treffers)가 제시한 수평적 수학화와 수직적 수학와의 의미를 설명하고, 윤 교사의 활동 과제를 수평적 수학화와 수직적 수학화의 관점에서 분석하여 서술하시오. [4점, 서술형A] [2020]

7. 합동방정식 $x \equiv 25^{99} \pmod{19 \cdot 13}$과 연립합동방정식 $\begin{cases} x \equiv a \pmod{19} \\ x \equiv b \pmod{13} \end{cases}$이 동치가 되도록 하는 정수 a, b의 값을 각각 구하시오. 또한 합동방정식의 정수해 x의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $0 \le a < 19$, $0 \le b < 13$, $0 \le x < 247$) [2점, 기입형A] [2020]

8. 점화식

$$a_0=1,\ a_n+a_{n-1}=(-1)^n\ (n \ge 1)$$

을 만족하는 수열 $\{a_n\}$의 생성함수(generating function) $g(x)$를 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 함수

$$f(x)=\begin{cases} g(x), & -\dfrac{1}{3}<x<1 \\ 0\ , & \text{그 외의 경우} \end{cases}$$

가 연속확률변수 X의 확률밀도함수일 때, 확률변수 X의 기댓값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형A] [2020]

9. 정의역이 $\{x \in \mathbb{R} \mid -1<x<1\}$인 함수 $f(x)=\dfrac{e^x-1}{1-x}$의 $x=0$에서의 3차 테일러 다항식을 구하시오. 또한 복소평면에서 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\dfrac{1}{2}$인 원을 시계반대방향으로 한 바퀴 도는 곡선 C에 대하여 선적분 $\displaystyle\int_C \frac{e^z-1}{z^4(1-z)}dz$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형A] [2020]

10. 실수체 $\mathbb{R}$의 원소 $\alpha=\sqrt{2-\sqrt{2}}$에 대하여 환준동형사상(ring homomorphism) $\varphi_\alpha : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{R}$를 $\varphi_\alpha(f(x))=f(\alpha)$로 정의하자. 사상 φ_α의 핵(kernel)을 K라 할 때, $K=\langle p(x)\rangle$를 만족하는 최고차항의 계수가 1인 기약다항식(irreducible polynomial) $p(x)$를 풀이 과정과 함께 쓰시오.
또한 잉여환(상환, factor ring, quotient ring) $\mathbb{Q}[x]/K$의 원소 $(x-2)+K$의 곱셈에 대한 역원을 $g(x)+K$라 할 때, $\deg g(x) < \deg p(x)$인 다항식 $g(x)$를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $\mathbb{Q}[x]$는 유리수체 $\mathbb{Q}$위의 다항식환이고, $\deg h(x)$는 다항식 $h(x)$의 차수이다.) [4점, 서술형A] [2020]

11. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$의 보통 위상을 $\mathfrak{I}_u$라 하고, 함수 $f_i : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}, \mathfrak{I}_u)$ $(i=1,2)$를

$$f_1(x)=\lfloor x \rfloor,\ f_2(x)=\lfloor -x \rfloor$$

로 정의하자. 집합

$$\{f_1^{-1}(U) \mid U \in \mathfrak{I}_u\} \cup \{f_2^{-1}(U) \mid U \in \mathfrak{I}_u\}$$

을 부분기저(subbase, subbasis)로 하여 생성된 $\mathbb{R}$의 위상을 $\mathfrak{I}$라 정의하자. 위상공간 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$에서 $\sqrt{2}$를 포함하는 성분(연결성분, component, connected component)을 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$에서 집합 $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$의 내부(interior)와 폐포(closure)를 구하시오. (단, $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right] = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \dfrac{1}{2} \le x \le 2\right\}$이고, $\lfloor x \rfloor$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.) [4점, 서술형A] [2020]

12. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 f에 대하여

$$S=\{x \mid f(x)=0,\ -1 \le x \le 1\}$$

라 하자. 다음 명제 P의 대우명제를 쓰고, P를 증명하시오. [4점, 서술형A] [2020]

P : 모든 $x \in \mathbb{R}$에 대하여 $f(x) \ne 0$이거나 $f'(x) \ne 0$이면 S는 유한집합이다.

기입형B [1~2]

1. 다음은 라카토스(I. Lakatos)의 준경험주의 수리철학에 대한 두 교사의 대화이다.

김 교사:	라카토스에 따르면 수학적 지식은 반증되기 전까지 잠정적으로 참이며, 증명은 원래의 추측을 부분 추측으로 분해하는 사고 실험이에요.
김 교사:	수학적 추측이 증명되었을 때 그 추측을 반박하는 전면적 반례가 등장하면 어떻게 하나요?
김 교사:	대응하는 방식이 여러 가지가 있는데요. 한 방식은 ㉠이미 증명된 추측은 그대로 두고 오히려 반례가 잘못되었다고 보아 원래의 추측을 존속시키는 거에요. 이 방식은 반례와 관련된 개념을 추측이 성립하는 영역 밖으로 몰아내는 것에 주로 관심을 두어 개념을 재정의하지요.
김 교사:	또 다른 방식은 어떤 것이 있나요?
이 교사:	㉡전면적 반례가 출현하게 된 원인이 되는 부분 추측을 찾아 원래의 추측에 합체시키고 증명과 추측을 개선하는 방식이 있어요. 이 방식에서 전면적 반례는 동시에 국소적 반례도 되지요. 이 방식을 통해 발견과 정당화의 논리가 분리되지 않고 하나로 통합될 수 있어요.

전면적 반례에 의해 추측이 비판되었을 때 대응하는 방식 ㉠과 ㉡을 라카토스가 제시한 용어로 순서대로 쓰시오. [2점, 기입형B] [2020]

2. 좌표평면 $\mathbb{R}^2$의 거리함수 $d((x,y),(a,b))=|x-a|+|y-b|$와 원점 O에 대하여, $\mathbb{R}^2$에서 거리함수 e를 다음과 같이 정의하자.

$$e(\mathrm{P},\mathrm{Q})=\begin{cases} d(\mathrm{O},\mathrm{P})+d(\mathrm{O},\mathrm{Q}), & \mathrm{P}\neq\mathrm{Q} \\ 0, & \mathrm{P}=\mathrm{Q}\end{cases}$$

거리공간 $(\mathbb{R}^2, e)$에서 두 점 $(1,3)$과 $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ 사이의 거리를 구하시오. 또한 열린 집합

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid e((x,y),\ (1,3))<9\}$$

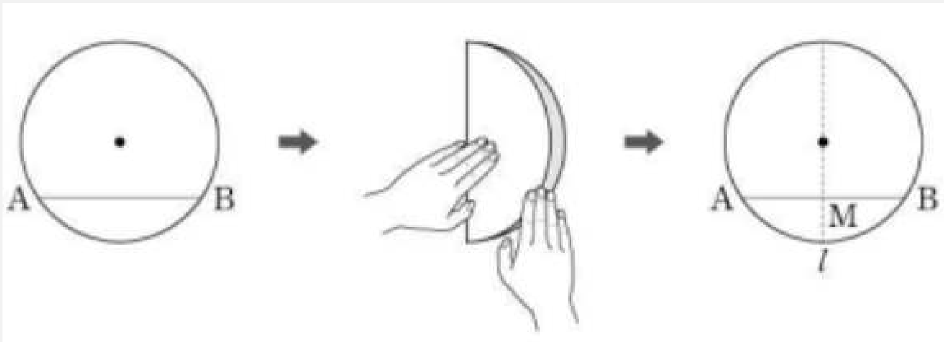
에 속하고 각 좌표가 모두 정수인 원소의 개수를 구하시오. [2점, 기입형B] [2020]

서술형B [3~11]

3. 원의 현에 관한 성질 중 한 가지를 지도하기 위해 교사가 <자료 1>과 <자료 2>를 개발하였다.

〈자료 1〉

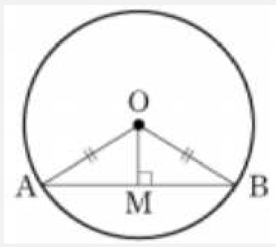
① 원 모양의 종이에 현 AB를 그린다.
② 점 A와 점 B가 겹쳐지도록 접었다가 펼친다.
③ ②에서 접은 선을 l이라 하고, l과 현 AB가 만나는 점을 M이라고 한다.



질문: 직선 l이 원의 중심을 지나는가?
직선 l이 현 AB와 이루는 각의 크기는 얼마인가?
$\overline{\mathrm{AM}}$과 $\overline{\mathrm{BM}}$의 길이를 비교하시오.

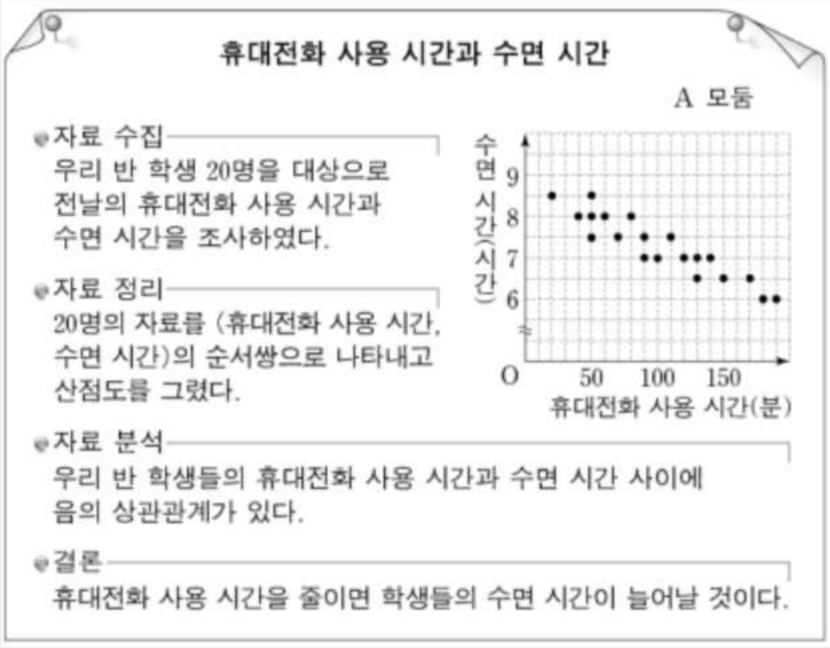
〈자료 2〉

원 O의 중심에서 현 AB에 내린 수선의 발을 M이라고 하면
$\Delta\mathrm{OAM}$과 $\Delta\mathrm{OBM}$에서
$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$(반지름)
$\angle\mathrm{OMA}=\angle\mathrm{OMB}=90^\circ$
$\overline{\mathrm{OM}}$은 공통
이므로 직각삼각형의 합동 조건에 의하여
$\Delta\mathrm{OAM}\equiv\Delta\mathrm{OBM}$이다.
따라서 $\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{BM}}$이다.
이로부터 다음을 알 수 있다.
(㉠)



<자료 1>과 <자료 2>를 통해 교사가 공통으로 가르치려는 원의 현에 관한 성질 ㉠을 서술하시오. 그리고 <자료 1>과 <자료 2>에서 사용한 정당화 방법이 무엇인지 각각 쓰고, 두 자료를 학생 수준에 맞게 수업에서 어떻게 활용할지 서술하시오. [4점, 서술형B] [2020]

4. 박 교사는 상관관계를 지도하는 수업 시간에 학생들에게 '휴대전화 사용 시간과 수면 시간의 상관관계'를 포스터로 제작하도록 하였다. A 모둠 학생들이 만든 포스터는 다음과 같다.



박 교사는 프로젝트 평가 방법을 사용하여 학생들의 포스터를 다음의 항목에 대해 평가할 계획이다.

평가 항목	(1) 자료를 적절한 방법으로 수집하였는가?
	(2) 자료를 조사 목적에 맞게 정리하였는가?
	(3) 자료를 옳게 분석하였는가?
	(4) 결론이 적절한가?

이 수업의 평가 방법으로 프로젝트 평가가 적절한 이유를 설명하시오. 그리고 평가 항목 (3)에 따라 A 모둠 포스터의 '자료 분석'을, 평가 항목 (4)에 따라 A 모둠 포스터의 '결론'을 평가하여 그 결과를 각각 서술하시오. [4점, 서술형B] [2020]

5. 다음은 김 교사의 교수·학습 지도안에 대하여 교사들이 나눈 대화이다.

김 교사: 교수·학습 지도안을 다음과 같이 작성해 보았습니다.

학습 목표	무리수의 개념을 이해한다.
단계	교수·학습 활동
도입	◦준비 학습: 유리수의 정의를 상기한다. ◦동기 유발: 실생활에서 무리수의 예를 보여주는 동영상을 시청한다. ◦본시 학습 목표를 확인한다.
전개	◦스프레드시트를 이용하여 $\sqrt{2}$가 순환하지 않는 무한소수임을 설명한다. (아래 스프레드시트) ◦무리수와 실수를 정의한다. ◦무리수 $\sqrt{2}$를 수직선에 나타내는 방법을 설명한다.
정리	◦본시 학습 내용을 정리한다.

	A	B
1	x	x^2
2	1.3	1.69
3	1.4	1.96
4	1.5	2.25
5	1.41	1.9881
6	1.42	2.0164
11	1.41421	1.9999899241
12	1.41422	2.0000182084

최 교사: $\sqrt{2}$가 순환하지 않는 무한소수임을 설명하기 위해 공학적 도구를 이용하였네요. 2015 개정 수학과 교육과정에 이에 대한 근거가 있나요?

김 교사: 네, ㉠정보 처리 능력을 함양하기 위한 교수·학습 방법에 명시된 내용이 있습니다.

최 교사: 그렇군요. 저도 수업 시간에 스프레드시트를 이용한 적이 있는데, ㉡학생들이 $\sqrt{2}$가 순환하지 않는 무한소수라는 것에는 관심을 두지 않고, "선생님, 무슨 식을 입력하였기에 x에 수를 넣으면 x^2이 계산되는 건가요? 스프레드시트 다루는 방법 좀 알려주세요."라는 말을 해서 난감했던 적이 있었습니다.

김 교사: 그런 점을 주의하여 수업을 하려고 합니다.

김 교사가 교수·학습 지도안에서 스프레드시트를 이용한 근거를 ㉠의 구체적인 내용으로 제시하시오. 그리고 브루소(G. Brousseau)의 교수학적 상황론에서 ㉡을 설명할 수 있는 극단적인 교수 현상을 쓰고, 그 현상을 ㉡의 상황과 관련지어 설명하시오. [4점, 서술형B] [2020]

6. 행렬 $A=\begin{bmatrix}5&3&-3\\0&1&-2\\0&0&-1\end{bmatrix}$의 고윳값을 모두 구하시오. 또한 선형변환 $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$을 $T(\mathrm{x})=A\mathrm{x}$라 할 때, $\mathbb{R}^3$의 기저 B에 대한 T의 행렬표현 $[T]_B$이 대각행렬이 되도록 하는 기저 B를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B] [2020]

7. 확률변수 X가 구간 $(0,3)$에서 균등분포(uniform distribution)를 따른다. 확률변수 Y를 $Y=2\ln\left(\dfrac{3}{3-X}\right)$이라 할 때, Y의 누적분포함수(cumulative distribution function) $F_Y(y)=P(Y\le y)$를 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 Y의 확률밀도함수와 $P(|Y-2|>2)$의 값을 각각 구하시오. [4점, 서술형B] [2020]

8. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡면 $\mathrm{x}(u,v)=(u^2+v,u-v^2,uv)$ 위의 $u=1,\ v=2$인 점 P에서 접평면(tangent plane)의 방정식을 구하시오. 또한 점 P에서 곡면 x의 평균곡률(mean curvature) H의 값을 풀이 과정과 함께 구하시오. [4점, 서술형B] [2020]

9. 자연수 n에 대하여 함수 $g_n:[0,1]\to\mathbb{R}$을

$$g_n(x)=\int_0^x\{1+(x-y)^n\sin^n(xy)\}dy$$

로 정의하고, $a_n=\int_0^1 g_n(x)dx$라 하자. 함수열 $\{g_n\}$이 $[0,1]$에서 어떤 함수 g로 균등수렴(고른수렴, 평등수렴, uniform convergence)함을 보이고, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B] [2020]

10. 다음 조건을 만족시키는 정함수(entire function) $f(z)$에 대하여 $|f(i)|$의 최솟값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B] [2020]

(가) 모든 복소수 z에 대하여 $\lvert f(z)+z^2\rvert\ge 3$이다. (나) $\lvert f(2)\rvert=3$

11. 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위에서 다항식 $x^{24}-1$의 분해체(splitting field)를 K라 하자. 갈루아군(Galois group) $G(K/\mathbb{Q})$의 위수(order)와 복소수 $\zeta=e^{\frac{\pi}{12}i}$의 $\mathbb{Q}$ 위에서의 기약다항식(irreducible polynomial) $\mathrm{irr}(\zeta,\mathbb{Q})$을 각각 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $i=\sqrt{-1}$) [4점, 서술형B] [2020]

[2021학년도 중등학교교사 임용후보자 선정경쟁시험]

기입형A [1~4]

1. 다음은 19세기말부터 100여 년 동안 이루어진 수학교육의 변천에 관한 자료를 순서 없이 제시한 것이다. (가)~(마)를 수학교육의 역사적 흐름에 따라 순서대로 배열하시오. [2점, 기입형A] [2021]

(가)	‘기본으로 돌아가기 운동(The Back-to-Basics Movement)’의 영향으로 학교수학에서는 기본 기능을 강조하는 방향으로 교재를 재구성하였다. 그러나 우수한 학생들의 학력이 저하되고 응용력과 문제 해결 능력이 감소되기도 하였다.
(나)	전통적인 방식으로 유클리드 기하를 가르치는 것에서 벗어나 실험기하를 가르치고, 수학의 실용성, 유용성 등을 강조하였다. 학교수학의 내용을 체계적으로 다듬으려는 노력이 시작되었으며, 학교수학에 함수 개념을 도입한 교과서가 출판되었다.
(다)	지식의 획득에서 지식의 구성으로, 문제 해결에서 문제 제기로 수학교육의 강조점을 변화시키자는 흐름이 본격적으로 일어났다. 그리고 ‘수학 학습 수준 이론’, ‘현실주의적 수학교육(Realistic Mathematics Education)’ 등 여러 이론과 모델이 발전하였다.
(라)	과학기술의 급격한 발달에 따라 수학의 응용 범위가 확대되었으나 학교수학의 내용이 시대에 뒤떨어진다는 반성으로 집합, 함수, 대수적 개념, 확률 등을 조기에 도입하고자 하였다. 이 시기에 일어난 변화는 우리나라 제3차 교육과정에 영향을 미쳤다.
(마)	근대화된 사회의 모습을 반영하여 수학교육을 개선하여야 한다는 주장이 제기되었다. 엄밀하고 논리적 체계를 갖춘 유클리드 원론 중심의 수학교육, 형식 도야라는 명분으로 과도한 훈련을 하는 수학교육, 소수 특권층을 위한 수학교육 등 당시의 수학교육 실태를 개선하여야 한다는 비판이 있었으나 실제로 크게 개선되지는 못했다.

2. 복소함수 $f(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$에 대하여, 집합 $\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=2\}$에서 $|f(z)|$의 최댓값과 최솟값을 구하시오. [2점, 기입형A] [2021]

3. A 회사와 B 회사에서 생산하는 전기자동차용 배터리의 수명은 각각 정규분포 $\mathrm{N}(2500, 80^2)$, $\mathrm{N}(2200, 66^2)$을 따른다고 한다.
A 회사의 제품에서 100개를 임의로 추출한 표본의 평균수명을 $\overline{X}$,
B 회사의 제품에서 121개를 임의로 추출한 표본의 평균수명을 $\overline{Y}$라 할 때,
$\overline{X}-\overline{Y}$의 분산 $\mathrm{Var}(\overline{X}-\overline{Y})$는 a이고, $\mathrm{P}(\overline{X}-\overline{Y}\le 320)=\mathrm{P}(Z\le b)$이다.
상수 a와 b의 값을 각각 구하시오. (단, 배터리 수명의 단위는 100 km이고, Z는 표준정규분포를 따르는 확률변수이다.) [2점, 기입형A] [2021]

4. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 구

$$M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$$

위에 단위속력곡선(arc-length parametrized curve) $\gamma:[0,1]\to M$이 있다.
각 $s\in[0,1]$에 대하여 점 $\gamma(s)$에서의 γ의 종법선벡터(binormal vector)를 $B(s)$,
점 $\gamma(s)$에서의 M의 법선벡터(normal vector) $n(s)$라 하자.
모든 $s\in[0,1]$에 대하여 $B(s)\cdot n(s)=\frac{1}{2}$을 만족할 때, $\gamma(s)$의 비틀림률(열률, 꼬임률, torsion) $a(s)$와 곡률(curvature) $b(s)$를 구하시오. [2점, 기입형A] [2021]

서술형A [5~12]

5. 함수 $f(x,y)=\dfrac{x^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}$에 대하여 다음 적분의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\int_{\sqrt{1-y^2}}^{y}\left(f(x,y)-\lfloor x+y\rfloor\right)dxdy$$
$$+\int_{1}^{\sqrt{2}}\int_{0}^{y}f(x,y)dxdy+\int_{\sqrt{2}}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)dxdy$$

(단, $\lfloor x\rfloor$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.) [4점, 서술형A] [2021]

6. $\mathbb{R}^2$ 위에 동치관계(equivalence relation) $\sim$을 다음과 같이 정의하자.

$(x,y)\sim(x',y') \Leftrightarrow (x,y)=(tx',ty')$인 실수 $t\neq 0$가 존재한다.

원소 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$에 대하여 $\sim$에 관한 동치류(equivalence class)를 $[x,y]$라 하고, $\sim$에 관한 상집합(quotient set)을 $Y=\mathbb{R}^2/\sim$, 상사상(quotient map)을 $\pi:\mathbb{R}^2\to Y$ $(\pi(x,y)=[x,y])$라 하자..
$\mathbb{R}^2$ 위에 보통위상(usual topology)이 주어진 위상공간을 X라 하고, 상집합 Y 위의 $\pi: X\to Y$에 대한 상위상(quotient topology)을 $\mathfrak{I}$라 하자. 즉, $\mathfrak{I}$는 Y 위의 $X/\sim$의 상위상이다.
이때 $[0,0]$을 포함하는 $\mathfrak{I}$의 원소가 유일함을 증명하고, $(Y,\mathfrak{I})$가 T_1-공간이 아닌 이유를 서술하시오. (단, 보통위상은 거리함수 $d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$로부터 유도되는 위상이다.) [4점, 서술형A] [2021]

7. 일반화된 이항계수 $\dbinom{-\frac{1}{2}}{n}$이 $\dbinom{2n}{n}=f(n)\times\dbinom{-\frac{1}{2}}{n}$을 만족할 때, $f(n)$과 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\left(-\frac{1}{8}\right)^n$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, n은 음이 아닌 정수이다.) [4점, 서술형A] [2021]

8. 다음 <자료 1>은 중학교 3학년 학생 A의 수학일기의 일부이고, <자료 2>는 <자료 1>에 대하여 교사들이 나눈 대화이다.

<자료 1>

오늘은 친구 B와 함께 시네마 영화관을 갔다. 보고 싶은 영화를 선택해야 하는데 B와 의견이 달랐다. 나는 액션 영화를 선택했고, B는 액션 영화도 좋지만 다른 영화를 함께 골라보자고 하였다. 시네마 영화관에서는 현재 여러 개의 영화를 동시에 상영하고

있어 영화를 고르기가 힘들었다. 그때 마침 내게 좋은 아이디어가 떠올랐다. 영화 관람을 마치고 나오는 많은 사람들에게 그들이 본 영화가 무엇이었는지 조사해 보자는 것이었다. 그런 다음 사람들이 가장 많이 본 영화를 관람하기로 결정하면 어떨까 생각하고 B의 의견을 물었다. B도 나의 의견에 동의하였다.

나는 먼저, 영화 관람을 마치고 나오는 사람들에게 관람한 영화가 무엇이었는지 조사하였다. 그리고 별생각 없이 조사한 자료로 수학 시간에 배운 평균을 구하자고 B에게 말하였다. 그런데 <u>㉠B가 "자료를 대표하는 값은 여러 가지가 있고, 주어진 자료에 따라 적절한 값을 사용해야 그 자료의 특성을 대표할 수 있다."라고 하면서 우리가 함께 관람하기로 한 영화 선택의 조건이 무엇이었는지 나에게 상기시켜 주었다.</u> "맞아, 그거야! 여기서는 최빈값이 대푯값으로 적절하겠구나."라는 것을 깨달았다.

…(중략)…

친구의 도움으로 최빈값의 의미와 그것을 언제 사용해야 하는지 확실히 알게 되었다. 그리고 보니 빅 데이터 기술을 이용하여 많은 사람들이 주로 사용하는 단어를 최빈값으로 구해 낼 수 있고, 그 단어가 갖는 여러 의미를 해석해 볼 수 있어 최빈값이 매우 유용하지 않을까 하는 생각도 들었다. 그래도 오늘 가장 좋았던 것은 <u>㉡교과서의 정리된 수학이 아닌 내 주변에 살아있는 수학을 경험한 것이었다</u>

<자료 2>

김 교사: 수학이 우리 삶 가운데 유용하게 사용되고 있음을 알도록 학생들에게 수학일기를 써 보게 했습니다.

박 교사: 좋은 생각입니다. 학생들이 수학을 왜 배워야 하는지 모르겠다고 하는데 수학일기를 통해 수학의 실용적 가치를 깨닫는 좋은 기회가 될 것 같습니다.

김 교사: 네, 그리고 동시에 <u>㉢수학이 객관적 진실이라기보다는 우리의 삶의 경험을 조직하는 데 도움이 됨을 학생들이 인식하면 좋겠습니다.</u>

비고츠키(L. Vygotsky) 학파의 관점에서 <자료 1>의 ㉠을 설명할 수 있는 개념 용어를 쓰고, A가 알게 된 최빈값의 의미를 쓰시오. 그리고 <자료 1>의 ㉡, <자료 2>의 ㉢에 근거하여 사회적 구성주의와 차별화되는 급진적 구성주의의 원리를 설명하시오 [4점, 서술형A] [2021]

9. 박 교사는 고등학교 '수학1' 삼각함수 단원에서 <수업 방향>에 따라 <온라인 활동 과제>를 활용한 실시간 온라인 수업을 하려고 한다. 이에 대하여 <작성 방법>에 따라 서술하시오. [4점, 서술형A] [2021]

<보기>

- 학생이 수업에 대하여 가능한 한 많은 권리와 책무성을 갖도록 한다.
- 학생과 학생 사이에 충실한 상호작용이 일어나도록 한다.
- 학생이 다양한 표상을 사용하는 능력을 함양하도록 한다.

<온라인 활동 과제>

(가) 컴퓨터 기하 프로그램으로 삼각함수 그래프를 그리는 방법을 복습하시오.

(나) 함수 $y=a\sin x$의 그래프를 a의 값을 다르게 하여 여러 개 그려보고, 함수 $y=\sin(bx)$의 그래프는 b의 값을 다르게 하여 여러 개 그려본 후 나타난 결과를 분석하여 정리하시오.

(다) 함수 $y=a\sin(bx)$ (a, b는 상수)의 그래프의 성질에 대하여 정리한 내용을 발표하시오.

<작성 방법>

- 박 교사의 <수업 방향>에 적합한 교수·학습 방법을 2015개정 수학과 교육과정(교육부 고시 제2020－255호) '교수·학습 및 평가의 방향'의 '교수·학습 방법'에 제시된 것 중에서 선택하여 쓰고, 그 이유를 설명할 것
- 선택한 '교수·학습 방법'을 적용할 때, <온라인 활동 과제>의 (다)에서 학생이 할 발표의 준비 과정과 내용을 서술할 것

10. 군 G는 직접곱(직적, direct product) $\mathbb{Z}_{13}^{*}\times\mathbb{C}^{*}$이다.
위수(order)가 18인 G의 원소의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰고, 덧셈군 $\mathbb{Z}_{18}$과 군동형(group isomorphic)이 되는 G의 부분군의 개수를 구하시오.
(단, $\mathbb{Z}_{13}^{*}$과 $\mathbb{C}^{*}$은 각각 유한체 $\mathbb{Z}_{13}$과 복소수체 $\mathbb{C}$의 영이 아닌 원소들의 곱셈군이다.) [4점, 서술형A] [2021]

11. 합동방정식

$$(x^{10}-1)(x^{10}+x^5+1)(x^{36}-1)\equiv 0 \pmod{61}$$

의 법 61에 대한 해의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형A] [2021]

12. 음이 아닌 정수 n에 대하여 함수 $f_n : [0,1]\to\mathbb{R}$를 다음과 같이 정의하자.

$$f_0(x)=e^x,\ f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)dt \ \ (n\ge 1)$$

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$는 $[0,1]$에서 고른수렴(평등수렴, 균등수렴, uniform convergence) 함을 보이고, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$를 구하시오. [4점, 서술형A] [2021]

※ 다음 정리는 필요하면 증명 없이 사용할 수 있다.

함수 $g(x)$가 미분가능하면

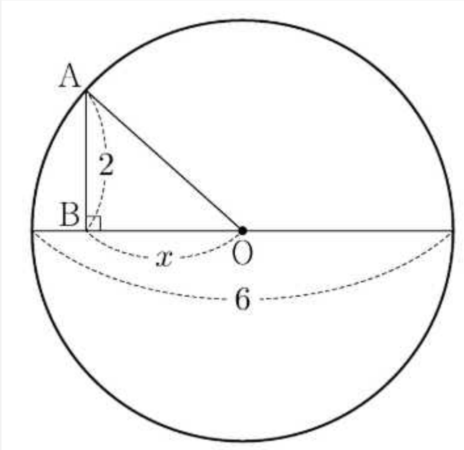
$$\int_0^x g(t)e^{-t}dt=\left[-g(t)e^{-t}\right]_0^x+\int_0^x g'(t)e^{-t}dt$$

이다.

기입형B [1~2]

1. 다음은 윤 교사와 강 교사가 수업을 반성하는 대화의 일부이다.

윤 교사: 그림과 같이 지름의 길이가 6인 원 O 위의 점 A에서 지름에 내린 수선의 발을 B라 하고, $\overline{\mathrm{AB}}=2$일 때, 원의 중심 O에서 점 B까지의 거리 x의 값을 구하게 하였더니 어떤 학생이 x의 값을 구하지 못하더군요. 피타고라스 정리를 알고 이차방정식을 비교적 잘 푸는 학생임에도 불구하고 말이지요.



강 교사: ㉠선분 OA를 직각삼각형 OAB의 빗변으로 보면서 동시에 원 O의 반지름으로 보는 것과 같이 문제의 내적인 구조적 관련성을 파악하는 과정이 없었던 것이 아닐까요?

윤 교사: 저도 그렇게 생각합니다. ㉡전체에 대한 부분의 구조적 기능이 파악되어 '구조의 개선적 변화'가 일어나는 지적 과정에 더욱 관심을 기울여야겠다는 생각을 하게 되었습니다.

형태심리학에서 ㉠을 설명하는 용어와 베르트하이머(M. Wertheimer)가 ㉡을 설명하는 용어를 순서대로 쓰시오. [2점, 기입형B] [2021]

2. 집합 $X=\{a,b,c\}$에서 정의된 두 위상 $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_2$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|\mathfrak{I}_1|=|\mathfrak{I}_2|=4$
(나) $(X,\mathfrak{I}_1)$은 연결(connected space)이다.
(다) $(X,\mathfrak{I}_2)$는 비연결공간(disconnected space)이다.

이때 $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_2$를 각각 1개씩 구하시오. (단, $|A|$는 집합 A의 원소의 개수이다.) [2점, 기입형B] [2021]

서술형B [3~11]

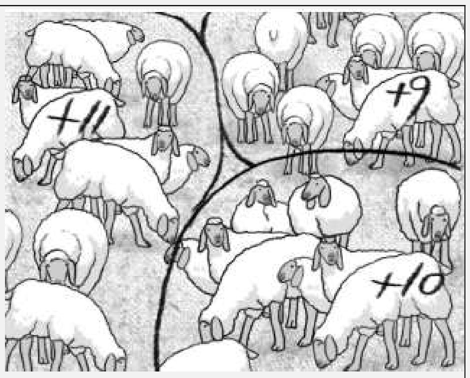
3. 다음은 김 교사가 베커(A. Bakker)의 통계 교육 이론에 기초하여 중학교 3학년 통계 단원 수업을 한 후 작성한 수업일지의 일부이다.

나는 도입 단계에서 다음과 같은 <자료>를 학생들에게 제시하며 통계가 현실과 단절된 수량적인 자료의 계산 체계가 아님을 알려주고자 하였다.

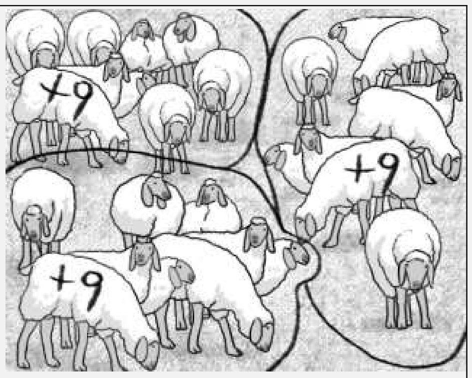
<자료>

어느 학자에 따르면, 역사적으로 평균 개념은 큰 수를 대략적으로 추정하기 위한 상황에서 활용되었다고 한다. 고대 인도의 이야기 속 주인공은 나무 한 그루에 달린 나뭇잎과 과일의 총수를 알아보기 위해 우선 평균 크기의 나뭇가지를 선택하고, 그 나뭇가지에 달린 나뭇잎과 과일 수를 헤아린 후 전체 나무에 달린 나뭇잎과 과일 수를 추정하였다.

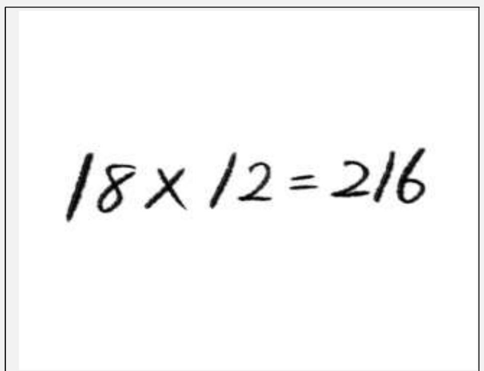
본시 학습에서는 그림 속 양의 개체수를 추정하는 활동 과제를 제시하였다. 각각의 학생들은 자신만의 큰 수 추정 방법을 활용하여 몇 마리의 양이 있는지를 (a), (b), (c), (d)와 같이 찾아내었다.



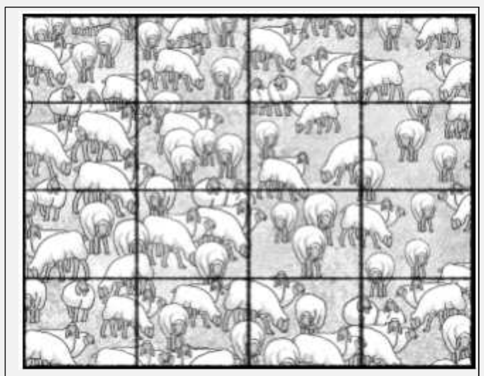
(a) 묶음을 만들어서 각 묶음에 실제로 몇 마리의 양이 있는지 세어 합하였다.



(b) 하나의 수를 먼저 정한 후, 그 수만큼의 양이 들어 있는 묶음을 표시하고 그 크기의 묶음이 몇 개인지를 어림하여 계산하였다.



(c) 그림의 위쪽 모서리와 오른쪽 모서리를 따라 각각 양의 수를 구한 후, 그 두 수를 곱하여 전체 양의 수를 어림하였다.



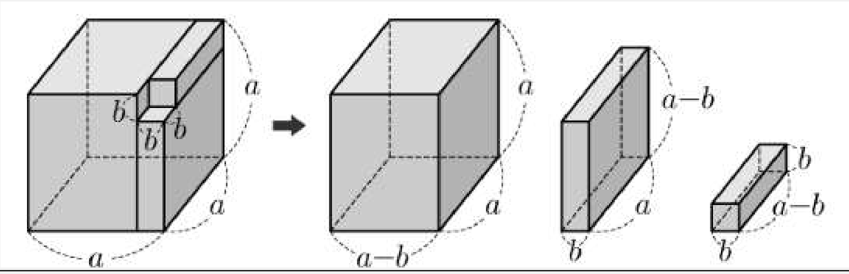
(d) 격자를 만들어 격자 속 양의 수가 평균적인 것에 해당되는 것을 고른 후 그 안에 들어 있는 양의 수를 세어 격자의 수에 곱하였다.

㉠학생들은 통계의 주요 개념의 역사를 살펴보면서 주어진 상황을 탐색하고, 상황 속 문제 해결의 방법을 배웠다.

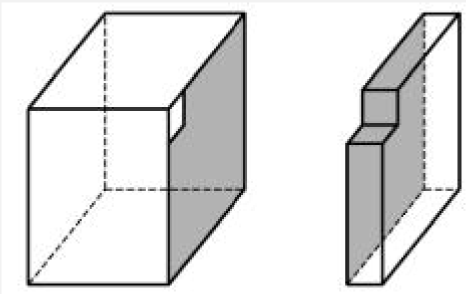
베커의 이론에 기초한 통계 수업을 진행할 때 얻을 수 있는 교육적 의의를 위 수업일지에 근거하여 2가지 제시하시오. 그리고 ㉠과 관련지어 (a)와 (d)를 비교하여 설명하시오 [4점, 서술형B] [2021]

4. 다음은 최 교사가 고등학교 '수학'에서 다루는 내용을 소재로 수학 동아리 학생들과 진행할 수업에 대하여 정 교사와 나눈 대화의 일부이다.

최 교사: '수학자처럼 꼼꼼해지기'라는 주제로 동아리 학생들과 수업을 진행하려고 합니다. 아래의 [탐구]를 소재로 삼아 수업을 하려고 하는데요. 수업 준비를 위해 어떤 사고 실험을 할 수 있을까요?

> [탐구] 다음 도형을 이용하여 인수분해 공식
> $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$이 성립함을 설명해 보자.
>
> 
>

정 교사: "a, b, $a-b$가 양수이다", "입체도형을 분리하여 만든 새로운 입체도형들의 부피의 합은 분리하기 전 입체도형의 부피와 같다.", "도형을 분리할 때 새로 생성된 면은 부피에 영향을 주지 않는다." 등 여러 가지 숨겨진 가정을 생각해 보고 그 가정을 학생이 찾아내도록 하는 발문도 생각해 보면 좋겠습니다.

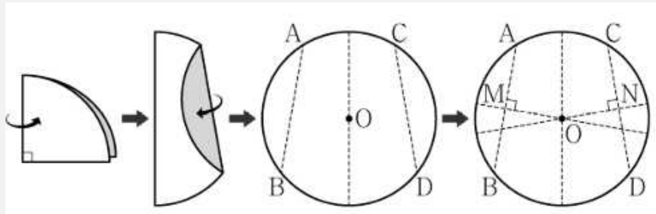


최 교사: "직육면체의 부피를 V, 밑면의 넓이를 S, 높이를 h라고 할 때, $V=Sh$이다."라는 것도 [탐구]에서 사용됩니다. 학생들이 이 공식을 배운 시점에서는 유리수 범위에서만 수를 다루었기 때문에 ㉠모서리의 길이 중 하나 이상이 양의 무리수인 경우에 대해서 이 공식 $V=Sh$를 정당화하는 과정도 생각해 보면 좋겠습니다.

정 교사: 직육면체 모서리의 길이가 양의 유리수인 경우, 모서리의 길이가 1인 정육면체를 적절하게 등분하여 만든 작은 정육면체를 여러 개 사용하여, 주어진 직육면체를 구성하는 과정을 이용해 이 공식을 정당화할 수 있습니다. 하지만 모서리의 길이 중 하나 이상이 양의 무리수인 경우에는 이 공식을 체계적으로 정당화하기 위해 여러 가지 배경 지식이나 소양이 필요하기 때문에 학생 수준을 고려하여 수업을 준비하여야 할 것 같습니다.

프로이덴탈(H. Freudenthal)이 말하는 사고 실험의 의미를 설명하고, ㉠에 대한 최 교사의 사고 실험을 수업 내용에 중점을 두고 예상하여 서술하시오. [4점, 서술형B] [2021]

5. 다음은 김 교사가 계획한 중학교 3학년 원의 현에 대한 단원의 교수 · 학습 지도안의 일부이다.

학습 목표		원의 현에 관한 성질을 이해한다.
단계		**교수 · 학습 활동**
도입		• 준비 학습: 전시 학습을 상기하도록 안내한다. • 동기 유발: 실생활에서 원의 성질을 응용한 여러 사례를 살펴본다. • 본시 학습 목표를 확인한다.
전개	[활동1]	• 다음 활동에 학생들이 자발적으로 참여하도록 유도한다. ① [그림 1]과 같이 원 모양의 색종이를 완전히 포개어지도록 반으로 두 번 접어 원의 중심 O를 찾는다. ② 다시 처음 상태에서 색종이를 반으로 접고 [그림 2]와 같이 접은 후 펼친다. ③ [그림 3]과 같이 네 점 A, B, C, D를 잡는다. ④ 점 A와 점 B, 그리고 점 C와 점 D가 서로 겹치도록 색종이를 각각 접었다 펼친 후, [그림 4]와 같이 현 AB의 중점 M과 현 CD의 중점 N을 찾는다.  [그림 1] [그림 2] [그림 3] [그림 4] ⑤ $\overline{\mathrm{OM}}=\overline{\mathrm{ON}}$임을 확인한다.
	[활동2]	• 친구들과 자유롭게 토의 · 토론하면서 **[활동1]**을 통해 '길이가 같은 두 현은 원의 중심으로부터 같은 거리에 있다.'는 성질을 학생이 정리할 수 있도록 허용적인 분위기를 조성한다. • 학생이 정리한 현에 관한 성질에서 '원의 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 같다.'는 성질을 재구성해 보도록 안내한다. • 현에 관한 성질을 연역적으로 논증하기 등 학생 수준에 맞게 정당화 방법을 활용한다.
정리		• 본시 학습 내용을 정리한다. • 다음 차시를 예고한다.

딘즈(Z. Dienes)가 제안한 수학 학습 원리 중 1가지를 사용하여 교수 · 학습 지도안의 전개 단계를 **[활동1]** ⟹ **[활동2]**로 실행하려는 이유를 설명하시오. 그리고 **[활동2]**과정 없이 '도입→전개(**[활동1]**)→정리'로 수업을 진행한다고 했을 때 김 교사의 수업을 피아제(J. Piaget)의 반영적 추상화의 메커니즘과 관련지어 평가하시오. [4점, 서술형B] [2021]

6. 행렬 $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$에 대하여 $A=PDP^{-1}$을 만족하는 행렬 $D=\begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$와 가역행렬 P를 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 행렬 A^n의 2행 3열의 성분을 구하시오. (단, $d_1 \le d_2 \le d_3$이고 n은 자연수이다.) [4점, 서술형B] [2021]

7. 연속함수 $f: [0,1] \to [0,1]$은 $(0,1)$에서 미분가능하다.
모든 $x \in (0,1)$에 대하여 $f'(x) \neq 1$일 때, $f(a)=a$ $(0 \le a \le 1)$을 만족하는 a가 유일하게 존재함을 증명하시오. [4점, 서술형B] [2021]

8. 복소함수 $f(z)=z^6-1$에 대하여

$$\int_C \frac{z^3 f'(z)}{f(z)} dz$$

의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.
여기서 C는 복소평면에서 점 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원을 시계반대방향으로 한 바퀴 도는 곡선이다. [4점, 서술형B] [2021]

9. X_1, X_2, X_3을 균등분포(uniform distribution) $Unif(0,1)$로부터의 확률표본(random sample)이라 하고, Y를 X_1, X_2, X_3의 중앙값(median)이라 하자. 이때 Y의 누적분포함수(cumulative distribution function)와 Y의 확률밀도함수(probability density function)를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B] [2021]

10. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡선

$$\gamma(u)=(0, u^4-2u^2+5, u) \ (u \in \mathbb{R})$$

를 z축을 중심으로 360° 회전시켜 얻은 회전체를 M이라 하고, M의 가우스곡률(Gaussian curvature)을 K라 하자. 영역

$$S=\{(x,y,z) \in M \mid -1 \le z \le 1\}$$

에 대하여 $\iint_S K dA$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B] [2021]

11. 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위에서 다항식 x^5+5의 분해체(splitting field)를 K라 하자. 체 $\mathbb{Q}(\sqrt[10]{5})$가 K의 부분체임을 증명하고, K의 원소

$$\alpha = e^{\frac{2\pi}{5}i} + e^{\frac{3\pi}{5}i}$$

의 $\mathbb{Q}$ 위에서의 기약다항식(irreducible polynomial) $\mathrm{irr}(\alpha, \mathbb{Q})$를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $i=\sqrt{-1}$) [4점, 서술형B] [2021]

기입형A [1~4]

1. 다음은 학기 초에 평가 계획을 세우는 수학 교사들의 대화이다. 괄호 안의 ㉠에 공통으로 해당하는 수학 교과 역량과 괄호 안의 ㉡에 공통으로 해당하는 평가 방법을 2015 개정 수학과 교육과정(교육부 고시 제2020-236호)에 제시된 용어로 쓰시오. [2점, 기입형A] [2022]

> 김 교사: 2015 개정 수학과 교육과정에서는 수학의 개념, 원리, 법칙, 기능뿐만 아니라 수학 교과 역량을 균형 있게 평가한다는 평가 원칙을 제시하고 있습니다. 수학 교과 역량을 포함하여 평가 계획을 세워 봅시다.
>
> 이 교사: 수학 교과 역량에 따라 평가 방법을 달리 해야 할 것 같습니다.
>
> 김 교사: 그렇죠. 2015 개정 수학과 교육과정에 제시된 내용의 일부를 참고해 봅시다.
>
> (㉠): 수학의 가치를 인식하고 자주적 수학 학습 태도와 민주 시민 의식을 갖추어 실천하는 능력
>
> (㉡): 학생 스스로 자신의 이해와 수행을 평가하는 방법으로, 문제 해결과 추론 과정의 반성이나 자신의 생각 표현 등을 평가할 때 활용할 수 있다.
>
> 이 교사: (㉠)을/를 평가할 때 (㉡)을/를 활용하면 좋겠습니다.

2. 실수 t에 대하여

$$g(t)=\frac{1}{\pi}\iint_D (x^2+y^2+1)^t\,dxdy$$

라 할 때, $g(-2)$와 $\lim_{t\to 0} g(t)^{\frac{1}{t}}$의 값을 순서대로 쓰시오.

(단, $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\}$이다.) [2점, 기입형A] [2022]

3. 환(ring) $\mathbb{Z}_{11}$에서 모든 단원(unit, unit element)들의 집합 $\mathbb{Z}_{11}^*$는 순환군(cyclic group)다. $\mathbb{Z}_{11}^*$의 생성원(generator)을 모두 쓰시오. [2점, 기입형A] [2022]

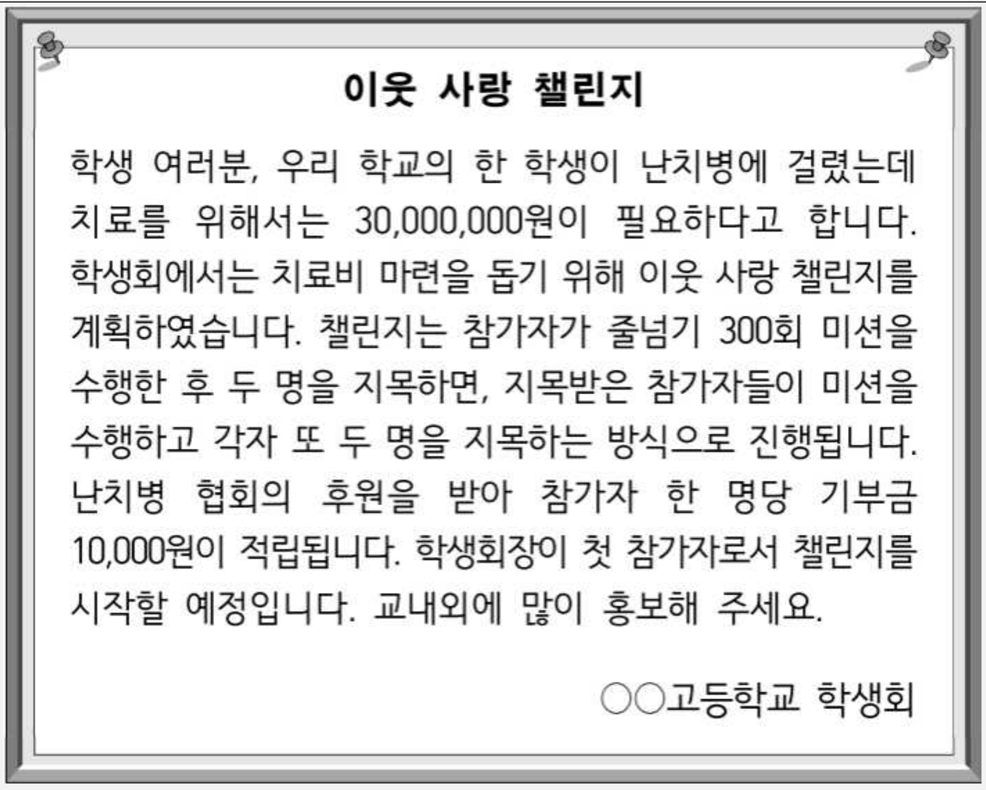
4. 두 확률변수 X와 Y의 결합확률질량함수(joint probability mass function)가 다음과 같다.

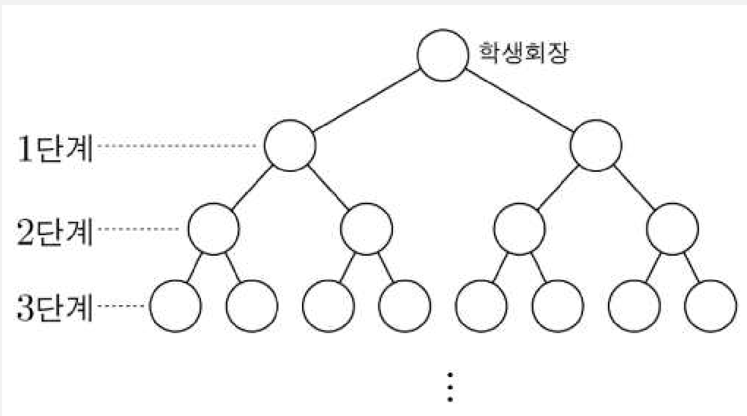
X \ Y	1	2	3	4
0	p	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$
1	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{24}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	q

X의 기댓값이 $E(X)=\frac{11}{12}$일 때, $p\times\frac{1}{q}$의 값과 조건부확률 $P(X+Y\le 4\mid Y-X=2)$의 값을 순서대로 쓰시오. [2점, 기입형A] [2022]

서술형A [5~12]

5. 다음은 ○○고등학교의 학생회가 주최하는 행사의 포스터를 보고 두 교사가 나눈 대화이다.



> 윤 교사: 학생들이 자발적으로 좋은 일을 하고 있네요. 선생님들도 동참해야겠어요.
>
> 강 교사: 네, 학생들이 정말 대견하네요. 저는 이 행사를 홍보하고 추진하는 데 도움을 주고자 수학 수업에서 이 내용을 다뤄 보고자 해요.
>
> 윤 교사: 어떻게요?
>
> 강 교사: <u>㉠크라벤담(H. Krabbendam)의 그래프에 대한 질적 접근 관점에서 이웃 사랑 챌린지가 진행되는 상황을 다루는 수업</u>을 해 볼까 합니다.
>
> 윤 교사: 그 후에 <u>㉡그래프를 좀 더 정확하게 표현하는 정교화 활동</u>을 하면 어떨까요?
>
> 강 교사: 네, 수업에 반영해 보겠습니다.
>
> 윤 교사: 저도 이웃 사랑 챌린지를 수업에서 다뤄 봐야겠어요. 학생들이 기획한 이웃사랑 챌린지를 실세계 현상으로 하여 30,000,000원을 모으려면 최소 몇 단계까지 미션을 수행해야 하는지 알아보게 하는 거죠. 물론 학생들이 계획한 대로 이상적으로 진행된다고 가정해서요.
>
> 
>
>
> 강 교사: 학생들이 수학적 모델링도 경험할 수 있는 좋은 아이디어 같아요.

밑줄 친 ㉠에 포함해야 할 활동을 서술하고, 밑줄 친 ㉡의 예를 1가지 제시하시오.

또한, 윤 교사의 수업에서, 이웃 사랑 챌린지가 이상적으로 진행된다고 가정할 때 학생들이 실세계 현상으로부터 만들어야 할 수학적 모델과 도출해야 하는 결론을 각각 쓰시오. [4점, 서술형A] [2022]

6. 다음은 수학사의 활용에 대해 논의하고 있는 교사들의 대화이다.

> 박 교사: 수학사를 수업에서 활용하는 방법에는 어떤 것이 있을까요? 각자의 경험을 함께 얘기해 봅시다.
>
> 최 교사: 저는 수학자들의 이야기를 해 주면서 학생들의 흥미를 유발한 적이 있습니다. “우리는 언제부터 문자를 사용해서 방정식을 나타내고 풀게 되었을까?” 라고 질문하면서, 아주 옛날에는 문제의 풀이를 일상 언어만으로 기술했지만 약 3세기 디오판토스(Diophantus) 이후 미지수를 문자로 표현하였고, 16세기 프랑스의 수학자 비에트(F. Viète) 이후 ㉠방정식에서 문자의 사용 범위가 확대되었다는 이야기를 해 주었습니다,
>
> 김 교사: 저는 학생들에게 피타고라스 정리가 성립함을 설명하는 방법이 많다고 얘기해 주면서, 인도의 수학자 바스카라(A. Bhaskara)가 제시한 그림에서 피타고라스 정리가 왜 성립하는지 알아보는 활동을 하게 한 적이 있어요. 수학사를 소재로 학생들이 피타고라스 정리를 탐구할 수 있었죠.
>
> 박 교사: 수학사를 수업에 활용하는 또 다른 방법이 있을까요?
>
> 최 교사: 교육과정 내용을 재구성할 때도 수학사를 참고할 수 있어요. ㉡수학을 발생된 것으로 파악하고 학습자가 학습 과정에서 수학의 발생을 경험하게 하는 원리에 따라서요. 퇴플리츠(O. Toeplitz)의 『미분적분학』에서 이 원리를 반영하고 있죠.
>
> 김 교사: ㉢퇴플리츠와 방식은 다르지만 프로이덴탈(H. Freudenthal)도 수학사를 교육적으로 활용해야 한다고 했어요.
>
> 박 교사: 선생님들과 이야기하다 보니 수학사를 수업에 활용하는 방법을 더 연구해야겠다는 생각이 드네요.

방정식의 일반해를 나타낼 수 있게 되었다는 점에서 밑줄 친 ㉠의 확대된 문자의 사용 범위를 구체적으로 쓰시오.
또한, 밑줄 친 ㉡이 뜻하는 용어가 무엇인지 쓰고, 밑줄 친 ㉢에서 ‘수학사를 교육적으로 활용’한다는 것의 의미를 설명하시오. [4점, 서술형A] [2022]

7. $|x|<1$인 실수 x에 대하여

$$\frac{1}{(1-x)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n,\quad \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.

또한, 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$의 값을 쓰시오. [4점, 서술형A] [2022]

※ 다음 식은 필요하면 증명 없이 사용할 수 있다.

> $|x|<1$인 실수 x에 대하여 $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$이다.

8. 꼭짓점의 집합이 $V=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$이고 변(edge)의 집합이 $E=\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$인 단순그래프(simple graph) G에 대하여, 4차 정사각행렬 $B=(b_{ij})$를

$$b_{ij}=\begin{cases}1 & (x_i\text{와 } e_j\text{가 근접(incidence)한 경우})\\ 0 & (\text{그 외의 경우})\end{cases}\qquad (i,j=1,2,3,4)$$

로 정의하자. d_i가 꼭짓점 x_i의 차수(degree)이고 G의 인접행렬(adjacency matrix) A에 대하여

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix},\quad L=\begin{pmatrix}d_1&0&0&0\\0&d_2&0&0\\0&0&d_3&0\\0&0&0&d_4\end{pmatrix}-A$$

일 때, L의 행렬식(determinant)의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.
또한, 꼭짓점 x_1에서 꼭짓점 x_4로 가는 길이가 4인 길(경로, walk)의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형A] [2022]

9. 단위속력곡선(unit speed curve) $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$에 대하여 점 $\alpha(t)$에서의 곡률(curvature)과 비틀림률(열률, 꼬임률, torsion)을 각각 $\kappa_\alpha(t)$, $\tau_\alpha(t)$라 할 때, $\kappa_\alpha(t)\neq 0$ $(t\in\mathbb{R})$이고 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$는

$$\tau_\alpha(t)=f(t)\kappa_\alpha(t),\ f(1)=\sqrt{3},\ f'(1)=-2$$

을 만족한다. 점 $\alpha(t)$에서 곡선 α의 단위접벡터장(unit tangent vector field) $T(t)$와 단위종법벡터장(unit binormal vector field) $B(t)$에 대하여 곡선 $\beta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$을

$$\beta(t)=\int_0^t\{\tau_\alpha(s)T(s)+\kappa_\alpha(s)B(s)\}ds$$

로 정의하고, 이 곡선 위의 점 $\beta(t)$에서의 곡률을 $\kappa_\beta(t)$라 하자. 이 때, 곡선 β가 정칙곡선(정규곡선, regular curve)임을 보이고, $\tau_\alpha(1)\kappa_\beta(1)$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형A] [2022]

10. 복소평면에서 중심이 i이고 반지름의 길이가 2인 원을 시계반대방향으로 한 바퀴 도는 곡선 C에 대하여 선적분

$$\int_C\left\{\frac{4e^{-iz}}{(z+6i)(z-2i)}+\bar{z}\right\}dz$$

의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)
[4점, 서술형A] [2022]

11. 3차 정사각행렬 $A=(a_{ij})$가

$$A\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\4\\8\end{bmatrix},\ A\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\-2\end{bmatrix},\ A\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\-2\\0\end{bmatrix}$$

을 만족할 때, A의 고윳값(eigenvalue)을 모두 쓰시오.
또한, $a_{11}+a_{12}+a_{13}$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형A] [2022]

12. $K=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, e^{\frac{2\pi}{75}i})$는 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위에서
다항식 $(x^3-2)(x^{25}-1)$의 분해체(splitting field)이다.
갈루아군(Galois group) $G(K/\mathbb{Q})$의 위수(order)를 쓰시오.
또한, 다음 <조건>을 모두 만족하는 $G(K/\mathbb{Q})$의 부분군(subgroup) H_1, H_2가 존재함을 보이시오. (단, $i=\sqrt{-1}$이다.) [4점, 서술형A] [2022]

<조건>

> (가) H_1과 H_2는 $G(K/\mathbb{Q})$의 정규 부분군(normal subgroup)이다.
> (나) H_1의 위수는 20이고 H_2의 위수는 6이다.
> (다) $G(K/\mathbb{Q})=H_1H_2$이다.

기입형B [1∼2]

1. 다음은 증명에 대한 두 절대주의 수리철학의 관점 (가)와 (나)를 제시한 것이다. (가)와 (나)에 해당하는 수리철학을 순서대로 쓰시오. [2점, 기입형B] [2022]

(가)	어떤 수학적 대상이 존재함을 보장하기 위해서는 그 대상이 존재하지 않는다고 가정한 후 모순을 이끌어 내는 것만으로는 충분하지 않으며, 유한 번으로 구성될 수 있음을 밝혀야 한다. 배중률을 사용한 존재성 증명은 받아들일 수 없다.
(나)	수학은 엄밀한 방법으로 모순이 없고 완전한 공리 체계로 구성되어야 한다. 기호가 의미하는 것은 중요하지 않기 때문에 점, 선, 면 대신 연필, 의자, 책상이라는 용어를 사용하여도 무방하다. 증명은 정해진 규칙에 따라 의미 없는 기호를 다루는 일종의 기호 조작이다.

2. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에 놓인 곡면 M 위의 점 p에서 모든 접벡터(tangent vector)의 집합을 $T_{\mathrm{p}}(M)$, p에서의 주벡터(principal vector) 중 하나를 e라 하자. $T_{\mathrm{p}}(M)$에 속하는 단위접벡터(unit tangent vector) v와 e의 사잇각을 θ라 할 때, p에서 v 방향으로의 법곡률(normal curvature) $\kappa_n(\theta)$가

$$\int_0^{\pi} \kappa_n(\theta)\, d\theta = \frac{11\pi}{8}$$

를 만족한다고 하자. 점 p에서 곡면 M의 가우스곡률(Gaussian curvature)이 $\frac{3}{2}$일 때, p에서 M의 주곡률(principal curvature)의 값을 모두 쓰시오. (단, 주벡터는 주곡률방향(주방향, principal direction)의 단위접벡터이다.) [2점, 기입형B] [2022]

서술형B [3∼11]

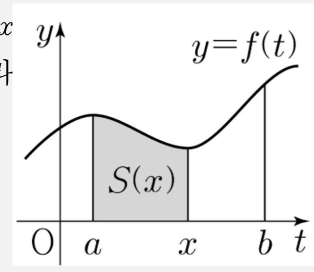
3. 다음은 2015 개정 수학과 교육과정(교육부 고시 제 2020−236호)의 선택 과목 <수학Ⅱ>의 '정적분' 수업에 대한 두 교사의 대화이다.

임 교사: 정적분 수업을 준비하면서 고등학교에서 다루는 수학 개념은 대학에서 공부했던 수학 개념과는 차이가 있다는 것을 느꼈습니다. 예를 들어 정적분을 정의하는 방식이 그렇습니다. 정적분은 리만적분의 개념을 고등학생들의 학습 수준을 고려하여 의도적으로 변형한 것으로 보입니다.

정 교사: 맞습니다. 그래서 수학을 가르칠 때는 ㉠지식의 파손성에 유의할 필요가 있습니다. 고등학교에서 정적분을 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수로 한정하여 정의하더라도, 학생들이 불연속 함수에 대해서는 정적분을 아예 정의할 수 없다고 생각하지 않도록 주의할 필요가 있습니다. 실제로 ㉡<수학Ⅱ>의 함수의 극한과 연속 영역에서 다룰 수 있는 함수 중에도 닫힌구간 $[0, 2]$에서 불연속이지만 리만적분 가능한 함수 $f(x)$의 예는 많으니까요.

임 교사: 그런데 이전 교육과정에 비해 정적분의 정의 방식이 달라졌습니다. 그래서 저는 달라진 방식에 따라 정적분의 정의를 제시한 뒤, 몇 가지 예를 통해 정적분의 값을 구해 보게 합니다. 선생님께서는 정적분 개념을 어떻게 지도하시나요?

정 교사: 저는 먼저 미적분의 기본 정리와 아이디어를 이용하여 정적분의 넓이 측정과 관련되어 있다는 것을 다음과 같이 설명합니다.

> 함수 $f(t)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(t) \geq 0$이라 하자.
> 곡선 $y=f(t)$와 t축 및 두 직선 $t=a$, $t=x$ $(a \leq x \leq b)$로 둘러싸인 영역의 넓이를 $S(x)$라 하자.
>
> 
>
>
> $t \to x$일 때 $\dfrac{S(t)-S(x)}{t-x} \to f(x)$이므로
> $S'(x)=f(x)$이다.
> $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면 다음을 얻는다.
> $S(x)=F(x)=C$ (단, C는 상수)
>
> ⋯ (중략) ⋯
>
> $S(b)=($ ㉢ $)$

이로부터 (㉢)을/를 $f(t)$의 a에서 b까지의 정적분이라 정의합니다.

임 교사: 선생님과 제 수업 모두 ㉣2015 개정 수학과 교육과정의 <수학Ⅱ> 적분 영역에 제시된 교수 · 학습 방법 및 유의 사항을 반영했습니다. 그 결과 정적분의 도입 및 설명 방식은 다르지만, 정적분의 정의는 같네요.

밑줄 친 ㉠의 의미를 쉐발라드(Y. Chevallard)의 교수학적 변환론의 관점에서 서술하고, 밑줄 친 ㉡을 1가지 쓰시오.
또한, 괄호 안의 ㉢에 공통으로 해당하는 내용을 쓰고, 두 교사의 정적분 도입 및 설명 방식이 다른 이유를 밑줄 친 ㉣의 내용을 근거로 설명하시오. [4점, 서술형B] [2022]

4. 다음은 ‘확률’에 대한 중학교 수업의 일부이다.

교　사: 우리가 공부한 확률의 뜻을 이용해서 문제를 풀어보세요.

> [확률의 뜻] 어떤 실험이나 관찰에서 각각의 경우가 일어날 가능성이 같다고 할 때, 일어날 수 있는 모든 경우의 수를 n, 어떤 사건 A가 일어나는 경우의 수를 a라고 하면 사건 A가 일어날 확률 p는
>
> $$p=\frac{a}{n}$$
>
> [문제] 1이 적힌 카드와 2가 적힌 카드가 각각 2장씩 있다. 4장의 카드 중에서 2장의 카드를 동시에 뽑아 각 카드에 적힌 두 수를 곱했을 때 1이 나올 확률을 구하시오,

교　사: <학생 A의 풀이>를 같이 볼까요?

> <학생 A의 풀이>
>
> 카드에 적힌 수 1, 2를 서로 곱해서 나올 수 있는 값은 1, 2, 4로 모두 3가지이다. 일어날 수 있는 모든 경우의 수는 3이므로, 확률은 $\frac{1}{3}$ 이다.

교　사: <학생 A의 풀이>에 대하여 의견 있나요?

학 생 B: 저는 다르게 풀었습니다. 일어날 수 있는 모든 경우의 수가 6이므로, 답은 $\frac{1}{6}$입니다.

학 생 A: 학생 B의 의견을 들어보니, 문제를 풀 때 ㉠[확률의 뜻]에서 제가 확인하지 않은 부분이 있네요.

…(중략)…

교　사: 이번에는 컴퓨터 프로그램을 이용해서 [문제]를 다시 살펴봅시다. 카드 2장을 뽑는 횟수를 입력하면 $\frac{(\text{두 수의 곱이 1이 되는 횟수})}{(\text{카드 2장을 뽑는 횟수})}$의 값이 나오는 모의실험 프로그램을 작성해 두었습니다. 여러분은 카드 2장을 뽑는 횟수만 입력하면 됩니다.

학 생 B: 선생님, 10을 입력하니까 0.2, 30을 입력하니까 0.3, 50을 입력하니까 0.24가 나왔어요. $\frac{1}{6}$과는 차이가 큰 것 같아요.

학 생 A: 저는 10을 입력하니까 0.4, 20을 입력하니까 0.4, 30을 입력하니까 0.2가 나왔어요. 저도 $\frac{1}{6}$과 차이가 큰 것 같아요.

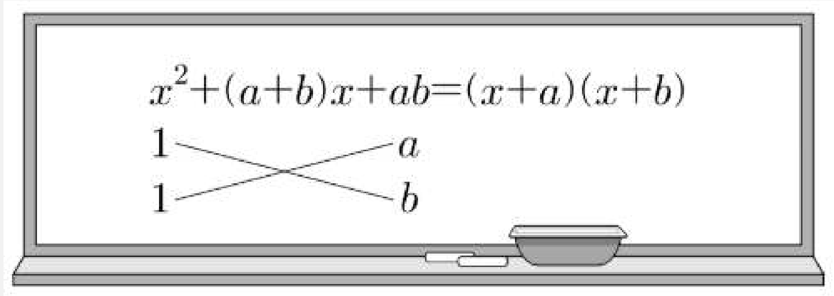
교　사: 그럼 이렇게 해보세요. (　　　　㉡　　　　)

학 생 B: 선생님 말씀대로 했더니 $\frac{1}{6}$에 가까워지는 값이 나오네요.

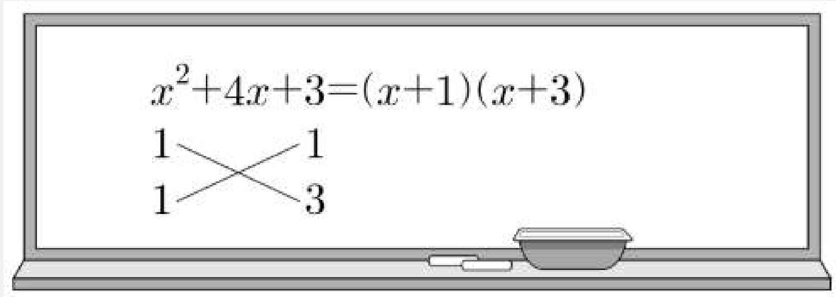
밑줄 친 ㉠의 ‘확인하지 않은 부분’이 무엇인지 쓰고, 학생 A가 ㉠과 같이 말한 이유를 <학생 A의 풀이>를 이용하여 설명하시오. 또한, 괄호 안의 ㉡에 들어갈 교사의 발문 1가지를 쓰고, 컴퓨터 프로그램을 이용하여 [문제]를 다시 살펴본 의의를 폴리아(G. Polya)의 문제 해결 과정 중 반성 단계의 측면에서 서술하시오. [4점, 서술형B] [2022]

5. 다음은 ‘이차식의 인수분해’에 대한 중학교 수업의 일부이다.

교　사: 이차식 $x^2+(a+b)x+ab$를 인수분해하는 방법을 알아보겠습니다. 이런 유형의 이차식은 다음과 같은 방법으로 인수분해하면 됩니다.



예를 들어 x^2+4x+3은 다음과 같이 인수분해할 수 있습니다.



$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$를 공책에 쓰고 암기하세요. 이 방법을 사용해서 인수분해할 수 있는 문제 20개를 준비했습니다. 활동지 문제를 풀면서 방법을 연습해 봅시다.

> **활동지**
>
> 다음 이차식을 인수분해하시오.
>
> (1) $x^2+4x-5=$
>
> (2) $x^2+4x+4=$

학생 A: 다 풀었어? 우리끼리 답 맞춰 보자.

학생 B: (1)번은 답이 뭐야?

학생 A: $(x+5)(x-1)$이야.

학생 B: 나랑 똑같네. 왜 그렇게 인수분해가 되는지 설명할 수 있어?

학생 A: 그건 몰라. 그런데 오늘 배운 방법을 외우고 있으면 $x^2+(a+b)x+ab$꼴의 이차식의 인수분해는 전부 다 할 수 있어. (2)번 답도 맞춰 보자.

학생 B: (2)번은 $(x+2)^2$이야. $x^2+2ax=a^2=(x+a)^2$을 이용하면 돼. 그런데 ab가 a^2이 될 수는 없으니까 오늘 배운 방법은 이용할 수 없을 것 같아.

위에 제시된 교사의 수업에서 나타날 수 있는 극단적인 교수 현상을 의미하는 브루소(G. Brousseau)의 용어를 쓰고, 그 판단 근거를 수업 내용과 관련지어 설명하시오.

또한, $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$에 대한 학생 A의 이해 상태를 의미하는 스켐프(R. Skemp)의 용어를 쓰고, 밑줄 친 부분에서 학생 B가 가지고 있을 것으로 예상되는 문자에 대한 오개념 1가지를 제시하시오. [4점, 서술형B] [2022]

6. 집합 $X=\{a, b, c\}$ 위에 $\mathscr{B}=\{\{a\}, \{a, b\}, \{c\}\}$를 기저(base, basis)로 갖는 위상 $\mathfrak{I}_{\mathscr{B}}$가 있다. 위상공간 $(X, \mathfrak{I}_{\mathscr{B}})$ 위에서 정의된 점렬(점열, sequence of points)

$$x_n = \begin{cases} a & (n\text{은 홀수}) \\ b & (n\text{은 짝수}) \end{cases}$$

의 극한(limit)을 쓰시오.
또한, 위상공간 $(X, \mathfrak{I}_{\mathscr{B}})$에서 공집합이 아닌 임의의 서로소인 두 닫힌집합(closed set) F_1, F_2에 대하여

$$F_1 \subset G_1,\ F_2 \subset G_2,\ G_1 \cap G_2 = \varnothing$$

을 만족하는 열린집합(open set) G_1, G_2가 존재함을 보이시오. [4점, 서술형B] [2022]

7. 확률변수 X의 적률생성함수(moment generating function) $M_X(t)$가

$$M_X(t) = \frac{1}{(1-2t)^4} \quad \left(t < \frac{1}{2}\right)$$

이다. 확률변수 X의 분산을 풀이 과정과 함께 쓰시오.
또한, X_1, X_2, $\cdots$, X_{100}이 적률생성함수가 $M_X(t)$인 분포로부터 뽑힌 확률표본일 때, 이들의 평균 $\overline{X}=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i$에 대하여 $\overline{X}$가 9 이상이 될 확률은 중심극한정리(central limit theorem)를 적용하면 근사적으로 $P(Z \geq c)$이다. 상수 c의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, Z는 표준정규분포를 따르는 확률변수이다.) [4점, 서술형B] [2022]

8. 합동식 $x^5 \equiv 23 \pmod{35}$의 정수해 x를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, x는 35와 서로소이고 $0 \leq x \leq 34$이다.) [4점, 서술형B] [2022]

9. 정수 b를 자연수 m으로 나눈 나머지를 b_m이라고 할 때,
자연수 n에 대하여 환 준동형사상(ring homomorphism)
$\psi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{2^n} \times \mathbb{Z}_5$를 $\psi(a, b) = (a, a, b_{2^n}, b_5)$로 정의하자.
ψ의 상(치역, image) $\mathrm{Im}(\psi)$의 단원(unit, unit element)의 개수가 2^7인 자연수 n을 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $\mathbb{Z}$는 정수환이고 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$와 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{2^n} \times \mathbb{Z}_5$는 환의 직접곱(직적, 직합, direct product, external direct sum)이다.) [4점, 서술형B] [2022]

10. 자연수 n에 대하여 함수 $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$를

$$f_n(x) = \frac{8(\sin x)^{2n-1}\cos x}{1+(\sin x)^{2n}}$$

로 정의하자. $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+2}$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.
또한, 함수항 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$가 닫힌구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서 균등수렴(평등수렴, 고른수렴, uniform convergence)하는지를 판별하고 그 이유를 쓰시오. [4점, 서술형B] [2022]

11. 복소수 $z=x+iy$ (x, y는 실수)에 대한 함수

$$f(z) = e^{-3y}\cos(ax) + bx^2 - 4y^2 + iv(x, y)$$

가 정함수(entire function)가 되도록 하는 양의 실수 a, b의 값과, 이 때의 $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)$의 값을 각각 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $v(x, y)$는 실숫값 함수이다.) [4점, 서술형B] [2022]

기입형A [1~4]

1. 다음은 대표적인 수학교육 개혁운동 2가지를 설명한 것이다. (가)와 (나)에 해당하는 수학교육 개혁운동의 명칭을 순서대로 쓰시오. [2점, 기입형A] [2023]

(가)	19세기 말과 20세기 초부터 유럽과 미국을 중심으로 수학의 실용성을 강조하고 학생의 심리적 측면을 고려하는 방향으로 수학교육을 개혁하려는 운동이 일어났다. 영국의 페리(J.Perry), 독일의 클라인(F.Klein), 미국의 무어(E. Moore) 등이 이 운동에서 주도적인 역할을 하였는데, 여러 국가 사이의 협력을 통해 개혁을 추구하는 방향으로 전개되었다. 하지만 제1차와 제2차 세계대전이 일어나면서 더 진전되지 못했다.
(나)	제2차 세계대전의 종전 이후에 세계적으로 수학교육을 개혁하려는 운동이 다시금 전개되었다. 듀돈네(J.Diedonné)는 ‘현대수학의 내용과 방법을 학교수학에 조기에 도입하는 것’, ‘대수적 구조와 논리적 엄밀성을 강조하는 것’과 같은 개혁방향을 제안하였다. 이 같은 방향으로 이 운동을 구체화하는 시도가 여러 국가에서 이루어졌다. 하지만 급진적 개혁을 성급하게 추구한 나머지, 교육적으로 많은 부작용을 초래하였다.

2. 실수 a에 대하여 좌표평면의 영역 $D(a)$를

$$D(a)=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le(1+a)^2\}$$

이라 할 때, 중적분 $\iint_{D(a)}(x^2+y^2)dA$를 구하시오.

또한 좌표공간의 영역 Ω를

$$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le(1+z)^2,\ 0\le z\le 1\}$$

이라 할 때, 삼중적분 $\iiint_{\Omega}z(x^2+y^2)dV$의 값을 구하시오. [2점, 기입형A] [2023]

3. 2차원 유클리드 평면에 곡선

$$\alpha(t)=(2\sin t-\sin 2t,\ 2\cos t-\cos 2t)\ \ (0<t<\pi)$$

가 있다. 곡선 α의 $t=\frac{\pi}{2}$에서의 접촉원(osculating circle)의 중심(곡률중심, center of curvature)과 반지름(곡률반경, radius of curvature)을 구하시오. [2점, 기입형A] [2023]

4. 어떤 정책에 대한 A, B 두 도시 시민의 의견을 알아보기 위하여 각 도시에서 확률표본을 선택하여 이 정책에 대한 찬성 여부를 알아본 결과는 다음과 같다.

	A 도시	B 도시
표본의 수	350명	160명
정책에 찬성한 비율	0.7	0.8

A, B 두 도시의 이 정책에 대한 찬성 비율을 각각 p_1, p_2라 할 때, 찬성 비율의 평균 $\frac{p_1+p_2}{2}$에 대한 90% 신뢰구간은 $(a-1.645\times b,\ a+1.645\times b)$이다. a, b의 값을 각각 구하시오.
(단, 확률변수 Z가 $N(0,1)$을 따를 때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.645)=0.45$로 계산한다.) [2점, 기입형A] [2023]

서술형A [5~12]

5. 다음은 대푯값을 다루는 중학교 수업의 일부이다.

교 사:	선생님이 칠판에 적은 ㉠5개의 수는 cm단위를 빼고서 우리 학교 농구팀 주전 선수 5명의 신장을 적은 것입니다. 이 자료의 대푯값으로 평균이 적합할까요?
학 생 1:	여기서는 평균이 대푯값으로 적합하지 않은 것 같은데요.
학 생 2:	우리 농구팀 주전 선수들의 구성이 좀 특이해서, 평균 신장이 5명의 신장 자료를 대표하는 것 같지 않아요.
교 사:	그렇다면, 평균 말고 우리 농구팀 주전 선수들의 신장 자료를 대표하는 새로운 값을 생각해 볼까요?
	[이후에 농구팀의 신장 자료의 대푯값으로 중앙값 개념을 도입하는 교수・학습을 한다. 그리고 어떤 신발 가게에서 하루동안 팔렸던 신발 치수의 자료를 다루는데, 중앙값 개념을 도입할 때와 비슷한 방식으로 이 자료를 대표하는 새로운 값을 찾으면서 최빈값 개념을 도입하는 교수・학습을 한다.]
교 사:	지금까지 자료의 대푯값으로 평균, 중앙값, 최빈값 개념을 배웠습니다. 이제 선생님이 나누어 준 학습지를 가지고 모둠 활동을 할 것인데요.
학생들:	무슨 활동을 하는데요?
교 사:	생활 주변, 사회 및 자연 현상에서 나온 자료의 특징을 잘 살펴보면서, 어느 대푯값이 어떤 상황 속의 어떤 자료에 대해 유용하게 사용될 수 있는지 토론할 거예요. 그리고 상황과 자료에 따라 대푯값을 구하는 활동도 할 거예요.

밑줄 친 ㉠의 자료는 평균이 대푯값으로 사용되기에 적절하지 않은 사례로서 수업에서 중앙값을 도입하기 위하여 제시된 것이다. 밑줄 친 ㉠의 자료로 적합한 ‘5명 신장의 예’를 제시하고, 예시한 자료의 특성을 설명하시오. 또한 2015 개정 수학과 교육과정(교육부 고시 제2020-236호)의 ‘교수・학습 방법’에서 수학적 문제 해결 능력으로서의 수학적 모델링 능력의 신장을 위해 강조한 사항을 쓰고, 이 강조 사항이 이 수업에서 어떻게 반영되고 있는지를 기술하시오, [4점, 서술형A] [2023]

6. 다음은 강 교사와 임 교사가 학기 초에 수학 교과의 평가 방법을 논의하면서 나눈 대화의 일부이다.

강 교사: 이번 학기에는 ㉠학생이 일정 기간 동안 시험지, 단순 과제물, 프로젝트 형태의 결과물, 수학 일기 등을 모아 제출하고, 교사가 이 제출물에 기초하여 학생의 학습 내용 이해뿐만 아니라 관련된 교과 역량을 종합적으로 평가하면 좋을 것 같습니다.

임 교사: 네. 학생과 협력하여 목표 영역을 정하고, 장시간에 걸친 학생들의 수학 학습 수행과 그 결과물을 정해진 준거에 따라 평가하고 활용하는 방법이군요.

강 교사: 그렇습니다. 이 평가 방법을 지난 학기에 사용했을 때 학생이 제출한 예시 자료를 보여 드릴게요.

제목: ○○○의 위대한 수학 산책

1. 목차

___학년 ___반 ___번
이름: ○○○

주제(평가 내용)	완성한 날짜	비고
1. 학년 초 수학 진단평가	20△△. 3. 5.	수업 중
2. 다항식 단원의 수학 오답 노트	20△△. 4. 15.	과제
3. 함수 단원의 모둠 활동지 모음	20△△. 5. 17.	수업 중
4. 컴퓨터로 배우는 수학 : 일차함수의 그래프 그리기	20△△. 5. 21.	수업 중
5. 실생활 속의 일차함수 프로젝트	20△△. 6. 10.	과제

임 교사: ㉡협력 학습 상황에서 동료의 역할 수행 정도나 집단 활동에 기여한 정도를 학생들이 서로 평가한 기록지를 제출물에 추가하면 좋겠어요.

밑줄 친 ㉠, ㉡의 평가 방법의 명칭을 2015 개정 수학과 교육과정(교육부 고시 제 2020−236호)의 '평가 방법'에 제시된 용어로 순서대로 쓰시오. 또한 2015 개정 수학과 교육과정의 '평가 원칙'에 제시된 수학과 평가의 목적을 기술하고, 그 목적의 관점에서 밑줄 친 ㉠의 평가 방법이 갖는 장점을 1가지 서술하시오. [4점, 서술형A] [2023]

7. 실수 a에 대하여 함수 $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$를

$$u(x,y)=x^2-2xy+ay^2+4x-6y$$

라 하자. $a=-1$일 때 적분 $\int_0^{2\pi}u(1+2\cos\theta,2\sin\theta)d\theta$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.
또한 $a=2$일 때 $u(x,y)$의 최솟값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형A] [2023]

8. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_0=2,\ a_{n+1}=-2(n+1)a_n+3(n+1)!\quad(n\ge 0)$$

을 만족시킨다. $b_n=\dfrac{a_n}{n!}$ $(n\ge 0)$인 수열 $\{b_n\}$의 생성함수(generating function) $f(x)$를 풀이 과정과 함께 쓰시오.
또한 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형A] [2023]

9. 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간 $\mathbb{R}^3$에 대하여 선형변환 $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$을

$$L(x_1,x_2,x_3)=(x_1-2x_2+x_3,\,x_2-x_3,\,-x_2+x_3)$$

으로 정의하고, $\mathbb{R}^3$의 순서 기저(ordered basis) α를

$$\alpha=\{(1,1,1),\,(0,1,1),\,(1,0,1)\}$$

이라 하자. 순서 기저 α에 대한 L의 행렬 $[L]_\alpha$를 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 $[L]_\alpha$가 대각화가능인지 판별하고 그 이유를 쓰시오. [4점, 서술형A] [2023]

10. 집합 $K=\left\{\frac{1}{n}\,\middle|\,n\text{은 자연수}\right\}$에 대하여 집합 Ω를

$$\Omega=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbb{R},\,a<b\}\cup\{(a,b)-K\mid a,b\in\mathbb{R},\,a<b\}$$

라 하고, Ω를 기저로 하는 $\mathbb{R}$ 위의 위상을 $\mathfrak{I}$라 하자. 위상 공간 $(\mathbb{R},\mathfrak{I})$에서 K의 도집합(derived set, set of accumulation points) K'을 풀이 과정과 함께 쓰시오,
또한 $[0,1]$이 $(\mathbb{R},\mathfrak{I})$의 컴팩트(comapact, 옹골) 부분집합인지 판별하고 그 이유를 쓰시오,
(단, $(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$이고 $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x\le b\}$이다.) [4점, 서술형A] [2023]

11. 자연수 n에 대하여 함수 $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$를

$$f_n(x)=(nx)^n(1-x)^{n^2}$$

으로 정의하고, f_n의 최댓값을 M_n이라 하자. 거듭제곱 급수(멱급수, power series) $\sum_{n=1}^{\infty}M_nx^n$의 수렴반경(수렴반지름, radius of convergence)을 풀이 과정과 함께 쓰시오.
또한 함수항 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$가 $[0,1]$에서 고른수렴(평등수렴, 균등수렴, uniform convergence)하는지 판별하고 그 이유를 쓰시오. [4점, 서술형A] [2023]

12. K는 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위에서 다항식 $x^{13}-1$의 분해체(splitting field)이다. 갈루아군(Galois group) $G(K/\mathbb{Q})$에 대하여 집합 X를

$$X=\{\sigma\in G(K/\mathbb{Q})\mid K_{\langle\sigma\rangle}=\mathbb{Q}\}$$

라 하자. X의 원소 개수를 구하고 X의 원소 각각에 대하여 $\zeta=e^{\frac{2\pi i}{13}}$의 상(image)을 ζ의 거듭제곱으로 나타내시오.
또한 K의 원소

$$\beta=\zeta+\zeta^3+\zeta^4+\zeta^9+\zeta^{10}+\zeta^{12}$$

의 $\mathbb{Q}$ 위에서의 기약다항식(최소다항식, irreducible polynomial) $\mathrm{irr}(\beta,\mathbb{Q})$를 풀이 과정과 함께 쓰시오.
(단, $K_{\langle\sigma\rangle}$는 σ로 생성되는 순환군(cyclic group) $\langle\sigma\rangle$의 고정체(fixed field)이고, $i=\sqrt{-1}$이다.) [4점, 서술형A] [2023]

기입형B [1~2]

1. 다음은 라카토스(I.Lakatos)의 오류주의 수리철학에 대한 두 교사의 대화의 일부이다. 괄호 안의 ㉠, ㉡에 해당하는 용어를 순서대로 쓰시오. [2점, 기입형B] [2023]

최 교사:	라카토스는 수학의 중요한 개념들이 보조정리합체법을 사용하면서 나온 경우가 있다고 하였습니다.
이 교사:	그렇습니다. 라카토스는 그러한 개념을 (㉠) 개념이라 불렀는데요. 어떤 추측에 대한 반례가 나왔을 때, 증명을 분석하는 활동을 통해 감추어진 보조정리를 드러내어 원래의 추측에 합체하는 과정 속에서 나오는 개념이라 그렇게 명명한 것으로 알고 있습니다.
최 교사:	수학의 역사에서 볼 때, 평등수렴(균등수렴, uniform convergence) 개념이 그러한 (㉠) 개념의 대표적인 사례라 할 수 있을 것 같습니다. "각 항이 연속함수인 함수항 급수가 수렴하면 그 극한함수도 연속이다."라는 추측에 대한 반례가 나왔을 때, 증명을 분석하는 활동을 통해 평등수렴 개념을 도출한 것이지요.
이 교사:	이러한 수학 지식의 발달 과정을 토대로 하여, 라카토스는 증명에 독특한 성격을 부여했습니다. 그는 증명에 대해 '비판을 용이하게 하는 일종의 사고실험'이라 하였는데, 이것은 수학과 과학 사이의 유사성을 드러내기 위한 것이라 할 수 있습니다.
최 교사:	맞습니다. 라카토스 본인도 두 학문이 발달하는 과정 사이의 유사성에 대해 강조한 적이 있습니다. 과학적 지식이 생성되는 과정과 유사한 방식으로, 수학적 지식은 추측-증명-반례의 등장-증명분석-추측의 개선과 새로운 개념의 출현이 끊임없이 반복되면서 발전하기에, 라카토스는 수학을 (㉡) 과학이라 부른 적이 있습니다.
이 교사:	그러고 보니, 라카토스의 오류주의 수리철학을 흔히 (㉡)주의 수리철학이라 부르는 것도 일리가 있네요.

2. 좌표평면 $\mathbb{R}^2$에서 거리함수 $d:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$를 다음과 같이 정의하자.

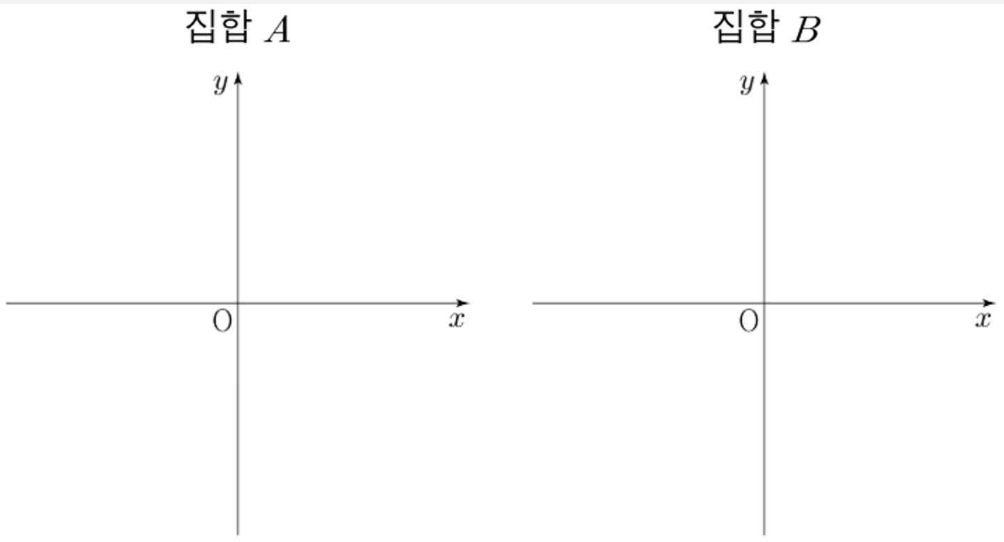
$$d(P,Q)=\begin{cases}\|P\|+\|Q\|, & \|P\|\neq\|Q\| \\ \|P-Q\|, & \|P\|=\|Q\|\end{cases}$$

거리공간 $(\mathbb{R}^2, d)$에서 열린집합(open set)

$$A=\{P\in\mathbb{R}^2 \mid d(P,(2,0))<4\},$$
$$B=\{P\in\mathbb{R}^2 \mid d(P,(2,0))<1\}$$

을 좌표평면에 그림으로 순서대로 나타내시오.

(단, $\|(x,y)\|=\sqrt{x^2+y^2}$이다.) [2점, 기입형B] [2023]



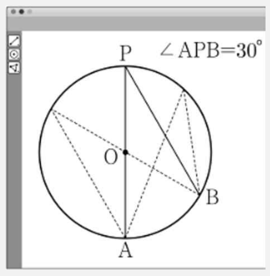
서술형B [3~11]

3. (가)는 김 교사가 탐구형 소프트웨어를 활용하여 원주각의 성질을 지도하는 수업의 일부이다. (나)는 피아제(J. Piaget)와 딘즈(Z. Dienes)의 이론에 대한 오 교사와 김 교사의 대화의 일부이다.

(가)

김 교사: 점 P를 원 O 위에서 움직이면서 원주각 ∠APB의 크기가 어떻게 변하는지 관찰해 봅시다. 여러분, 점 P를 원 O 위의 호 AB를 제외한 부분에서 움직이면 ∠APB의 크기가 어떻게 변화하나요?

학 생 1: 점 P를 움직여도 ∠APB의 크기가 30° 로 변하지 않았어요.



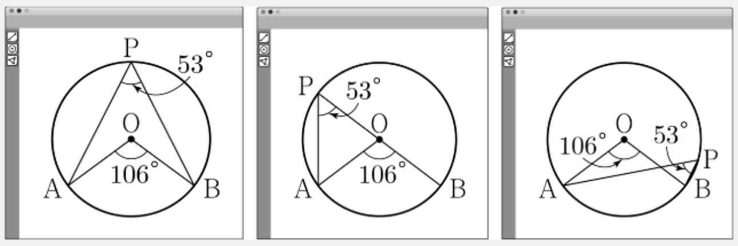
김 교사: 잘 관찰했습니다. 이번에는 원 O에서 점 B를 움직여 호 AB의 길이를 바꾼 후 점 P를 움직여 보세요. 원주각의 크기가 어떻게 변화하나요?

학 생 2: 점 P를 움직였는데, 호 AB에 대한 원주각이 여러 개 생기지만 그 크기는 항상 같았어요.

김 교사: 이제 원주각의 크기와 중심각의 크기 사이의 관계를 관찰해 봅시다. 이때도 점 P를 원 O 위의 호 AB를 제외한 부분에서 움직이면서 중심각 ∠AOB의 크기와 원주각 ∠APB의 크기의 측정값을 비교해 보세요. 무엇을 발견했나요?

학 생 1: 원주각 ∠APB의 크기가 중심각 ∠AOB의 크기의 $\frac{1}{2}$인 것 같아요.

김 교사: 네, 그렇네요. 한 호에서 여러 개의 원주각을 만들 수 있어요. 점 P를 원 O 위의 호 AB를 제외한 부분에서 더 움직여 보면서 원주각과 중심각의 크기를 좀 더 관찰해 봅시다.



학 생 2: 점 P의 위치와 관계 없이 ∠APB는 호 AB에 대한 원주각이고 그때 각의 크기가 같으니까, 원주각과 중심각의 크기의 관계는 언제나 똑같아요. 원주각의 크기는 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$입니다.

김 교사: 잘 관찰했습니다. 지금까지 탐구형 소프트웨어를 활용해 관찰한 원주각의 성질을 문장으로 만들어 봅시다. 누가 발표해 볼까요?

학 생 1: 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같습니다. 그리고 한 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$입니다.

김 교사: 잘 만들었어요. 이제, 이러한 성질을 자세하게 분석해 봅시다.

[이후, 원주각의 크기와 중심각 크기 사이의 관계를 연역적으로 정당화하는 교수·학습이 이루어진다.]

(나)

오 교사: 피아제는 반영적 추상화를 내용과 형식의 끊임없는 교대 작용으로 설명합니다. 피아제의 영향을 받은 딘즈도 지식의 성장 과정을 같은 방식으로 설명합니다. 구체적으로, 딘즈는 지식의 성장 과정을 개폐연속체 개념으로 설명합니다.

김 교사: 닫힌 상태는 '형식'으로 정리된 상태인데, 그 다음에 열린 상태는 '내용'으로 열리게 된 것이지요?

오 교사: 맞습니다. 이런 의미에서 딘즈는 수학 교수·학습 원리 중 하나로 ㉠ '수학적 대상을 먼저 구성하고 그 대상에 대해 분석해야 한다.' 라는 원리를 제안한 바 있는데, 물론 분석한 결과인 '닫힌' 형식은 그 다음 수준에서는 '열린' 상태의 탐구 내용이 됩니다.

딘즈의 수학적 다양성의 원리가 (가)에서 어떻게 적용되고 있는지를 수업 내용과 관련시켜 구체적으로 서술하시오. 또한 딘즈의 밑줄 친 ㉠의 원리의 명칭을 쓰고, 이 원리가 (가)에서 어떻게 적용되고 있는지를 서술하시오. [4점, 서술형B] [2023]

4. (가)는 정 교사와 박 교사가 평행사변형의 지도에 대해 나눈 대화의 일부이고, (나)는 박 교사가 중학교에서 평행사변형의 성질을 지도하는 수업의 일부이다.

(가)

정 교사: 완성된 수학의 논리적인 전개 순서를 반영하여 평행사변형의 성질을 지도하는 것이 수월하다고 생각해요. 평행사변형의 정의를 먼저 제시한 후 그 성질들 각각을 정당화하도록 하는 방식이 논리적이지 않나요?

박 교사: 저는 다른 방식으로 지도합니다. 학생들에게 평행사변형의 정의를 처음부터 제시하지 않고, ▱처럼 생긴 도형을 평행사변형으로 부르도록 안내한 후 평행사변형의 성질을 먼저 찾아보게 합니다. 그런 다음, ㉠ 학생들이 찾은 평행사변형의 성질들이 서로 어떻게 관련되는지를 탐구하게 합니다.

(나)

박 교사: 여러분, 평행사변형은 어떤 성질이 있는 도형인지 말해봅시다.

학 생 1: 평행사변형은 두 쌍의 대변이 각각 평행하고 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같고, 두 대각선은 서로를 이등분해요. 그리고 두 쌍의 대각의 크기가 각각 같고, 이웃하는 두 내각의 크기의 합은 180°예요.

박 교사: 잘 알고 있네요. 그럼 여러분이 찾은 평행사변형의 성질들 사이의 관계를 살펴봅시다. 서로 어떤 관계가 있을까요?

학 생 1: 평행사변형에서 두 쌍의 대변이 각각 평행하다는 것과 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같다는 것은 서로 관계가 없는 것 같은데요. 잘 모르겠어요.

프로이덴탈(H. Freudenthal)의 국소적 조직화 관점에서 (가)의 박 교사가 밑줄 친 ㉠을 통해 평행사변형의 정의를 지도하는 방식을 지칭하는 용어를 쓰고, 그 방식을 설명하시오.
또한 반 힐레(P. van Hiele)의 기하 학습 수준 이론에서 학습 수준을 제1수준～제5수준으로 구분할 때, (나)에서 학생 1의 기하 학습 수준을 쓰고, 그렇게 판단한 근거를 설명하시오. [4점, 서술형B] [2023]

5. 다음은 어떤 교수가 예비교사를 대상으로 분석법을 다루는 수업의 일부이다.

예비교사: 옛날 사람들이 삼각형의 내접원을 작도하는 방법을 처음에 어떻게 찾았는지 궁금해요.

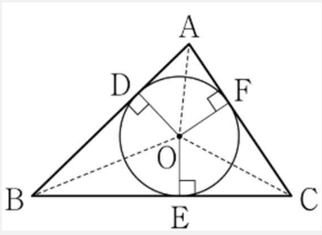
교　　수: 분석법을 통해 찾은 것으로 알려져 있는데요. 우리도 직접 찾아보도록 하지요. 작도법을 찾는 문제는 일종의 답을 찾는 문제라 할 수 있으니까, 방정식 문제를 해결할 때처럼 해 봅시다. 먼저, 분석법을 적용해서 방정식 문제를 해결할 때 어떻게 시작했나요?

예비교사: (㉠)

교　　수: 네. 그렇습니다. 삼각형에 내접하는 원의 작도법을 찾는 문제를 해결할 때에도 같은 방식으로 시작해 봅시다. 그럼, 이 작도 문제를 해결할 때 어떻게 시작하면 될까요?

예비교사: (㉡)

교　　수: 그림을 그릴게요. 원의 중심 O로부터 삼각형의 각 변 AB, BC, CA에 각각 수선의 발 D, E, F를 내려 봅시다. 세 수선의 길이는 서로 어떻게 되나요?



예비교사: 원의 반지름이니까, 서로 같아요.

교　　수: 원의 중심 O에서 $\triangle ABC$의 각 꼭짓점으로 선분 OA, OB, OC를 그어 볼까요? 그러면, $\triangle ODB$와 $\triangle OEB$는 서로 어떤 관계인가요?

예비교사: 서로 합동이 돼요. RHS 합동이니까요.

교　　수: $\triangle ODA$와 $\triangle OFA$는 어떤 관계이고, $\triangle OFC$와 $\triangle OEC$는 어떤 관계인가요?

예비교사: 마찬가지로, RHS 합동에 의해 서로 합동이 돼요.

교　　수: 그러면 선분 OA, OB, OC에 의해 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$는 각각 어떻게 되나요?

예비교사: 이등분이 돼요.

교　　수: 그런데 지금까지 유도된 결과들을 잘 살펴보면, ‘작도법’이 무엇인지 짐작할 수 있어요. 예를 들어, $\angle A$와 $\angle B$를 이등분하는 두 직선의 교점을 찾고 그 교점으로부터 수선의 발을 내리게 되면, 앞의 것은 원의 중심을 작도하는 것이고 뒤의 것은 원의 반지름을 작도하는 것이라는 생각이 들지 않나요?

예비교사: 정말 그럴듯한데요. 삼각형의 내접원을 작도하는 법을 어떻게 추측해 냈는지 알 것 같아요.

괄호 안의 ㉠, ㉡에 적합한 내용을 순서대로 쓰시오. 또한 분석법이 지니는 수학교육적 의미를 1가지 기술하고, 이를 뒷받침하는 근거를 이 수업에서 찾아 제시하시오. [4점, 서술형B] [2023]

6. 가우스 정수환(ring of Gaussian integers) $\mathbb{Z}[i]=\{a+bi \mid a,\ b\in\mathbb{Z}\}$는 유클리드 노름(Euclidean norm)이 $\nu(a+bi)=a^2+b^2$인 유클리드 정역(Euclidean domain)이다. $\alpha=1-3i$와 $\beta=3-4i$를 포함하는 $\mathbb{Z}[i]$의 가장 작은 아이디얼(이데알, ideal)을 I라 하자. $\eta\neq0$인 $\eta\in I$에 대하여 $\nu(\eta)$의 최솟값과 잉여환(상환, factor ring, quotient ring) $\mathbb{Z}[i]/I$의 표수(characteristic)를 각각 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $i=\sqrt{-1}$이다.) [4점, 서술형B] [2023]

7. 구간 $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수 $f(x)=\tan x$의 역함수를 $g:\mathbb{R}\to\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$라 하자. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left\{g\left(1+\frac{3}{n}\right)-g(1)\right\}$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 $\int_0^\infty \frac{g(x)}{1+x^2}\,dx$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B] [2023]

8. 두 확률변수 X와 Y의 결합확률밀도함수(joint probability density function) $f(x,y)$를

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & 0<x<2-y<1\\ 0, & \text{그 외의 경우}\end{cases}$$

라 하고 확률변수 Z를 $Z=Y-X$라 하자. Z의 누적분포함수(cumulative distribution function) $G(z)$를 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 $g(z)$를 Z의 확률밀도함수(probability density function)라 할 때, $\mathrm{P}\left(g(Z)>\frac{1}{2}\right)$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B] [2023]

9. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 두 곡면 M, N을

$$M=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2-y^2-z=0\right\},$$
$$N=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=1\right\}$$

이라 하고, 곡선 γ를 M과 N의 교선이라 하자. 곡면 M에 놓인 곡선으로서 γ의 점 $p=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$에서의 측지곡률(geodesic curvature)과 법곡률(normal curvature)을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B] [2023]

10. $11\le k\le 20$인 정수 k에 대하여 합동식

$$x^2+23x-k\equiv 0 \pmod{75}$$

의 정수해가 존재하지 않도록 하는 모든 k의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B] [2023]

11. 복소방정식 $z^3-z-4=0$이 영역 $\{z\in\mathbb{Z} \mid |z|<2\}$에서 갖는 근의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원을 시계반대방향으로 한 바퀴 도는 곡선을 C라 할 때, 선적분 $\int_C \frac{1}{(z-3)(z^3-z-4)}\,dz$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.
(단, 다중근의 경우 중복되는 수만큼 근의 개수로 인정한다.) [4점, 서술형B] [2023]

※ 다음 정리는 필요하면 증명 없이 사용할 수 있다.

함수 $f(z)$와 $g(z)$가 단순닫힌곡선(simple closed curve) γ와 그 내부에서 해석적이라 하자. 곡선 γ 위의 모든 점 z에 대하여 부등식 $\lvert g(z)\rvert<\lvert f(z)\rvert$이 성립하면 두 함수 $f(z)$와 $f(z)+g(z)$는 γ 내부에서 같은 개수의 영점(zero)를 갖는다.

기입형A [1～4]

1. 다음은 수학교육론 수업에서 오수벨(D. Ausubel)의 유의미 수용학습을 다룬 수업 자료의 일부이다. (가)가 설명하는 ‘지식’과 (나)가 설명하는 ‘원리’를 순서대로 쓰시오. [2점, 기입형A] [2024]

(가) 유의미 수용학습이 이루어지기 위한 조건 중 하나는 학습자의 인지구조 내에 학습 과제와 관련이 있는 ‘지식’, 즉 유의미한 학습 과제를 받아들일 수 있는 ‘지식’이 있어야 한다는 것이다.

(나) 유의미 수용학습을 촉진하는 교수・학습 전략 중 하나로, 낯선 새로운 아이디어의 학습이 가능하려면 새로운 아이디어는 반드시 기존의 낯익은 아이디어와 충분하게 식별되어야 한다는 ‘원리’가 있다. 예를 들어, 학생이 경우의 수 단원에서 조합의 의미를 새롭게 학습할 때, 이전에 배운 순열의 의미와 어떻게 유사하고 차이가 있는지를 충분히 식별하는 기회를 가져야 한다는 것이다.

2. 복소평면에서 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원을 시계반대방향으로 한 바퀴 도는 곡선 C에 대하여 적분

$$\int_C \bar{z}\,dz - \frac{1}{z}\,d\bar{z}$$

의 값을 구하시오. (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.) [2점, 기입형A] [2024]

3. 순환군(cyclic group) G의 한 부분군(subgroup) H에 대하여 G에서의 H의 지수(index) $|G:H|$는 520이다. 잉여군(상군, factor group, quotient group) G/H의 생성원(generator)의 개수를 구하시오. 또한, G/H의 한 생성원 aH와 G의 한 부분군 K에 대하여 $K/H = \langle (aH)^{35} \rangle$일 때, $G/H = (K/H)(L/H)$를 만족시키는 G의 부분군 L의 개수를 구하시오. [2점, 기입형A] [2024]

4. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡선 C를

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = e^{ax},\ yz = b\} \text{ (단, } a,\ b\text{는 상수)}$$

라 하자. 곡선 C와 $yz-$평면의 교점 P에서 곡선 C의 접선(tangent line)이 점 $(2\sqrt{2}, 3, -1)$을 지날 때, $a^2 + b^2$의 값과 점 P에서의 곡률(curvature)을 순서대로 구하시오. [2점, 기입형A] [2024]

서술형A [5～12]

5. 다음은 강 교수가 예비교사를 대상으로 형식 불역의 원리를 다루는 수업의 일부이다.

강 교수: 지금까지 음수 지도를 형식적인 관점에서 접근하는 형식 불역의 원리를 설명했습니다. 그런데 프로이덴탈(H. Freudenthal)은 이를 ‘기하적・대수적 형식 불역의 원리’로 확장합니다. 여러분, 오른쪽과 같은 정수의 나눗셈을 어떻게 기하적인 방법으로 접근할 수 있을까요?

$2 \div 2 = 1$
$1 \div 2 = \frac{1}{2}$
$0 \div 2 = 0$
$(-1) \div 2 = ?$
$(-2) \div 2 = ?$

예비교사 A: 잘 모르겠어요.

강 교수: 자, 주어진 나눗셈 식에서 나누는 수는 얼마인가요?

예비교사 A: 나누는 수는 2입니다.

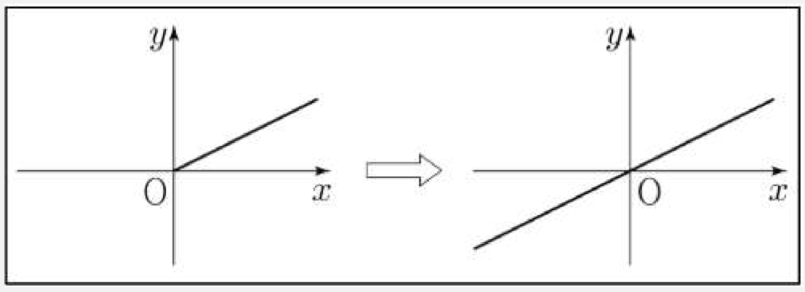
강 교수: 그렇습니다. 그럼 이 연산을 함수로 이해해 봅시다. 나누어지는 수 x에 연산 결과 y를 대응시킨다고 할 때, y는 얼마인가요?

예비교사 B: $x \div 2$, 즉 $\frac{x}{2}$입니다.

강 교수: 네, 맞습니다. 그런데 음수의 연산을 아직 배우지 않은 학생들이 할 수 있는 나눗셈 식은 어디까지인가요?

예비교사 A: $0 \div 2 = 0$입니다.

강 교수: 맞아요. 음수가 도입되기 전까지는 이 함수의 x의 범위가 $x \geq 0$으로 제한됩니다. 그런데 x의 범위를 음수까지 확장하면 다음과 같이 함수 $y = \frac{x}{2}$의 그래프가 변화하게 됩니다.



예비교사 B: 결국 $x < 0$일 때 $x \div 2$가 어떻게 정해져야 하는지를 알 수 있는 거네요.

강 교수: 그렇습니다. 예를 들어, 주어진 그래프에서 x좌표가 -4일 때의 y좌표를 구하면 나눗셈 식 (㉠)을/를 유도할 수 있습니다.

예비교사 A: ㉡이렇게 음수의 나눗셈을 기하적인 방법으로 해석하다니 정말 창의적인 것 같습니다.

강 교수: 맞아요. 일차함수의 그래프를 배운 후에 음수의 연산을 새로운 관점에서 보는 자료로 활용하면 좋을 것 같습니다.

괄호 안의 ㉠에 들어갈 나눗셈 식을 쓰고, ‘기하적・대수적 형식 불역의 원리’의 의미를 위의 수업 장면과 관련지어 기하적 측면과 대수적 측면에서 설명하시오. 또한, 밑줄 친 ㉡에서 가장 두드러지게 나타나는 수학 교과 역량의 명칭을 2022 개정 수학과 교육과정에 제시된 용어로 쓰시오. [4점, 서술형A] [2024]

6. 다음은 '수학평가론'의 강의 내용을 요약한 공책의 일부이다.

<과제 1> 다음 [문제]에 대한 채점기준표를 만들고, [예시답안]을 채점하시오.

[문제]

두 함수 $f(x)=\log_n x$, $g(x)=1-\log_n(x+4)$의 그래프가 구간 $1<x<2$에서 만나도록 하는 모든 n의 값의 합을 구하시오. (단, $n\ge 2$인 자연수이다.) [4점]

[예시답안]

교점을 (x,y)라 하면, 방정식 $\log_n x = 1-\log_n(x+4)$이므로 방정식 $x^2+4x-n=0$은 실근을 가진다. 이차함수의 그래프에 적용하면 직선 $x=-2$를 축으로 하는 포물선이므로, $1<x<2$에서 실근을 가지려면 $D\ge 0$, $f(1)>0$, $f(2)>0$이다. 따라서 $n\ge -4$, $n<5$, $n<12$이므로, n의 값은 2, 3, 4이다. 합은 9이다.

o 우리가 만든 채점기준표

채점기준표 A

채점 요소	배점
o 백지 혹은 오답 이외 다른 내용이 없음	0
o 문제를 이해한 듯하나, 겨우 풀기 시작함	1
o 합리적으로 풀었지만, 중요한 실수로 옳은 풀이를 방해함	2
o 문제는 해결했지만, 단순한 계산 실수로 답을 구하지 못함	3
o 적절한 방법을 사용하여 문제를 해결하고 답을 구함	4

채점기준표 B

채점 영역	채점 요소	배점
문제 이해	o 방정식을 이용하고 있음	1
문제 해결	o 방정식 $x^2+4x-n=0$을 제시함	1
	o 구간 $1<x<2$에서 해가 존재할 조건을 제시하고, 모든 n의 값을 구함	1
답 구하기	o 모든 n의 값의 합을 정확히 구함	1

o [예시답안]의 채점 점수

채점기준표 A에 의한 점수는 (㉠)점이고, 채점기준표 B에 의한 점수는 (㉡)점이다.

<과제2> 채점기준표 A에 의한 채점 방법과 비교하였을 때, 채점기준표 B에 의한 채점 방법이 가지는 장점 1가지를 적으시오.

괄호 안의 ㉠과 ㉡에 들어갈 점수를 순서대로 쓰고, 괄호 안의 ㉡에 들어갈 점수를 부여한 이유를 채점기준표 B에 근거하여 설명하시오. 또한, <과제 2>에 대한 답을 적고, 장점의 이유를 채점기준표 B에 의한 채점 방법의 의미에 근거하여 서술하시오. [4점, 서술형A] [2024]

7. 좌표평면의 영역

$$D(t)=\{(x,y)\mid x\ge 0,\ y\ge 0,\ x^2+y^2\le 1,\ x+y\ge t\}\quad (0\le t\le 1)$$

과 함수 $f(x,y)=\sqrt{|8x^2+8y^2-1|}$에 대하여

$g(t)=\iint_{D(t)} f(x,y)\,dxdy$라 하자.

$g(0)$과 $g'\left(\frac{1}{2}\right)$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형A] [2024]

8. 모든 성분이 실수인 3×3 행렬 A과 행렬 $B=A^2-A+5I$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 행렬 $A-3I$는 역행렬을 갖지 않는다.
> (나) 행렬 A의 특성방정식(고유방정식, characteristic equation)은 허근 α를 가지고 $|\alpha|=\sqrt{2}$이다.
> (다) 행렬 B의 최소다항식(minimal polynomial)의 차수는 B의 특성다항식(고유다항식, characteristic polynomial)의 차수보다 낮다.

행렬 A의 모든 고윳값(eigenvalue)과 대각합(trace) 및 행렬식(determinant)을 각각 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, I는 3×3 단위행렬이다.) [4점, 서술형A] [2024]

9. 보통 위상(usual topology)이 주어진 4차원 좌표공간 $\mathbb{R}^4$에서

$$A=\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 \mid a^2+b^2=1,\ c^2+d^2=1,\ ac+bd=0\}$$

이 컴팩트(긴밀, 옹골, compact) 집합임을 보이시오. 또한, 집합 A에서 정의된 함수 $f(a,b,c,d)=ad-bc$의 치역을 구하고, 이를 이용하여 집합 A가 연결집합(connected set)인지 판별하고 그 이유를 쓰시오. [4점, 서술형A] [2024]

10. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_n=\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx$$

일 때, $a_{n+1}=f(n)a_n$을 만족시키는 $f(n)$을 구하고, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^{\alpha}$이 수렴하는 실수 α의 범위를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형A] [2024]

※ 다음 식은 필요하면 증명 없이 사용할 수 있다.

> 모든 자연수 n에 대하여
> $$n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\le n!\le n^{n+\frac{1}{2}}e^{1-n}$$
> 이다.

11. 연속확률변수 X의 누적분포함수(cumulative distribution function) $F(x)$가 연속인 순증가함수(strictly increasing function)라 하자. 확률변수 $F(X)$의 확률밀도함수(probability density function)를 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한, $\mathrm{P}(-2<\ln F(X)<1)$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형A] [2024]

12. 체(field) K를 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위에서 $x^{23}-88$의 분해체(splitting field)라 하자. K의 $\mathbb{Q}$ 위에서의 차수(degree) $[K:\mathbb{Q}]$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한, $[K:E]-[E:\mathbb{Q}]$가 1010의 양의 약수이고 $\mathbb{Q}\le E\le K$를 만족시키는 체 E의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형A] [2024]

기입형B [1~2]

1. 다음은 2022 개정 중학교 수학과 교육과정의 변화에 대한 두 교사의 대화이다. 괄호 안의 ㉠, ㉡에 해당하는 용어를 순서대로 쓰시오. [2점, 기입형B] [2024]

> 정 교사: 2022개정 중학교 수학과 교육과정에서 영역 명칭의 변화가 있네요.
> 송 교사: 맞아요. 초등학교와 중학교의 연계성을 강화하기 위해서 초등학교와 통일하여 제시한 것으로 알고 있습니다.
> 정 교사: 네. 2015 개정 중학교 수학과 교육과정의 '문자와 식' 영역과 '함수' 영역을 통합하여 (㉠) 영역으로 제시한 거군요.
> 송 교사: 그렇습니다. '확률과 통계' 영역도 '자료와 가능성' 영역으로 명칭이 바뀌었어요.
> 정 교사: 그럼 자료와 가능성 영역의 '내용 체계(표)의 지식·이해 범주의 내용 요소' 중에서, 2015 개정 중학교 수학과 교육과정의 확률과 통계 영역의 '내용 체계(표)의 내용 요소'와 비교해서 변화된 내용이 있을까요?
> 송 교사: 네. 다음은 자료와 가능성 영역의 내용 체계(표)의 일부인데요. '상자그림'이 새롭게 추가된 것을 확인할 수 있습니다.
>
> | 구분 / 범주 | 내용 요소 | | |
> |---|---|---|---|
> | | 중학교 | | |
> | | 1~3학년 | | |
> | 지식·이해 | • (㉡)
• 도수분포표와 상대도수 | • 경우의 수와 확률 | • 산포도
• 상자그림과 산점도 |
>
> 정 교사: 그렇군요. 내용 요소에 제시된 (㉡), 도수분포표, 상대도수, 확률, 산포도, 상자그림, 산점도는 자료와 가능성 영역의 '성취기준 적용 시 고려 사항'에 자료와 가능성 영역에서 다루는 용어로 제시되어 있습니다.

2. 포아송분포(Poisson distribution) $Poisson(5)$로부터의 확률표본(random sample) X_1, X_2, $\cdots$, X_n에 대하여
$\overline{X}$를 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i$라 하자. $\mathrm{E}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\right)=140$일 때,
n의 값을 구하시오. [2점, 기입형B] [2024]

※ 다음은 필요하면 사용할 수 있다.

> 확률변수 X가 $Poisson(\lambda)$를 따르면
> $\mathrm{P}(X=x)=\dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$이다.

서술형B [3~11]

3. 다음 (가)는 '함수의 연속'에 대한 박 교사의 수업의 일부이고, (나)는 박 교사가 수업 후에 최 교사와 나눈 대화이다.

> (가)
> 박 교사: 지금부터 연속에 대해서 배워볼게요. 여러분, 평소에 연속이라는 말을 들어보았나요?
> 학 생 A: 네, 3년 연속 우승이라고 할 때 연속이요.
> 학 생 B: 선생님, 연속 촬영도 있어요.
> 박 교사: 좋아요 여러분이 말한 것은 실생활에서 사용되는 연속이네요. 그럼 이제는 수학과 관련해서 연속이라는 말을 어떤 의미로 사용하였는지 말해볼까요?
> 학 생 A: 보통 선이나 그래프가 끊어지지 않고 이어져 있을 때를 연속이라고 한 것 같아요.
> 박 교사: 그렇군요. 여러분 모두 그동안 연속이라는 말을 실생활이나 수학에서 사용해 온 것 같네요. 그런데 수학에서는 몇 가지 조건으로 '함수의 연속'을 정의하고 있습니다. 예를 들어, 함수 $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & (x\ge 1)\\ 2x & (x<1)\end{cases}$이 $x=1$에서 연속인지 불연속인지를 어떻게 판단할까요?
> 학 생 B: 그래프를 그려서 그래프가 이어져 있는지 확인해 봐요.
> 박 교사: 네, 좋은 생각이긴 하지만, 함수의 그래프는 연속을 시각적으로 확인하는 보조적인 수단에 불과합니다. 함수의 연속은 수학적 정의로 판단해야 하는데요. 함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 세 가지 조건을 모두 만족시킬 때, $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 합니다.
> …(중략)…
> 박 교사: 지금까지 $x=a$에서 함수 $f(x)$가 연속일 조건을 알아보고, 이와 관련된 문제를 풀어보았어요. 혹시 질문이 있나요?
> 학 생 들: 아니요.
> 박 교사: 그렇다면, $x=a$에서 함수 $f(x)$가 연속일 조건을 말해볼까요?
> 학 생 들: 함숫값 $f(a)$와 극한값 $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)$가 존재해야 하구요. $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$이어야 합니다.
> 박 교사: 좋아요. 여러분 모두 아주 잘 이해하고 있네요.
>
> (나)
> 박 교사: 오늘 수업 시간에 함수 $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & (x\ge 1)\\ 2x & (x<1)\end{cases}$이 $x=1$에서 연속인지 판단하고 했더니, 일부 학생들은 연속의 정의보다는 그래프가 이어져 있는지를 확인하려는 모습을 보였습니다.
> 최 교사: 저도 같은 경험을 했어요. 학생들은 연속 개념의 형식적 정의보다는 그래프가 끊어지지 않고 연결되어 있다는 (㉠)에 영향을 많이 받는 것 같습니다.
> 박 교사: 맞아요. 그런데 함수 개념에 대한 이해가 불완전한 학생들도 있어요. 오늘 수업에서 학생 C는 앞의 $f(x)$에 대해서, $y=x^2+1(x\ge 1)$과 $y=2x(x<1)$은 각각 함수이지만 이를 함께 제시한 $f(x)$는 함수가 아니라고 주장하더군요.
> 최 교사: 네, 학자들은 함수 학습과 관련해서 개념 정의와 (㉠)의 불일치, 인식론적 장애에서 비롯되는 어려움을 이야기하는데요. ㉡<u>학생C의 어려움은 그중의 하나로, 함수 개념의 역사적 발달 과정에서도 나타난 경향입니다.</u>
> 박 교사: 동의합니다.

브루소(G. Brousseau)의 교수학적 상황론의 관점을 바탕으로 (가)의 수업 상황에서 박 교사가 학생들의 개인화와 배경화를 돕고 있다고 볼 수 있는 근거를 기술하고, 학생들의 탈개인화와 탈배경화된 지식을 확인하기 위한 교사의 발문 1가지를 찾아 제시하시오. 또한, 비너(S. Vinner)의 관점에서 (나)의 괄호 안의 ㉠에 들어갈 용어를 쓰고, 밑줄 친 ㉡에 해당하는 함수 학습과 관련된 어려움을 서술하시오. [4점, 서술형B] [2024]

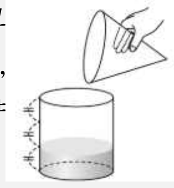
4. 다음은 중학교 입체도형의 부피에 대한 수업 자료의 일부이다.

(가) 1차시 수업 자료: 원뿔의 부피

o 학생의 사전 지식: 밑면의 반지름의 길이가 r이고 높이가 h인 원기둥의 부피는 $V=\pi r^2 h$이다.

o <탐구활동 1>

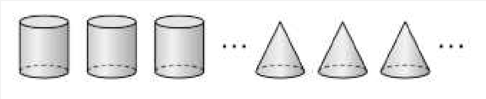
- 밑넓이와 높이가 각각 같은 원기둥과 원뿔 모양의 그릇이 있다. 원뿔모양의 그릇에 물을 가득 채운 다음, 원기둥 모양의 그릇에 물을 옮겨 붓는다. 원기둥 모양의 그릇에 물이 가득 찰 때까지 반복한다.



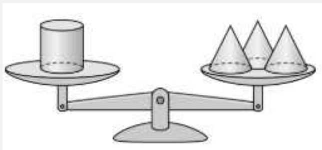
- [물음 1] 밑넓이와 높이가 같은 원기둥과 원뿔의 부피 사이의 관계를 적으시오.

o <탐구활동 2>

- 재질이 같고, 밑넓이와 높이가 각각 같은 원기둥과 원뿔 모양의 나무조각이 충분히 주어져 있다.



- 수평인 접시저울의 왼쪽 접시에 원기둥 모양의 나무조각을 몇 개 올려놓은 다음, 오른쪽 접시에는 원뿔 모양의 나무조각을 올려놓아, 저울이 수평이 되도록 한다. 활동을 여러 번 실행하고 결과를 관찰한다. (단, 접시저울이 수평이 되면, 양쪽 접시 위에 있는 물체의 부피는 서로 같다.)

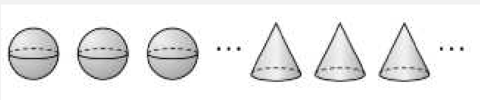


- [물음 2] 위 활동의 결과를 도식으로 표현하고, 원기둥의 부피(V_1)와 원뿔의 부피 (V_2) 사이의 관계를 기호로 표현하시오.

(나) 2차시 수업 자료: 구의 부피

o <탐구활동 3>

- 재질이 같고, 반지름의 길이가 r인 구 모양의 나무조각과 밑면의 반지름의 길이가 r이고 높이가 $2r$인 원뿔 모양의 나무조각이 충분히 주어져 있다.



- 수평인 접시저울의 왼쪽 접시에 구 모양의 나무조각을 몇 개 올려놓은 다음, 오른쪽 접시에는 원뿔 모양의 나무조각을 올려놓아, 저울이 수평이 되도록 한다. 활동을 여러 번 실행하고 결과를 관찰한다.
- [물음 3] 위 활동의 결과를 ㉠도식으로 표현하고, 원뿔의 부피(V_2)와 구의 부피(V_3) 사이의 관계를 ㉡기호로 표현하시오.
- [물음 4] 밑면의 반지름의 길이가 r이고 높이가 $2r$인 원기둥의 부피 공식, 반지름의 길이가 r인 구의 부피 공식을 적으시오.

(나)에 따른 수업에서 구의 부피 공식을 발견하는 과정을 <탐구활동 2>와 <탐구활동 3>에 근거하여 설명하시오. 또한, (나)의 [물음 3]에 밑줄 친 서로 다른 2가지 표현(representation) 방식 ㉠과 ㉡의 명칭을 브루너(J. Bruner)의 학습이론에 근거하여 순서대로 쓰고, [물음 3]에서 교사가 기대하는 밑줄 친 ㉠과 ㉡에 대한 학생의 반응을 각각 1가지씩 제시하시오. [4점, 서술형B] [2024]

5. 다음은 수학적 모델링과 수학화 과정에 대한 자료이다.

(가) 현실적 문제 상황

[1단계] 작은 소품 상자가 필요해서 문구점에서 한 변의 길이가 12cm인 정사각형 모양의 판지를 구입했다. 네 귀퉁이에서 같은 크기의 정사각형을 잘라내어, 남은 부분으로 뚜껑이 없는 최대 부피를 가지는 직육면체 모양의 소품 상자를 만드는 현실적 문제 상황을 탐구한다.

(나) 미국수학교사협의회(NCTM)의 수학적 모델링 과정

o '(가)'를 [1단계]로 하는 '수학적 모델링' 과정의 설명과 예시

[2단계]

설명 (㉠)

예시 (㉡)

[3단계]

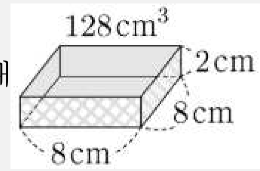
설명 수학적 분석을 실시한다.

예시 직육면체의 밑면은 한 변의 길이가 $12-2x$인 정사각형이고, 높이가 x이므로 $V(x)=x(12-2x)^2$이다.
$V'(x)=12(x-2)(x-6)$이므로, $0<x<6$에서 $V(x)$의 증가와 감소에 의해서 $x=2$에서 $V(x)$는 최대가 된다.

[4단계]

설명 현상에 맞도록 재해석하여 결론을 도출한다.

예시 판지의 네 귀퉁이에서 잘라내는 정사각형의 한 변의 길이를 2cm로 하면, 상자의 최대 부피는 128cm^{3}이다.



(다) 현실주의적 수학교육 이론의 수학화 과정

o '(가)'를 [1단계]로 하는 '수학화' 과정의 설명

[2단계] 현실 내의 문제 상황을 형식적인 수학적 처리가 가능하도록 변환하는 과정이다.

[3단계] 세련된 좀 더 높은 수학적 처리가 가능하도록 하는 과정이다.

[4단계] 개념을 새로운 문제에 적용함으로써 개념을 강화하고 일반화하는 과정이다.

'(가)'가 (나)와 (다)의 [1단계]가 될 수 있는 이유를, '수학적 모델링'과 '수학화'의 개념과 함께 서술하시오. 또한, (나)의 괄호 안의 ㉠과 ㉡에 들어갈 내용을 제시하시오. [4점, 서술형B] [2024]

6. 다항식환(polynomial ring) $\mathbb{Z}_n[x]$의 주 아이디얼(principal ideal) $I=\langle x^2+ax+1-a\rangle$에 대하여 잉여환(상환, factor ring, quotient ring) $\mathbb{Z}_n[x]/I$가 홀수인 표수(특성, characteristic)를 갖고 위수(order)가 40 이하인 정역(integral domain)이 되도록 하는 정수의 순서쌍 (n, a)를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $0 \le a < n$이다.) [4점, 서술형B] [2024]

7. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡면

$$M: x^2+4y^2+4z^2=4,\ 0<x<\frac{4\sqrt{5}}{5},\ 0<z<\sqrt{3}y$$

위의 점 $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$에서의 가우스곡률(Gaussian curvature) K를 구하시오. 또한, 곡면 M에서의 가우스 곡률합(가우스 전곡률, total Gaussian curvature) $\iint_M K\,dA$를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, dA는 곡면 M의 면적소(area element)이다.) [4점, 서술형B] [2024]

8. 수열 $\{a_n\}$이 $a_0=a_1=0,\ a_n=1\ (n \ge 2)$를 만족시킬 때, $\{a_n\}$의 생성함수(generating function) $f(x)$를 구하시오.

또한, 수열 $\{b_n\}$이 $0<x<1$에서 $\sqrt{f(x)}=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$을 만족시킬 때, b_5의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B] [2024]

9. r을 홀수인 소수 p의 원시근(primitive root)이라 하고 $X=\{k \in \mathbb{N} \mid 1 \le k < p-1,\ \gcd(k, p-1)=1\}$이라 하자. 임의의 a, $b \in X$에 대하여 r^{ab}이 p의 원시근임을 보이시오.

또한, a, $b \in X$에 대하여 $r^{ab} \equiv r^a \pmod{p}$ 또는 $r^{ab} \equiv r^b \pmod{p}$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수를 $|X|$의 식으로 나타내고, 이러한 순서쌍의 개수가 15가 되도록 하는 모든 소수 p의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $|X|$는 집합 X의 원소의 개수이다.) [4점, 서술형B] [2024]

10. 자연수 n에 대하여 함수 $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$이

$$f_n(x)=\frac{x}{1+e^{nx}}+\sum_{k=0}^{n-1} x^k\left(e^{-kx}-e^{-(k+1)x}\right)$$

일 때, 함수열 $\{f_n\}$이 $[0, \infty)$에서 고른수렴(평등수렴, 균등수렴, uniform convergence)함을 보이시오. 또한, $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B] [2024]

11. 실숫값을 갖는 두 함수 $u(x, y)$, $v(x, y)$와 복소수 $z=x+iy$ (x, y는 실수)에 대하여 복소함수 $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$는 정함수(전해석함수, entire function)이다.

$\overline{f(\bar{z})}$가 정함수임을 보이시오. 또한, $f'(i)=\pi$, $f(-i)=1$이고 모든 실수 x, y에 대하여

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)\frac{\partial v}{\partial y}(x, y)-\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) > (u(x, -y))^2+(v(x, -y))^2$$

일 때, $\dfrac{f'(1-i)}{f(1+i)}$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.

(단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.) [4점, 서술형B] [2024]

기입형A [1 ~ 4]

1. (가)는 일차방정식 수업을 마친 후 학생 A가 쓴 자기성찰지의 일부이고, (나)는 강 교사가 학생 A를 관찰하고 작성한 수업일지의 일부이다. 괄호 안의 ㉠, ㉡에 해당하는 용어로 순서대로 쓰시오 [2점, 기입형A] [2025]

(가)

오늘 수업 시간에 등식의 성질 ‘$a=b$이면, $a+c=b+c$’를 이용하여 일차방정식 $x-3=7$을 푸는 방법을 배웠다. 그런데 일차방정식은 x에 특정한 수를 넣어도 참이 되는 이유가 궁금해졌다. 선생님이 해 주신 설명을 들었는데도 아직 잘 모르겠다. 그리고 선생님께서 일차방정식 $x-3=7$과 $y-3=7$의 해가 같은지를 질문하셨다. 나는 문자 x와 y가 달라서 당연히 이 두 방정식의 해가 다를 것이라고 대답했다. 선생님이 이 두 방정식의 해가 같은 이유를 설명해 주셨는데, 아직도 그 이유가 잘 이해되지 않는다.

(나)

학생 A는 등식의 성질에서 사용된 문자 c가 특정한 수를 나타내는 것이 아니라 임의의 수를 나타낸다는 것을 이해하지 못하는 것으로 보인다. 또한 방정식에서 문자가 바뀌면 방정식의 해도 바뀐다고 생각하고 있는데, 방정식에서 문자를 임의로 선택할 수 있다는 것을 이해하지 못하는 것으로 파악된다. 이상에서 학생 A는 (㉠) 개념에 대한 인지장애를 가지고 있는 것으로 보인다. (㉠)은/는 주로 문자로 표현되며 다양한 측면을 가지고 있다. 그중에 $x-3=7$에서와 같이 방정식의 해를 나타내는 x는 자리지기로서의 (㉡)(으)로 사용된 경우이고, 등식의 성질 ‘$a=b$이면, $a+c=b+c$’에 쓰인 문자 a, b, c는 일반화의 표현을 위해 사용된 경우이다. 앞으로 학생 A에게 방정식의 문자 x가 나타내는 (㉡) 개념과 이를 포괄하는 (㉠) 개념을 최대한 쉽게 설명해 주는 기회를 마련해야겠다.

2. 좌표평면의 영역 D를

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1\le xy\le 1,\ a\le x\le a+1\}\ (\text{단, } a\text{는 양수})$$

이라 하고, 이 영역의 경계를 시계반대방향으로 한 바퀴 도는 곡선을 C라고 하자. 영역 D의 넓이가 $2\ln 2$일 때, a의 값과 선적분

$$\int_C (2x-y)dx+(2x-y)dy$$

의 값을 순서대로 구하시오. [2점, 기입형A] [2025]

3. 표수(characteristic)가 a인 체 F에 대하여 군 G는 직접곱(직적, direct product) $\mathbb{Z}_4\times F^*$이다. 군 G가 160 이하의 위수(order)를 갖는 순환군(cyclic group)이 되도록 하는 체 F 중에서 서로 동형(isomorphic)이 아닌 것의 개수를 b라고 하자.

이때, a와 b의 값을 순서대로 구하시오. (단, $\mathbb{Z}_4$는 덧셈 순환군이고, F^*는 체 F의 영(zero)이 아닌 모든 원소로 구성된 곱셈군이다.) [2점, 기입형A] [2025]

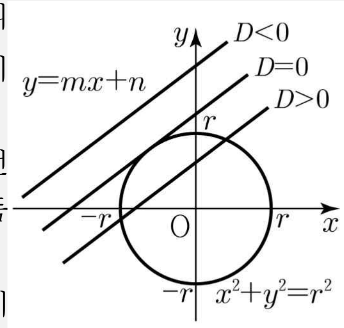
4. 서로 독립인 확률변수 X_1, X_2, $\cdots$, X_9가 모두 표준정규분포 $N(0,1)$을 따른다. 확률변수 Y를 $Y=\sum_{i=1}^{9}(-1)^{i+1}X_i$라고 하면 $\mathrm{P}(Y\ge -7)=\mathrm{P}(X_1\le a)$를 만족시키는 실수 a가 존재한다.

이때, Y의 분산 $\mathrm{V}(Y)$와 a의 값을 순서대로 구하시오. [2점, 기입형A] [2025]

서술형A [5 ~ 12]

5. (가)는 신임 교사가 작성한 교수·학습 지도안의 개요이고, (나)는 이 개요에 대해 신임 교사와 수석 교사가 나눈 대화이다. <작성 방법>에 따라 서술하시오. [4점, 서술형A] [2025]

(가)

학습 목표	좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 판단할 수 있다.
단계	교수·학습 활동
도입	• 실생활 상황을 제시하여 동기 유발 활동을 한다. • 학습 목표를 확인한다.
전개	• 직선의 방정식 $y=mx+n$을 원의 방정식 $x^2+y^2=r^2$에 대입하여 이차방정식을 얻는다. • ‘이차방정식으로부터 원과 직선의 위치 관계 도출하기’를 모둠별 토론 주제로 제시한다. • 이차방정식의 판별식 D의 부호에 따른 원과 직선의 위치 관계를 정리한다. • 원과 직선의 위치 관계에 관한 문제를 푼다. 
정리	• 본시 학습 내용을 정리한다.

(나)

수석 교사: 전개 단계에서 토론 주제를 제시한 이유가 있나요? 신임 교사: 네. 원과 직선의 위치 관계에 이차방정식의 판별식을 이용하는 이유도 모른 채 암기한 절차를 적용하는 것이 아니라, ㉠ <u>왜 그런지를 알고 그 절차도 연역</u>할 수 있게 하려는 의도입니다. 수석 교사: 좋습니다. 그런데 원과 직선의 위치 관계를 판별식으로만 판단하고 있는데요, 최근에 배운 내용을 이용하는 다른 방법으로는 무엇이 있을까요? 신임 교사: 아, 생각났어요. (㉡) 그럼 이 방법을 추가하는 것으로 수정하겠습니다. 수석 교사: 한 가지가 더 있습니다. 이차방정식의 판별식을 이용하여 원과 직선의 위치 관계를 도출하기 전에 학생들이 그 방법을 추론해 보게 하는 것은 어떨까요? 신임 교사: <공통수학1>에서 배운 ‘이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계’와 연결하라는 말씀이시군요. 수석 교사: 네. 엄밀한 논리적 전개가 아니더라도 학생의 추론 역량 함양을 위해서는 개연적 추론도 중요합니다. 신임 교사: 그럼 ㉢<u>학생의 추론을 유도하는 적절한 발문을 준비해 보겠습니다.</u>

<작성 방법>

- o 밑줄 친 ㉠에 해당하는 용어를 스켐프(R. Skemp)가 제시한 이해의 관점에서 쓸 것.
- o 괄호 안의 ㉡에 들어갈 방법을 <공통수학2>의 ‘도형의 방정식’에서 학습한 내용을 이용하여 제시할 것.
- o 밑줄 친 ㉢에 해당하는 개연적 추론 유형을 쓰고, 이 추론을 유도하는 적절한 발문 1가지를 제시하되, 폴리아(G. Polya)가 제시한 문제 해결의 ‘계획 수립’ 단계에 근거할 것.

6. 다음은 지도 교수와 예비 교사가 나눈 대화이다. <작성 방법>에 따라 서술하시오. [4점, 서술형A] [2025]

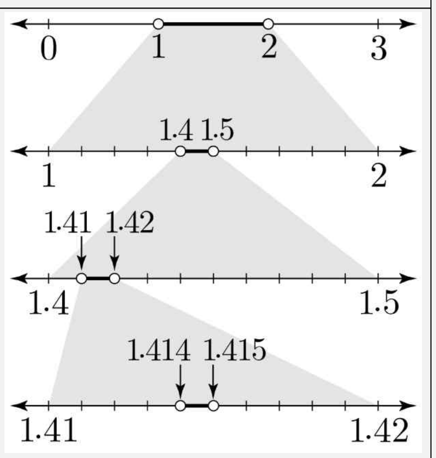
예비 교사: 교육 실습 때 중학생을 가르쳐 보니 학생들이 무리수 개념을 이해하기 어려워하는 것 같았습니다.

지도 교수: 역사적으로 수학자들이 무리수 개념을 수용하는 데 오래 걸렸다고 하니, 학생들이 어려움을 겪는 것은 이해가 되지요. 스파드(A. Sfard)는 수 개념의 역사적 발달 과정 속에서 수학적 정의와 표상이 '과정으로서의 조작적 방법'과 '대상으로서의 (㉠)적 방법'의 두 가지 형태가 교대로 나타나면서 수학적 개념이 형성된다고 보았습니다.

예비 교사: 아하, 두빈스키(E. Dubinsky)의 APOS 이론과도 비슷한 관점이군요.

지도 교수: 맞습니다. 무리수 개념을 예로 들면, $\sqrt{2}$와 같은 무리수를 도입할 때, 제곱근의 대소 관계를 이용하여 $\sqrt{2}$가 순환하지 않는 무한소수임을 다음과 같이 직관적으로 설명합니다.

$1^2 < 2 < 2^2$이므로 $1 < \sqrt{2} < 2$이다.
$1.4^2 = 1.96$, $1.5^2 = 2.25$이므로
$1.4^2 < 2 < 1.5^2$이고
$1.4 < \sqrt{2} < 1.5$임을 알 수 있다.
또, $1.41^2 = 1.9881$, $1.42^2 = 2.0164$이므로
$1.41^2 < 2 < 1.42^2$이고
$1.41 < \sqrt{2} < 1.42$임을 알 수 있다.
이를 반복하여 $\sqrt{2}$를 소수로 나타내면
$1.41421356237309504880 1\cdots$이다.

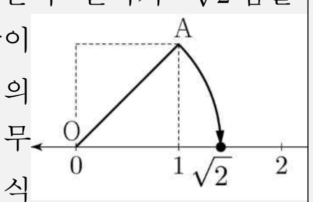


예비 교사: 이렇게 동일한 조작을 반복하면, $\sqrt{2}$의 소수부분이 끝없이 계속되는 상태, 즉 '가능적 무한'임을 직관적으로 알게 되겠군요.

지도 교수: 그렇지요, 이 단계의 학생들은 무리수가 실제로 존재하는 수인지 아직 이해하기 어려워하기도 하지요.

예비 교사: 정말 그렇습니다. 어떻게 설명하면 학생들이 잘 이해할까요?

지도 교수: 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이가 $\sqrt{2}$임을 이용할 수 있습니다. 오른쪽 그림과 같이 대각선 OA의 길이인 $\sqrt{2}$를 수직선 위의 한 점에 대응시켜 설명하면, 학생들은 무리수 $\sqrt{2}$가 실제로 존재하는 수임을 인식하게 됩니다.



<작성 방법>

o 괄호 안의 ㉠에 들어갈 용어를 쓸 것.
o APOS 이론의 '행동'(Action), '과정'(Process), '대상'(Object)에 해당하는 내용을 위에서 제시한 무리수 개념의 형성 과정과 관련지어 설명할 것.

7. 확장 복소평면(extended complex plane) $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$에서 정의된 일차분수변환(선형분수변환, linear fractional transformation, bilinear transformation) T가

$$T(0) = -1,\ T(i) = -i,\ T(2) = 3$$

을 만족시킬 때, $T(z)$를 풀이 과정과 함께 쓰시오.
또한 $W = \{T(z) \mid |z| = 1,\ z \in \mathbb{C}\}$라고 할 때, W의 원소와 복소수 $1+i$ 사이의 거리의 최솟값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형A] [2025]

8. 모든 성분이 실수인 3×3 대칭행렬(symmetric matrix) A가 다음 <조건>을 만족시킨다.

<조 건>

(가) 행렬 A의 행렬식(determinant)은 32이다.
(나) 행렬 $A^{-1} - \frac{1}{2}I$의 영공간(null space)은 두 벡터 $(1,-2,1)$, $(1,2,-3)$으로 생성된다.

대각행렬(diagonal matrix) $D = (d_{ij})$와 직교행렬(orhogonal matrix) P가 $D = P^TAP$를 만족시킬 때, D와 P를 각각 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, A^{-1}은 A의 역행렬, I는 3×3 단위행렬, P^T는 P의 전치행렬(transpose matrix)이고 $d_{11} \le d_{22} \le d_{33}$이다.) [4점, 서술형A] [2025]

9. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡면

$$X(u,v) = (1+2u,\ 2\cosh u\cos v,\ 2\cosh u\sin v)$$

위의 $u=0$, $v=\frac{\pi}{4}$인 점 P에서 접평면(tangent plane)의 방정식을 풀이 과정과 함께 쓰시오.
또한 점 P에서 곡면 X의 가우스곡률(Gaussian curvature) K와 평균 곡률(mean curvature) H의 값을 각각 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형A] [2025]

10. 꼭짓점의 집합이 $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$인 단순그래프(simple graph) G가 다음 <조건>을 만족시킨다.

<조 건>

(가) $n \in \{1,7\}$이면 $\deg(v_n) \le \chi(K_n)$이다.
(나) $n \in \{2,3,4,5,6\}$이면 $\deg(v_n) \le \chi(K_{n,n})$이다.

이때, $\sum_{n=1}^{7} \deg(v_n)$의 값이 최대가 되도록 하는 G의 변(edge)의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $\deg(v_n)$은 꼭짓점 v_n의 차수(degree)이고, $\chi(K_n)$과 $\chi(K_{n,n})$은 각각 완전그래프(complete graph) K_n과 완전이분그래프(complete bipartite graph) $K_{n,n}$의 채색수(chromatic number)이다.) [4점, 서술형A] [2025]

11. 소수 157의 원시근(primitive root) 5에 대하여 집합 A를

$$A = \{5^i \mid i\text{는 100 이하의 양의 정수}\}$$

라고 할 때, 합동식 $x^6 + 1 \equiv 0 \pmod{157}$의 해가 되는 A의 원소의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오.
또한 다음 식의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.

$$\sum_{i=1}^{155}\left\{\left(\frac{5^i}{157}\right)\left(\frac{i^3}{157}\right)\left(\frac{157-i}{157}\right) + \left(\frac{5^i-1}{157}\right)\right\}$$

(단, $\left(\frac{-}{-}\right)$는 르장드르 기호(Legendre symbol)이다.) [4점, 서술형A] [2025]

12. 실수 p에 대하여 함수 $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$이

$$f(x) = \begin{cases} x^p \cos\frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

이라고 하자. $p = \frac{1}{3}$일 때, 함수 f가 $x=0$에서 연속인지를 판별하고 그 이유를 쓰시오.
또한 $p = -1$일 때, 임의의 양수 L에 대하여 $f(x_0) = L$을 만족시키는 x_0이 존재함을 증명하시오. [4점, 서술형A] [2025]

기입형B [1~2]

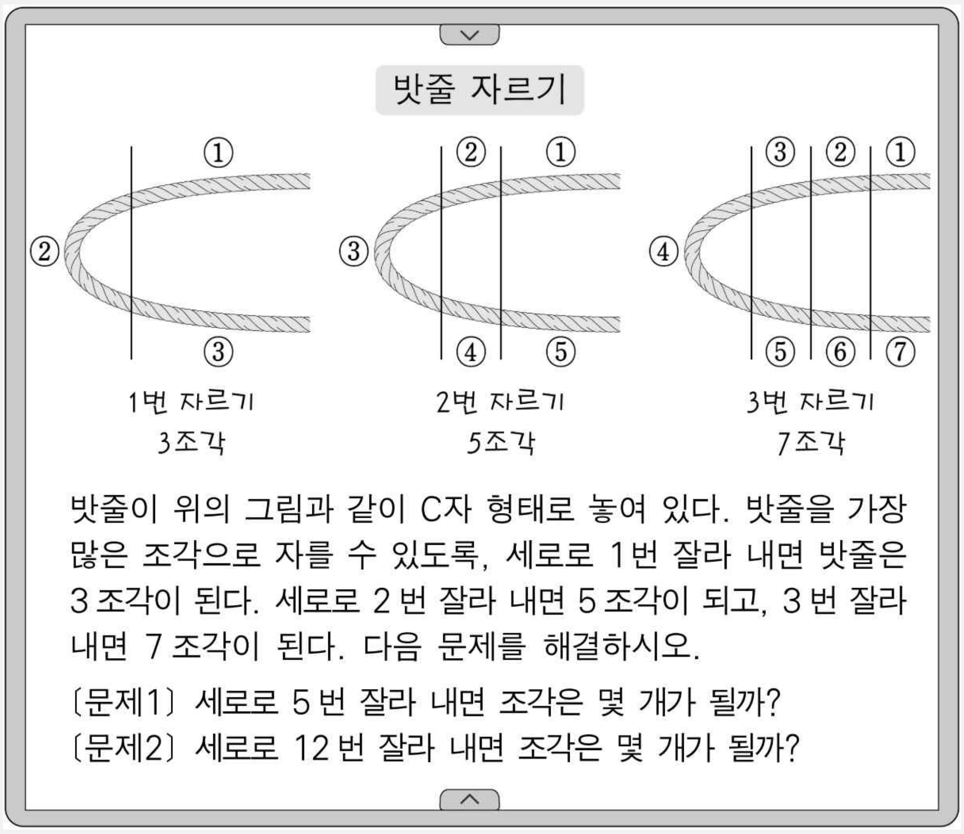
1. (가)~(라)는 수학적 지식에 대한 여러 수리철학의 관점을 설명한 것이다. 밑줄 친 ㉠~㉣ 중 옳지 않은 것 2가지를 찾아 바르게 고쳐 쓰시오. [2점, 기입형B] [2025]

(가)	㉠ 플라톤주의(Platonism)에 따르면, 수학의 대상인 수나 도형은 불변의 이데아로 간주된다. 수학적 지식은 완전한 대상에 대한 지식이므로 확실한 지식이다.
(나)	㉡ 직관주의는 수학적 지식이 참임이 입증된 것이 아니라 반증 가능한 것이며 반증되기 전까지만 잠정적으로 참이라고 본다. 증명과 반박의 논리에 의해 수학적 지식은 성장한다.
(다)	㉢ 형식주의에서 지식은 자주적 구성의 원리, 생장 지향성의 원리, 비객관성의 원리를 따른다. 수학적 지식의 확실성은 수학적 지식의 적합성과 적응성으로 대치된다.
(라)	㉣ 사회적 구성주의에서 객관성은 사회적 합의 가능성을 의미한다. 개인의 주관적인 수학적 지식은 공표되어 사회 속에서 공적인 비판과 재구성을 거쳐 객관적인 수학적 지식이 된다.

2. 극방정식(polar equation) $r = 1 - \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$로 주어진 평면 곡선(plane curve)의 길이와 전곡률(total curvature)의 값을 순서대로 구하시오. (단, 곡선의 방향은 시계반대방향으로 주어져 있다.) [2점, 기입형B] [2025]

서술형B [3~11]

3. 다음은 김 교사의 중학교 수업 상황의 일부이다. <작성 방법>에 따라 서술하시오. [4점, 서술형B] [2025]



김 교사: 모둠끼리 [밧줄 자르기] 과제를 해결해 볼까요?

학 생 A: 나는 그림의 밧줄을 5번 잘라서 조각을 세어 보았더니 11조각이 나왔어.

학 생 B: 나도 세어서 11조각이 나왔어. 그런데 [문제2]는 직접 12번 자르기도 힘들고, 조각을 일일이 세는 것도 어려워.

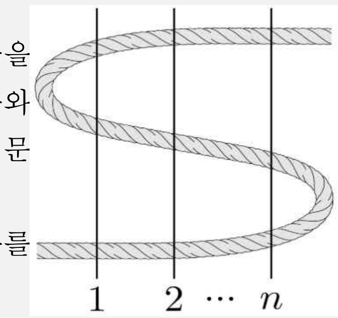
김 교사: 매번 직접 잘라서 하나씩 세어 보지 않아도 잘린 밧줄 조각이 몇 개인지 알 수 있는 방법을 찾아봅시다.
(㉠)?

학 생 C: ㉡n번 자르면 조각의 수를 $2n+1$로 나타낼 수 있어요.

김 교사: 다들 끈기 있게 문제를 잘 해결했네요. ㉢이제 이 문제를 변형하여 새로운 형태의 문제를 만들어 봅시다.

학 생 A: ㉣밧줄이 C자 형태가 아닌 S자 형태로 놓여 있다면 어떻게 될까?

학 생 B: 오른쪽 그림과 같이 S자 형태의 밧줄을 세로로 n번 잘라 낼 때, 자르는 횟수와 만들어지는 조각의 수의 관계를 찾는 문제로 변형할 수 있어.



학 생 C: 그럼 이 문제도 n번 자르면 조각의 수를 (㉤)(으)로 나타낼 수 있겠다.

학 생 A: ㉥이렇게 문제를 만들어 보니 새롭고 다양한 아이디어가 떠올랐어.

<작성 방법>

- 밑줄 친 ㉡의 대답을 유도하기 위해 괄호 안의 ㉠에 들어갈 김 교사의 구체적 발문 1가지를 제시할 것.
- 브라운(S. Brown)과 월터(M. Walter)가 제시한 '만약 그렇지 않다면 어떻게 될까' 전략에서 밑줄 친 ㉣에 해당하는 단계를 쓸 것.
- 괄호 안의 ㉤에 학습자가 형성하기를 기대하는 식을 쓰고, 밑줄 친 ㉢과 같은 활동에 대한 교수학적 의의를 밑줄 친 ㉥에 근거하여 1가지 제시할 것.

4. 다음은 류 교사가 진행한 중학교 '자료와 가능성' 영역의 수업에서 두 모둠이 수행한 통계 프로젝트 활동 과정을 공유한 자료이다. 최종 산출물을 만들기 전에 류 교사는 각 모둠에 피드백을 제공하려고 한다. <작성 방법>에 따라 서술하시오. [4점, 서술형B] [2025]

A 모둠

o 탐구 주제: 학교 도서관 이용 실태
o 탐구 방법: 우리 학교 1학년과 3학년 학생을 대상으로 일주일간 학교 도서관 방문 일수를 입력하는 온라인 설문 조사 진행
o 자료 수집: 수집한 자료는 총 120명의 설문 응답 (1학년 60명, 3학년 60명)

o 현재까지 진행된 과정 및 받고 싶은 피드백 사항:

자료를 정리해서 표로 나타내 보았다. 두 집단의 분포와 특성을 비교하기 위해 그래프를 그릴 예정인데, 두 집단 간의 분포와 특성, 평균과 중앙값 등을 한눈에 볼 수 있는 ㉠ <u>그래프는 어떤 것이 있을지</u> 선생님의 피드백을 받고 싶다.

방문 일수(일)	인원(명)	
	1학년	3학년
0	9	1
1	12	2
2	18	13
3	13	15
4	6	13
5	2	13
6	0	2
7	0	1
총합	60	60

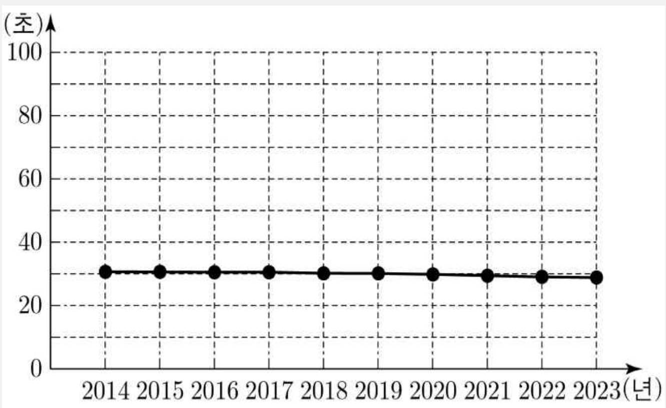
B 모둠

o 탐구 주제: 우리 지역 청소년 수영 기록 분석
o 자료 수집: 지난 10년간 우리 지역 청소년 남자 50m 자유형 1등 기록

o 현재까지 진행된 과정 및 받고 싶은 피드백 사항:

자료를 표로 정리하고 그래프로 나타내 보았다.
지역 뉴스에서는 지난 10년간 기록이 상당히 단축되었다고 했는데, 우리 모둠은 ㉡ <u>그래프에서 큰 변화를 발견하지 못해서</u> 선생님께 피드백을 받고 싶다.

연도	기록(초)
2014	30.64
2015	30.60
2016	30.50
2017	30.48
2018	30.13
2019	30.10
2020	29.81
2021	29.38
2022	29.00
2023	28.80



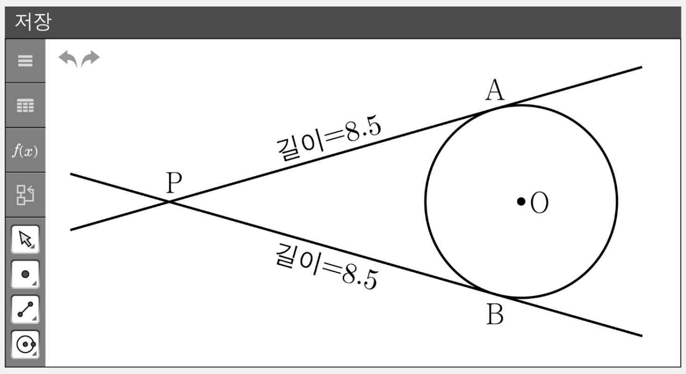
<작성 방법>

o 2022 개정 수학과 교육과정(교육부 고시 제2022－33호)의 '자료와 가능성' 영역에서 추가된 '성취기준'에 근거하여, **A 모둠** 활동 자료의 밑줄 친 ㉠에 대하여 교사가 제시할 그래프의 유형을 쓰고 그 특징을 서술할 것.
o **B 모둠** 활동 자료의 밑줄 친 ㉡의 이유를 투키(J. Tukey)의 '그래프의 현시성'에 근거하여 서술하고, 이에 대하여 교사가 제공할 수 있는 적절한 피드백 1가지를 제시할 것.

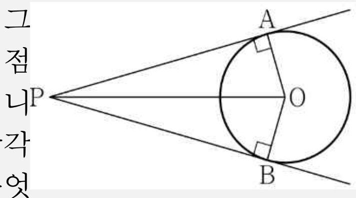
5. (가)는 예비 교사가 웹 기반 소프트웨어를 활용하여 원의 접선에 관한 성질을 지도하는 수업의 일부이며, (나)는 지도 교사가 예비 교사의 수업을 참관하고 작성한 수업 참관 평가표의 일부이다. <작성 방법>에 따라 서술하시오. [4점, 서술형B] [2025]

(가)

예비 교사: 원 O 밖의 한 점 P에서 원 O에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라 하고, 점 P를 움직이면서 선분 PA와 선분 PB의 길이를 관찰해 봅시다. 무엇을 발견했나요?
학　생 A: 두 선분의 길이가 같아 보입니다.
예비 교사: 그럼 이 소프트웨어의 측정 기능을 사용하여 선분 PA와 선분 PB의 길이의 측정값을 비교해 봅시다.
학　생 B: 정말 두 선분의 길이가 같습니다.



예비 교사: 잘했습니다. 이어지는 조작 활동으로 어떤 활동을 하면 좋을까요?
학　생 C: (　　　　㉠　　　　)
예비 교사: 옳은 생각입니다. 이번에도 선분 PA와 선분 PB의 길이가 같은지 확인해 보세요.
학　생 A: 두 선분의 길이는 항상 같아요.
예비 교사: 지금까지 발견한 내용을 누가 정리해 볼까요?
학　생 B: 원 밖의 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이인 선분 PA와 선분 PB의 길이는 같습니다.
예비 교사: 네, 좋습니다. 공학 도구를 활용하여 발견한 원의 접선의 성질을 이제 증명해 봅시다. 오른쪽 그림에서 점 A, B는 원 O 밖의 한 점 P에서 원 O에 그은 접선의 접점입니다. $\angle PAO$와 $\angle PBO$의 크기는 각각 얼마일까요? 그리고 그 이유는 무엇일까요?



학　생 C: 둘 다 90°입니다. 원의 접선은 그 접점을 지나는 반지름과 수직이기 때문입니다.
예비 교사: 네, 맞습니다. 또 어떤 성질이 성립하나요?
학　생 A: $\triangle PAO$와 $\triangle PBO$에서 선분 OA와 선분 OB는 원의 반지름으로서 길이가 같고, 선분 OP는 공통의 빗변입니다.
학　생 B: 직각삼각형의 합동 조건에 의해 $\triangle PAO$와 $\triangle PBO$는 합동입니다.
학　생 C: 그래서 선분 PA와 선분 PB의 길이가 같습니다.
예비 교사: 아주 잘했어요. 이로써 원 밖의 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이인 선분 PA와 선분 PB의 길이가 같다는 것을 여러분 스스로 증명하였네요.

(나)

<수업 참관 평가표>

평가 항목	평정		
	우수	보통	미흡
① 도형의 성질을 정당화하는 다양한 방법을 활용하였는가?	✔		
② 수학과 수업의 교수·학습 방안 중 적절한 유형을 선택하여 적용하였는가?	✔		

<작성 방법>

o 딘즈(Z. Dienes)의 수학적 다양성의 원리를 적용한 조작 활동이 되도록 괄호 안의 ㉠에 들어갈 내용을 쓸 것.
o (가)와 2022 개정 수학과 교육과정(교육부 고시 제2022－33호)의 '성취기준 적용 시 고려 사항'에 근거하여, 지도 교사가 (나)의 평가 항목 ①을 '우수'로 평가한 이유를 서술할 것.
o (가)와 2022 개정 수학과 교육과정의 '교수·학습 방법' 중 교수·학습 방안에 근거하여, 지도 교사가 (나)의 평가 항목 ②를 '우수'로 평가한 이유가 되는 교수·학습 방안의 유형을 쓰고 그 특징을 설명할 것.

6. 두 확률변수 X와 Y의 결합확률밀도함수(joint probability density function)가

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x+y^2)}, & x>0,\ y>0\\ 0, & \text{그 외의 경우}\end{cases}$$

일 때, 확률변수 X와 Y가 서로 독립인지를 판별하고 그 이유를 쓰시오.
또한 조건부확률 $\mathrm{P}(X\le 2\,|\,Y\le 2)$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B] [2025]

※ 다음은 필요하면 사용할 수 있다.

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt=1}$$

7. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 위의 여가산위상(cocountable topology, countable complement topology) $\mathfrak{I}_1$을

$$\mathfrak{I}_1=\{U\subseteq\mathbb{R}\,|\,\mathbb{R}-U\text{는 가산집합(countable set)}\}\cup\{\varnothing\}$$

이라 하고, 좌표평면 $\mathbb{R}^2$ 위의 보통위상(usual topology)을 $\mathfrak{I}_2$라고 하자. 적공간(곱공간, product space) $(\mathbb{R},\mathfrak{I}_1)\times(\mathbb{R}^2,\mathfrak{I}_2)$에서 집합

$$S=\{x\in\mathbb{R}\,|\,0<x<1\}\times\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x>0,\ y=\sin\frac{1}{x}\right\}$$

의 내부(interior) S°와 폐포(closure) $\overline{S}$를 각각 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B] [2025]

8. K는 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위의 갈루아 확대체(정규 확대체, Galois extension field, normal extension field)이고, 갈루아군(Galois group) $G(K/\mathbb{Q})$는 덧셈 순환군(additive cyclic group) $\mathbb{Z}_2$와 대칭군(symmetric group) S_3의 직접곱(직적, direct product) $\mathbb{Z}_2\times S_3$과 동형이다. $\mathbb{Q}$ 위의 차수(degree) $[E:\mathbb{Q}]=6$인 K의 부분체 E의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오.
또한 K의 부분체 F에 대하여, F가 $\mathbb{Q}$ 위의 갈루아 확대체이고 갈루아군 $G(F/\mathbb{Q})$가 S_3과 동형이 되도록 하는 체 F가 존재함을 보이시오. [4점, 서술형B] [2025]

9. 복소수 $z=x+iy$ (x, y는 실수)에 대한 함수

$$f(z)=e^{-x}\cos y+iv(x,y)\quad (\text{단, } v(x,y)\text{는 실숫값 함수})$$

가 정함수(전해석함수, entire function)이고 $f(0)=1$을 만족시킬 때, $f(z)$를 풀이 과정과 함께 쓰시오.
또한 복소평면에서 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원을 시계반대방향으로 한 바퀴 도는 곡선 C에 대하여 선적분 $\int_C f\left(\frac{1}{z}\right)dz$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B] [2025]

10. 자연수 n에 대하여 함수 $f_n:[0,\infty)\to\mathbb{R}$이

$$f_n(x)=\begin{cases}-\dfrac{x}{\{n\ln(2n)\}^2}+\dfrac{1}{n^2\ln(2n)}, & 0\le x\le\ln(2n)\\ \dfrac{1}{n^2}\sin\left(\dfrac{2\pi x}{\ln(2n)}\right), & \ln(2n)<x\le 2\ln(2n)\\ 0, & x>2\ln(2n)\end{cases}$$

일 때, 함수항 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$가 $[0,\infty)$에서 고른수렴(평등수렴, 균등수렴, uniform convergence)함을 보이시오.
또한 $a_n=\int_0^{\infty}f_n(x)dx$라고 할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$이다.) [4점, 서술형B] [2025]

11. 환 R을 두 가환환(commutative ring) $\mathbb{Z}_{10}$과 $\mathbb{Z}_{12}$의 직접곱(직적, direct product) $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{12}$라고 하자. 환 R의 아이디얼(이데알, ideal) 중에서 원소 $(3,8)$을 포함하는 가장 작은 것을 $\mathbb{Z}_{10}$의 아이디얼 I와 $\mathbb{Z}_{12}$의 아이디얼 J의 직접곱 $I \times J$의 형태로 풀이 과정과 함께 쓰시오.
또한 다음 <조건>을 만족시키는 환 S 중에서 서로 동형(isomorphic)이 아닌 것을 풀이 과정과 함께 모두 쓰시오. [4점, 서술형B] [2025]

<조 건>

환 R의 원소 $(3,8)$을 영(zero)으로 대응시키는 전사(onto, surjective)인 환 준동형사상(ring homomorphism) $\phi : R \to S$가 존재한다.

※ 다음 정리는 필요하면 증명 없이 사용할 수 있다.

단위원(곱셈항등원, identity, unity)을 가지는 두 가환환 R_1과 R_2에 대하여 직접곱 $R_1 \times R_2$의 아이디얼은 $I_1 \times I_2$의 형태로 나타낼 수 있다. (단, I_1은 R_1의 아이디얼이고 I_2는 R_2의 아이디얼이다.)

기입형A [1~4]

1. 다음은 ‘수학교육론’ 수업에서 쉐발라드(Y. Chevallard)와 브루소(G. Brousseau)의 이론을 다룬 수업 자료의 일부이다. 괄호 안의 ㉠과 ㉡에 해당하는 용어를 순서대로 쓰시오. [2점, 기입형A] [2026]

> ○ 쉐발라드(Y. Chevallard)는 교사가 교육적 의도를 가지고 학문적 지식을 가르칠 지식으로 변환하는 것을 지식의 (㉠)(이)라고 하였다. 그는 교육 현상을 올바르게 이해하려면 ‘교사-학생’의 이원적 관계가 아니라, ‘교사-학생’의 삼원적 관계로 바라볼 필요가 있다고 보았다. 교사는 이미 알고 있는 지식을 학생들에게 전달하기 위한 목적으로 다시 다루는 것이지만, 학생은 알지 못하는 지식을 처음 접하게 된다. 따라서 지식을 변형하는 주체인 교사, 변형된 지식을 대하는 주체인 학생과 더불어 지식을 고려할 필요가 있다.
>
> ○ 브루소(G. Brousseau)는 교사가 학생들이 수학 지식을 의미 있게 학습할 수 있게 하려면 지식을 개인화/배경화하고 탈개인화/탈배경화하는 과정을 균형 있게 다루어야 한다고 보았다. 이 과정이 적절하게 이루어지지 못하면 여러 가지 극단적인 교수 현상이 나타날 수 있다. 한 예로 학생의 개인화/배경화 과정이 지나치게 강조되면, 교사가 가르치고자 한 수학 지식 자체로부터 학생의 개인화/배경화 과정을 용이하기 위해 도입한 교수학적 보조 수단으로 학생들의 사고가 옮겨가는 (㉡)이/가 일어날 수 있다.

2. A 과수원에서 판매하는 수박의 무게 X와 B 과수원에서 판매하는 수박의 무게 Y는 각각 정규분포 $N(\mu_1, 400^2)$, $N(\mu_2, 300^2)$을 따르며 서로 독립이다. $X+Y$의 표준편차를 구하시오.
A 과수원에서 임의로 추출한 수박 100개의 무게의 표본평균이 3000이었고, B 과수원에서 임의로 추출한 수박 100개의 무게의 표본평균이 2000이었을 때, $\mu_1+\mu_2$에 대한 95% 신뢰구간은 $(5000-1.96\times c,\ 5000+1.96\times c)$이다. c의 값을 구하시오. (단, 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z에 대하여 $\mathrm{P}(Z\le 1.96)=0.975$이다.) [2점, 기입형A] [2026]

3. 복소함수

$$f(z)=\frac{(z-i+1)^5(z+1+i)^4}{z^6(z-1+4i)^3(z-9+2i)^5}e^z$$

과 복소평면에 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 원을 시계반대방향으로 한 바퀴 도는 곡선 $C(r)$이 있다.

선적분 $\displaystyle\int_{C(2)}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$의 값을 구하시오.

또한 $\displaystyle\int_{C(r)}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=0$을 만족시키는 양의 정수 r의 개수를 구하시오. [2점, 기입형A] [2026]

3. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 단위속력곡선(unit speed curve) $\alpha:(0,2)\to\mathbb{R}^3$이 모든 $s\in(0,2)$에 대하여

$$\alpha(s)\cdot\alpha'(s)=0,\ \alpha(s)\cdot N(s)=-2s^2$$

을 만족시킨다. $\alpha(1)\cdot B(1)=12$일 때, 곡선 $\alpha(s)$의 $s=1$에서의 곡률(curvature) $\kappa(1)$과 비틀림률(열률, 꼬임률, torsion)의 절댓값 $|\tau(1)|$을 순서대로 구하시오. (단, $N(s)$는 점 $\alpha(s)$에서의 법선벡터(normal vector)이고, $B(s)$는 점 $\alpha(s)$에서의 종법선벡터(binormal vector)이다.) [2점, 기입형A] [2026]

서술형A [5~12]

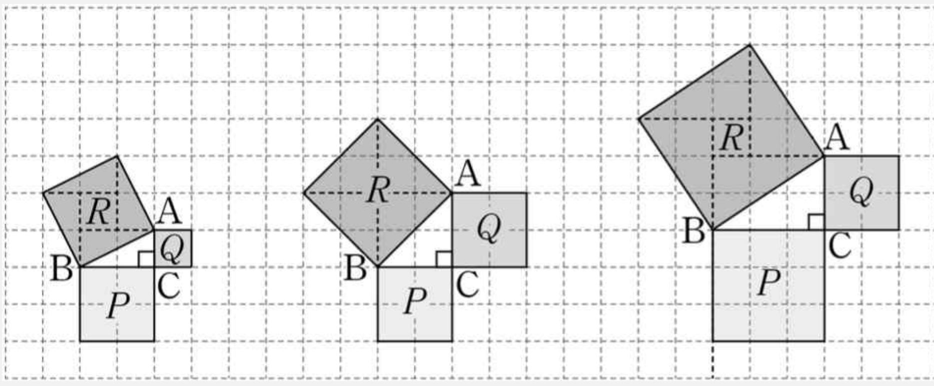
5. 다음은 두 예비 교사가 중학교 ‘피타고라스 정리’에 대한 수업을 계획하면서 나눈 대화의 일부이다. <작성 방법>에 따라 서술하시오. [4점, 서술형A] [2026]

예비 교사A: 내가 맡은 [1단계] 수업 활동을 다음과 같이 계획해 봤어.

[1단계]

다음 탐구활동에 학생들이 주도적으로 참여하게 한다.

① 그림과 같이 한 칸의 크기가 1인 모눈종이에 세 종류의 직각삼각형 ABC에 대하여 세 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형 P, Q, R을 그린다.



② 정사각형 P, Q, R의 넓이를 구하여, 넓이 사이의 관계 (P의 넓이)+(Q의 넓이)=(R의 넓이)를 발견한다.

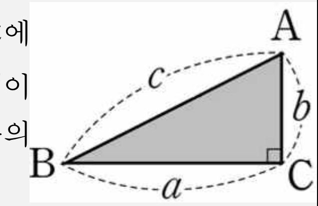
③ 직각삼각형의 세 변의 길이 사이에는 $\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2$이 성립할 것이라고 추측한다.

예비 교사B: [1단계] 수업 활동에 이어서 [2단계]는 다음과 같이 준비해 봤어.

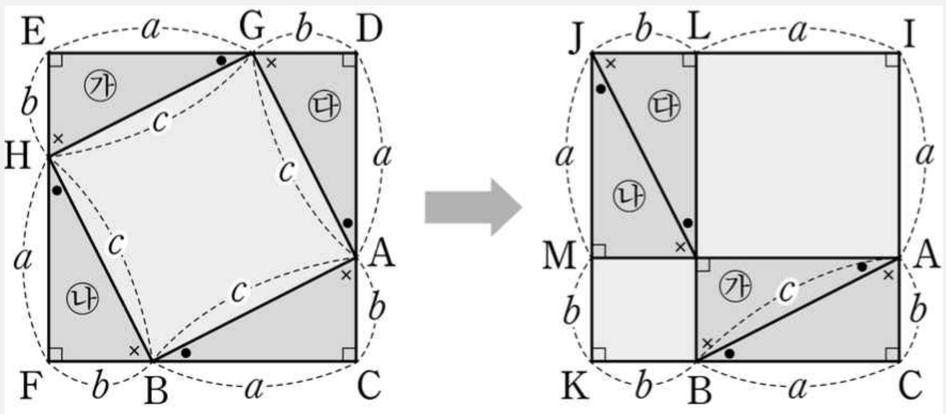
[2단계]

④ 학생들은 탐구활동을 통해 앞서 관찰한 세 종류의 직각삼각형의 세 변의 길이 사이에 $\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2$이 성립함을 인식한다.

⑤ 교사는 “모든 직각삼각형에서 이 성질이 항상 성립할까?”라고 발문한다. 학생들은 $\angle C=90°$인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{BC}}=a$, $\overline{\mathrm{AC}}=b$, $\overline{\mathrm{AB}}=c$라 할 때, $a^2+b^2=c^2$이 성립하는지에 대해 생각해 보면서 자유롭게 논의한다.



⑥ 학생들은 다음 과정을 통해 모든 직각삼각형에서 $a^2+b^2=c^2$이 항상 성립함을 정당화하여 추측을 피타고라스 정리로 재구성한다.



[그림 1] [그림 2]

• [그림 1]과 [그림 2]를 비교하여 $a^2+b^2=c^2$임을 이끌어 낸다.

<작성 방법>

○ [1단계]에 해당하는 개연 추론 유형을 쓰고, [2단계]의 과정 없이 [1단계]만을 수업할 때, 이 수업을 개연 추론 지도의 관점에서 평가할 것.

○ [1단계]와 [2단계]를 순서대로 수업할 때, [2단계]에서 학생들이 경험할 수 있는 피아제(J. Piaget)의 반영적 추상화의 과정을 활동 내용에 근거하여 ‘반사’와 ‘반성’으로 설명할 것.

6. 다음은 '수학교재연구 및 지도법' 강의에서 지도 교수와 예비 교사들이 나눈 대화이다. <작성 방법>에 따라 서술하시오. [4점, 서술형A] [2026]

지도 교수: 오늘은 고등학교 <확률과 통계> 과목의 '수학적 확률'에 대한 지도 방안에 대해서 논의해 봅시다.

예비 교사1: 제가 조사한 자료에서는 시행의 뜻과 표본공간, 사건, 근원사건의 정의를 먼저 제시하고, 수학적 확률을 다음과 같이 정의하고 있습니다.

> 어떤 시행에서 원소가 유한개인 표본공간 S에 대하여 (㉠), 사건 A가 일어날 확률 $\mathrm{P}(A)$를 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$로 정의하고, 이를 사건 A가 일어날 수학적 확률이라고 한다. (단, 표본공간은 공집합이 아니다.)

예비 교사2: 그런데 수학적 확률에 (㉠)와/과 같은 가정이 포함된 이유를 잘 모르겠습니다.

지도 교수: 고등학교 교육과정에서 다루는 수학적 확률이 라플라스(P. S. Laplace)의 고전적인 확률 정의를 따르기 때문입니다. 수학적 확률은 시행 전에 확률값의 계산을 허용하고 있다는 점에서 확률에 대한 일종의 선험적 접근이라고 볼 수 있습니다.

예비 교사3: 동일한 시행을 충분히 많은 횟수로 반복 시행하여 그 사건이 발생하는 상대도수로 구할 수 있는 확률인 (㉡)을/를 접목한다면, 근원사건의 확률을 구하여 표본공간의 적절성을 검토할 수 있지 않을까요?

예비 교사1: 하지만 (㉡)도 상대도수의 극한이 존재한다는 것은 직관적으로 이해할 수는 있지만 현실적으로 무한 번의 시행을 할 수는 없기 때문이 학생들이 의문을 가질 것 같아요.

예비 교사2: 저는 확률의 역사 중 학생들이 호기심을 갖게 할 만한 소재인 심프슨(Simpson)의 패러독스를 간단한 문제 상황으로 구현하여 **[읽기 자료]**를 만들어 보았습니다. ㉢A학과와 B학과 각각에서의 남학생과 여학생의 합격률, 대학 전체에서의 남학생과 여학생의 합격률을 비교해 보면, ㉣확률 문제 상황에서 추론할 때 주의해야 할 점에 대해 알게 됩니다. 이때, 각 성별 합격률은 각 성별 지원자 수에 대한 합격자 수의 비율입니다.

[읽기 자료]

다음은 어느 대학에서 A, B 두 학과의 입학시험 결과를 조사한 표이다. (단, 이 대학에는 두 학과만 있다고 하자.)

	남학생		여학생	
	합격자 수	지원자 수	합격자 수	지원자 수
A학과	30	80	7	20
B학과	10	20	38	80
대학 전체	40	100	45	100

<작성 방법>

- 괄호안의 ㉠에 들어갈 내용을 작성하고, 괄호 안의 ㉡에 들어갈 용어를 쓸 것.
- **[읽기 자료]**에서 밑줄 친 ㉢을 비교한 결과를 쓰고, 그 결과를 근거로 심프슨(Simpson)의 패러독스를 통해 알 수 있는 밑줄 친 ㉣을 작성할 것.

7. 수열 $\{a_n\}$이 점화식

$$a_0=0,\quad a_1=2,\quad a_n=4a_{n-1}-4a_{n-2}\ (n\ge 2)$$

를 만족시킨다. 이 점화식의 특성다항식(고유다항식, characteristic polynomial)과 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 순서대로 구하시오.
또한 수열 $\{a_n\}$의 생성함수(generating function)를 $f(x)$라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=x\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^3$을 만족시키는 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형A] [2026]

8. 함수 $f:\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$을 $f(x,y)=x^4+y^4-xy^2$이라 하자. $t\neq 0$인 상수 t에 대하여 직선 $y=tx$와 등위곡선(level curve) $f(x,y)=0$의 원점 이외의 교점을 구하시오.
또한 영역 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid f(x,y)\le 0,\ y\ge 0\}$의 넓이를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형A] [2026]

※ 다음은 필요하면 사용할 수 있다.

$$\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^4}=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}$$

9. 모든 성분이 실수인 3×3 행렬 A가

$$A\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\8\\8\end{pmatrix},\qquad A\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\\-20\\10\end{pmatrix},\qquad \det(A)=800$$

을 만족시킬 때, A의 모든 고윳값(eigenvalue)을 구하시오.
또한 가역 대칭행렬(symmetric matrix) B가

$$AB=2\det(B)I,\qquad \mathrm{tr}(B)<0$$

을 만족시킬 때, B의 모든 고윳값과, B의 고유벡터(eigenvector)로 구성된 $\mathbb{R}^3$의 정규 직교 기저(orthonormal basis)를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $\det(M)$은 행렬 M의 행렬식(determinant), $\mathrm{tr}(M)$은 M의 대각합(trace)이고, I는 3×3 단위행렬이다.) [4점, 서술형A] [2026]

10. 자연수 n에 대하여 함수 $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$을

$$f_n(x)=\frac{x^4+\sqrt{n}\,x^3}{n(x^2+2\sqrt{n}\,x+2n)}$$

으로 정의하자. 모든 양의 실수 L에 대하여 함수항 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$가 닫힌 구간 $[-L,L]$에서 고른수렴(평등수렴, 균등수렴, uniform convergence)하는지 판별하고 그 이유를 쓰시오. 또한 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$가 $\mathbb{R}$에서 연속인지 판별하고 그 이유를 쓰시오. [4점, 서술형A] [2026]

11. 덧셈군 $\mathbb{Z}_{20}$, $\mathbb{Z}_{26}$, $\mathbb{Z}_{200}$에 대하여 군 준동형사상(group homomorphism) $\phi:\mathbb{Z}_{20}\times\mathbb{Z}_{26}\to\mathbb{Z}_{200}$의 상(치역, image) $\mathrm{Im}(\phi)$가 6개의 부분군을 가질 때, $\mathrm{Im}(\phi)$의 위수(order)를 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 ϕ의 핵(kernel) $\mathrm{Ker}(\phi)$의 위수를 구하시오. (단, $\mathbb{Z}_{20}\times\mathbb{Z}_{26}$은 $\mathbb{Z}_{20}$과 $\mathbb{Z}_{26}$의 직접곱(직적, direct product)이다.) [4점, 서술형A] [2026]

12. 집합 $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid -1\le x<1\}$ 위에서 거리함수 d를

$$d((x,y),(x',y'))=\min\left\{\sqrt{(x-(x'+k))^2+(y-y')^2}\ \middle|\ k=-2,0,2\right\}$$

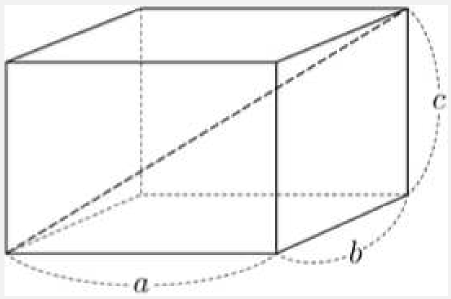
라 하자. 집합 $\left\{(x,0)\in A\ \middle|\ d((-1,0),(x,0))\le\frac{1}{2}\right\}$에 속하는 점의 x좌표 중 가장 작은 양의 실수를 풀이 과정과 함께 쓰시오.
또한 $\mathbb{R}^2_*=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$에 대하여 함수 $f:A\to\mathbb{R}^2_*$을 $f(x,y)=e^y(\cos\pi x,\sin\pi x)$라 하고, $\mathbb{R}^2_*$ 위에서 거리함수 d_*을 $d_*((u,v),(u',v'))=d(f^{-1}(u,v),f^{-1}(u',v'))$이라 하자. 거리공간 $(\mathbb{R}^2_*,d_*)$의 수열(sequence) $\left\{\left(0,\frac{1}{n}\right)\right\}$이 코시수열(Cauchy sequence)이 아님을 보이시오. [4점, 서술형A] [2026]

기입형B [1 ~ 2]

1. 다음은 '수학교육론' 수업에서 폴리아(G. Polya)의 문제해결 교육론을 다룬 수업 자료의 일부이다.

○ 폴리아(G. Polya)는 문제해결 교육의 중요성을 강조하면서, 문제해결 교육의 핵심은 방법적 지식인 수학적 (㉠)을/를 터득하는 데 있다고 보았다. 이때 (㉠)(이)란 문제해결에서 전형적으로 유용한 발견과 발명의 방법과 규칙, 문제해결 전략과 전술을 말한다. 문제해결 과정의 네 단계에서 교사가 하는 발문과 권고는 효과적인 사고 활동을 유발해서 학생들의 문제해결을 도울 수 있다.

○ 다음은 교사와 학생들이 가로의 길이가 a, 세로의 길이가 b, 높이가 c인 직육면체의 대각선의 길이를 구하는 문제를 해결하면서 나눈 대화이다.



교 사: 미지의 것은 무엇입니까?

학생1: 직육면체의 대각선의 길이입니다. 미지의 것은 x로 나타내었습니다.

교 사: a, b, c와 x를 연결하는 조건은 무엇입니까?

학생2: x가 가로의 길이, 세로의 길이, 높이가 각각 a, b, c인 직육면체의 대각선의 길이가 된다는 것입니다.

교 사: ㉡미지의 것이 유사한 다른 문제를 알고 있나요?

학생3: 예전에 직각삼각형의 한 변의 길이를 구하는 문제를 풀어본 적이 있습니다.

교 사: 여러분이 기억해 낸 문제는 직각삼각형에 관한 것이군요. 위 그림에서 직각삼각형을 찾아보세요.

학생1: 아! 미지의 것은 직각삼각형의 빗변의 길이였군요. 피타고라스 정리를 사용하면 구할 수 있겠어요.

괄호 안의 ㉠에 들어갈 용어를 쓰고, 폴리아(G. Polya)의 문제해결 과정의 네 단계 중 밑줄 친 ㉡과 같은 발문을 제시하는 단계의 명칭을 쓰시오. [2점, 기입형B] [2026]

2. $\mathbb{R}$의 위상 $\mathfrak{I}=\{\varnothing,(-1,1),(-1,3),(-1,5),\mathbb{R}\}$에 대하여 위상공간 $(\mathbb{R},\mathfrak{I})$의 부분집합 $\mathbb{Z}$의 상대위상(부분위상, relative topology) $\mathfrak{I}_{\mathbb{Z}}$를 구하시오. 또한 위상공간 $(\mathbb{Z},\mathfrak{I}_{\mathbb{Z}})$에서 집합 $A=\{0,1,2,3\}$의 내부(interior) A°를 구하시오. (단, $(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$이다.) [2점, 기입형B] [2026]

서술형B [3 ~ 11]

3. 다음은 예비 교사가 중학교의 '이차방정식과 근의 공식'에 대한 교수·학습 지도안을 작성한 후, 지도 교수와 나눈 대화 중 일부이다. <작성 방법>에 따라 서술하시오. [4점, 서술형B] [2026]

교수·학습 지도안

학습 목표	이차방정식의 근의 공식을 이해할 수 있다.
단계	교수·학습 활동
도입	• 선수 학습을 확인하고, 학습 목표를 제시한다.
전개	• 학급을 5개의 모둠으로 나누고, 모둠별로 수를 계수로 갖는 이차방정식(예: $3x^2-4x-1=0$)을 하나씩 정하여 '완전제곱식을 이용한 풀이 절차'에 따라 풀이하게 한다. 이때 모둠마다 서로 다른 이차방정식을 풀도록 한다. • 모둠별로 한 명씩 칠판에 나와서 모둠활동의 결과인 5개의 이차방정식을 '완전제곱식을 이용한 풀이 절차'에 따라 나란히 풀이하게 한다. • 칠판의 풀이를 보면서 이차방정식의 근을 구하는 보편적인 방법에 대해 토론하게 한다. 필요한 경우, 수 계수를 문자 a, b, c로 대신하여 나타낼 수 있도록 발문한다. • 모둠별로 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$을 수를 계수로 갖는 이차방정식과 동일한 방법으로 풀이하여 근의 공식을 유도하고, 그 결과를 발표하게 한다. • 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$의 근의 공식 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (단, $b^2-4ac\geq 0$)을 정리한다. • 이차방정식의 근의 공식을 이용하는 간단한 예제를 풀이한다. • 이차방정식의 근과 계수와의 관계를 설명한다.
정리	• 본시 학습 내용을 정리하고, 형성평가를 실시한다.

예비 교사: 저는 학생들이 모둠활동에 능동적으로 참여하면서 수를 계수로 갖는 여러 개의 이차방정식을 풀이하는 경험으로부터 문자 계수를 갖는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$의 근의 공식을 스스로 유도할 수 있도록 수업을 계획했습니다. 이때 이차방정식에서 수로 된 계수를 문자 a, b, c로 대신하여 나타내고 이를 이용하여 근의 공식을 나타낼 수 있도록 적절한 발문을 하고자 합니다.

지도 교수: 특수한 경우의 사례로부터 문자를 사용하여 (㉠)을/를 해보는 수업 활동에 중점을 두었군요. 이러한 활동은 학생들이 아직 정해져 있지 않은 상수 a, b, c의 의미를 이해하는 데 도움이 됩니다. 수업에서 계획한 바와 같이, 학생들이 능동적으로 구체적인 상황을 변수로 구성하고 (㉠)된 식을 구성해보는 경험은 다가이름이라는 변수 개념의 정적 측면을 생각해 보는 계기가 될 것입니다. 그런데 ㉡교수·학습 지도안에 중학교에서 다루지 않아야 될 내용이 포함되어 있으니 확인하기 바랍니다.

<작성 방법>

○ 괄호 안의 ㉠에 들어갈 용어를 쓸 것.

○ 프로이덴탈(H. Freudenthal)의 교수학적 현상학에 대해 설명하고, 예비 교사가 계획한 수업에서의 변수 개념 지도를 교수학적 현상학의 관점에서 분석하여 작성할 것.

○ 2022 개정 수학과 교육과정(교육부 고시 제2022-33호)의 중학교 '변화와 관계' 영역의 '성취기준 적용 시 고려사항'을 근거로, 밑줄 친 ㉡을 1가지 제시할 것.

4. (가)는 고등학교 <공통수학1>의 ‘행렬의 곱셈’에 대한 수업 자료이고, (나)는 강 교사가 이 자료로 수업을 한 후 작성한 수업 성찰일지이다. <작성 방법>에 따라 서술하시오. [4점, 서술형B] [2026]

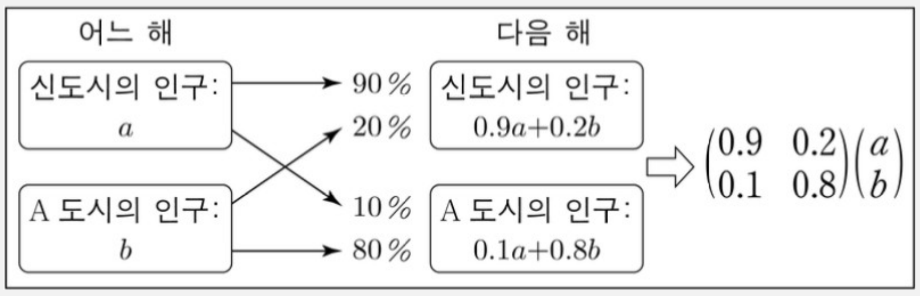
(가)

> 신도시 인구는 현재 2만 명이고, 근교 A도시의 인구는 10만 명이다. 신도시 인구는 언제 6만 명을 넘어설까?

1단계: 복잡한 현실 맥락을 단순화된 상황으로 구성하기 위해 다음과 같이 가정을 설정한다.

① 신도시 주민의 90%는 다음 해에도 신도시에 거주하며, 나머지 10%는 A도시로 이사한다. ② A도시 주민의 80%는 다음 해에도 A도시에 거주하며, 나머지 20%는 신도시로 이사한다. ③ 다른 요인에 의한 인구 변화(출생, 사망, 다른 도시 사이의 전출, 전입 등)는 없다.

2단계: 주어진 상황을 구조화하여 행렬의 곱셈으로 표현한다.



3단계: 행렬의 곱셈을 수행하고 두 도시의 인구를 구한다.

$$\begin{pmatrix} \text{1년 후 신도시의 인구} \\ \text{1년 후 A도시의 인구} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20000 \\ 100000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38000 \\ 82000 \end{pmatrix}$$

공학 도구를 활용하여 행렬 연산을 n년째까지 수행하고, 그 결과를 백의 자리에서 반올림하여 표로 나타낸다.

(단위: 천 명)

n(년)	0	1	2	3	4	5	6			10	11	12	13	⋯
신도시														⋯
A도시														⋯

4단계: 표를 해석하여 두 도시의 인구 변화를 예측한다.

신도시의 인구는 4년 후에 6만 명을 넘어선다. 그리고 11년 후부터는 두 도시의 인구에 큰 변화가 없음을 알 수 있다.

(나)

> 학생들이 삶과 연계된 현상이나 문제를 다양한 수학적 표현방식을 이용하여 수학화하고, 수학적으로 해결한 결과를 현실세계에 적용하여 해석하는 (㉠) 과정을 경험할 수 있도록 수업 자료를 준비했다. 실제 수업을 진행해 보니, 학생들이 현실세계의 문제 상황을 단순화하는 1단계를 많이 다루어 보지 않아 어려워하였다. ㉡<u>이번 수업에서는 내가 가정을 설정하여 단순화된 상황을 구성해 주었는데, 다음 수업에서는 학생 스스로 이 과정을 구성할 수 있도록 안내</u>하고자 한다. 2단계에서는 학생들이 주어진 상황을 행렬의 곱셈으로 표현하기 어려워해서, 주어진 상황을 먼저 구조화한 뒤 행렬로 나타내어 보게 하였다.

<작성 방법>

- 괄호 안의 ㉠에 들어갈 용어를 쓸 것.
- 밑줄 친 ㉡은 비고츠키(L. Vygotsky)의 이론에서 ‘학생의 근접 발달 영역 내에서 교사가 적절히 조절하여 주는 도움’을 뜻한다. ㉡에 해당하는 용어를 쓸 것.
- 장비에(C. Janvier)의 다양한 표현 양식 간의 번역 활동에 따라 (가)의 3단계에서 나타난 번역 활동의 명칭을 쓰고, 3단계에서 공학 도구를 활용한 의의를 ㉠과 관련하여 작성할 것.

5. (가)는 두 명의 수학 교사가 2022 개정 수학과 교육과정(교육부 고시 제 2022－33호)을 바탕으로 중학교 ‘자료와 가능성’ 영역의 ‘통계적 문제해결’에 대한 수업 연구를 하면서 나눈 대화이고, (나)는 이를 반영한 최 교사의 수업의 일부이다. <작성 방법>에 따라 서술 하시오. [4점, 서술형B] [2026]

(가)

김 교사: 2022 개정 수학과 교육과정에 제시된 ‘교육과정 설계의 개요’에서는 ‘학년(군) 또는 학교급을 관통하는 수학 내용의 본질 또는 가치’를 의미하는 (㉠)을/를 파악하여 수업을 계획할 것을 권장하고 있습니다.

최 교사: 중학교 ‘자료와 가능성’ 영역의 내용 체계에서 (㉠) 을/를 찾아보니, 제가 이번에 수업할 통계적 문제해결 단원과 직접 관련된 내용은 “자료를 이용하여 통계적 문제해결 과정을 실천하고 생활 속의 가능성을 탐구하는 것은 ㉡미래를 예측하고 합리적인 의사 결정을 하는 데 기반이 된다.” 이네요.

김 교사: 이 단원의 수업은 (㉠)을/를 향한 깊이 있는 학습을 할 수 있도록 ‘내용 체계’, ‘㉢성취기준’, ‘성취기준 해설’, ‘성취기준 적용 시 고려 사항’ 등을 확인한 후, 학생들이 평소의 경험과 연결하여 통계적 탐구를 할 수 있도록 계획하면 좋겠습니다.

(나)

최 교사: 통계를 활용하여 평소에 궁금했던 내용이나 조사하고 싶은 주제를 모둠별로 정하여 탐구해 볼까요? 필요할 때 선생님이 도움을 줄게요.

A 모둠

학 생1: 올해 여름은 특히 더운 날이 많았던 것 같아. 최근 기후 문제도 많이 논의되고 있어서, 올해 8월 한 달간 일평균 기온 분포의 특징을 10년 전과 비교하여 탐구하면 어떨까?

학 생2: 좋아, 기상자료개방포털에 우리 지역의 2015년과 2025년 8월의 일평균 기온 자료가 있는지 검색해 보자.

학 생3: 2015년과 2025년의 일평균 기온 자료를 찾았어. 이 두 자료를 정리해 볼까?

학 생4: 통계 소프트웨어를 이용해서 줄기와 잎 그림과 도수 분포표로 나타내 보자.

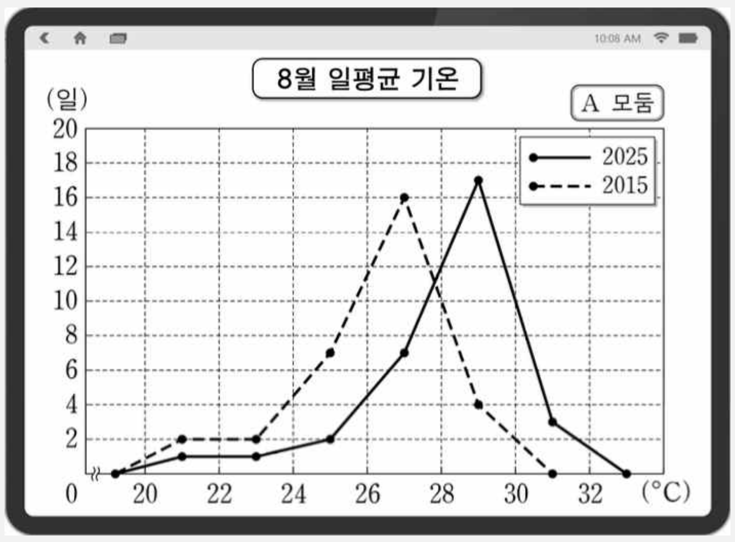
학 생2: 줄기와 잎 그림은 2015년과 2025년의 자료를 각각 나타내어야 해서, 한눈에 비교가 잘 안 되는 것 같아.

최 교사: ㉣우리가 배웠던 그래프 중에, 분포 상태와 변화를 한눈에 볼 수 있는 그래프로 나타내어 볼까요?

학 생3: 두 자료를 도수분포다각형으로 나타내어 보니, 한눈에 비교할 수 있어요.

최 교사: 자, 이제 모둠별로 탐구한 결과를 온라인 플랫폼에 공유하고 발표해 봅시다. A모둠이 먼저 발표해 볼까요?

A 모둠: 저희 모둠에서 탐구한 결과는 다음과 같습니다.



우리 지역의 2025년 8월 한 달간 일평균 기온의 그래프는 2015년의 그래프보다 전체적으로 오른쪽으로 치우쳐 있으므로, 10년 전보다 기온이 높아졌음을 알 수 있습니다. 통계를 이용해 실제 데이터를 분석해 보니 앞으로 10년 후인 2035년의 8월은 더 더워질 수 있다고 생각됩니다. 지구 온난화와 관련된 다른 자료들도 조사해 본 결과, 유사한 경향을 확인할 수 있었습니다. 저희 모둠에서는 일상생활 속에서 우리부터 에너지 절약을 실천하고, 학생회에 지속가능한 발전을 위한 캠페인을 제안하고자 합니다.

<작성 방법>

- ○ 2022개정 수학과 교육과정에서 괄호 안의 ㉠을 나타내는 용어를 쓰고, 최 교사의 수업에서 밑줄 친 ㉡이 반영되었음을 확인할 수 있는 근거를 (나)에서 찾아 제시할 것.
- ○ 밑줄 친 ㉢에 근거하여, 통계적 문제해결 과정의 단계를 작성할 것.
- ○ 최 교사가 [A 모둠]의 논의 활동 중에 밑줄 친 ㉣과 같이 안내한 이유를 통계적 문제해결과 관련한 ‘성취기준 해설’에 근거하여 작성할 것.

6. 어떤 공장에서 생산하는 제품의 수명 X의 확률밀도함수(probability density function)가 다음과 같다.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{c}{x^3}, & x>2\\ \dfrac{c}{16}x, & 0\le x\le 2\\ 0, & x<0\end{cases}$$

이 공장에서 생산하는 제품은 수명이 4 이상인 경우 우수 제품으로 분류되고, 4 미만인 경우 일반 제품으로 분류된다. 상수 c의 값과 임의로 선택한 제품이 우수 제품일 확률 $\mathrm{P}(X\ge 4)$의 값을 순서대로 구하시오.
또한 임의로 4개의 제품을 선택했을 때, 우수 제품이 일반 제품보다 더 많이 포함되어 있을 확률을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B] [2026]

7. 집합 A, B, C가

$$A=\{x\in\mathbb{Z}\mid 21x\equiv 45 \pmod{66},\ 0\le x\le 65\},$$
$$B=\{x\in\mathbb{Z}\mid x^3-1\equiv 0 \pmod{151},\ 0\le x\le 150\},$$
$$C=\{x\in\mathbb{Z}\mid x^n-1\equiv 0 \pmod{151},\ 0\le x\le 150\}$$

이다. A와 B의 원소의 개수를 순서대로 구하시오.
또한 $|A|=|B\cup C|$를 만족시키는 정수 $n(0\le n\le 150)$의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, 151은 소수이고 $|X|$는 집합 X의 원소의 개수이다.) [4점, 서술형B] [2026]

8. 복소수 $z=x+iy$ (x, y는 실수)에 대한 함수

$$f(z)=\frac{x+ay}{x^2+y^2}+x^2+by^2+i\left(\frac{cy}{x^2+y^2}+dxy\right)$$

가 영역 $\mathbb{C}-\{0\}$에서 해석적(analytic)이 되도록 하는 실수 a, b, c, d의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.

또한 $e^{\frac{1}{z}}f(z)$의 $z=0$을 중심으로 하는 로랑 급수(Laurent series)를 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nz^n$이라 할 때, a_{-1}의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B] [2026]

9. 다항식환 $\mathbb{Z}_7[x]$에서 다항식 $f(x)=x^4+3x^2-1$이 기약(irreducible)임을 보이시오. 또한 α를 $f(x)$의 해라 하고, 갈루아 군(Galois group) $G(\mathbb{Z}_7(\alpha)/\mathbb{Z}_7)$의 원소 σ의 위수(order)가 4라 하자. $G(\mathbb{Z}_7(\alpha)/\mathbb{Z}_7)$의 부분군 $\langle\sigma^2\rangle$의 고정체(fixed field) E의 위수(order)를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $\mathbb{Z}_7(\alpha)$는 유한체 $\mathbb{Z}_7$ 위의 단순 확대체(simple extension field)이다.) [4점, 서술형B] [2026]

10. 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$을

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

이라 하고, $S=\left\{\dfrac{f(x)}{x}\,\middle|\, x\text{는 양의 실수}\right\}$라 하자. 집합 S의 상한(supremum)과 하한(infimum)을 순서대로 구하시오.

또한 $\displaystyle\lim_{s\to 0+}\int_0^1\frac{f(x)}{s}e^{-\frac{x^2}{s^2}}dx$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B] [2026]

11. 최고차항의 계수가 2인 삼차함수 $f(x)$가 $-1<x<2$에서 $f(x)>0$이다. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡선 $y=f(x)$, $z=0$ $(-1<x<2)$를 x축 둘레로 360° 회전시켜 얻은 회전면(surface of revolution)을 M이라 하고, 곡면 M이 평면 $x=0$과 만나서 생기는 원을 α, 평면 $x=\dfrac{2}{3}$와 만나서 생기는 원을 β, 평면 $x=1$과 만나서 생기는 원을 γ라 하자.
곡면 M에 놓인 곡선으로서 α, β, γ의 측지곡률(geodesic curvature)이 각각 0, 0, $\dfrac{2}{5}$이다. $f(0)$의 값과 곡선 α 위의 점에서 M의 가우스 곡률(Gaussian curvature)을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B] [2026]