

## [전공내용학 기출문제 해설]



[\[정수론\]](#)

[\[선형대수학\]](#)

[\[이산수학\]](#)

[〈경우의 수와 생성함수〉](#)

[〈그래프〉](#)

[\[확률과통계\]](#)

[〈이산형〉](#)

[〈연속형〉](#)

[\[복소해석학\]](#)

[〈해석함수〉](#)

[〈비해석함수〉](#)

[\[미분기하학\]](#)

[〈곡선〉](#)

[〈곡면〉](#)

[\[위상수학\]](#)

[〈집합·위상의기초·사상·거리공간〉](#)

[〈수렴과분리공리·컴팩트·연결〉](#)

[\[현대대수학\]](#)

[〈군〉](#)

[〈환〉](#)

[〈체〉](#)

[\[실해석학\]](#)

[〈미적분학\(편도함수·다중적분\)〉](#)

[〈실수체계·수열·연속·미분·적분〉](#)

[〈급수·함수열〉](#)

[\[기타\]](#)

[〈미분방정식〉](#)

## [정수론]

1.

$$\gcd(21, 66) = 3 \mid 45 \text{이므로 } |A| = 3.$$

$$1^{\frac{\varphi(151)}{\gcd(\varphi(151), 3)}} \equiv 1 \pmod{151}, \quad \gcd(\varphi(151), 3) = 3 \text{이므로 } |B| = 3.$$

$|A| = 3 = |B \cup C|$  이려면  $C \subset B$ 이어야 하므로

$|C| = \gcd(n, 150) = 1$  또는  $3$ 이어야 한다.

$\gcd(n, 150) = 1$ 인  $n$ 의 개수  $\varphi(150) = 40$ .

$\gcd(n, 150) = 3$ 인  $n$ 의 개수  $\varphi(50) = 20$ 이므로 구하는 값 60.

2.

$$5^{\varphi(157)/2} = 5^{78} \equiv -1 \equiv 156 \pmod{157}, \quad 5^{\varphi(157)} \equiv 5^{156} \equiv 1 \pmod{157}.$$

157과 서로소가 아닌 수는 주어진 합동식의 해가 되지 않는다.

157과 서로소인  $x \equiv 5^t \pmod{157}$ 라 쓸 수 있다.

$$5^{6t} \equiv 5^{78} \pmod{157}, \quad t \equiv 13 \pmod{26}, \quad t \equiv 13, 39, \dots, 143 \pmod{156}.$$

따라서  $A$ 의 원소의 개수는 4.

$157 - i \equiv -i \pmod{157}$ 이므로  $1 \leq i \leq 155$ 인  $i$ 에 대하여

$$\left( \frac{5^i}{157} \right) \left( \frac{i^3}{157} \right) \left( \frac{157-i}{157} \right) = \left( \frac{5^i}{157} \right) \left( \frac{i^4}{157} \right) \left( \frac{-1}{157} \right) = \left( \frac{5^i}{157} \right),$$

$5^i \in \{2, 3, \dots, 156\}$ ,  $5^i - 1 \in \{1, 2, \dots, 155\}$ 이므로

$$\sum_{i=1}^{155} \left\{ \left( \frac{5^i}{157} \right) \left( \frac{i^3}{157} \right) \left( \frac{157-i}{157} \right) + \left( \frac{5^i-1}{157} \right) \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{155} \left( \left( \frac{5^i}{157} \right) + \left( \frac{5^i-1}{157} \right) \right)$$

$$= \sum_{k=2}^{156} \left( \frac{k}{157} \right) + \sum_{k=1}^{155} \left( \frac{k}{157} \right)$$

$$= \left[ 0 - \left( \frac{1}{157} \right) \right] + \left[ 0 - \left( \frac{156}{157} \right) \right]$$

= -2.

3.

$$\gcd(\varphi(p), a) = 1 = \gcd(\varphi(p), b) \text{이므로 } \gcd(\varphi(p), ab) = 1.$$

(법  $\varphi(p)$ 에 관한 곱셈 역원  $a^*$ ,  $b^*$ ,  $(ab)^*$  있다.)

$$|r^{ab}| = \frac{\varphi(p)}{\gcd(\varphi(p), ab)} = \varphi(p) \text{이므로 } r^{ab} \text{는 원시근.}$$

$r^{ab} \equiv r^a \pmod{p}$  또는  $r^{ab} \equiv r^b \pmod{p}$

$\Leftrightarrow ab \equiv a \pmod{\varphi(p)}$  또는  $ab \equiv b \pmod{\varphi(p)}$

$\Leftrightarrow b \equiv 1 \pmod{\varphi(p)}$  또는  $a \equiv 1 \pmod{\varphi(p)}$ 이므로

포함배제의 원리에 따라 조건을 만족시키는 순서쌍  $(a, b)$ 의 개수  $2|X|-1$ .

$p-1 = 2^k \cdot d$ ,  $k \geq 1$ ,  $\gcd(2, d) = 1$ 라 할 때,

$$15 = 2|X|-1 \text{이려면 } |X| = 8 = \varphi(p-1) = 2^{k-1}\varphi(d).$$

$k=1$ 일 때  $d=15$ ,  $p=2^k \cdot d+1=31$ ,

$k=2$ 일 때  $d=5$ ,  $p=21$ ,

$k=3$ 일 때  $d=3$ ,  $p=25$ ,

$k=4$ 일 때  $d=1$ ,  $p=17$ .

그러므로 모든  $p=17, 31$ .

4.

주어진 합동식은  $\begin{cases} (x+1)^2 \equiv k+1 \pmod{3} \\ (x-1)^2 \equiv k+1 \pmod{25} \end{cases}$  과 동치이다.

합동식  $(x+1)^2 \equiv k+1 \pmod{3}$ 에  $x \equiv 0, 1, 2 \pmod{3}$ 을 대입하면

$-k, -k, 2-k \equiv 0 \pmod{3}$ 이므로  $k \equiv 0, 2 \pmod{3}$ 일 때 해가 존재한다.

$$1^2 \equiv 1, \quad 2^2 \equiv 4, \quad 3^2 \equiv 9, \quad 4^2 \equiv 16, \quad 5^2 \equiv 0, \quad 6^2 \equiv 11, \quad 7^2 \equiv 24,$$

$$8^2 \equiv 14, \quad 9^2 \equiv 6, \quad 10^2 \equiv 0, \quad 11^2 \equiv 21, \quad 12^2 \equiv 19 \pmod{25} \text{이므로}$$

$$k+1 \equiv 0, 1, 4, 9, 11, 14, 16, 19, 21, 24,$$

즉  $k \equiv 24, 0, 3, 8, 10, 13, 15, 18, 20, 23 \pmod{25}$ 일 때 해가 존재한다.

두 합동방정식의 해가 동시에 존재하는  $k=15, 18, 20$ 이므로

구하는  $k$ 의 값 11, 12, 13, 14, 16, 17, 19.

5.

$$x^5 \equiv 23 \pmod{35} \Leftrightarrow \begin{cases} x^5 \equiv 3 \pmod{5} \\ x^5 \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$$

$x^5 \equiv 3 \pmod{5}$ 의 해를 찾자.

$$1^5 \equiv 1, \quad 2^5 \equiv 2, \quad 3^5 \equiv 3, \quad 4^5 \equiv 4 \pmod{5} \text{이므로 } x \equiv 3 \pmod{5}.$$

$x^5 \equiv 2 \pmod{7}$ 의 해를 찾자.

$$1^5 \equiv 1, \quad 2^5 \equiv 4, \quad 3^5 \equiv 5, \quad 4^5 \equiv 2, \quad 5^5 \equiv 3, \quad 6^5 \equiv 6 \pmod{7} \text{이므로 } x \equiv 4 \pmod{7}.$$

중국인의 나머지 정리에 의해  $x^5 \equiv 23 \pmod{35}$ 의 해는

$$x \equiv 3 \cdot 7x_1 + 4 \cdot 5x_2 \equiv 18 \pmod{35}$$

(단,  $7x_1 \equiv 1 \pmod{5}$ ,  $5x_2 \equiv 1 \pmod{7}$ ,  $x_1 \equiv -2 \pmod{5}$ ,  $x_2 \equiv 3 \pmod{7}$ )

(다른 풀이)

3은 법 5와 법 7에 관한 원시근이다.

$$5 \operatorname{ind}_3 x \equiv \operatorname{ind}_3 3 \equiv 1 \pmod{4} \text{이므로 } x^5 \equiv 3 \pmod{5} \text{의 해 } x \equiv 3 \pmod{5}.$$

$$5 \operatorname{ind}_3 x \equiv \operatorname{ind}_3 2 \equiv 2 \pmod{6} \text{이므로 } x^5 \equiv 2 \pmod{7} \text{의 해 } x \equiv 4 \pmod{7}.$$

중국나머지정리에 따라  $x^5 \equiv 23 \pmod{35}$ 의 해  $x \equiv 18 \pmod{35}$ .

(다른 풀이)

$$3^{\frac{\varphi(5)}{\gcd(5, \varphi(5))}} \equiv 3^4 \equiv 1 \pmod{5} \text{이고 } 3^5 \equiv 3 \pmod{5} \text{이므로}$$

$x^5 \equiv 3 \pmod{5}$ 는  $\gcd(5, \varphi(5))=1$ 개의 해  $x \equiv 3 \pmod{5}$ 를 갖는다.

$2^{\frac{\varphi(7)}{\gcd(5, \varphi(7))}} \equiv 2^6 \equiv 1 \pmod{7} \text{이므로 } \gcd(5, \varphi(7))=1$ 개의 해를 갖고, 그 해를  $x_0$ 라 하면  $\gcd(x_0, 7)=1$ 이므로

$$x_0^5 \equiv 2 \pmod{7} \Rightarrow 1 \equiv x_0^6 \equiv x_0 \cdot x_0^5 \equiv 2x_0 \pmod{7} \Rightarrow x_0 \equiv 4 \pmod{7}.$$

따라서  $x^5 \equiv 2 \pmod{7}$ 의 해는  $x \equiv 4 \pmod{7}$ 이다.

중국인의 나머지 정리에 의해 구하는 값  $x=18$ .

6.

61은 홀수 소수이므로 원시근  $g$ 있다.  $x \equiv g^t \pmod{61}$ 라 하면

$$(x^{10}-1)(x^{10}+x^5+1)(x^{36}-1) \equiv (x^5+1)(x^{15}-1)(x^{36}-1)$$

$$\equiv (g^{5t}+1)(g^{15t}-1)(g^{36t}-1) \equiv 0 \pmod{61}$$

$$\Leftrightarrow g^{5t} \equiv -1 \equiv g^{30} \pmod{61},$$

$$g^{15t} \equiv 1 \equiv g^{60} \pmod{61},$$

$$g^{36t} \equiv 1 \equiv g^{60} \pmod{61}$$

$$\Leftrightarrow t \equiv 6, 18, 30, 42, 54 \pmod{60},$$

$$t \equiv 0, 4, 8, \dots, 56 \pmod{60},$$

$$t \equiv 0, 5, 10, \dots, 55 \pmod{60} \text{이므로}$$

해의 개수  $5+15+12-1-3=32-4=28$ 개.

$$7. a=1, b=12 (\neq -1), x=77$$

오일러 정리와 계산에 의해  $25^{99} \equiv 1 \pmod{19}$ ,  $25^{99} \equiv -1 \pmod{13}$ .

$\gcd(19, 23)=1$ 이므로 주어진 합동식은  $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{19} \\ x \equiv -1 \equiv 12 \pmod{13} \end{cases}$  와 동치.

$a=1, b=12$ . 중국 나머지 정리에 의해

$$x \equiv 1 \cdot 13x_1 + (-1) \cdot 19x_2 \equiv 77 \pmod{247}, \text{ 구하는 } x=77.$$

(단,  $13x_1 \equiv 1 \pmod{19}$ ,  $19x_2 \equiv 1 \pmod{13}$ )

8.

$$a \in T_m \text{이면 } \gcd(a^{\varphi(8m)}, 8m) = \gcd(1, 8m) = 1 \text{이므로 } \gcd(a, 8m) = 1.$$

자연수  $a$ 일 때  $\gcd(a, 8m)=1$ 이면 오일러 정리에 의해  $a \in T_m$ ,

따라서  $|T_m| = \varphi(8m)$ .

$m$ 이 2를 소인수로 갖는다고 하면

$$m = 2^k \cdot d, \quad \gcd(2, d) = 1 \text{인 정수 } k \geq 1, d \text{ 있다.}$$

$$\varphi(8m) = 2^{k+2}\varphi(d), \quad 4\varphi(m) = 2^{k+1}\varphi(d) \text{이므로 모순이다.}$$

$m$ 이 2를 소인수로 갖지 않을 때  $\varphi(8m) = \varphi(8)\varphi(m) = 4\varphi(m)$ 가 성립하므로 구하는  $m$ 의 개수는 100이하의 양의 홀수 개수 50이다.

131과 서로 소 아닌  $x$ 는 합동식의 해가 되지 않는다. 131은 소수이므로 원시근  $g$ 를 갖고, 131과 서로 소인  $x$ 에 대하여  $x \equiv g^t$ ,  $t \in \{1, 2, \dots, 130 = \varphi(131)\}$ 인  $t$  있다.

주어진 합동식을 풀면  $x^5 \equiv 1$  또는  $x^n \equiv 1 \pmod{131}$ 이며,

$g^{5t} \equiv 1 \pmod{131}$ ,  $t \equiv 0, 26, 52, 78, 104 \pmod{130}$ , 5개 해 있다.

$g^{nt} \equiv 1 \pmod{131}$ ,  $t \equiv 0 \pmod{\frac{130}{d}}$ ,  $d = \gcd(n, 130)$ 개 해 있다.

문제의 조건을 만족하기 위해서는 우선  $d \leq 5$ 여야 한다.

130의 표준분해  $130 = 2 \times 5 \times 13$ 이므로

①  $d=1$ 인 경우

$t \equiv 0$ , 즉  $x \equiv g^0 \equiv 1$ 은  $x^5 - 1 \equiv 0$ 의 해가 된다. 이때  $n$ 의 개수  $\varphi(130) = 48$ .

②  $d=2$ 인 경우

$t \equiv 0, 65$ , 즉  $x \equiv \pm 1$ 이며,  $x \equiv -1$ 은  $x^5 - 1 \equiv 0$ 의 해가 되지 않으므로 해의 개수가 5보다 커지게 되어 조건을 만족하지 않는다.

③  $d=5$ 인 경우

$t \equiv 0, 26, \dots, 104$ 이므로  $x^5 - 1 \equiv 0$ 의 해와 같다. 이때  $n$ 의 개수  $\varphi(26) = 12$ .

( $n$ 은  $d=5 = \gcd(n, 130)$ 의 배수  $\Rightarrow 1 = \gcd(n, 26)$ )

그러므로 구하는  $n$ 의 개수 60이다.

$$10. \sum_{k=3}^{2014} \left( \frac{a_k}{2017} \right) = -4$$

$1 \leq k \leq 2016$ 인  $k$ 는 법 2017에 대하여  $k^*$ 를 가지며, 월슨 정리에 의해  $a_k = k! \times (2017-k)!$

$$\begin{aligned} &= k! \times (2017-k)(2017-k-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= k! \cdot (2017-k)(2017-k-1) \cdots (2017-k+k-2016) \\ &\equiv k!(-k)(-k-1)(-k-2) \cdots (-2015)(-2016) \\ &\equiv k!(-1)^{1+k-2016} \cdot 2016 \times 2015 \times \cdots \times k \\ &\equiv k! \times (-1)^{k-1} 2016! \cdot (k-1)^*(k-2)^* \cdots (k-(k-1))^* \\ &\equiv k(-1)^{k-1} (-1) \\ &\equiv k(-1)^k \pmod{2017}. \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \left( \frac{a_k}{2017} \right) = \left( \frac{k(-1)^k}{2017} \right) = \left( \frac{k}{2017} \right).$$

한편, 2017의 원시근  $g$ 와 각  $1 \leq k \leq 2016$ 에 대하여  $k \equiv g^t \pmod{2017}$ ,  $t \in \{1, 2, \dots, 2016\}$ 인  $t$  있다.

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^{2016} \left( \frac{a_k}{2017} \right) = \sum_{k=1}^{2016} \left( \frac{g}{2017} \right)^t = \sum_{t=1}^{2016} (-1)^t = 0.$$

(다른 설명)

법 2017에 대한 이차잉여와 이차비잉여는 각각 1008개씩 있으며

르장드르 기호의 값은 각각 1, -1이므로  $\sum_{k=1}^{2016} \left( \frac{k}{2017} \right) = 0$ .

$$\text{그러므로 } \sum_{k=3}^{2014} \left( \frac{a_k}{2017} \right) = 0 - \left( \frac{1}{2017} \right) - \left( \frac{2}{2017} \right) - \left( \frac{2015}{2017} \right) - \left( \frac{2016}{2017} \right) = -4.$$

## 11.

$\varphi(89) = 88$ 이고,  $23^{41n} \equiv 23^1 \pmod{89}$ 에서  $41n \equiv 1 \pmod{88}$ 이므로  $n \equiv 41^*$  ( $\pmod{88}$ ).

유클리드 호제법에 의해  $15 \times 41 - 7 \times 88 = -1$ 이므로

$41 \times (-15) \equiv 1 \pmod{88}$ , 즉  $n \equiv 73 \pmod{88}$

그러므로 구하는  $n = 73$ .

$$\begin{array}{c|cc|c} & 41 & 88 & \\ \hline 7 & 42 & 82 & 2 \\ & -1 & 6 & \end{array} \quad \begin{array}{c|cc|c} & a & b & \\ \hline 7 & 7b-14a & 2a & 2 \\ & -1 & b-2a & \end{array}$$

\* 다른 설명:  $\gcd(41, 88) = 1$ , 오일러 정리에 의해

$41^{40} \equiv 1 \pmod{88}$ 이므로  $41^* \equiv 41^{39}$ 를 계산하자.

$41^2 = 1681 \equiv -79 \equiv 9 \pmod{88}$ 이므로

$41^{39} \equiv 41 \times 9^{19} \equiv 41 \cdot 9 \cdot 81^9 \equiv 17 \cdot (-7)^9$

$$\equiv -17 \cdot 7 \cdot 49^4 \equiv -31 \cdot 39^4 \equiv -31 \cdot 1521^2$$

$$\equiv -31 \times 63^2 \equiv -31 \times 97 \equiv -31 \times 9 \equiv -264$$

$$\equiv -15 \equiv 73 \pmod{88}.$$

## 12.

5, 13, 31은 쌍마다 서로 소이다.  $f(x) = x^2 + 2x + 4$ 라 하면

법 5, 13, 31 각각에 대하여  $x \equiv 2$ 는  $f(x) \equiv 0$ 의 해가 되지 않는다.

$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -12$ 이며,  $\left(\frac{D}{5}\right) = -1$ ,  $\left(\frac{D}{13}\right) = 1$ ,  $\left(\frac{D}{31}\right) = 1$ 이므로

주어진 합동식은 법 5, 13, 31 각각에 대해 1개, 3개, 3개의 해를 갖는다. 그러므로 중국인의 나머지 정리에 의해

$x^3 - 8 \equiv 0 \pmod{2015}$ 는  $\mathbb{Z}_{2015}$ 에 9개 해 있다.

## 13. 61

가정에 의해  $m^{18} \equiv 21 \pmod{100}$ ,  $\gcd(m, 10) = 1$ 이므로  $\gcd(m, 10^2) = 1$ .

오일러 정리에 의해  $m^{\varphi(100)} = m^{40} \equiv 1 \pmod{100}$

한편  $294 = 40 \cdot 6 + 18 \cdot 3$ 이므로

$$m^{294} = (m^{40})^6 \cdot (m^{18})^3 \equiv 21^3 \equiv 41 \cdot 21 = 800 + 40 + 20 + 1 \equiv 61 \pmod{100}.$$

그러므로  $m^{294}$ 의 마지막 두 자리 수는 61.

## 14. ②

$50 = 2 \times 5^2$ 이므로 원시근을 갖고,  $\varphi(50) = 20$ 이다.

만약  $x$ 가 50과 서로 소가 아니면  $\gcd(x, 50) \neq 1$ 이고

이때  $\gcd(x^{12}, 50) = \gcd(-9, 50) = 1$ 이 되어 모순이다.

따라서 주어진 합동식의 해는 50과 서로 소인 정수 중에서 찾을 수 있다. (해는 기약잉여계  $\mathbb{Z}_{50}^*$ 에 있다.)

50과 서로 소인  $x$ 에 대하여  $x \equiv 3^t \pmod{50}$ 인  $t \in \{1, 2, \dots, 20\}$  있다.

$3^{12t} \equiv -9 \equiv 3^{10} \cdot 3^2 \equiv 3^{12} \pmod{50}$ 에서  $t \equiv 1, 6, 11, 16 \pmod{20}$ 이므로  $x \equiv 3^t \equiv \pm 3, \pm 3^6 \equiv 3, 47, 29, 21 \pmod{50}$ .

문제 상황에 맞는 해는 3, 21이므로 구하는 값 24.

## 15. ⑤ ㄱ, ㄷ

$p$ 는 홀수 소수이고 5, 11, 17은 쌍마다 서로 소이다.

가정에 의해  $x^2 \equiv -2p \pmod{935}$ 의 해가 존재하므로

합동식  $x^2 \equiv -2p$ 는 법 5, 11, 17 각각에 대해서 해 있다.

$$\text{따라서 } 1 = \left( \frac{-2p}{5} \right) = \left( \frac{-2p}{11} \right) = \left( \frac{-2p}{17} \right).$$

한편  $\left( \frac{-2}{5} \right) = -1$ ,  $\left( \frac{-2}{11} \right) = 1 = \left( \frac{-2}{17} \right)$ 이므로  $\left( \frac{p}{5} \right) = -1$ ,  $\left( \frac{p}{11} \right) = 1 = \left( \frac{p}{17} \right)$ 이다.

$$\begin{aligned} \neg. \left( \frac{-11}{p} \right) &= \left( \frac{-1}{p} \right) \left( \frac{11}{p} \right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} (-1)^{\frac{11-1}{2}} \left( \frac{p}{11} \right) \\ &= 1 \text{이므로 } -11 \text{은 } p \text{의 이차잉여}. \end{aligned}$$

$$\sqcup. \left( \frac{5}{p} \right) = (-1)^{\frac{5-1}{2}} \left( \frac{p}{5} \right) = -1 \text{이므로 } 5 \text{는 } p \text{의 이차비잉여}.$$

$$\sqcup. \left( \frac{17}{p} \right) = (-1)^{\frac{17-1}{2}} \left( \frac{p}{17} \right) = 1 \text{이므로 } 17 \text{는 } p \text{의 이차잉여}.$$

그러므로 답은 ㄱ, ㄷ.

## 16. ②

27은 홀수 소수 3의 거듭제곱이므로 원시근을 갖는데, 문제에 원시근 2가 주어져 있다.

주어진 가정으로부터  $16^n x_0 \equiv x_0 \pmod{27}$ 에서

$\gcd(x_0, 27) = 1$ 이므로 양변에  $x_0^*$ 를 곱하면

$2^{4n} \equiv 1 \pmod{27}$ ,  $4n \equiv 0 \pmod{18}$ 에서  $n \equiv 0 \pmod{9}$ .

그러므로 최소의  $n = 9$ .

(오일러 정리에 의해  $1 \equiv x_0^{\varphi(27)} \equiv x_0^{18} = x_0 \cdot x_0^{17}$ ,  $x_0^* \equiv x_0^{17}$ .)

## 17. ②

ㄱ. 주어진 합동식이 해를 갖는다고 하자.

$$x \equiv 4 \pmod{28} \Rightarrow x \equiv 0 \pmod{4},$$

$$x \equiv 6 \pmod{36} \Rightarrow x \equiv 2 \pmod{4} \text{이므로 모순.}$$

\*  $\gcd(28, 36) = 4$ 는  $6 - 4 = 2$ 를 나누지 않는다.

ㄴ. 정수해를  $a$ 라 하자.  $a^4 \equiv -1 \pmod{p}$ 이므로

$$a^8 \equiv 1 \pmod{p} \text{가 되어 } \text{ord}_p a \mid 8.$$

$$a^4 \not\equiv 1 \pmod{p} \text{이므로 } \text{ord}_p a \neq 1, 2, 4.$$

따라서  $\text{ord}_p a = 8$ 이다.

$$\text{한편 } \gcd(a^4, p) = \gcd(p-1, p) = 1 \text{이므로 } \gcd(a, p) = 1.$$

$$\text{오일러 정리에 의해 } a^{\varphi(p)} = a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}, \text{ ord}_p a = 8 \mid p-1.$$

즉,  $p-1 \equiv 0 \pmod{8}$ .

ㄷ. 부정방정식의 해가 존재한다고 하면,

$$x^2 + 2x + 5 \equiv -4 \pmod{13} \text{의 해도 존재한다.}$$

$$2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = -32, \left(\frac{-32}{13}\right) = -1 \text{이므로 모순.}$$

## 18. ⑤

ㄱ.  $p! + 1$ 을 나누는 소수  $q$ 가  $p$ 보다 작다고 하면 가정에 의해  $q \mid p! + 1$ ,  $q \mid p!$ 이므로  $q \mid 1$ 이 되어 모순이다.

$$(p! + 1) \equiv 0 \pmod{q}, p! \equiv 0 \pmod{q} \Rightarrow 1 \equiv 0 \pmod{q}$$

그러므로  $p! + 1$ 을 나누는 소수는  $p$ 보다 크다.

ㄴ. 윌슨 정리에 의해  $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ ,

$$\gcd(p-1, p) = 1 \text{이므로 양변에 } (p-1)^* \text{을 곱하면}$$

$$(p-2)! \equiv 1 \pmod{p} \text{이다.}$$

( $p=2$ 여도 성립)

ㄷ.  $\gcd(2p, 3) = 1$ ,  $\varphi(2p) = p-1$ 이므로  $3^{\varphi(2p)} = 3^{p-1} \equiv 1 \pmod{2p}$  (오일러정리). ( $p=2, 3$ 일 때는 성립하지 않는다.)

## 19. ④

111의 표준분해는  $111 = 3 \times 37$ 이며  $\gcd(3, 37) = 1$ .

주어진 합동식은  $\begin{cases} x^2 \equiv 1 \pmod{3} \\ x^2 \equiv -7 \pmod{37} \end{cases}$ 과 동치이며,

$x^2 \equiv 1 \pmod{3}$ 의 해는  $x \equiv \pm 1 \pmod{3}$ .

$$\left(\frac{-7}{37}\right) = (-1)^{\frac{37-1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{7-1}{2} \cdot \frac{37-1}{2}} \left(\frac{2}{7}\right)$$

$$= (-1)^{\frac{7^2-1}{8}} = 1 \text{이므로}$$

$x^2 \equiv -7 \pmod{37}$ 의 해는 법 37에 대하여 2개.

## 20. ①

ㄱ.  $\gcd(7, 31) = 1 \mid 2$ 이므로 정수해가 존재한다. ( $x = -13, y = 3$ )

ㄴ.  $\gcd(6, 32) = 2 \mid 22$ 이므로 주어진 합동식은 법 32에 대하여 2개해 있다.

ㄷ.  $\gcd(17, 23) = 1$ 이고,  $x^2 + 10x + 20 \equiv 0 \pmod{17}$ 에서

$$D = 10^2 - 4 \cdot 20 = 20, \left(\frac{D}{17}\right) = -1 \text{이므로 해 없다.}$$

그러므로  $x^2 + 10x + 20 \equiv 0 \pmod{17 \cdot 23}$ 의 해도 존재하지 않는다.

## 21. ④

홀수 소수 29이며 1보다 크거나 같고 28보다 작거나 같은 정수  $x$ 에 대하여  $x \equiv 2^t \pmod{29}$ 인  $t \in \{1, 2, \dots, 28\}$  있다.

$2^{4t} \equiv 1 \pmod{29}$ 에서  $t \equiv 0, 7, 14, 21 \pmod{28}$ .

따라서  $x \equiv 2^t \equiv 2^0, 2^7, 2^{14}, 2^{21} \pmod{29}$

$$\equiv \pm 1, \pm 12 \pmod{29}$$

$$\equiv 1, 28, 12, 17 \pmod{29},$$

문제 상황에 맞는  $x$ 는 1, 28, 12, 17이며, 이를 모두 곱한 값

$$m = 1 \times 28 \times 12 \times 17$$

$$\equiv 2^0 \cdot 2^{14} \cdot 2^7 \cdot 2^{21} \equiv 2^{42} \equiv 2^{14} \pmod{29}.$$

이때  $2^k \equiv 2^{14} \pmod{29}$ 에서  $2^{k-14} \equiv 1 \pmod{29}$ ,  $k-14 \equiv 0 \pmod{28}$ ,

구하는 최소의 양의 정수  $k = 14$ . ( $\text{ord}_{29} 2 = \varphi(29) = 28$ )

## 22. ③

ㄱ.  $\gcd(a, b) = d \Rightarrow as + bt = d$ 인 정수  $s, t$ 가 존재,

(역명제는 항상 성립하지 않는다.  $d=1$ 일 때 성립)

$ap + bq = 1$ 인 정수  $p, q$ 가 존재할 때  $a$ 와  $b$ 는 서로소.

ㄴ. 정수  $m (\geq 2), 2^m - 1$ 이 소수이면,  $m$ 도 소수.

정수  $a (\geq 2)$ , 양의 정수  $m, n$ ,

$$(1) n \mid m \text{이면, } a^n - 1 \mid a^m - 1.$$

$$(2) (a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m,n)} - 1.$$

$$\therefore 110_{(25)} = 1 \times 25^2 + 1 \times 25^1 + 0 \times 25^0 = 650 \text{이며,}$$

$$650 = 1 \times 5^4 + 1 \times 5^2 \text{이므로 } 110_{(25)} = 10100_{(5)}.$$

## 23. ③

ㄱ. 19는 홀수 소수이므로 원시근을 갖는다.

ㄴ.  $\varphi(8) = \varphi(2^3) = 4$ 의 약수 1, 2, 4에 대하여

$$3^1 \equiv 3, 3^2 \equiv 1, 3^4 \equiv 1 \pmod{8} \text{이므로}$$

$\text{ord}_8 3 = 2 \neq 4 = \varphi(8)$ 이 되어 3은 8의 원시근이 아니다.

ㄷ. 양변에  $(g^j)^*$ 를 곱하면  $g^{i-j} \equiv 1 \equiv g^{\varphi(m)} \pmod{m}$ 이므로

$$\text{ord}_m g = \varphi(m) \mid i-j, \text{ 즉 } i-j \equiv 0 \pmod{\varphi(m)}.$$

## 24. ④

$a = 14, b = 32$ 에 대하여 유clidean 호제법 적용하자.

2	14    32	3	2	a    b	3
	12    28	3		3b-6a    2a	3
	2    4			7a-3b    b-2a	

따라서  $32 \times (-3) + 14 \times 7 = 2$ .

특수해  $(x_0, y_0) = (-3, 7)$ , 일반해  $x = -3 + \frac{14}{2}t, y = 7 - \frac{32}{2}t$  ( $t \in \mathbb{Z}$ ).

$$(x, y) = (-3 + 7t, 7 - 16t), t \in \mathbb{Z}.$$

$t=0, 1$ 에 대하여  $(x, y) = (-3, 7), (4, -9)$ 이므로 보기 중에서 답은 10(④).

## 25. ③

①  $\varphi(5) = 4$ 이고, 4의 약수는 1, 2, 4이다.

법 5에 대하여  $3^1 \equiv 3, 3^2 \equiv -1, 3^4 \equiv 1$ ,

$$r = 4.$$

②  $\varphi(7) = 6$ 이며 6의 약수는 1, 2, 3, 6이다.

법 7에 대하여  $3^1 \equiv 3, 3^2 \equiv 2, 3^3 \equiv -1, 3^6 \equiv 1$ ,

$$s = 6.$$

③  $\varphi(35) = \varphi(5)\varphi(7) = 24$ 이며,

24의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 12, 24이다.

법 35에 대하여  $3^1 \equiv 3, 3^2 \equiv 9, 3^3 \equiv 27, 3^4 \equiv 11$ ,

$$3^6 \equiv 11 \times 9 \equiv -6,$$

$$3^{12} \equiv 36 \equiv 1, 3^{24} \equiv 1^2 \equiv 1,$$

$$t = 12.$$

(다른 방법)  $t = \text{lcm}(4, 6) = 12$ .

그러므로 구하는  $rst = 288$ .

26.  $\gcd(3, 4, 5) = 1 \mid 2$ 이므로 정수해  $(x, y, z)$ 가 존재.

$w = 3x + 4y$ 로 놓으면, 주어진 방정식은  $w + 5z = 2$ ,

$1 \times (-3) + 5 \times 1 = 2$ 이므로 특수해  $(w_0, z_0) = (-3, 1)$ ,

$(w, z) = (-3 + 5t, 1 - t)$ ,  $t \in \mathbb{Z}$ .

한편,  $3x + 4y = w$ 에서  $3 \times (-w) + 4 \times w = w$ 이므로

특수해  $(x_0, y_0) = (-w, w)$ ,

$(x, y) = (-w + 4s, w - 3s)$ ,  $s \in \mathbb{Z}$ 이므로

$(x, y, z) = (3 - 5t + 4s, -3 + 5t - 3s, 1 - t)$ ,  $s, t \in \mathbb{Z}$ .

(다른 풀이)

$3x + 4y = 2 - 5z$ 이고,  $3 \times (-1) + 4 \times 1 = 1$ 이므로

$3 \times (-1)(2 - 5z) + 4 \times 1(2 - 5z) = 2 - 5z$ .

따라서  $x = -2 + 5s - 4t$ ,  $y = 2 - 5s + 3t$ ,  $z = s$ . ( $s, t \in \mathbb{Z}$ )

27.

주어진 합동식은  $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 0 \pmod{4}$ 와 동치이다.

임의의 정수  $a$ 일 때,  $a^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$ 이므로  $x^2, y^2, z^2 \equiv 0 \pmod{4}$ .

따라서  $x, y, z \equiv 0 \pmod{2}$ .

28.  $a = 802$

문제 상황을 합동식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{9} \\ x \equiv 2 \pmod{10} \\ x \equiv -1 \pmod{11} \end{cases}$$

9, 10, 11은 쌍마다 서로 소이다.

중국인의 나머지 정리에 의해

$$x \equiv 1 \cdot 110x_1 + 2 \cdot 99x_2 + (-1) \cdot 90x_3 \pmod{9 \cdot 10 \cdot 11}$$

$$\equiv -440 - 198 + 450$$

$$\equiv 802 \pmod{990}$$

$$(110x_1 \equiv 1 \pmod{9}, 99x_2 \equiv 1 \pmod{10}, 90x_3 \equiv 1 \pmod{11})$$

그러므로 구하는  $a = 802$ .

29. 288

1008의 표준분해는  $1008 = 2^4 \times 3^2 \times 7$ 이므로

$$\mathbb{Z}_{1008}^* = \varphi(1008) = \varphi(2^4 3^2 7) = \varphi(2^4) \varphi(3^2) \varphi(7) = 8 \cdot 6 \cdot 6 = 288.$$

30. (1) O (2) X

$$(1) \left(\frac{97}{101}\right) = \left(\frac{-4}{101}\right) = \left(\frac{-1}{101}\right) \cdot \left(\frac{2^2}{101}\right) = (-1)^{\frac{101-1}{2}} = 1 \text{이므로}$$

주어진 이차합동식은 해를 갖는다.

$$(2) x^2 + 2x - 28 \equiv 0 \pmod{89} \text{에서 } 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-28) = 116,$$

$$\left(\frac{116}{89}\right) = \left(\frac{27}{89}\right) = \left(\frac{3}{89}\right) = (-1)^{\frac{3-1}{2}} \cdot \frac{89-1}{2} \left(\frac{-1}{3}\right) = -1.$$

그러므로 주어진 이차합동식은 해를 갖지 않는다.

$$* D/4 = 29 \text{라 할 때 } \left(\frac{D/4}{89}\right) = (-1)^{\frac{29-1}{2} \frac{89-1}{2}} \left(\frac{2}{29}\right) = -1$$

31. ③

19는 홀수 소수이며,  $\varphi(19) = 18$ 이고, 18의 약수는 1, 2, 3, 6, 9, 18이다.

$k = 1, 2, 3, 6, 9, 18$ 에 대하여  $9^k \equiv 9, 5, 7, 11, 1, 1 \pmod{19}$

즉,  $9^9 \equiv 1 \equiv 9^{18} \pmod{19}$ 이다. 보기 중에서는  $(9^9)^4 \equiv 9^{36} \equiv 1^4 \equiv 1 \pmod{19}$ .

(1) 정수  $m (\geq 3)$ 에 대하여  $\mathbb{Z}_m^* = \{s_1, s_2, \dots, s_{\varphi(m)}\}$ 라 할 때,

$$s_1 + s_2 + \dots + s_{\varphi(m)} = \frac{\varphi(m)}{2} m.$$

(2) 정수  $m (\geq 3)$ 에 대하여 범  $m$ 에 관한 기약잉여계

$$R = \{r_1, r_2, \dots, r_{\varphi(m)}\} \text{에 대하여 } r_1 + r_2 + \dots + r_{\varphi(m)} \equiv 0 \pmod{m}.$$

(3)  $p$ : 홀수소수,  $(k, p-1) = 1$ 인 양의 정수  $k$ ,

$$1^k + 2^k + \dots + (p-1)^k \equiv 1 + 2 + \dots + (p-1) \equiv 0 \pmod{p}$$

32. ③

월요일을 0, 화요일을 1, …, 일요일을 6라 하고,

오늘의 요일을  $T$ 요일, 구하는 요일을  $x$ 요일이라 할 때,

$$T + n^7 \equiv 4 \pmod{7}, T + (n+2)^7 \equiv x \pmod{7}.$$

$$x \equiv 4 + (n+2)^7 - n^7 \quad (\because \text{Fermat 정리})$$

$$\equiv 4 + n^7 + 2^7 - n^7 \equiv 4 + 1 \cdot 2 = 6 \pmod{7}$$

그러므로 구하는 요일은 일요일이다.

\* Fermat의 정리: 소수  $p$

(1) 모든 정수  $a$ 에 대하여  $a^p \equiv a \pmod{p}$

$$(2) 1 \leq r \leq p-1 \text{일 때 } \binom{p}{r} \equiv 0 \pmod{p}$$

$$(3) (a+b)^p = a^p + b^p \pmod{p}$$

$$(4) (a, p) = 1, a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

$$(5) (a, p) = 1, ax \equiv b \pmod{p} \text{의 해 } x \equiv a^{p-2}b \pmod{p}$$

$$(6) 1^p + 2^p + \dots + (p-1)^p \equiv 0 \pmod{p}$$

$$(7) 1^{p-1} + 2^{p-1} + \dots + (p-1)^{p-1} \equiv -1 \pmod{p}$$

33. ④

101은 소수이므로 월슨 정리에 의해  $100! \equiv -1 \pmod{101}$ .

그러므로 구하는 값은 100.

\* Wilson의 정리

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p} \Leftrightarrow p: \text{소수}$$

\* 홀수 소수  $p$ ,

$$(1) 1^2 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot (p-4)^2 (p-2)^2$$

$$\equiv 2^2 \cdot 4^2 \cdot \dots \cdot (p-3)^2 (p-1)^2 \pmod{p}$$

$$\equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}$$

$$(2) 1+2+\dots+(p-2)+(p-1) \equiv 0 \pmod{p}$$

$$(3) p \equiv 1 \pmod{4} \text{이면, } \left\{ \left( \frac{p-1}{2} \right) ! \right\}^2 \equiv -1 \pmod{p}$$

$$(4) (p-2)! \equiv 1 \pmod{p}, 2 \cdot (p-3)! \equiv -1 \pmod{p}$$

## 34. ③

$$\gcd(5^n, 7^n) = 1 \text{이므로 } 500! \times 200! \equiv 0 \pmod{35^n}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 500! \times 200! \equiv 0 \pmod{5^n} \\ 500! \times 200! \equiv 0 \pmod{7^n}, \end{cases}$$

$5 < 7$ 이므로 7의 최대지수만 구하면 충분하다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\lceil \frac{500}{7^n} \right\rceil = \left\lceil \frac{500}{7} \right\rceil + \left\lceil \frac{500}{7^2} \right\rceil + \left\lceil \frac{500}{7^3} \right\rceil + \dots + 0 + 0 + \dots = 71 + 10 + 1 = 82,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\lceil \frac{200}{7^n} \right\rceil = \left\lceil \frac{200}{7} \right\rceil + \left\lceil \frac{200}{7^2} \right\rceil + \dots + 0 + 0 + \dots = 28 + 4 = 32.$$

그러므로  $500! \times 200!$  을 나누는 35의 최대지수는 114.

$$* [x] \leq x < [x] + 1, \quad \lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil$$

$$\textcircled{1} [x+a] = [x] + a, \quad [x] + [y] \leq [x+y]$$

$$\textcircled{2} [-x] = -[x], \quad [x][y] \leq [xy]$$

\*  $10!$  과 최소공배수  $[1, 2, \dots, 10]$  의 표준분해

10보다 크지 않은 모든 소수는 2, 3, 5, 7.

$$\left\lceil \frac{10}{2} \right\rceil = 5, \quad \left\lceil \frac{10}{2^2} \right\rceil = 2, \quad \left\lceil \frac{10}{2^3} \right\rceil = 1 \quad (\text{3회 계산})$$

$$\left\lceil \frac{10}{3} \right\rceil = 3, \quad \left\lceil \frac{10}{3^2} \right\rceil = 1 \quad (\text{2회 계산})$$

$$\left\lceil \frac{10}{5} \right\rceil = 2, \quad (\text{1회 계산})$$

$$\left\lceil \frac{10}{7} \right\rceil = 1 \quad (\text{1회 계산})$$

$\therefore 10! = 2^{5+2+1} \cdot 3^{3+1} \cdot 5^2 \cdot 7^1 = 2^8 3^4 5^2 7,$   
(전개했을 때 끝자리에 2개의 0이 있음)

$$[1, 2, 3, \dots, 10] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7.$$

## 35. ①

$$\varphi(11) = 10, \quad \gcd(11, 2) = 1 = \gcd(11, 14) \text{이므로}$$

$$\text{오일러 정리에 의해 } 2^{10} \equiv 1 \equiv 14^{10} \pmod{11}, \quad 2^{10} \cdot 14^{10} \equiv 1 \pmod{11}.$$

$$\text{따라서 } 2^{15} 14^{10} + 2 \equiv 2^5 \cdot 1 + 2 \equiv 34 \equiv 1 \pmod{11}.$$

그러므로 정수  $2^{15} 14^{10} + 2$ 를 11로 나눈 나머지는 1.

## 36. ②

$$\gcd(2, 3) = 1 \mid 55 \text{이므로 정수해 } (x, y) \text{가 존재한다.}$$

$$2 \times (-1) + 3 \times 1 = 1 \text{에서 특수해 } (x_0, y_0) = (-55, 55).$$

$$\therefore (x, y) = (-55 + 3t, 55 - 2t), \quad t \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{문제 상황에 맞는 } t \text{의 범위는 } \frac{55}{3} < t < \frac{55}{2} \text{이므로}$$

구하는 양의 정수해  $(x, y)$ 의 개수는 9개.

## [선형대수학]

1.

$$u = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, v = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, w = u \times v = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{라 하자.}$$

$Au = 4u$ ,  $Av = 10v$ 이므로  $A$ 의 고유치 4, 10.

$\det(A) = 800$ 이므로  $A$ 의 남은 고유치 20이며 고유벡터  $w$ .

따라서  $\{u, v, w\}$ 는  $\mathbb{R}^3$ 의 정규직교기저이고,  $P = (u | v | w)$ 라 할 때,

$$A = P \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix} P^T, A^{-1} = P \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1/20 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

$$\text{가정에 따라 } B = 2|B|A^{-1} = 2|B| \cdot P \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1/20 \end{pmatrix} P^{-1},$$

$|B| = (2|B|)^3 \cdot \frac{1}{|A|}$ ,  $|B|^2 = 100$ ,  $\text{tr}B$ 는  $|B|$ 의 부호와 같으므로  $|B| = -10$ .  $B$ 의 고유치  $-5, -2, -1$ ,  $B$ 의 고유벡터로 구성된 정규직교기저  $\{u, v, w\}$ .

2.

(나)에 따라 2차원 평면  $x+y+z=0$ 의 영이 아닌 임의의 벡터  $v$ 에 대하여  $\left(A^{-1} - \frac{1}{2}I\right)v = 0$ ,  $Av = 2v$ , 따라서  $A$ 의 고유치 2.

$$(가)에 따라  $A$ 의 다른 하나의 고유치 8이므로  $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ .$$

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1), v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), v_2 = v_1 \times v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1) \text{라 하면}$$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ 는  $\mathbb{R}^3$ 의 정규직교기저이다.

( $v_3$ 는 고유치 8에 대응하는 고유벡터)

((1, -2, 1), (1, 2, -3)은 서로 다른 고유벡터이지만 수직이 아님)

$$P = (v_1 | v_2 | v_3) \text{로 놓으면 } A = PDP^{-1} = PDP^T.$$

3.

(가), (나)에 따라  $A$ 의 고유치 3,  $\alpha$ ,  $\bar{\alpha}$ ,  $\alpha\bar{\alpha} = |\alpha|^2 = 2$ .

따라서  $B$ 의 고유치는  $3^2 - 3 + 5 \cdot 1 = 11$ ,  $\alpha^2 - \alpha + 5$ ,  $\bar{\alpha}^2 - \bar{\alpha} + 5$ .

(다)에 따라  $B$ 의 서로 다른 고유치는 2개 이하이며,

$11 = \alpha^2 - \alpha + 5$  또는  $11 = \bar{\alpha}^2 - \bar{\alpha} + 5$ 이면  $\alpha, \bar{\alpha}$ 가 실수(실근)가 되어 모순.

따라서  $\alpha^2 - \alpha + 5 = \bar{\alpha}^2 - \bar{\alpha} + 5$ ,  $\alpha + \bar{\alpha} = 1$ .

$$\alpha, \bar{\alpha} \text{는 } x^2 - x + 2 = 0 \text{의 근 } \frac{1 \pm \sqrt{7}i}{2}.$$

그러므로  $\det(A) = 3\alpha\bar{\alpha} = 6$ ,  $\text{tr}(A) = 3 + \alpha + \bar{\alpha} = 4$ .

4.

$$L(1, 1, 1) = (0, 0, 0),$$

$$L(0, 1, 1) = (-1, 0, 0) = -(1, 1, 1) + (0, 1, 1),$$

$$L(1, 0, 1) = (2, -1, 1) = -(0, 1, 1) + 2(1, 0, 1) \text{이므로 } [L]_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

( $a+c=2$ ,  $a+b=-1$ ,  $a+b+c=1$ 로부터  $b=-1$ ,  $c=2$ ,  $a=0$ )

$|xI - [L]_\alpha| = x(x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x=0, 1, 2$ 에 대응하는 고유공간

$$E_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, E_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, E_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \text{이므로}$$

( $[L]_\alpha$ 의 고윳값의 대수적 중복도와 기하적 중복도가 일치하므로)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{일 때 } P^{-1}[L]_\alpha P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \text{ 즉 } [L]_\alpha \text{는 대각화 가능하다.}$$

(다른 설명)

$[L]_\alpha \in \text{Mat}_3(\mathbb{R})$ 는 서로 다른 3개의 고유치를 가지므로 대각화 가능.

5.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{라 하면 } Av_1 = 4v_1, Av_2 = -2v_2, Av_3 = -2v_3.$$

따라서 고유치 4, -2

$$\begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} + a_{13} \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A \left( \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_3 \right) = 2v_1 - v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{이므로 구하는 값 } 1.$$

6.

$$|A - xI| = 0 \Leftrightarrow x = 1, 2, 3. \text{ 고유치 } 1, 2, 3 \text{이며, } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{라 하면}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \text{adj}(P) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = D.$$

$$* \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -10 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 3^n & 3^n - 1 & 3^n - 1 \\ 0 & 2^{n+1} - 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2 - 2^{n+1} & 2 - 2^n \end{pmatrix}, \text{ 구하는 값 } 2^n - 1.$$

$$* \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2^n - 1.$$

(2행) (3열)

7.

$A$ 는 삼각행렬이므로 고유치 5, 1, -1이다. (계산해도 된다.)

각각 서로 다른 고유치에 대응하는 고유벡터는

$$u_1 = (1, 0, 0), u_2 = (3, -4, 0), u_3 = (0, 1, 1) \text{이며 일차독립.}$$

$$* \text{ 다른 설명: } \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \text{이므로 일차독립.}$$

따라서  $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ 는  $\mathbb{R}^3$ 의 기저이다.

한편,  $T(u_1) = 5u_1, T(u_2) = 1u_2, T(u_3) = -u_3$ 이므로

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{는 대각행렬.}$$

$$* [T]_E^E = PDP^{-1} = [I]_E^B [T]_B^B [I]_B^E$$

8.  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ 는  $\mathbb{R}^3$ 의 기저이다.

$$T_k(v_1) = v_1 + v_1 + kv_1 = (k+2)v_1,$$

$$T_k(v_2) = v_2 + \left[ \frac{v_2 \cdot v_1}{\|v_1\|^2} v_1 + \vec{0} \right] + kv_2 = v_1 + (k+1)v_2,$$

$$T_k(v_3) = [\vec{0} + \vec{0}] + v_3 + kv_3 = (k+1)v_3 \text{이므로 } [T_k]_{\mathcal{B}} = A = \begin{pmatrix} k+2 & 1 & 0 \\ 0 & k+1 & 0 \\ 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}.$$

$T_k$ 의 역변환이 존재하지 않으려면  $A$ 의 역행렬이 존재하지 않아야 한다.

따라서  $\det A = (k+1)^2(k+2) = 0, k = -1, -2$ .

$T_k$ 의 랭크 2가 되는 경우는  $\text{rank} A = 2, k = -2$ .

\* 표준기저에 의한  $T_k$ 의 행렬  $A$ 라 하면

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + kI \\ = \begin{pmatrix} k+2 & 0 & 0 \\ 0 & k+1 & 0 \\ 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}.$$

9.  $\{v_1, v_2, v_3\}$ 는  $\mathbb{R}^3$ 의 기저이므로 일차독립이다.

스칼라체  $\mathbb{R}$ 의 원소  $a, b, c$ 에 대하여

$$a(v_1+v_2)+b(v_1+v_3)+c(v_2+v_3)=\mathbf{0} \quad (\in \mathbb{R}^3) \text{ 라 하면}$$

$$(a+b)v_1+(a+c)v_2+(b+c)v_3=\mathbf{0} \text{ 이므로}$$

$$a+b=a+c=b+c=0 \text{ 에서 } a=b=c=0,$$

즉  $v_1+v_2, v_1+v_3, v_2+v_3$ 은 일차독립이며, 어떤 벡터도 영벡터가 아니다.

\* 다른 설명

기저에 의한 세 벡터의 표현행렬  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 의 계수=3이므로 세 벡터는 벡터공

간  $\mathbb{R}^3$ 의 일차독립인 벡터이며, 따라서  $\mathcal{B} = \{v_1+v_2, v_1+v_3, v_2+v_3\}$ 는  $\mathbb{R}^3$ 의 기저이다.

한편 주어진 조건으로부터

$$A(v_1+v_2)=v_1+v_2, A(v_1+v_3)=2(v_1+v_3), A(v_2+v_3)=3(v_2+v_3) \text{ 이므로}$$

$A$ 의 고유치는 1, 2, 3.

그러므로  $\det(A)=1 \cdot 2 \cdot 3=6$ .

\* 다른 설명:  $P=(v_1+v_2 | v_1+v_3 | v_2+v_3)$ 라 할 때

$$A=P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1} \text{ 이고, } \det A=\left| P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1} \right|=\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}=6.$$

\* 대각화  $A=PDP^{-1}$ ,  $P=(\text{고유열벡터})$

\* 기저변환  $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}=[I]_{\mathcal{B}}^E[T]_E^E[I]_E^{\mathcal{B}}$ .

10.  $|a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}|=3\sqrt{5}$

$v_1 \times v_2 = (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})u_1 \times u_2$  이므로 양변 노름취하면

$$|a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}| \|u_1 \times u_2\| = |a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}| = \|v_1 \times v_2\| = \|(6, 0, -3)\| = 3\sqrt{5}.$$

\* 다른 설명

$$v_3=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,-1) \text{ 라 하면 } v_3 \text{는 평면 } V \text{의 법벡터와 평행하다.}$$

따라서  $B'=\{v_1, v_2, v_3\}$ 는  $\mathbb{R}^3$ 의 기저가 되며,

$B''=\{u_1, u_2, v_3\}$ 는  $\mathbb{R}^3$ 의 정규직교기저이다.

한편  $v_1=a_{11}u_1+a_{12}u_2, v_2=a_{12}u_1+a_{22}u_2, v_3=v_3$  이므로

이를 행렬로 나타내면  $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$  이다.

$B''$ 은 정규직교기저이므로  $\left| \det \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right|=1$  ( $\leftarrow$  절대치),

$$|a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}|=\left| \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$=\left| \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \right|=3\sqrt{5}.$$

11.

$$\|T(\mathbf{x})\|^2=T(\mathbf{x}) \cdot T(\mathbf{x})=(\mathbf{x}-2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}) \cdot (\mathbf{x}-2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u})$$

$$=\|\mathbf{x}\|^2-4(\mathbf{x} \cdot \mathbf{u})^2+4(\mathbf{x} \cdot \mathbf{u})\|\mathbf{u}\|^2$$

$$=\|\mathbf{x}\|^2.$$

$$\|T(\mathbf{x})\| \geq 0, \|\mathbf{x}\| \geq 0 \text{ 이므로 } \|T(\mathbf{x})\|=\|\mathbf{x}\|.$$

\* 다른 설명

$T$ 는  $\langle \mathbf{u} \rangle$ 와 수직인 직선  $\langle \mathbf{u} \rangle^\perp$ 에 대한 선대칭변환이다.

선대칭변환은 합동변환이므로 등장사상이다.

따라서  $\|T(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)\|=\|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\|$  이므로  $\|T(\mathbf{x})\|=\|\mathbf{x}\|$ .

$$T(1,0)=(1,0)-(1,1), T(1,1)=-(1,1), [T]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$* T(\mathbf{x})=\mathbf{x}-2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}=\mathbf{x}-2\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u}=\mathbf{x}-2\text{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{x}$$

12.  $(x-1)(x+1)^2$

$\mathbb{R}^3$ 의 직선  $\langle(1, 2, 3)\rangle$ 의 기저원  $\mathbf{u}$ 와

$(1, 2, 3)$ 을 법선으로 하는 평면  $\langle(1, 2, 3)\rangle^\perp$ 의 기저원  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ 에 대하여

$$T(\mathbf{u})=1 \cdot \mathbf{u}, T(\mathbf{v})=-1 \cdot \mathbf{v}, T(\mathbf{w})=-1 \cdot \mathbf{w} \text{ 이므로}$$

$T$ 는 고유치 1, -1을 갖고, 고유다항식  $(x-1)(x+1)^2$ .

\* 다른 풀이

$$v_1=(1, 2, 3) \text{과 수직인 벡터 } v_2=(2, -1, 0) \text{과}$$

$$\text{그 외적 } v_3=v_1 \times v_2=(3, 6, -5) \text{라 하자.}$$

$$T(v_1)=v_1, T(v_2)=-v_2, T(v_3)=-v_3 \text{ 이므로}$$

$$A=(v_1 | v_2 | v_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} (v_1 | v_2 | v_3)^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{단, } (v_1 | v_2 | v_3)^{-1} = \frac{1}{70} (\text{adj} A_{ij})^T = \frac{1}{70} \begin{pmatrix} 5 & 28 & 3 \\ 10 & -14 & 6 \\ 15 & 0 & -5 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{70} \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 28 & -14 & 0 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

이때  $A$ 의 특성다항식

$$|A-xI|=\frac{1}{7^3} \{(6-7x)(-3-7x)(2-7x)+72-9(-3-7x)$$

$$-36(-6-7x)-4(2-7x)\}$$

$$=\frac{1}{7^3} \cdot (-343)(x-1)(x+1)^2$$

$$=-(x-1)(x+1)^2.$$

## 13.

임의의 스칼라  $a, b \in \mathbb{C}$  와 임의의  $f, g \in V$ ,

$$\begin{aligned} T(af+bg) &= \int_C af(z) + bg(z) dz \\ &= a \int_C f(z) dz + b \int_C g(z) dz \\ &= aT(f) + bT(g) \text{이므로 } T \text{는 선형사상이다.} \end{aligned}$$

$a_1f_1 + a_2f_2 + a_3f_3 + a_4f_4 \in \ker T$ 이면 코시-구르사 정리와 유수 정리에 의해

$$0 = \int_{|z|=1} a_1f_1 + a_2f_2 + a_3f_3 + a_4f_4 dz$$

$$\begin{aligned} &= a_2 \int_{|z|=1} f_2 dz + a_4 \int_{|z|=1} f_4 dz \\ &= a_2 \int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz + a_4 \int_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} dz \\ &\quad (|z|=1 \text{에서 } z^2 = |z|^2 = z\bar{z}, \bar{z} = \frac{1}{z}) \end{aligned}$$

$$= a_2 \cdot 2\pi i + a_4 \cdot 2\pi i \text{이므로 } a_4 = -a_2.$$

그러므로  $\ker T \subset \langle f_1, (f_2 - f_4), f_3 \rangle$ .

$f_1, f_2 - f_4, f_3 \in \ker T$ 이고, 적당한  $a, b, c \in \mathbb{C}$ 에 대하여

$$af_1 + b(f_2 - f_4) + cf_3 = 0 \text{이면 } az + b(\bar{z} - e^{\frac{1}{z}}) + ce^z = 0, \forall z \in \mathbb{C}.$$

⑦  $z=0$ 일 때,  $b=c$

⑧  $z=\frac{\pi i}{2}$  일 때,  $\frac{\pi i}{2}a+b=0$

⑨  $z=\pi i$  일 때,  $\pi ia-b\pi i=0$

따라서  $a=b=c=0, f_1, f_2-f_4, f_3$ 는 일차독립,

$\ker T$ 의 기저는  $\{f_1, (f_2 - f_4), f_3\}$ .

( $\dim \ker T = 3$ 이므로  $\dimim T = 1, \dim V = 4$ )

( $T$ 는 동형 선형사상은 아니다.)

$$f \in T^{-1}(2) \Leftrightarrow T(f) = 2 = T\left(\frac{1}{\pi i}f_2\right)$$

$$\Leftrightarrow T\left(f - \frac{1}{\pi i}f_2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow f - \frac{1}{\pi i}f_2 \in \ker T$$

$$\Leftrightarrow f \in \frac{1}{\pi i}f_2 + \ker T.$$

$$\text{그러므로 } T^{-1}(2) = \frac{1}{\pi i}f_2 + \ker T.$$

( $T(f)=2$ 의 특수해 +  $\ker T$ )

( $Ax=2$ 의 특수해 +  $Ax=0$ 의 일반해)

( $A$ 의 영공간)

\*  $A$ :  $T$ 의 행렬(선형사상이므로  $A$  있다.),  $\text{rank } A = 1$

14.  $a=15$ 

원점을 중심으로 시계방향으로  $45^\circ$  만큼 회전이동하는 행렬은

$$\begin{pmatrix} \cos(-45^\circ) & -\sin(-45^\circ) \\ \sin(-45^\circ) & \cos(-45^\circ) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ (직교행렬).}$$

$(x, y) \in C$ 에 대하여 회전이동한 뒤의  $C$  위의 점을  $(x', y')$ 라 할 때,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{에서 } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right]^T \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x' - y' \\ x' + y' \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$C$ 의 방정식에 대입하여 정리하면

$$(14a+a^2)(x')^2 + (14a-a^2)(y')^2 - \sqrt{2}x' - 1 = 0.$$

$a$ 는 자연수이므로  $14a+a^2 > 0$ .

이 곡선이 초점이  $x$ 축에 있는 쌍곡선이 되려면  $14a-a^2 < 0$ .

그러므로  $a > 14$ 인 자연수  $a$  중 가장 작은 수 15.

\*  $\mathbb{R}^2$ 에서  $\theta$ 만큼 반시계 회전 행렬  $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

\*  $\mathbb{R}^3$ 에서 회전변환행렬

$$\textcircled{1} \text{ 양의 } x\text{-축에 대하여 } \theta \text{만큼 반시계 회전 } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{2} \text{ 양의 } y\text{-축에 대하여 } \theta \text{만큼 반시계 회전 } \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{3} \text{ 양의 } z\text{-축에 대하여 } \theta \text{만큼 반시계 회전 } \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 15. ⑤

ㄱ. 스칼라 체  $\mathbb{R}$ 에 속하는 적당한  $a, b, c$ 에 대하여

$$a(v_1 + v_2 + v_3) + b(v_2 + v_3) + cv_3 = (0, 0, 0, 0, 0) \text{라 하면}$$

$$av_1 + (a+b)v_2 + (a+b+c)v_3 = \mathbf{0},$$

$v_1, v_2, v_3$ 은 일차독립이므로  $a=0, a+b=0, a+b+c=0$ ,

$a=b=c=0$ . 즉  $v_1+v_2+v_3, v_2+v_3, v_3$ 도 일차독립이다.

ㄴ.  $\{v_1, v_2, v_3\}$ 로 생성되는  $\mathbb{R}$  위의 벡터공간  $\{av_1 + bv_2 + cv_3 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ 의

임의의 두 원소  $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3, b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3$ 와

임의의 스칼라  $k \in \mathbb{R}$ 에 대하여

$$(a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3) + (b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3)$$

$$= (a_1 + b_1)v_1 + (a_2 + b_2)v_2 + (a_3 + b_3)v_3 \in \{av_1 + bv_2 + cv_3 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} \text{이고,}$$

$$k(a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3) = ka_1v_1 + ka_2v_2 + ka_3v_3$$

$$\in \{av_1 + bv_2 + cv_3 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} \text{이므로}$$

$\{av_1 + bv_2 + cv_3 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ 는  $\mathbb{R}^5$ 의 부분공간이다.

ㄷ.  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^5$ 에 대하여  $Ax_1 = v_1, Ax_2 = v_2$ 라 하자.

$\mathbf{x} = 2x_1 + x_2$ 로 놓으면  $A\mathbf{x} = 2v_1 + v_2$ 이므로  $A\mathbf{x} = 2v_1 + v_2$ 의 해 존재.

\* 연립일차방정식  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 의 일반해는  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 의 일반해(영공간, 핵,  $\ker$ )에

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 의 임의의 특수해를 더하여 얻어진다. 즉,  $\mathbf{x} = "A^{-1} \cdot \mathbf{b}" = \text{특수해} + \text{nullity}(A)$ )

## 16. ④

ㄱ.  $(a, b, c) \in \ker T$ 이면  $a = 2c, \ker T \in \langle (2, 0, 1) \rangle$

$$T(2, 0, 1) = \mathbf{0} \text{이므로 } \ker T = \langle (2, 0, 1) \rangle.$$

차원 정리에 의해  $\dimim T = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \ker T = 2$ .

\* 표준기저에 의한  $T$ 의 행렬  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $\text{rank } A = 2$ 이므로  $\dimim T = 2$

ㄴ.  $\ker T$ 의 기저는  $\{(2, 0, 1)\}$ 이므로

$$\text{proj}_{\ker T}(1, 0, 0) = \frac{(1, 0, 0) \cdot (2, 0, 1)}{\|(2, 0, 1)\|^2} (2, 0, 1) = \frac{2}{5} (2, 0, 1).$$

ㄷ. 0아닌 임의의  $v \in \ker T$ 에 대하여  $T(v) = 1 \cdot v$ 이고,  $(\ker T)^\perp$ 의 기저원

$u, w$ 에 대하여  $T(u) = 0 \cdot u = \mathbf{0}, T(w) = 0 \cdot w = \mathbf{0}$ ,

$T$ 의 고유치 1, 0,  $\text{tr } A = 1 + 0 + 0 = 1$ .

\*  $(\ker T)^\perp$ 은  $(2, 0, 1)$ 을 법선으로 하는  $\mathbb{R}^3$ 의 평면

$$\text{proj}_{\ker T}(0, 1, 0) = \mathbf{0}, \text{proj}_{\ker T}(0, 0, 1) = \frac{1}{5} (2, 0, 1),$$

표준기저에 의한 직교정사영의 행렬  $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

$$\text{구하는 } \text{tr } A = \text{tr} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{4}{5} + 0 + \frac{1}{5} = 1.$$

## 17. ③

ㄱ. 서로 다른 5개의 벡터이므로 적어도 한 벡터는 0이 아니다.

$$1 \leq \dim V \leq 4 = \dim \mathbb{R}^4 \text{이므로 } V \cong \mathbb{R}^n \text{이 되는 자연수 } n \text{ 있다.}$$

ㄴ.  $V \subseteq \mathbb{R}^4$ 이고,  $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ 가  $V$ 의 기저이면

$$\dim V = |\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}| = 5 \leq 4 = \dim \mathbb{R}^4 \text{가 되어 모순.}$$

ㄷ.  $V \subseteq \mathbb{R}^4$ 이므로  $\mathbb{R}^4$ 의 부분공간으로는  $\{0\}$ , 0을 지나는 평면(차원 2) 등이 있다. 즉  $\dim V = 2$ 인 벡터  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$  있다.

## 18. ③

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \ker L \text{일 때 계산하면 } \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 2c & -2a-2b+2d \\ 2c & 2c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$\ker L \subset \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ .  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 은 일차독립이고  $\ker L$ 에 속한다.

그러므로  $\ker L = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ . 차원정리에 의해

$$\dim L = \dim V - \dim \ker L = 4 - 2 = 2.$$

$$* V \text{의 기저에 의한 } L \text{의 } 4 \times 4 \text{ 행렬 } M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -20 & 0 \end{pmatrix} \text{의 rank 구해도 된다.}$$

$$* \text{im}(L) = L(V) = L(\langle E_1, E_2, E_3, E_4 \rangle)$$

$$= \langle L(E_1), L(E_2), L(E_3), L(E_4) \rangle$$

$$= \langle E_2, E_1 + E_3 - E_4 \rangle.$$

## 19. ③

$$ㄱ. A \text{는 가역행렬이므로 } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}A \text{이고,}$$

$$(\text{adj}A)^n = (A^{-1}|A|)^n = (A^n)^{-1}|A|^n,$$

$$\text{adj}(A^n) = (A^n)^{-1}|A|^n \text{이므로 } \text{adj}A^n = (\text{adj}A)^n.$$

$$* |A| \cdot I = A \cdot \text{adj}A$$

$$ㄴ. \text{adj}(A^T) = (A^T)^{-1}|A^T| = |A|(A^T)^{-1},$$

$$(\text{adj}A)^T = (|A|A^{-1})^T = |A|(A^T)^{-1} \text{이므로}$$

$$\text{adj}(A^T) = (\text{adj}A)^T \text{이다. } (|A| \in \mathbb{R})$$

$$ㄷ. \text{adj}(\text{adj}A) = |\text{adj}A|(\text{adj}A)^{-1}$$

$$= ||A|A^{-1}| \cdot (|A|A^{-1})^{-1}$$

$$= |A|^3|A^{-1}| \cdot \frac{A}{|A|}$$

$$= |A|A, \det A = 1 \text{인 경우에만 성립.}$$

## 20. ②

$$ㄱ. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{은 대각화가능하지 않다.}$$

$$* T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x+y, y) \text{에 대하여 } T \text{는 정칙선형사상이지만 표준기저에 의한 } T \text{의 행렬 } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{는 대각화가능하지 않다.}$$

$$ㄴ. A^T = PDP^{-1} \text{인 정칙행렬 } P, \text{ 대각행렬 } D \text{ 있다.}$$

$$A = (A^T)^T = (PDP^{-1})^T = (P^T)^{-1}DP^T \text{이고,}$$

$$\det P^T = \det P \neq 0 \text{이므로 } A \text{는 대각화가능하다.}$$

$$* A^T \text{의 고유다항식}$$

$$= \det(A^T - kI)$$

$$= \det((A^T - kI)^T) (\because \text{행렬식의 성질})$$

$$= \det(A - kI) = A \text{의 고유다항식}$$

$$ㄷ. T \text{의 표준기저에 의한 행렬 } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$\det(A - xI) = (1-x)^3, \text{ 고유치 } x = 1 \text{(삼중근)이며}$$

$$(A - I) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{에서 } a = b = 0, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \langle (0, 0, 1) \rangle.$$

고유치 1의 대수적 중복도(3)와 기하적 중복도(1)가 일치하지 않으므로  $A$ 는 대각화가능하지 않다.

\*  $\ker T = \{0\}$ 이므로  $T$ 는 단사이면서 전사이다. 즉 정칙선형사상이지만  $T$ 의  $\mathbb{R}^3$ 의 표준기저에 대한 행렬은 대각화가능하지 않다.

## 21. ④

①  $A$ 의 고유다항식은

$$\det(xI - A) = (x+1)(x-4)(x-3) - 14(x-3)$$

$$= (x^2 - 3x - 18)(x-3)$$

$$= x^3 - 6x^2 - 9x + 54.$$

②  $A$ 는 고유치  $\pm 3, 6$ 을 갖고 그에 대응하는 고유벡터  $(0, 0, 1), (1, -1, 0)$ ,

$$(2, 7, 0) \text{를 갖고 } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{라 할 때 } A = P \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} P^{-1} \text{이므로 } A \text{는 항등행렬이 아닌 두 개의 가역행렬의 곱으로 나타낼 수 있다.}$$

\* 다른 설명:  $A = (-A)(-I)$ 이므로 옳다.

$$③ A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}A \text{에서 } \text{adj}A = |A|A^{-1} \text{이므로}$$

$$|\text{adj}A| = \det(|A|A^{-1}) = |A|^3 \frac{1}{|A|} = |A|^2. (|AA^{-1}| = 1 \text{이므로 } |A^{-1}| = |A|^{-1})$$

\*  $A^{-1}$ 는 행렬이고  $|A|^{-1}$ 는 실수이다.

$$④ A^2 = P \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix} P^{-1} \text{이므로 } A^2 \text{의 모든 고유치의 합은 } 45 \text{이다. } (* \text{ tr}(A^2) = 54)$$

⑤  $\dim L = \text{rank } A = 3 = \dim \mathbb{R}^3, T$ 는 전사이면서 단사이다. 그러므로  $T$ 는 정칙선형사상이다.

## 22. ②

ㄱ. 스칼라  $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$  와  $\mathbb{Q}^3$ 의 원소  $(1, 1, 1)$ 에 대하여

$\sqrt{2} \cdot (1, 1, 1) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}) \notin \mathbb{Q}^3$ 이므로  $\mathbb{Q}^3$ 는  $\mathbb{R}^3$ 의 부분공간이 아니다. (스칼라 체  $\mathbb{R}$  위의 벡터공간도 안 됨, 합 연산에 대해서는 닫혀 있음.)

\* 공집합 아님  $W$ 가  $W \leq V$

$$\Leftrightarrow (1) \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W \text{이면 } \mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$$

$$(2) \text{스칼라 } k, \mathbf{u} \in W \text{이면 } k\mathbf{u} \in W$$

ㄴ. 벡터공간  $\mathbb{R}^3$ 의 원점을 지나는 평면(부분벡터공간)

$$U: x + 5y - z = 0 \text{의 범벡터 } \mathbf{n} = (1, 5, -1)$$

임의의  $U$ 의 원소와 수직이다. ((유클리드)내적이 0.)

그러므로  $\langle \mathbf{n} \rangle = U^\perp$ 이고  $U \oplus U^\perp = U \oplus \langle \mathbf{n} \rangle = \mathbb{R}^3$ .

$$ㄷ. (a, b, c) \in \ker T \Rightarrow a - b = 0, 2b = 0, a - 3c = 0 \Rightarrow a = b = c = 0. \ker T = \{0\} \text{이므로 } \dim \ker(T) = 0.$$

## 23. ④

가정에 의해 정칙행렬  $P$ 가 존재해서  $A = PDP^{-1}$ 이다.

$$(단, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix} \text{이다.})$$

$$ㄱ. |A| = \det(PDP^{-1}) = \det D = 1(-1) \cdot 2 \cdot 4 = -8.$$

$$ㄴ. \text{tr } A = \text{tr}(PDP^{-1}) = \text{tr}(PP^{-1}D).$$

$$= \text{tr } D = 1 - 1 + 2 + 4 = 6$$

ㄷ. 상(하)삼각 행렬만 되어도 충분, 대칭일 필요는 없다.

$$ㄹ. \text{rank } A = \text{rank}(PDP^{-1}) = \text{rank } D = 4$$

( $P$ 는 가역이므로  $D$ 의 행(열)공간의 차원은  $P$ 에 의해 불변)

\* 다른 설명:  $\det A = \det D \neq 0$ 이므로  $\text{rank } A = 4$ .

## 24. ⑤

$$① W = P(W) \leq P(V) = \text{Im } P \leq W \text{이므로 } W = \text{Im } P$$

$$② \ker(P) = \{0\} \cup (V/W) \text{이므로 } \ker P \cap W = \{0\}$$

③ 자명하다.

④  $P(v) \in W$ 이므로 ③에 의해 성립한다.

⑤  $V = \mathbb{R}^2$ (좌표평면)에서  $W = \mathbb{R}(x축)$  위로의 정사영 사상의 표준기저에 의한 행렬은  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 이며 가역행렬이 아니다.

25. ④

$$3 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos\theta = \sqrt{3} \cdot 3 \cos\theta, \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

26. ①

$A$ 는 실대칭행렬이므로 직교대각화 가능하다.

$0 = \det(A - tI) = (t-4)(t+2)$ 에서 고유치  $-2, 4$

㉠  $t = -2$ 일 때  $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 에서  $a = b$ 이므로 한 고유벡터는  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

㉡  $t = 4$ 일 때  $\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}$ 에서  $\mathbf{x} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle / \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ 이므로 한 고유벡터는  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

㉠, ㉡에 의해 구하는  $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

$$27. T(4+2x+3x^2) = 4+3x+\frac{7}{2}x^2$$

선형사상의 성질과 계산에 의해

$$T(1) = 1 + \frac{3}{2}x^2, T(x) = -\frac{1}{2}x^2, T(x^2) = x - \frac{1}{2}x^2.$$

$$\text{그러므로 } T(4+2x+3x^2) = 4+6x^2-x^2+3x-\frac{3}{2}x^2 = 4+3x+\frac{7}{2}x^2.$$

\* 다른 설명

$P_2$ 의 기저  $\{1, x, x^2\}$ 에 의한  $T$ 의 행렬  $A$ 라 하면

가정에 의해  $A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 이므로

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \text{adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$\text{즉 } T(1) = 1 + 0x + \frac{3}{2}x^2, T(x) = 0 + 0x - \frac{1}{2}x^2, T(x^2) = 0 + 1x - \frac{1}{2}x^2.$$

\* 3차 행렬식  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ 의 계산

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$= (+aei + bfg + cdh) + (-ceg - afh - bdi) \\ = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi).$$

$$28. P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$$

$$0 = \det(A - xI) = x^2 - 2\cos\theta x + 1$$
에서  $x = \cos\theta \pm i\sin\theta (= e^{\pm i\theta})$

$(A - e^{-i\theta}I) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ 에서  $ai = b$  ( $(a, b) \neq (0, 0)$ )이므로  $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ 는 고유벡터.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \text{라 하면 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}.$$

회전변환행렬  $A$ 는  $\mathbb{C}$  위에서 대각화 가능.

29.

$$L(\{(1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq t \leq 1\}) = \{(1-t)L(\mathbf{x}) + tL(\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^m \mid 0 \leq t \leq 1\}$$
는

㉠  $L(\mathbf{x}) = L(\mathbf{y})$ 일 때 한 점 집합이 된다.

㉡  $L(\mathbf{x}) \neq L(\mathbf{y})$ 이면  $L(\mathbf{x})$ 와  $L(\mathbf{y})$ 를 잇는 선분이 된다.

(단사( $\Leftrightarrow$ 전사 $\Leftrightarrow$ 동형))일 때 선분된다. 이때  $m = n$

30.  $\dim \ker T = 1, \dim \text{im } T = 2$ 

$\text{rank } A = 2 = \dim \text{im } T$ 이고, 차원정리에 의해  $\dim \ker T = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{im } T = 1$ .

\* 다른 풀이

$(a, b, c) \in \ker T$ 이면  $0 = a + c = b + 2c = -a + b + c$ ,

$(a, b, c) = a(1, 2, -1)$ 이므로  $\ker T \subset \langle (1, 2, -1) \rangle$ 이며,

$(1, 2, -1) \in \ker T$ 이므로  $\ker T = \langle (1, 2, -1) \rangle$ .

그러므로  $\dim \ker T = |\{(1, 2, -1)\}| = 1$ .

$$\text{im } T = T(\mathbb{R}^3) = T(\langle (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle)$$

$$= \langle T(1, 0, 0), T(0, 1, 0), T(0, 0, 1) \rangle$$

$$= \langle (1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 1) \rangle \text{ (열공간의 기저)}$$

$$= \langle (1, 0, -1), (0, 1, 1) \rangle$$

$(1, 0, -1), (0, 1, 1)$ 은 스칼라체  $\mathbb{R}$  위에서 일차독립.

따라서  $\dim \text{im } T = |\{(1, 0, -1), (0, 1, 1)\}| = 2$ .

31. 고유치: 1, 2, 고유공간:  $\langle (1, 0, 0) \rangle \langle (1, 1, 0), (0, 1, 1) \rangle$

주어진 행렬을  $A$ 라 할 때,  $A$ 는 상삼각행렬이므로

$$0 = \det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(2 - \lambda)^2$$
에서 고유치  $\lambda = 1, 2$ .

$\lambda = 1$ 에 대응하는 고유공간은  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (A - 1 \cdot I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0}\} = \langle (1, 0, 0) \rangle$ ,

$\lambda = 2$ 에 대응하는 고유공간은

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (A - 2 \cdot I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0}\} = \langle (1, 1, 0), (0, 1, 1) \rangle.$$

\*  $\lambda = 2$ 의 대수적 중복도와 기하적 중복도가 일치한다.

32.

( $\Rightarrow$ )  $u \in W_1 \cap W_2 (\subset V)$ , 실제로  $u = u + \mathbf{0}, u = \mathbf{0} + u$ 이므로  $u = \mathbf{0}$ , 즉  $W_1 \cap W_2 \subset \{\mathbf{0}\}$ 가 되고  $\{\mathbf{0}\} \leq W_1 \cap W_2$ 이므로  $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ .

( $\Leftarrow$ ) 다음  $v$ 의 두 가지 표현을 생각하자.

$$v = w_1 + w_2, v = w_1' + w_2' \quad (w_1, w_1' \in W_1, w_2, w_2' \in W_2)$$

벡터 연산에 의해  $(W_1 \ni) w_1 - w_1' = -(w_2 - w_2') (\in W_2)$ ,

$W_1, W_2$ 은 연산에 의해 닫혀있으므로  $w_1 - w_1' \in W_2, w_2 - w_2' \in W_1$ 이 되어  $w_1 - w_1'$ 과  $w_2 - w_2'$ 은  $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ 에 속한다.

그러므로  $w_1 = w_1', w_2 = w_2'$ , 즉  $v$ 는 유일하게 표현된다.

33.

차원정리에 의해  $\dim \ker L + \dim \text{im } L = \dim V$ 에서

$\dim \text{im } L = \dim W$ 이고  $\text{im } L \leq W$ 이므로  $\text{im } L = W$ , 즉  $L$ 은 전사이다.

$\ker L = \{\mathbf{0}\}$ 이므로  $L$ 은 단사이다.

그러므로  $L$ 은 동형사상이다.

(유한차원 벡터공간 간의 선형사상은 단사 $\Leftrightarrow$ 전사이므로 하나면 보여도 충분하다.)

\* 다른 설명

$L(u) = L(v)$ 이면  $L(u - v) = \mathbf{0}$ 이므로  $u - v \in \ker L = \{\mathbf{0}\}$ , 즉  $u = v$ 이므로  $L$ 은 단사.

$V$ 의 기저  $\{v_1, \dots, v_n\}$ 에 대하여 적당한 실수  $c_i (1 \leq i \leq n)$ 에 대하여

$c_1 T(v_1) + \dots + c_n T(v_n) = \mathbf{0}$ 라 하면  $T(c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) = \mathbf{0} (\in W)$ 가 되어

$c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = \mathbf{0} (\in V), \{v_1, \dots, v_n\}$ 는 기저이므로  $c_1 = \dots = c_n = 0 (\in \mathbb{R})$ .

따라서  $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ 은  $W$ 에서 일차독립이고,

$\langle T(v_1), \dots, T(v_n) \rangle \leq W$ 이므로  $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ 은  $W$ 의 기저이다.

$W$ 와  $\text{im } L = L(V)$ 는 실수체  $\mathbb{R}$  위의 같은 차원을 갖는 벡터공간이므로  $L$ 은 전사이다.

\* 다른 설명(전사 정의)

임의의  $w \in W$ 에 대하여  $w = \sum_i \alpha_i T(v_i) = \sum_i T(\alpha_i v_i)$  ( $\alpha_i \in \mathbb{R}$ , 즉  $\alpha_i v_i \in V$ )

이고, 이는  $w$ 의 유일한 표현이다. ( $\because \{T(v_i)\}_{i=1}^n$ 의 기저) 그러므로  $L$ 은 전사이다.

34. (1)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$  (2)  $\frac{63}{2}$

(1)  $f$ 는 선형변환으로 이에 대응하는 행렬 있다.

그 행렬의 크기는  $\dim(\text{공역}) \times \dim(\text{정의역}) = 2 \times 2$ .

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \text{ 계산하면 } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

\* 다른 설명  $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 이므로

$$A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

(2)  $P' = (-2, -3)$ ,  $Q' = (1, 5)$ ,  $R' = (7, 0)$ .

$x$ 축을 기준으로 두 개의 삼각형의 넓이의 합으로 계산하면

$$\Delta P'Q'R' = \frac{1}{2} \cdot \frac{63}{8} (5+3) = \frac{63}{2}.$$

\* 다른 방법

$$\Delta P'Q'R' = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{63}{2} \quad (\text{3열의 1을 고정})$$

\* 다른 방법

$$\overrightarrow{P'Q'} = (3, 8), \overrightarrow{P'R'} = (9, 3), \text{ 구하는 넓이는 } \Delta P'Q'R' = \left| \frac{1}{2} \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \right| = \frac{63}{2}.$$

\*  $\Delta PQR \times |\det A| = \frac{9}{2} \times |-7| = \frac{63}{2} = \Delta P'Q'R'$

\*  $\Delta PQR$ 의 넓이는  $\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} (3+1) = \frac{9}{2}$ 이므로  $f$ 는 넓이(길이)를 보존하지 않는다. 즉, 합동변환이 아니다.

\* 합동 변환을 나타내는 행렬식은  $\pm 1$ .

(합동 변환은 회전변환(+1), 대칭변환(-1) 뿐이다.)

35.

두 근을  $t_1, t_2$ 라 하면 타원 ① 위의 두 점

$(x_0 + lt_1, y_0 + mt_1), (x_0 + lt_2, y_0 + mt_2)$ 의 중점  $(x_0, y_0)$ 이다.

즉,  $\frac{l}{2}(t_1 + t_2) = 0, \frac{m}{2}(t_1 + t_2) = 0$ 이다.

$\therefore$  임의의  $l, m$ 에 대하여  $t_1 + t_2 = 0$ 이다.

③에서  $\frac{(2ax_0 + hy_0 + g)l + (hx_0 + 2by_0 + f)m}{al^2 + hlm + bm^2} = 0,$   
 $\begin{cases} 2ax_0 + hy_0 + g = 0 \\ hx_0 + 2by_0 + f = 0, \quad al^2 + hlm + bm^2 \neq 0 \end{cases}$

$4ab - h^2 \neq 0$ 이면 한 쌍의  $(x_0, y_0)$ 를 얻고

$4ab - h^2 = 0$ 이면 부정 또는 불능이므로

무수히 많은  $(x_0, y_0)$ 가 존재하거나 중심  $(x_0, y_0)$ 를 갖지 않는다.

따라서 중심을 얻는 식  $\begin{cases} 2ax_0 + hy_0 + g = 0 \\ hx_0 + 2by_0 + f = 0 \end{cases} \quad (\Leftrightarrow \nabla f(x_0, y_0) = \vec{0}).$

36.

하위 영역	배점	예상정답율(%)	관련사고영역	출제자
선형대수	5	60	이해 및 적용	좌준수
출제 내용	W.Nicholson. Linear Algebra with Applications. PWS.			
관련자료	pp. 251-257			

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$$

이므로  $A$ 의 고윳값은  $\lambda = 1, 2, 3$ 이다.

$\lambda = 1$ 에 대응되는  $A$ 의 고유벡터를  $x_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 이라 하면

$$(A - \lambda I)x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

이 식으로부터  $x_3 = 0, x_2 = 0$ 이고

따라서,  $x_1 = \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, s$ 는 0이 아닌 임의의 실수.

$\lambda = 2$ 에 대응되는  $A$ 의 고유벡터를  $x_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 라고 하면

$$(A - \lambda I)x_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

이 식으로부터  $x_1 = 0, x_3 = 0$ 이고

따라서,  $x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t$ 는 0이 아닌 실수.

$\lambda = 3$ 에 대응되는  $A$ 의 고유벡터를  $x_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 라고 하면

$$(A - \lambda I)x_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 + x_3 \\ -x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

이 식으로부터  $x_3 = 2x_1, x_2 = 0$ 이고

따라서,  $x_3 = \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, u$ 는 0이 아닌 임의의 실수.

한편  $\lambda$ 가  $A$ 의 고윳값이고  $x$ 가  $\lambda$ 에 대응되는 고유벡터이면

$$A^{10}x = A^9(Ax) = A^9(\lambda x) = \lambda A^9x = \dots = \lambda^{10}x$$

이므로  $A^{10}$ 의 고윳값은  $\lambda^{10}$ 이고 대응되는 고유벡터는  $x$ 가 된다.

그런데  $A$ 의 고윳값이 1, 2, 3이고, 대응되는 각각의 고유벡터가

$$s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (s, t, u \text{는 } 0 \text{이 아닌 임의의 실수})$$

이므로  $A^{10}$ 의 고윳값은 1,  $2^{10}$ ,  $3^{10}$ 이고,

대응되는 각각의 고유벡터는

$$s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (s, t, u \text{는 } 0 \text{이 아닌 임의의 실수}) \text{이다.}$$

#### \* 채점기준

$A$ 의 고윳값 1, 2, 3을 모두 구하면 ..... 1점

고윳값 1, 2, 3 각각에 대응되는 고유벡터

$$s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (s, t, u \text{는 } 0 \text{이 아닌 임의의 실수})$$

를 모두 구하면 ..... 1점

$$(A \text{의 고유벡터를 } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{라고만 언급해도 ..... 1점})$$

$\lambda$ 가  $A$ 의 고윳값이고  $x$ 가  $\lambda$ 에 대응되는 고유벡터일 때

$$A^{10}x = A^9(Ax) = A^9(\lambda x) = \lambda A^9x = \dots = \lambda^{10}x$$

를 쓰면 ..... 1점

$A^{10}$ 의 고윳값 1,  $2^{10}$ ,  $3^{10}$ 을 모두 구하면 ..... 1점

$A^{10}$ 의 고유벡터를

$$s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (s, t, u \text{는 } 0 \text{이 아닌 임의의 실수})$$

$$\text{또는 } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

라고 쓰거나,  $A$ 의 고유벡터와 같다고 기술하면 ..... 1점

37.

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{에 대하여 } A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1}$$

38.

$$2차원 아핀공간  $A^2$ 의 변환은  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ 이므로$$

주어진 좌표를 위의 식에 대입하면

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$\alpha = 1, \beta = 2, a = 1, b = 1, c = 2, d = -1.$$

그러므로 아핀변환  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

39.

하위 영역	배점	예상 정답율(%)	출제근거 (이유)
고등수학(선형대수)	5	20	L. Smith, Linear Algebra 2nd. ed., pp. 59-64

$$T(a) = a \times a + (a \cdot a)a = \|a\|^2 = 2a \text{이므로}$$

$a$ 는 2를 고유치로 갖는 고유벡터 ..... 2점

(단,  $a$ 가 고유벡터임을 인지하여 입증하려고 시도했으면 부분점수 가능)

$T$ 가 2 이외의 고유치를 가지면 그 고유벡터는  $a$ 와 수직

즉,  $p$ 를 그 이외의 고유벡터라 하면

$$p \cdot a = 0, T(p) = \lambda p \text{ ..... 3점}$$

$$T(p) = a \times p = \lambda p \text{에서}$$

$$0 = (a \times p) \cdot p = T(p) \cdot p = \lambda p \cdot p = \lambda \|p\|^2$$

이므로,  $\lambda = 0$  ( $\because p \neq 0$ ). 단, 0은 영벡터이다. ..... 4점

이제,  $a \times p = 0$ .

따라서 벡터  $a, p$  사이각은 0(또는  $\pi$ )이다.

그러나  $p \cdot a = 0$ 에서 벡터  $a, p$ 의 사이각은  $\frac{\pi}{2}$ 이므로 모순. ..... 5점

40.

- $\text{im } T$ (공역의 부분공간)를 이용하는 방법

선형사상  $T$ 의 행렬표현이  $A_T$ 라 하면  $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ 이고,

선형사상  $T$ 의 차원(dimension)은

$$\dim(T(\mathbb{R}^3)) = \dim(\text{Im}(T)) = \text{rank}(T) = \text{rank}(A_T)$$

이므로 선형사상  $T$ 의 차원은 다음과 같다.

$$\text{rank}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \text{rank}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \text{rank}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rank}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

따라서  $\dim(T) = 2$ 이다.

- $\ker T$ (정의역의 부분공간)를 이용하는 방법

$$(a, b, c) \in \ker T \text{이면 } 0 = a + 2b + 3c = 4a + 5b + 6c = 7a + 8b + 9c \text{에서}$$

$$(a, b, c) = a(1, -2, 1) \text{이므로 } \ker T \subset \langle(1, -2, 1)\rangle \text{이고},$$

$$T(1, -2, 1) = 0 \text{이므로 } \ker T = \langle(1, -2, 1)\rangle.$$

따라서  $\dim \ker T = |\{(1, -2, 1)\}| = 1$ .

그러므로 차원정리에 의해

$$\dim(T(\mathbb{R}^3)) = \dim(\text{im } T) = \dim(\text{dom}(T)) - \dim(\ker T)$$

$$= \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker T) = 3 - 1 = 2.$$

41. ②

42. ①

가정에 의해  $A = PBP^{-1} = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} Q^{-1}$ 인 가역행렬  $P, Q$  있다.

이때,  $B = P^{-1}Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} (P^{-1}Q)^{-1}$ . 그러므로 행렬  $B$ 의 고유치는 1, 2, 3

(고유치 같으므로 고유다항식도 같다.)

43. ④

일반적으로  $U \cup V$ 는 벡터공간이 되지 않는다.

$$\dim(U+V) = 5 \text{라 놓고 푼다.}$$

$$\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$$

$$5 = 2 + 8 - \dim(U \cap V)$$

그러므로  $\dim(U \cap V) = 5$ .

$$* \dim U + \dim V = \dim(U \cap V) + \dim(U+V)$$

44. ②

45. ④

\* 답만 구하기

$(1, 1)$ 은  $(r \sin \theta + r \cos \theta, r \cos \theta - r \sin \theta)$ 로 변환되므로 구하는 값  $2r \cos \theta$ .

\* 다른 설명

$$(x, y) \xrightarrow{f} (ry, rx) \xrightarrow{g} (ry \sin \theta + rx \cos \theta, ry \cos \theta - rx \sin \theta)$$

$$\text{이를 행렬로 나타내면 } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{g \circ f} \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

그러므로 구하는 값은  $2r \cos \theta$ .

\* 다른 설명:  $f$ 와  $g$ 는 모두 원점을 지나는 선형사상으로 적절한 행렬에 대응된다. 표준기저에 의한 행렬을 구하면  $f$ 의 행렬은  $\begin{pmatrix} 0 & r \\ r & 0 \end{pmatrix}$ 이고,  $g$ 의 행렬은  $\begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{pmatrix}$ .

$$\text{그러므로 } g \circ f \text{를 나타내는 행렬은 } \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & r \\ r & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \text{이다.}$$

46. ③

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in W \text{이면 } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$W \subset \left\langle \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{는 일차독립이며 } W \text{에 속하므로}$$

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle. \text{ 그러므로 } \dim W = 3.$$

47. ②

구하는 일차변환은 평면(벡터공간)  $\mathbb{R}^2$ 의 임의의 벡터  $(x, y)$ 의 원점을 지나는 직선(부분공간)

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid mx - y = 0, m \neq 0\} \text{으로의 정사영.}$$

$(x, y)$ 의 직선의 기저원소  $(1, m)$ 으로의 정사영은

$$(x', y') = \text{proj}_{(1, m)}(x, y) = \frac{(1, m) \cdot (x, y)}{\|(1, m)\|^2} (1, m)$$

$$= \left( \frac{x + my}{1 + m^2}, \frac{m(x + my)}{1 + m^2} \right)$$

$$\text{문제 상황에 맞게 정리하면 } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{m^2 + 1} \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & m^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

( $2 \times 2$ 이므로 계산해도 되고, 양변 전치 취해도 된다.)

$$\text{그러므로 } A = \frac{1}{m^2 + 1} \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & m^2 \end{pmatrix}.$$

\* 다른 풀이:  $A$ 의 고유치는 0, 1이다.

㉠ 0에 대응되는 고유벡터: 직선  $y = -\frac{1}{m}x$ 의 0아닌 임의의 벡터(ex.

$$(m, -1)), A \begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

㉡ 1에 대응되는 고유벡터: 직선  $y = mx$ 의 0아닌 임의의 벡터(ex.  $(1, m)$ ),

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} m & 1 \\ -1 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & m \end{pmatrix}, A = \frac{1}{m^2 + 1} \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & m^2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{㉡ } P = \begin{pmatrix} m & 1 \\ -1 & m \end{pmatrix} \text{라 할 때, } A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

48. ①

주어진 연립방정식을 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0. \text{ 이때 행렬 } \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{이 역행렬을 가지면}$$

주어진 연립방정식은 해  $x = y = z = 0$ 만 갖는다.

그러므로  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 이 역행렬이 갖지 않을 때 문제의 조건을 만족하므로

$$0 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} = -(a-1)^2(a+2) \text{에서 } a = 1, -2. \text{ 구하는 값은 } -1 \text{이다.}$$

49. ①

50. ②

$(1, 1, 0)$ 과  $(0, 1, -1)$ 은 일차독립이므로  $(1, x, 1) \circ |$

$(1, 1, 0)$ 과  $(0, 1, -1)$ 로 생성되는 평면  $\alpha$ 에 포함될 경우를 생각하자.

평면  $\alpha$ 에 포함되는 임의의 벡터는  $(a, a+b, -b)$  ( $a, b$ 는 실수) 꼴로 쓸 수 있으며,  $x=0$ 일 때  $(1, x, 1) \circ |$  평면에 포함된다. 이때 세 벡터가 일차종속이 된다.

\* 다른 설명:  $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

\* 다른 설명:  $\text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} < 3 \circ |$  될 때 일차종속.

## [o]산수학]

### <경우의 수와 생성함수>

1.

특성다항식  $t^2 - 4t + 4$ .

특성방정식의 해  $t = 2$ (중근)이므로  $a_n = \alpha \cdot 2^n + \beta \cdot n2^n$ 라 하면

초기조건에 따라  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ 이므로  $a_n = n2^n$ .

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n(2x)^n \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} & x \left( f\left(\frac{x}{2}\right) \right)^3 \\ &= x \times \left( \sum_{n=0}^{\infty} nx^n \right)^3 \\ &= x \left\{ x \times \frac{d}{dx} (x + x^2 + x^3 + \dots) \right\}^3 \\ &= x \left( \frac{x}{(1-x)^2} \right)^3 \\ &= \frac{x^4}{(1-x)^6} \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} {}_6H_n x^{n+4}.$$

그러므로  $0 \leq n \leq 3$ 일 때  $b_n = 0$ ,  $n \geq 4$ 일 때  $b_n = {}_6H_{n-4} = {}_{n+1}C_5$ .

2.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{x^2}{1-x}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = x(1-x)^{-1/2} = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-x)^n \text{이므로 } b_5 = \binom{-1/2}{4} = \frac{105}{384} = \frac{35}{128}.$$

3.

$$b_0 = 2 \text{이며 } \frac{a_{n+1}}{(n+1)!} = -2 \frac{a_n}{n!} + 3 \text{이므로 } b_{n+1} = -2b_n + 3,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} x^n = -2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + 3 \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \frac{f-b_0}{x} = -2f + \frac{3}{1-x} \text{에서}$$

$$f(x) = \frac{2+x}{(1+2x)(1-x)} = \frac{(1-x)+(1+2x)}{(1+2x)(1-x)} = \frac{1}{1+2x} + \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} ((-2)^n + 1)x^n.$$

$$b_n = (-2)^n + 1, \quad a_n = n!((-2)^n + 1).$$

(다른 풀이)

$b_{n+1} + 2b_n = 3$ 의 특성방정식  $t^2 + 2t = 0$ 에서

일반(동차)해  $p_n = \alpha(-2)^n + \beta \cdot (0)^n$ .

특수해  $q_n = \gamma$ 라 하면  $\gamma + 2\gamma = 3$ 에서  $\gamma = 1$ .

$$b_0 = 2 = p_0 + q_0 = \alpha + 1, \quad \alpha = 1. \quad \text{그러므로 } b_n = (-2)^n + 1 \quad (n \geq 0).$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} ((-2)^n + 1)x^n = \frac{1}{1+2x} + \frac{1}{1-x} \text{이고 } a_n = n! \{ (-2)^n + 1 \} \quad (n \geq 0)$$

(다른 설명)

점화식  $b_{n+1} = -2b_n + 3$ 에 대하여  $b_{n+1} + \alpha = -2(b_n + \alpha)$ 라 할 때  $\alpha = -1$ .

$b_n - 1 = c_n$ 이라 하자.  $c_{n+1} = -2c_n$ 이므로  $c_n = (-2)^n$ ,  $b_n = c_n + 1 = 1 + (-2)^n$ .

$$\text{따라서 } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} ((-2)^n + 1)x^n = \frac{1}{1+2x} + \frac{1}{1-x}, \quad a_n = n! \{ (-2)^n + 1 \} \quad (n \geq 0).$$

4.

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \quad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)x^n \text{이므로}$$

$$a_n = \frac{(n+2)(n+1)}{2} = {}_3H_n.$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n &= x(1+x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \\ &= a_0 x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-1} + a_{n-2}) x^n \quad (\text{상수항 } 0, a_0 = 1) \text{이므로} \end{aligned}$$

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 1, \quad n \geq 2 \text{일 때, } b_n = a_{n-1} + a_{n-2} = n^2.$$

$$\text{그러므로 } b_n = n^2 \quad (n \geq 0), \quad \text{구하는 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{(n+2)(n+1)} = 2.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{\frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right)}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^3} = \frac{3}{2}.$$

5.

$$\left(-\frac{1}{2}\right)_n = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right) \cdots \left(-\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!}$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n!(-2)^n} = \frac{(2n)!}{n!n!(-4)^n} = \left(-\frac{1}{4}\right)^n \cdot {}_{2n}C_n \text{이므로}$$

$$f(n) = \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{-1/2}{n}} = (-4)^n.$$

일반화된 이항정리에 따라

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \left(-\frac{1}{8}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \binom{-1/2}{n} \left(-\frac{1}{8}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{-1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$6. \quad g(x) = \frac{1}{(1+x)^2}, \quad E(X) = -1 + \ln 3$$

$$\text{가정에 의해 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (n=1 \text{부터 시작}) \text{이므로}$$

$$(g(x)-1) + xg(x) = \frac{-x}{1-(-x)} \text{를 풀면 } g(x) = (1+x)^{-2}.$$

(다른 풀이)

특성방정식  $t^2 + t = 0$ ,  $t = 0, -1$ 이므로 일반해  $p_n = \alpha \cdot 0^n + \beta \cdot (-1)^n$ .

특수해  $q_n = \gamma \cdot n(-1)^n$ 라 하면 주어진 점화식에 의해  $\gamma = 1$ ,  $q_n = n(-1)^n$ .

그러므로  $a_n = p_n + q_n = (-1)^n(n+1)$ .

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} {}_2H_n(-x)^n = \frac{1}{(1-(-x))^2} = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

\*  $g(x) \neq f(x)$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int_{-\frac{1}{3}}^1 \frac{x}{(1+x)^2} dx = \int_{-\frac{1}{3}}^1 x \cdot (1+x)^{-2} dx$$

$$= [x \cdot \{- (1+x)^{-1}\}]_{-1/3}^1 - \int_{-1/3}^1 -(1+x)^{-1} dx = -1 + \ln 3.$$

$$E(X) = \int_{-\frac{1}{3}}^1 \frac{x}{(1+x)^2} dx = \int_{\frac{2}{3}}^2 \frac{t-1}{t^2} dt = \int_{\frac{2}{3}}^2 \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} dt = [\ln t + t^{-1}]_{2/3}^2 = \ln 3 - 1.$$

7. 100

${}_5C_4=5$ 이므로 5가지 경우만 조사하면 된다.

① A, B, C / D 선발:  $10 \times 2$

② A, B, C / E 선발:  $10 \times 2$

③ A, B / D, E 선발:  $6 \times 3$

④ A, C / D, E 선발:  $9 \times 3$

⑤ B, C / D, E 선발:  $5 \times 3$

그러므로 구하는 경우의 수 100.

$$8. x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}, a_n = \frac{1}{2^{n-3}} - \frac{1}{3^{n-2}}$$

특성다항식  $x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}$ 의 해  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ .

$$a_n = \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^n + \beta \left(\frac{1}{3}\right)^n \text{에서 } a_1 = 1 = a_2 \text{이므로}$$

$$a_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + (-9) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{2^{n-3}} - \frac{1}{3^{n-2}}.$$

9.

$$\text{생성함수 } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{1}{2} a_{n-1} + \frac{1}{2^n} \right) x^n \right] = 1 + \frac{1}{2} x f(x) + \frac{x}{2-x}$$

$$f(x) = \frac{4}{(2-x)^2} = \frac{1}{(1-(x/2))^2} = \sum_{n=0}^{\infty} {}_2H_n \left(\frac{x}{2}\right)^n.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n = f'(1) = 8.$$

\* 다른 설명

$$\text{특성방정식 } t - \frac{1}{2} = 0, \text{ 일반해 } p_n = \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$\text{특수해 } q_n = \beta \cdot n \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{라 하면 } n\beta \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot (n-1)\beta \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{2^n} \text{에서 } \beta = 1.$$

$$a_n = p_n + q_n = \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^n + n \left(\frac{1}{2}\right)^n, \text{ 초기조건 } a_0 = 1 \text{이므로 } a_n = (n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} {}_2H_n \left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{x}{2}\right)\right)^2} = \frac{4}{(2-x)^2}.$$

10.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (x+x^2+x^3+\dots+x^7)(1+x+x^2+\dots)^2 = \frac{x(1-x^7)}{(1-x)^3}.$$

$$f(x) = \frac{x(1-x^7)}{(1-x)^3} = (x-x^8) \sum_{n=0}^{\infty} {}_3H_n x^n \text{이므로}$$

$a_{15}$ 는  $x^{15}$ 의 계수 즉,  ${}_3H_{14} - {}_3H_7 = 120 - 36 = 84$ .

11. ①

$1 = d_0 = a+b$ , 특성방정식  $t^2 - 3t + 1 = 0$ 에서 두 근의 합  $p+q=3$ .

그러므로  $a+b+p+q=4$ .

12. ④

① 경우의 수를 이용하는 방법

구하는 경우의 수는 다음 방정식의 정수해 개수이다.

$$a+b+c+d+e=12, 0 \leq a \leq 3, b, c, d, e \geq 0$$

$a=0, 1, 2, 3$ 인 경우의 수를 각각 구하여 더하면

$${}_4H_{12} + {}_4H_{11} + {}_4H_{10} + {}_4H_9 = 1325.$$

② 생성함수를 이용하는 방법

조건  $0 \leq a \leq 3, b, c, d, e \geq 0$ 을 만족하면서

$a+b+c+d+e=n$ 이 되는 경우의 수를  $a_n$ 라 할 때,

$a_n$ 의 생성함수는

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= (x^0 + x^1 + x^2 + x^3) \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)^4 \\ &= \left(\frac{1-x^4}{1-x}\right) \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)^4 \\ &= (1-x^4) \sum_{n=0}^{\infty} {}_5H_n x^n \text{에서} \end{aligned}$$

구하는 경우의 수  $a_{12}$  즉,  $x^{12}$ 의 계수  ${}_5H_{12} - {}_5H_8 = 1325$ .

13. ②

규칙을 만족하면서 만들 수 있는  $n$ 자리 자연수의 개수를  $a_n$ 라 할 때,  $a_n$ 의 지수생성함수는

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n &= \left(\frac{x^1}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right)^3 \cdot \left(\frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \dots\right)^2 \\ &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^3 \cdot e^{2x} \\ &= \frac{1}{8} (e^{3x} - 3e^x + 3e^{-x} - e^{-3x}) \cdot e^{2x} \\ &= \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} (5^n - 3 \cdot 3^n + 3 \cdot 1^n - (-1)^n) \frac{x^n}{n!} \text{에서} \end{aligned}$$

구하는 경우의 수  $a_8$  즉,  $\frac{x^8}{8!}$ 의 계수는  $\frac{1}{8}(5^8 - 3^9 + 2)$ .

14. ③

① 포함배제의 원리를 이용하는 방법

면접 점수표의 가짓수는 다음 방정식의 정수해의 개수

$$x+y+z+w=14, 1 \leq x, y, z, w \leq 6 \text{ 정수해 개수}$$

$$\Leftrightarrow a+b+c+d=10, 0 \leq a, b, c, d \leq 5 \text{ 정수해 개수}$$

포함배제의 원리에 의해

$$\begin{aligned} {}_4H_{10} - (a \geq 6 \text{이상} + b \geq 6 \text{이상} + c \geq 6 \text{이상} + d \geq 6 \text{이상}) \\ + (a, b \geq 6 \text{이상} + \dots + c, d \geq 6 \text{이상}) \\ - (a, b, c \geq 6 \text{이상} + \dots) \end{aligned}$$

$$= {}_4H_{10} - {}_4C_1 \times {}_4H_4 + {}_4C_2 \times 0 = 286 - 140 = 146.$$

② 생성함수를 이용하는 방법

조건  $1 \leq x, y, z, w \leq 6$ 을 만족하면서  $x+y+z+w=n$

되는 경우의 수를  $a_n$ 라 할 때,  $a_n$ 의 생성함수는

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= (x+x^2+\dots+x^6)^4 \\ &= (x^4 - 4x^{10} + 6x^{16} - 4x^{22} + x^{28}) \sum_{n=0}^{\infty} {}_4H_n x^n \text{에서} \end{aligned}$$

구하는 경우의 수  $a_{14}$  즉,  $x^{14}$ 의 계수  ${}_4H_{10} - 4 \cdot {}_4H_4 = 146$ .

### 15. ①

① 포함배제원리를 이용하는 방법

$$x+y+z=30, \quad 0 \leq x, y, z \leq 20$$

포함배제의 원리에 의해

$$\begin{aligned} {}_3H_{30} - (x \geq 21 \text{개 이상} + y \geq 21 \text{개 이상} + z \geq 21 \text{개 이상}) + (x, y \geq 21 \text{개 이상} + \dots) \\ = {}_3H_{30} - 3 \times {}_3H_9 + 0 = 331. \end{aligned}$$

② 생성함수를 이용하는 방법

조건  $0 \leq x, y, z \leq 20$ 을 만족하면서  $x+y+z=n$ 을 만족하는 경우의 수를  $a_n$ 라 할 때,  $a_n$ 의 생성함수는

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1+x+x^2+\dots+x^{20})^3$$

$$= \left( \frac{1-x^{21}}{1-x} \right)^3$$

$$= (1-3x^{21}+3x^{42}-x^{63}) \sum_{n=0}^{\infty} {}_3H_n x^n \text{에서}$$

구하는 경우의 수는  $a_{30}$ , 즉  $x^{20}$ 의 계수  $1 \cdot {}_3H_{30} - 3 \cdot {}_3H_9 = 331$ .

### 16. ③

\* S. T가 구성되는 경우의 수

$$(i) S \text{에서 } 5 \text{명 통과: } {}_5C_5$$

$$T \text{에서 } 5, 4, 3, 2, 1, 0 \text{명 통과: } {}_5C_5 + \dots + {}_5C_0 = 2^5$$

$$(ii) S \text{에서 } 4 \text{명 통과: } {}_5C_4$$

$$T \text{에서 } 4, 3, 2, 1, 0 \text{명 통과: } {}_4C_4 + \dots + {}_4C_0 = 2^4$$

$$(iii) S \text{에서 } 3 \text{명 통과: } {}_5C_3$$

$$T \text{에서 } 3, 2, 1, 0 \text{명 통과: } 2^3$$

$$(iv) S \text{에서 } 2 \text{명 통과: } {}_5C_2$$

$$T \text{에서 } 2, 1, 0 \text{명 통과: } 2^2$$

$$(v) S \text{에서 } 1 \text{명 통과: } {}_5C_1$$

$$T \text{에서 } 1, 0 \text{명 통과: } 2^1$$

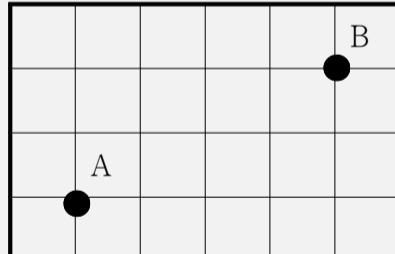
$$(vi) S \text{에서 } 0 \text{명 통과: } {}_5C_0$$

$$T \text{에서 } 0 \text{명 통과: } 2^0$$

$$\text{그러므로 구하는 경우의 수는 } \sum_{k=0}^5 {}_5C_k 2^k \times 1^{5-k} = (2+1)^5 = 3^5.$$

\*  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서  $\{0, 1, 2\}$ 로의 일대일대응의 개수  $|\{0, 1, 2\}|^{|\{1, 2, 3, 4, 5\}|} = 3^5$ .

### 17. ③



(i) 집에서 A까지 가는 경우의 수 2

$$(ii) A에서 B까지 가는 경우의 수  $\frac{6!}{4!2!} = 15$$$

(iii) B에서 학교까지 가는 경우의 수 2

(i), (ii), (iii)은 동시에 일어나야 하므로

구하는 경우의 수는  $2 \times 15 \times 2 = 60$ .

18. 점화 관계:  $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 4$ ,  $a_n = 2n^2 - n$

$$(a_{n+1} - a_n = 4n+1)$$

$$a_2 - a_1 = 5$$

$$a_3 - a_2 = 9 = 5+4 = a_2 - a_1 + 4$$

$$a_4 - a_3 = 13 = 9+4 = a_3 - a_2 + 4$$

⋮

이므로  $a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n + 4$ 로부터  $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 4$ .

특성방정식  $t^2 - 2t + 1 = 0$ 에서  $t = 1$ 이므로

$$\text{일반해 } t_n = \alpha \cdot 1^n + \beta n \cdot 1^n = \alpha + \beta n.$$

특수해  $p_n = \gamma n^2$ 라 할 때 항등식  $\gamma(n+2)^2 - 2\gamma(n+1)^2 + \gamma n^2 = 4$ 에서  $\gamma = 2$ .

따라서  $a_n = t_n + p_n = \alpha + \beta n + 2n^2$ 이고  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 6$ 로부터  $\alpha = 0$ ,  $\beta = -1$ .

그러므로  $a_n = 2n^2 - n$ .

\* 다른 풀이

$$a_{n+1} - a_n = 4(n-1) + 5 = 4n+1 \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (4k+1) = 2n^2 - n.$$

### 19. 600

① 경우의 수를 이용하는 방법

$$(i) \{1, 3, 5, 7\} = \{a, b, c, d, e\} \text{일 때}$$

$$1, 3, 5, 7 \text{이 각각 중복되는 경우: } 4 \times \frac{5!}{2!1!1!1!} = 240,$$

$$(ii) \{1, 3, 5, 7\} \subsetneq \{a, b, c, d, e\} \text{일 때}$$

$$2, 4, 6 \text{을 뽑아 } 1, 3, 5, 7 \text{과 배열: } 3 \times 5! = 360.$$

그러므로 구하는 경우의 수는 600

② 생성함수를 이용하는 방법(뽑고 배열하기)

조건을 만족하면서 만들 수 있는  $n$ 자리 자연수의

개수를  $a_n$ 라 하면  $a_n$ 의 생성함수는

(홀수는 1개 이상, 짝수는 0개 이상 뽑고+배열)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n &= (e^x - 1)^4 (e^x)^3 \\ &= e^{3x} (e^{4x} - 4e^{3x} + 6e^{2x} - 4e^x + 1) \\ &= e^{7x} - 4e^{6x} + 6e^{5x} - 4e^{4x} + e^{3x} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (7^n - 4 \cdot 6^n + 6 \cdot 5^n - 4 \cdot 4^n + 3^n) \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

에서 구하는 경우의 수는  $a_5$  즉,  $\frac{x^5}{5!}$ 의 계수는

$$7^5 - 4 \cdot 6^5 + 6 \cdot 5^5 - 4 \cdot 4^5 + 3^5$$

$$= 16807 - 31104 + 18750 - 4096 + 243$$

$$= 600.$$

## 20.

(1) 구별되지 않는 6개를 3명에게 나누는 경우의 수  ${}_3H_6 = 28$ \* 학생에게 나누어주는 개수를  $x_1, x_2, x_3$ 라 할 때 $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ 의 음이 아닌 정수해 개수

$$f(1, m) + f(2, m) + \dots + f(n, m) = {}_mH_1 + {}_mH_2 + \dots + {}_mH_n$$

$$= {}_mC_1 + {}_{m+1}C_2 + \dots + {}_{m+n-1}C_n,$$

$$f(n, m+1) - 1 = {}_{m+1}H_n - 1 = {}_{m+n}C_n - 1.$$

(2)  $f(1, m) + f(2, m) + \dots + f(n, m) = f(n, m+1) - 1$ , 수학적 귀납법 적용(i)  $n = 1$  일 때

$$f(1, m) = {}_mH_1 = {}_mC_1 = m,$$

$$f(1, m+1) - 1 = {}_{m+1}H_1 - 1 = {}_{m+1}C_1 - 1 = m$$

이므로 주어진 등식이 성립한다.

(ii)  $n = k$  일 때 주어진 등식이 성립한다고 하자.

$$\text{즉, } f(1, m) + f(2, m) + \dots + f(k, m) = f(k, m+1)$$

$$f(1, m) + f(2, m) + \dots + f(k, m) + f(k+1, m)$$

$$= {}_{m+k}C_k - 1 + f(k+1, m)$$

$$= {}_{m+k}C_k - 1 + {}_mH_{k+1}$$

$$= {}_{m+k}C_k - 1 + {}_{m+k}C_{k+1}$$

$$= {}_{m+k+1}C_{k+1} - 1 = f(k+1, m+1) - 1 \text{ 이므로}$$

 $n = k+1$  일 때도 등식이 성립한다.

그러므로 수학적 귀납법에 의해 주어진 등식은 참.

## 21. 25

구별되는 다섯 개를 구별되지 않는 상자에 넣는 경우의 수

(i) 2, 2, 1개 넣는 경우:  ${}_5C_2 \cdot {}_3C_2 \cdot {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} = 15$

(ii) 1, 1, 3개 넣는 경우:  ${}_5C_1 \cdot {}_4C_1 \cdot {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} = 10$

그러므로 구하는 경우의 수는 25.

## 22. 45개

① 경우의 수를 이용하는 방법

주어진 방정식은 다음 방정식과 동치이다.

$$(x-1) + (y-3) + (-z+2) = 8, \quad x-1 \geq 0, \quad y-3 \geq 0, \quad -z+2 \geq 0$$

주어진 방정식의 정수해의 개수  ${}_3H_8 = 45$ .

② 생성함수를 이용하는 방법(뽑기)

주어진 조건을 만족하는  $x+y-z=n$ 의 정수해의 개수  $a_n$ 라 하자.  $a_n$ 의

$$\begin{aligned} \text{생성함수 } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= (x+x^2+\dots)(x^3+x^4+\dots)(x^{-2}+x^{-1}+\dots) = \frac{x^2}{(1-x)^3} \\ &= x^2 \sum_{n=0}^{\infty} {}_3H_n x^n. \end{aligned}$$

구하는 경우의 수는  $a_{10}$  즉,  $x^{10}$ 의 계수  ${}_3H_8 = 45$ .

## 23.

피보나치의 저서 「산반서(Liber Abaci)」에 다음과 같은 문제가 있다.

한 사람이 암, 수 한 쌍의 토끼를 기르는데 한 달에 한 번씩 한 쌍의 새끼(암, 수)를 출산한다고 합니다. 새로 출산된 새끼 한 쌍은 한 달이면 다 자라고, 두 달 후부터는 매달 한 쌍의 새끼를 출산한 일 년 후에는 모두 몇 쌍의 토끼를 출산하겠습니까?

이 문제의 풀이에 나오는 수열을 Lucas가 피보나치 수열이라고 이름 붙였다.

①  $x_n = f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2$  라 하면

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f_{n+2} f_n - f_{n+1}^2 \\ &= (f_{n+1} + f_n) f_n - (f_n + f_{n-1}) f_{n+1} \\ &= f_n^2 - f_{n-1} f_{n+1} \\ &= -x_n. \end{aligned}$$

②  $x_2 = f_3 f_1 - f_2^2 = 2 \cdot 1 - 1^2 = 1$  이므로  $n \geq 2$  일 때  $\{x_n\}$ 은 공비  $-1$ 인 등비 수열이다. 따라서  $x_n = 1 \cdot (-1)^n$  ( $n \geq 2$ ).③  $f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$ 에서  $f_{n+1} f_{n-1} = f_n^2 + (-1)^n$  ( $n \geq 2$ ).

## 24. ②

$$c_n = \log_2 a_n, \quad c_n = \frac{c_{n-1} + c_{n-2}}{2}, \quad n = 3, 4, \dots$$

$$\text{특성방정식 } 2t^2 - t - 1 = 0, \quad t = 1, -\frac{1}{2}.$$

$$c_n = \alpha + \beta \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \log_2 a_n,$$

$$a_n = 2^{\alpha + \beta(-2)^{-n}}, \quad \alpha = 2, \quad \beta = 4. \quad \therefore a_n = 2^{2+4(-2)^{-n}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4.$$

## 25. ④

$$\sum_{j=1}^i {}_i C_j = {}_i C_1 + {}_i C_2 + \dots + {}_i C_i = 2^i - 1 \text{ 이므로}$$

$$\sum_{i=1}^9 \sum_{j=1}^i {}_i C_j = \sum_{i=1}^9 (2^i - 1) = \frac{2(2^9 - 1)}{2 - 1} - 9 = 1013.$$

## <그래프>

1.

$G$ 의 변의 개수  $e$ 라 하자.

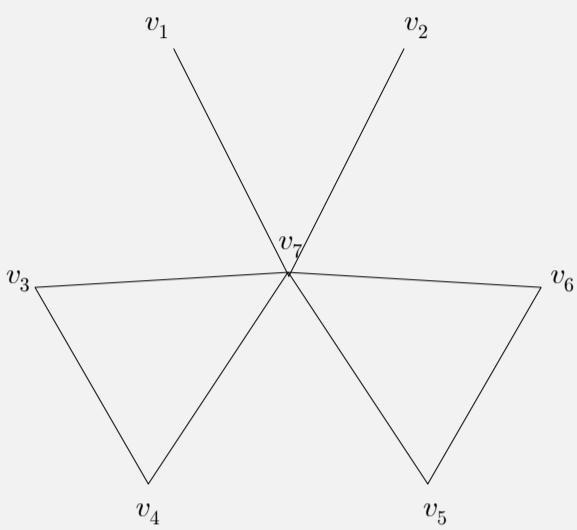
(가)에 따라  $\deg(v_1) \leq 1$ ,  $\deg(v_7) \leq 7$ ,  $G$ 는 단순그래프이므로  $\deg(v_7) \leq 6$ .

(나)에 따라  $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ 이면  $\deg(v_n) \leq 2$ .

여기서  $\sum_{v \in V} \deg(v) \leq 17$ ,  $2e = \sum \deg(v)$ 는 짝수이므로  $\sum_{v \in V} \deg(v) \leq 16$ .

$\deg(v_1) = 1 = \deg(v_2)$ ,  $\deg(v_3) = \deg(v_4) = \deg(v_5) = \deg(v_6) = 2$ ,  $\deg(v_7) = 6$

을 만족하는 그래프  $G$ 가 존재하므로,  $2e = \sum_{v \in V} \deg(v) = 16$ ,  $e = 8$ .



2.

근접행렬  $B$ 로부터 인접행렬  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 이므로  $L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ .

$$\det(L) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

$(-2, -1, -1) = (-1, 2, -1) + (-1, -1, 2)$ , 일차종속.)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, A^4 = A^2 \cdot A^2 \text{의 } 1\text{행 } 4\text{열 성분} = (1 \ 0 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 4. \text{ 구하는 값 } 4.$$

$$* \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 & x_2 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_2 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_4 & x_2 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_4 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \text{이므로 길이 4인 길의 개수 } 4.$$

3. 16

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{이므로 구하는 값 } \sum_{i,j} (a_{ij}) = 16$$

\* 다른 설명

$A$ 의 모든 성분의 합은 각 행(열)의 합들을 모두 더한 것으로 각 꼭짓점의 차수의 합과 같다. 따라서 구하는 값은 주어진 그래프의 변의 수의 2배, 16이다.

\* 루프는 없으나 다중변 있다. 단순그래프 아님

\* 평면에 변이 서로 교차하지 않게 그려지므로 평면그래프

\* 임의의 두 꼭짓점 사이에 경로 있으므로 연결그래프

4.

①  $G = G(V, E)$ 에 대하여

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v) = 4+6+4+7+2+8+4+6+3 = 44 \text{이므로 } |E| = 22.$$

②  $G$ 가 평면그래프라 하자.

$G$ 의 임의의 두 꼭짓점 사이에 경로가 존재하므로  $G$ 는 연결그래프이다.

따라서  $22 = |E| \leq 3|V| - 6 = 21$ , 모순.

③  $\{v_2, v_3, v_5, v_7\}$ 으로 이루어진  $G$ 의 부분그래프는  $K_4$ 와 동형이다.

$$\chi(K_4) = 4 \text{이므로 } \chi(G) \geq \chi(K_4) = 4.$$

한편  $v_2, v_4, v_6, v_8, v_{10}$ 와  $v_3, v_9$ 와  $v_5$ 와  $v_7$ 은 각각 다른 색으로 채색이 가능하므로  $\chi(G) = 4$ .

5. ①

ㄱ. 조건을 만족하는 단순그래프가 존재할 필요충분조건

차수열  $(4, 4, 3, 3, 2, 0)$ : 그래프적

$$\Leftrightarrow (4-1, 3-1, 3-1, 2-1, 0) = (3, 2, 2, 1, 0): \text{그래프적}$$

$$\Leftrightarrow (2-1, 2-1, 1-1, 0) = (1, 1, 0, 0): \text{그래프적}$$

● — ● ● ● 는 단순그래프이므로

차수 4, 3, 3, 2, 0인 단순그래프 있다.

ㄴ. 육각형 / 연결되지 않은 두 삼각형은 조건을 만족하는 두 개의 단순그래프이다.

ㄷ. 조건을 만족하는 단순그래프는 꼭짓점의 개수가 6개,  $d_1 \geq 6$ 이 되는데, 이 경우  $v_1$ 에 루프 혹은 다중변이 존재하게 되어 단순그래프라는 데 모순이 된다.

6. ③

(가)에 의해  $v = 5+6 = 11$ , (나)에 의해  $e = 5+9+5 \times 6 = 44$

$$m = \sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2e = 88.$$

(나)에 의해  $C_5$ 의 임의의 꼭짓점과  $K_{3,3}$ 의 임의의 꼭짓점은 인접하므로

그래프  $G$ 의 채색수는  $C_5$ 의 채색수와  $K_{3,3}$ 의 채색수의 합이다.

$$\chi(C_5) = 3, \chi(K_{3,3}) = 2 \text{이므로 } n = 5.$$

그러므로  $m+n = 93$ .

7. ③

ㄱ.  $A^2$ 의  $(i, i)$ 성분은 꼭짓점  $v_i$ 에서  $v_i$ 에 이르는 길이 2인 경로의 수이다.

즉,  $v_i$ 의 차수를 나타내므로  $A^2$ 의 대각합은  $2m$ 이다.

ㄴ.  $A^k (k \geq 3)$ 의 대각합은 길이  $k$ 인 경로의 개수.

(회로만 있는 것이 아니다.)

ㄷ.  $BB^T = D+A$ 이며  $G$ 는 단순그래프이므로  $A$ 의 모든  $(i, i)$ 성분은 0이다.

따라서  $BB^T$ 의 대각성분 즉,  $(i, i)$ 성분은  $\deg(v_i)$ 이다.

### 8. ⑤

⊓ Kuratowski 정리에 의해 옳다.

\* 다른 설명

$K_{3,4}$ 는 연결그래프이다.  $K_{3,4}$ 가 평면그래프이면

오일러 공식에 의해  $v-e+f=2$ 에서  $f=7$ 이다.

$K_{3,4}$ 는 단순그래프이므로 임의의 면의 차수는 1, 2가 될 수 없고,

이분그래프이므로 3도 될 수 없다.

따라서  $K_{3,4}$ 의 모든 면의 차수는 4이상이다.

한편  $28 = 4f \leq \sum_{f \in F} \deg(f) = 2e = 24$ 가 되어 모순.

그러므로  $K_{3,4}$ 는 평면그래프가 아니다.

⊓ 평면그래프  $G$ 의 모든 꼭짓점의 차수 6이상 가정.

$6v \leq \sum_{v \in V} \deg(v) = 2e$ 에서  $3v \leq e$ 이며,  $e \leq 3v - 6$ 이므로  $3v \leq 3v - 6$ , 모순.

따라서 평면그래프에 차수 5이하 꼭짓점 있다.

⊓ 평면에 그렸으므로 평면그래프, 하나의 면만 사각형이고 나머지 면은 삼각형이므로 임의의 두 꼭짓점이 연결되어 있으므로 연결그래프,

따라서 주어진 그래프는 연결평면그래프이다.

그러므로 다음 등식과 공식 사용가능

$$\sum_{f \in F} \deg(f) = 4 \times 1 + 3(f-1) = 3f+1 \text{에서 } f = \frac{2e-1}{3},$$

오일러 공식에 의해  $v-e+f=2$ 에서  $e=83$ .

### 9. ②

분할하여 얻은 그래프를  $G$ 라 하면

가정에 의해  $G$ 는 연결, 평면, 단순그래프.

$G$ 의 꼭짓점의 수  $v$ , 변의 수  $e$ , 면의 수  $f$ 에 대하여

$$v=11, \sum_{v \in V} \deg(v) = 4 \cdot 11 = 2e \text{에서 } e=22,$$

$v-e+f=2$ 에서  $f=13$ 이다. 삼각형의 개수  $x$ 라 하면

$$\sum_{f \in F} \deg(f) = 2e = 44 = 3x + 4(13-x) \text{에서 } x=8.$$

### 10. ⑤

주어진 문제 상황을 그래프 문제로 생각하자.



위 그래프를 4가지 색으로 칠하는 방법의 수이다.

제거-축약정리에 의해 채색다항식은 다음과 같다.

$$P_G(x) = x(x-1)^4 - \{x(x-1)^3 - x(x-1)^2\} = x(x-1)^2(x^2 - 3x + 3)$$

그러므로 구하는 값  $P_G(4) = 252$ .

$$* P_G(0) = P_G(1) = 0, P_G(2) = 2, P_G(3) = 36.$$

$$11. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, a에서 세 점을 지나 c에 이르는 경로의 수$$

\* 루프, 다중변 없다. 단순그래프

\* 평면에 변이 서로 교차하지 않게 그려지므로 평면그래프

\* 임의의 두 꼭짓점 사이에 경로 있으므로 연결그래프

$$* v=4, e=5, f=3$$

$$\textcircled{1} 2e = \sum \deg(f) = 3+3+4 \text{ (삼각형 2개, 외부 사각형 1개)}$$

$$= \sum \deg(v) = 3+2+3+2$$

$$\textcircled{2} e = 5 \leq 3v - 6 = 6$$

$$* 채색다항식 P_G(x) = x(x-1)(x-2)^2,$$

$$* 채색수 \min\{x \in \mathbb{Z}^+ \mid P_G(x) \neq 0\} = \chi(G) = 3.$$

### 12.

$m=1$ 일 때  $n, 1 / m \geq 2$ 일 때  $n(n-1)^{m-1}, 2$

1을 칠하면 2는 1과 다른 색으로, 3은 2와 다른 색으로 …,

$m \geq 2$ 일 때  $n(n-1)^{m-1}$ 으로  $\chi(G)=1$ .

①  $m=1$ 일 때  $P_G(n)=n$ 이고,  $\min\{n \in \mathbb{Z}^+ \mid P_G(n) \neq 0\}=1$ 으로  $\chi(G)=1$ .

②  $m \geq 2$ 일 때

$P_G(n)=n \times (n-1) \times (n-1) \times \dots \times (n-1) \times (n-1) = n(n-1)^{m-1}$ 이고,

$\min\{n \in \mathbb{Z}^+ \mid P_G(n) \neq 0\}=2$ 으로  $\chi(G)=2$ .

그래프  $G$ 를 색칠하는 데 필요한 색의 최소 개수는 2.

### 13.

$$(1) \text{ 인접행렬 } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) 곧바로 가는지 알 수 있는 행렬  $A$ ,

한 지점을 거쳐서 갈 수 있는지 알 수 있는 행렬  $A^2$ .

$$\text{그러므로 구하는 행렬 } A+A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 0 + \frac{c}{8} + \frac{c}{8}, \quad c = 4.$$

$$P(X \geq 4) = \int_4^{\infty} 4x^{-3} dx = \frac{1}{8}.$$

$$\text{우수 제품이 3개 이상 있을 확률 } \left(\frac{1}{8}\right)^4 + 4 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^3 \left(\frac{7}{8}\right) = \frac{29}{4096}.$$

2. 29

$$E(X_i) = 5 = V(X_i), \quad \frac{140}{n-1} = V(X_i) = 5, \quad n = 29.$$

3. 4,  $\frac{4}{5}$ 

$$1 = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) \text{에서 } p+q = \frac{5}{24}.$$

$$\frac{11}{12} = E(X) = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2) \text{에서}$$

$$q = \frac{1}{24}, \quad p = \frac{1}{6}, \quad p \times \frac{1}{q} = 4.$$

$$P(X+Y \leq 4 \mid Y-X=2) = \frac{P(X+Y \leq 4, Y-X=2)}{P(Y-X=2)}$$

$$= \frac{P(X=0, Y=2) + P(X=1, Y=3)}{P(X=0, Y=2) + P(X=1, Y=3) + P(X=2, Y=4)} = \frac{\frac{1}{6}}{q + \frac{1}{6}} = \frac{4}{5}.$$

4.  $\frac{5}{6}$ 

$$E[X \mid Y=1] = \sum_{x=0}^2 x \cdot \frac{f(x, 1)}{f_Y(1)} = \sum_{x=0}^2 x \cdot \frac{f(x, 1)}{\frac{2}{15} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15}} = \frac{5}{2} \left(0 + \frac{1}{5} + \frac{2}{15}\right) = \frac{5}{6}.$$

5.  $n=9$  $A$ 가 동전을 던져 앞면이 나오는 횟수  $X$ , $B$ 가 동전을 던져 앞면이 나오는 횟수  $Y$ 라 하자.동전을 던지는 시행은 독립시행이므로  $X$ 와  $Y$ 는 독립이다.

$$\frac{6}{13} = P(X=1 \mid X+Y=2)$$

$$= \frac{P(X=1, X+Y=2)}{P(X+Y=2)}$$

$$= \frac{P(X=1, Y=1)}{P(X+Y=2)}$$

$$= \frac{P(X=1) \cdot P(Y=1)}{P(X+Y=2)}$$

$$= \frac{{}_n C_1 p^1 (1-p)^{n-1} \cdot {}_{2n} C_1 p^1 (1-p)^{2n-1}}{3n C_2 p^2 (1-p)^{3n-2}}$$

$$= \frac{2n^2}{3n(3n-1)/2} \text{에서 } n^2 - 9n = 0.$$

그러므로  $n=9$ .

6. ⑤

ㄱ. trivial

ㄴ. 가능한 모든 경우의 확률을 더하면 1이므로 옳다.

ㄷ. 12번째까지는 4번 성공하고 13번째에 성공할 확률은  ${}_{12} C_4 \left(\frac{1}{8}\right)^4 \left(\frac{7}{8}\right)^8 \times \left(\frac{1}{8}\right)$ 이므로 옳다.

\* 음이항분포

n회의 독립시행에서  $k$ 번 성공할 때까지 필요한 총 횟수에 대한 확률변수를 음이항확률변수라 한다.  $k=1$ 일 때 기하분포라 한다.① 확률질량함수  $f(x) = {}_{x-1} C_{k-1} p^k q^{x-k}$ ②  $M_X(t) = (pe^t / (1-qe^t))^k$ ③  $E(X) = k/p, \quad V(X) = kq/p^2$ 

7. ②

흰 공일 사건을 E라 하자.

가정에 의해  $P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{2}{3}, \quad P(E|A) = \frac{3}{5}, \quad P(E|B) = \frac{m}{m+2}$ 이므로

$$\frac{2}{7} = P(A|E) = \frac{P(E|A)P(A)}{P(E)}$$

$$= \frac{P(E|A)P(A)}{P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B)}$$

$$= \frac{0.6 \times 0.3}{0.6 \times 0.3 + [m/(m+2)] \times 0.6}$$

$$= \frac{0.6}{0.6 + 2m/(m+2)}, \quad m=6.$$

8. ④

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{3x-y}{12}}{\frac{3-y}{12} + \frac{6-y}{12}} = \frac{3x-y}{9-2y}, \quad (x,y=1,2)$$

$$E(X \mid Y=1) = \sum_{x=1}^2 x \cdot \frac{3x-1}{9-2} = \frac{12}{7}.$$

9. ④

 $p_{Y|X}(n|m) = (\text{동전을 } m\text{번 던져 앞면이 } n\text{번 나올 확률})$ 

$$= {}_m C_n \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n} = {}_m C_n \left(\frac{1}{2}\right)^m.$$

전확률의 법칙(law of total probability)에 의해

$$p_Y(0) = \sum_{m=1}^6 p_{Y|X}(0|m) \cdot p_X(m)$$

$$= \sum_{m=1}^6 {}_m C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^m \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{m=1}^6 \left(\frac{1}{2}\right)^m = \frac{63}{6 \cdot 64}.$$

\* 초기하분포

특정한 속성을 갖는 원소  $m$ 개를 포함한 전체  $N$ 개의 원소 중에서 임의로  $n$ 개의 원소를 비복원추출할 때,  $n$ 개에 포함된 특정한 속성을 갖는 원소의 개수에 대응하는 확률변수를 초기하확률변수라 한다. 초기하분포는  $m$ 과 $N$ 이 무한히 커질 때  $p = \frac{m}{N}$ 인 이항분포로 근사한다.① 확률질량함수  $f(x) = \frac{{}_m C_x \cdot {}_{N-m} C_{n-x}}{{}_N C_n}$   
 $(0 \leq x \leq \min\{m, n\})$ ②  $E(X) = \frac{nm}{N}, \quad V(X) = \frac{npq(N-n)}{N-1}$

10. ④

$$E(Y) = E(X^2) = M_X''(0) = \frac{3}{5}, \quad E(Y^2) = E(X^4) = M_X^{(4)}(0) = \frac{3}{5} \text{ 이므로}$$

$$V(Y) = \frac{3}{5} - \frac{9}{25} = \frac{6}{25}.$$

\* 주어진 적률 생성함수로부터  $X$ 의 분포는 다음과 같다.

$X$	0	-1	1	계
$P(X)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

11. ⑤

사각연필을  $i$ 번 째 굴렸을 때 윗면에 나온 수  $X_i$ 라 하면

$X_1, X_2, X_3, \dots, X_{80}$ 은 독립이며,  $X_i$ 의 분포는 다음과 같다.

$X_i$	1	2	3	4	계
$P(X_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$$\text{이때 } E(X_i) = \frac{5}{2}, \quad V(X_i) = \frac{5}{4} \text{ 이다.}$$

$$\text{한편 } X = \frac{1}{80}(X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_{80}) \text{ 라 하면}$$

$$E(X) = \frac{1}{80} \cdot 80 \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{2}, \quad V(X) = \frac{1}{80^2} \cdot 80 \cdot \frac{5}{4} = \frac{1}{8^2}.$$

$$\text{그러므로 } x = \Pr(X_1 + X_2 + \dots + X_{80} \geq 216) = \Pr(X \geq 2.7) \\ \approx \Pr(Z \geq 1.6) = 1 - \Phi(1.6).$$

12. ②

시합 횟수를  $X$ 라 하면  $X$ 의 확률분포는 다음과 같다.

$X$	3	4	5	계
$P(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	1

$$E(X) = \frac{33}{8}.$$

13.  $n=1, 2$ 

$$E_n = 0 \cdot (1 - \frac{1}{2^n}) + n \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{n}{2^n}.$$

$$f(x) = \frac{x}{2^x}, \quad f'(x) = 2^{-x}(1 - x \ln 2) \text{ 는 } x \geq 2 \text{ 일 때 } f'(x) < 0 \text{ 이므로}$$

$n=1, 2$  일 때  $E_n$  은 최댓값을 갖는다.

14.  $X$ 의 적률생성함수를 이용하자.

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^n e^{tx} \cdot {}_n C_x p^x (1-p)^{n-x} \\ = [pe^t + (1-p)]^n \text{ 이므로}$$

$$E(X) = M_X'(0) = np.$$

$$15. \text{ 짹수 눈이 나올 확률은 } \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ 이므로 } X \sim B(288, \frac{1}{3}).$$

$$E(X) = 96, \quad V(X) = 64 = 8^2.$$

시행횟수가 충분히 크므로 중심극한정리에 따라  $X \sim N(96, 8^2)$ .

$$P(88 \leq X \leq 112) = P(-1 \leq Z \leq 2) = 0.8185.$$

$$16. \frac{2}{7}$$

a에서 생산하는 제품을 선택할 사건 A,  
b에서 생산하는 제품을 선택할 사건 B,  
c에서 생산하는 제품을 선택할 사건 C라 하자.

A, B, C는 쌍마다 배반 사건이므로

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B).$$

가정에 의해  $P(A) = 0.2, P(B) = 0.3, P(C) = 0.5,$

$$P(E|A) = 0.005, P(E|B) = 0.01, P(E|C) = 0.02.$$

베이즈 정리에 따라 구하는 확률은

$$P(A \cup B|E) = \frac{P((A \cup B) \cap E)}{P(E)} = \frac{P(A \cap E) + P(B \cap E)}{P(E)} \\ = \frac{P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B)}{P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B) + P(E|C)P(C)} \\ = \frac{2}{7}.$$

17.

(1)

X	P(X)	Y		P(Y)	합
		0	1		
0	1/4	0	1/2	1/2	1/4
1	1/2	1	1/2	1/2	1/2
2	1/4	1/2	0	1/4	1/4
합	1	1/2	1/2	1	1

$$(2) \sigma_{XY} = E(XY) - \mu_X \mu_Y = \sum_{x,y} xy f(x, y) - 1 \cdot (1/2) = 1/2 - 1/2 = 0.$$

$$(3) P(X=0, Y=0) = 1/4 \neq P(X=0) \cdot P(Y=0) = 1/8 \text{ 이므로} \\ X \text{와 } Y \text{는 독립이 아니다.}$$

하위 영역	배점	예상정답율(%)	관련사고영역	출제자
교직수학	5	50	이해	전무근
출제 내용	고등학교 수학 I 교과서. 동화사. 1998. pp.233-236.			
관련자료	수학과 교육과정, 교육부. 1997. p.103.			

(유형 1) 강원도를 여행할 사건을  $A$ , 제주도를 여행할 사건을  $B$ 라 하면

$$p(A) = \frac{2}{5}, p(B) = \frac{1}{4} \text{이고 } A, B \text{는 독립이므로}$$

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{10}$$

$$\text{한편, } p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \text{에서 } p(A \cup B) = \frac{11}{20}$$

$$\begin{aligned} \text{구하는 조건부확률은 } p(B^c | A^c) &= \frac{p(A^c | B^c)}{p(A^c)} = \frac{1 - p(A \cup B)}{1 - p(A)} \\ &= \frac{1 - \frac{11}{20}}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

(유형 2)  $p(A) = \frac{2}{5}, p(B) = \frac{1}{4}$ 이고  $A, B$ 는 독립이므로

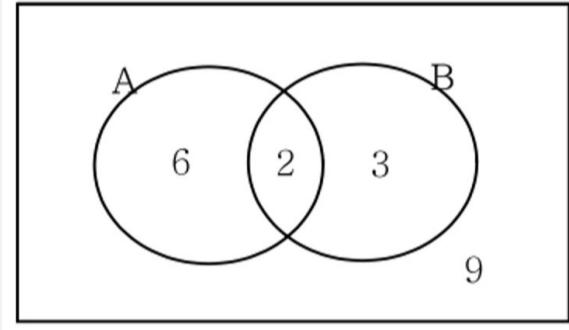
$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{10}$$

한 반의 학생을 20명으로 생각하여 벤 다이어그램을 그리면 다음과 같다.

$$p(A^c \cap B^c) = \frac{9}{20}$$

$$p(A^c) = \frac{3}{20} + \frac{9}{20} = \frac{12}{20},$$

$$\begin{aligned} p(B^c | A^c) &= \frac{p(A^c | B^c)}{p(A^c)} \\ &= \frac{1 - p(A \cup B)}{1 - p(A)} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$



#### \* 채점기준

(유형 1) 강원도를 여행할 사건을  $A$ , 제주도를 여행할 사건을  $B$ 라 하면

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{10} \text{을 구하면}$$

$$p(A \cup B) = \frac{11}{20} \text{를 구하면}$$

$$p(B^c | A^c) = \frac{p(A^c | B^c)}{p(A^c)} \text{를 사용하면}$$

$$\frac{p(A^c | B^c)}{p(A^c)} = \frac{1 - p(A \cup B)}{1 - p(A)} \text{를 사용하면}$$

$$p(B^c | A^c) = \frac{3}{4} \text{을 구하면}$$

(유형 2)  $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{10}$ 을 구하면

$$p(A^c \cap B^c) = \frac{9}{20} \text{를 구하면}$$

(벤 다이어그램에서  $A \cap B$ 와  $(A \cup B)^c$ 의 개수 또는 확률이 정확하면 각각 1점)

$$p(B^c | A^c) = \frac{p(A^c | B^c)}{p(A^c)} \text{의 식을 사용하면}$$

$$\frac{p(A^c | B^c)}{p(A^c)} = \frac{1 - p(A \cup B)}{1 - p(A)} \text{를 사용하면}$$

$$p(B^c | A^c) = \frac{3}{4} \text{을 구하면}$$

19. ①

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{e^t}{2 - e^t}.$$

$$E(X) = M'_X(0) = 2, E(X^2) = M''_X(0) = 6, V(X) = 6 - 2^2 = 2.$$

20. ②

학생 2명을 뽑아 순서쌍으로 나타내면 다음과 같다.

(1, 2)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)
(1, 3)	(2, 3)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)
(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 3)	(5, 3)
(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 4)

서로의 위치를 3번 바꾸었을 때, 첫 번째 학생이 1번일 경우의 수 4이므로 구하는 확률  $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ .

21. ②

$$x+y+\frac{1}{3}=1 \text{에서 } 0 \leq x \leq \frac{2}{3}. E(X)=4x+\frac{5}{3}, E(X^2)=\frac{11}{3}+24x \text{이므로}$$

$$V(X)=\frac{11}{3}+24x-\left(4x+\frac{5}{3}\right)^2=-16x^2+\frac{32}{3}x+\frac{8}{9}=-16\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{3}.$$

따라서  $x=\frac{1}{3}$  일 때 분산이 최대이다.

22. ③

$A$ 가 이길 확률을 구하자.

①  $A$ 가 2번 연속 이기는 경우

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

②  $A$ 와  $B$ 가 각각 1번 이기고  $A$ 가 이기는 경우

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

③  $A$ 가 1번,  $B$ 가 2번 이기고  $A$ 가 이기는 경우

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$$

따라서  $A$ 가 이기는 확률  $\frac{11}{16}$ 이므로

$A$ 는 1100원,  $B$ 는 500원 갖는 것이 타당하다.

23. ①

$$X \sim B(6, \frac{1}{4}). E(X) = \frac{3}{2}, V(X) = \frac{9}{8} = E(X^2) - \frac{9}{4} \text{에서 } E(X^2) = \frac{27}{8}.$$

$$X+Y=6 \text{에서 } Y=6-X.$$

$$E[(X-Y)^2] = E[(2X-6)^2] = E(4X^2 - 24X + 36) = \frac{27}{2} - 36 + 36 = \frac{27}{2}.$$

24. ③

주머니에서  $C_i$ 을 뽑는 사건  $C_i$  ( $i=1, 2, 3$ ),

주사위를 4번 던져 앞면이 2번 나오는 사건  $H$ 라 하자.

가정에 의해  $P(C_1) = P(C_2) = P(C_3) = \frac{1}{3}$ ,

$$P(H|C_1) = {}_4C_2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{128},$$

$$P(H|C_2) = {}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8},$$

$$P(H|C_3) = {}_4C_2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{27}{128}.$$

$$P(H) = P(H|C_1)P(C_1) + P(H|C_2)P(C_2) + P(H|C_3)P(C_3) = \frac{17}{64} \text{이므로}$$

$$\text{구하는 확률 } P(C_2|H) = \frac{P(H|C_2)P(C_2)}{P(H)} = \frac{8}{17}.$$

## 〈연속형〉

1. 500, 50

$$\text{Var}(X+Y) = 400^2 + 300^3 = 500^2, \sigma_{X+Y} = 500, c = \frac{\sigma_{X+Y}}{\sqrt{100}} = 50$$

2. 9,  $\frac{7}{3}$

$$\mu_Y = 0+0+\dots+0=0, V(Y)=\sigma_Y^2=1+1+\dots+1=9, Y \sim N(0, 3^2).$$

$$P(Y \geq -7) = P\left(Z \geq -\frac{7}{3}\right) = P\left(X_1 \geq -\frac{7}{3}\right) = P\left(X_1 \leq \frac{7}{3}\right) \text{이므로 } a = \frac{7}{3}.$$

3.

$$f_X(x) = \int_0^\infty f(x,y)dy = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}, x > 0.$$

$$f_Y(y) = \int_0^\infty f(x,y)dx = \left[ \frac{e^{-\frac{1}{2}y^2}}{\sqrt{2\pi}} \times \left(-2e^{-\frac{1}{2}x}\right) \right]_0^\infty = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-y^2/2}, y > 0.$$

$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ 이므로  $X, Y$ 는 독립.

$$P(X \leq 2 | Y \leq 2) = P(X \leq 2) = \int_0^2 f_X(x)dx = 1 - e^{-1}.$$

4.

$0 < z < 1$  일 때  $Z = F(X)$ 의 누적분포함수는

$$Pr(Z \leq z) = Pr(F(X) \leq z) = Pr(X \leq F^{-1}(z)) = F(F^{-1}(z)) = z.$$

$F(X)$ 의 확률밀도함수  $f(z) = 1, 0 < z < 1$ .

$$Pr(-2 < \ln F(X) < 1) = Pr(e^{-2} < F(X) < e)$$

$$\begin{aligned} &= Pr(F(X) < e) - Pr(F(X) < e^{-2}) \\ &= 1 - e^{-2}. \end{aligned}$$

5. 0.75, 0.02

두 도시의 정책에 찬성하는 사람의 수를 각각  $X, Y$ 라 하면

$$X \sim B(350, 0.7), Y \sim B(160, 0.8).$$

표본의 크기가 충분히 크므로 중심극한 정리에 따라

$X \sim N(350 \times 0.7, 350 \times 0.7 \times 0.3), Y \sim N(160 \times 0.8, 160 \times 0.8 \times 0.2)$  라 쓸 수 있다.

$$\text{따라서 } p_1 = \frac{X}{350} \sim N\left(0.7, \frac{0.7 \times 0.3}{350}\right), p_2 = \frac{Y}{160} \sim N\left(0.8, \frac{0.8 \times 0.2}{160}\right).$$

$$\frac{p_1 + p_2}{2} \sim N\left(0.75, \frac{1}{4}\left(\frac{0.7 \times 0.3}{350} + \frac{0.8 \times 0.2}{160}\right)\right) = N\left(\frac{3}{4}, \left(\frac{0.2}{10}\right)^2\right)$$

$$* \frac{1}{4}\left(\frac{0.7 \times 0.3}{350} + \frac{0.8 \times 0.2}{160}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{0.1 \times 0.3}{50} + \frac{0.1 \times 0.2}{20}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{0.06 + 0.1}{100} = \frac{0.04}{100}$$

그러므로 평균  $\frac{p_1 + p_2}{2}$ 에 대한 90% 신뢰구간은

$$\frac{3}{4} \pm z_{0.9} \frac{0.2}{10} = \left(\frac{3}{4} - 1.645 \times \frac{1}{50}, \frac{3}{4} + 1.645 \times \frac{1}{50}\right) \text{이므로 } a = \frac{3}{4}, b = 0.02.$$

6.

$$G(z) = \begin{cases} 2 \times \int_1^{1+\frac{z}{2}} \int_{y-z}^{y+2} 1 dx dy = \frac{z^2}{2}, & 0 \leq z \leq 1 \\ 1 - 2 \times \int_0^{1-\frac{z}{2}} \int_{x+z}^{-x+2} 1 dy dx = -\frac{z^2}{2} + 2z - 1, & 1 \leq z \leq 2 \end{cases}$$

$$g(z) = G'(z) = \begin{cases} z, & 0 \leq z \leq 1 \\ -z+2, & 1 \leq z \leq 2 \end{cases}, g(z) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < z < \frac{3}{2} \text{이므로}$$

$$P\left(g(Z) > \frac{1}{2}\right) = P\left(\frac{1}{2} < Z < \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}.$$

(다른 풀이)

$$z < 0 \text{이면 } G(z) = 0,$$

$$0 \leq z \leq 1 \text{이면 } G(z) = \frac{1}{2}z^2,$$

$$1 \leq z \leq 2 \text{이면 } G(z) = 1 - \frac{(2-z)^2}{2},$$

$$2 < z \text{이면 } G(z) = 1.$$

$$0 < z < 2 \text{이면 } g(z) = \begin{cases} z, & 0 < z < 1 \\ 2-z, & 1 \leq z < 2 \end{cases} \text{이므로}$$

$$P\left(g(Z) > \frac{1}{2}\right) = P\left(\frac{1}{2} < Z < \frac{3}{2}\right) = G\left(\frac{3}{2}\right) - G\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}.$$

7.

$$E(X) = M'_X(0) = 8, E(X^2) = M''_X(0) = 80, V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 16.$$

중심극한정리에 따라  $\bar{X} \sim N(8, 0.4^2)$ 이므로  $P(\bar{X} \geq 9) = P(Z \geq 2.5), c = 2.5$ .

$$8. a = 100, b = 2$$

$$\bar{X} \sim N(2500, 8^2), \bar{Y} \sim N(2200, 6^2), \bar{X} - \bar{Y} \sim N(300, 10^2), a = 100,$$

$$P(\bar{X} - \bar{Y} \leq 320) = P(Z \leq 2), b = 2.$$

9.

$Y$ 의 확률밀도함수를  $f(y)$ , 누적분포함수를  $F(y)$ 라 하자.

$0 < y < 1$  일 때

$$F(y) = Pr(Y \leq y)$$

$$= Pr(X_1, X_2 \leq y) + Pr(X_1, X_3 \leq y) + Pr(X_2, X_3 \leq y) - 2P(X_1, X_2, X_3 \leq y)$$

$$= 3y^2 - 2y^3.$$

$$f(y) = F'(y) = 6y - 6y^2, 0 < y < 1$$

(다른 풀이)

$X_1$ 의 확률밀도함수를  $f_{X_1}$ ,  $Y$ 의 누적분포함수를  $F_Y$ 라 하면

$0 \leq y \leq 1$ 에 대하여

$$F_Y(y) = Pr(Y \leq y) = 6 \int_0^y f_{X_1}(x) \Pr(X_2 \leq x, X_3 \geq x | X_1 = x) dx$$

$$= 6 \int_0^y x(1-x) dx = 6\left(\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3\right).$$

$$Y$$
의 확률밀도함수를  $f_Y$ 라 하면  $f_Y(y) = 6y(1-y), 0 < y < 1$

10.  $X \rightarrow 0$  일 때  $Y \rightarrow 0, X \rightarrow 3$  일 때  $Y \rightarrow \infty$ 이므로

$0 < X < 3$  일 때  $0 < Y < \infty$ 이 고

$$F_Y(y) = Pr(X \leq 3 - 3e^{-\frac{y}{2}}) = \begin{cases} 1 - e^{-y/2}, & 0 < y < \infty \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$Y$$
의 확률밀도함수  $f_Y(y) = F'_Y(y) = \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} (0 < y < \infty)$

$$P(|Y-2| > 2) = P(Y > 4 \text{ or } Y < 0) = P(Y > 4) = 1 - F_Y(4) = e^{-2}.$$

11.  $e^{-3}$

$Z = \min\{X, Y\}$  이므로

$$\begin{aligned} P(Z > 10) &= P(\min\{X, Y\} > 10) \\ &= P(X > 10, Y > 10) \\ &= P(X > 10)P(Y > 10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{10}^{\infty} f_X(x)dx \int_{10}^{\infty} f_Y(y)dy \\ &= e^{-3}. \end{aligned}$$

(다른 풀이)

$$F_X(x) = \int_0^x \frac{1}{5}e^{-\frac{t}{5}}dt = 1 - e^{-\frac{x}{5}}, \quad F_Y(y) = \int_0^y \frac{1}{10}e^{-\frac{t}{10}}dt = 1 - e^{-\frac{y}{10}}$$

$$\begin{aligned} P(Z > 10) &= P(\min\{X, Y\} > 10) = P(X > 10, Y > 10) \\ &= (1 - P[X \leq 10])(1 - P[Y \leq 10]) \\ &= (1 - F_X(10))(1 - F_Y(10)) \\ &= e^{-2}e^{-1} = e^{-3}. \end{aligned}$$

\* 지수분포

양의 실수 구간에서 정의한 어떤 사건이 발생하기까지의 대기시간에 관한 확률변수를 지수확률변수라 한다.

$$\textcircled{1} \quad \text{확률밀도함수 } f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \lambda > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \quad F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$\textcircled{3} \quad M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} \quad (t < \lambda)$$

$$\textcircled{4} \quad E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$12. \quad E(\bar{X}) = \mu, \quad V(\bar{X}) = 1.5^2$$

$$0.1 = P(|Z| > c \times \frac{2}{3}) = P(|Z| > 1.64) \text{에서 } c = 2.46.$$

$$0.9 = P(|Z| \leq 1.64) = P(|\bar{X} - \mu| \leq 1.64 \times \frac{9}{6}) = P(|\bar{X} - \mu| \leq 2.46)$$

모평균  $\mu$ 에 대한 90% 신뢰구간은  $[57.54, 62.46]$ .

13.  $k = 1.8$

$$E(T) = 81, \quad V(T) = 5^2$$

$$P(T \geq 90) = P(Z \geq 1.8)$$

14.  $\frac{7}{16}$

$$\begin{aligned} P\left(Y < \frac{5}{2}\right) &= P(\min\{X_1, X_2\} < \frac{5}{2}) = 1 - P(\min\{X_1, X_2\} \geq \frac{5}{2}) \\ &= 1 - P(X_1 \geq \frac{5}{2}, X_2 \geq \frac{5}{2}) \\ &= 1 - \left( \int_{\frac{5}{2}}^4 \frac{2}{9} x_1 - \frac{2}{9} dx_1 \right) \left( \int_{\frac{5}{2}}^4 \frac{2}{9} x_2 - \frac{2}{9} dx_2 \right) \\ &= 1 - \left( \int_{\frac{5}{2}}^4 \frac{2}{9} x - \frac{2}{9} dx \right)^2 \\ &= 1 - \left( \frac{3}{4} \right)^2 = \frac{7}{16}. \end{aligned}$$

$$15. \quad f_X(x) = \frac{1}{2} \quad (0 < x < 2), \quad f_Y(y) = \frac{1}{2} \quad (0 < y < 2), \quad f(x, y) = \frac{1}{4} \quad (0 < x, y < 2).$$

$Z$ 의 누적분포함수  $F(z)$ 라 하자.

$0 < z < 4$ 인  $z$ 에 대하여

$0 < x + y < 4, 0 < x, y < 2$ 의 그래프를 그려 생각한다.

①  $0 < z \leq 2$ 인 경우

$$F(z) = \int_{-\infty}^z f_Z(z)dz = P(X + Y \leq z) = \int_0^z \int_0^{z-x} \frac{1}{4} dy dx = \frac{1}{8} z^2.$$

②  $2 < z < 4$ 인 경우

$$F(z) = P(Z \leq z) = 1 - \int_{z-2}^2 \int_{z-x}^2 \frac{1}{4} dy dx = -1 + z - \frac{z^2}{8}.$$

$$* \quad F(z) = \frac{1}{4} \left\{ 2(z-2) + \frac{z}{2}(4-z) \right\} = \frac{1}{4} \times (\text{직사각형} + \text{사다리꼴})$$

\*  $2 < z < 4$ 일 때 다른 방법

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_0^2 \int_0^{2-x} \frac{1}{4} dy dx + \int_0^{z-2} \int_{2-x}^2 \frac{1}{4} dy dx + \int_{z-2}^2 \int_{z-x}^2 \frac{1}{4} dy dx \\ &= -1 + z - \frac{z^2}{8}. \end{aligned}$$

$$\text{그러므로 } f_Z(z) = F'(z) = \begin{cases} \frac{z}{4}, & 0 < z \leq 2 \\ 1 - \frac{z}{4}, & 2 < z < 4 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}.$$

$$E(Z) = E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 2.$$

$$16. \quad g(z) = G'(z) = \frac{z}{4} e^{-\frac{z}{2}} \quad (z > 0)$$

$Z$ 의 누적분포함수  $G(z)$ .  $z < 0$ 일 때  $G(z) = 0$ .

$z \geq 0$ 일 때

$$\begin{aligned} G(z) &= \Pr(Z \leq z) \\ &= \Pr(X + 2Y \leq z) \\ &= \Pr(X \leq z - 2Y) \\ &= \int_0^{\frac{z}{2}} \int_0^{z-2y} \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \cdot e^{-y} dx dy \\ &= \int_0^{\frac{z}{2}} (e^{-y} - e^{-\frac{z}{2}}) dy \\ &= 1 - e^{-\frac{z}{2}} - \frac{z}{2} e^{-\frac{z}{2}} \quad (z > 0). \end{aligned}$$

$$\text{그러므로 } g(z) = G'(z) = \frac{z}{4} e^{-\frac{z}{2}} \quad (z > 0).$$

17.  $k = 0.5$

$$E(Y) = \frac{2}{5}E(X) + E(\alpha) = 70, \quad V(Y) = \frac{4}{25} \cdot 25 + 12 = 4^2$$

따라서  $P(Y > 72) = P(Z > 0.5)$ . 그러므로  $k = 0.5$ .

18.  $\frac{1}{9}$

$$\begin{aligned} P(M=2) &= P(2 \leq \frac{X}{Y} < 3) \\ &= P(2Y \leq X < 3Y) \\ &= \int_0^{\frac{1}{3}} \int_{2y}^{3y} 2x dx dy + \int_{\frac{1}{3}}^1 \int_{2y}^1 2x dx dy \\ &= \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

\* 다른 풀이

$$\begin{aligned} P(M=2) &= P(2 \leq \frac{X}{Y} < 3) = P(2Y \leq X < 3Y) \\ &= P\left(\frac{X}{3} < Y \leq \frac{X}{2}\right) \\ &= \int_0^1 \int_{\frac{x}{3}}^{\frac{x}{2}} 2x dy dx = \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

19.  $k = 1.5$

통신사를 이용하는 성인의 수  $X$ 라 하면  $X \sim B(400, 0.2)$ .

$$E(X) = 80, \quad V(X) = 8^2$$

따라서  $P(80 \leq X \leq 92) = P(0 \leq Z \leq 1.5)$ 에서  $k = 1.5$ .

\* 이항분포  $X \sim B(n, p)$ ,  $n$ 이 충분히 클 때  $\frac{X-np}{np(1-p)}$ 는 근사적으로 정규분포  $N(0, 1)$ 을 따른다.

20.  $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \frac{y+3y^2}{30}$  ( $1 < y < 3$ )

$$f_{X|Y}(x|2) = \frac{f(x, 2)}{f_Y(2)} = \frac{6}{7}(3x - x^2)$$
 ( $0 < x < 1$ )

$$\mathbb{E}[X|Y=2] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{6}{7}(3x - x^2) dx = \frac{9}{14}.$$

21. ④

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(\frac{2}{X}\right) = \int_1^2 \frac{2}{x} \cdot \frac{2}{3} x dx = \frac{4}{3}.$$

22. ③

영양제를 주 2회 이상 복용하는 사람을  $X$ 라 하면

$$X \sim B(300, 0.6), \quad \mathbb{E}(X) = 180, \quad V(X) = 72.$$

$$\bar{p} = \frac{X}{300} \sim N(0.6, \frac{(2\sqrt{2})^2}{100^2}) = N(0.6, 0.0282^2),$$

$$0.99 = P(|Z| \leq 2.58) = P(|\bar{p} - p| \leq 2.58 \times \sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{300}}) \text{이므로}$$

신뢰구간은  $0.6 - 2.58 \times 0.0282 \leq p \leq 0.6 + 2.58 \times 0.0282$ 에서  $(0.5272, 0.6728)$ .

23. ③

$$\mathbb{E}(\bar{X} - \bar{Y}) = \mu_1 - \mu_2, \quad V(\bar{X} - \bar{Y}) = V(\bar{X}) + V(\bar{Y}) = \left(\frac{10}{\sqrt{n}}\right)^2 \text{이므로}$$

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{100}{n}).$$

$$0.95 = P\left[\left|\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{100/n}}\right| \leq 1.96\right] \text{에서}$$

$$\text{신뢰구간의 길이 } 2 \times 1.96 \times \sqrt{100/n} = 4.9, \quad n = 64.$$

\* 두 모집단  $X, Y$ 가 서로 독립이고 각 평균  $\mu_1, \mu_2$ , 각 분산  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$ 이며, 여기서 크기가 각각  $n_1, n_2$ 인

$$\text{표본평균 } \bar{X}, \bar{Y} \text{라 할 때 } \bar{X} - \bar{Y} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}).$$

24. ③

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^1 adx + \int_1^{\infty} be^{1-x} dx = a + b$$

$$\frac{3}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \frac{a}{2} + \int_1^{\infty} bxe^{1-x} dx = \frac{a}{2} + 2b$$

$$\text{따라서 } a = \frac{1}{3}, \quad b = \frac{2}{3} \text{이므로 구하는 값 } \frac{5}{9}.$$

25. ①

㉠ 귀무가설  $H_0: \mu = 141$ , 대립가설  $H_1: \mu > 141$

$$\text{㉡ 검정통계량 } Z = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

㉢ 기각역  $R: Z \geq 1.645$

㉣ 검정통계량의 관측값  $\frac{142.2 - 141}{6/\sqrt{81}} = 1.8 \geq 1.645$ 이므로 유의수준 5%에서 출렁기 운동이 신장 발육에 도움이 된다고 할 수 있다.

26. ④

$f_X(x) = 2x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ),  $f_Y(y) = 2y$  ( $0 \leq y \leq 1$ )에서

$f(x, y) = 4xy$  ( $0 \leq x, y \leq 1$ )이다.

$$P(X^2 \leq Y \leq X) = \int_0^1 \int_{x^2}^x 4xy dy dx = \int_0^1 4x(x^2 - x^4) dx = 2 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}.$$

27. ②

표본비율  $\bar{p}$ , 모비율  $p$ 라 하면  $\bar{p} \sim N(p, \frac{p(1-p)}{n})$ .

$$0.95 = P(|Z| \leq 1.96) = P(|\bar{p} - p| \leq 0.05) = P(|Z| \leq \frac{0.05}{\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}}) \text{에서}$$

$$\sqrt{n} = 20 \times 1.96 \times 0.4, \quad n = 39.2^2 \times 0.4^2 = 245.92.$$

그러므로  $n \geq 246$ 이상이 될 때 조건을 만족한다.

\* 모비율의 구간추정

$$X \sim B(n, p), \quad \text{표본비율 } \bar{p} = \frac{X}{n} \text{일 때,}$$

$$\bar{p} \sim N(p, \frac{p(1-p)}{n}), \quad \text{모비율 } p \text{ } 100(1-\alpha)\% \text{ 신뢰구간}$$

$$\bar{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \leq p \leq \bar{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

$$28. f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5-1} = \frac{1}{4}, & 1 \leq x \leq 5 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(X) = \int_1^5 x \cdot \frac{1}{4} dx = 3, \quad \mathbb{E}(X^2) = \int_1^5 x^2 \cdot \frac{1}{4} dx = \frac{31}{3},$$

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \frac{4}{3}.$$

29.

(1) [46.628, 49.372]

표본평균  $\bar{X} = 48$ , 표준편차  $\sigma = 5.6$ 이므로  $\bar{X} \sim N(48, 0.7^2)$ .

모평균  $m$ 에 대하여  $0.95 = P(|Z| \leq 1.96) = P(|\bar{X} - m| \leq 1.96 \times \frac{5.6}{8})$ 이므로

신뢰구간은 [46.628, 49.372].

(2) [36.235, 47.765]

표본평균  $\bar{Y} = 42$ , 표준편차  $S = 7.5$ , 자유도 8이므로  $\bar{Y} \sim t(8)$ .

모평균  $m$ 에 대하여  $0.95 = P(|t| \leq 2.306) = P(|\bar{Y} - m| \leq 2.306 \times \frac{7.5}{8})$ 이므로

신뢰구간은 [36.235, 47.765].

\* 모평균의 구간추정

① 모분산  $\sigma^2$  알 때,  $\mu (= m)$ 의  $100(1-\alpha)\%$  신뢰구간

$$\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

② 모분산  $\sigma^2$  모를 때,  $\mu (= m)$ 의  $100(1-\alpha)\%$  신뢰구간

$$\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

③ 표본의 크기가 작을 때 ( $n < 30$ )  $100(1-\alpha)\%$  신뢰구간

$$\bar{X} - t_{\alpha/2}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{\alpha/2}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}$$

30. 65.4

응시자의 성적을  $X$ 라 하면  $X \sim N(55, 8^2)$ , 최저 점수를  $k$ 라 하자.

$$0.096 = \frac{480}{5000} = \Pr(X \geq k) = \Pr(Z \geq \frac{k-55}{8}) \text{에서 } \frac{k-55}{8} = 1.3, \quad k = 65.4.$$

31. 남자 성인 지지자를  $X$ , 여자 성인 지지자를  $Y$ 라 하자.

$X \sim B(400, 0.8)$ ,  $X \sim B(400, 0.9)$ ,  $X, Y$ 는 독립이다.

$E(X) = 320$ ,  $V(X) = 8^2$ ,  $E(Y) = 360$ ,  $V(Y) = 6^2$ 이다.

(1) 시행 횟수가 충분히 크므로  $X+Y \sim N(680, 10^2)$ .

$$P(X+Y \geq 700) = P(Z \geq 2) = 0.0228.$$

(2) 시행 횟수가 충분히 크므로  $Y-X \sim N(40, 10^2)$ .

$$\begin{aligned} P(Y-X=25) &= P(Y-X \leq 25) - P(Y-X \leq 24) \\ &= P(Z \leq -1.5) - P(Z \leq -1.6) = 0.0120. \end{aligned}$$

\* 모비율과 표본비율

모비율이  $p$ 이고 표본의 크기  $n$ 이 충분히 클 때, 임의로 추출한 표본  $X_1, X_2, \dots, X_n$ 의 표본비율  $\bar{p}$

$$\bar{p} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \sim N\left(p, \frac{pq}{n}\right)$$

32.

(1)  $0.95 = P(|\bar{X}-m| \leq 1.96 \times \frac{2}{10})$  이므로 신뢰도 95%로  $m$ 의 신뢰구간은

$$10 - 1.96 \times \frac{2}{10} \leq m \leq 10 + 1.96 \times \frac{2}{10} \text{에서 } 9.608 \leq m \leq 10.392.$$

(2)  $P(|\bar{X}-m| \leq \frac{1}{2}) = P(|Z| \leq \frac{\sqrt{n}}{4}) \geq 0.95$ 이려면

$$\frac{\sqrt{n}}{4} \geq 1.96 \text{에서 } n \geq 61.4656 \text{이다. 구하는 } n = 62.$$

33.

하위 영역	배점	예상 정답율(%)	출제근거 (이유)
교직수학 (고등학교 수학, 통계)	5	60	박한식. 교직수학. pp. 139-150

$$\int_0^\infty ke^{-3x}dx = \left[ -\frac{k}{3}e^{-3x} \right]_0^\infty = \frac{k}{3} = 1 \quad \therefore k = 3 \quad \dots \quad 2점$$

(단, 다른 식 없이 확률밀도함수가 되려면  $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = 1$ 이라는 사실을 언급해도 부분점수 가능)

$$E(X) = \int_{-\infty}^\infty xf(x)dx = \int_0^\infty 3xe^{-3x}dx \quad \dots \quad 3점$$

$$= [-xe^{-3x}]_0^\infty - \int_0^\infty (-e^{-3x})dx \quad \dots \quad 4점$$

$$= \int_0^\infty e^{-3x}dx = \left[ -\frac{1}{3}e^{-3x} \right]_0^\infty = \frac{1}{3} \quad \dots \quad 5점$$

34.  $Pr(Z \leq x)$

각각의 확률변수  $X_i$ 는 포아송 분포  $Pois(\lambda)$ 에 따르고,  $X_i$ 들의 표본평균

$$\bar{X} = \frac{S_n}{n} \text{라 하면 } E(\bar{X}) = \frac{1}{n} \cdot n\lambda = \lambda, V(\bar{X}) = \frac{1}{n^2} \cdot n\lambda = \frac{\lambda}{n}.$$

중심극한정리에 의해  $n$ 이 충분히 클 때  $\bar{X} = \frac{S_n}{n} \sim N(\lambda, \frac{\lambda}{n})$ .

이때  $\frac{\frac{S_n}{n} - \lambda}{\sqrt{\lambda}} = \frac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \sim N(0, 1^2)$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Pr\left(\frac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leq x\right) = Pr(Z \leq x) (= \int_{-\infty}^x \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz)$$

\* 포아송분포

일정한 단위 내에서 발생하는 사건의 수에 대응하는 확률변수를 포아송 확률변수라 한다.

$$\textcircled{1} \text{ 확률질량함수 } f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$\textcircled{2} \text{ } M_X(t) = e^{\lambda(e^{xt}-1)}, E(X) = \lambda = V(X)$$

35. ②

두 사건의 합사건의 확률은

$$P(a < X_1 < b \text{ or } c < X_2 < d)$$

$$= P(a < X_1 < b) + P(c < X_2 < d) - P(a < X_1 < b, c < X_2 < d) \\ = \frac{2}{3} + \frac{5}{8} - \frac{2}{3} \times \frac{5}{8} = \frac{7}{8}.$$

36. ②

$$\Pr[X < Y] = \int_0^\infty \int_x^\infty 2e^{-(x+2y)} dy dx = \int_0^\infty e^{-3x} dx = \frac{1}{3}.$$

$$* \Pr(X < Y) = \int_0^\infty \int_0^y f(x, y) dx dy = \frac{1}{3}.$$

37. ①

$0 \leq z$ 인  $z$ 에 대하여  $Z$ 의 누적분포함수  $F(z)$

$$F(z) = \Pr(Z \leq z) = \Pr(X+Y \leq z) = \int_0^z \int_0^{z-x} e^{-(x+y)} dy dx = 1 - e^{-z} - ze^{-z}$$

그러므로 구하는 값  $\Pr(Z \leq 1) = F(1) = 1 - 2e^{-1}$ .

\*  $Z$ 의 pdf  $f(z) = F'(z) = ze^{-z}$  ( $z \geq 0$ ).

\* 다른 풀이

$$\begin{aligned} \Pr(Z \leq 1) &= \Pr(X+Y \leq 1) = \int_0^1 \int_0^{1-x} f(x, y) dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} e^{-(x+y)} dy dx = 1 - \frac{2}{e}. \end{aligned}$$

38. ③

귀무가설  $H_0: \mu = 5$ , 대립가설  $H_1: \mu \neq 5$

$$\text{검정통계량 } Z = \frac{6.085 - 5}{0.5} = 2.17$$

기각역  $R : |Z| \geq z_{\alpha/2}$ 이므로

귀무가설을 기각하기 위해서는  $2.17 \geq z_{\alpha/2}$ 이어야 한다.  
이때 최소의 유의수준은  $\alpha/2 = 0.015$ 에서  $\alpha = 3\%$ .

39. ③  $f(x) = 3x^2$

$0 \leq x \leq 1$ 인  $x$ 에 대하여  $X$ 의 누적분포함수  $F(x)$ ,

$$F(x) = \Pr(X \leq x)$$

$$= \Pr(\max\{x_1, x_2, x_3\} \leq x)$$

$$= \Pr(x_1 \leq x, x_2 \leq x, x_3 \leq x)$$

$$= \Pr(x_1 \leq x) \Pr(x_2 \leq x) \Pr(x_3 \leq x)$$

$$= \int_0^x 1 dx_1 \times \int_0^x 1 dx_2 \times \int_0^x 1 dx_3$$

$$= x^3.$$

그러므로  $f(x) = F'(x) = 3x^2$  ( $0 \leq x \leq 1$ ).

\* 균등분포

임의의 실수 구간  $[a, b]$ 에서 나타날 가능성에 동일한 확률변수를 균등확률변수라 한다.

$$\textcircled{1} \text{ 확률밀도함수 } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \text{ } F(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

$$\textcircled{3} \text{ } M_X(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}$$

$$\textcircled{4} \text{ } E(X) = \frac{a+b}{2}, V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

## [복소해석학]

### <해석함수>

1.  $6\pi i, 5$

$f(z)$ 의 영점  $-1+i(5), -1-i(4), 9개$ , 즉  $0(6), 1-4i(3), 9-2i(5), 14개$ .

편각원리에 따라  $\int_{C(r)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \begin{cases} 12\pi i, & r=1 \\ 6\pi i, & r=2, 3, 4 \\ 0, & r=5, 6, 7, 8, 9 \\ 10\pi i, & r=10, 11, \dots \end{cases}$  이므로

$\int_{C(2)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 6\pi i, \int_{C(r)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$ 이 되는  $r$ 은 5개 있다.

2.

$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  라 하면  $b = -d, ai-c = b(i-1), a-3c = -2b$ 이므로

$a=b=c=-d$ . 따라서  $T(z) = \frac{z+1}{z-1}$ .

선형분수변환은 원을 직선이나 원으로 사상한다.

$T(i) = -i, T(-1) = 0, T(-i) = i$ 이므로  $W$ 는 허수축이다.

구하는 거리의 최솟값 1.

3.

$u(x, y) = e^{-x} \cos y$ 라 하자.

$f$ 는 정함수이므로 임의의  $z = x + iy$ 에 대하여 코시리만방정식을 만족.

$v(x, y) = -e^{-x} \sin y + C, f(0) = 1$ 이므로  $v = -e^{-x} \sin y$ .

$f(x+iy) = e^{-x} [\cos(-y) + i \sin(-y)] = e^{-x} e^{-iy} = e^{-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!}$ .

$z \neq 0$ 일 때,  $f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{z}\right)^n \frac{1}{n!}$ 이므로 유수정리에 따라  $\int_C f\left(\frac{1}{z}\right) dz = -2\pi i$ .

4.

$f(z)$ 는 정함수이므로 코시-리만 방정식을 만족하고  $u, v$ 는 연속이다.

$\overline{f(z)} = u(x, -y) - iv(x, -y), u(x, -y), -v(x, -y)$ 는 연속이다.

$\frac{\partial}{\partial x} u(x, -y) = \frac{\partial}{\partial y} \{-v(x, -y)\}, \frac{\partial}{\partial y} u(x, -y) = -\frac{\partial}{\partial x} \{-v(x, -y)\}$ 이므로

$\overline{f(z)}$ 는 정함수이다.

(다른 설명)

$f(z) = \sum a_n z^n, \overline{f(z)} = \sum \overline{a_n} \overline{z^n}$ 이므로  $\overline{f(z)}$ 는 정함수이다.

가정에 의해  $|f'(z)|^2 > |\overline{f(z)}|^2 \geq 0, 0 < \left| \frac{\overline{f(z)}}{f'(z)} \right|^2 < 1, \left| \frac{\overline{f(z)}}{f'(z)} \right| < 1$ .

$g(z) = \frac{\overline{f(z)}}{f'(z)}$ 는 정함수이므로 리우빌 정리에 따라  $g(z)$ 는 상수함수.

$g(1+i) = g(i) = \frac{1}{\pi}$ 이므로 구하는 값  $\pi$ .

5. 적분값  $10\pi$ , 최솟값  $-5$ .

$a = -1$ 일 때,  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ 이므로  $u$ 는  $\mathbb{R}^2$ 에서 조화함수이다.

따라서  $u$ 의  $\mathbb{C}$ 에서의 조화공액  $v$ 가 존재한다.

(정함수  $f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ 가 존재한다.)

$f = u + iv$ 는 정함수이므로 가우스 평균값 정리에 따라

$$\int_0^{2\pi} u(1+2\cos\theta, 2\sin\theta) d\theta = \operatorname{Re} \left[ \int_0^{2\pi} f(1+2e^{i\theta}) d\theta \right] = \operatorname{Re} [2\pi f(1)] = 2\pi u(1, 0)$$

$= 10\pi$ .

$a = 2$ 일 때,  $u(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 4x - 6y$ .

$\nabla u(x, y) = (2x-2y+4, -2x+4y-6) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (-1, 1)$

$$D(-1, 1) = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4 > 0, u_{xx}(-1, 1) = 2 > 0$$

이제 도함수 판정법에 따라  $u(x, y)$ 의 최솟값  $u(-1, 1) = -5$ .

(다른 설명)

$a = 2$ 이면  $u(x, y) = (x-y+2)^2 + (y-1)^2 - 5 \geq -5$ 이므로

$x = -1, y = 1$ 일 때 최솟값  $-5$ 를 갖는다.

6.  $a = 3, b = 4, f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 8 + 9i$ .

$f(z)$ 가 정함수이면  $u(x, y) = e^{-3y} \cos(ax) + bx^2 - 4y^2$ 는 조화함수이다.

임의의 실수  $x, y$ 에 대하여

$$0 = u_{xx} + u_{yy} = 2(b-4) + (9-a^2)e^{-3y} \cos(ax), a=3, b=4.$$

$f'(z) = f_x = u_x + iv_x = u_x - iu_y, f''(z) = f'_{xx} = u_{xx} - iu_{yx}$ 이므로

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 8 + 9i.$$

7.  $\sqrt{14}$ .

$\frac{1}{f(z)+z^2}$ 은 정함수이고 유계이므로 리우빌정리에 의해

$f(z) + z^2 = a + bi, a, b$ 는 실수라 할 수 있다.

(가)에 의해  $\sqrt{a^2 + b^2} \geq 3$ , (나)에 의해  $\sqrt{(a-4)^2 + b^2} = 3$ 이므로

$|f(i)| = \sqrt{(a+1)^2 + b^2}$  (반지름의 길이)가 최소가 될 때는

$\sqrt{a^2 + b^2} = 3, \sqrt{(a-4)^2 + b^2} = 3$ 이 될 때이다.

$a^2 + b^2 = 9, (a-4)^2 + b^2 = 9$ 에서  $a = 2, b = \sqrt{5}$ .

이때  $|f(i)| = \sqrt{14}$ .

8.  $f(0) = 3, u(x, y) = 3 - e^{-y}(x \sin x + y \cos x)$ .

$f(0) = u(0, 0) + iv(0, 0), v(0, 0) = 0$ 이므로  $f(0) \in \mathbb{R}$ .

주어진 정리에 의해

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u(\cos t, \sin t) + iv(\cos t, \sin t)] dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\cos t, \sin t) dt + \frac{1}{2\pi} \cdot i \cdot \int_0^{2\pi} v(\cos t, \sin t) dt.$$

선적분의 정의로부터

$$6\pi = \int_C -yu(x, y) dx + xu(x, y) dy$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\sin t) \cdot u(\cos t, \sin t) (-\sin t dt) + \cos t \cdot u(\cos t, \sin t) (\cos t dt)$$

$$= \int_0^{2\pi} u(\cos t, \sin t) dt$$

$$= 2\pi f(0)$$

이므로  $f(0) = 3$ .

코시-리만 방정식  $u_x = v_y$ 에서

$$u = -e^{-y}(x \sin x + y \cos x) + C(C \text{ 상수}), u(0, 0) = 3, C = 3.$$

그러므로  $u(x, y) = 3 - e^{-y}(x \sin x + y \cos x)$ .

9.  $T(2i) = -\frac{2}{3}$

$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  라 두자. 가정에 의해  $d = 2b, 2i(a+b) = c+d, c = -2a$ 에서

$i(a+b) = -a+b, a = -ib$ .

$$\text{그러므로 } T(2i) = \frac{-4ai+2b}{2ai+b} = \frac{b(-4+2)}{b(2+1)} = -\frac{2}{3}.$$

10.  $f'(0) = \frac{1}{e-1}$ .

$e^z - 1 = 0 \Leftrightarrow z = 2n\pi i$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ),  $g(z) = \frac{f(z)}{e^z - 1}$  라 두자.

$g$ 는  $0 < |z - 2n\pi i| < 1$ 에서 해석적이고 유계이므로 <정리>를 만족하는 함수  $h$  있다.

$h$ 는 정함수이고  $|h(z)| \leq 1$ 이므로 리우빌정리에 의해  $h$ 는 상수함수.

$$f(1) = 1$$
이므로  $f(z) = \frac{1}{e-1}(e^z - 1)$ , 구하는 값  $f'(0) = \frac{1}{e-1}$ .

11.  $n=1$ ,  $f'(1)=1-3i$ .

$r>0$ 이 존재해서  $f$ 는  $D : |z-1| < r$ 에서 해석적이다.

따라서  $x^n y + xy^n + x + y$ 는  $D$ 에서 조화함수이다.

임의의  $x+iy \in D$ 에 대하여  $0 = n(n-1)x^{n-2}y + n(n-1)xy^{n-2}$  되는 자연수  $n=1$ 이다.

$$f'(z) = (x+y+2xy)_x + i[-(x+y+2xy)_y] = (1+2y) - i(1+2x)$$

$$f'(1+0 \cdot i) = 1-3i.$$

12.

$\lim_{z \rightarrow 0} zf(z) = 0$ 이므로 리만정리에 의해  $z=0$ 는  $f$ 의 제거가능특이점이다.

$0 < r < 1$ 인 실수  $r$ 에 대하여  $f$ 는  $|z| \leq r$ 에서 해석적이고

$$|z|=r\text{일 때 } |f(z)| \leq 1 + \ln\left(\frac{1+r}{2r}\right)$$
이므로 최대절댓값 정리에 의해

$$|z| \leq r\text{일 때 } |f(z)| \leq 1 + \ln\left(\frac{1+r}{2r}\right).$$

$r$ 은 임의이므로  $|z| < 1$ 에서  $|f(z)| \leq 1$ . ( $r \rightarrow 1$ 로 생각해도 된다.)

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$
이므로  $f$ 는  $D$ 에서 상수함수, 구하는 값 1.

13. ②

$f$ 는 정함수이므로 코시리만 방정식에 의해 임의의  $x+iy \in \mathbb{C}$ 에 대하여

$$(x_3 - 2axy - bxy^2)_x = (2x^2 - ay^2 + bx^2y - y^3)_y,$$

$$(x_3 - 2axy - bxy^2)_y = -(2x^2 - ay^2 + bx^2y - y^3)_x$$
이므로

$a=2$ ,  $b=3$ . 그러므로 구하는 값 13. (조화함수로 해결가능)

14. ⑤

ㄱ. 테일러급수전개가능  $\Leftrightarrow$  해석적

ㄴ. 모레라 정리(모든 단순폐곡선  $C$ 에서 연속+ $C$ 를 따라 선적분 0)

ㄷ. 코시 적분공식의 결과

15. ④

$f$ 는 정함수이므로 코시-리만방정식을 만족하며  $u$ ,  $v$ 는 조화함수이다.

따라서 다음 등식 성립  $u_x = v_y$ ,  $u_{xx} + u_{yy} = 0 = v_{xx} + v_{yy}$ .

(가)에 의해  $u_x = -v_y$ 이므로  $u_x = v_y = 0$ .

즉,  $u$ 는  $y$ 에 관한 함수,  $v$ 는  $x$ 에 관한 함수.

그리고  $u'' = u_{yy} = 0 = v_{xx} = v''$ 이다.

따라서  $u$ 는  $y$ 에 관한 일차 이하의 다항함수,

$v$ 는  $x$ 에 관한 일차 이하의 다항함수.

$u = ay + b$ ,  $v = cx + d$ 라 놓으면 (나)에 의해  $a=1$ ,  $b=0$ ,  $c=-1$ ,  $d=1$ 이다.

따라서  $f(x+iy) = y+i(-x+1)$ . 구하는 값  $f(-1+i) = 1+2i$ .

16. ④

ㄱ.  $x=0$ 일 때 0,  $x \neq 0$ 일 때  $e^{-\frac{1}{x^2}}$ 으로 정의한 함수는  $\mathbb{R}$ 에서 미분가능하며 주어진 조건을 만족하지만 상수함수가 아니다.

ㄴ. 테일러 급수 전개,  $f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_2^{(n)}(0)}{n!} z^n = 0$ .

ㄷ.  $x=0$ 일 때 0,  $x \neq 0$ 일 때  $x^2 \sin \frac{\pi}{x}$ 로 정의한 함수는  $\mathbb{R}$ 에서 미분가능하며 주어진 조건을 만족하지만 상수함수가 아니다.

ㄹ. 상수수열이 아닌 수열  $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 는  $0 \in \mathbb{C}$ 으로 수렴하고  $f_4$ 와,  $g \equiv 0$ 는 정함수이다. 모든  $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여  $f_4\left(\frac{1}{n}\right) = g\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ 이므로 항등정리에 의해  $\mathbb{C}$ 에서  $f_4(z) = 0$ .

17. ⑤

<1단계>

함수  $f$ 는  $D$ 에서 해석적이므로 (테일러)급수 전개가능

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \\ &= z^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^{n-2} \\ &= z^2 \cdot g(z) \quad (g(0) \neq 0) \text{이다.} \end{aligned}$$

이때  $g$ 는  $D$ 에서 해석적이다. ( $\frac{1}{z^n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) 꼴의 항 없다.)

<2단계>

$0 < r < 2$ 인  $r$ 에 대하여  $g$ 는  $|z| \leq r$ 에서 해석적이고  $|z|=r$  위에서

$$|g(z)| \leq \frac{|f(z)|}{|z|^2} = \frac{3}{r^2}$$
이다. 최대절댓값정리에 의해  $|z| \leq r$ 에서  $|g(z)| \leq \frac{3}{r^2}$ .

$r$ 은 임의이므로  $D : |z| < 2$ 에서  $|g(z)| \leq \frac{3}{2^2} = \frac{3}{4}$ .

<3단계>

$$\frac{i}{12} = f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 g\left(\frac{1}{3}\right) \text{에서 } \left|g\left(\frac{1}{3}\right)\right| = \left|\frac{9i}{12}\right| = \frac{3}{4}.$$

$D$ 의 내부에서  $g$ 는 최댓값을 가지므로 최대절댓값 정리에 의해

$g$ 는  $D$ 에서 상수함수이다. 따라서  $f(z) = g\left(\frac{1}{3}\right) \cdot z^2 = \frac{3i}{4}z^2$ .

그러므로 구하는 값  $f\left(\frac{2i}{3}\right) = -\frac{i}{3}$ .

18. ②

$$g(z) = \frac{f(z)}{ze^z}$$
는  $0 < |z|$ 에서 해석적이고 유계이다.

따라서 리만 정리에 의해  $g$ 는  $\mathbb{C}$ 에서 해석적인 함수  $g^*$ 로 확장된다.

$z \in \mathbb{C}$ 에 대하여  $|g^*(z)| \leq \max\{2, g^*(0)\}$ .

리우빌 정리에 의해  $g^*$ 은 상수함수.

따라서  $f(z) = C \cdot ze^z$ 라 할 때  $f'(1) = 1$ 에서  $C = \frac{1}{2e}$ .

그러므로 구하는 값  $f(1) = \frac{1}{2}$ .

\* 다른 풀이

$R > 1$ 에 대하여  $g(z) = \frac{f(z)}{e^z}$ 는  $|z| \leq R$ 에서 해석적,

$|z|=R$  위에서  $|g(z)| \leq 2R$ 으로 코시부등식에 의해

$$|g^{(n)}(z)| \leq \frac{n! \cdot 2R}{R^n} = \frac{2n!}{R^{n-1}} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \text{이다.}$$

$g$ 는 정함수이므로  $n-1 > 0$  즉,  $n \geq 2$ 에서  $R \rightarrow \infty$ 일 때도 부등식이 성립.

따라서  $g^{(n)}(0) = 0$  ( $n \geq 2$ )으로  $g$ 의 급수전개에서

$$\begin{aligned} g(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} z^n = g(0) + g'(0)z \\ &= f(0) + (f'(0) - f(0))z \\ &= f'(0) \cdot z = \frac{f(z)}{e^z} \end{aligned}$$

$\therefore f(z) = f'(0) \cdot ze^z$ ,  $f'(1) = 1$ 에서  $f'(0) = \frac{1}{2e}$ .

그러므로  $f(1) = f'(0) \cdot e^1 = \frac{1}{2}$ .

\* 다른 풀이

$\left| \frac{f(z)}{e^z} \right| \leq |2z|$ 으로 일반화된 리우빌정리에 따라

$\frac{f(z)}{e^z}$ 는 1차 이하 다항함수,  $f(z) = (az+b)e^z$ 인 복소수  $a$ ,  $b$  있다.

$|f(0)| \leq 0$ 으로  $f(0) = b = 0$ ,  $f'(1) = 1 = 2ae$ ,  $a = \frac{1}{2e}$ .

$$f(z) = \frac{z}{2} e^{z-1}, \quad f(1) = \frac{1}{2}.$$

## 19.

(가) 최대 · 최소의 정리에 의해 임의의  $x \in [a, b]$ 에 대하여

$$f(x_m)g(x) \leq f(x)g(x) \leq f(x_M)g(x)$$

되는  $x_m, x_M \in [a, b]$  있다.

$f, g$ 는 유계폐구간  $I$ 에서 연속이므로 리만적분 가능하고,

$$f(x_m) \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq f(x_M).$$

중간값 정리에 따라  $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx$  되는  $c \in I$  있다.

(나)  $z = z_0 + re^{i\theta}$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ )라 하면 코시의 적분 공식에 의해

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) \cdot i d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta. \end{aligned}$$

(가)와 (나)의 의미 비교

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}, \quad f(z_0) = \frac{\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta}{\int_0^{2\pi} 1 d\theta}$$

① (가)에서  $x=c$ 의 존재성은 알 수 있으나  $c$ 를 정할 수 없고,  $f(c)$ 의 값을 알기 위해서는  $I$ 에서  $f(x)$ 의 합수값을 알아야 한다.

② (나)에서  $z_0$ 는 적분경로  $z = z_0 + re^{i\theta}$ 의 중심이므로  $z_0$ 를 알 수 있다.

(다)  $f(z)$ 는 유계이므로  $|f(z)| \leq M$ 인 실수  $M > 0$  있다.  $R > 0$ 에 대하여

$$f \text{는 } |z| \leq R \text{에서 해석적이므로 코시의 적분 공식에 의해} \\ |f^{(n)}(0)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot 2\pi R \cdot \frac{M}{R^{n+1}} = \frac{n!M}{R^n}.$$

$f$ 는 정함수이므로  $R \rightarrow \infty$ 일 때도 부등식이 성립.

$$(코시부등식에 따라) |f^{(n)}(0)| \leq \frac{n! \cdot M}{R^n}.$$

따라서  $f^{(n)}(0) = 0$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

$$\text{그러므로 } f \text{의 테일러 급수전개 } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = f(0) \text{이므로}$$

$f$ 는 상수함수이다.

(다)와 관련된 명제는 성립하지 않는다.

$f(x) = \tan^{-1}x$ 는  $\mathbb{R}$ 에서  $C^\infty$ 급 함수이고,

임의의  $x \in \mathbb{R}$ 에 대하여  $|f(x)| \leq \frac{\pi}{2}$ 이지만  $f(x)$ 는 상수함수가 아니다.

\* 다른 반례

$$\mathbb{R} \text{에서 } C^\infty \text{급 함수 } f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \text{에 대하여} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = e^0 = 1, \quad x \neq 0 \text{일 때 } f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} \text{이므로}$$

$x < 0$ 이면 감소,  $x > 0$ 이면 증가하므로  $0 \leq f(x) < 1$ , 즉  $f$ 는 유계.

그러나  $f(x)$ 는 상수함수가 아니다.

## 20. ②

ㄱ.  $f(z)$ 는  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -3]$ 에서 해석적이므로  $D$ 에서 해석적이다.

ㄴ.  $f$ 가 정함수이면  $f'$ 도 정함수이다.

$f' = u + iv$ 로 놓을 때  $u = xy^3, v = 0$ 이며 코시-리만방정식에 의해

$u_x = y^3 = 0 = v_y$ 이므로  $y \neq 0$ 일 때 성립하지 않는다.

이는  $\mathbb{C}$ 에서 해석적인 함수  $f$ 가 있다고 가정한 데 모순이다.

\* 다른 설명:  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 라 할 때

$f$ 가 정함수라 가정하면  $f'(z) = u_x + iv_x$ 이므로  $\mathbb{C}$ 에서  $u_x = xy^3, v_x = 0$ .

코시-리만방정식  $u_x = xy^3 = v_y, u_y = -v_x = 0$ 에서

$$v = \frac{1}{4}xy^4 + C(x) \quad (C(x) \text{는 } x \text{에 관한 함수}),$$

$$v_x = \frac{1}{4}y^4 + C'(x) = 0 \quad (x + iy \in \mathbb{C}) \text{이므로 모순이다.}$$

따라서 조건을 만족하는 정함수 없다.

ㄷ. 임의의 폐곡선  $C$ 일 때 조건을 만족해야  $C$ 의 내부에서 해석적이 된다.  
(Morera 정리)

## 21.

$f(z) = z - 2, g(z) = e^{-z}$ 는  $|z - 2| \leq 2$ 에서 해석적,

$|z - 2| = 2$  위에서  $|g(z)| = e^{-\operatorname{Re}(z)} \leq e^0 = 1 < 2 = |f(z)|$ 이므로

Rouche 정리에 의해  $f(z) + g(z)$ 의  $|z - 2| < 2$ 에서의 영점의 수는  $f(z)$ 의  $|z - 2| < 2$ 에서의 영점의 수 1과 같다.

한편,  $h(x) = x - 2 + e^{-x}$ 는  $[0, 4]$ 에서 연속이고

$$h(0) = -1 < 0, \quad h(4) = 2 + e^{-4} > 0 \text{이므로}$$

중간값 정리에 의해  $h(x) = 0$ 는  $(0, 4)$ 에 실근 있다.

그러므로 주어진 복소방정식은 주어진 범위에서 단 하나의 실근을 갖는다.

22.  $2+i$ 

$D$ 에서  $|f(z)| \leq \sqrt{5}$ ,  $D$  내부의 점  $z=0$ 에서  $|f(0)| = \sqrt{5}$ , 이므로 최대절댓값 정리에 따라  $f$ 는  $D$ 에서 상수함수.

$$f(1) + f'(1) = 2 + i.$$

23.  $z = x + iy \in D$ 에 대하여  $\operatorname{Re}f(z) = u(x, y), \operatorname{Im}f(z) = v(x, y)$ 라 하자.

$f'(z) = u_x + i(2u_x) = -if_y = 2u_y - iu_y$ 에서  $u_x = 2u_y, 2u_x = -u_y$ 이므로  $u_x = u_y = 0$  즉,  $u$ 는  $D$ 에서 상수함수이다.

즉,  $f'(z) = u_x + i(2u_x) = 0$  ( $z \in D$ )이다.

그러므로  $f$ 는  $D$ 에서 상수함수이다.

## 24.

$R > 1$ 에 대하여  $f$ 는  $|z| \leq R$ 에서 해석적이고  $|z| = R$  위에서  $|f(z)| \leq R$ .

Cauchy 부등식에 의해  $|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!R}{R^n} = \frac{n!}{R^{n-1}}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )

$f$ 는  $\mathbb{C}$ 에서 해석적이므로  $R \rightarrow \infty$ 일 때도 부등식이 성립하므로  $n \geq 2$ 이면  $f^{(n)}(0) = 0$ .

따라서  $f$ 의 급수전개  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = f(0) + f'(0)z$ 이며

가정에 의해  $f(0) = 0, f'(1) = 1$ 이므로  $f(z) = z$ .

\* 다른 풀이

$$g(z) = \frac{f(z)}{z} \text{라 하면}$$

$g$ 는  $0 < |z|(\mathbb{C} - \{0\})$ 에서 해석적이고,  $|g| \leq 1$ 이므로 유계이다.

리만정리에 의해  $g$ 는  $\mathbb{C}$ 에서 해석적인 함수  $g^*$ 로 확장된다.

$g^*(0) = \alpha$ 라 할 때  $M = \max\{\alpha, 1\}$ 라 하면

임의의  $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여  $|g^*(z)| \leq M$ 이므로

리우빌 정리에 의해  $g^*$ 은 상수함수이다.

$$g^*(1) = 1 \text{이므로 } g^* \equiv 1 \text{ 즉, } f(z) = z \text{이다. } (g^*(0) = \lim_{z \rightarrow 0} g(z) = f'(0) = 1)$$

\* 다른 풀이

일반화된 리우빌 정리에 의해  $f$ 는 1차 이하의 다항식.

따라서  $f(z) = az + b$ 이고 가정에 의해  $f(z) = z$ .

## 25. \* 출제오류

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \infty \neq 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x).$$

$f$ 는  $x=0$ 에서 불연속이므로 미분가능하지도 않으며,

$n$ 번 미분가능하지도 않다.

그러므로 테일러급수도 존재하지 않으며 (1)의 결과를 근거로 실함수와 복소함수의 미분가능성이 갖는 특징의 차이도 무엇인지 알 수 없다.

\*  $x=0$ 일 때 0,  $x \neq 0$ 일 때  $e^{-\frac{1}{x^2}}$ 으로 정의한 함수  $g(x)$ 에 대하여  $g^{(n)}(0)=0$ 이며 테일러급수 0이다.

26.

$$|f(z)| = \sqrt{[\operatorname{Re}f(z)]^2 + [\operatorname{Im}f(z)]^2} > \sqrt{1 + [\operatorname{Im}f(z)]^2} \geq 1 \quad (z \in \mathbb{C})$$

$\frac{1}{|f(z)|} \leq 1$ 이고  $\frac{1}{f(z)}$ 는 정함수이므로 리우빌 정리에 의해 상수함수이다.

따라서  $f(z)$ 도 상수함수이다.

\* 다른 설명:  $g = e^f$ ,  $g \neq 0$ ,  $\left| \frac{1}{g} \right| = e^{-\operatorname{Re}f(z)} < 1$ ,  $g$ :상수이므로  $f$ :상수.

27.  $f(1+i) = i$

$A = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 2, 0 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 1\}$ 은  $\mathbb{C}$ 에서 유계폐집합이다.

$f$ 는 연속이므로  $f(A)$ 는  $\mathbb{C}$ 에서 유계폐집합이다.

가정에 의해 임의의  $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여  $f(z) = f(z') \in f(A)$ 인  $z' \in A$  있다.

따라서  $f(A) = f(\mathbb{C})$  즉,  $f$ 는 유계이다.

그러므로 리우빌 정리에 의해  $f$ 는 상수함수이다.

구하는 값  $f(1+i) = f(0) = i$ .

28.  $v = -\ln|z| + C$  ( $C$ 는 상수), 조화공액을  $v$ 라 하자.

$z = re^{i\theta}$  ( $-\pi < \theta < \pi$ )라 하면  $u = \operatorname{Arg} z = \theta$ 이다.

코시-리만 방정식에 의해  $u_r = 0 = \frac{1}{r}v_\theta$ 에서  $v$ 는  $r$ 에 관한 함수이고,

$$v_r = -\frac{1}{r}u_\theta = -\frac{1}{r} \text{에서 } v = -\ln r + C \quad (C: \text{복소상수})$$

이때  $r = |z|$ 이므로 조화함수  $u$ 의 조화공액  $v = -\ln|z| + C$  ( $C$ : 상수)

\* 다른 설명

조화공액  $v$ 라 하자.  $z = x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ )라 하면  $\tan(\operatorname{Arg} z) = \frac{y}{x}$ 이므로

$$\operatorname{Arg} z = u = \tan^{-1} \frac{y}{x}. \text{ 코시-리만 방정식에 의해}$$

$$u_x = \frac{-y}{x^2 + y^2} = v_y, \quad u_y = \frac{x}{x^2 + y^2} = -v_x.$$

$$v_y \text{를 } y \text{에 관하여 적분하면 } v = -\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + C(x),$$

$$\text{이를 } x \text{에 관하여 미분하면 } v_x = -\frac{x}{x^2 + y^2} + C'(x).$$

따라서  $C'(x) = 0$ ,  $C(x) = C$  (상수)이다.

$$\text{그러므로 } v = -\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + C = -\ln|z| + C.$$

29. ④

$$z = x + i(\tan \theta x) \text{와 원이 접하면 } 6 = \frac{10}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} \text{에서 } \cos \theta = \pm \frac{3}{5}$$

$$\cos \theta_1 = \frac{3}{5}, \quad \cos \theta_2 = -\frac{3}{5} \text{인 } \theta_1, \theta_2 \text{에 대하여 } 0 < \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 < \pi \text{이다.}$$

$$\text{한편 } f(\theta) = 8\sin \theta + 6\cos \theta, \quad f'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \tan \theta = \frac{4}{3}$$

$$\tan \theta' = \frac{4}{3} \text{ 되는 } \theta_1 \leq \theta' \leq \theta_2 \text{에서 } f(\theta') = 10,$$

$$f(\theta_1) = 10, \quad f(\theta_2) = \frac{14}{5} \text{이므로 구하는 값 } 28.$$

30. ①

$w$ 를 18번 곱하면 한 바퀴,  $w^{18} = 1$  (9번 곱하면 반 바퀴,  $w^9 = -1$ )

$$w = e^{i(20^\circ)} = e^{\frac{\pi}{18}i}, \quad \frac{1}{w} = w^{-1} = e^{-\frac{\pi}{18}i} = \bar{w} \quad (w\bar{w} = |w|^2 = 1).$$

$$S = w + 2w^2 + 3w^3 + \dots + 18w^{18},$$

$$wS = w^2 + 2w^3 + \dots + 17w^{18} + 18w^{19} \text{에서 } S = \frac{-18w}{1-w}.$$

$$\frac{1}{|S|} = \frac{|1-w|}{18|w|} = \frac{1}{18}|w^{-1}-1| = \frac{1}{18}|(\cos 20^\circ - 1) - i \sin 20^\circ|$$

$$= \frac{1}{18} \sqrt{(\cos 20^\circ - 1)^2 + \sin^2 20^\circ} = \frac{1}{18} \sqrt{2 - 2\cos 20^\circ}$$

$$= \frac{1}{18} \cdot (2\sin 10^\circ) = \frac{1}{9} \sin 10^\circ.$$

31. ④

$0 < |z| < 1$ 인  $z \in \mathbb{C}$ 에 대하여  $0 < \dots < |z|^2 < |z| < 1$ 이다.

선분들의 길이의 합은  $|z-z^2| + |z^2-z^3| + |z^3-z^4| + \dots = \frac{|z-z^2|}{1-|z|}$ .

32. ②  $\pi$

$$z^n = 1 = e^{2k\pi i} \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{에서 } z = e^{\frac{2k\pi i}{n}} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{인 } \theta = \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

$$S_n = \frac{2\pi}{n} (0 + 1 + \dots + (n-1)) = (n-1)\pi \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \pi.$$

## 〈비해석함수〉

1.

$$u(x, y) = \frac{x+ay}{x^2+y^2} + x^2 + by^2, \quad v(x, y) = \frac{cy}{x^2+y^2} + dxy \text{라 하자.}$$

코시-리만 방정식  $u_x = v_y, u_y = -v_x$  를 풀면  $a=0, b=-1, c=-1, d=2$ .

$$f(z) = \frac{x-iy}{x^2+y^2} + (x^2-y^2+i2xy) = \frac{\bar{z}}{|z|^2} + z^2 = \frac{\bar{z}}{zz} + z^2 = \frac{1}{z} + z^2 \text{이므로}$$

$$e^z f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n} \left( \frac{1}{z} + z^2 \right), \quad a_{-1} = 1 + \frac{1}{3!} = \frac{7}{6}.$$

2.

$4\pi i$

$$z = e^{it}, \quad dz = ie^{it}dt, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$\bar{z} = e^{-it}, \quad d\bar{z} = -ie^{-it}dt.$$

$$\int_C \bar{z} dz - \frac{1}{z} d\bar{z} = \int_0^{2\pi} i + i dt = 4\pi i.$$

3.

$|z|=2$  일 때  $|z^3|=8 > 6 \geq |-z-4|$  이므로 주어진 <정리>에 의해  $z^3-z-4=0$  의 해는  $|z|<2$  에서만 존재한다.

$f(z) = \frac{1}{(z-3)(z^3-z-4)}$  라 하면 유수 정리에 따라

$$\int_{|z|=4} f(z) dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = 0.$$

$$= \int_C f(z) dz = \int_{|z-3|=\frac{1}{2}} f(z) dz \text{이므로}$$

$$\int_C f(z) dz = \int_{|z|=4} f(z) dz - \int_{|z-3|=\frac{1}{2}} f(z) dz$$

$$= 2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f(z), 3) = -\frac{\pi i}{10}.$$

(다른 풀이)

$|z|=2$  일 때  $|z^3|=8 > 6 \geq |-z-4|$  이므로 주어진 정리에 의해

$z^3-z-4=0$ 의 영역  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z|<2\}$ 의 근의 개수 3.

유수 정리에 따라

$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{(z-3)(z^3-z-4)} dz = - \oint_{|w|=\frac{1}{2}} \frac{1}{(\frac{1}{w}-3)(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{w}-4)} \cdot \left(-\frac{1}{w^2}\right) dw$$

$$= \int_{|w|=\frac{1}{2}} \frac{w^2}{3(w-\frac{1}{3})(4w^3+w^2-1)} dw$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{3^2 \cdot 3 \cdot \left(\frac{4}{27} + \frac{1}{9} - 1\right)}$$

$$= -\frac{\pi i}{10}.$$

4.  $C$  는 시계반대방향 단순폐곡선이므로 그린 정리에 따라

$$\int_C \bar{z} dz = 2i \times (C \text{ 내부의 넓이}) = 2i \cdot 4\pi = 8\pi i. \quad (z = x+iy)$$

$$\text{유수 정리에 따라 } \int_C \frac{4e^{-iz}}{(z+6i)(z-2i)} dz = 2\pi i \times \frac{e^2}{2i} = \pi e^2.$$

그러므로 구하는 값  $\pi e^2 + 8\pi i$ .

(다른 풀이)

$$C : |z-i|=2 \text{ 위에서 } 4=|z-i|^2 = (z-i)(\bar{z}-i), \quad \bar{z} = \frac{4}{z-i} - i,$$

유수 정리에 따라

$$\int_C \left\{ \frac{4e^{-iz}}{(z+6i)(z-2i)} + \frac{1}{z} \right\} dz = \int_C \frac{4e^{-iz}}{(z+6i)(z-2i)} + \frac{4}{z-i} - i dz$$

$$= 2\pi i \cdot \left( \frac{4e^2}{8i} + 4 \right) = \pi e^2 + 8\pi i.$$

5.  $\frac{5}{4}, \frac{3}{4}$

$z=2e^{it}=2(\cos t + i \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$  라 하면  $f = \frac{5}{4}c + \frac{3}{4}is$  이므로

$$|f(z)|^2 = f(z)\overline{f(z)} = \frac{9}{16} + \cos^2 t \text{ 이므로 } |f(z)| \text{의 최댓값 } \frac{5}{4}, \text{ 최솟값 } \frac{3}{4}.$$

6.  $g(z) = \frac{z^3 f'(z)}{f(z)}$  와  $C$  내부의 특이점  $z=1, e^{\frac{\pi i}{3}}, e^{\frac{5\pi i}{3}}$  (단순특이점).  $g(z)$ 는 특이점을 제외한  $C$ 와  $C$  내부에서 해석적이다.

유수정리에 따라  $\int_C g(z) dz = 2\pi i \cdot \left( 1^3 + e^{\frac{\pi i}{3}} \cdot 3 + e^{\frac{5\pi i}{3}} \cdot 3 \right) = -2\pi i$ .

\* 다른 풀이

일반화된 편각 원리에 따라  $\int_C \frac{z^3 f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i (1^3 + e^{\pi i} + e^{5\pi i}) = -2\pi i$ .

7.  $x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x^3, \quad \frac{10}{3}\pi i$

$(e^x - 1) \cdot (1-x)^{-1}$  곱의 미분법으로 직접 계산하면

$$f(0)=0, \quad f'(0)=1, \quad f''(0)=3, \quad f^{(3)}(0)=10 \text{ 이므로}$$

$$f(x) \text{의 3차 테일러 다항식 } x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x^3.$$

\* 다른 설명

$$f(x) = (e^x - 1)(1-x)^{-1} = \left( \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right) (1+x+x^2+x^3+\dots)$$

$$3\text{차 테일러 다항식 } (x+x^2+x^3) + \left( \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} \right) + \frac{x^3}{6} = x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{3}x^3.$$

$$g(z) = \frac{e^z - 1}{z^4(1-z)} \text{ 라 하면 유수 정리에 의해}$$

$$\int_{|z|=\frac{1}{2}} g(z) dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}(g(z), 0) = 2\pi i \cdot (3\text{차항 계수}) = \frac{10}{3}\pi i.$$

8.  $\pi$

곡선  $C$ 는 원점 중심인 반지름 1인 상반원이다. (이때  $C$ 는 단순폐곡선)

$$z = x+iy, \quad dz = dx+idy \text{ 이므로}$$

$$\int_C (x^2 - y^2 - y) + i(2xy - x) dz$$

$$= \int_C [x^2 - y^2 - y + i(2xy - x)] dx + [-2xy + x + i(x^2 - y^2 - y)] dy$$

$$= \iint_{\text{int } C \cup b(C)} 2dA \text{ (그린 정리)}$$

$$= 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi.$$

$$* \quad \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

9. 임의의  $|z| < \frac{\pi}{2}$  일 때  $z$ 에 대하여  $f(-z) = f(z)$ 이므로

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-z)^n = f(-z) \text{이므로 } a_{2n+1} = 0.$$

$f(z)$ 는  $|z| \leq 1$ 에서 (테일러 급수 전개가능하므로) 해석적이므로

$$\text{코시적분공식에 따라 } \int_C \frac{f(z)}{z^3} dz = 2\pi i \cdot \frac{f''(0)}{2!} = 2\pi i \cdot a_2 = -\frac{\pi i}{2}.$$

$$* f(z) = \frac{1}{e^z + e^{-z}} = \frac{1}{2\cosh z}$$

\* 다른 설명

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\dots}{2+2z+\frac{4z^2}{2!}+\frac{8z^3}{3!}+\frac{16z^4}{4!}+\frac{32z^5}{5!}+\dots} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4} + \frac{5}{48}z^4 - \dots \text{이므로} \end{aligned}$$

$$a_{2n+1} = 0(\text{부약}), \operatorname{Res}\left[\frac{f(z)}{z^3}, 0\right] = -\frac{1}{4}, \text{ 유수정리에 의해 적분값 } -\frac{\pi i}{2}.$$

$$10. R > a \text{ 일 때 } |z| = R \text{ 위에서 } \left| \frac{z}{z^2 + a^2} \right| \leq \frac{R}{R^2 - a^2} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty) \text{ 이므로}$$

$$\text{Jordan 보조정리에 의해 } \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{z}{z^2 + a^2} \cdot e^{ibz} dz = 0.$$

$C_R$ 과  $(-R, 0)$ 에서  $(R, 0)$ 을 잇는 반시계방향 폐곡선  $C$ 라 하면

$$\text{유수 정리에 의해 } \int_C \frac{ze^{ibz}}{z^2 + a^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{ze^{ibz}}{z^2 + a^2}, ai\right) = \pi ie^{-ab}.$$

$$\text{따라서 } \pi ie^{-ab} = \int_{C_R} \frac{ze^{ibz}}{z^2 + a^2} dz + \int_{-R}^R \frac{xe^{ibx}}{x^2 + a^2} dx \text{에서 } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ibx}}{x^2 + a^2} dx = \pi ie^{-ab}.$$

11. ①

주어진 조건을 만족하는 고립특이점은 진성특이점이다.

(카소라티-바이어슈트라스 정리)

ㄱ.  $f(z) = z \sin \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{-2n}$ 에 대하여  $z^{-n}$  ( $n$ : 자연수)꼴의 항이 무한히 많다. 즉  $z=0$ 는 진성특이점.

ㄴ.  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 1 \neq 0$ 이므로  $z=0$ 는 제거가능특이점.

ㄷ.  $\lim_{z \rightarrow 0} zf(z) = 1 \neq 0$ 이므로  $z=0$ 는 위수 1인극.

12. ⑤

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \text{이므로 } \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\cos z}{\sin z} dz = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1} dz.$$

$$e^{2iz} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2iz = 2n\pi i \quad (n \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow z = n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}) \text{이며}$$

$|z|=5$  내부에 속하는  $z=0, \pm\pi, \pm 3\pi$  있다.

$$\operatorname{Res}(n\pi) = \left. \frac{e^{2iz} + 1}{[2ie^{iz}]} \right|_{z=n\pi} = 1 \text{이므로 유수정리에 의해}$$

$$\text{구하는 값 } \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \cdot (1+1+1) = 3.$$

\* 다른 풀이

$\sin z = 0 \Leftrightarrow z = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$  편각 원리에 따라 적분값 3.

13. ①

자연수  $n$ 에 대하여  $z^n e^z$ 는 정함수이므로 코시-구르사 정리에 의해  $C$ 를 따라 선적분 0이다.

$0 < |z| < 1$ 인  $z$ 에 대하여  $z^n e^{\frac{1}{z}}$ 의 급수전개

$$z^n \left( \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{z^{n+1}} + \dots \right),$$

$$\operatorname{Res}[z^n e^{\frac{1}{z}}, 0] = \frac{1}{(n+1)!} \text{이므로 유수정리에 의해}$$

$$a_n = \frac{2\pi i}{(n+1)!}. \text{ 그러므로 구하는 값 } 0.$$

14. ①

$e^{\frac{z^2}{z}}$ 은  $C$ 와  $C$ 내부에서 해석적이므로 코시-구르사 정리에 의해  $\int_C e^{\frac{z^2}{z}} dz = 0$ .

$$0 < |z| < 1 \text{에서 } z^2 e^{\frac{1}{z}} = z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z^2} + \dots \text{이므로 유수 } \frac{1}{6}.$$

$$\text{유수 정리에 따라 } A = \frac{\pi i}{3}.$$

$\sin z = 0 \Leftrightarrow z = n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$ 이며  $C$  내부에 있는  $z=0, 1$ 개 있다.

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1-z}{\sin z} = 1 \text{이므로 유수 정리에 의해 } B = 2\pi i$$

$$(\text{실제로 나누면 } \frac{1-z}{\sin z} = \frac{1}{z} - 1 + \frac{z}{3!} + \dots)$$

$$\therefore \frac{A}{B} = \frac{1}{6}.$$

15. ①

ㄱ.  $X = \mathbb{R}$  라 하자.  $f(0) = 0$ 이고

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow 0} |f(t)| = \lim_{t \rightarrow 0} |t \cos \frac{1}{t}| \leq \lim_{t \rightarrow 0} |t| = 0 \text{이므로}$$

$f(0) = 0 = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$ 가 되어  $f$ 는  $t=0$ 에서 연속.

ㄴ.  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ 는 존재하지 않으므로 불연속이다.

$$* \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \text{이므로 } f(z) = z \cdot \frac{e^{\frac{iz}{z}} + e^{-\frac{iz}{z}}}{2}. \text{ 허수축 } z(t) = it \text{을 따라}$$

$$|f(z(t))| = \left| it \cdot \frac{e^{\frac{1}{t}} + e^{-\frac{1}{t}}}{2} \right| \geq \left| t \frac{e^{1/t}}{2} \right| \rightarrow \infty \quad (t \rightarrow 0+) \text{이므로}$$

$f$ 는  $t=0$ 에서 불연속이다.

\* 연속이라 가정하면  $0 < |z| < R$ 에서  $\left| z \cos \frac{1}{z} \right| < 1$ 이 되는  $R$  있다.

$$\text{리만 정리에 의해 } g(z) = \begin{cases} z \cos \frac{1}{z}, & z \neq 0 \\ w = \lim_{z \rightarrow 0} f(z), & z = 0 \end{cases} \text{는 } \mathbb{C} \text{에서 해석적이므로}$$

$$\int_{|z|=1} g(z) dz = 0 \text{이다.}$$

$$\text{한편, 유수 정리에 의해 } \int_{|z|=1} g(z) dz = \int_{|z|=1} z \cos \frac{1}{z} dz = -\pi i, \text{ 모순.}$$

이는  $f$ 가 연속이라 가정한 데서 비롯된 것이다.

ㄷ.  $|z| > 0$ 에서  $f$ 는 해석적이므로 (로랑)급수전개 가능

$$z \cos \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{1-2n}.$$

ㄹ. 유수정리에 의해 적분값은  $-\pi i$ 이다.

16. ④

$$(가) \int_C f(z) dz = 2\pi i \cdot \left( -\frac{i}{4} \right) = \frac{\pi}{2}$$

$$(나) \left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq |\Gamma| \cdot |f(z)|$$

$$= \pi R \cdot \frac{R^2}{(R^2-1)^2} = \frac{\pi R^3}{(R^2-1)^2}$$

$$(다) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx$$

$$= \int_C f(z) dz - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f(z) dz$$

$$= \int_C f(z) dz = \frac{\pi}{2}.$$

17.  $-\pi i$

$f(z) = \frac{1}{z-2}$ 는  $C$ 와  $C$ 내부에서 해석적이다.

코시 적분공식에 의해  $\int_C \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i \cdot f(0) = -\pi i$ .

\*  $f(z) = \frac{1}{z(z-2)}$ 의  $C$  내부의 특이점  $z=0$ 이다.

$\text{Res}[f, 0] = -\frac{1}{2}$ 이므로 유수정리에 의해 적분은  $2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi i$ .

\*  $\frac{1}{z^2-2z} = -\frac{1}{2z} - \frac{1}{4} - \frac{z}{8} + \frac{z^2}{16} + \frac{z^3}{32} + \frac{z^4}{64} + \dots$

18.  $|z|=1$  위의  $z=1 \cdot e^{i\theta}$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ )라 쓸 수 있다. 선적분의 정의로부터

$$\int_{|z|=1} z^n dz = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} ie^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta = \begin{cases} 2\pi i, & n=-1 \\ 0, & n \neq -1 \end{cases}.$$

19.  $-\frac{8\pi i}{e^2}$

$|z|=2$  내부의 특이점  $z=-1$ 이다.

$\lim_{z \rightarrow -1} \left[ \frac{(z^2+7)e^{2z}}{(z-3)} \right]' \cdot \frac{1}{(2-1)!} = \frac{-4}{e^2}$ 이므로 유수정리에 의해 적분은  $-\frac{8\pi i}{e^2}$ .

\*  $f(z) = \frac{(z^2+7)e^{2z}}{(z-3)}$ 은  $|z| \leq 2$ 에서 해석적이므로 코시 적분공식에 의해

$$\int_{|z|=2} \frac{(z^2+7)e^{2z}}{(z-3)(z+1)^2} dz = \int_{|z|=2} \frac{f(z)}{(z+1)^{1+1}} dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(-1) = -\frac{8\pi i}{e^2}.$$

20.

하위 영역	배점	예상 정답율(%)	출제근거 (이유)
고등수학(복소함수)	4	75	H. Silverman. Complex Variables. pp. 251-266

$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$ 이므로 ..... 1점

$\cos \frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{4!} \frac{1}{z^4} - \dots$  ..... 2점

(직접 이 식을 유도해도 2점)

이제  $z^3 \cos \frac{1}{z} = z^3 - \frac{z}{2!} + \frac{1}{4!} \frac{1}{z} - \dots$ 에서

$z^3 \cos \frac{1}{z}$ 의  $z=0$ 에서의 유수(residue)는  $\frac{1}{4!}$ 이다. ..... 3점

$\oint_U z^3 \cos \frac{1}{z} dz = 2\pi i \left( \frac{1}{4!} \right) = \frac{\pi i}{12}$  ..... 4점

21.

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z(z-1)(z-i)}$$

복소 평면의 세 점  $0, 1, i$  모두 원  $|z|=3$  내부에 있으므로 각 점에서 유수를 계산하면

$$\text{Res}[f, 0] = \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = 0,$$

$$\text{Res}[f, 1] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) f(z) = \frac{e-1}{1-i},$$

$$\text{Res}[f, i] = \lim_{z \rightarrow i} (z-i) f(z) = -\frac{e^i - 1}{1+i}.$$

이제 유수 정리에 의하여 적분은

$$\int_{|z|=3} f(z) dz = 2\pi i \left( 0 + \frac{e-1}{1-i} - \frac{e^i - 1}{1+i} \right) = \pi i (e + ie + ie^i - 2i - e^i).$$

$$= 2\pi i \cdot \text{Res} \left( \frac{1}{z^2} f \left( \frac{1}{z} \right), 0 \right)$$

22. ②

$z=1, -2$ 는  $|z|=3$  내부에 있다. 유수 정리에 따라

$$\int_{|z|=3} \frac{z^3 + 3z - 1}{(z-1)(z+2)} dz = 2\pi i (\text{Res}(1) + \text{Res}(-2)) = 2\pi i \cdot (1+5) = 12\pi i.$$

$$* \frac{z^3 + 2z - 1}{(z-1)(z+2)} = \frac{z^3 + 2z - 1}{z^2 + z - 2} = z - 1 + \frac{6}{z} - \frac{9}{z^2} - \frac{3}{z^3} - \frac{15}{z^4} + \frac{9}{z^5} + \dots$$

23. ④

$0 < |z| < 1$ 인  $z$ 에 대하여  $e^{\frac{1}{z^2}}$ 의 (로랑) 급수 전개에서  $\frac{1}{z}$  항 없다.

즉,  $\text{Res}[e^{\frac{1}{z^2}}, 0] = 0$ . 유수 정리에 의해 구하는 적분값은 0.

24. ①

\*  $f(z)$ 는 코시-리만 방정식을 만족하지 않으므로 해석함수가 아니다. 선적분의 정의를 적용하자.

$C$ 의 매개변수 방정식  $c(t) = (1+i)t = 1+it$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $c'(t) = (1+i)$ 으로

$$\int_C f(z) dz = \int_{t=0}^{t=1} f(c(t)) c'(t) dt = \int_0^1 (-3t^2 i)(1+i) dt = (1+i)[-t^3 i]_0^1 = (1+i)(-i) = 1-i.$$

[미분기하학]

<곡선>

1.  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

$v=1$ , 프레네-세례 공식 적용.

$$0 = \frac{d}{ds} \alpha(s) \cdot \alpha'(s) + \alpha(s) \cdot \frac{d}{ds} \alpha'(s)$$

$$= T(s) \cdot T(s) + \alpha(s) \cdot T'(s)$$

$$= 1 + \alpha(s) \cdot \kappa(s)N(s)$$

$$= 1 - 2\kappa(s)s^2 \text{이므로}$$

$$\kappa(1) = \frac{1}{2}.$$

$$-4s = \frac{d}{ds} \alpha(s) \cdot N(s) + \alpha(s) \cdot \frac{d}{ds} N(s)$$

$$= T \cdot N + \alpha \cdot (-\kappa T + \tau B)$$

$$= 0 + (0 + \tau \alpha \cdot B) \text{이므로}$$

$$-4 = 12\tau(1), \tau(1) = -\frac{1}{3}, |\tau(1)| = \frac{1}{3}.$$

2.  $\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}$

$$C(t) = (t, e^{at}, be^{-at}), C(0) = (0, 1, b) = P, C'(0) = (1, a, -ab).$$

$$P+tC'(0) = (t, 1+at, b-abt) \text{이므로 } t=2\sqrt{2}.$$

$$(2\sqrt{2}, 1+2a\sqrt{2}, b-2ab\sqrt{2}) = (2\sqrt{2}, 3, -1), a = \frac{1}{\sqrt{2}}, b = 1, a^2 + b^2 = \frac{3}{2}.$$

$$C'(0) = (0, a^2, a^2b) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). C'(0) \perp C'(0) \text{이므로}$$

$$\kappa = \frac{\|C'(0)\|}{\|C'(0)\|^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

3.  $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right), \frac{4\sqrt{2}}{3}$

$$\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx (2, 1, 0), \alpha'\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx (2, -2, 0), \alpha''\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx (-2, -4, 0) \text{이므로}$$

$$T = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), (\alpha' \times \alpha'')\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 0, -12), B = (0, 0, -1),$$

$$N = B \times T = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \kappa = \frac{|\alpha' \times \alpha''|}{|\alpha'|^3} = \frac{3}{4\sqrt{2}}$$

$$(\text{곡률중심}) = \alpha + \frac{1}{\kappa}N = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

$$(\text{곡률반경}) = \frac{1}{\kappa} = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

4.

$$\beta' = \tau_\alpha T + \kappa_\alpha B, \|\beta'\| = \sqrt{\tau_\alpha^2 + \kappa_\alpha^2} \neq 0 \text{이므로 } \beta \text{는 정칙곡선이다.}$$

$$\beta'(1) = \kappa_\alpha(1)\sqrt{3}T + \kappa_\alpha(1)B, \beta'' = \tau_\alpha' T + \kappa_\alpha'B,$$

$$\beta''(1) = (\sqrt{3}\kappa_\alpha'(1) - 2\kappa_\alpha(1))T + \kappa_\alpha'(1)B, \|\beta'(1)\| = 2\kappa_\alpha(1),$$

$$\beta'(1) \times \beta''(1) = \begin{vmatrix} T & N & B \\ \sqrt{3}\kappa_\alpha(1) & 0 & \kappa_\alpha(1) \\ \sqrt{3}\kappa_\alpha'(1) - 2\kappa_\alpha(1) & 0 & \kappa_\alpha'(1) \end{vmatrix} = -2\kappa_\alpha(1)^2 N,$$

$$\|\beta'(1) \times \beta''(1)\| = 2\kappa_\alpha(1)^2.$$

$$\text{구하는 값 } \tau_\alpha(1)\kappa_\beta(1) = \sqrt{3}\kappa_\alpha(1) \cdot \left[\frac{2\kappa_\alpha(1)^2}{8\kappa_\alpha(1)^3}\right] = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

5.  $0, \frac{2}{\sqrt{3}}$

$$\gamma \text{는 구면곡선이므로 } \|\gamma\|=1, n = \frac{\gamma}{\|\gamma\|} = \gamma, n' = \gamma' = T.$$

$$0 = (B \cdot n)' = B' \cdot n + B \cdot n' = -\tau N \cdot n + B \cdot n' \text{이므로}$$

$$B \cdot n' = B \cdot T = 0 = \tau N \cdot n, \tau = 0 = a(s).$$

구면 위의 곡선으로서 열률=0이므로  $\gamma$ 는 원(의 일부).

$$B, n \text{의 사잇각 } \frac{\pi}{3} \text{이므로 } b(s) = \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{1 \cdot \cos \frac{\pi}{6}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

6.  $\frac{\pi}{2}, -\frac{2}{13}$

$$\gamma'(t) = (2 + \sin t, 1 + \cos t, 2) \text{가 } (6, 2, 4) \text{와 평행하게 되는 } t_0 = \frac{\pi}{2} \in (0, 2\pi).$$

$$\gamma(t_0) = \left(\pi, \frac{\pi}{2} + 1, \pi + 1\right) \text{에서}$$

$$\gamma' = (3, 1, 2), \gamma'' = (0, -1, 0), \gamma' \times \gamma'' = (2, 0, -3), \gamma''' = (-1, 0, 0).$$

$$\gamma \text{의 열률 } \tau = \frac{(\gamma' \times \gamma'') \cdot \gamma'''}{\|\gamma' \times \gamma''\|^2} = \frac{-2}{13}.$$

7.  $\tau=0, a=3$

$$C \text{의 매개변수표현 } C(t) = (t, t^3 - at + a, t - 1) \text{이다.}$$

$$C'(t) = (1, 3t^2 - a, 1), C''(t) = (0, 6t, 0), C'''(t) = (0, 6, 0),$$

$$C(1) = (1, 1, 0), C'(1) = (1, 3-a, 1),$$

$$C'(1) = (0, 6, 0), C(1) \times C'(1) = (-6, 0, 6),$$

$$(C \times C') \cdot C''' = 0 \text{이므로 } \tau=0.$$

$$C \text{의 곡률 } 3 = \frac{6\sqrt{2}}{[2 + (a-3)^2]^{3/2}} \text{에서 } a=3.$$

8.  $\frac{1}{4}$

$$\beta'(t) = \alpha(t) + t^2 N(t), \beta''(t) = T(t) + 2tN(t) + t^2(-\kappa(t)T(t) + \tau(t)B(t)) \text{에서}$$

$$\beta''(2) = [1 - 4\kappa(2)]T(2) + 4N(2) + 4\tau(2)B(2)$$

$$\text{양변 } \alpha'(2) = T(2) \text{내적하면 } 0 = 1 + 0 - 4\kappa(2) \text{이므로 } \kappa(2) = \frac{1}{4}.$$

9.  $\frac{6}{\sqrt{5}}$

$\gamma$ 의 곡률  $\kappa(s)$ 라 하자.

$$3t = \int_0^t \|\beta'(s)\| ds = \int_0^t \left\| \frac{1}{2}\kappa(s)N(s) - \kappa(s)T(s) + 0B(s) \right\| ds = \int_0^t \frac{\sqrt{5}}{2} \kappa(s) ds$$

$$3 = \frac{\sqrt{5}}{2} \kappa(t), \kappa(1) = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

10.  $\frac{7}{3}$

$$\|\alpha'(t)\| = t^2 + 2, \int_0^1 t^2 + 2 dt = \frac{7}{3}.$$

\* 정규직교기저  $\{T, N, B\}$ 에 관한  $\alpha'$ 의 좌표  $(1, \kappa, 0)$

### 11. $a^2 + b^2 = 3$

(3차항 없음)  $\beta'''(t) = \mathbf{0}$  이므로 임의의  $t \in \mathbb{R}$ 에 대하여

$$\beta \text{의 } \tau_{\beta} \equiv 0 = \tau_{\alpha} = \frac{24a}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} \text{에서 } a=0.$$

$$\alpha \text{의 } \kappa_{\alpha} = \frac{4}{(4+4t^2)^{3/2}} \text{의 최댓값 } \frac{1}{2} \text{ (곡률반경 최소)}$$

$$\beta \text{의 } \kappa_{\beta} = \frac{\sqrt{4b^2+4}}{(b^2+1+4t^2)^{3/2}} \text{의 최댓값 } \frac{2}{b^2+1} \text{에서}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{b^2+1}, \quad b^2 = 3. \quad \text{구하는 값 } a^2 + b^2 = 3.$$

### 12. $\sqrt{1+\tau^2}$

$\alpha$ 의 프레네 세례를  $\{T, N, B\}$ 라 하자.

$$\beta' = N, \quad \beta'' = N' = -T + \tau B, \quad \beta' \times \beta'' = B + \tau T,$$

$$\beta''' = -N - \tau^2 N = (-1 - \tau^2)N.$$

$$\kappa_{\beta} = \left\| \frac{T'}{ds} \right\| = \|\beta''(s)\| = \frac{\|\beta' \times \beta''\|}{\|\beta'\|^3} = \frac{\sqrt{1+\tau^2}}{1^3} = \sqrt{1+\tau^2},$$

$$\tau_{\beta} = \frac{(\beta' \times \beta'') \cdot \beta'''}{\|\beta' \times \beta''\|^2} = 0.$$

$$\text{구하는 값 } \kappa_{\beta} + \tau_{\beta} = \sqrt{1+\tau^2}.$$

### 13. ③

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{라 하면}$$

$f$ 는  $xy$ -평면의 대칭이동(직교변환, 기저에 의한 표현행렬이 직교행렬)으로서,  $f(\alpha(t)) = \beta(t)$ 인 등장사상이다.

ㄱ. 곡선  $\alpha$ 와  $\beta$ 의 곡률  $\kappa_{\alpha} = \kappa_{\beta}$ .

ㄴ.  $f$ 의 표현행렬의 행렬식은  $-1$ 이므로  $\tau_{\alpha} = -\tau_{\beta}$ .

ㄷ. 그런  $L$ 이 있으면  $\tau_{\alpha} = 1 \cdot \tau_{\beta} = -\tau_{\beta}$ 에서  $\tau_{\alpha} = \tau_{\beta} = 0$ 가 되는데,  $\alpha, \beta$ 는 평면 곡선이 아니다.

\* 직접 계산으로도 확인할 수 있다.

\* 등장사상의 불변량

① 곡선 길이,  $\kappa$  불변

②  $|\tau|$  불변, 부호는 등장사상의 행렬식의 부호를 따른다.

### 14. ③

$C$ 의 매개변수표현  $\alpha(t)$ 라 하자.

$C$ 는 정칙곡선이므로  $\alpha'(t) \neq \mathbf{0}$ ,  $v = \|\alpha'(t)\| \in \mathbb{R}$ 라 하자.

ㄱ.  $T' = \kappa v N = \mathbf{0}$ 이므로  $T = c$ 인  $c \in \mathbb{R}^3$ 이다.

$$\alpha'(t) = vc \text{이므로 } \alpha(t) = vct + b \text{인 } b \in \mathbb{R}^3 \text{이다.}$$

따라서  $C$ 는 직선이거나 직선의 일부이다.

ㄴ.  $B' = -\tau v N = \mathbf{0}$ 이므로  $B = c$ 인  $c \in \mathbb{R}^3$ 이다.

따라서  $C$ 는  $B$ 를 법선으로 하는 평면에 놓여 있다.

ㄷ. 주면나선

### 15. ①

$$(2, 0, 4\pi) = \gamma(t_1) = (a \cos t_1, a \sin t_1, bt_1),$$

$$(2, 0, 8\pi) = \gamma(t_2) = (a \cos t_2, a \sin t_2, bt_2) \text{라 하면}$$

$$a^2 = 4 \text{에서 } a = 2, \quad b(t_2 - t_1) = 4\pi \text{에서 } t_2 - t_1 = \frac{4\pi}{b}$$

$$\gamma'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b) \text{이므로}$$

$$4\sqrt{10}\pi = \int_{t_1}^{t_2} \|\gamma'(t)\| dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{a^2 + b^2} dt$$

$$= (t_2 - t_1) \sqrt{a^2 + b^2} \text{에서 } 9b^2 = 4, \quad b = \frac{2}{3}. \quad \therefore a + b = \frac{8}{3}.$$

### 16. ⑤

$$q = (1, 0, 0) \text{에서 } \nabla(x^2 - y^2 - 1) = (2x, -2y, 0) = (2, 0, 0),$$

$$\nabla(z - xy) = (-y, -x, 1) = (0, -1, 1) \text{이므로 } (1, 0, 0) \times (0, -1, 1) = (0, -1, -1).$$

교선  $\gamma$ 의 접선벡터는  $(0, -1, -1)$ 과 평행하다.

따라서 구하는 평면의 방정식은  $(x-1, y, z) \cdot (0, -1, -1) = 0$ 에서  $y+z=0$ . 구하는 답은  $(-1, 1, -1)$

\* 다른 설명

$$\gamma \text{의 매개변수 표현 } \gamma(t) = (\cosh t, \sinh t, \frac{1}{2} \sinh 2t),$$

$$\gamma(0) = (1, 0, 0), \quad \gamma'(0) = (0, 1, 1) \text{이므로}$$

$$\text{구하는 평면은 } (x-1, y, z) \cdot (0, 1, 1) = 0 \text{에서 } y+z=0.$$

\* 공간  $\mathbb{R}^3$ 에서  $\gamma$ 의 접선벡터  $T$ 는  $S_1, S_2$ 의 단위법벡터  $U_1, U_2$ 와 각각 수직이다. 그러므로  $T$ 는  $U_1$ 과  $U_2$ 를 포함하는 평면의 법벡터  $U_1 \times U_2$ 와 평행하다.

( $T$ 를 고정하고  $U_1$ 과  $U_2$ 를 포함하는 평면을 생각)

### 17. ①

$$\beta'(0) = -4\alpha'(0), \quad \beta''(0) = 8\alpha''(0), \quad \beta'(0) \times \beta''(0) = -32\alpha'(0) \times \alpha''(0),$$

$$\beta'''(0) = -16\alpha'''(0) \text{이므로}$$

$$\beta \text{의 비틀림 } \frac{(\beta'(0) \times \beta''(0)) \cdot \beta'''(0)}{\|\beta'(0) \times \beta''(0)\|^2} = \frac{-32 \times (-16)}{32^2} \tau(0) = \frac{1}{2} \tau(0).$$

### 18. ②

$$\alpha'(t) = (\sinh t, \cosh t, 1), \quad \|\alpha'(t)\| = \sqrt{\sinh^2 t + \cosh^2 t + 1} = \sqrt{2} \cosh t$$

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = \sqrt{2} \sinh t,$$

$$t = t(s) = \sinh^{-1} \frac{s}{\sqrt{2}}, \quad \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \text{에서}$$

$$\cosh t = \sqrt{1 + \sinh^2 t} = \sqrt{1 + \frac{s^2}{2}},$$

$$\beta(s) = \alpha(t(s)) = \left( \sqrt{1 + \frac{s^2}{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}, \sinh^{-1} \frac{s}{\sqrt{2}} \right).$$

$$* \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1, \quad \cosh^2 t = 1 + \sinh^2 t$$

$$* \cosh^2 t + \sinh^2 t = \cosh 2t, \quad \sinh 2t = 2 \sinh t \cosh t$$

$$19. t = \sqrt{\frac{5}{3}}$$

$$\alpha'(t) = (3t^2 + 1, 2t, 1), \quad \alpha''(t) = (6t, 2, 0), \quad \alpha'(t) \times \alpha''(t) = (-2, 6t, -6t^2 + 2).$$

$$xy\text{-평면의 법벡터 } (0, 0, 1) \text{이므로}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{(-2, 6t, -6t^2 + 2) \cdot (0, 0, 1)}{\|(-2, 6t, -6t^2 + 2)\| \| (0, 0, 1) \|} \text{에서}$$

$$3t^4 - 5t^2 = 0, \quad t = 0, \quad \pm \sqrt{\frac{5}{3}} \text{이므로 구하는 } t = \sqrt{\frac{5}{3}}.$$

$$20. \mathbf{0} \neq \alpha''(s) = \kappa(s)N(s) \text{이므로 } \kappa(s) \neq 0 \quad (s \in [a, b]).$$

$$c \in \mathbb{R}^3 \text{에 대하여 } c = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)} N(s) \text{라 하자.}$$

양변을 미분하면, 프레네 공식에 의해

$$\mathbf{0} = T(s) + \frac{N'(s)\kappa(s) - \kappa'(s)N(s)}{[\kappa(s)]^2}$$

$$= T + \frac{1}{\kappa^2} (-\kappa^2 T + \kappa \tau B - \kappa' N)$$

$$= \frac{\tau}{\kappa} B - \frac{\kappa'}{\kappa^2} N.$$

$\{T, N, B\}$ 는  $\mathbb{R}^3$ 의 정규직교기저이므로

$$\frac{\tau}{\kappa} = 0 = \frac{\kappa'}{\kappa^2}, \quad \tau = 0 \text{이므로 } \alpha \text{는 평면곡선, } \kappa' = 0 \text{이므로 } \kappa \text{는 상수.}$$

$$\|c - \alpha(s)\| = \left\| \frac{1}{\kappa(s)} N(s) \right\| = \frac{1}{\kappa(s)} \text{이므로 } \alpha \text{는 반지름 } \frac{1}{\kappa(s)} \text{인 원의 일부.}$$

21.  $\frac{\pi}{4}$

구하고자 하는 각을  $\theta$ 라 하자.

$$\text{단위접선벡터 } T(t) = \frac{1}{1+2t^2}(1, 2t, 2t^2).$$

$$\text{평면의 단위법벡터 } \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1).$$

$$\cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}.$$

\*  $T(t) \cdot \vec{n} = \cos\frac{\pi}{4}$  (상수) 이므로  $\mathbf{x}(t)$ 는 주면나선이다.

$$* \vec{n} = \cos\theta T + \sin\theta B, \frac{\tau}{\kappa} = \cot\theta.$$

22.  $\frac{1}{\sqrt{2}}, 0$ , 반지름  $\sqrt{2}$ 인 원

$$\mathbf{x}'(\theta) = (-\sin\theta, -\sin\theta, \sqrt{2}\cos\theta), \|\mathbf{x}'(\theta)\| = \sqrt{2},$$

$$\mathbf{x}''(\theta) = (-\cos\theta, -\cos\theta, -\sqrt{2}\sin\theta),$$

$$\mathbf{x}'(\theta) \times \mathbf{x}''(\theta) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0),$$

$$\mathbf{x}'''(\theta) = (-\sin\theta, -\sin\theta, -\sqrt{2}\cos\theta) \Rightarrow \text{곡률 } \kappa = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

열률  $\tau = 0$ 이므로 주어진 곡선은 반지름  $\sqrt{2}$ 인 원이다.

$$* \text{원의 중심(곡률중심) } \mathbf{x}(\theta) + \frac{1}{\kappa}N = (-2, 2, 0)$$

23. 비고임  $\frac{1}{2}, \int_{\alpha} \phi = \frac{8}{5}$

$$(1) t=0 \text{에서 } \alpha' = (2, 0, 0), \alpha'' = (0, 2, 0), \alpha' \times \alpha'' = (0, 0, 4), \alpha''' = (0, 0, 2).$$

$$\alpha \text{의 비고임은 } \frac{(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha'''}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} = \frac{1}{2}.$$

$$(2) dx = 2dt, dy = 2tdt, dz = t^2 dt \Rightarrow \int_{\alpha} \phi = \int_{-1}^1 2t^2 + \frac{2}{3}t^4 + 2t^5 dt = \frac{8}{5}.$$

24.

$$(1) T = \frac{X'}{\|X'\|} = \left( -\frac{4}{5} \sin t, \frac{4}{5} \cos t, \frac{3}{5} \right)$$

$$(2) \text{곡률을 } \kappa \text{라 하면 } T' = \kappa \|X'\| N \text{에서 } \kappa = \frac{4}{25}$$

$$(3) \text{곡률반경 } \frac{1}{\kappa} = \frac{25}{4}.$$

\* 공간  $\mathbb{R}^3$ 에서 곡선  $\alpha$ ,  $\|\alpha'\| = v$ 일 때 다음이 성립

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & v\kappa & 0 \\ -v\kappa & 0 & v\tau \\ 0 & -v\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

25.

하위 영역	배점	예상정답율(%)	관련사고영역	출제자
기하 및 위상	5	30	적용	방송진
출제 내용	R.S. Milman/G.D.Parker.	Elements of Differential		
관련자료	Geometry. pp102-104			

반지름의 길이가  $r$ 인 원의 곡률은  $\frac{1}{r}$ 이고, 이 원이 측지선이므로  $k_g \equiv 0$ 이다.

$$k^2 = k_n^2 + k_g^2 \text{이고 따라서 } k_n = \pm \frac{1}{r} \text{이다.}$$

$k_n$ 은 미분가능이므로 연속이다.

$$\text{따라서, } k_n \equiv \frac{1}{r} \text{ 또는 } k_n \equiv -\frac{1}{r} \text{이다.}$$

\* 채점기준

공식  $k^2 = k_n^2 + k_g^2$ 을 쓰면

측지선이면  $k_g \equiv 0$ 을 언급하면

원의 곡률은  $\frac{1}{r}$ 임을 언급하면

$k_n \equiv \frac{1}{r}$  또는  $k_n \equiv -\frac{1}{r}$ 의 답 중 어느 하나만 구해도

( $\equiv$  대신 =로 써도 점수를 줄 수도 있다.)

26. ①

$X$ 는 단위속력곡선이므로  $X(t)$ 의 곡률  $\kappa$ 는  $\kappa = \|X''(t)\| = \frac{a}{a^2+1}$ .

## 〈곡면〉

1.

존재하지 않는 함수에 관한 미분법은 존재하지 않는다.

해당 문항에서는 측지곡률 조건을 이용하면 함수  $f(x)$ 를 구할 수 있습니다. 비록 구한  $f(x)$ 가 일부 구간에서 첫 번째 문장의 조건을 만족시키지 않지만 이러한 상황이  $f(x)$ 를 구하거나 문항 전체를 해결하는 데 영향을 주지는 않습니다.

다만  $f(x)$ 를 구한 후에 구한  $f(x)$ 가 첫 번째 문장의 조건을 만족하지 않는다는 사실을 인지한 경우 더 이상 문제 풀이를 진행하지 못할 수 있다는 점과 서술형 평가의 특성 및 채점의 공정성, 객관성을 고려하여 채점 기준에 반영하기로 했습니다.

2.

$$X(0, \frac{\pi}{4}) = (1, \sqrt{2}, \sqrt{2}) = P \text{에서 } X_u = (2, 0, 0), X_v = (0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}) \text{이므로}$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, -1), \text{ 접평면의 방정식 } y+z=2\sqrt{2}.$$

$$P \text{에서 } E=4, F=0, G=4, L=-2, M=0, N=2 \text{이므로}$$

$$K = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} = -\frac{1}{4}, H = \frac{1}{2} \cdot \frac{EN+GL-2FM}{EG-F^2} = 0.$$

3.

$M$ 은  $x^2+4y^2=4$ 를  $x$ 축으로 회전한 회전면이다.

$M$ 의 조각사상  $X(u, v) = (2\cos u, \sin u \cos v, \sin u \sin v)$ .

$$X\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \left(\sqrt{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{에서}$$

$$L = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, M=0, N = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}},$$

$$E = \frac{5}{2}, F=0, G=\frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$K = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} = \frac{16}{25}.$$

$M$ 의 경계  $\alpha_1 = X(u, 0), \alpha_2 = X\left(u, \frac{\pi}{3}\right), \alpha_3 = X\left(\frac{\pi}{2}, v\right), \alpha_4 = X\left(\cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}, v\right)$ .  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 는 측지선이다.

외각합  $\sum e_j = 2\pi, \chi(M) = 4-4+1=1$ .

가우스-보네 정리에 따라

$$\iint_M K dA = 2\pi\chi(M) - \int_{\partial M} \kappa_g ds - \sum e_j = \frac{\pi}{3\sqrt{2}}.$$

$$4. \gamma(t) = \left(-\frac{1}{2} + \cosh t, \frac{1}{2} + \sinh t, 1 - \cosh t - \sinh t\right) \text{라 하면 } p = \gamma(0).$$

$$\gamma'(0) = (0, 1, -1), \gamma''(0) = (1, 0, -1), \gamma' \times \gamma''(0) = (-1, -1, -1).$$

$$X(u, v) = (u, v, u^2 - v^2) \text{라 하면 } p = X\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{에서 } U = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1).$$

$$\text{그러므로 } \kappa_g = \kappa_B U = -\frac{1}{2\sqrt{6}}, \kappa_n = \frac{\gamma'' \cdot U}{\|\gamma'\|^2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(다른 풀이)

$M$ 의 조각사상  $X(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$ 라 하면  $p$ 에서

$$L = \frac{2}{\sqrt{3}}, M=0, N = -\frac{2}{\sqrt{3}}, E=2, F=-1, G=2.$$

$M, N$ 의  $p$ 에서 단위법벡터를 각각  $U_M, U_N$ 라 하면

$$U_M = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1), U_N = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$

$\gamma$ 의  $p$ 에서 단위접선벡터  $T$ 라 하면  $T \parallel U_M \times U_N \parallel = \frac{1}{\sqrt{2}} X_v$ 이므로

$$\kappa_n = \frac{II}{I} = \frac{N}{G} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$\gamma$ 의 곡률, 단위주법선벡터를 각각  $\kappa, N$ 라 하면

$$\kappa N = -\frac{1}{\sqrt{3}} U_M + \kappa_g (U_M \times T) \text{이므로}$$

$$0 = \kappa(N \cdot U_N) = -\frac{1}{\sqrt{3}} (U_M \cdot U_N) + \kappa_g (U_M \times T) \cdot U_N, \kappa_g = -\frac{1}{2\sqrt{6}}.$$

$$5. \frac{3}{4}, 2$$

주곡률  $\kappa_1, \kappa_2$ 라 하고  $\kappa_1$ 에 대한 주방향을  $e$ 라 하자.

오일러 공식에 따라

$$\frac{11\pi}{8} = \int_0^\pi \kappa_n(\theta) d\theta = \int_0^\pi \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{2} (\kappa_1 + \kappa_2), \kappa_1 + \kappa_2 = \frac{11}{4}.$$

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = \frac{3}{2} \text{이므로 } \kappa_1, \kappa_2 \text{는 } x^2 - \frac{11}{4}x + \frac{3}{2} = 0 \text{의 근 } \frac{3}{4}, 2.$$

$$6. M \text{의 조각사상 } X(u, v) = ((u^4 - 2u^2 + 5)\cos v, (u^4 - 2u^2 + 5)\sin v, u).$$

$S$ 의 경계는  $M$ 과 평면  $z=\pm 1$ 의 교선

$$\alpha_1(t) = (4\cos t, 4\sin t, -1), \alpha_2(t) = (4\cos t, 4\sin t, 1).$$

$$S \text{의 경계에서 측지곡률 } \kappa_g = \frac{(\alpha' \times \alpha'') \cdot U}{\|\alpha'\|^3} = 0.$$

$$* B \cdot U = 0$$

외각은 없으며,  $\chi(S) = 4-6+2=0$ . 가우스-보네 정리에 따라

$$\iint_S K dA = 2\pi\chi(S) - \int_{\partial S} \kappa_g ds - \sum e_j = - \int_{\alpha_1} \kappa_g ds - \int_{\alpha_2} \kappa_g ds = 0.$$

7.

$$x(1, 2) = P = (3, -3, 2) \text{에서 } x_u = (2, 1, 2), x_v = (1, -4, 1), x_u \times x_v = (9, 0, -9)$$

접평면의 방정식  $0 = (1, 0, -1) \cdot (x-3, y+3, z-2), x-z=1$ .

$$\text{점 } P \text{에서 } E=9, F=0, G=18, L=\sqrt{2}, M=-\frac{1}{\sqrt{2}}, N=0 \text{이므로}$$

$$H = \frac{1}{2} \cdot \frac{EN+GL-2FM}{EG-F^2} = \frac{L}{2E} = \frac{\sqrt{2}}{18}.$$

\* 다른 설명

$$\text{모양연산자 } S = \begin{pmatrix} EF \\ FG \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ MN \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{9} & -\frac{1}{9\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{18\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$H = \frac{1}{2} \operatorname{tr} S = \frac{\sqrt{2}}{18}, K = \det S = \frac{1}{18^2}, \kappa_1, \kappa_2 = \frac{\sqrt{2} \pm 1}{18}.$$

$$8. d = \frac{3}{2}, K=1$$

가정에 의해 점  $p$ 에서  $M$ 과  $H$ 의 단위법벡터는 평행하므로

$$\nabla(z - \frac{1}{4}(x^4 + y^4)) = k \cdot \nabla(x+y-z-d) \text{인 } k \in \mathbb{R} \text{ 있다.}$$

$$\text{이때 } k = -1, -x^3 = -1, -y^3 = -1,$$

$$x=1, y=1, z=\frac{1}{2} \text{에서 } d = \frac{3}{2}. (z \neq 1)$$

\* 점  $p$ 에서 곡면  $M$ 의 접평면이  $H$ 이다.

①  $\mathbb{R}^2$ 에서 접한다.  $\Leftrightarrow$  접선이 같다.

②  $\mathbb{R}^3$ 에서 접한다.  $\Leftrightarrow$  접평면이 같다.

한편,  $M$ 의 매개변수표현  $X(u, v) = (u, v, \frac{1}{4}(u^4 + v^4))$ ,

$$X(1, 1) = p \text{에서 } E=2, F=1, G=2, L=\sqrt{3}, M=0, N=\sqrt{3},$$

$$K = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} = 1 = \kappa_1 \kappa_2.$$

$$* H = \frac{EN+GL-2FM}{2(EG-F^2)} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \text{이므로}$$

주요곡률  $\kappa_1, \kappa_2$ 는  $x^2 - \frac{4}{\sqrt{3}}x + 1 = 0$ 의 근이다.

$$\text{따라서 } x = \frac{2 \pm 1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}.$$

\* 모양연산자  $S$ 일 때,  $K = \det S, H = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tr} S$ .

$$9. \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$X(1,0)=p$ 에서

$$X_u = (1, 0, -1), X_v = (0, 1, 0), X_u \times X_v = (1, 0, 1), U = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1),$$

$$X_{uu} = (0, 0, 2), X_{uv} = (0, 1, 0), X_{vv} = (-1, 0, 0),$$

$$E=2, F=0, G=1, L=\sqrt{2}, M=0, N=-\frac{1}{\sqrt{2}} \text{이므로}$$

$$\kappa_1 = \frac{L}{E} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \kappa_2 = \frac{N}{G} = -\frac{1}{\sqrt{2}}. (\kappa_1 > \kappa_2)$$

$w$ 는 접벡터  $1X_u + 1X_v$ 와 평행하므로  $w$  방향 법곡률

$$\kappa_n(w) = \frac{II}{I} = \frac{\sqrt{2}+0-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2+0+1} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

\* 다른 설명

$F=M=0$ 이므로 주벡터  $X_u, X_v$ 이다.

$$X_u \text{와 } w \text{의 사잇각 } \theta \text{라 할 때, } X_u \cdot w = \frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{2} \cos \theta.$$

오일러 공식에 의해  $w$  방향 법곡률

$$\kappa_n(w) = \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = \frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

\* 주어진 곡면은 경선  $(u, 0, \frac{1}{u})$ 을  $z$ 축 회전한 회전면이며,

곡면의 방정식  $(x^2 + y^2)z^2 = 1$ 이다.

$$10. \gamma(\theta) = (1 + \cos \theta, \sin \theta, \sqrt{2 - 2\cos \theta}), \kappa_g = 1$$

$S_2$ 의 매개변수표현  $(1 + \cos \theta, \sin \theta, z)$ 을  $S_1$ 에 대입하면

$$(1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta + z^2 = 4, z = \sqrt{2 - 2\cos \theta} = (2 - 2\cos \theta)^{1/2}.$$

$$\gamma(\theta) = (1 + \cos \theta, \sin \theta, (2 - 2\cos \theta)^{1/2}) = (1 + \cos \theta, \sin \theta, 2\sin \frac{\theta}{2}).$$

$$\gamma(\pi) = (0, 0, 2) \text{에서 } \nabla(x^2 + y^2 + z^2)|_{(0,0,2)} = (0, 0, 4), U = (0, 0, 1).$$

$$\gamma'(\pi) = (0, -1, 0), \gamma''(\pi) = (1, 0, -\frac{1}{2}), \gamma'(\pi) \times \gamma''(\pi) = (\frac{1}{2}, 0, 1),$$

$$\text{그러므로 측지곡률 } \kappa_g = \frac{(\gamma'(\pi) \times \gamma''(\pi)) \cdot U}{\|\gamma'(\pi)\|^3} = 1.$$

$$* \kappa_n = \kappa N \cdot U = \frac{\alpha'' \cdot U}{\|\alpha'\|^2}, \kappa_g = \kappa B \cdot U = \frac{(\alpha' \times \alpha'') \cdot U}{\|\alpha'\|^3}.$$

$$* S_1 \text{ 위에서 } \begin{cases} \kappa_n = -\frac{1}{2}, \\ \kappa_g = 1 \end{cases}, S_2 \text{ 위에서 } \begin{cases} \kappa_n = -1 \\ \kappa_g = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{이며,}$$

$$U_{S_1} = (0, 0, 1) \perp (-1, 0, 0) = U_{S_2} \text{이다. (사잇각 } \frac{\pi}{2})$$

$$11. \kappa_1 = 0, \kappa_2 = \frac{\sqrt{15}}{3}, \kappa = \frac{16\sqrt{15}}{75}$$

원뿔은 회전면이므로 점  $p$ 에서 주곡률은 경선 · 위선 법곡률.

점  $p$ 에서 경선(모선)  $\overline{pq}$ 의 법곡률  $\kappa_1 = 0$ ,

점  $p$ 에서 위선은 반지름  $\frac{3}{4}$ 인 원이므로

단위법벡터  $U$ 가 원뿔의 외부방향을 향한다고 정할 때,  
위선의 단위주법선벡터  $N$ 과  $U$ 의 사잇각  $\alpha$ 라 하자.

$$\text{위선방향 법곡률 } \kappa_2 = \frac{4}{3}N \cdot U = \frac{4}{3}\cos \alpha = \frac{4}{3}\cos(\pi - \alpha) = -\frac{\sqrt{15}}{4}.$$

$$\gamma \text{의 접벡터 } \gamma' \text{과 경선이 이루는 각을 } \theta \text{라 하면 } \cos \theta = \frac{3}{5}.$$

오일러 공식에 의해 점  $p$ 에서  $\gamma$ 의 법곡률

$$\kappa_n = \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta = -\frac{16\sqrt{15}}{75},$$

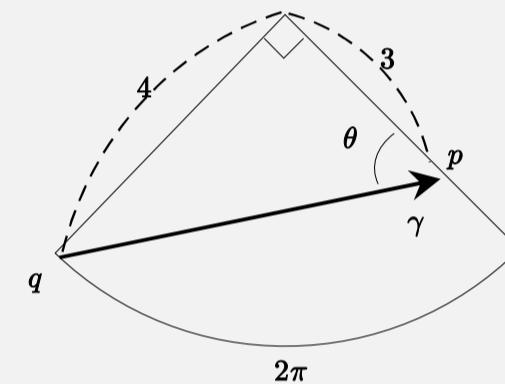
$$\gamma \text{의 측지곡률 } \kappa_g = 0 \text{이므로 } \kappa = |\kappa_n| = \frac{16\sqrt{15}}{75}.$$

\* 조각사상  $X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \sqrt{15}(1-u))$ 일 때,

$p = X(3/4, 0), q = X(1, 0)$ , 주곡률까지는 계산할 수 있다.

\*  $\gamma$ 는 측지선이므로 평면에 그려지면 직선이다.

\* 원뿔은 평면과 국소등장적( $K=0$ )이므로 평면에 그릴 수 있다.  
(전개도)



12. 회전면  $M$ 의 조각사상  $X(u, v) = \left(\frac{(u^2+v^2)^2}{4}, u, v\right)$ .

$$X(u, 0) = p \text{에서 } X_u = (u^3, 1, 0), X_v = (0, 0, 1), U = \frac{1}{\sqrt{1+u^6}}(1, -u^3, 0),$$

$$X_{uu} = (3u^2, 0, 0), X_{uv} = \mathbf{0}, X_{vv} = (u^2, 0, 0),$$

$$E = 1+u^6, F=0, G=1, L = \frac{3u^2}{\sqrt{1+u^6}}, M=0, N = \frac{u^2}{\sqrt{1+u^6}}.$$

$$K(u) = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} = \frac{LN}{EG} = \frac{3u^4}{(1+u^6)^2}.$$

$F=M=0$ 이므로 모양연산자  $\begin{pmatrix} EF \\ FG \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} LM \\ MN \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L/E & 0 \\ 0 & N/G \end{pmatrix}$ 의 고유벡터는  $(1, 0), (0, 1)$ .

따라서  $0X_u + 1X_v = X_v = (0, 0, 1)_p$ 는 주벡터이다.

이에 대응하는 주곡률을  $\kappa_1$ 라 하면 오일러 공식에 의해

$$\kappa_n(w_p) = \cos^2 \frac{\pi}{6} \kappa_1(u) + \sin^2 \frac{\pi}{6} \kappa_2(u).$$

$$\text{그러므로 } ab = \frac{3}{16}.$$

\*  $X(u, v) = \left(\frac{u^4}{4}, u \cos v, u \sin v\right)$ 일 때,  $X(u, 0) = p$ 에서

$$E = 1+u^6, F=0, G=u^2, L=3u^2(1+u^6)^{1/2}, M=0, N=u^2(1+u^6)^{1/2}$$

$M$ 은 회전면( $F=M=0$ )이므로  $X_u, X_v$ 는 주벡터이고

$(0, 0, 1)_p \parallel X_v, X_v$ 에 대응하는 주곡률  $\kappa_1(u)$ 라 하면

$$\text{오일러 공식에 의해 } \kappa_n(w_p) = \cos^2 \frac{\pi}{6} \kappa_1(u) + \sin^2 \frac{\pi}{6} \kappa_2(u).$$

13.  $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

$M$ 은 곡선  $\alpha(u) = (u, 0, \frac{1}{2}u^2)$ 을  $z$ 축으로 회전한 회전면.

$$X_u = (\cos v, \sin v, u), X_v = (-u \sin v, u \cos v, 0),$$

$$X_u \times X_v = (-u^2 \cos v, -u^2 \sin v, u),$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}(-u \cos v, -u \sin v, 1).$$

각 경계의 매개변수표현은

$$\text{위선 } \alpha_1(t) = (\cos t, \sin t, \frac{1}{2}) \quad (0 \leq t \leq \pi),$$

$$\text{경선 } \alpha_2(t) = (t, 0, \frac{1}{2}t^2) \quad (-1 \leq t \leq 1) \text{ (축지선).}$$

$$\text{각 축지곡률 } \frac{(\alpha_1' \times \alpha_1'') \cdot U_{\alpha_1}}{\|\alpha_1'\|^3} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{(\alpha_2' \times \alpha_2'') \cdot U_{\alpha_2}}{\|\alpha_2'\|^3} = 0,$$

$$\int_{\partial S} \kappa_g ds = \int_{\alpha_1} \kappa_g ds = \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{2}} ds = \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{2}} \|\alpha_1'\| dt = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

$$* \alpha_1 \text{의 법곡률 } \kappa_n = \kappa \cdot NU = 1 \cdot \cos \alpha = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$* \alpha_2 \text{의 법곡률 } \kappa_n = \frac{\alpha_2'' \cdot U_{\alpha_2}}{\|\alpha_2'\|^2} = \frac{1}{(1+t^2)^2}$$

\* 가우스-보네 정리로 풀 수도 있다.

$$\iint_M K dS = \pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \chi(M) = 3 - 3 + 1 = 1$$

$$\sum_p \varepsilon_p = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi, \text{ (경선과 위선은 직교)}$$

\*  $M$ 은 경선  $(x, 0, \frac{1}{2}x^2)$ 을  $z$ 축 회전한 회전면

\*  $M$ 의 방정식  $x^2 + y^2 = 2z$

14. ①

\* 원환면  $T$ 는  $xz$ -평면의 원  $(x-2)^2 + z^2 = 1$ 을  $z$ 축을 기준으로 회전하여 얻은 회전면이다.

$T$ 의 매개변수표현

$$X(u, v) = ((2 + \cos u) \cos v, (2 + \cos u) \sin v, \sin u) \quad (0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi)$$

$$X(\pi, 0) = (1, 0, 0) = \alpha(0) \text{에서}$$

$$X_u = (0, 0, -1), X_v = (0, 1, 0), X_u \times X_v = (1, 0, 0).$$

$$\text{한편 } \nabla(y+z) = (0, 1, 1) \text{이므로}$$

$$\alpha'(0) \text{의 방향은 } (1, 0, 0) \times (0, 1, 1) = (0, -1, 1) \text{과 평행.}$$

$$\text{이때 } (0, -1, 1) = -X_u - X_v \text{이므로 } \frac{II}{I} \text{를 구하자.}$$

$$E=1, F=0, G=1, L=1, M=0, N=-1 \text{이므로}$$

$$\frac{II}{I} = \frac{L(-1)^2 + 2M(-1)(-1) + N(-1)^2}{E(-1)^2 + 2F(-1)(-1) + G(-1)^2} = 0.$$

\* 곡면  $T$ 를 평면  $P$ 로 잘랐을 때 곡선이 생겼다고 할 때,

곡선의 접선벡터, 주법선벡터는  $P$ 에 포함되며,

곡선의 종법선벡터는  $T$ 의 법벡터와 평행하다.

특히, 접선벡터는  $T$ 의 법벡터와  $P$ 의 법벡터의 외적과 평행.

15. ④

ㄱ.  $f$ 의 표현행렬  $A$ 는 직교행렬이며  $A^{-1}$ 도 직교행렬이므로  $f^{-1}$ 도 등장사상된다. (회전/대칭변환 행렬)

ㄴ. 등장사상은 가우스곡률 보존,  $S$ 의 모든 점에서 가우스곡률 0이다. 등장사상있으면 위상동형된다.

ㄷ. 가우스곡률, 측지곡률을 보존한다.  $(u, u^2, 1)$ 의  $(0, 0, 0)$ 에서 평균곡률  $H \neq 0$ .

16. ②

$M$ 의 매개변수표현

$$X(u, v) = (u, 2\cosh\left(\frac{u}{2}\right)\cos v, 2\cosh\left(\frac{u}{2}\right)\sin v), \quad (u \in \mathbb{R}, 0 \leq v \leq 2\pi).$$

$$E = 1 + \sinh^2 \frac{u}{2} = \cosh^2 \frac{u}{2}, \quad F=0, \quad G=4\cosh^2 \frac{u}{2},$$

$$L = -\frac{1}{\cosh \frac{u}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cosh \frac{u}{2} = -\frac{1}{2},$$

$$M=0,$$

$$N = \frac{1}{\cosh \frac{u}{2}} \cdot 2\cosh \frac{u}{2} = 2.$$

$$K = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} = \frac{LN}{EG} = \frac{-1}{4\cosh^4 \frac{u}{2}} \text{이므로}$$

임의의  $p$ 에 대하여  $-\frac{1}{4} \leq K(p) < 0$  (쌍곡점).

거리동형은 가우스곡률을 보존하므로  $M$ 은 평면( $K=0$ )과 동형이 아니다.

\*  $y=f(x)$ 를  $x$ 축 중심 회전한 회전면일 때  $K = \frac{-f''}{f[1+(f')^2]^2}$ .

## 17.

(I)  $\alpha$  위의 모든 점에서  $Y$ 의 가우스곡률 0

(가)와 [정리 1]에 의해  $N_X'(t) = k\alpha'(t)$ 인  $k \in \mathbb{R}$  있다.

$\alpha(t)$ 의  $X, Y$ 에서 단위법벡터  $N_X(t), N_Y(t)$ 라 하자.

$\alpha'(t) \perp N_X(t), \alpha'(t) \perp N_Y(t)$ 이므로  $\alpha'(t)$ 는  $N_X(t) \times N_Y(t)$ 와 평행하다.

두 곡면  $X, Y$ 가 수직으로 만나므로  $N_X(t) \cdot N_Y(t) = 0 \in \mathbb{R}$ , 양변 미분하면

$$0 = N_X'(t) \cdot N_Y(t) + N_X(t) \cdot N_Y'(t)$$

$$= k\alpha'(t) \cdot N_Y(t) + N_X(t) \cdot N_Y'(t)$$

$$= N_X(t) \cdot N_Y'(t).$$

즉,  $N_Y'(t) \perp N_X(t)$ .

한편  $\|N_Y(t)\| = 1$ 이므로  $1 = N_Y(t) \cdot N_Y(t)$ , 양변 미분하면  $N_Y'(t) \cdot N_Y(t) = 0$ .

즉,  $N_Y'(t) \perp N_Y(t)$ .

$N_Y'(t) \perp N_X(t), N_Y'(t) \perp N_Y(t)$ 이므로  $N_Y'(t)$ 는  $N_X(t) \times N_Y(t)$ 와 평행하다.

$N_Y'(t)$ 는  $\alpha'(t)$ 와 평행하므로  $N_Y'(t) = l \cdot \alpha'(t)$ 인  $l \in \mathbb{R}$  있다.

그러므로 [정리 1]에 의해  $\alpha(t)$ 는  $Y$ 의 주요곡선이다.

(나)에 의해  $\alpha''(t)$ 는  $N_X(t)$ 와 평행하고  $N_X \perp N_Y(t)$ 이므로  $\alpha''(t) \perp N_Y(t)$ .

$$Y\text{의 곡선으로서 } \alpha(t)\text{의 법곡률 } \frac{\alpha''(t) \cdot N_Y(t)}{\|\alpha'(t)\|^2} = 0.$$

주요곡선  $\alpha(t)$ 의 법곡률 0이므로  $\alpha$  위의 모든 점에서  $Y$ 의 가우스곡률 0.

(II)  $(X, \mathfrak{I})$ 에서  $\bar{A} = X$

$x \in X$ 를 포함하는 개집합  $G \in \mathfrak{I}$ 라 하자.

$G \in \mathfrak{I}_A$ 인 경우  $G \cap A \neq \emptyset$ .

$G \not\subseteq \mathfrak{I}_A$ 인 경우  $G = X - F$ 인  $(A, \mathfrak{I}_A)$ 의 컴팩트 집합  $F$  있다.

(다)에 의해  $A$ 는 컴팩트가 아니므로  $F \subsetneq A$ , 즉  $A - F \neq \emptyset$ .

$A \cap G = A \cap (X - F) = A - F \neq \emptyset$ .

그러므로  $X \subset \bar{A}$ 가 되어  $\bar{A} = X$ ,  $A$ 는  $X$ 에서 조밀.

(III)  $f|_A$ 가 상수함수이면  $f$ 는 상수함수

보통위상공간  $\mathbb{R}^3$ 는 거리공간이므로  $T_2$ -공간이며,

따라서 부분공간  $Y$ 도  $T_2$ -공간이다.

$f|_A$ 가 상수함수이므로  $f(A) = \{k\}$ 인  $k \in Y$  있다.

상수함수  $g : X \rightarrow Y, g(x) = k$ 라 하면

임의의  $Y$ -개집합들의  $g$ 에 의한 역像是  $\emptyset$  또는  $X$ 이므로  $g$ 는 연속함수.

$F = \{x \in X | f(x) = g(x)\}$ 라 하면 [정리 2]에 의해  $F$ 는 폐집합이다.

임의의  $t \in I$ 에 대하여  $f(\alpha(t)) = k = g(\alpha(t))$ 이므로  $A \subset F$

(II)에 의해  $X = \bar{A} \subset \bar{F} = F$ 이므로  $F = X$ .

그러므로  $f = f|_X = g$ 가 되어  $f$ 는 상수함수이다.

## 18. ④

$\alpha$ 는 반지름  $\sqrt{2}$ 인  $z=2$  위의 원이므로

$\alpha$ 의 매개변수표현  $\alpha(t) = (\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t, 2)$ ,  $\alpha$  곡률  $\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,

$$\nabla(z^2 - x^2 - y^2 - 2) = (-2x, -2y, 2z),$$

$$\alpha\text{의 } S\text{ 위의 법벡터 } U = \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos t, \sin t, \sqrt{2}),$$

$$S\text{ 위에 놓인 } \alpha\text{의 법곡률 } \kappa_n = \frac{\alpha'' \cdot U}{\|\alpha'\|^2} = \frac{1}{\sqrt{6}},$$

$$\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2 \text{에서 } |\kappa_g| = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$* \text{ 다른 설명: } \kappa_g = \frac{(\alpha' \times \alpha'') \cdot U}{\|\alpha'\|^3} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

\* 다른 풀이:  $S$ 의 매개변수표현

$$X(u, v) = \sqrt{2}(\sinhu \cos v, \sinhu \sin v, \cosh u)$$

$$X_u = \sqrt{2}(\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, \sinh u),$$

$$X_v = \sqrt{2}(-\sinhu \sin v, \sinhu \cos v, 0),$$

$$E = 2\cosh^2 u + 2\sinh^2 u = 2\cosh 2u, F = 0, G = 2\sinh^2 u$$

$$L = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cosh 2u}}, M = 0, N = \frac{\sqrt{2} \sinh^2 u}{\sqrt{\cosh 2u}}.$$

$$\cosh u = \sqrt{2}, \sinhu = 1, v = t \text{일 때}$$

$$X_v = \sqrt{2}(-\sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \cos t, 0) \text{이므로}$$

$$\alpha' = (-\sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \cos t, 0) = X_v.$$

$$\kappa_n(\alpha') = \frac{II}{I} = \frac{N \cdot 1^2}{G \cdot 1^2} = \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{\cosh 2u}} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \kappa = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{이므로 } \kappa_g = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

## 19.

- $X$ 는  $T_2$ -공간

$f : D \rightarrow Y, f(x, y) = \mathbf{x}(2\pi x, 2\pi y)$ 라 하면  $f$ 는 연속, 전사이며,

$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow \mathbf{x}(2\pi x, 2\pi y) = \mathbf{x}(2\pi x', 2\pi y') \Leftrightarrow f(x, y) = f(x', y')$ 이다.

$f$ 가 폐사상임을 보인다.

$D$ 는 유계폐집합이므로 하이네-보렐 정리에 의해 cpt이고,  $f$ 는 연속이므로  $f(D) = Y$ 는 cpt이다.

$F \subset D$ 인 폐집합  $F$ 에 대하여  $D$ 는 cpt이므로  $F$ 도 cpt이다.

따라서  $f(F)$ 는  $Y$ 에서 cpt이며 원환면  $Y$ 는  $T_2$ -공간이므로

$f(F)$ 는  $Y$ 에서 폐집합이 된다.  $f$ 는 폐사상.

따라서  $f$ 는 상사상이므로  $X = D / \sim \cong Y$  (위상동형).

$Y$ 가  $T_2$ -공간이므로 상공간  $X$ 도  $T_2$ -공간이다.

- $X, Y$ 의 가우스곡률 비교

상공간  $X$ 의 가우스곡률은 정의할 수 없으며,  $X$ 는  $r > 1$ 인 실수  $r$ 에 대해  $X(u, v) = ((r + \cos u)) \cos v, (r + \cos u) \sin v, \sin u)$ 와 위상 동형이다.

이때 가우스곡률  $K = \frac{\cos u}{r + \cos u}$ 는  $r$ 의 값에 따라 변하며  $r = 2$ 일 때  $Y$ 의 가우스곡률과 같다. 즉, 가우스곡률이 서로 다르게 주어질 수 있다.

- 가우스-보네 정리의 의미

가우스-보네 정리에 따라 컴팩트 유향 곡면  $X, Y$ 에 대하여

$$\iint_X K dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos u}{r + \cos u} (r + \cos u) dudv = 0 = 2\pi\chi(X) \text{이므로 } \chi(X) = 0.$$

$$\iint_Y K dS = 0 = 2\pi(v - e + f) \text{이므로 } \chi(Y) = 0.$$

위상불변량  $\chi(X) = \chi(Y)$ 이므로  $X$ 와  $Y$ 는 위상적 구조가 일치한다(위상동형).

가우스-보네 정리는 두 곡면의 가우스곡률이 다르게 주어질 수 있더라도 전가우스곡률이 같으면 두 곡면의 위상적 구조가 일치함을 의미한다.

20. ⑤

직선  $l_0(v) = (0, v, 2v)$ 를 곡선  $c(u) = (u, 0, u^3)$ 을 따라 평행이동하면  
 $X(u, v) = l_0(v) + c(u) = (u, v, u^3 + 2v)$ .

$$E = \|c'(u)\|^2 = 1 + 9u^4, F = c'(u) \cdot l_0'(v) = 6u^2, G = \|l_0'(v)\|^2 = 5.$$

$$L = \frac{6u}{\sqrt{9u^4 + 5}}, M = 0, N = 0.$$

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = 0, H = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)} = \frac{15u}{(9u^4 + 5)^{3/2}}.$$

$\begin{pmatrix} EF \\ FG \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ MN \end{pmatrix}$ 의 고유치 0, 2H, 고유벡터  $(0, 1), (1, 0)$ .

$$\text{주곡률: } 0, \frac{30u}{(9u^4 + 5)^{3/2}}.$$

$$\text{주방향: } 0 \cdot X_u + 1 \cdot X_v = X_v = l_0'(v),$$

$$1 \cdot X_u + 0 \cdot X_v = X_u = c'(u) = (1, 0, 3u^2).$$

p에서  $l_0$ 의 방향  $l_0'(p)$ 은 M의 주방향이므로  $l_p$ 는 M의 주요곡선도 된다.

$l_0$ 과 평행인 직선  $l_p(t)$ 으로서 M에서 법곡률(=주곡률) 0이므로  $l_p$ 는 M의 접근곡선이다.

$l_p$ 는 직선이므로 곡률  $\kappa = 0$ 이다. M에서  $l_p$ 의 측지곡률  $\kappa_g$ 라 하면

$$0^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2 \text{에서 } \kappa_g = 0 \text{이므로 } l_p \text{는 M의 } \underline{\text{측지선}} \text{도 된다.}$$

가우스-보네 정리에 의해

$$\iint_{\Delta} K dA + \int_{\partial\Delta} \kappa_g ds + \sum_{i=1}^3 e_i$$

$$= \iint_{\Delta} 0 dA + \int_{\partial\Delta} 0 ds + \sum_{j=1}^3 (\pi - i_j)$$

$$= 3\pi - \sum \text{내각} = 2\pi\chi(\Delta) = 2\pi \cdot (3-3+1) = 2\pi \text{이므로 내각의 합 } \pi.$$

21. ①

$$\text{오일러 공식에 의해 } v \text{방향의 법곡률 } \kappa_n(v) = 1 \cdot \cos^2 \frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} \cdot \sin^2 \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

\* 오일러의 공식

곡면 M 위의 점 p에서 주곡률  $\kappa_1, \kappa_2$ , 주방향  $e_1, e_2$ 에 대하여  $u = e_1 \cos\theta + e_2 \sin\theta$ 의 법곡률  $\kappa_n(u)$ 는

$$\kappa_n(u) = \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta.$$

22.

$$(1) \mathbf{x}(1, 1) \text{에서 } \mathbf{x}_u = (1, 2, 2), \mathbf{x}_v = (2, 1, -2),$$

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = (-6, 6, -3) \text{이므로 } \vec{n} = \frac{1}{3}(-2, 2, -1).$$

$$(2) xy-\text{평면의 (정규직교)기저 } \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\} \text{이므로}$$

$\vec{n}$ 을 xy-평면에 정사영한 벡터를  $\mathbf{p}$ 라 하면

$$\mathbf{p} = \text{proj}_{(1, 0, 0)} \vec{n} + \text{proj}_{(0, 1, 0)} \vec{n} = -\frac{2}{3}(1, 0, 0) + \frac{2}{3}(0, 1, 0) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0\right).$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{n} \cdot \mathbf{p}}{\|\vec{n}\| \|\mathbf{p}\|} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

\* 다른 설명

xy-평면의 법벡터  $(0, 0, 1) \in \langle(1, 0, 0), (0, 1, 0)\rangle^\perp$ ,

$$\vec{n} \cdot (0, 0, 1) = \|\vec{n}\| \|(0, 0, 1)\| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \text{에서 } -\frac{1}{3} = \sin\alpha, \cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

23.

$$\mathbf{x}(0, 0) = (2, 0, 1) \text{에서 } \mathbf{x}_\theta = (0, 2, 0), \mathbf{x}_\phi = (1, 0, 0),$$

$$\mathbf{x}(0, 0) \text{에서 접평면의 법벡터 } (0, 0, 1),$$

$$(x-2, y-0, z-1) \cdot (0, 0, 1) = 0 \text{이므로 접평면의 방정식 } z = 1.$$

$$\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1 \text{에서 } \cos\phi = 1 \text{이면 } \sin\phi = 0 \text{이므로}$$

$$\mathbf{x}(\theta, \cos^{-1}(1)) = (2\cos\theta, 2\sin\theta, 1) \text{이므로 교선의 방정식 } x^2 + y^2 = 4, z = 1.$$

\* 원환면  $\mathbf{x}$ 을 평면  $z = 1$ 로 자르면 반지름 2인 원(위도선)

\* 곡면  $\mathbf{x}$ 는 곡선  $(x-2)^2 + z^2 = 1$ 을  $z$ 축 회전하여 얻은 회전면이다.

\*  $\mathbf{x}$ 의 방정식  $(\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1$ ,

24.

$$\begin{aligned} \iint_G \cos^2 \frac{\theta}{2} dS &= \iint_G \frac{1}{2} + \frac{\cos\theta}{2} dS \\ &= \frac{1}{2} \iint_G dS + \frac{1}{2} \iint_D dA \\ &= \frac{1}{2} S(G) + \frac{1}{2} A(D) \end{aligned}$$

\* 곡면  $M: \mathbf{x}(u, v) : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  위의 호의 길이  $l$ , 영역의 넓이  $S$

$$\begin{aligned} ① \quad l &= \int_a^b \|\mathbf{x}'(u(t), v(t))\| dt \\ &= \int_a^b \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right) + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt \\ ② \quad S &= \iint_M 1 \cdot dS = \iint_D \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| dA \\ &= \iint_D \sqrt{EG - F^2} dA = \iint_D \|\nabla f\| dA \\ &\quad (f(x, y, z) = 0 \text{는 } M \text{의 음함수 표현}) \end{aligned}$$

25.

하위 영역	배점	예상정답율(%)	관련사고영역	출제자
고등미적분학	5	40	지식 및 이해	방승진
출제 내용	박을룡/김영원/고성은(역). Thomas/Finney. Calculus and			
관련자료	Analytic Geometry. pp.995-1004			

$$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2 \text{라 두면}$$

$$\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} = \sqrt{4(1-z)+1} = \sqrt{5-4z} \text{이고}$$

$S$ 를 xy-평면에 내린 정사영은  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ 이므로 주어진 적분은

$$\iint_S \frac{1}{\sqrt{5-4z}} dS = \iint_D \frac{1}{\sqrt{5-4z}} \sqrt{5-4z} dA = \iint_D dA = \pi \text{이다.}$$

\* 채점기준

$$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2 \text{라 두고}$$

$$\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} = \sqrt{4(1-z)+1} = \sqrt{5-4z} \text{를 계산하면.....2점}$$

영역  $D$ 를 구하면 .....1점

적분값을 구하면 .....1점

26.

폐곡면  $S$ 는 컴팩트 곡면을 가지므로 반지름  $r$ 인 구면으로 덮을 수 있다.

구면에 접하는  $S$ 의 점  $p$ 라 하자. 구면의 가우스 곡률은  $\frac{1}{r^2}$ 이고,

$p$ 에서  $S$ 는 구면보다 더 많이 굽어있으므로

$$p \text{에서 가우스곡률 } K(p) \geq \frac{1}{r^2} > 0 \text{이다.}$$

\* 임의의 컴팩트 곡면은 가우스 곡률이 양수인 점 있다.

27.

하위 영역	배점	예상 정답율(%)	출제근거 (이유)
고등수학(미분기하학)	4	50	B. O'Neill. Elementary Differential Geometry. pp.380-390.

가우스-보네 정리에 의해

$$\iint_{S^1 \times S^1} K dA = 2\pi\chi(S^1 \times S^1)$$

단,  $\chi(S^1 \times S^1)$ 은  $S^1 \times S^1$ 의 오일러 지표이다. .....2점

(단, 식 없이 가우스-보네 정리만 언급했을 경우 부분점수 가능,  $\chi(S^1 \times S^1)$ 의 의미는 언급하지 않아도 됨)

$S^1 \times S^1$ 의 지너스  $g$ 는 1이므로

$$\chi(S^1 \times S^1) = 2(1-g) = 2(1-1) = 0$$

$$\text{따라서, } \iint_{S^1 \times S^1} K dA = 0 \text{ .....3점}$$

$K(p)$ 가 연속함수이므로  $K(p) = 0$  되는 점  $p \in S^1 \times S^1$ 가 적어도 하나 존재한다. .....4점

28. 유향 폐곡면  $S$ 에 대하여 가우스-보네정리를 이용하면

$$\int_S K dS = 2\pi\chi(S)$$
가 성립하고 주어진 타원면  $E$ 는 구면  $S$ (또는 정육면체  $P$ )

과 위상동형이므로  $\chi(S) = 2$ 이다.

$$\text{따라서 } \int_E K dE = 2\pi\chi(E) = 2\pi\chi(P) = 2\pi(V - E + F) = 2\pi \cdot 2 = 4\pi \text{이다.}$$

\* 가우스-보네 정리

① 컴팩트 곡면  $M$ ,  $\iint_M K dM = 2\pi\chi(M)$

②  $M$ 에 고리  $h$ 개를 가지면  $\iint_M K dM = 4\pi(1-h)$

## [위상수학]

### <집합 · 위상의기초 · 사상 · 거리공간>

1.  $\mathfrak{I}_{\mathbb{Z}} = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}, \mathbb{Z}\}, \{0, 1, 2\}$

$\mathfrak{I}_{\mathbb{Z}}$ 의 원소로서  $A$ 를 포함하는 가장 큰 개집합  $\{0, 1, 2\}$ .

2.

여가산위상공간에서 구간  $(0, 1)$ 에 포함되는 개집합  $G$ 라 하면

$G^c$ 은 가산집합이고,  $(0, 1)^c \subset G^c$ ,  $(0, 1)^c$ 은 비가산집합이므로  $G = \emptyset$ .

따라서  $S^o = \emptyset$ .

또한 여가산위상에서 폐집합은 가산집합이거나 전체집합이므로  $\overline{(0, 1)} = \mathbb{R}$ .

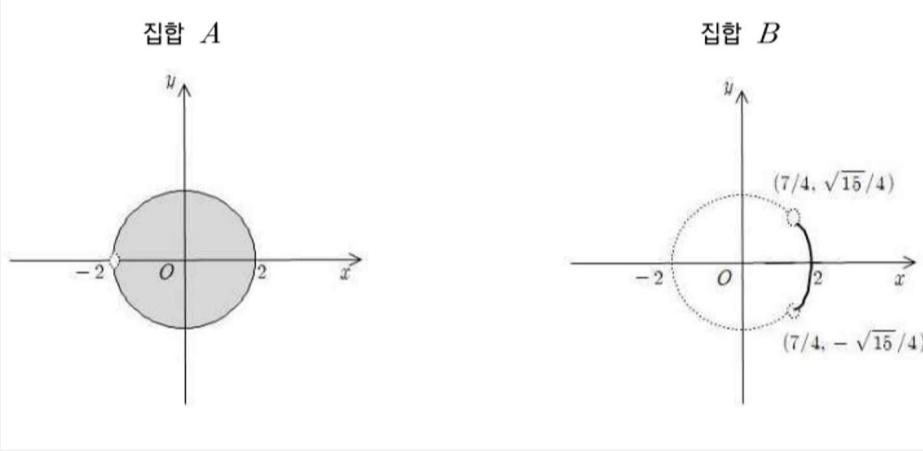
보통위상공간의 기저  $\mathcal{B} = \{(a, b) \times (c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ 이므로

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y = \sin \frac{1}{x} \right\} \text{라 할 때},$$

$$\overline{B} = \bigcap_{F^c \in \mathcal{B}, B \subset F} F = B \cup \{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\}.$$

그러므로  $\overline{S} = \mathbb{R} \times [B \cup (0, y) \mid -1 \leq y \leq 1]$ .

3.



$$\|(2, 0)\| = 2, P = (x, y) \text{라 할 때}$$

$$A : \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + 2 < 4 & , \sqrt{x^2 + y^2} \neq 2 \\ \sqrt{(x-2)^2 + y^2} < 4 & , \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 + y^2 < 2^2 & , x^2 + y^2 \neq 2^2 \\ (x-2)^2 + y^2 < 4^2 & , x^2 + y^2 = 2^2 \end{cases}$$

$$B : \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + 2 < 1 & , \sqrt{x^2 + y^2} \neq 2 \\ \sqrt{(x-2)^2 + y^2} < 1 & , \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \end{cases}$$

$$= (x-2)^2 + y^2 < 1, x^2 + y^2 = 2^2$$

4.  $(1, 2), [1, 2], (0, 2]$

$(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$ 의 기저개집합  $f_1^{-1}(G) \cap f_2^{-1}(H) = [m, m+1] \cap (n, n+1], m, n \in \mathbb{Z}$

$(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$ 의 기저  $\mathcal{B} = \{[m, n), (m, n], (m, n), \{m\} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$   
 $= \{\{n\} \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{Z}\}$

$\sqrt{2}$ 를 포함하는 개집합  $(1, 2)$ 에 대하여  $(1, 2)^c \in \mathfrak{I}$ 이므로  $(1, 2)$ 는 폐집합.

상대위상  $\mathfrak{I}_{(1, 2)} = \{(1, 2) \cap G \mid G \in \mathfrak{I}\} = \{\emptyset, (1, 2)\}$ 는 비이산위상이므로

$(1, 2)$ 는  $((1, 2), \mathfrak{I}_{(1, 2)})$ 에서 연결이다.

따라서  $(1, 2)$ 는  $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$ 에서 연결이므로 연결성분이다.

$$\text{int}\left[\frac{1}{2}, 2\right] = \bigcup_{\substack{G \in \mathcal{B}, \\ G \subset [1/2, 2]}} G = [1, 2]$$

$= \left(\frac{1}{2}, 2\right]$  를 포함하는 가장 큰 개집합

$$\overline{\left[\frac{1}{2}, 2\right]} = \left[ \text{int}\left(\left[\frac{1}{2}, 2\right]^c\right) \right]^c$$

$$= [\text{int}((-\infty, 1/2) \cup (2, \infty))]^c$$

$$= [(-\infty, 0] \cup (2, \infty)]^c$$

$$= (0, 2]$$

$= \left(\frac{1}{2}, 2\right]$  에 포함되는 가장 작은 폐집합)

\*  $\text{int}(A) = (\overline{A^c})^c, \overline{A} = [\text{int}(A^c)]^c$

5.  $\frac{11}{2}, 41$

$$e((1, 3), (-1, 1/2)) = \{|0-1| + |0-3|\} + \{|0-(-1)| + |0-1/2|\}$$

$$= 1+3+1+\frac{1}{2} = \frac{11}{2}.$$

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid e((x, y), (1, 3)) < 9\}$ 의 정수점

$$= \{(1, 3)\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid |x| + |y| + 1 + 3 < 9, (x, y) \neq (1, 3)\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid |x| + |y| \leq 4\}, 41\text{개}.$$

6.  $8, B' = \{2, 3\}$

①  $k = -1, -2, -3$ 일 때,

$$f^{-1}(\{-3\}) = f^{-1}(\{-2\}) = f^{-1}(\{-1\}) = \emptyset \in \mathfrak{I}_u,$$

②  $k = 0, 1, 2, 3$ 일 때,

$$f^{-1}(\{k\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid k \leq x^2 + y^2 < k+1\}.$$

$(X, \mathfrak{I})$ 의 기저개집합  $\{-3\}, \{-2\}, \{-1\}, \{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 2, 3\}$ ,

$\mathfrak{I} = \wp(\{-1, -2, -3\}) \cup \{\{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 2, 3\}\} \cup \{\emptyset\}$ .

3을 포함하는 개집합은 8개 있다.

\*  $\{0, 1, 2, 3\} \cup G (G \in \wp(\{-1, -2, -3\}))$

$$\overline{B} = \{1, 2, 3\}, \{B\text{의 고립점}\} = \{1\} \text{이므로 } B' = \overline{B} - \{B\text{의 고립점}\} = \{2, 3\}.$$

7.  $\overline{A} = \{(x, 0) \mid 0 \leq x < 1\}, B = \left\{ \left( \frac{1}{n}, 0 \right) \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$

한 점  $x \in \mathbb{R}^2, \varepsilon > 0$ 라 하자.

①  $0 < \varepsilon \leq \|x\|$ 일 때,

$$B_d(x, \varepsilon) = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, p) < \varepsilon\} = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid x = p\} = \{x\}.$$

(원점을 제외하면 이산위상)

②  $\|x\| < \varepsilon$ 일 때,

$$\begin{aligned} B_d(x, \varepsilon) &= \{p \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, p) < \varepsilon\} \\ &= \left\{ p \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} d(x, p) = 0 < \varepsilon, p = x \\ d(x, p) = \max\{\|x\|, \|p\|\} < \varepsilon, p \neq x \end{cases} \right\} \\ &= \left\{ p \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} p = x \\ p \neq x, \|x\| < \varepsilon, \|p\| < \varepsilon \end{cases} \right\} \\ &= \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \|p\| < \varepsilon\}: \text{원점 중심 반지름 } \varepsilon \text{인 원} \end{aligned}$$

$(\mathbb{R}^2, \mathfrak{I}_d)$ 의 기저

$$\mathcal{B} = \{B_d(x, \varepsilon) \mid x \in \mathbb{R}^2, \varepsilon > 0\}$$

$= \{\{x\} \mid x \neq (0, 0)\} \cup \{\{x\} \mid \|x\| < \varepsilon\}$ 이므로

$$\overline{A} = \bigcap_{A \subset F, F^c \in \mathcal{B}} F = \{(x, 0) \mid 0 \leq x < 1\} = [0, 1] \times \{0\} \neq [0, 1].$$

$$B = \left\{ \left( \frac{1}{n}, 0 \right) \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0 = (0, 0)\}: \text{컴팩트 무한 부분집합}$$

( $\because$ )  $B$ 의 개피복  $\{G_i\}_{i \in I}$ 라 하면  $0 \in G_0 \in \{G_i\}_{i \in I}$  있다.

이때,  $0 \in B_d(0, \varepsilon) \subset G_0$ 인  $\varepsilon > 0$  있다.

$$\frac{1}{N} < \varepsilon \text{인 } N \in \mathbb{N} \text{을 택하면 } n \geq N \text{일 때, } \left( \frac{1}{n}, 0 \right) \in G_0.$$

한편,  $(1, 0), \left( \frac{1}{2}, 0 \right), \dots, \left( \frac{1}{N-1}, 0 \right)$ 을 포함하는

$G_1, G_2, \dots, G_{N-1}$  있다.

그러므로  $B \subset G_0 \cup G_1 \cup \dots \cup G_{N-1}, B$ 는 컴팩트이다.

\*  $(0, 0)$ 의 연결성분  $\{(0, 0)\}, (\mathbb{R}^2, \mathfrak{I}_d)$ 는 비연결공간

8.

$(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_l) \times (\mathbb{R}, \mathfrak{I}_u)$ 의 기저  $\mathcal{B} = \{[a, b) \times (c, d] \in \mathbb{R}^2 \mid a < b, c < d\}$ 이므로

$$A^\circ = \bigcup \{G \mid G \subset A, G \in \mathcal{B}\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, x < 0, y > 0\}.$$

$$\overline{A} = \bigcap \{F \mid A \subset F, F^c \in \mathcal{B}\} = \{A\text{의 밀착점}\} = A.$$

$$b(A) = \overline{A} - A^\circ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, x \geq 0 \vee y \leq 0\}.$$

\*  $\{A\text{의 고립점}\} = \{(1, 0), (0, -1)\}$

$$9. A' = \left( \frac{1}{2}, 1 \right)$$

$(\mathbb{R}, \mathcal{J})$ 의 기저  $\mathcal{B} = \{\{m\} \mid m \in \mathbb{Z}\} \cup \{(n, n+2^{-k}) \mid n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\}$

$$A' = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \forall G \in \mathcal{B}, (G - \{x\}) \cap A \neq \emptyset\} = \left( \frac{1}{2}, 1 \right).$$

\* 다른 설명

$$\overline{A} = [\text{int}(A^c)]^c = [\text{int}((- \infty, 1/2) \cup (1/2, \infty))]^c$$

$$= \left[ \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \{m\} \cup \bigcup_{n \neq 0} (n, n+1) \cup (0, 1/2) \right]^c = \left[ \frac{1}{2}, 1 \right].$$

$$\{A \text{의 고립점}\} = \{p \in A \mid \exists G_0 \in \mathcal{J} \text{ s.t } G_0 \cap A = \{p\}\} = \left\{ \frac{1}{2} \right\}.$$

$$A' = \overline{A} - \{A \text{의 고립점}\} = \left( \frac{1}{2}, 1 \right).$$

$$* \text{ int}(A) = \emptyset, \text{ b}(A) = \left[ \frac{1}{2}, 1 \right), \text{ ext}(A) = (-\infty, 1/2) \cup [1, \infty).$$

$$10. |A| = 9$$

$\mathcal{J} = \{\mathbb{N} - F \mid F: \text{유한}\}, \mathcal{J}_d$ 의 기저  $\{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

①  $1 \leq n \leq 4$  일 때,  $f(n) = 1$ 을 포함하는 기저 개집합  $\{1\}$ 에 대하여

$f^{-1}(\{1\}) = \{1, 2, 3, 4\}$ 는 유한집합이므로

$n \in G \subset f^{-1}(\{1\})$ 가 되는  $G \in \mathcal{J}$ 가 존재하지 않는다.

따라서  $1 \leq n \leq 4$  일 때 불연속이다.

②  $5 \leq n \leq 9$  일 때,  $f(n) = 2$ 를 포함하는 기저 개집합  $\{2\}$ 에 대하여

$f^{-1}(\{2\}) = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ 는 유한집합이므로

$n \in G \subset f^{-1}(\{2\})$ 가 되는  $G \in \mathcal{J}$ 가 존재하지 않는다.

따라서  $5 \leq n \leq 9$  일 때 불연속이다.

③  $n \geq 10$  일 때  $f(n) = 3$ 을 포함하는 기저 개집합  $\{3\}$ 에 대하여

$f^{-1}(\{3\}) = \{10, 11, 12, \dots\} = \mathbb{N} - \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ ,

$n \in \mathbb{N} - \{1, 2, \dots, 9\} = f^{-1}(\{3\})$ 이므로  $n \geq 10$  일 때 연속이다.

그러므로  $|A| = 9$ .

$$11. \overline{A \times B} = \mathbb{Z} \times \{\pm 1\}, (A \times B)^{\circ} = \{0\} \times \{\pm 1\}, b(A \times B) = (\mathbb{Z} - \{0\}) \times \{\pm 1\}.$$

$n \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ 에 대하여

$$f(n) = n^2 \in (n^2 - 1, n^2 + 1) \in \mathcal{J}, f^{-1}((n^2 - 1, n^2 + 1)) = \{\pm n\} \in \mathcal{J}_1.$$

따라서  $\mathcal{J}_1$ 의 기저  $\mathcal{B} = \{\{\pm n\} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ .

한편,  $[n^2 - 1, n^2 + 1] \in \mathcal{J}^c$ 이고,  $f$ 역상  $\{\pm n\}$ 이다.

\*  $f$ 는 연속이므로 폐집합의 역상은  $(\mathbb{Z}, \mathcal{J}_1)$ 에서 폐집합

$A$ 를 포함하는 최소 폐집합  $\overline{A} = \{0\} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ ,

$B$ 를 포함하는 최소 폐집합  $\overline{B} = \{\pm 1\} = B$ 이므로  $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B} = \mathbb{Z} \times \{\pm 1\}$ .

$A$ 에 포함되는 최대 개집합(기저 개집합)  $\{0\}$ ,

$B$ 에 포함되는 최대 개집합(기저 개집합)  $\{\pm 1\}$ 이므로

$$(A \times B)^{\circ} = A^{\circ} \times B^{\circ} = \{0\} \times \{\pm 1\}.$$

$$b(A \times B) = \overline{A \times B} - \text{int}(A \times B) = (\mathbb{Z} \times \{\pm 1\}) - (\{0\} \times \{\pm 1\}) = (\mathbb{Z} - \{0\}) \times \{\pm 1\}.$$

$$* A' = \{-1, -2, -3, -4, \dots\}, \{A \text{의 고립점}\} = A$$

$$* B' = B, \{B \text{의 고립점}\} = \emptyset$$

$$12. ②$$

$$\neg. f : (\mathbb{Q} \times \mathbb{R} - \mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{R} - \mathbb{Q}, f(x, y) = y \text{라 하면}$$

$f$ 는 전사이므로  $\mathbb{Q} \times (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ 의 기수(cardinal number)는  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ 이상.

따라서  $\mathbb{Q} \times (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ 는 비가산집합.

\neg.  $g : F \rightarrow \mathbb{Q}, g(x) = x$ 라 정의하면  $g$ 는 단사이므로  $F$ 의 기수는  $\mathbb{Q}$ 이하가 되고  $\mathbb{Q}$ 는 가산집합이므로  $F$ 는 가산집합이다.

$$\neg. \mathbb{R} / \sim = \{[x] \mid x \in \mathbb{R}\} = \{[r], [0] \mid r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}\},$$

$$h : \mathbb{R} / \sim \rightarrow \mathbb{R} - \mathbb{Q} \cup \{0\}, h([x]) = x \text{라 하면 } h \text{는 전사이므로}$$

$\mathbb{R} / \sim$ 은 비가산집합이다.

$$13. ③$$

$a, b \in \mathbb{R}, a < b$ 라 하자.

$$(i) b \leq 0, f^{-1}([a, b]) = \emptyset \in \mathcal{J}_1$$

$$(ii) 0 = a < b, f^{-1}([a, b]) = (-b, b) \in \mathcal{J}_1$$

$$(iii) 0 < a < b, f^{-1}([a, b]) = (-b, -a) \cup [a, b] \in \mathcal{J}_1$$

이므로  $(\mathbb{R}, \mathcal{J}_1)$ 의 기저  $\mathcal{B}$ 는

$$\mathcal{B} = \{\emptyset\} \cup \{(-b, b) \mid b > 0\} \cup \{(-b, -a) \cup [a, b] \mid 0 < a < b\}.$$

$(-2, 1)$ 에 포함되는 가장 큰 개집합  $A = (-1, 1)$

$[1, 2]$ 에 포함되는 가장 큰 개집합  $B = \emptyset$

\* 하한위상은 보통위상을 포함하고  $[a, b]$ 는 폐집합

$$14. ④$$

\neg.  $A \cap A \neq \emptyset$ 이므로  $\sim$ 은 반사적이다.

\neg.  $A \cap B \neq \emptyset$ 이면  $B \cap A \neq \emptyset$ 이므로  $\sim$ 은 대칭적이다.

\neg.  $(0, 2) \cap (1, 3) \neq \emptyset, (1, 3) \cap (2, 3) \neq \emptyset$ 이지만

$(0, 2) \cap (2, 3) = \emptyset$ 이므로  $\sim$ 은 추이적이지 않다.

그러므로 관계  $\sim$ 은  $X$ 위의 동치관계가 아니다.

$$15. ①$$

$$\neg. \text{ int}(A^c) = [\overline{(A^c)^c}]^c = (\overline{A})^c = X - \overline{A}.$$

\neg. 보통위상공간에서  $A = \{0\}$ 라 하면

$$\overline{A} = \{0\}, \text{ int}(\overline{A}) = \emptyset \text{에서 } \overline{\text{int}(\overline{A})} = \emptyset \neq \overline{A}.$$

\neg. 일반적으로  $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$ 이므로 성립하지 않는다.

(보통위상공간에서  $A = \{0\}, B = (0, 1)$ )

$$16. ①$$

$a, b \in \mathbb{R}, a < b$ 라 하자.

(i)  $0 \in (a, b)$ 일 때

$$f^{-1}((a, b)) = (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q} \cap (a, b)) = [(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}] \cap (a, b) = (a, b) \in \mathcal{J}_0$$

(ii)  $0 \notin (a, b)$ 일 때

$$f^{-1}((a, b)) = (a, b) \cap \mathbb{Q} \in \mathcal{J}_0$$

따라서  $(\mathbb{R}, \mathcal{J}_0)$ 의 기저  $\mathcal{B}$ 는

$$\{\{f^{-1}(G) \mid 0 \in G \in \mathcal{J}\} \cup \{\{f^{-1}(G) \mid 0 \notin G \in \mathcal{J}\}\}$$

$$= \{(a, b) \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \mid a < 0 < b\} \cup \{(a, b) \cap \mathbb{Q} \mid 0 \notin (a, b)\}$$

(0을 포함) (0이 없음)

①  $\sqrt{2} \in G \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ 인  $G = (a, b) \in \mathcal{B}$  있다( $a < 0 < b$ ).

유리수 조밀성에 의해  $q \in G$  있다. 모순.

② 0을 포함하는 개집합은 무리수를 항상 가지므로  $\mathbb{Q}$ 의 내점이 될 수 없다.  $(a, b) \cap \mathbb{Q}$ 의 개집합 중에서  $\mathbb{Q}$ 에 포함되는 가장 큰 개집합은  $\mathbb{Q} - \{0\} = [(-\infty, 0) \cup (0, \infty)] \cap \mathbb{Q}$ 이므로  $\text{int}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} - \{0\}$ .

폐집합은  $[a, b](a < 0 < b), [a, b] \cap \mathbb{Q}(0 \notin (a, b))$ 들과 그 합집합이며, 유리수를 항상 포함. 따라서  $\mathbb{Q}$ 를 포함하는 가장 작은 폐집합  $\mathbb{R}$ .

$$b(\mathbb{Q}) = \overline{\mathbb{Q}} - \text{int}(\mathbb{Q})$$

$$= \mathbb{R} - [\mathbb{Q} - \{0\}] = (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cup \{0\}.$$

( $\overline{\mathbb{Q}} = [\text{ext}(\mathbb{Q})]^c$ 임을 이용할 수도 있다.)

③  $f^{-1}((-1, 1)) = (-1, 1) \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ 이므로 옳다.

④  $f$ 는 연속이고  $[-1, 1] \in \mathcal{J}^c$ 이므로  $f^{-1}([-1, 1]) = [-1, 1] \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \in \mathcal{J}_0^c$ .

⑤ 0을 포함하는 임의의 개집합  $G$ 에 대하여

$$0 \in (a, b) \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \subset G \text{인 } a, b \in \mathbb{R} \text{ 있다.}$$

따라서  $(G - \{0\}) \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \supset [G - ((a, b) \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q}))] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \neq \emptyset$ ,

0은  $(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ 의 집적점이다.

17. ③

¬. 옳은 설명

↪  $f^{-1}(f(A) \cap B) = f^{-1}(f(A)) \cap f^{-1}(B) \supset A \cap f^{-1}(B)$  이고 단사일 때 같다.

□.  $f(A \cap f^{-1}(B)) \subset f(A) \cap f(f^{-1}(B)) \subset f(A) \cap B$ ,  
 $y \in f(A) \cap B$  이면  $y \in B$ ,  $y = f(x)$  인  $x \in A$  있다.  
 $x = f^{-1}(y) \in B$  이므로  $x \in A \cap f^{-1}(B)$  이다.  
 따라서  $y = f(x) \in f(A \cap f^{-1}(B))$   
 그러므로  $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$  이다.

18. ①

①  $\text{int}(\mathbb{Z}) = (\overline{\mathbb{Z}^c})^c = [c(\mathbb{Z}^c)]^c = \mathbb{R}^c = \emptyset$ .

②  $\text{int}([0, 1]) = (\overline{[0, 1]^c})^c = [c([0, 1]^c)]^c = \mathbb{R}^c = \emptyset$ .

③  $\text{int}(\mathbb{R} - \mathbb{Z}) = (\overline{(\mathbb{R} - \mathbb{Z})^c})^c = [c(\mathbb{R} - \mathbb{Z})^c]^c = \mathbb{Z}^c = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ .

$[c(A)]^c = \begin{cases} \mathbb{R} - A, & A \text{는 가산(countable)집합} \\ \emptyset, & A \text{는 비가산(uncountable)집합} \end{cases}$   
 $\Rightarrow$  여가산 위상

19. ②

¬.  $A_n \cap B_n = \{-n, -n+1, \dots, 0, \dots, n-1, n\} = [-n, n] \cap \mathbb{Z}$ ,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B_n) = A_1 \cap B_1 = \{-1, 0, 1\}.$$

↪  $A_n \cup B_n = \mathbb{Z}$  이므로  $\mathbb{Z} \cap \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n^c \cap B_n^c) \right) = \emptyset$ .

□.  $A_n - B_n = \{-n-1, -n-2, -n-3\}$  이므로

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n - B_n) = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq -2\},$$

20. ③

$$\mathfrak{I} = \{U \subset A \mid f^{-1}(U) \in \mathfrak{I}_1\}$$

$$= \{A, \emptyset, \{1\}, \{4\}, \{1, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$$

8개 있다.

21. ①

①  $6 \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$  이며  $B_6 = \{1, 2, 3, 6\}$  이다. 만약  $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$  가 열린 집합이면  $6 \in B_6 \subset A$ 에서  $3 \not\in A$ 가 되어 모순이다.

②  $\cup \{p \mid p: \text{소수}\} = \{2\} \cup \{3\} \cup \{5\} \cup \dots$

$$= \bigcup_{p: \text{소수}} B_p$$
 이므로

소수 전체의 집합은 열린 집합이다.

③ 소수 전체의 집합을  $P$ 라 하고  $\overline{P} = X$ 임을 보인다.

$x \in X = \{2, 3, 4, \dots\}$  를 포함하는 개집합  $G$ ,

$x \in B_x \subset G$ 인 기저원  $B_x$  있고, 소수  $p$ 가 존재해서

$p|x$  이므로  $B_p \subset B_x$ ,  $G \cap P \supset B_x \cap P \ni p$  이므로

$G \cap P \neq \emptyset$ . 그러므로  $\overline{P} = X$ .

④  $y \in \overline{\{x\}}$  이면  $B_y \cap \{x\} \neq \emptyset$  즉,  $x \in B_y$  이므로  $x|y$ .

따라서  $y$ 는  $x$ 의 배수이므로  $y \in \{nx \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

$y \in \{nx \mid n \in \mathbb{N}\}$  이면  $y = mx$  인  $m \in \mathbb{N}$  있다.

이때  $x|y$  이므로  $x \in B_y$ .  $y$ 를 포함하는 임의의 개집합  $G$ 에 대하여

$y \in B_y \subset G$  이므로  $\emptyset \neq B_y \cap \{x\} \subset G \cap \{x\}$ .

그러므로  $\overline{\{x\}} = \{nx \mid n \in \mathbb{N}\} = x\mathbb{N}$ .

⑤  $f(2) = 2$  를 포함하는  $\mathfrak{I}'$ -개집합  $G$ 는  $\{2\} \subset G$  이며,

$2 \in \{2\} = f^{-1}(\{2\}) \subset f^{-1}(G)$ ,  $B_2 = \{2\} \in \mathfrak{I}$  이므로

$f$ 는  $x = 2$  에서 연속이다.

22. ④

$x \in X - A$ 에 대하여  $[x] = \{x\}$ ,  $y \in A$ 에 대하여  $[y] = \{2, 4, 6\}$ .

그러므로  $n(X/R) = |X/R| = |\{[1], [3], [5], [7], [8], [2]\}| = 6$ .

\*  $R(\sim)$ 은  $X$  상의 동치관계이다.

①  $x \in X$  이면  $x \in A$  또는  $x \in X - A$  며

$x \in A$  일 때,  $x \sim 2, 4, 6$ ,  $x \in X - A$  일 때,  $x \sim x$ .

따라서  $R$ 은 반사적이다.

②  $x, y \in X$ 에 대하여  $x \sim y$  이면  $x, y \in A$  또는  $x = y \in X - A$  이므로  $y \sim x$ .

따라서  $R$ 은 대칭적이다.

③  $x, y, z \in X$ 에 대하여  $x \sim y$ ,  $y \sim z$  이면  $x, y, z \in A$  또는  $x = y = z \in X - A$  이므로  $x \sim z$ .

따라서  $R$ 은 추이적이다.

23. ②

가정에 의해  $a$ 를 포함하는 개집합은  $\{a, c\}$ 를 포함하고 있어야 하고  $b$ 를 포함하는 개집합은  $\{b, c\}$ 를 포함하고 있어야 하며  $c$ 를 포함하는 개집합은  $\{c\}$ 를 포함하고 있어야 하며  $d$ 를 포함하는 개집합은  $X$  뿐이다.

따라서  $\{a, c\}, \{b, c\}, \{c\} \in \mathfrak{J}$  이다.

①  $\{a, c\} \cup \{b, c\} = \{a, b, c\} \in \mathfrak{J}$

②  $\{a, b\} \in \mathfrak{J}$  이면  $\{a\} = \{a, b\} \cap \{a, c\} \in \mathfrak{J}$  가 되어  $\{a, c\} \subset \{a\}$ , 모순이다.

③  $\{a, c, d\} \in \mathfrak{J}$  이면  $\{a, c, d\}$ 는  $d$ 를 포함하는 개집합이므로  $X \subset \{a, c, d\}$  가 되어 모순이다.

24. ②

$$\left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) = \{0\}.$$

① 0이 아닌  $x$ 가 존재해서  $x \in \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c$  라 하자.

$0 < |x|$  이고, 아르키메데스 원리에 의해  $0 < \frac{1}{N} < |x|$ 인 자연수  $N$  있다. 모

순이다. ( $n \geq N$  이면  $x \notin \left( \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n \right)^c$ )

② 임의의 자연수  $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여  $-\frac{1}{n} < 0 < \frac{1}{n}$  이므로  $0 \in \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c$ .

25. ④

①  $(1, \infty)$ 은 개집합이고,  $f^{-1}((1, \infty)) = \emptyset \in \mathfrak{J}$

②  $(-1, 1)$ 은 개집합이고  $f^{-1}((-1, 1)) = \{0\} \in \mathfrak{J}$

③  $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ 은 개집합이고

$f^{-1}((-\infty, 0) \cup (0, \infty)) = \mathbb{Z} - \{0\} \in \mathfrak{J}$

④  $f^{-1}(G) = \{2k \mid k \text{는 자연수}\}$  이 되는 개집합  $G$ 가 존재한다고 하면

$f(f^{-1}(G)) = f(\{2k \mid k \text{는 자연수}\}) = \{1\} \subset G$ .

이때  $f^{-1}(\{1\}) = \mathbb{Z} - \{0\} \subset f^{-1}(G)$ , 모순이다.

⑤  $(-\infty, 1)$ 은 개집합이고  $f^{-1}((-\infty, 1)) = \{2k-1 \mid k \text{는 정수}\} \cup \{0\} \in \mathfrak{J}$

\*  $\mathfrak{J} = \{f^{-1}(G) \mid G: \mathbb{R} - \text{개집합}\}$

26. ②

① 현정: 틀림

② 기태: 위상 공간에는 열린 집합도 닫힌 집합도 아닌 집합이 있다.

③ 수연:  $\overline{A} = \text{int}(A) \cup \text{b}(A)$ 에서  $\text{int}(A) = \overline{A} - \text{b}(A)$  라 쓸 수 있는 것은  $\text{int}(A) \cap \text{b}(A) = \emptyset$  이기 때문이다.

④ 영호: 보통위상공간에서 개집합  $A = (-1, 1)$ 에 대하여

$\text{int}(A) = A$ ,  $\overline{A} = [-1, 1]$ ,  $\text{b}(A) = \overline{A} - \text{int}(A) = \{-1, 1\} \neq \emptyset$ .

27.  $\text{int}(A) = A$ ,  $A' = \mathbb{R}$ ,  $\overline{A} = \mathbb{R}$ ,  $b(A) = \mathbb{Q}$ .

$\mathfrak{I}^c = \{F \subset \mathbb{R} \mid F \text{는 가산집합}\} \cup \{\mathbb{R}\}$ 이고  $A^c = \mathbb{Q} \in \mathfrak{I}^c$ 이므로  $A^c$ 은 폐집합. 따라서  $A$ 는 개집합이다.  $\text{int}(A) = A$ .

$\mathfrak{I}^c$ 의 원소는 가산집합 또는  $\mathbb{R}$ (비가산집합)이므로  $\overline{A} = \mathbb{R}$ .

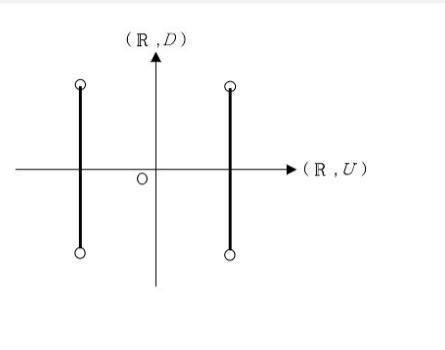
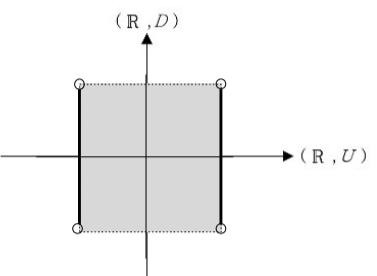
$b(A) = \overline{A} - \text{int}(A) = \mathbb{R} - (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$

$A' = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \forall G \in \mathfrak{I}, (G - \{x\}) \cap A \neq \emptyset\} = \mathbb{R}$ .

28. 실폐포:  $[-1, 1] \times (-1, 1)$ , 경계:  $\{-1, 1\} \times (-1, 1)$

• 폐포

• 경계



$U$ 에서  $\overline{(-1, 1)} = [-1, 1]$ ,  $D$ 에서  $\overline{(-1, 1)} = (-1, 1)$ ,

$\overline{A} = \overline{(-1, 1) \times (-1, 1)} = [-1, 1] \times (-1, 1)$ 이다.

$(-1, 1) \in U, D$ 이므로  $\text{int}(A) = A$ .

$b(A) = \overline{A} - \text{int}(A)$

$$\begin{aligned} &= \overline{(-1, 1) \times (-1, 1)} - \text{int}((-1, 1) \times (-1, 1)) \\ &= [-1, 1] \times (-1, 1) - (-1, 1) \times (-1, 1) \\ &= \{-1, 1\} \times (-1, 1). \end{aligned}$$

\* 다른 풀이

적공간의 기저  $\mathcal{B} = \{(a, b) \times \{c\} \mid a, b, c \in \mathbb{R}, a < b\}$ .

$\overline{A} = \cup \{F \mid A \subset F, F^c \in \mathcal{B}\} = [-1, 1] \times (-1, 1)$

$\text{int}(A) = \cup \{G \mid G \subset A, G \in \mathcal{B}\} = A$

따라서  $b(A) = \overline{A} - \text{int}(A) = \{-1, 1\} \times (-1, 1)$

\* 다른 설명:  $b(A \times B) = (b(A) \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times b(B))$

$b((-1, 1) \times (-1, 1))$

$= (b((-1, 1)) \times \overline{(-1, 1)}) \cup (\overline{(-1, 1)} \times b((-1, 1)))$

$= (\{-1, 1\} \times (-1, 1)) \cup ((-1, 1) \times \emptyset)$

$= \{-1, 1\} \times (-1, 1)$

\*  $b(A) = \mathbb{R} \times \mathbb{R} - (\text{int}(A) \cup \text{ext}(A))$ ,  $\text{int}(A) = (\overline{A^c})^c$ ,

$\text{ext}(A) = \text{int}(A^c) = (\overline{A})^c$ 를 이용해도 된다.

29.

$\mathbb{R}$ 에서 개집합  $G$ 에 대하여  $f^{-1}(G) = G \times \mathbb{R}$ 는  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 에서 개집합이므로  $f$ 는 연속사상이다.

폐집합  $A = \left\{ (x, \frac{1}{x}) \mid x > 0 \right\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 에 대하여

$f(A) = (0, \infty)$ 은 폐집합이 아니므로  $f$ 는 폐사상 아니다.

30.

상위상:  $\{\mathbb{Z}\} \cup \{\emptyset\} \cup \{\dots n-2, n-1, n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

보통위상을  $\mathfrak{I}$ , 상위상을  $\mathfrak{I}_1$ 라 하자.  $f^{-1}(\mathbb{Z}) = \mathbb{R}$ ,  $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathfrak{I}$ 이다.

$n \in \mathbb{Z}$ 에 대하여  $f^{-1}(\{n\}) = [n, n+1] \not\subseteq \mathfrak{I}$ 이므로

$\mathfrak{I}_1 = \{U \subset \mathbb{Z} \mid f^{-1}(U) \in \mathfrak{I}\} = \{\mathbb{Z}\} \cup \{\emptyset\} \cup \{\dots n-2, n-1, n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ .

31. (1) 여유한 위상 (2)  $\mathbb{N}' = \mathbb{R}$

(1)  $\mathfrak{I}$ : 여유한 위상

$\mathfrak{I} = \{\mathbb{R} - \{p\} \mid p \in \mathbb{R}\}$ 의 유한 교집합은

$\mathbb{R} - \{p_1, p_2, \dots, p_n\} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}^c$ 이므로

$\mathfrak{I} = \{\mathbb{R} - F \mid F: \text{유한집합}\} \cup \{\emptyset\}$ .

즉,  $\mathfrak{I}$ 는  $\mathbb{R}$  상의 여유한 위상이다.

(2)  $\mathbb{N}' = \mathbb{R}$

$x \in \mathbb{R}$ 를 포함하는  $\mathfrak{I}$ 의 원소  $G$ 에 대하여  $G = \mathbb{R} - F$ 인 유한집합  $F$  있다.

( $\mathfrak{I}$ 의 원소는  $\emptyset$  아니면  $\mathbb{R} - F$ 인데,  $x$ 를 포함하려면  $\mathbb{R} - F$  끝 밖에 없다.)

$G - \{x\} = \mathbb{R} - F - \{x\} \supset \mathbb{N} - F - \{x\} \neq \emptyset$ 이므로

$(G - \{x\}) \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$ ,  $\mathbb{R} \subset \mathbb{N}'$ , 즉  $\mathbb{N}' = \mathbb{R}$ .

32.

(1)  $f^{-1}(\{1\}) = \{1, 2\}$ ,  $f^{-1}(\{3\}) = \{3, 4, 5\}$ ,

$f^{-1}(\{2\}) = \emptyset = f^{-1}(\{4\}) = f^{-1}(\{5\})$ 는 모두  $\mathfrak{I}$ 에 속하므로

임의의  $2^X$ 의 원소의 역상도 모두  $\mathfrak{I}$ 에 속한다.

그러므로  $f$ 는 연속이다.

(2)  $\mathfrak{I}^c = \{\emptyset, X, \{3, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{1, 2\}, \{1\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{3, 5\}, \{1, 3, 5\}\}$

$\overline{\{2\}} = \{1, 2\}$ ,  $\overline{\{4\}} = \{3, 4, 5\}$ 이다.

(3) 구하는 원소의 개수는 1이다.

(2)에서 구한 폐포를 활용하자.  $f$ 가 연속이면

$f(\overline{\{2\}}) = f(\{1, 2\}) \subset \overline{f(\{2\})} = \overline{\{1\}} = \{1\}$ ,

$f(\overline{\{4\}}) = f(\{3, 4, 5\}) \subset \overline{f(\{4\})} = \overline{\{3\}} = \{3\}$ 이다.

(공역의 위상은 이산위상이다.)

그러므로 구하는 원소의 개수는 1개.

33.

(1) 위상동형사상의 정의

①  $f$ 가 1-1 대응함수이다.

②  $f$ 가 연속함수이다. 즉,  $Y$ 의 임의의 열린집합  $U$ 에 대하여  $f^{-1}(U)$ 가  $X$ 의 열린집합이다.

③  $f^{-1}$ 가 연속함수이다. 즉,  $X$ 의 임의의 열린집합  $V$ 에 대하여  $f(V)$ 가  $Y$ 의 열린집합이다.

(2) 위상동형사상의 개수

$f : (X, \mathfrak{I}) \rightarrow (X, \mathfrak{I})$ 가 위상동형사상이라 하자.

$f(X) = X$ ,  $f(\emptyset) = \emptyset$ ,  $G \in \mathfrak{I} \Leftrightarrow f(G) \in \mathfrak{I}$ 이고  $n(G) = n(f(G))$ 이다.

가능한 경우는 다음 8가지 있다.

(i)  $f(\{a, b\}) = \{a, b\}$ ,  $f(\{c, d\}) = \{c, d\}$

    ⊓  $f(a) = a$ ,  $f(b) = b$ ,  $f(c) = c$ ,  $f(d) = d$

    ⊓  $f(a) = a$ ,  $f(b) = b$ ,  $f(c) = d$ ,  $f(d) = c$

    ⊓  $f(a) = b$ ,  $f(b) = a$ ,  $f(c) = c$ ,  $f(d) = d$

    ⊓  $f(a) = b$ ,  $f(b) = a$ ,  $f(c) = d$ ,  $f(d) = c$

(ii)  $f(\{a, b\}) = \{c, d\}$ ,  $f(\{c, d\}) = \{a, b\}$

    ⊓  $f(a) = c$ ,  $f(b) = d$ ,  $f(c) = a$ ,  $f(d) = b$

    ⊓  $f(a) = c$ ,  $f(b) = d$ ,  $f(c) = b$ ,  $f(d) = a$

    ⊓  $f(a) = d$ ,  $f(b) = c$ ,  $f(c) = a$ ,  $f(d) = b$

    ⊓  $f(a) = d$ ,  $f(b) = c$ ,  $f(c) = b$ ,  $f(d) = a$

### 34. $A' = \{d, e\}$

- ①  $a$ 를 포함하는 가장 작은 개집합:  $\{a\}$
- ②  $b$ 를 포함하는 가장 작은 개집합:  $\{b\}$
- ③  $c$ 를 포함하는 가장 작은 개집합:  $\{a, c, d\}$
- ④  $d$ 를 포함하는 가장 작은 개집합:  $\{a, c, d\}$
- ⑤  $e$ 를 포함하는 가장 작은 개집합:  $X$

그러므로  $x \in X$ 를 포함하는 임의의 개집합  $G$ 에 대하여  $(G - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ 을 만족하는  $x = d, e$ . 그러므로  $A' = \{d, e\}$ .

\* 다른 풀이

$$A' = \{x \in X \mid x \in \forall G \in \mathcal{I}, (G - \{x\}) \cap A \neq \emptyset\} = \{d, e\}.$$

### 35. $x, y, z \in X$ 라 하자.

- (i)  $d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \geq 0$ .
- (ii)  $d_1(x, y) = 0 \Leftrightarrow \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = 0 \Leftrightarrow d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ .
- (iii)  $d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = \frac{d(y, x)}{1 + d(y, x)} = d_1(y, x)$ .
- (iv)  $d_1(x, y) + d_1(y, z) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(y, z)}$   
 $\geq \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(y, z) + d(x, y)}$   
 $= \frac{d(x, y) + d(y, z)}{1 + d(x, y) + d(y, z)}$   
 $\geq \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} = d_1(x, z)$ .

따라서  $(X, d_1)$ 은 거리공간이다.

한편  $d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \leq \frac{d(x, y)}{d(x, y)} = 1$ 이므로  $(X, d_1)$ 은 유계이다.

### 36. $\overline{\{x_2\}} = \{x_2, x_5\}$

$T^c = \{X, \emptyset, \{x_2, x_3, x_4, x_5\}, \{x_3, x_4, x_5\}, \{x_2, x_5\}, \{x_5\}\}$ 이므로  $\{x_2\}$ 를 포함하는 가장 작은 폐집합은  $\overline{\{x_2\}} = \bigcap_{\{x_2\} \subset F, F^c \in T} F = \{x_2, x_5\}$ .

### 37. 두 도형이 위상동형이라 하고, 연결성은 위상적 성질임을 이용하자.

첫 번째 도형의 두 선분이 교차하는 점을 제외한 도형에서 연결성분은 4개 있다.

그런데 두 번째 도형의 어떤 한 점을 제외해도 연결성분이 4개가 될 수 없으므로 이는 두 도형이 위상동형이라 가정한 데 모순이다.

따라서 두 평면도형은 위상적으로 동형이 아니다.

\* 다른 풀이

두 도형  $X, Y$ 가 서로 위상적으로 동형이라 하자.

$X$ 에서  $Y$ 로의 함수  $f$ 가 존재해서 위상적 성질에 의해서 연결성이 같아야 한다.

#### ① $f(A) = B$ 일 때

$X - \{A\}$ ,  $Y - \{f(A)\}$  사이의 위상동형을 준다. 그런데 부분위상공간  $X - \{A\}$ 는 연결성분이 3개인 위상공간이고,  $Y - \{f(A)\}$ 는 연결성분이 4개인 위상공간이므로 동형일 수 없다.

#### ② $f(A) \neq B$ 일 때

$X - \{A\}$ 는 3개의 연결성분이 존재,  $Y - \{f(A)\}$ 는 연결성분이 2개인 위상공간이므로 동형일 수 없다.

이때, 두 도형이 위상적으로 동형이라는 가정에 모순이다.

그러므로  $f$ 는 위상동형사상이 될 수 없다.

따라서 두 도형  $X, Y$ 는 위상적으로 동형이 아니다.



### 38. ④

④는 열린(개) 사상의 정의

\*  $f : X \rightarrow Y$ 가 연속일 필요충분조건

①  $Y$ -개집합  $B$ 에 대하여  $f^{-1}(B)$ 가  $X$ -개집합

②  $Y$ -폐집합  $B$ 에 대하여  $f^{-1}(B)$ 가  $X$ -폐집합

③  $X$ -부분집합  $A$ 에 대하여  $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$

④  $Y$ -부분집합  $B$ 에 대하여  $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$

( $\because$ ) ①  $\Leftrightarrow$  ②임은 자명하다.

②  $\Rightarrow$  ③:  $\overline{f(A)}$ 는  $Y$ -폐집합이므로 ②에 의해  $f^{-1}(\overline{f(A)})$ 는  $X$ -폐집합.

$A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ 이고,  $\overline{A}$ 는  $A$ 를 포함하는 최소의  $X$ -폐집합이므로  $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ .

따라서  $f(\overline{A}) \subset \overline{f(f^{-1}(A))}$ .

③  $\Rightarrow$  ②:  $Y$ -폐집합  $B$ 에 대하여  $f^{-1}(B)$ 가  $X$ -폐집합임을 보이자.

$A = f^{-1}(B)$ 라 하면 ③에 의해

$f(\overline{f^{-1}(B)}) \subset \overline{f(f^{-1}(B))} \subset \overline{B} = B$ ,  $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(B)$ ,

$f^{-1}(B) \subset \overline{f^{-1}(B)}$ 이므로  $f^{-1}(B) = \overline{f^{-1}(B)}$

따라서  $f^{-1}(B)$ 는  $X$ -폐집합이다.

②  $\Rightarrow$  ④:  $\overline{B}$ 는  $Y$ -폐집합이므로  $f^{-1}(\overline{B})$ 는  $X$ -폐집합이다.

따라서  $\overline{f^{-1}(\overline{B})} = f^{-1}(\overline{B})$ 이다.  $B \subset \overline{B}$ 이므로

$f^{-1}(B) \subset f^{-1}(\overline{B})$ ,  $\overline{f^{-1}(B)} \subset \overline{f^{-1}(\overline{B})} = f^{-1}(\overline{B})$ 이므로  $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$ .

④  $\Rightarrow$  ②:  $Y$ -폐집합  $B$ 이면  $\overline{B} = B$ 이고, ④에 의해

$\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B}) = f^{-1}(B) \subset \overline{f^{-1}(B)}$ 이므로

$\overline{f^{-1}(B)} = f^{-1}(B)$ 가 되어  $f^{-1}(B)$ 는  $X$ -폐집합.

### 39. ②

①  $\overline{A} \subset \overline{A}$ 이므로  $\overline{A} \subset \overline{\overline{A}}$ 이다.  $x \in \overline{\overline{A}}$ 이면  $x$ 를 포함하는 임의의 개집합  $G$ 에 대하여  $y \in G \cap \overline{A}$ 인  $y$ 있다.  $y \in \overline{A}$ 이므로  $y$ 를 포함하는 임의의 개집합  $H$ 에 대하여  $H \cap A \neq \emptyset$ 이다. 한편  $G$ 는  $y$ 를 포함하는 개집합이므로  $G \cap A \neq \emptyset$ . 따라서  $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$ . 그러므로  $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ .

② 보통위상에서  $A = \{0\}$ ,  $B = (0, 1)$ 이면 성립하지 않는다.

③  $x \in A - \overline{B}$ 이면  $x \in A$ ,  $x \in (\overline{B})^c$ 이고,  $B = (B^c)^c$ ,

$$x \in [(\overline{B^c})^c]^c = \text{int}(B^c) (= \text{ext}(B)) \subset B^c.$$

즉  $x \in A$ 이고  $x \in B^c$ 이므로  $x \in A \cap B^c = A - B \subset \overline{A - B}$ .

④  $\emptyset$ 은 폐집합이므로  $\emptyset$ 을 포함하는 제일 작은 폐집합  $\overline{\emptyset} = \emptyset$ 이다.

## <수렴과 분리공리 · 컴팩트 · 연결>

1.

$-1 \leq x < 1$  일 때  $\frac{1}{2} \geq d((-1,0), (x,0)) = \min\{|x-1|, |x+1|, |x+3|\}$  를 풀면,

$-1 \leq x \leq -\frac{1}{2}$  또는  $\frac{1}{2} \leq x < 1$  이므로 구하는 값  $\frac{1}{2}$ .

$(\mathbb{R}_*^2, d_*)$  에서  $a_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$  이 코시열이라 하자.

거리함수  $d_*$  는 연속이므로 양의 실수  $\varepsilon_0 = \ln 2$  가 주어질 때,

$m, n \geq N$  이면  $d_*(a_m, a_n) < \varepsilon_0$  되는 자연수  $N$  있다.

$d_*(a_{2N}, a_N) = d((1/2, -\ln 2N), (1/2, -\ln N)) = \ln \frac{2N}{N} = \ln 2$ , 모순.

따라서  $\left\{\left(0, \frac{1}{n}\right)\right\}$  은 코시수열이 아니다.

2.

$\pi_1(a, b) = a^2 + b^2$ ,  $\pi_2(c, d) = c^2 + d^2$ ,  $\pi_3(a, b, c, d) = ac + bd$  는 연속이고,

$\{1\}, \{0\}$  는 폐집합이므로  $\pi_1^{-1}(1) \cap \pi_2^{-1}(1) \cap \pi_3^{-1}(0) = A$  는 폐집합.

$p, q \in A$  일 때  $d(p, q) \leq d(O, p) + d(O, q) = 2\sqrt{2}$  이므로

$d(A) \leq 2\sqrt{2}$ , 따라서  $A$  는 유계집합.

하이네-보렐 정리에 따라  $A$  는 컴팩트.

(다른 설명)

$d(A) < 2024$ ,  $A^c$  은 개집합이므로  $A$  는 유계폐집합.

하이네-보렐 정리에 따라  $A$  는 컴팩트.

$f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(a, b, c, d) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  는 직교행렬이므로  $\text{im } f = \{\pm 1\}$ .

$A$  가 연결이면  $f$  는 연속이므로  $f(A) = \{-1, 1\}$  가 연결이어야 한다.

이는 모순이므로  $A$  는 연결집합이 아니다.

3.  $\alpha \not\in K$  일 경우,  $G_\alpha = (\alpha - 1, \alpha + 1) \setminus K$  일 때  $K \cap (G_\alpha - \{\alpha\}) = \emptyset$ ,  $\alpha \not\in K'$ .

자연수  $n$  에 대하여  $G_n = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n(n+1)}, \frac{1}{n} + \frac{1}{2n(n+1)}\right)$  라 하면

\*  $G_n$  은  $\frac{1}{n} \in K$  를 포함하는 길이  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$  인 개구간

$K \cap \left(G_n - \left\{\frac{1}{n}\right\}\right) = \emptyset$ ,  $\frac{1}{n} \not\in K'$ .

그러므로  $K' = \emptyset$ .

$G_0 = (-1, 1)$ ,  $G_n = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n(n+1)}, \frac{1}{n} + \frac{1}{2n(n+1)}\right)$ ,  $I = \{0\} \cup \mathbb{N}$  라 하자.

$\{G_i\}_{i \in I}$  는  $[0, 1]$  의 개피복이지만 유한부분피복이 존재하지 않으므로

$[0, 1]$  은  $(\mathbb{R}, \mathcal{J})$  의 컴팩트 부분집합이 아니다.

(다른 풀이)

$\mathbb{R}$  위의 보통위상  $U$  라 하고  $K$  의  $(\mathbb{R}, U)$  에서 도집합을  $K_1$  라 하자.

$U \subset \mathcal{J}$ ,  $K_1 = \{0\}$  이므로  $K' \subset \{0\}$ .

$G = (-1, 1) - K$  는 0 을 포함하는  $\mathcal{J}$  에서의 개집합이지만

$(G - \{0\}) \cap K = \emptyset$  이므로  $0 \not\in K'$ . 따라서  $K' = \emptyset$ .

$[0, 1]$  가  $(\mathbb{R}, \mathcal{J})$  의 컴팩트 부분집합이라고 하면

$[0, 1]$  의 임의의 무한 부분집합에 대하여  $(\mathbb{R}, \mathcal{J})$  에서의 집적점이 존재한다.

그러나 위 결과에 의해  $[0, 1]$  는  $(\mathbb{R}, \mathcal{J})$  의 컴팩트 부분집합이 아니다.

(다른 풀이)

$x \in \mathbb{R}$  라 하자.

①  $x \in K$  일 경우 자연수  $N$  이 존재해서  $x = \frac{1}{N}$  라 할 수 있으며

$x$  를 포함하는 기저의 원소  $B = \left(\frac{1}{N+1}, \frac{1}{N-1}\right)$  일 때

$(B - \{x\}) \cap K = \emptyset$  이므로  $x \not\in K'$ .

②  $x \not\in K$  일 경우  $x$  를 포함하는 개집합  $G = \mathbb{R} - K$  에 대하여

$(G - \{x\}) \cap K = \emptyset$  이므로  $x \not\in K'$ .

$C = \{(-2, 2) - K\} \cup \left\{\left(\frac{1}{n}, 2\right) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$  는  $[0, 1]$  의 개피복이지만 유한부분피복을 갖지 않으므로  $[0, 1]$  은 컴팩트가 아니다.

4.  $\mathcal{J}_\beta = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{c\}, \{a, c\}\}$ .

임의의 자연수  $n$  에 대하여  $x_{2n} \not\in \{a\}$ ,  $x_{2n-1} \not\in \{c\}$  이므로  $a, c$  는 점열  $\{x_n\}$  의 극한이 될 수 없다.

$b$  를 포함하는 모든 개집합  $X$ ,  $\{a, b\}$  는  $a, b$  를 모두 포함하고 있다.

즉  $N=1$  라 할 때  $b$  를 포함하는 개집합  $G \in \mathcal{J}_\beta$  에 대하여  $n \geq N$  이면  $b \in \{a, b\} \subset G$  이므로  $\{x_n\}$  의 극한  $b$ .

$\mathcal{J}_\beta^c = \{X, \emptyset, \{b, c\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b\}\}$  이므로

공집합이 아닌 진부분 폐집합  $\{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}$ .

서로소가 될 수 있는 경우는  $F_1 = \{b\}$ ,  $F_2 = \{c\}$  혹은  $F_1 = \{a, b\}$ ,  $F_2 = \{c\}$  2 가지이며, 각각  $G_1 = \{a, b\}$ ,  $G_2 = \{c\}$  혹은  $G_1 = \{a, b\}$ ,  $G_2 = \{c\}$  인 개집합  $G_1, G_2$  를 택하면 조건을 만족한다.

5.

$(x, y) \neq (0, 0)$  이면  $[x, y]$  는  $(x, y)$  와 원점을 지나는 직선에서 원점을 제외한 집합이고,  $[0, 0] = \{(0, 0)\}$  이다.

$Y = \{[0, 0]\} \cup \{[\cos \theta, \sin \theta] \mid 0 \leq \theta < \pi\}$

$[0, 0]$  를 포함하는  $G \in \mathcal{J}$  에 대하여  $\pi^{-1}(G)$  는  $(0, 0)$  을 포함하는  $\mathbb{R}^2$  에서의 개집합이다.

따라서  $r > 0$  이 존재해서  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\} \subset \pi^{-1}(G)$  이므로  $G = Y$ .

$[0, 0] \neq [1, 1]$  이고  $[0, 0]$  를 포함하는 개집합은  $Y$  뿐이므로

위상공간  $(Y, \mathcal{J})$  는  $T_1$ -공간이 아니다.

6.  $b(C) = A$ ,  $(X, \mathcal{J}')$  는 컴팩트공간

$\mathcal{J}_A$  는  $A$  위의 여유한 위상,  $\mathcal{J}_B$  는  $B$  위의 이산 위상이며,

$\mathcal{J}'$  는  $\mathcal{J}_A$  와  $\mathcal{J}_B$  의 합위상이다.

$(A, \mathcal{J}_A)$  에서  $\text{int}\left\{3 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} = \emptyset$ ,  $\overline{\left\{3 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}} = A$ .

\* (무한)여유한 위상에서 폐집합은 유한집합  $\vee$  전체집합

$(B, \mathcal{J}_B)$  에서  $\text{int}\{3\} = \{3\}$ ,  $\overline{\{3\}} = \{3\}$  이므로

$(X, \mathcal{J}')$  에서  $\text{int}(C) = \{3\}$ ,  $\overline{C} = A \cup \{3\}$ . 따라서  $b(C) = \overline{C} - \text{int}(C) = A$ .

부분공간  $(A, \mathcal{J}_A)$  는 여유한 위상공간이므로 cpt공간이다.

따라서  $(X, \mathcal{J}')$  에서  $A$  는 cpt이다.

$B$  는 유한집합이므로  $(X, \mathcal{J}')$  에서 cpt이다.

그러므로  $A \cup B = X$  는  $(X, \mathcal{J}')$  에서 cpt이다.

7. 7

$\mathcal{J}_N$  은  $\mathbb{N} - f(X)$  의 이산위상과  $f(X)$  의 여유한위상의 합위상.

부분공간  $f(X)$  는 여유한위상공간이므로 연결공간이다.

따라서  $f(X)$  는  $(\mathbb{N}, \mathcal{J}_N)$  의 연결성분.

$2^{\mathbb{N} - f(X)}$  는 완전비연결공간이므로 연결성분은 단집합이다.

따라서  $\{1\}, \{2\}, \dots, \{6\}$  는  $(\mathbb{N}, \mathcal{J}_N)$  의 연결성분.

그러므로  $(\mathbb{N}, \mathcal{J}_N)$  의 연결성분의 개수 7.

8.

$$A = \mathbb{N} \cup \{-1, -2\}, \quad \mathbb{N} \cup \{-1, -3\}, \quad B = \mathbb{N} \cup \{-2, -3\}, \quad \mathbb{N} \cup \{-2\}, \quad \mathbb{N} \cup \{-3\}$$

①에서  $A$ 가 될 수 있는 후보들은

$$\mathbb{N} \cup \{-1, -2\}, \quad \mathbb{N} \cup \{-1, -3\}, \quad \mathbb{N} \cup \{-2, -3\}, \quad \mathbb{N} \cup \{-2\}, \quad \mathbb{N} \cup \{-3\}$$

5개 있다. 이 중에서  $-1$ 을 포함하는 집합은 컴팩트.

$-1$ 을 포함하는 개집합은  $(\mathbb{N} \cup \{-1\}) - F$  ( $F$ :  $\mathbb{N}$ -유한집합)과  $\{-2, -3\}$ 의 합집합 끌이므로  $F$ 가 빼고 것만큼 채워주면 컴팩트된다.

$-1$ 을 포함하지 않는 집합은 멱집합  $\wp(\mathbb{N})$  때문에 유한부분피복을 가질 수 없다.

②에서  $B$ 가 될 수 있는 후보들은

$$\mathbb{N} \cup \{-1, -2\}, \quad \mathbb{N} \cup \{-1, -3\}, \quad \mathbb{N} \cup \{-2, -3\}$$

$$\mathbb{N} \cup \{-2\}, \quad \mathbb{N} \cup \{-3\}, \quad \mathbb{N} \cup \{-1\}$$

6개 있다.  $-1$ 을 포함하면 컴팩트되므로 제외한다.

$$\mathbb{N} \cup \{-2, -3\}, \quad \mathbb{N} \cup \{-2\}, \quad \mathbb{N} \cup \{-3\}$$

개피복을  $\wp(\mathbb{N})$ 을 포함하도록 하면 유한부분피복을 갖지 않는다.

$$(\mathbb{N} \cup \{-2, -3\}) \text{의 경우 } \{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{-2, -3\}$$

\*  $(X, \mathcal{J})$ 는 다음 두 위상공간의 합공간이다.

① 이산공간  $(\mathbb{N}, \mathcal{J}_d)$ 의 한 점 cpt화 위상공간  $(\mathbb{N}^*, \mathcal{J}^*)$

② 비이산공간  $(\{-2, -3\}, \{\emptyset, \{-2, -3\}\})$

9. ④

ㄱ. 짹수집합을  $E$ 라 하자. 임의의  $n \in \mathbb{N}$ 을 포함하는 개집합  $G$ 는  $A_n$ 을 포함하므로  $G \cap E \supset G \cap A_n \neq \emptyset$ 이므로  $\overline{E} = X$ 이다.

임의의  $y \in Y$ 를 포함하는 개집합  $G$ 는 적당한  $\varepsilon > 0$ 이 존재해서  $H = Y \cap (y - \varepsilon, y + \varepsilon) \subset G$ 이고, 유리수의 조밀성에 의해  $H$ 에 유리수 있다.

따라서  $G \cap (Y \cap \mathbb{Q}) \supset H \cap (Y \cap \mathbb{Q}) \neq \emptyset$ .

즉,  $\overline{(Y \cap \mathbb{Q})} = Y$ . 그러므로  $\overline{E \times (Y \cap \mathbb{Q})} = X \times Y$ .

ㄴ. ㄱ에서 구한 폐포를 활용하자. 만약  $f$ 가 연속이라면  $f(\overline{E}) \subset \overline{f(E)}$ 이어야 한다.

$$f(\overline{E}) = E \times \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$\overline{f(E)} = \overline{\{4n \mid n \in \mathbb{N}\}} \times \overline{\left\{ \frac{1}{2n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}} = X \times \left( \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{2n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \right) \text{이므로}$$

$f(\overline{E}) \not\subset \overline{f(E)}$ 가 되어 모순이다.

그러므로  $f$ 는 연속함수가 아니다.

ㄷ.  $X$ 의 개피복  $\{G_i\}_{i \in I}$ 에 대하여

$1 \in G_{i_1}$ 인  $G_{i_1} = A_1 = X$ 이므로  $X$ 는 컴팩트공간이다.

$Y$ 는 하이네-보렐 정리에 의해 컴팩트공간이다.

티호노프정리에 의해  $X \times Y$ 는 컴팩트공간이다.

10. ②

ㄱ. 보통위상공간에서 연결집합은 구간이다.

$\mathbb{Q}$ 의 분리:  $\{(-\infty, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, \infty)\}$  있다.

ㄴ.  $A = (-2, -1), B = (0, 1), C = \{\sqrt{2}\}$ 라 하자.

$A, B, C$ 는 쌍마다 서로 소인 연결집합이다. ( $\{\sqrt{2}\} = [\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ )

$X$ 에서 연결집합은 구간이므로

$A, B, C$ 의 어떤 합집합도 연결이 되지 않는다.

그러므로  $A \cup B \cup C$ 의 연결성분은  $A, B, C$ , 3개.

ㄷ.  $f$ 는 연속이고  $X$ 는 연결공간이므로  $f(X)$ 는  $Y$ 에서 연결공간이다.

$Y$ 는 이산공간이고  $X \neq \emptyset$ 이므로  $f(X)$ 는 단집합이다.

즉,  $f$ 는 상수함수이다.

그러므로  $f(5) \neq f(6)$ 일 수 없다.

11.

(I)

(가) 참

함수  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ 은 연속.

$\{1\}$ 은  $\mathbb{R}$ 에서 폐집합이므로  $f^{-1}(\{1\}) = S^3$ 은  $\mathbb{R}^4$ 에서 폐집합이다.

임의의  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in S^3$ 에 대하여

$\mathbf{p}, \mathbf{q}$  사이의 거리(지름)  $d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 2 < \infty$ 이므로  $S^3$ 은  $\mathbb{R}^4$ 에서 유계집합.

따라서 하이네-보렐 정리에 의해  $S^3$ 은  $\mathbb{R}^4$ 에서 컴팩트.

표준사상(자연사상, canonical function)  $p : S^3 \rightarrow S^3 / \sim$ ,  $p(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}]$ 는 연속, 전사이므로  $p(S^3) = S^3 / \sim$ 는 컴팩트.

(나) 거짓

$S^3 / \sim$ 과  $S^3$ 가 위상동형이라 하자.

$\bar{\mathbf{p}} \in S^3 / \sim$ 에 대하여

$\bar{\mathbf{p}} = \{(x, y, z, w) \in S^3 \mid w > 0\}$ 는  $S^3$ 에서 개집합이므로  $\{\bar{\mathbf{p}}\}$ 는  $S^3 / \sim$ 에서 개집합.

위상동형사상에 의해  $\{\bar{\mathbf{p}}\}$ 는  $S^3$ 의 열린 단집합 singleton에 대응된다.

거리공간  $S^3$ 에서 한 점 집합은 폐집합이므로

$S^3$ 는 공이 아닌 진부분집합으로서 개, 폐집합을 갖게 된다.

따라서  $S^3$ 는 비연결공간이 된다. 모순.

(II)  $K=3$ 

$M$ 의 방정식  $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2yz = 1$ 에서 점  $(1, 0, 0)$ 을 포함하는 조각사상은

$$X(u, v) = (\sqrt{1 - 2u^2 - 2v^2 - 2uv}, u, v)$$

$$X(0, 0) = (1, 0, 0)$$

$$X_u = (0, 1, 0), \quad X_v = (0, 0, 1), \quad U = (1, 0, 0),$$

$$X_{uu} = (-4, 0, 0), \quad X_{uv} = (-2, 0, 0), \quad X_{vv} = (-4, 0, 0),$$

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1, \quad L = -2, \quad M = -1, \quad N = -2.$$

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{3}{1} = 3,$$

$$* \quad H = \frac{1}{2} \cdot \frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2 - 2 - 0}{1} = -2.$$

12. ④

ㄱ.  $X$ 의 개피복  $\{G_i\}_{i \in I}$ 라 하자.  $q \in G_{i_0}$ 인  $i_0 \in I$ 를 택하면  $A - G_{i_0}$ 는 유한집합이므로  $A - G_{i_0} = \emptyset$ 이면  $X \subset G_{i_0}$ 이고,  $\emptyset \neq A - G_{i_0} = \{a_1, \dots, a_n\}$ 라 하면  $a_1 \in G_{i_1}, \dots, a_n \in G_{i_n}$ 인  $i_1, \dots, i_n \in I$  있다.

따라서  $X \subset G_{i_0} \cup G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_n}$ .

그러므로  $(X, \mathcal{J})$ 는 컴팩트공간이다.

ㄴ.  $(X, \mathcal{J})$ 의 서로소 폐집합  $E, F$ 라 하자. 둘 중 하나가 공집합이면 개집합  $\emptyset, X$ 에 의해 각각 피복된다.

둘 다 공집합이 아니라고 하자.

① 일반성을 잃지 않고  $q \in E$ 라 하자. 그러면  $F \subset A$ 이므로  $F$ 는 개집합이다. 따라서  $E \subset F^c, F \subset E$ .

②  $E$ 와  $F$  모두  $q$ 를 포함하고 있지 않으면

$E, F \subset A$ 이므로  $E \subset E, F \subset F$ . 그러므로  $(X, \mathcal{J})$ 는 정규공간이다.

ㄷ.  $X$ 의 가산집합  $C$ 에 대하여  $\overline{C} \subset C \cup \{q\} \neq X$ 이므로  $X$ 는 분리가능공간이 아니다.

13. ⑤

ㄱ. 곱공간  $(\mathbb{R}, \mathcal{J}_1) \times (\mathbb{R}, \mathcal{J}_2)$ 에서  $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$ 는 개폐집합이므로 곱공간은 비연결.

$$\mathcal{J}_1^c = \{\emptyset, \mathbb{R}, \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \mathbb{Q}\}, \quad \mathcal{J}_2^c = \{\emptyset, \mathbb{R}, \mathbb{R} - \mathbb{N}, \mathbb{N}\},$$

$$[0, 1] \times [0, 1] = \overline{[0, 1]} \times \overline{[0, 1]} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

ㄴ. 곱공간의 공집합이 아닌 개집합  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R} \times \mathbb{N}, \mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \mathbb{N}), \mathbb{Q} \times \mathbb{R}, \mathbb{Q} \times \mathbb{N}, \mathbb{Q} \times (\mathbb{R} - \mathbb{N}), (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \times \mathbb{R}, (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \times \mathbb{N}, (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \times (\mathbb{R} - \mathbb{N})$ 의  $F$ 의 역상

$$\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}, \emptyset, \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \emptyset, \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

는  $(\mathbb{R}, \mathcal{J}_1)$ 에서 개집합이므로  $F$ 는 연속함수이다.

## 14. ②

$$\neg. f^{-1}([0, \frac{1}{2})) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n + \frac{1}{2}) \not\subseteq \mathfrak{I}_0 \text{이므로 } [0, \frac{1}{2}) \not\subseteq \mathfrak{I}_0.$$

↪ [0, 1]은 하이네-보렐 정리에 의해 보통위상공간  $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$ 에서 컴팩트이며  $f$ 는 연속이므로  $f([0, 1]) = [0, 1]$ 은  $([0, 1], \mathfrak{I}_0)$ 에서 컴팩트이다.

$$(f([0, 1]) = f([0, 1]) \cup f(\{1\}) = [0, 1] \cup \{0\} = [0, 1])$$

$$\sqsubset. h([0, 1]) = (0, 1] \text{이다. } (\frac{1}{2}, 2) \in \mathfrak{I} \text{이므로 } h \text{가 연속이면 } h^{-1}((\frac{1}{2}, 2)) \in \mathfrak{I}_0 \text{이어야 한다. } h^{-1}((\frac{1}{2}, 2)) = [0, \frac{1}{2}), \text{ 보기 } \neg. \text{에서 } [0, \frac{1}{2}) \not\subseteq \mathfrak{I}_0.$$

그러므로  $h$ 는 연속이 아니다.

\* 다른 설명

보기 ↩.에서  $[0, 1]$ 은  $\mathfrak{I}_0$ 에서 컴팩트이므로  $h$ 가 연속이면

$$h([0, 1]) = (0, 1] \text{은 } \mathfrak{I} \text{에서 컴팩트, 이는 모순이다.}$$

따라서  $h$ 는 연속이 아니다.

## 15.

( I )  $\mathbb{R}^3 - S$ 는 비연결

$$\mathbb{R}^3 - S = \mathbb{R}^3 - f^{-1}(\{1\}) = f^{-1}([0, 1] \cup (1, \infty)) = f^{-1}([0, 1]) \cup f^{-1}((1, \infty)).$$

$$G = f^{-1}([0, 1]), H = f^{-1}((1, \infty)) \text{라 하면 (가)에 의해 } G \neq \emptyset, H \neq \emptyset.$$

$[0, 1], (1, \infty)$ 은  $[0, \infty)$ 에서 개집합이므로  $G, H$ 는  $\mathbb{R}^3$ -개집합.

$$G \cap H = f^{-1}([0, 1] \cap (1, \infty)) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset.$$

따라서  $\mathbb{R}^3 - S$ 는 비연결이다.

( II )  $\phi$ 는 최솟값을 갖는다.

(가)에 의해 폐집합  $\{1\}$ 의 역상  $f^{-1}(\{1\}) = S$ 는  $f^{-1}([0, 2011])$ 의 폐집합이며, (나)에 의해  $S$ 는 cpt.

$x, y, z$ 는 연속이므로  $x+y+z=\phi$ 는 연속이다.

$\phi(S) = \phi(f^{-1}(\{1\}))$ 는  $\mathbb{R}$ 에서 cpt이므로 최솟값  $m = \inf\{\phi(S)\} = \min\{\phi(S)\}$  있다.

( III )  $\phi$ 가 최솟값을 갖는 점  $\mathbf{p}$ 에서  $S$ 의 가우스 곡률  $K \geq 0$

최솟값  $m = \phi(\mathbf{p}), \mathbf{p} \in S$ 라 하자.

$S$  위의  $\mathbf{p}$ 를 지나는 단위속력곡선  $c(t), c(0) = \mathbf{p}, c'(0) = \mathbf{v}$ 라 하자.

(그런 단위속력곡선 있다?)

$$\nabla \phi = (1, 1, 1) \text{이므로 단위법벡터 } U(\mathbf{p}) = \frac{\nabla \phi(\mathbf{p})}{\|\nabla \phi(\mathbf{p})\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1).$$

$\forall t \in \mathbb{R}, \phi(c(t)) \geq \phi(c(0)) = \phi(\mathbf{p}) = m$  (최솟값)이므로

$$\frac{d}{dt} \phi(c(t)) \Big|_{t=0} = \nabla \phi(c(0)) \cdot c'(0) = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \phi(c(t)) \Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} \nabla \phi(c(t)) \cdot c'(t) \Big|_{t=0} \\ &= \nabla \phi(c(0)) \cdot c''(0) \geq 0 \\ &= \nabla \phi(\mathbf{p}) \cdot c''(0) \geq 0 \text{이 성립한다.} \end{aligned}$$

$$S \text{위의 곡선으로서 } c \text{의 법곡률 } \kappa_n(\mathbf{v}) = \frac{c''(0) \cdot U(\mathbf{p})}{\|c'(0)\|^2} = c''(0) \cdot \frac{\nabla \phi(\mathbf{p})}{\|\nabla \phi(\mathbf{p})\|} \geq 0.$$

주곡률  $\kappa_1(\mathbf{p}), \kappa_2(\mathbf{p}) \geq 0$ 이므로 가우스곡률  $K(\mathbf{p}) = \kappa_1(\mathbf{p})\kappa_2(\mathbf{p}) \geq 0$ .

## 16. ⑤

↪  $\mathbb{R} - U$ 가 유한집합인  $U \subset \mathbb{R}$ 에 대하여  $\mathbb{R} - U$ 는 가산집합이므로  $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$ 는  $T_1$ -공간이다.

\* 단집합은 가산집합이므로 폐집합이다. 따라서  $T_1$ -공간이다.

↪  $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$ 의 폐집합은  $\mathbb{R}, \emptyset, \mathbb{R}$ , 가산집합이므로 가산조밀부분집합을 갖지 않는다. 따라서  $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$ 는 분리공간이 아니다.

↪ 무한 부분집합  $A$ 가 컴팩트라 하자.  $A$ 는 무한 집합이므로 서로 다른  $a_1, a_2, a_3, \dots \in A$ 를 택하자.

$$G_i = \mathbb{R} - \{a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots\} \text{라 하면 } G_i \text{는 개집합이고 } A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} G_i \text{이므로}$$

$A \subset G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_n}$ 이 되는  $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}$  있다.

$$N = \max\{i_1, \dots, i_n\} + 1 \text{일 때 } a_N \notin G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_n}$$

즉,  $a_N \notin A$ 가 되어 모순이다. 따라서  $A$ 는 컴팩트가 아니다.

그러므로  $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$ 에서 컴팩트 집합은 유한집합이다.

## 17. ③

↪  $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$ 의 개집합  $G$ 에 대하여  $j^{-1}(G) = G \cap \mathbb{Q}$ 는  $(\mathbb{Q}, \mathfrak{I}_{\mathbb{Q}})$ 에서 개집합이므로  $j$ 는 연속이다.

↪ 하이네-보렐 정리에 의해  $A = [\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ 는  $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$ 에서 cpt이다.

$$j^{-1}(A) = [\sqrt{2}, \sqrt{3}] \cap \mathbb{Q} = (\sqrt{2}, \sqrt{3}) \cap \mathbb{Q} \text{는 cpt가 아니다.}$$

$$(\because) \left\{ \left( \sqrt{2} - \frac{1}{n}, \sqrt{3} \right) \right\}_{n \in \mathbb{N}} \text{은 } j^{-1}(A) \text{의 개폐복이지만}$$

어떤 유한 피복도  $j^{-1}(A)$ 를 피복할 수 없다.

↪  $(\mathbb{Q}, \mathfrak{I}_{\mathbb{Q}})$ 의 개집합  $H = G \cap \mathbb{Q}, G \in \mathfrak{I}$ 에 대하여

$$f^{-1}(H) = f^{-1}(G \cap \mathbb{Q}) = f^{-1}(j^{-1}(G)) = (j \circ f)^{-1}(G) \text{이며,}$$

$j \circ f$ 는 연속이므로  $f^{-1}(H) = (j \circ f)^{-1}(G)$ 는  $X$ -개집합.  $f$ 는 연속이다.

## 18. ①

$\mathfrak{I}_1$ 은 하한위상으로, 완전비연결공간, 따라서  $A_1 = \{0\}$ .

( $\mathfrak{I}_1$ 의 공이 아닌 기저원  $[a, b)$ 는 진부분 개폐집합)

$\mathfrak{I}_2$ 에서 공집합이 아닌 진부분집합으로서 개·폐집합 없으므로 연결위상이다.

따라서  $A_2 = \mathbb{R}$ .

## 19.

\*  $Y_1$ :  $T_2$ 공간(O), cpt공간(X), 연결공간(O)

①  $p \neq q$ 인  $p, q \in Y_1$ 에 대하여  $\varepsilon = d(p, q) > 0$ 라 하자.

$$G = Y_1 \cap B_d(p, \frac{\varepsilon}{2}), H = Y_1 \cap B_d(q, \frac{\varepsilon}{2}) \text{라 하면}$$

$G \cap H = \emptyset$ 이고  $G, H$ 는  $Y_1$ -개집합이다.

따라서  $Y_1$ 은  $T_2$ 공간이다.

②  $Y_1$ 은  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 에서 유계가 아니므로 하이네-보렐 정리에 의해  $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathfrak{I}_1)$ 에서 cpt가 아니다.

③ 함수  $f : \mathbb{R} \rightarrow Y_1, f(x) = (x, 1-x)$ 라 정의하자.  $p \in Y_1$ 과  $\varepsilon > 0$ 에 대하여

$$f^{-1}(B_d(p, \varepsilon)) = (p - \varepsilon, p + \varepsilon) \text{은 } \mathbb{R}-개집합이므로 } f \text{는 연속이다.}$$

$(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathfrak{I}_1)$ 의 부분공간  $\mathbb{R}$ 은 연결공간이므로  $f(\mathbb{R}) = Y_1$ 은 연결공간이다.

\*  $Y_2$ :  $T_2$ 공간(X), cpt공간(O), 연결공간(O)

①  $p \neq q$ 인  $p, q \in Y_2$ 에 대하여

$p \in G, q \in H, G \cap H = \emptyset$ 인  $G, H \in \mathfrak{I}_2$  있다 하면  $G \neq \emptyset, H \neq \emptyset$ 이므로

$$G = \mathbb{R}^2 - U, H = \mathbb{R}^2 - V \text{인 } (\mathbb{R}^2, \mathfrak{I}_1) \text{에서 cpt 부분집합 } U, V \text{ 있다.}$$

하이네-보렐 정리에 따라

$U, V$ 는  $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{I}_1)$ 에서 유계폐집합이므로  $U \cup V$ 는 유계이다.

$$\emptyset = G \cap H = (\mathbb{R}^2 - U) \cap (\mathbb{R}^2 - V), \mathbb{R}^2 = U \cup V \text{이므로}$$

$\mathbb{R}^2$ 가 유계가 되어 모순.  $Y_2$ 는  $T_2$ 공간이 아니다.

②  $Y_2$ 의 개폐복  $\{G_i\}_{i \in I}$ 라 하자.  $\emptyset \neq G_{i_0}$ 인  $i_0 \in I$ 에 대하여

$$F_{i_0} \cap Y_2 \subset Y_2 \subset \bigcup_{i \in I} (\mathbb{R}^2 - F_i),$$

$$G_{i_0} = \mathbb{R}^2 - F_{i_0}, G_i = \mathbb{R}^2 - F_i$$

인  $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{I}_1)$ 에서 cpt부분집합  $F_{i_0}, F_i$  있다.

$Y_2$ 는  $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{I}_1)$ 에서 폐집합이므로  $F_{i_0} \supset F_{i_0} \cap Y_2$ 는 cpt,

(유계)폐집합  $F_i$ 에 대하여  $(\mathbb{R}^2 - F_i)$ 는  $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{I}_1)$ 에서 개집합이므로

$$F_{i_0} \cap Y_2 \subset (\mathbb{R}^2 - F_{i_1}) \cup \dots \cup (\mathbb{R}^2 - F_{i_n})$$

인  $i_1, \dots, i_n \in I$  있다.

$$Y_2 \subset \bigcup_{k=1}^n G_{i_k} = (\mathbb{R}^2 - F_{i_0}) \cup (\mathbb{R}^2 - F_{i_1}) \cup \dots \cup (\mathbb{R}^2 - F_{i_n})$$

이므로  $Y_2$ 는 cpt공간이다.

③  $Y_2$ 의 공집합이 아닌 진부분집합으로서 개폐집합이 되는 집합  $A$  있다 하자.

$A \neq \emptyset$ 이므로  $A = \mathbb{R}^2 - F$ 인  $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{I}_1)$ 에서 cpt집합  $F$  있다.  $A^c$ 은 개집합이

므로  $A^c = F = \mathbb{R}^2 - G$ 인  $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{I}_1)$ 에서 cpt집합  $G$  있다.

$F, G$ 는 하이네-보렐 정리에 따라  $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{I}_1)$ 에서 유계(폐집합)이므로

$$F = \mathbb{R}^2 - G \text{는 모순이다. (좌변은 유계, 우변은 비유계)}$$

그러므로  $Y_2$ 는 연결공간이다.

## 20. ⑤

ㄱ. 부분공간을 생각하자. 유한집합상의 여유한위상은 이산위상이므로 비연결이다.

ㄴ.ㄷ. 부분공간을 생각하자. 무한집합상의 여유한위상공간에서 공집합이 아닌 진부분집합으로서 개집합이면서 폐집합이 되는 부분집합이 있으면 비연결이다. 이때 폐집합은 유한집합이고, 개집합도 되므로 여집합이 유한집합이 되어야 하는데, 이는 모순이다. 따라서 ㄴ. ㄷ. 보기는 연결이다.

\* 무한 집합 상의 여유한위상공간에서 연결집합

: 단집합, 공집합, 무한부분집합, 전체집합

## 21.

## 21-1.

(공식 1)에 의해  $E = (g')^2 + (h')^2$ ,  $F = 0$ ,  $G = h^2$ .

(공식 2)에 의해  $K = \frac{-1}{h(u)\sqrt{g'(u)^2 + h'(u)^2}} \left( \frac{h'(u)}{\sqrt{g'(u)^2 + h'(u)^2}} \right)_u$ .

(공식 3)에 의해  $\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| = h(u)\sqrt{g'(u)^2 + h'(u)^2}$  이므로

$$\begin{aligned} \iint_M K dA &= \int_0^{2\pi} \int_a^b -\left( \frac{h'(u)}{\sqrt{g'(u)^2 + h'(u)^2}} \right)_u du \\ &= -2\pi \left[ \frac{h'(u)}{\sqrt{g'(u)^2 + h'(u)^2}} \right]_a^b \\ &= -2\pi \left[ \frac{h'(b)}{\sqrt{g'(b)^2 + h'(b)^2}} - \frac{h'(a)}{\sqrt{g'(a)^2 + h'(a)^2}} \right]. \end{aligned}$$

## 21-2.

• 회전면  $M$ 의 회전축:  $x$ 축

•  $M$ 이 긴밀 정칙곡면일  $h$  및 도함수  $h'$ ,  $g'$ 의 조건

① 정칙곡선  $\alpha(u)$ 의 양 끝점이 다른 경우, 양 끝점이 회전축에 수직으로 만날 때  $M$ 이 긴밀 정칙곡면이 되므로

$$\begin{aligned} g(a) &\neq g(b), \quad h(a) = 0 = h(b), \\ (a, b) \text{에서 } h(u) &> 0, \\ g'(a) &= 0 = g'(b), \\ h'(b) &< 0 < h'(a). \end{aligned}$$

전곡률  $4\pi$ , 오일러 표수 2, 구면과 위상동형.

② 정칙곡선  $\alpha(u)$ 의 양 끝점이 같은 경우, 양 끝점에서 공통인 접선을 가질 때  $M$ 이 긴밀 정칙곡면이 되므로

$$\begin{aligned} g(a) &= g(b), \quad h(a) = h(b), \\ [a, b] \text{에서 } h(u) &> 0, \\ \text{양수 } k \text{에 대하여 } (g'(a), h'(a)) &= k \cdot (g'(b), h'(a)). \end{aligned}$$

전곡률 0, 오일러 표수 0, 원환면(torus)과 위상동형.

22. \* 일반적으로  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ 가 안 된다. (합집합일 때는 성립)

가정에 의해  $\overline{A} = X = \overline{B}$ 이다.

$x \in \overline{B}$ 라 하자.

$x \in \overline{B}$ 이므로  $x$ 를 포함하는 임의의 개집합  $G$ 에 대하여  $G \cap B \neq \emptyset$ 이다.

$y \in G \cap B (\subset X)$ 인  $y$ 를 택하자.

$G \cap B$ 는  $y$ 를 포함하는 개집합이고  $y \in X = \overline{A}$ 이므로

$(G \cap B) \cap A \neq \emptyset$ . 즉,  $G \cap (A \cap B) \neq \emptyset$ 이 되어  $x \in \overline{A \cap B}$ .

따라서  $X \subset \overline{A \cap B}$ 로부터  $\overline{A \cap B} = X$ .

그러므로  $A \cap B$ 는  $X$ 에서 조밀하다.

23.  $p \in F^c$ 는 개집합이므로  $p \in V \subset F^c$ 인  $V \in \mathcal{B}$  있다.

이때  $V$ ,  $V^c$ 은 개집합이다.

$f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in V^c \\ 0, & x \in V \end{cases}$  라 하면

(F1)  $x \in X$ 에 대하여  $f(x) = 0$  또는 1이며 0, 1  $\in \mathbb{R}$

(F2)  $x_1 = x_2 \in X$ 이면  $x_1 = x_2 \in V$  또는  $x_1 = x_2 \in V^c$ .

이때,  $f(x_1) = f(x_2)$ 이다.

따라서  $f$ 는  $X$ 에서  $\mathbb{R}$ 로의 함수이다.

$f(p) = 0$ ,  $f(F) \subset f(V^c) = \{1\}$ 이고,

문제의 문맥상  $F$ 는 공집합이 아니므로  $f(F) = \{1\}$ 이다.

$f$ 가 연속함수임을 보이자.

$\mathbb{R}$ 에서 임의의 개집합  $G$ 에 대하여

$f^{-1}(G)$ 는  $X$ ,  $\emptyset$ ,  $V$ ,  $V^c$  중 하나이므로  $f$ 는 연속함수이다.

24.  $X$ 의 개피복  $\{G_i\}_{i \in I}$ 라 하자.  $0 \in X$ 이므로  $0 \in G_{i_0}$ 인  $i_0 \in I$  있다.

$\mathfrak{I}$ 의 원소 중에서 0을 포함하는 원소는  $(-1, 1)$ 을 포함하므로  $(-1, 1) \subset G_{i_0}$ .

-1, 1을 포함하는  $G_{i_{-1}}$ 과  $G_{i_1}$ 에 대하여  $X \subset G_{i_{-1}} \cup G_{i_0} \cup G_{i_1}$ 이므로

$(X, \mathfrak{I})$ 는 컴팩트공간이다.

25.  $W = (0, 1)$ ,  $X = \{0, 1\}$ ,  $Y = \emptyset$ ,  $Z = \mathbb{R}$

26.  $x \in X - A$ 라 하자.  $y \in A$ 이면  $X$ 는  $T_2$ -공간이므로

$x \in G_y$ ,  $y \in H_y$ ,  $G_y \cap H_y = \emptyset$ 인 개집합  $G_y$ ,  $H_y$  있다.

이때  $x \in \bigcup_{y \in A} G_y$ ,  $A \subset \bigcup_{y \in A} H_y$ ,  $\left(\bigcup_{y \in A} G_y\right) \cap \left(\bigcup_{y \in A} H_y\right) = \emptyset$ .

$A$ 는 cpt이므로 유한부분피복  $\{H_{y_1}, H_{y_2}, \dots, H_{y_n}\}$  있다.

$x \in \bigcup_{i=1}^n G_{y_i} = U$ ,  $A \subset \bigcup_{i=1}^n H_{y_i} = V$ ,  $U \cap V = \bigcup_{i=1}^n (G_{y_i} \cap H_{y_i}) = \emptyset$ .

## 27.

하위 영역	배점	예상 정답율(%)	출제근거 (이유)
고등수학(위상수학)	5	40	J. R. Munkres. Topology, a First Course. pp. 77-78 ; pp. 126-131

임의의 정수  $m \in \mathbb{Z}$ 을 택하고  $m$ 의 임의의 열린 집합(개집합)  $U$ 를 택하자.

$U^c$ 가 유한 집합이므로 유한 개의 정수를 제외하면 나머지는 모두  $U$ 안에 있다. ..... 2점

(단, 수열의 수렴 정의를 알고 있다고 판단되는 경우 부분 점수 가능)

$U$ 안에 들어있지 않은 수열  $\{a_n\}$ 의 서로 다른 원소들의 개수는 유한 개 뿐이다. ..... 3점

그 유한 개 원소  $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}$ 의 첨자  $n_1, n_2, \dots, n_k$  중 최대를  $N$ 이라 하자. ..... 4점

그러면,  $N$ 보다 큰 모든 정수  $n$ 에 대하여,  $a_n \in U$ 이므로 수열  $\{a_n\}$ 은  $m$ 에 수렴한다. ..... 5점

## 28. ①

⑦  $U \in \tau' \Leftrightarrow f^{-1}(U) \in \tau$  (닫힌 집합도 필요충분조건)

⑧  $f$ 는 연속이므로  $f(C)$ 는  $X/R$ 에서 컴팩트이다.

⑨ 일반적으로 성립하지 않는다. (개사상 정의)

\* 함수가 전사일 때 상위상, 전사가 아닐 때 강위상

$$\tau' = \{U \subset X/R \mid f^{-1}(U) \in \tau\}$$

## 29. ④

① 하이네-보렐 정리

② 폐집합  $F$ 와 컴팩트 집합  $T$ 에 대하여  $F \cap T = \emptyset$ 은

컴팩트이다.  $F \cap T \neq \emptyset$  일 때  $F^c$ 은 개집합이고,

$$F \cap T \text{의 개파복 } \{G_i\}_{i \in I} \text{라 하자. } F \cap T \subset \bigcup_{i \in I} G_i,$$

$T \subset \bigcup_{i \in I} G_i \cup F^c$ 이고  $T$ 는 컴팩트이므로

$$T \subset G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \dots \cup G_{i_n} \cup F^c.$$

따라서  $F \cap T \subset G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \dots \cup G_{i_n}$ 가 되어

$F \cap T$ 는 컴팩트이다.

③ 위상공간  $X$ 의 컴팩트 집합  $T$ 의 폐부분 집합  $F$ 에 대하여  $F^c$ 은 개집합이

고  $F$ 의 개파복  $\{G_i\}_{i \in I}$ 라 하자.

$$F \subset \bigcup_{i \in I} G_i \text{에서 } T \subset X = F^c \cup F \subset \bigcup_{i \in I} G_i \cup F^c,$$

따라서  $T \subset \bigcup_{i \in I} G_i \cup F^c$ 이고  $T$ 는 컴팩트이므로

$$T \subset G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \dots \cup G_{i_n} \cup F^c \text{이 되어}$$

$F \subset G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \dots \cup G_{i_n}$ . 그러므로  $F$ 는 컴팩트이다.

④  $\mathbb{R}^5$ 는 폐집합이지만 유계가 아니다.

1.

유한순환군의 부분군은 순환군이며, 각 위수별로 유일하게 존재한다.

$\mathbb{Z}_{200}$ 의 부분군으로서 6개의 부분군을 갖는 경우는 위수가  $2^2 \times 5$  일 때이다. 따라서  $\mathbb{Z}_{200}$ 의 부분군  $\text{Im}(\phi)$ 의 위수  $|\text{Im}(\phi)| = 20$ .

동형정리에 따라  $\mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{26}/\ker\phi \cong \text{Im}(\phi)$  이므로  $|\ker\phi| = 26$ .

2.

소수  $a$ 에 대하여 자연수  $n$ 이 존재해서  $G = \mathbb{Z}_4 \times F^* \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{a^n - 1}$ .

$G$ 는 순환군이므로  $\gcd(4, a^n - 1) = 1$ .

(유한순환군이므로  $\mathbb{Z}_k$  끌로 나타낼 수 있다.)

$a$ 는 홀수일 수 없으므로  $a = 2$ .

$|G| = 4(2^n - 1) \leq 160$ ,  $2^n \leq 41$ 이 되는  $n = 1, 2, 3, 4, 5$ 이므로  $b = 5$ .

3.

192, 8

$G$ 는 순환군이므로  $G/H, K/H, L/H$ 도 순환군이다.

$|G/H| = |G : H| = 520$ 이므로  $G/H \cong \mathbb{Z}_{520}$ .

$\langle aH \rangle = G/H$ 의 생성원 개수는  $\varphi(520) = 192$ .

$|K/H| = \frac{520}{\gcd(35, 520)} = 104$ .

$G/H = (K/H)(L/H)$ 을 성립하기 위해서는

$520 = \frac{104 \cdot |L/H|}{|K/H \cap L/H|}$ ,  $|L/H| = 5 \cdot |K/H \cap L/H|$ ,  $|L/H|$ 는 5의 배수.

라그랑지 정리에 따라  $|L/H|$ 는  $5 \times 104$ 의 약수.

순환군의 부분군은 각 위수별로 유일하므로 구하는 값 8.

4.

$(a, b) \in \mathbb{Z}_{13}^* \times \mathbb{C}^*$  일 때,  $18 = |(a, b)| = \text{lcm}(|a|, |b|)$ 가 되는 경우의 수를 구하자.

$|b| = 18$  일 때,  $|a| = 1, 2, 3, 6$ 이므로 경우의 수는

$\varphi(18) \cdot [\varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(6)] = 36$ .

$|b| = 9$  일 때,  $|a| = 2, 6$ 이므로 경우의 수는  $\varphi(9) \cdot [\varphi(2) + \varphi(6)] = 18$ .

$|b| = 6, 3, 2, 1$  일 때, 가능한  $a \in \mathbb{Z}_{13}^*$ 은 존재하지 않는다.

$G$ 의 위수 18인 원소의 개수 54이므로

$G$ 의 위수 18인 순환부분군의 개수  $\frac{54}{\varphi(18)} = 9$ .

5. 6, 12

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 5 \rightarrow 3$ 이므로  $\sigma = (124)(35)$ . 따라서  $|\sigma| = 6$ .

\*  $(124)(35) = (35)(124)$ ,  $|\langle (124) \rangle \cap \langle (35) \rangle| = 1$ .

$\mathbb{Z}_{12}$ 에서  $|9| = |9 \cdot 1| = \frac{12}{\gcd(9, 12)} = 4$ 이므로

$S_5 \times \mathbb{Z}_{12}$ 에서  $|\langle \sigma, 9 \rangle| = \text{lcm}(|\sigma|, |9|) = \text{lcm}(6, 4) = 12$ .

6. 위수 6인 부분군을  $H$ 라 하면 가정에 의해  $H$ 는  $G$ 의 정규부분군.

(다른 설명)

$g \in G$  일 때  $gHg^{-1}$ 도 위수 6인  $G$ 의 부분군이므로  $gHg^{-1} = H$ , 즉  $H \triangleleft G$ .

\* 6은 소수 아니다.

코시 정리(제1 Sylow정리)에 의해 위수 5인  $G$ 의 부분군  $K$  있다.

$H$ 가 정규이므로  $HK$ 는  $G$ 의 부분군이다.

라그랑지 정리에 의해  $|H \cap K| \mid \gcd(|H|, |K|) = 1$ .

따라서  $|H \cap K| = 1$ 이고,  $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} = 30$ .

그러므로  $HK$ 는 위수 30인  $G$ 의 부분군이다.

7. 36

$\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_n$ : 순환군  $\Leftrightarrow \gcd(10, n) = 1 \Leftrightarrow \gcd(2, n) = 1 = \gcd(5, n)$

10이하의 자연수 중에서 2, 5와 서로 소인 개수=4이므로

구하는 값  $4 \times (10 - 1) = 36$ .

\*  $1 = \gcd(10, n) = \gcd(10, n + 10k)$ ,  $k \geq 0$

8. 잉여군  $G/N$ 의 위수  $|G/N| = [G : N] = \frac{|G|}{|N|} = 5$ .

$h \in H \subset G$ ,  $h^5N = (hN)^5 = N$ 이므로  $h^5 \in N$ .

$|H| = 8$ 이므로  $(hN)^8 = h^8N = N$ 에서  $h^8 \in N$ .

$\gcd(5, 8) = 1$ 이므로  $5s + 8t = 1$ 인 정수  $s, t$  있다.

따라서  $h = h^1 = h^{5s+8t} \in N$ ,  $H$ 는 군이므로  $H \leq N$ .

9. 4

$\text{im } f = f(\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_6) = f(\langle (1, 0), (0, 1) \rangle) = \langle f(1, 0), f(0, 1) \rangle$

$= \langle 9, 0 \rangle = \{9s + 0t \mid s, t \in \mathbb{Z}\} = \langle 9 \rangle$ .

$\mathbb{Z}_{12}$ 에서  $9 = 9 \cdot 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ 의 위수는

$\frac{12}{\gcd(9, 12)} = 4$ 이므로  $|\text{im } f| = 4$ .

동형정리에 의해  $|\langle (\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_5)/K \rangle| = |\text{im } f| = 4$ .

\* 다른 풀이

$$\begin{aligned} K &= \ker f \\ &= \{(m, n) \in \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_6 \mid 9m = 0 \pmod{12}\} \\ &= \{(m, n) \in \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_6 \mid m \equiv 0, 4, 8 \pmod{12}\} \\ &= \{0, 4, 8\} \times \mathbb{Z}_6 \\ &= \{(4s, t)\} = \{s \cdot (4, 0) + t \cdot (0, 1)\} \\ &= \langle (4, 0), (0, 1) \rangle \\ &= \langle 4 \rangle \times \langle 1 \rangle \neq \langle (4, 1) \rangle \text{이므로 동형정리에 의해} \\ |K| &= 18, |\langle (\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_6)/K \rangle| = 72/18 = 4. \\ * f(x, y) &= 9 \cdot x + 0 \cdot y \\ &= (x + x + \cdots + x) + 0 \cdot y \end{aligned}$$

10. 1

$|(5, 5)| = \text{lcm}(12, 6) = 12 = |G|$ 이므로  $|G/H| = 6$ .

라그랑지 정리에 의해  $\overline{(3, 3)}$ 의 위수는 1, 2, 3, 6중의 하나이며  $\overline{(3, 3)} \in H$ 이므로 구하는 값 1.

$H = \{(5, 5), (10, 4), (3, 3), (8, 2), (1, 1), (6, 0), (11, 5), \dots\}$

$$* \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 6 \\ 5 & 5 \\ x & y \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \\ 0 & 0 \\ x & y-x \end{pmatrix} \text{이므로 } G/H \cong \mathbb{Z}_1 \times \mathbb{Z}_6, \overline{(3, 3)} \rightarrow (0, 0).$$

11.  $m+n=26$ 

①  $G$ 는 유한 위수를 갖는 가환군이므로 라그랑지 정리의 역도 성립한다.

2014를 나누는 약수의 개수만큼 부분군을 갖는다.

따라서  $m = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ .

$$* \text{위수 } n \text{인 부분군의 개수} = \frac{(\text{위수 } n \text{인 원소 개수})}{\varphi(n)} = 1 \text{ (순환군일 때)}$$

② 유한순환군  $G$ 의 부분군은 유한순환군이며 38은 2014를 나누므로  $G$ 의 위수 38인 순환부분군  $H$  있으며, 이때  $H \cong \mathbb{Z}_{38}$ 의 생성원의 개수는  $\varphi(38) = \varphi(2 \cdot 19) = 18 = n$ , 구하는 값  $m+n=26$

\* 다른 설명

$G = \langle g \rangle$ 라 하자.  $38 \mid 2014$ 이므로 위수 38인 원소  $k$  있다.

$$(그런 k중의 한 예시: k = g^{\frac{2014}{38}} = g^{53})$$

이때  $k = g^s$ 인  $s \in \{1, 2, \dots, 2014\}$  있다.

$$|k| = |g^s| = 38 = \frac{2014}{(s, 2014)}$$

$$\Leftrightarrow (s, 2014) = \frac{2014}{38} = 53.$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{s}{53}, 38\right) = 1. \left(\frac{s}{53}\right. \text{는 정수}\right)$$

$\therefore$  구하는 개수는 38과 서로소인 개수  $\varphi(38) = 18$ .

## 12. ③

중국인의 나머지 정리 적용.

$$\begin{aligned} \neg. \ker f &= \{n \in \mathbb{Z} \mid f(n) = ([n]_2, [n]_3) = (0, 0)\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z} \mid n \equiv 0 \pmod{2}, n \equiv 0 \pmod{3}\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z} \mid n \equiv 0 \pmod{6}\} \\ &= \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ &= 6\mathbb{Z} \end{aligned}$$

□.  $G/Z(G) = \langle g + Z(G) \rangle$  인  $g + Z(G) \in G/Z(G)$  있다.

$a, b \in G^o$ 면

$$a + Z(G) = mg + Z(G), b + Z(G) = ng + Z(G) \text{인 } m, n \in \mathbb{Z} \text{ 있다.}$$

\* 여기서  $mg$ 란  $g$ 를 “ $m$ 번” 더한다는 뜻이다.

이때,  $a = mg + \alpha, b = ng + \beta$ 인  $\alpha, \beta \in Z(G)$  있다.

이제  $a+b = (mg+\alpha)+(ng+\beta)$

$$\begin{aligned} &= \alpha + mg + \beta + ng \\ &= \beta + ng + \alpha + mg \\ &= ng + \beta + mg + \alpha \\ &= b + a \text{이므로 } G \text{는 아벨군이다.} \end{aligned}$$

\* 잉여군의 연산을 곱셈으로 간주하고 계산해도 된다.

□.  $400 = 16 \times 25 = 2^4 \cdot 5^2$ 의 지수 4와 2의 분할은 각각

$$4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1, 5\text{가지},$$

$$2 = 1+1, 2\text{가지 있다.}$$

따라서 총 10가지의 서로 동형이 아닌 군이 있다.

## 13. ⑤

¬.  $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow G = \langle g \rangle, \phi(n) = g^n$ 은 동형사상.

□.  $4_{\square} / 2_{\Delta} \times 9_{\square} / 3_{\star} \times 5_{\Delta}, 3_{\star} / 2_{\Delta} \times 5_{\Delta} / 4_{\square} \times 9_{\square},$

$$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_{15} \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{36}.$$

□. 위수 360인 순환군은  $(\mathbb{Z}_{360}, +) = \langle 1 \rangle$ 과 동형이며  $\mathbb{Z}_{360}$ 의 원소는  $k \cdot 1 = 1+1+\dots+1=k$ 로 쓸 수 있다.

$$\mathbb{Z}_{360} = \langle k \rangle \Leftrightarrow |k| = 360 = \frac{360}{\gcd(360, k)} \text{에서}$$

$$\gcd(360, k) = 1.$$

$$\text{구하는 개수는 } \varphi(360) = \varphi(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5) = 4 \cdot 6 \cdot 4 = 96.$$

## 14. ③

주어진 가정에 의해  $|G| = 2 \times 3 \times 2 = 12$ 이고,

$G$ 의 적당한 원소 몇 개 계산을 통해  $\text{im} \phi = \mathbb{Z}_3^*$ 이므로

동형정리에 의해  $|\ker \phi| = 6$ 이다. ( $\ker \phi \triangle G$ )

$S_3 \cong D_3$ 에는 위수 2인 원소 3개, 위수 3인 원소 1개.

$\mathbb{Z}_6$ 에는 위수 2인 원소 1개, 위수 3인 원소 2개.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \ker \phi \text{는 위수 } 3, \therefore \ker \phi \cong \mathbb{Z}_6.$$

$$\begin{aligned} * \ker \phi &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G \mid \phi \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = ac \equiv 1 \pmod{3} \right\} \\ &= \left\{ I, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

(위수: 1, 3, 3, 2, 2, 6)

\* 순환군의 부분군은 순환군이므로 부분순환군의 위수가  $n$ 이면 위수  $n$ 인 원소는  $\varphi(n)$ 개 있다.

$$* G/\ker \phi \cong (\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}, +)$$

## 15. ⑤

$$\gcd(12, 7) = 1 \text{이므로 } G \cong \mathbb{Z}_{84}.$$

¬.  $G$ 는 가환군이므로 모든 부분군이 정규부분군이다.

$$\neg. |\langle 3, 1 \rangle| = \text{lcm}(|3|, |1|) = \text{lcm}(4, 7) = 28.$$

$\phi : (G, +) \rightarrow (\mathbb{Z}_{84}, \times), \phi(a, b) = [ab]_{84}$ 는 동형사상,

$(3, 1) \mapsto 3$ 의 위수 28이므로  $(3, 1)$ 의  $G$ 에서 위수 28.

## 16. ③

①  $G$ 와  $H$ 의 부분군의 개수가 같은데  $G \neq H$ 라 하면  $H \leq G, G \leq H$ 이므로  $G$ 의 부분군의 개수가 더 많아야 한다.

②  $G$ 가 가환군이면  $H, K$ 는  $G$ 의 정규부분군이므로  $H \cap K$ 와  $HK$ 도  $G$ 의 정규부분군이 된다.

$$* \text{이때 } |HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}, [HK : K] = [H : H \cap K], [HK : K] = [H : H \cap K].$$

③ 실로우 정리 적용,  $|G| = 2^2 \cdot 3$ , 실로우-3부분군  $H$ 있다.

$H$ 의 개수를  $n_3$ 라 하면  $n_3 = 3k_1 + 1 \mid 12$ 에서  $k_1 = 0, 1, n_3 = 1, 4$ .

$n_3 = 1$ 인 경우  $H \triangle G$ 이므로  $G$ 는 단순군이 아니다.

$$(\langle 2 \rangle \triangle \mathbb{Z}_{12})$$

④  $G = \langle g \rangle$ 인  $g \in G$ 있다.  $H = \langle g^s \rangle, K = \langle g^t \rangle$ 인  $s, t \in \mathbb{Z}$  있다.

이때  $H, K$ 는 가환군임이 자명하다.

(순환군(가환군)의 부분군은 가환군)

$$⑤ e^{-1} = e \in H$$
이므로  $H \neq \emptyset$ .

$$g, h \in H^{-1} \text{이면 } g = h_1^{-1}, h = h_2^{-1} \text{인 } h_1, h_2 \in H \text{ 있다.}$$

$$\text{이때 } gh^{-1} = h_1^{-1}h_2 \in H \text{이므로 } H^{-1} \leq G.$$

## 17. ①

¬. 실로우 정리(코시 정리) 적용, 실로우-5부분군  $H$ 있다.  $H$ 의 개수를  $n_5$ 라 하면  $n_5 = 5k_1 + 1 \mid 40$ 에서  $k_1 = 0, n_5 = 1$ 이므로  $H \triangle G$ 이며 잉여군  $G/H$ 가 정의되고,  $|G/H| = [G : H] = |G| \div |H| = 40 \div 5 = 8$ .

□.  $G$ 는 유한 가환군이므로 라그랑지 정리의 역이 성립한다. 즉,  $|G| = 4$ 의 약수 1, 2, 4를 위수로 하는  $G$ 의 부분군이 각각 존재한다. (유일하지는 않다.  $\mathbb{Z}_2 \times \{0\}, \{0\} \times \mathbb{Z}_2$ )  $G$ 가 가환이므로 모든 부분군이 정규이다.  $|N| = 1$ 일 때  $G/N \cong G, |N| = 2$ 일 때  $G/N \cong \mathbb{Z}_2, |N| = 4$ 일 때  $G/N \cong \{0\}$ . 따라서  $X$ 에 속하면서 서로 동형이 아닌 잉여군은 모두 3개. 동형을 고려하면 4개 있다.

$$\square. \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{0 + \mathbb{Z}, 1 + \mathbb{Z}, 2 + \mathbb{Z}, 3 + \mathbb{Z}, 4 + \mathbb{Z}, 5 + \mathbb{Z}\}$$

$$= \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\} \cong \mathbb{Z}_6 \text{의 위수는 } 6 = 2 \times 3 \text{이므로}$$

라그랑지 정리의 역에 의해 위수를 1, 2, 3, 6으로 갖는 부분군이 각각 1개씩, 총 4개 있다.

## 18. ④

¬. 정이면체군  $D_4$ , 사원수군  $Q_8$ 은 위수 8인 비가환군.

□.  $G$ : 부분군의 개수가 유한인 무한군이라 하자.

$G = \bigcup_{g \in G} \langle g \rangle$ 라 쓸 수 있고,  $|G| = \infty$ 이므로  $|g| = \infty$ 인  $g \in G$ 있다. 이때의 부분군  $\langle g \rangle$ 는 무한순환군이므로  $\mathbb{Z}$ 와 동형이며,  $\mathbb{Z}$ 의 부분군은  $\langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle, \langle 3 \rangle, \dots$ 이므로 부분군의 개수가 유한하지 않다. 이는 부분군의 개수가 유한인 무한군이 있다고 가정한 데 모순이다.

그러므로 부분군의 개수가 유한인 군은 유한군이다.

□.  $27 = 3^3$ 이며, 지수 3의 분할의 수는  $3 = 2+1 = 1+1+1, 3$ 가지이므로 유한 Abel군의 기본정리에 의해 위수 27인 아벨군 중에서 동형이 아닌 것의 종류는 3가지.

## 19. ⑤

① 위수 2인 부분군은  $\langle (1 2) \rangle, \langle (1 3) \rangle, \langle (2 3) \rangle$ , 3개 있다.

② 위수 6인 군은  $\mathbb{Z}_6$  또는  $S_3$ 와 동형이므로 옳다.

③ 항등원이 아닌 원소  $g \in G$ 에 대하여 라그랑지 정리에 의해  $|g| \mid |G| = p$ 에서  $|g| = p$ 이므로  $G$ 는 위수  $p$ 인 순환군이 된다. 따라서  $G$ 의 생성원의 개수  $\varphi(p) = p-1$ .

④ 서로 다른 소수  $p_i$ 와 자연수  $e_i$ 가 존재해서

$$|G| = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k} \text{라 하면 실로우 정리(혹은 코시 정리)에 의해}$$

$G$ 는 비자명 진부분군을 갖게 되어 모순이다.

따라서  $G$ 의 위수는 1 또는 소수이다.

그러므로  $G$ 는 순환군이며 순환군은 가환군이다.

⑤ 라그랑지 정리에 의해  $|b| \mid |G| = 4$ 이므로  $b$ 의 위수는 1, 2, 4 중 하나이다.  $b, b^2 = c$ 는 항등원이 아니므로  $|b| = 4$ , 즉  $G$ 는  $b$ 를 생성원으로 갖는 순환군.

## 20.

$S_3$ 에서  $(12)^2 = \text{id}$ ,  $(123)^3 = \text{id}$ ,

$$(12)^{-1}(123)(12) = (12)(123)(12) = (132) = (123)^{-1} \text{이므로}$$

$\phi : D_3 \rightarrow S_3$ ,  $\phi(a) = (12)$ ,  $\phi(b) = (123)$ 으로 정의한  $\phi$ 는 군동형사상이다.

$$D_3 = \langle (12), (123) \mid (12)^2 = (123)^3 = \text{id}, (12)^{-1}(123)(12) = (123)^{-1} \rangle$$

$$\cong S_3.$$

\*  $D_n$ =(정n각형의 자기 자신으로의 합동변환)

=회전변환  $\cup$  대칭변환

$$\cong \mathbb{Z}_n \cup \text{위수}2$$

\* 다른 설명

$|D_3| = |S_3| = 6$ 이고  $D_3$ 는 조건으로부터  $ab \neq ba$ 이므로 비가환이며, 순환군도 아니다.

$|D_3| = |S_3| = 6 = 2 \cdot 3$ 이고 코시 정리에 의해서 위수가 2, 3인 부분군이 존재하고(항등원은 제외) 이들을 각각  $H, K$ 라 하자.  $H, K$ 의 개수를 각각  $n_2, n_3$ 라 하면 Sylow정리에 의해  $n_2 = 2k_1 + 1 | 3$ ,  $n_3 = 3k_2 + 1 | 2$ 에서  $k_1 = 0$  또는 1이고  $k_2 = 0$ 이다.

$\therefore n_2 = 1$  또는 3이고  $n_3 = 1$ 이다.

그런데 만약  $H$ 를 한 개만 가지면  $|H \cup K \cup \{e\}| = 4$ 이므로  $D_3$ 의 원소의 개수 6에 대하여 모순이다. 그러므로 위수 2인 부분군은 3개 있다.

$S_3$ 는 항등원을 제외한 위수 3인  $\langle(123)\rangle = \langle(132)\rangle$ 이 1개 존재하고

위수 2인 부분군이  $\langle(12)\rangle, \langle(13)\rangle, \langle(23)\rangle$ 으로 3개 있다.

그러므로 Hasse 다이어그램이 일치하므로  $D_3 \cong S_3$ 이다.

21.  $|Q| = 2^3$ 이므로

라그랑지 정리에 의해  $Q$ 의 부분군  $H$ 의 위수는 1, 2, 4, 8 중 하나이고, Sylow 정리에 의해 위수 1, 2, 4, 8인 부분군  $H$ 가 반드시 존재한다.

①  $|H| = 1, 8$ 이면  $H = \{I\}$ ,  $Q$ 이므로 자명한 정규부분군이다.

②  $|H| = 2$ 인  $H = \{I, A^2\}$  뿐이므로  $H \triangle Q$ .

③  $|H| = 4$ 이면  $[Q : H] = \frac{|Q|}{|H|} = 2$ 이므로  $H$ 는  $Q$ 의 정규부분군이다. (실로 우

정리에 의해  $H \triangle K$ , 위수 2인 부분군  $K$ 있다.  $K = Q$ 이므로  $H \triangle Q$

\*  $H = \langle A, B \rangle$ ,  $|A| = 4 = |B|$

\*  $N \triangle G$ ,  $[G : N] = n$ 이면  $a^n \in N$  ( $a \in G$ )

22.  $(\emptyset \neq) G$ 는 순환군이므로 가환군이다.

(1)  $\sigma$ : (잘 정의됨), 준동형, 단사, 전사

① 준동형:  $\sigma(gh) = (gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1} = g^{-1}h^{-1} = \sigma(g)\sigma(h)$

② 단사:  $g \in \ker\sigma \Leftrightarrow \sigma(g) = g^{-1} = e \Leftrightarrow g = e \Leftrightarrow \ker\sigma = \{e\}$ .

③ 전사:  $\text{Im}\sigma = \{\sigma(g) \mid g \in G\} = \{g^{-1} \mid g \in G\} = \{g \mid g^{-1} \in G\} = G$ .

(2)  $\phi : G \rightarrow G$ 가 동형사상이라 하자.

$G = \langle \alpha \rangle = \{\alpha^s \mid s \in \mathbb{Z}\}$ 라 할 때,  $\phi(\alpha) = \alpha^n$ 인  $n \in \mathbb{Z}$  있다.

$\phi(G) = \phi(\langle \alpha \rangle) = \langle \phi(\alpha) \rangle$ 이므로  $\langle \alpha^n \rangle = G = \langle \alpha \rangle$ .

이때  $(\alpha^n)^t = \alpha^{nt} = \alpha$ 인  $t \in \mathbb{Z}$  있다.

$nt$ 가 1이 아니면  $\alpha$ 가 유한 위수를 갖게 되어 모순.

따라서  $nt = 1$ , 곱해서 1되는 정수는  $\pm 1$ 들 밖에 없다.

그러므로  $n = \pm 1$ .

즉,  $G$ 에서  $G$ 로의 동형사상은  $\phi(\alpha) = \alpha^{-1}$  또는  $\alpha$ 인  $\sigma$ 와 항등사상 뿐.

\* 무한순환군은  $\mathbb{Z}$ 와 동형.

\*  $\phi : G \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $\phi(g) = \phi(\alpha^n) = n$ 라 두면  $\phi$ 는 동형사상.

\* 유한순환군  $G$ 의 위수  $n$ 이면  $G$ 는  $\mathbb{Z}_n$ 과 구조가 같다.

## 23. 2, 6, 7, 8

원시근은 위수 10인 군  $G$ 의 생성원이므로 원시근을  $g$ 라 하면  $|g| = 10$ . 10의 약수는 1, 2, 5, 10이므로

법 11에 대하여  $2^1 = 2$ ,  $2^2 = 4$ ,  $2^5 = -1$ 이므로 2는  $G$ 의 원시근이다.

따라서  $G$ 의 모든 원소는  $k=1, \dots, \phi(11)=10$ 에 대해  $2^k$ 라 쓸 수 있다.

다른 원시근은  $2^k$ 로 쓸 수 있고,  $10 = |2^k| = \frac{|G|}{\gcd(10, k)} \Leftrightarrow \gcd(10, k) = 1$ .

$$\therefore k = 1, 3, 7, 9.$$

모든 원시근은  $2^1, 2^3, 2^7 = -2^2, 2^9 = -2^4$ .

정리하면  $G$ 의 모든 원시근 2, 8, 7, 6이다.

$$* G = \langle 2 \rangle = \langle 6 \rangle = \langle 7 \rangle = \langle 8 \rangle.$$

## 24.

하위 영역	배점	예상정답율(%)	관련사고영역	출제자
대 수	5	50	이해	좌준수
출제 내용	W.Nicholson. Introduction to Abstract Algebra. PWS.			
관련자료	pp. 114-125			

$G$ 가 군이므로 임의의  $g, h \in G$ 에 대하여  $gh \in G$ 이고

문제의 가정에 의해  $g^{-1} = g$ ,  $h^{-1} = h$ ,  $(gh)^{-1} = gh$ 가 성립한다.

한편,  $(gh)h^{-1}g^{-1} = gg^{-1} = e$ (항등원)이므로  $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$ 이다.

따라서 다음이 성립한다.  $gh = (gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1} = hg$ .

그러므로  $G$ 는 가환군이다.

## \* 채점기준

$(gh)^{-1} = gh$ 를 언급하면 ..... 1점

$(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$ 를 증명하면 ..... 3점

$((gh)^{-1})^{-1} = h^{-1}g^{-1}$ 를 증명없이 언급만 하면 ..... 2점

$h^{-1}g^{-1} = hg$ 를 언급하면 ..... 1점

## 25.

하위 영역	배점	예상 정답율(%)	출제근거 (이유)
고등수학(대수학)	4	50	김웅태, 박승안, 현대대수학, pp. 59-64

두 번째 조건식의 양변을 제곱하면

$$b^4 = (b^2)^2 = (aba^{-1})(aba^{-1}) \quad \therefore b^4 = ab^2a^{-1} \quad \dots \dots \dots 1\text{점}$$

우변의  $b^2$  대신에  $aba^{-1}$ 를 대입하면

$$b^4 = a(aba^{-1})a^{-1} = a^2ba^{-2} \quad \dots \dots \dots 2\text{점}$$

이 식을 다시 제곱하면

$$b^8 = (a^2ba^{-2})(a^2ba^{-2}) \quad \therefore b^8 = a^2b^2a^{-2} \quad \dots \dots \dots 3\text{점}$$

우변의  $b^2$  대신에 다시  $aba^{-1}$ 를 대입하면

$$b^8 = a^2(aba^{-1})a^{-2} = a^3ba^{-3} = b$$

$b \neq e$ 이므로,  $b^7 = e$

7은 소수이므로  $b$ 의 위수는 7이다. ..... 4점

26.  $\ker\phi \triangle H$ 

①  $\ker\phi \leq H$

$\phi(e_G) = e_H$ ,  $e_G \in \ker\phi$ 이므로  $\ker\phi \neq \emptyset$ .

$a, b \in \ker\phi$ 에 대하여  $\phi(ab^{-1}) = \phi(a)\phi(b)^{-1} = e_H$ 이므로  $ab^{-1} \in \ker\phi$ .

그러므로  $\ker\phi \leq H$ .

②  $\ker\phi \triangle H$

임의의  $h \in H$ 와 임의의  $k \in \ker\phi$ 에 대하여

$$\phi(hkh^{-1}) = \phi(h)\phi(k)\phi(h^{-1}) = \phi(h)e_H\phi(h^{-1}) = \phi(h)\phi(h)^{-1} = e_H.$$

즉  $gkg^{-1} \in \ker\phi$

따라서 위의 결과에 의해서  $\ker\phi$ 는  $H$ 의 정규부분군이다.

## 27. ②

㉠  $i \not\in \mathbb{R}$

㉡  $\gcd(5, 12) = 1$  이므로 옳다.

\*  $\langle 5 \rangle = \{5n \mid n \in \mathbb{Z}\}$  (덧셈군으로 간주)

$$= \{5n + 12m \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$$

$$\ni 5 \cdot (5) + 12 \cdot (-2) = 1 \text{이므로}$$

$\mathbb{Z}_{12} = \langle 1 \rangle \subset \langle 5 \rangle \subset \mathbb{Z}_{12}$ , 즉  $\mathbb{Z}_{12} = \langle 5 \rangle$ .

㉢  $f : \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_{mn}$ ,  $f(a, b) = [a+b]_{mn}$  라 하자.

$$f((a, b) + (c, d)) = f(a+c, b+d)$$

$$= [a+c+b+d]_{mn}$$

$$= [(a+b) + (c+d)]_{mn}$$

$$= [a+b]_{mn} + [c+d]_{mn}$$

$$= f(a, b) + f(c, d) \text{이므로}$$

$f$ 는 준동형사상이다.

$$f(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n) = f(\langle (1, 0), (0, 1) \rangle)$$

$$= \langle f(1, 0), f(0, 1) \rangle$$

$$= \langle 1 \rangle = \mathbb{Z}_{mn} \text{이므로}$$

$f$ 는 전사이다. 따라서  $f$ 는 단사이다.

그러므로  $f$ 는 군-동형사상이다.

㉣ 치환군은 비가환군이다.

## 28. ③

$$G = \{i, -i, 1, -1\}$$

$$\textcircled{1} \quad a^2 + b^2 + c^2 = (-i)^2 + 1^2 + (-1)^2 = 1$$

② 곱셈 교환법칙이 성립한다.

③ 덧셈 항등원 0이 없다.

④  $\{1\}$ 은 곱셈군을 이룬다.

1.

$\mathbb{Z}_{10}$ 에서 3은 단원이므로 3을 포함하는 가장 작은 아이디얼은  $\mathbb{Z}_{10}$ 이다.

$\mathbb{Z}_{12}$ 에서 8을 포함하는 가장 작은 아이디얼은  $\langle 8 \rangle = \langle 4 \rangle$ .

따라서  $(3, 8)$ 을 포함하는  $R$ 의 가장 작은 아이디얼은  $\mathbb{Z}_{10} \times \langle 4 \rangle$ .

동형정리에 따라  $R/\ker\phi \cong S$ .  $\phi(3, 8) = 0_S$ 이므로  $(3, 8) \in \ker\phi$ .

따라서  $\mathbb{Z}_{10} \times \langle 4 \rangle \subset \ker\phi$ .

이때 가능한  $\ker\phi$ 는  $\mathbb{Z}_{10} \times \langle 4 \rangle$ ,  $\mathbb{Z}_{10} \times \langle 2 \rangle$ ,  $\mathbb{Z}_{10} \times \langle 1 \rangle$ 이므로

$R/(\mathbb{Z}_{10} \times \langle 4 \rangle) \cong \mathbb{Z}_4$ ,  $R/(\mathbb{Z}_{10} \times \langle 2 \rangle) \cong \mathbb{Z}_2$ ,  $R/(\mathbb{Z}_{10} \times \langle 1 \rangle) \cong \{0_R\}$ , 3개 있다.

2.

$$|\mathbb{Z}_n[x]/I| = n^2 \leq 40, n \leq 6.$$

$(\mathbb{Z}_n[x]/I, +, \times)$ 의 표수  $n$ 이 홀수이므로  $n = 3, 5$ .

$\mathbb{Z}_n[x]/I$ 은 유한정역이므로 체이다.

따라서  $I$ 는 극대아이디얼이 되어야 하므로

2차 다항식  $x^2 + ax + 1 - a$ 는 PID  $\mathbb{Z}_n[x]$ 에서 기약이다.

$n=3$ 일 때  $a=0, 2$ .

$n=5$ 일 때  $a=2, 3, 4$ .

구하는 순서쌍  $(3, 0), (3, 2), (5, 2), (5, 3), (5, 4)$ .

3.

$\mathbb{Z}[i]$ 는 ED이므로 PID이다.  $I = \langle a+bi \rangle$ 인 정수  $a, b$ 가 존재.

$\nu(\alpha) = 10, \nu(\beta) = 25, \alpha, \beta \in I$ 이므로  $\nu(a+bi) = a^2 + b^2 \mid \gcd(10, 25) = 5$ ,

$a=\pm 1, b=0$  또는  $a=0, b=\pm 1$ 인 경우  $I = \mathbb{Z}[i]$ .

$a=\pm 2, b=\pm 1$  또는  $a=\pm 1, b=\pm 2$ 인 경우  $(\mathbb{Z}[i])^* = \{\pm 1, \pm i\}$ 이므로

$I = \langle 2+i \rangle$  또는  $\langle 2-i \rangle$ 가 가능하며, 이 중  $\alpha, \beta$ 를 포함하는  $I = \langle 2-i \rangle$ .

그러므로 가장 작은  $I = \langle 2-i \rangle = \langle \pm 2 \mp i \rangle$ .

정수  $c, d$ 가 존재해서  $\eta = (2-i) \cdot (c+di)$ 이므로

$\nu(\eta) = 5 \cdot (c^2 + d^2) \geq 5$ ,  $\nu(\eta)$ 의 최솟값 5.

$$\mathbb{Z}[i]/I = \{\overline{r+si} \mid 0 \leq r < 5, 0 \leq s < 1\}$$

$$= \{\bar{r} \mid 0 \leq r < 5\}$$

$\cong (\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ 이므로  $\mathbb{Z}[i]/I$ 의 표수 = 5.

$$\mathbb{Z}[i]/\langle a+bi \rangle = \left\{ \overline{r+si} \mid 0 \leq r < \frac{a^2+b^2}{\gcd(a,b)}, 0 \leq s < \gcd(a,b) \right\}$$

$$\text{위수: } a^2 + b^2, \text{ 표수: } \frac{(a^2+b^2)}{\gcd(a,b)}$$

4. 2, 6, 7, 8

2의 위수 10이므로  $\mathbb{Z}_{11}^* = \langle 2 \rangle$ 이며, 생성원  $2^k, \gcd(k, \varphi(11)) = 1$  꼴이다.

따라서 생성원(원시근)은 2,  $2^3 = 8, 2^7 = 7, 2^9 = 6$ , 즉 2, 6, 7, 8.

5.  $\gcd(2, 5) = 1, \ker\psi = \{0\} \times 5 \cdot 2^n \mathbb{Z}$ 이므로 동형정리에 따라

$\text{im}\psi \cong (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\ker\psi \cong \mathbb{Z}/\{0\} \times \mathbb{Z}/5 \cdot 2^n \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{5 \cdot 2^n}$ .

$$|(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{5 \cdot 2^n})^*| = 2 \cdot \varphi(5 \cdot 2^n) = 2 \cdot (4 \cdot 2^{n-1}) = 2^{n+2}$$
이므로 구하는  $n=5$ .

$$6. p(x) = x^4 - 4x^2 + 2, g(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x^3 + 2x^2)$$

$\alpha$ 를 근으로 갖는 다항식  $p(x) = x^4 - 4x^2 + 2$ 는

소수 2에 대한 아이젠슈타인 판정법에 의해  $\mathbb{Q}[x]$ 에서 기약,

$$K = \{f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid \varphi_\alpha(f(x)) = f(\alpha) = 0\}$$

$$= \{f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid \text{irr}(\alpha, \mathbb{Q}) \mid f(x)\}$$

$$= \{f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid f(x) \in \langle p(x) \rangle\}$$

$$= \langle p(x) \rangle$$

체  $\mathbb{Q}$ 의 다항식환  $\mathbb{Q}[x]$ 에 관한 나눗셈 알고리즘에 의해

$$p(x) = (x-2)(x^3 + 2x^2) + 2$$

$$\bar{0} = \overline{p(x)} = \overline{(x-2)} \cdot \overline{(x^3 + 2x^2)} + \bar{2}, \overline{x-2} \cdot \overline{-\frac{1}{2}(x^3 + 2x^2)} = 1.$$

$$\text{그러므로 } g(x) = -\frac{1}{2}x^3 - x^2 \neq \overline{g(x)}.$$

\* 정수환  $\mathbb{Z}$ 의 분수체  $\mathbb{Q}$

\*  $\mathbb{Q}$ 는 체이므로  $\mathbb{Q}[x]$ 는 PID

\*  $\mathbb{Q}[x]$ 는 PID이므로  $\langle p(x) \rangle = K$ 는 극대아이디얼

\*  $K$ 가 극대아이디얼이므로  $\mathbb{Q}[x]/K$ 는 체

\*  $\mathbb{Q}[x]/K$ 가 체이므로 영 아닌 모든 원소가 역원 갖는다

\*  $\gcd(p(x), x-2) = \gcd(x-2, 2) = 1, \overline{x-2} \in (\mathbb{Q}[x]/K)^*$

7. 36

$$J = \langle x \rangle, K = \langle x-1 \rangle, x - (x-1) = 1,$$

$$J+K = \langle \gcd(x, x-1) \rangle = \langle 1 \rangle = \mathbb{Z}_7[x],$$

$$J \cap K = \langle \text{lcm}(x, x-1) \rangle = \langle x \cdot (x-1) \rangle = I$$

국적인 나머지 정리와 제1동형정리에 의해

$$\mathbb{Z}_7[x]/I = \mathbb{Z}_7[x]/J \cap K \cong (\mathbb{Z}_7[x]/J) \times (\mathbb{Z}_7[x]/K) \cong \mathbb{Z}_7[0] \times \mathbb{Z}_7[1] \cong \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7.$$

$$|U(\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7)| = |\mathbb{Z}_7^* \times \mathbb{Z}_7^*| = 6 \cdot 6 = 36$$
이므로  $|U(\mathbb{Z}_7[x]/I)| = 36$ .

$$* \mathbb{Z}_7[x]/\langle x \rangle = \{\overline{f(x)} \mid \deg f(x) < \deg x = 1\}$$

$$= \{\dots, \bar{x}, \overline{x+1}, \overline{x+2}, \dots\}$$

$$= \{\dots, \bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{6}, \dots\}$$

$$\cong \mathbb{Z}_7$$

\* PID에서  $\langle a \rangle + \langle b \rangle = \langle c \rangle \Leftrightarrow c = \gcd(a, b)$

$$\Rightarrow as + bt = c \text{인 } s, t \text{ 있다.}$$

8. 10

$\mathbb{Z}_5$ 는 체이므로  $\mathbb{Z}_5[x]$ 는 PID이다. 따라서  $I = \langle f(x) \rangle$ 인  $f(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$  있다.

(가)에 의해

$$|\mathbb{Z}_5[x]/I| = |\{r(x) + I \mid r(x) \in \mathbb{Z}_5[x], \deg r(x) < \deg f(x)\}|$$

$$= 5^{\deg f(x)} = 25, \deg f(x) = 2.$$

$f(x) = (x-a)^2$  꼴이면 (나)를 만족하지 않는다.

$a \neq b$ 인  $a, b \in \mathbb{Z}_5$ 에 대하여  $f(x) = (x-a)(x-b)$ 라 하면

제3동형정리에 의해

$$\mathbb{Z}_5[x]/\langle f(x) \rangle \cong (\mathbb{Z}_5[x]/\langle x-a \rangle) \times (\mathbb{Z}_5[x]/\langle x-b \rangle)$$

$$\cong \mathbb{Z}_5[a] \times \mathbb{Z}_5[b]$$

$\cong \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ 의 극대 아이디얼  $\mathbb{Z}_5 \times \{0\}, \{0\} \times \mathbb{Z}_5$ , 2개 있다.

$$* \langle x-a \rangle / \langle f(x) \rangle, \langle x-b \rangle / \langle f(x) \rangle \subset \mathbb{Z}_5[x]/\langle f(x) \rangle$$

그러므로 조건을 만족시키는 아이디얼의 개수는  $\mathbb{Z}_5$ 의 서로 다른  $a, b$ 를 순서와 관계없이 뽑는 경우의 수  ${}_5C_2 = 10$ 과 같다.

\*  $\mathbb{Z}_5[x]$ 에서  $\langle 2x+1 \rangle = \langle x+3 \rangle, 3 \in U(\mathbb{Z}_5[x])$

\* 대응정리에 의해  $\mathbb{Z}_5[x]/I$ 의 모든 아이디얼은

$r(x) | f(x)$ 인  $r(x)$ 에 대해  $\langle r(x) \rangle / I$ 라 나타낼 수 있다.

\*  $r(x) | f(x) \Leftrightarrow f(x) \in \langle r(x) \rangle \Leftrightarrow I \subset \langle r(x) \rangle$

### 9. $\text{char } R = 30$

$\mathbb{Z}$ 는 PIR이며,  $\mathbb{Z}$ 의 잉여환  $\mathbb{Z}/\langle 60 \rangle \cong \mathbb{Z}_{60}$ 은 PID.

$\mathbb{Z}_{60}$ 의 아이디얼은  $k | 60$ 인  $k$ 에 대하여  $\langle k \rangle$ ,

$\mathbb{Z}_{60}/\langle k \rangle \cong \mathbb{Z}_{\gcd(60, k)} = \mathbb{Z}_k$ 이다.

\*  $\mathbb{Z}_{60}$ 의 아이디얼의 개수 =  $(2+1)(1+1)(1+1) = 12$

\*  $2 \neq 14$ 이지만  $\langle 2 \rangle = \langle 14 \rangle$ ,  $\langle 2 \rangle = \langle k \rangle$ 인  $k$ 개수 =  $\varphi(60/2)$

60의 표준분해  $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ 이므로

$\mathbb{Z}_k$ 가 체가 되는  $k = 2, 3, 5$ .

그러므로  $R = (\mathbb{Z}_{60}/\langle 2 \rangle) \times (\mathbb{Z}_{60}/\langle 3 \rangle) \times (\mathbb{Z}_{60}/\langle 5 \rangle)$

$$\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_{30}, \quad \text{char } R = \text{char } \mathbb{Z}_{30} = 30.$$

### 10. ⑤

¬.  $ab = 0$ 인  $b \neq 0$ 인  $b \in \mathbb{Z}_n$  있다. 이때  $a$ 가 단원이면  $ac = 1 = ca$ 인  $c \in \mathbb{Z}_n$  있다.

$0 = 0 \cdot c = ab \cdot c = ac \cdot b = b$ 가 되어 모순이다.

\*  $U(\mathbb{Z}_n) = \{m \in \mathbb{Z}_n \mid \gcd(m, n) = 1\}$ ,  $|U(\mathbb{Z}_n)| = \varphi(n)$ .

↪.  $\text{char } R = n = ab$ ,  $a > 1$ ,  $b > 1$ 라 하자.

$$0 = n \cdot 1$$

$$= 1 + 1 + \cdots + 1 \quad (n \text{번 } = ab \text{번 연산})$$

$$= (1 + 1 + \cdots + 1)(1 + 1 + \cdots + 1) \quad (a \text{번 } \cdot b \text{번 연산})$$

$$= (a \cdot 1)(b \cdot 1) \text{이므로}$$

$n = \text{char } R = \min\{a, b\} < n$ 이 되어 모순이다.

\* 표수는 덧셈군에서 단위원 1의 위수(라그랑지 적용가능)

ㄷ. 소수 3에 대한 아이겐슈타인 판정법에 의해 옳다.

\* 주어진 다항식은 실근 1개, 허근 6개를 갖는다.

\* 실근  $-3 < \alpha < -2$ ,  $\deg(\alpha, \mathbb{Q}) = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 7$

### 11. ①

$$\ker \varphi = \{a + b\alpha \in \mathbb{Z}[\alpha] \mid \varphi(a + b\alpha) = 0\}$$

$$= \{a + b\alpha \in \mathbb{Z}[\alpha] \mid [a]_3\varphi(1) + [b]_3\varphi(\alpha) = 0\}$$

$$= \left\{ a + b\alpha \in \mathbb{Z}[\alpha] \mid [a]_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + [b]_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \right\}$$

$$= \{a + b\alpha \in \mathbb{Z}[\alpha] \mid [a]_3 = 0 = [b]_3\} \quad (\because \text{일차독립})$$

$$= \{3(r+s\alpha) \mid r, s \in \mathbb{Z}\}$$

$$= 3 \cdot \mathbb{Z}[\alpha]$$

$$= \langle 3 \rangle.$$

동형정리에 의해  $\text{im}(\varphi) \cong \mathbb{Z}[\alpha]/\ker \varphi = \mathbb{Z}[\alpha]/\langle 3 \rangle \cong \mathbb{Z}_3[\alpha]$ .

$f(x) = x^2 - x - 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ 는  $\alpha$ 를 근으로 갖는 기약다항식이므로  $\mathbb{Z}_3[\alpha]$ 는 체.

따라서  $\mathbb{Z}_3[\alpha] = \mathbb{Z}_3(\alpha)$ 이고  $\text{im}(\varphi)$ 는  $F_9$ 와 동형이다.

\*  $\varphi(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\varphi(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 는  $M_2(\mathbb{Z}_3)$ 에서 일차독립.

\*  $\text{im} \varphi = \varphi(\mathbb{Z}[\alpha]) = \varphi(\langle 1, \alpha \rangle) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ ,  $|\text{im} \varphi| = 3^2 = 9$ .

\* 환  $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3, +, \times)$ 에는 곱셈 위수 3 넘는 원소 없다.

\* 환  $\text{im}(\varphi)$ 의 원소  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 은 위수  $8 (= |\text{im}(\varphi)|^*)$ 이다.

### 12.

#### (I) 참

$S$ 의 아이디얼  $J$ 라 하자.

(나)에 의해  $\Phi^{-1}(J)$ 는  $\mathbb{R}[x]$ 의 아이디얼이고,

(가)에 의해  $\Phi^{-1}(J) = \langle f(x) \rangle$ 인  $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ 이다.

$\Phi(\mathbb{R}[x]) = S$ , 즉  $\Phi$ 는 전사이므로  $\Phi(\Phi^{-1}(J)) = J$ ,  $J = \Phi(\langle f(x) \rangle) = \langle \Phi(f(x)) \rangle$ .

그러므로  $S$ 는 PID.

#### (II) 거짓

$\Phi$ 는 전사 환준동형사상이고,

환준동형사상  $\psi : \mathbb{R}[x] \rightarrow S/\Phi(I)$ ,  $\psi(f(x)) = \Phi(f(x)) + \Phi(I)$ 에 대하여

$\ker \psi = \Phi^{-1}(\Phi(I)) = I$ ,  $\text{im } \psi = \psi(\mathbb{R}[x]) = \Phi(\mathbb{R}[x])/\Phi(I) = S/\Phi(I)$ 이므로

동형정리에 따라  $\mathbb{R}[x]/I \cong S/\Phi(I)$ .

즉,  $S/\Phi(I)$ 의 대수적 구조는  $\mathbb{R}[x]/I$ 와 일치한다.

$x^2 + 2x + 2 \in \mathbb{R}[x]$ 는  $\mathbb{R}[x]$ 에서 해를 갖지 않으므로 기약이다.

(다)에 의해  $I$ 는  $\mathbb{R}[x]$ 의 극대아이디얼이이며,  $\mathbb{R}[x]/I$ 는 체이다.

체(단순환)의 아이디얼은 2개 있으므로  $S/\Phi(I)$ 의 아이디얼은 2개 있다.

#### (III) 참

$\Phi(1) = \Phi(1^2) = \Phi(1)^2$ 에서  $\Phi(1) = 0$  또는  $\Phi(1) = 1$ .

$\Phi(1) = 1$ 라 하자.

$\Phi(\sqrt{2}) = m$ 인  $m \in \mathbb{Z}$  있다.

$\Phi(2) = m^2 = \Phi(1+1) = 2\Phi(1) = 2$ , 즉 제곱해서 2가 되는 정수 있다. 모순.

따라서  $\Phi(1) = 0$ 이고,  $\Phi(\mathbb{R}[x]) = \Phi(1 \cdot \mathbb{R}[x]) = \Phi(\langle 1 \rangle) = \langle \Phi(1) \rangle = \langle 0 \rangle = \{0\}$ .

그러므로  $\mathbb{R}[x]/\ker \Phi = \mathbb{R}[x]/\mathbb{R}[x] \cong \{0\}$ 의 아이디얼 1개 있다.

### 13. ①

¬.  $\delta : \mathbb{Z}[i] \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $\delta(a+bi) = a^2 + b^2$ 라 정의하자.

①  $\delta(\alpha) = 0 \Leftrightarrow N(\alpha) = \alpha\bar{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ 이고,

$\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ ,  $\beta \neq 0$ 이면  $\delta(\beta) \geq 1$ 이므로

$\delta(\alpha) \leq \delta(\alpha)\delta(\beta) = |N(\alpha)||N(\beta)| = \delta(\alpha\beta)$ .

②  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ ,  $\beta \neq 0$ 일 때

$$\frac{\alpha}{\beta} = u + vi \in \mathbb{Q}(i) \text{일 때},$$

$x, y$ 를 각각 유리수  $u, v$ 에 가장 가까운 정수,

$$\gamma = x + yi \in \mathbb{Z}[i], \quad \varepsilon = \alpha - \beta\gamma \in \mathbb{Z}[i]$$

라 하면,

$$\varepsilon = \alpha - \beta\gamma = \beta \left( \frac{\alpha}{\beta} - \gamma \right) = \beta [(u-x) + (v-y)i],$$

$$N(\varepsilon) = N(\beta) [(u-x)^2 - m(v-y)^2]$$

이고  $0 \leq |u-x| \leq \frac{1}{2}$ ,  $0 \leq |v-y| \leq \frac{1}{2}$ 이므로

$$0 \leq (u-x)^2 - m(v-y)^2 \leq \frac{1}{4} - \frac{m}{4} < 1.$$

$\delta(\varepsilon) = |N(\varepsilon)| < |N(\beta)| = \delta(\beta)$ 이므로  $\mathbb{Z}[i]$ 는 유클리드 정역이다.

그러므로  $\mathbb{Z}[i]$ 는 PID이다.

¬.  $U(\mathbb{Z}[i]) = \{a^2 - b^2 = \pm 1 \mid a, b \in \mathbb{Z}\} = \{\pm 1, \pm i\}$

ㄷ.  $\mathbb{Z}[i]$ 는 PID이고,  $2 = (1+i)(1-i)$ 이며  $1+i, 1-i$ 는  $\mathbb{Z}[i]$ 의 단원이 아님.

따라서 2는  $\mathbb{Z}[i]$ 의 기약원이 아니므로  $\langle 2 \rangle$ 는 극대아이디얼이 아니다.

실제로,  $\langle 2 \rangle \subsetneq \langle 1+i \rangle \subsetneq \mathbb{Z}[i]$ .

## 14. ①

ㄱ.  $g(1) = g(1^2) = [g(1)]^2$  이므로  $g(1) = 0$  또는 1.  $g$ 는 단사이므로  $g(1) = 1$ .  
환준동형사상의 성질에 따라  $n \in \mathbb{Z}$ 에 대해  $g(1 \cdot n) = g(n) = n$ .

ㄴ.  $\mathbb{Z}$ 는 PID이므로  $\mathbb{Z}$ 의 이데알  $I = \langle m \rangle = m\mathbb{Z}$ 인  $m \in \mathbb{Z}$  있다.  
 $g(I) = g(m\mathbb{Z}) = m \cdot g(\mathbb{Z}) = mg(\langle 1 \rangle) = m \langle g(1) \rangle = m\mathbb{Z}$ .

$m \cdot 3 \in m\mathbb{Z}$ ,  $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ 에 대하여  $\frac{1}{2} \cdot (m \cdot 3) = m \cdot \frac{3}{2} \not\in m\mathbb{Z}$  이므로

$m\mathbb{Z}$ 는  $\mathbb{Q}$ 의 아이디얼이 아니다.

\*  $I \neq m + \mathbb{Z}$

ㄷ. 유리수체  $\mathbb{Q}$ 의 아이디얼  $\{0\}$ ,  $\mathbb{Q}$ , 2개 뿐이다.

$\mathbb{Q}$ 의 아이디얼  $J = \{0\}$ 에 대하여  $g(J) = J$  되는  $\mathbb{Z}$ 의 아이디얼  $\{0\}$  있다.

$\mathbb{Q}$ 의 아이디얼  $J = \mathbb{Q}$ 에 대하여  $g(J) = J$ 가 되는 아이디얼 없다.

( $\because$ ) 임의의  $n \in \mathbb{Z}$ 에 대하여  $g(n) = n$  이므로

$g(J) = J = \mathbb{Q}$  되는 아이디얼이 존재하지 않는다.

\* 임의의  $\mathbb{Z}$ 의 아이디얼  $n\mathbb{Z}$ 에 대하여  $g(n\mathbb{Z}) = n\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q}$ .

## 15. ②

①  $R$ 에서  $4 \neq 0$ ,  $6 \neq 0$ ,  $4 \cdot 6 = 0$  이므로  $R$ 은 정역이 아니다.

②  $U(\mathbb{Z}_{24}) = \{n \mid \gcd(n, 24) = 1\}$ ,  $\mathbb{Z}_{24} \subset R$  이므로

$U(\mathbb{Z}_{24}) \subset U(R)$ ,  $|U(\mathbb{Z}_{24})| = \varphi(24) = 8 \leq |U(R)|$ .

\*  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(12x^n + 1) \cdot (12x^n + 1) = 1$ ,  $|U(R)| = \infty$ .

③  $R$ 의 단위원(곱셈항등원) 1,  $\text{char } R = 24$ ,

$S = \mathbb{Z}_4[x] \times \mathbb{Z}_6[x]$ 의 단위원 1,  $\text{char } S = \text{lcm}(4, 6) = 12$ .

표수가 다르므로 환동형이 아니다.

\*  $\mathbb{Z}_{24}[x] \cong \mathbb{Z}_3[x] \times \mathbb{Z}_8[x]$ ,  $\gcd(3, 8) = 1$

④  $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) \equiv 0 \pmod{24}$

$\Leftrightarrow f(x) \equiv 0 \pmod{3}$ ,  $f(x) \equiv 0 \pmod{8}$

$\Leftrightarrow x \equiv 1, 2, 3 \pmod{3}$ ,  $x \equiv 1, 2, 3, 5, 7 \pmod{8}$

이므로  $\mathbb{Z}_{24}$ 에서  $f(x)$ 는 15개 해를 갖는다.

(중국인 나머지 정리)

\*  $x \equiv a_i 8x_1 + b_j 3x_2 \pmod{24}$ ,  $a_i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $b_j \in \{1, 2, 3, 5, 7\}$ .

\*  $8x_1 \equiv 1 \pmod{3}$ ,  $3x_2 \equiv 1 \pmod{8}$ 에서

$x_1 \equiv 2 \pmod{3}$ ,  $x_2 \equiv 3 \pmod{8}$ .

\*  $x \equiv 16a_i + 9b_j \equiv 1, 10, 19, 13, 7, 17, 2, 11, 29, 23, 9, 18, 3, 45, 15$

⑤  $x^2 + 12 = (x+6)(x-6)$ ,  $0 + I = \overline{0} = \overline{x+6} \cdot \overline{x-6}$ ,

$\overline{x+6} = x+6 + I \neq 0 + I$ ,  $\overline{x-6} \neq I$  이므로  $R/I$ 는 정역이 아니며, 체도 아님.

## 16. ②

①  $\langle 1 \rangle = \mathbb{Z}$ ,  $\langle 2 \rangle = 2\mathbb{Z}$ , …,  $\langle 2, 6 \rangle = \langle 2 \rangle$ ,  $\langle 5, 6 \rangle = \langle 1 \rangle$ , …

\*  $n\mathbb{Z}$ 는  $\mathbb{Z}$ 의 부분환 ( $n \in \mathbb{Z}$ )

②  $\mathbb{Z}$ 에는 곱셈항등원(단위원) 1 있다.  $3\mathbb{Z}$ 에는 곱셈항등원 없다.

③  $\mathbb{Z}$ 는 PID, 17은  $\mathbb{Z}$ 의 소원(기약원),  $\langle 17 \rangle = 17\mathbb{Z}$ 은 극대아이데알.

\*  $\mathbb{Z}$ 는 PID이고 PID에서 기약원  $\Leftrightarrow$  극대아이디얼 생성

\*  $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_{17}$ 은 체이므로  $17\mathbb{Z}$ 는  $\mathbb{Z}$ 의 극대아이디얼.

\* 정수계수 다항식환  $\mathbb{Z}[x]$ 는 PID 아님,  $(2, x)$

④ (1), (2), (-4), (-17), … 많다.

⑤ 정역에서 소원  $\Rightarrow$  기약원

\*  $\mathbb{Z}$ 는 UFD이고 UFD에서 소원  $\Leftrightarrow$  기약원

\*  $F$ : UFD이면  $F[x]$ : UFD

## 17. ②

①  $\mathbb{Z}$ 는 환이고 임의의  $m \in \mathbb{Z}$ 에 대하여  $m \in \mathbb{Z}[x]$  이므로  $\mathbb{Z}$ 는  $\mathbb{Z}[x]$ 의 부분환이다.

②  $\mathbb{Z}[i]$ 에는 제곱해서 -1이 되는 원소  $i$  있다.  $\mathbb{Z}[x]$ 가  $\mathbb{Z}[i]$ 와 환동형이라면  $\mathbb{Z}[x]$ 에도 제곱해서 -1이 되는 원소가 있어야 한다. 그러나 임의의 정수 다항식의 제곱은 0이상이므로 모순이다.

\*  $\mathbb{Z}[i]$ 는 PID,  $\mathbb{Z}[x]$ 는 PID가 아니다. ( $\mathbb{Z}$ 는 체가 아니다.)

\*  $\mathbb{Z}[x]$ 의 단원  $\pm 1$ ,  $\mathbb{Z}[i]$ 의 단원  $\pm 1$ ,  $\pm i$ .

③  $\mathbb{Z}$ 는 UFD(유클리드 호제법 사용가능)이므로  $\mathbb{Z}[x]$ 는 UFD이다.

④ 정역  $\mathbb{Z}$ 에 대하여  $E = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$  위의  $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$ 로 정의된 동치관계  $\sim$ 에 대하여  $(a, b) \in E$ 를 포함하는 동치류를  $\frac{a}{b}$ , 동치류 전체의 집합을  $F$ ,  $F$ 의 연산을

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

로 정의하자.  $\mathbb{Z}$ 의 분수체  $(F, +, \times)$ 는 유리수체  $\mathbb{Q}$ 와 동형이다.

\* 이차 체  $\mathbb{Q}(\sqrt{m}) = \{a + b\sqrt{m} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ 는 정역  $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ 의 분수체.

⑤  $f(x) \in U(\mathbb{Z}[x])$ 이면  $f(x)g(x) = 1$  되는  $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$  있다.

양변 비교하면  $f(x), g(x) \in \mathbb{Z} - \{0\}$ ,

이때  $f(x) = \pm 1$ . 따라서  $U(\mathbb{Z}[x]) = U(\mathbb{Z}) = \{\pm 1\}$ .

## 18. ④

①  $\alpha$ 가  $F$  위에서 대수적이므로  $\alpha$ 를 근으로 갖는  $f(x) \in F[x]$  있다.  $f(x) \in \ker \phi_\alpha$  이므로  $\ker \phi_\alpha \neq \{0\}$ .

\* 실제로  $\ker \phi_\alpha = \langle \text{irr}(\alpha, F) \rangle$  ( $F[x]$ : PID, 자연수 정렬성 이용)

②  $\phi_\alpha$ 가 전사일 때 동형정리에 의해 성립한다. 항상 성립하지 않는다.

\* 예:  $F = \mathbb{Q}$ ,  $\alpha = \sqrt{2}$ ,  $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

③  $F[x]/\ker \phi_\alpha$ 는 체이므로  $\ker \phi_\alpha$ 는  $F[x]$ 의 소아이디얼.

\*  $\ker \phi_\alpha = \langle \text{irr}(\alpha, F) \rangle$ 는  $F[x]$ 에서 극대아이디얼, 소아이디얼도 된다.

## 19. ⑤

①  $\mathbb{Z}_5$ 는 체이므로  $\mathbb{Z}_5[x]$ 는 주아이디얼정역이고,

여기서 극대아이디얼  $\langle f(x) \rangle \Leftrightarrow f(x)$ 가 기약다항식.

$x^3 + 3x + 2 \in \mathbb{Z}_5[x]$ 는  $\mathbb{Z}_5$ 에서 해를 갖지 않으므로

기약다항식이다. 따라서  $\langle x^3 + 3x + 2 \rangle$ 는 극대아이데알.

②  $\mathbb{Z}_6/\langle 3 \rangle \cong \mathbb{Z}_3$ 는 체이므로  $\langle 3 \rangle$ 는 극대아이데알.

$\mathbb{Z}_6/\langle 3 \rangle \cong \mathbb{Z}_{\gcd(6, 3)} = \mathbb{Z}_3 \neq \mathbb{Z}_2$

③ 소수 2에 대한 아이겐슈타인 판정법에 의해

$x^5 - 4x + 22 \in \mathbb{Q}[x]$ 는 기약이고  $\mathbb{Q}$ 는 체이므로

$\langle x^5 - 4x + 22 \rangle$ 는  $\mathbb{Q}[x]$ 의 극대아이디얼.

④  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/(2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/(\langle 2 \rangle \times \langle 1 \rangle)$

$= (\mathbb{Z}/\langle 2 \rangle) \times (\mathbb{Z}/\langle 1 \rangle)$

$\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_1 \cong \mathbb{Z}_2$ 는 체이므로 옳다.

⑤ 정역  $\mathbb{Z}[x]$ 의 원소  $3x^3 + x^2 + x - 2 = (3x-2)(x^2+x+1)$ 이므로 극대아이디얼이 아니다.

\*  $\mathbb{Z}[x]$ 의 아이디얼  $I = \langle 3x^3 + x^2 + x - 2 \rangle$ 라 하자.

$\mathbb{Z}[x]/I$ 에서  $\overline{3x+2} \neq 0 + I$ ,  $\overline{x^2+x+1} \neq 0 + I$ 지만

(3차 다항식이 1, 2차 다항식은 못나눈다.)

$$\overline{3x+2} \cdot \overline{x^2+x+1} = (3x^3 + x^2 + x - 2) + I = 0 + I = \overline{0}.$$

따라서  $\mathbb{Z}[x]/I$ 는 정역부터 안된다. 그래서 체도 안된다.

즉,  $I$ 는  $\mathbb{Z}[x]$ 의 극대아이데알이 아니다.

## 20. ①

① UFD의 성질,  $I$ 의 조건과 무관하다.

\* 체  $\Rightarrow$  ED  $\Rightarrow$  PID  $\Rightarrow$  UFD

[②  $\Rightarrow$  ③]

$I = \langle p(x) \rangle$ 인 기약다항식  $p(x) \in F[x]$  택하자.

$\langle p(x) \rangle = 0 + I \neq f(x) + \langle p(x) \rangle \in F[x]/I$ 에 대하여

$f(x) \not\in \langle p(x) \rangle$ 이므로  $p(x)$ 는  $f(x)$ 를 나누지 못하므로

$\gcd(p(x), f(x)) = 1$  즉,  $p(x)s(x) + f(x)t(x) = 1$ 인  $s(x), t(x) \in F[x]$  있다.

$1 - f(x)t(x) = p(x)s(x) \in \langle p(x) \rangle$ 이므로  $1 + \langle p(x) \rangle = f(x)t(x) + \langle p(x) \rangle$

즉, 영이 아닌  $\overline{f(x)} \in F[x]/I$ 는 곱셈 역원  $\overline{t(x)}$  갖는다.

[③  $\Rightarrow$  ④]

$I \subset J \subset F[x]$ 인 이데알  $J$ 라 하자.  $F[x]/J \subset F[x]/I$ 이므로

$\overline{0} \neq \overline{f(x)} \in F[x]/J \subset F[x]/I$ 에 대하여

$\overline{f(x)} \cdot \overline{t(x)} = \overline{1} = 1 + \langle p(x) \rangle$ 인  $\overline{t(x)} \in F[x]/I$  있다.

이때  $f(x)t(x) - 1 = \alpha$ 인  $\alpha \in I$  있다.

여기서  $1 = f(x)t(x) - \alpha \in J$ ,  $J = F[x]$ .

[④  $\Rightarrow$  ⑤]

$I$ 는 극대이데알이므로  $F[x]/I$ 는 체이고 따라서  $F[x]/I$ 는 정역이다.

그러므로  $I$ 는  $F[x]$ 의 소이데알이다.

21.  $a \neq 0$ 일 때,  $a | b$ 임을 보이자.

\*  $\mathbb{Z}$ : 체 아님  $\Leftrightarrow \mathbb{Z}[x]$ : PID 아님

$\mathbb{Z}$ : 정역  $\Leftrightarrow \mathbb{Z}[x]$ : 정역

$I = \langle f(x) \rangle$ 인  $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 를 택하자.

$\langle a, bx \rangle \subset \langle f(x) \rangle$ ,  $a, bx \in \langle f(x) \rangle$ 이므로  $f | a$ ,  $f | bx$ 이며,

$a$ 는 정수이므로  $f \in \mathbb{Z}$ ,  $f | a$ ,  $f | b$ .

$\langle f(x) \rangle \subset \langle a, bx \rangle$ ,  $f(x) \in \langle a, bx \rangle = \langle a \rangle + \langle bx \rangle$ 이므로

$f(x) = a \cdot s(x) + bx \cdot t(x)$ 인  $s(x), t(x) \in \mathbb{Z}[x]$  있다.

$x=0$  대입하면  $f(x) = f(0) = a \cdot s(0)$ ,  $a | f$ .

그러므로  $a | b$ .

22.

$$\text{im } f = f(\mathbb{Z}) = f(\langle 1 \rangle) = \langle f(1) \rangle$$

$$= \langle 6m+4n \rangle (m, n \in \mathbb{Z})$$

$$= 2\langle 3m+2n \rangle = 2\langle 1 \rangle (\because \gcd(3, 2) = 1)$$

$$= 2\mathbb{Z}_6.$$

\* 0, 1, 2, 3, 4, 5  $\in \mathbb{Z}$ 만 대입해서 비교해도 충분하다.

$$\ker f = \{n \in \mathbb{Z} \mid f(n) \equiv 4n \equiv 0 \pmod{6}\} = 3\mathbb{Z}.$$

$$\text{동형정리에 의해 } \mathbb{Z}/\ker f = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \text{im } f = 2\mathbb{Z}_6.$$

$$23. \ker f = 105\mathbb{Z}$$

중국인의 나머지 정리에 의해

$$x \in \ker f \Leftrightarrow \text{법 } 3, 5, 7 \text{에 대하여 } x \equiv 0$$

$$\Leftrightarrow \text{법 } 3 \cdot 5 \cdot 7 \text{에 대하여 } x \equiv 0$$

$$\Leftrightarrow x \equiv 0 \pmod{105}$$

$$\Leftrightarrow x \in 105\mathbb{Z},$$

$$\ker f = 105\mathbb{Z}.$$

$$24. \text{특수해 } f(53) = (\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}) \text{이므로 일반해 } 53 + \ker f = 53 + 105\mathbb{Z}.$$

구하는 정수  $x = 53 + 105m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

$$* x \equiv 2 \pmod{3}, x \equiv 3 \pmod{5}, x \equiv 4 \pmod{7}$$

$$* \text{해집합 } f^{-1}[(2+3\mathbb{Z}, 3+5\mathbb{Z}, 4+7\mathbb{Z})] = 53 + \ker f$$

\*  $4+7\mathbb{Z}$  원소 나열하면서 비교, 특수해 +  $\ker f$ .

25.  $F[x]$ 의 이데알  $I$ 라 하자.  $I = \langle 0 \rangle$ 는 주이데알이다.  $I \neq \langle 0 \rangle$ 라 하자.

$D = \{\deg f(x) \mid f(x) \in I \setminus \{0\}\}$ 라 하면

$D \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$ 이므로 자연수 정렬성 원리에 의해  $n = \min D$  있다.

$\deg f(x) = n$ 인  $f(x) \in I$  택하자.  $\langle f(x) \rangle \subset I$ 임은 자명하다.

$g(x) \in I$ 에 대하여 나눗셈 알고리즘에 의해

$$g(x) = f(x)Q(x) + R(x), \quad 0 \leq \deg R(x) < \deg f(x) \text{ 또는 } R(x) = 0$$

인  $Q(x), R(x) \in F[x]$ 가 유일하게 존재한다.

이때  $f(x)Q(x)$  좌변 이항하면

$$R(x) = g(x) - f(x)Q(x) \in I = \{0, f(x), g(x), \dots\}$$

$I$ 는 아이디얼이므로  $R(x) \in I$ 이다.

이때  $\deg f(x)$ 는  $I$ 의 최소차수 다항식이므로  $R(x) = 0$ .

$$\text{즉 } g(x) = f(x)Q(x) \in \langle f(x) \rangle.$$

그러므로  $I = \langle f(x) \rangle$ 는  $F[x]$ 의 주아이디얼이다.

26.  $a \neq 0$ 인  $a \in D$ 에 대하여  $a, a^2, a^3, \dots \in D$ 이고  $D$ 는 유한집합이므로  $m > n$ ,  $a^m = a^n$ 인 자연수  $m, n$  있다.

$$a^n(a^{m-n}-1) = 0, \quad a \neq 0$$

영 아닌 임의의 원소가 단원이므로  $D$ 는 체이다.

27.  $J$ 는  $R$ 의 아이디얼

①  $0 \in J$ 이므로  $J \neq \emptyset$

②  $a, b \in J$ 면  $a^m = 0, b^n = 0$ 인  $m, n \in \mathbb{Z}^+$  있다.

$$\begin{aligned} (a-b)^{m+n} &= \sum_{k=0}^n \binom{m+n}{k} (-b)^k a^{m+n-k} + \sum_{k=n+1}^{m+n} \binom{m+n}{k} (-b)^k a^{m+n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{m+n}{k} (-b)^k \cdot 0 + \sum_{k=n+1}^{m+n} \binom{m+n}{k} 0 \cdot a^{m+n-k} \\ &= 0, \quad \text{즉 } a-b \in J \text{으로 } (J, +) \leq (R, +) \end{aligned}$$

③  $a \in J, r \in R$ 라 하면  $a^n = 0$ 인  $n \in \mathbb{Z}^+$  있다.  $R$ 은 가환환이므로  $(ra)^m = r^m a^m = r^m \cdot 0 = 0$ 이므로  $ra = ar \in J$ .

그러므로  $J$ 는  $R$ 의 아이디얼이다.

28. ②

$\mathbb{Z}_2$ 는 체이므로  $\mathbb{Z}_2[x]$ 는 PID,  $f(x)$ 는  $\mathbb{Z}_2$ 에서 해를 갖지 않으므로 기약.

PID에서 기약다항식  $f(x)$ 에 대하여  $\langle f(x) \rangle$ 는 극대이데알.

$$|\mathbb{Z}_2[x]/(f(x))| = 2^{\deg f(x)} = 4.$$

$f(x)$ 의 한 근을  $\alpha \in \overline{\mathbb{Z}_2}$ 라 할 때,

$$\phi : \mathbb{Z}_2[x] \rightarrow \mathbb{Z}_2[x]/(f(x)), \quad \phi(g(x)) = g(\alpha) + \langle f(x) \rangle,$$

$$\ker \phi = \langle f(x) \rangle, \quad \text{im } \phi = \mathbb{Z}_2[x]/(f(x)).$$

$$* \mathbb{Z}_2[x]/\langle f(x) \rangle = \langle 1, \alpha \rangle_{\mathbb{Z}_2} = \{a+b\alpha \mid a, b \in \mathbb{Z}_2\}$$

\*  $\mathbb{Z}_2[x]/\langle f(x) \rangle$ 는  $x^2 - x \in \mathbb{Z}_2[x]$ 의 분해체이며,

$f(x)$ 의 두 개 해는  $x^2 - x$ 의 해이다.

\*  $\mathbb{Z}_2[x]$ 의  $f(x)$ 는 분리다항식이다.

29. ④

(가)  $\mathbb{Z}_2[x]$ 의 이차 다항식은  $x^2, x^2+x, x^2+1, x^2+x+1, 4개$  있으며,  $\mathbb{Z}_2$ 에서 근을 갖지 않으면 기약이므로  $x^2+x+1$ 만 기약이다.

(나)  $2x^2 \in \mathbb{Z}_4[x]$ ,  $2x^2 \neq 0$ 이지만  $(2x^2) \cdot (2x^2) = 0$ 이므로  $\mathbb{Z}_4[x]$ 는 정역이 아니다.  $\mathbb{Z}_4[x] \supset \mathbb{Z}_4$ 부터 정역이 아님

(다)  $\sum_{i=0}^n a_i x^i, \sum_{j=0}^m b_j x^j \in R[x]$ 에 대하여

$$f(x)g(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_{n+m} x^{n+m}, \quad c_i = \sum_{k=0}^i a_k b_{i-k}$$

$$= d_0 + d_1 x + \dots + d_{m+n} x^{m+n}, \quad d_i = \sum_{k=0}^i b_k a_{i-k}$$

$$= g(x)f(x).$$

(라)  $f(x), g(x) \in R[x], f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$ 이면

$$\deg(f(x)g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x) \geq 0$$

이므로  $f(x)g(x) \neq 0, R[x]$ 는 정역이다.

\*  $R[x]$ 의 단원군  $U(R[x]) = U(R)$ ,  $R$ 의 단원군

## <체>

1.

$k \in \mathbb{Z}_7$  일 때  $f(k) \neq 0$  이므로  $f(x)$ 는 일차 인수를 갖지 않는다.

$f(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$ 인  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_7$ 가 있다고 하면

$$a+c=0, ac+b+d=3, ad+bc=0, bd=-1.$$

$$0=a(d-b) \text{이므로 } a=0 \text{ 또는 } b=d.$$

$a=0$ 인 경우  $b+d=3, bd=-1$ 이 되는  $b, d$ 는  $\mathbb{Z}_7$ 에 존재하지 않는다.

$b=d$ 인 경우  $b^2=-1=6$ 이 되는  $b$ 는  $\mathbb{Z}_7$ 에 존재하지 않는다.

그러므로  $f(x)$ 는 기약이다.

유한체  $\mathbb{Z}_7(\alpha)/\mathbb{Z}_7 = GF(7^4)$ 의 갈루아군  $G(\mathbb{Z}_7(\alpha)/\mathbb{Z}_7)$ 은 위수 4인 순환군.

따라서 위수 4인 원소  $\sigma$ 는  $G(\mathbb{Z}_7(\alpha)/\mathbb{Z}_7)$ 의 생성원이므로  $|\sigma^2|=2$ .

갈루아 정리에 따라  $|E|=7^2=49$ .

2.

$K$ 는  $\mathbb{Q}$  위의 갈루아 확대체이므로 갈루아 정리 적용.

$$[K : \mathbb{Q}] = |G(K/\mathbb{Q})| = |\mathbb{Z}_2 \times S_3| = 12, 6 = [E : \mathbb{Q}] \text{이므로 } |G(E/\mathbb{Q})| = 2.$$

$\mathbb{Z}_2 \times S_3 = \mathbb{Z}_2 \times D_3$ 의 위수 2인 원소의 개수는 7개 있으므로

$G(K/\mathbb{Q})$ 의 위수 2인 (순환)부분군의 개수  $7/\varphi(2)=7$ .

따라서 조건을 만족하는  $K$ 의 부분체  $E$ 의 개수는 7.

정규부분군  $\mathbb{Z}_2 \times \{1\}$ 과 동형인  $G(K/\mathbb{Q})$ 의 부분군  $H$ 라 하자.

고정체  $K_H = F$ 는  $\mathbb{Q}$  위의 정규확대체이며,

$$G(F/\mathbb{Q}) \cong G(K/\mathbb{Q})/H \cong (\mathbb{Z}_2 \times S_3)/(\mathbb{Z}_2 \times \{1\}) \cong S_3.$$

3.

$$\alpha = \sqrt[23]{88}, \zeta = e^{\frac{2\pi i}{23}}$$

일 때  $K = SF(x^{23}-88/\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}(\alpha, \zeta)$ .

$$[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = \deg(\alpha, \mathbb{Q}) = 23, [\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = \varphi(23) = 22.$$

$$\gcd(23, 22) = 1 \text{이므로 } [K : \mathbb{Q}] = \text{lcm}(23, 22) = 506 = 2 \cdot 11 \cdot 23.$$

$[K : E] - [E : \mathbb{Q}]$  가  $1010 = 2 \cdot 5 \cdot 101$ 의 양의 약수인 경우는

$$[K : E] = 506 \text{ 또는 } [K : E] = 23, 2 \text{ 가지 있다.}$$

$[K : E] = 506$ 인 경우, 소체  $E = \mathbb{Q}$ .

$[K : E] = 23$ 인 경우,  $E = \mathbb{Q}(\zeta)$ .

(실로우 23-부분군의 개수  $n_{23} = 23k+1 \mid 22, n_{23} = 1$ )

그러므로 문제의 조건을 만족하는 체  $E$ 의 개수 2.

4.

$K$ 는  $\mathbb{Q}$  위의 13번째 원분확대체이므로

$$K = SF(x^{13}-1/\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}(\zeta), [K : \mathbb{Q}] = 12,$$

$$G(K/\mathbb{Q}) = \{\sigma_i \mid \sigma_i(\zeta) = \zeta^i, \gcd(i, 13) = 1, 1 \leq i \leq \varphi(13)\}$$

$$= \langle \sigma_2 \rangle = \langle \sigma_6 \rangle = \langle \sigma_7 \rangle = \langle \sigma_{11} \rangle$$

$$\cong (\mathbb{Z}_{13}^*, \cdot)$$

$$= \langle 2 \rangle = \langle 2^5 \rangle = \langle 2^{11} \rangle = \langle 2^7 \rangle \text{이다.}$$

$$\sigma \in X \Leftrightarrow K_{\langle \sigma \rangle} = \mathbb{Q} \Leftrightarrow G(K/K_{\langle \sigma \rangle}) = \langle \sigma \rangle = G(K/\mathbb{Q}) \text{이므로}$$

$X$ 의 원소 개수는 순환군  $G(K/\mathbb{Q})$ 의 생성원의 개수  $\varphi(12)=4$ 와 같다.

$X$ 의 원소 각각에 대한  $\zeta$ 의 상은 다음과 같다.

$$\sigma_2(\zeta) = \zeta^2, \sigma_6(\zeta) = \zeta^6, \sigma_7(\zeta) = \zeta^7, \sigma_{11}(\zeta) = \zeta^{11}.$$

$$\sigma_2^2(\beta) = \beta \text{이므로 } \beta \in K_{\langle \sigma_2^2 \rangle}, \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\beta) \subset K_{\langle \sigma_2^2 \rangle}.$$

$$6 = |\sigma_2^2| = |G(K/K_{\langle \sigma_2^2 \rangle})| = [K : K_{\langle \sigma_2^2 \rangle}] = \frac{[K : \mathbb{Q}]}{[K_{\langle \sigma_2^2 \rangle} : \mathbb{Q}]} = \frac{12}{[K_{\langle \sigma_2^2 \rangle} : \mathbb{Q}]} \text{에서}$$

$$[K_{\langle \sigma_2^2 \rangle} : \mathbb{Q}] = 2, \beta \notin \mathbb{Q} \text{이므로 } \deg(\beta, \mathbb{Q}) = [\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] = [K_{\langle \sigma_2^2 \rangle} : \mathbb{Q}] = 2.$$

$$\mathbb{Q} \text{ 위의 } \beta \text{와 결례 원소들=} \text{해집합} = \{\tau(\beta) \mid \tau \in G(K/\mathbb{Q})\} = \{\beta, \sigma_2(\beta)\}.$$

따라서  $\beta, \sigma_2(\beta)$ 는 2차 방정식  $\text{irr}(\beta, \mathbb{Q})=0$ 의 두 근이다.

$$0 = \zeta^{13} - 1 = (\zeta - 1)(\zeta^{12} + \zeta^{11} + \dots + \zeta + 1), \zeta^{12} + \dots + \zeta + 1 = 0 \text{임을 이용하면}$$

$$\text{두 근의 합 } \beta + \sigma_2(\beta) = -1, \text{ 두 근의 곱 } \beta \cdot \sigma_2(\beta) = -1 - 1 - 1 = -3 \text{이므로}$$

$$\text{irr}(\beta, \mathbb{Q}) = (x - \beta)(x - \sigma_2(\beta)) = x^2 + x - 3.$$

$$* SF(x^n - a/\mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q}(e^{2\pi i/n}, \sqrt[n]{a}), & a > 0 \\ \mathbb{Q}(e^{2\pi i/n}, \sqrt[n]{a} \cdot e^{\pi i/n}), & a < 0 \end{cases}$$

$$5. [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = \deg(x^3 - 2) = 3,$$

$$SF(x^{75} - 1/\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{75}}, \sqrt[75]{1}) = \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{75}}) \text{는 } \mathbb{Q} \text{ 위의 75번째 원분확대체이므로}$$

$$[\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{75}}) : \mathbb{Q}] = \varphi(75) = 40 \text{이다. } \gcd(3, 40) = 1 \text{이므로 } [K : \mathbb{Q}] = 120.$$

$$K \text{는 } \mathbb{Q} \text{ 위의 갈루아 확대체이므로 } |G(K/\mathbb{Q})| = [K : \mathbb{Q}] = 120.$$

$x^3 - 2, x^{25} - 1$ 의  $\mathbb{Q}$  위의 분해체를 각각  $E_1, E_2$ 라 하면

$$E_1 = \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{3}}, \sqrt[3]{2}), E_2 = \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{25}}, \sqrt[25]{1}) = \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{25}}),$$

$$[E_1 : \mathbb{Q}] = \deg(x^3 - 2) \cdot \deg(x^2 + x + 1) = 6, [E_2 : \mathbb{Q}] = \varphi(25) = 20 \text{이다.}$$

따라서  $H_1 = G(K/E_1), H_2 = G(K/E_2)$ 는 각각 위수 20, 6인

$G(K/\mathbb{Q})$ 의 정규부분군이다.

“ $[E_1 \cap E_2 : \mathbb{Q}] = 1$ 이므로  $|H_1 \cap H_2| = 1$ 이다.”

$$\sigma \in H_1 \cap H_2 \text{이면 } \sigma = \sqrt[3]{2}, e^{\frac{2\pi i}{3}} \text{라 할 때 } \sigma(\alpha) = \alpha \text{이므로 } \sigma(e^{\frac{2\pi i}{75}}) = e^{\frac{2\pi i}{75}}.$$

그러므로  $\sigma$ 에 의한  $K$ 의 고정체  $K_{\langle \sigma \rangle} = K$ 이므로  $\sigma = \text{id}, H_1 \cap H_2 = \{\text{id}\}$ .

(다른 설명)

$E_1, E_2$ 의 부분체  $E_1 \cap E_2$ 에 대하여  $[E_1 \cap E_2 : \mathbb{Q}] \mid \gcd(6, 20) = 2$ 이므로  $[E_1 \cap E_2 : \mathbb{Q}] = 1$  또는 2이다.

$[E_1 \cap E_2 : \mathbb{Q}] = 2$ 이면  $G(E_1/E_1 \cap E_2)$ 는  $G(E_1/\mathbb{Q})$ 의 위수 3인 부분군이므로

$$E_1 \cap E_2 = \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{3}}) \text{이다. 따라서 } e^{\frac{2\pi i}{3}} \in E_2 = \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{25}}) \text{이므로}$$

$$e^{\frac{2\pi i}{75}} = \frac{(e^{\frac{2\pi i}{75}})^{25}}{(e^{\frac{2\pi i}{75}})^8} = \frac{e^{\frac{2\pi i}{3}}}{\left(\frac{e^{2\pi i}}{25}\right)^8} \in \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{25}}) = E_2 \text{가 되어 모순이다.}$$

따라서  $[E_1 \cap E_2 : \mathbb{Q}] = 1 = |G(E_1 \cap E_2 / \mathbb{Q})| = |H_1 \cap H_2|, H_1 \cap H_2 = \{1\}$ .

$$H_1 H_2 \text{는 } G(K/\mathbb{Q}) \text{의 정규부분군, } |H_1 H_2| = \frac{|H_1| |H_2|}{|H_1 \cap H_2|} = 120 = |G(K/\mathbb{Q})| \text{이므로}$$

$$G(K/\mathbb{Q}) = H_1 H_2.$$

6.

$$\alpha = \sqrt[5]{5}, \zeta = e^{\frac{2\pi i}{5}} \text{ 일 때 } K = \mathbb{Q}(\alpha, \zeta), \zeta + \zeta^{-1} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ 이므로 } \sqrt{5} \in K.$$

$$* \mathbb{Q}(\sqrt[5]{-5}, \zeta) = \mathbb{Q}(\sqrt[5]{5}, \zeta)$$

$$\zeta + \zeta^{-1} = e^{\frac{2\pi i}{5}} + e^{-\frac{2\pi i}{5}} = \cos \frac{2\pi}{5} > 0, \zeta^5 = 1, \zeta^4 - \zeta^3 + \zeta^2 - \zeta + 1 = 0 \text{ 이므로}$$

$$(\zeta + \zeta^{-1})^2 - (\zeta + \zeta^{-1}) - 1 = 0, \zeta + \zeta^{-1} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \in K.$$

$$\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}} \in K, \left(5^{\frac{1}{5}}\right)^{-2} \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^1 = \sqrt[10]{5} \in K \text{ 이므로 } \mathbb{Q}(\sqrt[10]{5}) \text{는 } K \text{의 부분체.}$$

$$* \sqrt[10]{5} = 5^{\frac{1}{10}} = \left(5^{\frac{1}{5}}\right)^a \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^b, \frac{a}{5} + \frac{b}{2} = \frac{1}{10}, 2a + 5b = 1 \text{에서 } a = -2, b = 1$$

$$\alpha = \zeta - \zeta^{-1}, \alpha^2 = \zeta^2 + \zeta^{-2} - 2 = (\zeta + \zeta^{-1})^2 - 4 = \frac{-5 - \sqrt{5}}{2}, \alpha^4 + 5\alpha^2 + 5 = 0.$$

$\alpha$ 를 근으로 갖는  $x^4 + 5x^2 + 5 \in \mathbb{Q}[x]$ 는

소수 5에 대한 아이겐슈타인 판정에 따라  $\mathbb{Q}$  위에서 기약이므로

$$\text{irr}(\alpha, \mathbb{Q}) = x^4 + 5x^2 + 5.$$

7.  $K$ 는  $\mathbb{Q}$  위의 24번째 원분확대체이므로

$$K = \mathbb{Q}(\zeta), |G(K/\mathbb{Q})| = \varphi(24) = 8 = \deg(\zeta, \mathbb{Q}).$$

$$G(K/\mathbb{Q}) = \{\sigma_i \mid \sigma_i(\zeta) = \zeta^i, \gcd(i, 24) = 1, 1 \leq i \leq \varphi(24)\} \cong \mathbb{Z}_{24}^*$$

$$\text{irr}(\zeta, \mathbb{Q}) = \prod_{\sigma \in G(K/\mathbb{Q})} (x - \sigma(\zeta)) = x^8 - x^4 + 1.$$

$$\zeta^{24} = 1, \zeta^{12} = -1 \text{임을 이용하자.}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{24}(x) &= \prod_{\sigma \in G(K/\mathbb{Q})} (x - \sigma(\zeta)) \in K[x] \text{ (일차식의 곱)} \\ &= (x - \zeta^1)(x - \zeta^5)(x - \zeta^7)(x - \zeta^{11}) \\ &\quad \times (x - \zeta^{13})(x - \zeta^{17})(x - \zeta^{19})(x - \zeta^{23}) \in K[x] \\ &= (x^2 - \zeta^2)(x^2 - \zeta^{10})(x^2 - \zeta^{14})(x - \zeta^{22}) \\ &= (x^4 - \zeta^4)(x^4 - \zeta^{20}) \\ &= x^8 + (\zeta^8 - \zeta^4)x^4 + 1 \\ &= x^8 - x^4 + 1 \in \mathbb{Q}[x]. \end{aligned}$$

(다른 설명)

$$x^{24} - 1 = \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \Phi_4 \Phi_6 \Phi_8 \Phi_{12} \Phi_{24} = (x^{12} - 1) \Phi_8 \Phi_{24} \text{ 이므로}$$

$$\Phi_{24} = \frac{x^{12} + 1}{\Phi_8} = \frac{x^{12} + 1}{(x^8 - 1/\Phi_1 \Phi_2 \Phi_4)} = \frac{(x^4)^3 + 1}{x^4 + 1} = x^8 - x^4 + 1.$$

$$* \zeta + \zeta^{-1} = 2\cos \frac{\pi}{12}.$$

$$* \sigma_{23}(\zeta) = \zeta^{23} = \zeta^{-1}, \sigma_{23}(\zeta + \zeta^{-1}) = \zeta + \zeta^{-1} \text{ 이므로 } \mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1}) \subset K_{\langle \sigma_{23} \rangle}$$

8. 가정에 의해  $a - bi \in K$ 이므로  $a \in K, K = \mathbb{Q}(a)(a + bi)$ 이다.

갈루아 정리에 따라  $[K: \mathbb{Q}(a)] = \deg(x^2 - 2ax + a^2 + b^2) = 2 = |G(K/\mathbb{Q}(a))|$ .

$G(K/\mathbb{Q}(a)) < G(K/\mathbb{Q})$ 이므로 라그랑지 정리에 따라  $G(K/\mathbb{Q})$ 의 위수는 짝수.

$G(K/\mathbb{Q})$ 는 가환이므로  $G(\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q})$ 의 위수  $\frac{m}{d}$ 인 정규부분군  $H$  있다.

갈루아 정리에 따라  $\mathbb{Q}(a)_H$ 는  $\mathbb{Q}$  위의 확대차수  $d$ 인 갈루아 확대이며, 원시원소정리에 따라  $\mathbb{Q}(a)_H = \mathbb{Q}(\gamma)$ 인  $\gamma \in \mathbb{Q}(a) \subset \mathbb{R}$  있다.

따라서 문제에서 요구하는  $\text{irr}(\gamma, \mathbb{Q})$  있다.

$$* H = G(\mathbb{Q}(a)/F), \mathbb{Q}(a)_H = \mathbb{Q}(a)_{G(\mathbb{Q}(a)/F)} = F \text{ (갈루아정리)}$$

\* 부분체의 차수와 부분군의 위수는 “역대응” 한다.

\* 라그랑지 정리의 역은 가환군일 때 성립한다.

9.  $f(x)$ 의 한 근  $\alpha \in \mathbb{C}$  택하자. (대수학의 기본정리)

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\alpha) \subset K, G(K/\mathbb{Q})$ 는 아벨군이다.

따라서  $G(K/\mathbb{Q}(\alpha))$ 는  $G(K/\mathbb{Q})$ 의 정규부분군이므로

갈루아 정리에 의해  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\alpha)$ 는 갈루아 확대이며,  $f(x)$ 는  $\mathbb{Q}(\alpha)[x]$ 에서 일차식의 곱으로 인수분해된다.

그러므로  $K \subset \mathbb{Q}(\alpha), K = \mathbb{Q}(\alpha)$ .

\* 다른 풀이

$\mathbb{Q}$ -기약다항식  $f(x)$ 의 한 근  $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$  택하면  $\mathbb{Q}(\alpha) \subset K$ .

$\mathbb{Q} \subset K$ 는 갈루아 확대체(분해체)이므로

$$f(x) = \prod_{\sigma \in G(K/\mathbb{Q})} (x - \sigma(\alpha)) \in K[x] \text{ 라 쓸 수 있다.}$$

( $\Leftrightarrow$  일차식의 곱으로 인수분해된다.)

$G(K/\mathbb{Q})$ 의 (임의의) 원소  $\sigma$ 와  $G(K/\mathbb{Q}(\alpha))$ 의 원소  $\tau$ 일 때,  $G(K/\mathbb{Q})$ 는 가환이므로

$$(\sigma \circ \tau)(\alpha) = \sigma(\tau(\alpha)) = \sigma(\alpha) = (\tau \circ \sigma)(\alpha) = \tau(\sigma(\alpha)).$$

따라서  $\sigma(\alpha) \in \mathbb{Q}(\alpha)$ 가 되어(모든 근을 포함하므로)

$$f(x) \in \mathbb{Q}(\alpha)[x] \text{ 이 되며, } K \subset \mathbb{Q}(\alpha), K = \mathbb{Q}(\alpha).$$

갈루아 정리에 의해  $|G(K/\mathbb{Q})| = [K: \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha): \mathbb{Q}] = \deg f(x)$ .

$\deg f(x) = 2018$ 이면 유한가환군의 기본정리에 따라  $G(K/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_{2018}$ 이므로

갈루아 정리에 의해  $K$ 의 모든 부분체의 개수는  $\mathbb{Z}_{2018}$ 의 부분군의 개수 4.

$$10. [F: \mathbb{Q}] = 50$$

$$\sigma(\alpha + \alpha^{-1}) = \alpha + \alpha^{-1} \text{ 이므로 } \mathbb{Q} \subset F \subset K_{\langle \sigma \rangle}.$$

“ $\alpha + \alpha^{-1} \notin \mathbb{Q}$ 이므로”  $F = K_{\langle \sigma \rangle}$ .

$$\therefore [F: \mathbb{Q}] = [K_{\langle \sigma \rangle}: \mathbb{Q}] = \frac{[K: \mathbb{Q}]}{[K: K_{\langle \sigma \rangle}]} = \frac{100}{|\sigma|} = 50.$$

(다른 풀이)

$$\sigma(\alpha) = \alpha^{-1} \text{ 이므로 } \text{irr}(\alpha, \mathbb{Q}) = \text{irr}(\alpha^{-1}, \mathbb{Q}) = f(x).$$

$K$ 는 분해체이므로  $f(x)$ 는  $K[x]$ 에서 일차식들의 곱.

$$\begin{aligned} \text{즉, } K[x] \text{에서 } f(x) &= (x - \alpha)(x - \alpha^{-1}) \cdots \\ &= (x^2 - (\alpha + \alpha^{-1})x + 1) \cdots \end{aligned}$$

$$x^2 - (\alpha + \alpha^{-1})x + 1 \in F[x], (x - \alpha)(x - \alpha^{-1}) \notin F[x]$$

$K \subset F \subset \mathbb{Q}, K \subset F(\alpha) \subset \mathbb{Q}(\alpha) = K$ 이므로  $K = F(\alpha)$ .

이차다항식  $x^2 - (\alpha + \alpha^{-1})x + 1 \in F[x]$ 의 두 근  $\alpha, \alpha^{-1} \notin F$ .

따라서  $[K: F] = [F(\alpha): F] = \deg(\alpha, F) = 2$ .

$$\sigma(\alpha + \alpha^{-1}) = \alpha + \alpha^{-1} \text{ 이므로 } F \subset K_{\langle \sigma \rangle}.$$

$K_{\sigma} \subset K$ 는 갈루아 확대이므로 갈루아 정리에 의해

$$[K: K_{\langle \sigma \rangle}] = |G(K/K_{\langle \sigma \rangle})| = |\sigma| = 2 = [K: F] \text{ 이므로 } F = K_{\langle \sigma \rangle}.$$

$$\text{구하는 값 } [F: \mathbb{Q}] = \frac{[K: \mathbb{Q}]}{[K: K_{\langle \sigma \rangle}]} = \frac{100}{2} = 50.$$

$$* \alpha = i = e^{\frac{\pi i}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \text{ 일 때, } \alpha + \alpha^{-1} = 0,$$

$$F = \mathbb{Q}(\alpha + \alpha^{-1}) = \mathbb{Q}, K = \mathbb{Q}(i).$$

$$* \alpha = e^{\frac{2\pi i}{n}} = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \text{ 일 때, } \frac{\alpha + \alpha^{-1}}{2} = \cos \frac{2\pi}{n}.$$

이때,  $n = 125$ 이면  $K$ 는  $\mathbb{Q}$  위의 확대차수 100인 125번째 원분확대체.

$$11. E = \mathbb{Q}(a_1, a_2, \dots, a_r) \text{라 하면 } E \subset F.$$

$\text{irr}(\alpha, F) \in E[x]$ 는  $F[x]$ 에서 기약이므로 부분환  $E[x]$ 에서도 기약이다.

따라서  $\text{irr}(\alpha, F) = \text{irr}(\alpha, E), \deg(\alpha, F) = \deg(\alpha, E)$ , 즉  $[F(\alpha): F] = [E(\alpha): E]$ .

$$K = \mathbb{Q}(\alpha) = F(\alpha) = E(\alpha) \text{이므로 } [K: F] = [K: E].$$

$$\text{따라서 } [F: E] = 1, E = F.$$

$x^2 - 2\sqrt{2}x + 3 \in F[x]$ 는 실근을 갖지 않고  $F \subset \mathbb{R}$ 이므로  $F$ 에서 기약이다.

12.  $\sqrt{2}$ 를 포함하는  $K$ 의 부분체  $F$ 라 하면  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset F \subset K$ .

가정에 의해  $K$ 는  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  위의 갈루아 확대체.

$$\text{갈루아 정리에 따라 } [K : \mathbb{Q}(\sqrt{2})] = \frac{270}{\deg(\sqrt{2}, \mathbb{Q})} = 135 = |G(K/\mathbb{Q}(\sqrt{2}))| \text{ 이므로}$$

$G(K/\mathbb{Q}(\sqrt{2})) \cong \mathbb{Z}_{135}$ 이며,  $\mathbb{Z}_{135}$ 의 부분군의 개수 8이므로  $F$ 의 개수는 8.

\* 다른 설명

갈루아 정리에 따라

순환군  $G(K/\mathbb{Q}) = \langle \sigma \rangle$ 의 부분군은 유일하므로 고정체  $K_{\langle \sigma^2 \rangle}$ 는 유일하게 존재.

$$[K : K_{\langle \sigma^2 \rangle}] = |\langle \sigma^2 \rangle| = 135, [K_{\langle \sigma^2 \rangle} : \mathbb{Q}] = 2 = [\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] \text{ 이므로 } K_{\langle \sigma^2 \rangle} = \mathbb{Q}(\sqrt{2}).$$

$\langle \sigma^2 \rangle = G(K/K_{\langle \sigma^2 \rangle}) \cong \mathbb{Z}_{135}$ 이며,  $\mathbb{Z}_{135}$ 의 부분군의 개수 8이므로

$K$ 와  $K_{\langle \sigma^2 \rangle}$  사이의 중간체의 개수 8.

13.

$$* x^9 + 3x^6 + 9x^3 + 1 \equiv (x^3 + 2)(x^3 + 3)(x^3 + 11) \pmod{13}$$

\*  $f_{13}(x)$ 는  $\mathbb{Z}_{13}[x]$ 에서 기약다항식임이 알려져 있지 않다.

- $[K : \mathbb{Q}] = 9$

$\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3} \in K^\circ$ 으로  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}) \subset K$ .

$$[K : \mathbb{Q}] \geq [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}) : \mathbb{Q}] = 9,$$

$$[K : \mathbb{Q}] = [K : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})][\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}]$$

$$= \deg(\sqrt[3]{2}, \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})) \deg(x^3 - 2)$$

$$\leq \deg(x^3 - 3) \cdot 3 = 9.$$

그러므로  $[K : \mathbb{Q}] = 9$ , 즉  $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3})$ .

- $|G(E/\mathbb{Q})| = 18$

$$\alpha = \sqrt[3]{2}, \beta = \sqrt[3]{3}, \zeta = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{에 대하여}$$

$$E = \mathbb{Q}(\alpha, \alpha\zeta, \alpha\zeta^2, \beta, \beta\zeta, \beta\zeta^2) = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \zeta) = K(\zeta) = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \sqrt{3}i).$$

$K \subset \mathbb{R}$ 이고  $x^2 + 3 \in K[x]$ 의 근  $\sqrt{3}i$ 는 실수가 아니므로  $K$ 에서 기약이다.

$\mathbb{Q} \subset E$ 는 분해, 분리확대체이므로 갈루아 정리에 의해

$$|G(E/\mathbb{Q})| = [E : \mathbb{Q}] = [E : K][K : \mathbb{Q}]$$

$$= \deg(\sqrt{3}i, K) \deg(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}, \mathbb{Q})$$

$$= 2 \cdot 9 = 18.$$

14.  $\alpha = i\sqrt[6]{3}$ ,  $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{6}} = e^{\frac{\pi i}{3}}$  일 때  $x^6 + 3 = 0$ 의 모든 근  $\alpha, \alpha\zeta, \alpha\zeta^2, \dots, \alpha\zeta^5$ .

$$\zeta = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} = \frac{1 - \alpha^3}{2} \text{이므로 } K = \mathbb{Q}(\alpha, \alpha\zeta, \dots, \alpha\zeta^5) = \mathbb{Q}(\alpha).$$

$\mathbb{Q} \subset K$ 는 분해, 분리확대체이므로 갈루아 정리에 의해

$$|G(K/\mathbb{Q})| = [K : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = \deg(\alpha, \mathbb{Q}) = 6.$$

\*  $x^3 - 3$ 의 분해체  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \sqrt{3}i) = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{3}i)$

$\mathbb{Q}$  위의  $x^3 - 3$ 의 분해체  $[\mathbb{Q}(\sqrt[6]{3}i) : \mathbb{Q}] \leq 3!$ ,

$[\mathbb{Q}(\sqrt[6]{3}i) : \mathbb{Q}] = \deg(x^6 + 3) = 6$ 의 배수

15. ②

$F = x^{2^{60}} - x \in \mathbb{Z}_2[x]$ 의 분해체

$$= \{x \in \overline{\mathbb{Z}}_2 \mid x^{2^{60}} - x = 0\}$$

$$= \mathbb{Z}_2(\alpha), \deg(\alpha, \mathbb{Z}_2) = 60$$

$$= \text{GF}(2^{60})$$

⊓.  $F$ 의 표수는 2이므로  $\text{char}K = 2$ ,  $\mathbb{Z}_2 \subset K$ .

⊓.  $[K_1 : \mathbb{Z}_2] = 12$ ,  $[K_2 : \mathbb{Z}_2] = 6$ .

$K_2$ 의 모든 원소는  $x^{2^6} - x$ 의 해가 되므로  $K_2 \subset K_1$ .

⊓.  $[K_1 : \mathbb{Z}_2] = 10$ ,  $[K_2 : \mathbb{Z}_2] = 6$ ,

$$[K_1 \cap K_2 : \mathbb{Z}_2] = \gcd(10, 6) = 2 \text{에서 } K_1 \cap K_2 = \text{GF}(2^2) \neq \mathbb{Z}_2.$$

\*  $K_1 \cap K_2 = \{x \in \overline{\mathbb{Z}}_2 \mid \gcd(x^{2^{10}} - x, x^{2^6} - x) = 0\}$

$$= \{x \in \overline{\mathbb{Z}}_2 \mid x^2 - x = 0\}.$$

\* Ⓜ의 다른 설명

$\sigma(x) = x^2$ 인 생성원  $\sigma \in G(F/\mathbb{Z}_2)$ 일 때,  $K_1 = F_{\langle \sigma^{10} \rangle}$ ,  $K_2 = F_{\langle \sigma^6 \rangle}$ .

$$K_1 \cap K_2 = \{x \in F \mid \sigma^{10}(x) = x, \sigma^6(x) = x\}$$

$$= \{x \in F \mid x^{2^{10}} = x, x^{2^6} = x\}$$

$$= \{x \in F \mid x^2 = x\}$$

$$= F_{\langle \sigma^2 \rangle} \neq \mathbb{Z}_2.$$

16. ④

①  $|F| = |\mathbb{Z}_2|^6 = 2^6 = 64$ .

②  $\varphi_\alpha(0) = 0$ 이므로  $\ker(\varphi_\alpha) \neq \emptyset$ .

$u, v \in \ker(\varphi_\alpha)$ 에 대하여  $\varphi_\alpha(u - v) = (u - v)(\alpha) = u(\alpha) - v(\alpha) = 0$ 이므로  $\ker(\varphi_\alpha)$ 는  $\mathbb{Z}_2[x]$ 의 덧셈부분군.

$f(x) \in \ker(\varphi_\alpha)$ ,  $g(x) \in \mathbb{Z}_2[x]$ 일 때

$$\varphi_\alpha(f(x)g(x)) = f(\alpha)g(\alpha) = 0 \cdot g(\alpha) = 0 \text{이므로 } f(x)g(x) \in \ker(\varphi_\alpha).$$

따라서  $\ker(\varphi_\alpha)$ 는  $\mathbb{Z}_2[x]$ 의 아이디얼이다.

$\mathbb{Z}_2[x]$ 는 PID이므로  $\ker(\varphi_\alpha)$ 는  $\mathbb{Z}_2[x]$ 의 주아이디얼.

\*  $\ker(\varphi_\alpha) = \langle \text{irr}(\alpha, \mathbb{Z}_2) \rangle$ .

③  $F$ 는  $x^{2^6} - x \in \mathbb{Z}_2[x]$ 의 분해체이므로  $\alpha^{2^6} - \alpha = 0$ .

따라서  $\text{irr}(\alpha, \mathbb{Z}_2)$ 는  $x^{64} - x$ 를 나눈다.

④ 그런  $\alpha \in F$  있다 하자.  $\mathbb{Z}_2 \subset \mathbb{Z}_2(\alpha) \subset F$ ,

$$[F : \mathbb{Z}_2] = 6 = [F : \mathbb{Z}_2(\alpha)][\mathbb{Z}_2(\alpha) : \mathbb{Z}_2]$$

$$= [F : \mathbb{Z}_2(\alpha)]\deg(\alpha, \mathbb{Z}_2)$$

$$= 4 \cdot [F : \mathbb{Z}_2(\alpha)], \text{ 모순.}$$

⑤ 동형 정리에 의해  $\mathbb{Z}_2(\alpha) = \text{im}(\varphi_\alpha) \cong \mathbb{Z}_2[x]/\ker(\varphi_\alpha)$ ,

$\ker(\varphi_\alpha)$ 는  $\mathbb{Z}_2[x]$ 의 극대아이디얼이므로  $\text{im}(\varphi_\alpha)$ 는  $F$ 의 부분체이다.

17.  $R[x]$ 는 PID이고  $x$ 는 소원이므로  $\langle x \rangle$ 는 극대아이디얼이다.

따라서  $R[x]/\langle x \rangle \cong R[0] = R$ 은 체.

\* 다른 풀이

다항식 환  $R[x]$ 가 주 아이디얼 정역이면  $R$ 는 체

$R \subset R[x]$ 가 정역이므로  $R$ 은 단위원 1을 갖는 가환환.

$R$ 의 0아닌 원소가 단원임을 보이면 충분하다.

$a \neq 0$ 인  $a \in R$ 라 하자.

아이디얼  $I = \langle a \rangle + \langle x \rangle = \langle a, x \rangle = \langle f(x) \rangle$ 인  $f(x) \in R[x]$  있다.

$a \in I$ 이므로  $a = f(x)g(x)$ 인  $g(x) \in R[x]$  있다.

양변 차수비교하면  $0 = \deg a = \deg f(x) + \deg g(x)$ 에서  $f(x) \in R - \{0\}$ .

한편  $x \in I$ 이므로  $x = f(x)h(x)$ 인  $h(x) \in R[x]$  있다.

양변 일차항 계수를 비교하자.

$h(x)$ 의 1차항 계수를  $h \in R$ 라 할 때  $h \cdot f(x) = 1$ .

따라서  $1 = h \cdot f(x) \in I$ .

이때  $1 = a \cdot p(x) + x \cdot q(x)$ 인  $p(x), q(x) \in R[x]$  있다.

양변  $x = 0$  대입하면  $1 = a \cdot p(0)$ . 따라서  $a \in U(R)$ .

그러므로  $R$ 은 체이다.

## 18. ⑤

$$|K| = \deg f(x) = p^4, [K : \mathbb{Z}_p] = \log_p p^4 = 4 = |G(K/\mathbb{Z}_p)|,$$

$$G(K/\mathbb{Z}_p) = \langle \sigma_p \rangle \cong (\mathbb{Z}_4, +), \sigma_p : K \rightarrow K, \sigma_p(x) = x^p.$$

$(K^*, \times) = \langle \alpha \rangle$ ,  $\alpha$ 는  $f(x)$ 의 0아닌 근.

$\mathbb{Z}_p \subset K$ 는 분해, 분리, 유한 확대체(유한정규확대체)이므로 갈루아 정리 적용.

$$\neg. 0^{p^4} = 0, 0 \text{ 아닌 원소 } \alpha \in K, \alpha^{p^4-1} = 1, \alpha^{p^4} = \alpha$$

그러므로 모든  $\alpha \in K$ 에 대하여  $\alpha^{p^4} = \alpha$ .

↳  $\mathbb{Z}_4$ 의 비자명 진부분군은 1개 있으므로

갈루아 정리에 의해  $\mathbb{Z}_p \subset L \subset K$ 인 중간체  $L$ 은 1개.

$$* L = K_{\langle \sigma_p^2 \rangle}, \mathbb{Z}_p = K_{\langle \sigma_p^4 \rangle}, K = K_{\langle \sigma_p \rangle} = K_{G(K/\mathbb{Z}_p)}.$$

□. 옳다.

## 19.

$$(I) \psi_\alpha(\sigma) \in \mathbb{Z}_p, K = \mathbb{Z}_p(\alpha)$$

표수  $p$ 인 유한체  $\mathbb{Z}_p = \{x \in K \mid x^{p^1} - x = 0\}$ 이고  $\sigma \in G(K/\mathbb{Z}_p)$ 에 대하여

$$[\psi_\alpha(\sigma)]^p - \psi_\alpha(\sigma)$$

$$= [\sigma(\alpha) - \alpha]^p - [\sigma(\alpha) - \alpha]$$

$$= [\sigma(\alpha) - \alpha] - [\sigma(\alpha) - \alpha]$$

= 0이므로

$\psi_\alpha(\sigma) = \sigma(\alpha) - \alpha$ 는  $x^p - x \in \mathbb{Z}_p[x]$ 의 근, 즉  $\psi_\alpha(\sigma) \in \mathbb{Z}_p$ .

$k \in \mathbb{Z}_p$ 에 대하여

$$f(\alpha+k) = (\alpha+k)^p - (\alpha+k) - a$$

$$= \alpha^p + k^p - \alpha - k - a$$

$$= \alpha^p - \alpha - a + k - k$$

=  $\alpha^p - \alpha - a = 0$ 이므로  $\alpha+k$ 는  $f(x)$ 의 해이다.

따라서  $f(x)$ 의 분해체  $K = \mathbb{Z}_p(\alpha, \dots, \alpha+p-1) = \mathbb{Z}_p(\alpha)$ .

$$(II) \psi_\alpha : G(K/\mathbb{Z}_p) \rightarrow (\mathbb{Z}_p, +) \text{는 군-동형사상}$$

$\sigma, \tau \in G(K/\mathbb{Z}_p)$ 에 대하여  $f(\sigma(\alpha)) = 0 = f(\tau(\alpha))$ 이므로

$\tau(\alpha) = \alpha + k$ 인  $k \in \mathbb{Z}_p$  있다.

$$\psi_\alpha(\sigma \circ \tau) = (\sigma \circ \tau)(\alpha) - \alpha$$

$$= \sigma(\tau(\alpha)) - \tau(\alpha) + \tau(\alpha) - \alpha$$

$$= \sigma(\alpha + k) - (\alpha + k) + \tau(\alpha) - \alpha$$

$$= \sigma(\alpha) + k - \alpha - k + \psi_\alpha(\tau) \quad (\because \sigma \text{는 } \mathbb{Z}_p \text{를 고정})$$

$$= \psi_\alpha(\sigma) + \psi_\alpha(\tau) \text{이므로}$$

$\psi_\alpha$ 는 준동형사상이다.

$$\sigma \in G(K/\mathbb{Z}_p) \text{에 대하여 } \psi_\alpha(\sigma) = 0 \Leftrightarrow \sigma(\alpha) = \alpha \text{이므로 } \sigma = \text{id}.$$

$\therefore \ker \psi_\alpha = \{\text{id}\}$ ,  $\psi_\alpha$ 는 단사이다.

$(\mathbb{Z}_p, +)$ 는 유한집합이므로  $\psi_\alpha$ 는 전사이다.

그러므로  $\psi_\alpha$ 는 군-동형사상이다.

$$(III) f(x)의 두 근  $\alpha, \beta, \psi_\alpha = \psi_\beta$$$

$\beta = \alpha + k$ 인  $k \in \mathbb{Z}_p$  있다. 이때  $\beta - \alpha = k \in \mathbb{Z}_p$ 이므로

$$\sigma(\beta - \alpha) = \sigma(\beta) - \sigma(\alpha) = \sigma(k) = k = \beta - \alpha.$$

즉,  $\sigma(\beta) - \beta = \sigma(\alpha) - \alpha$ 이므로  $\psi_\beta = \psi_\alpha$ .

## 20. ⑤

$$\neg. E = \mathbb{Q}(\pm \sqrt{2}, \pm \sqrt{11}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{11}),$$

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\alpha) \subset E$ ,  $E$ 는  $\mathbb{Q}$  위의 유한확대체이므로

$\mathbb{Q}(\alpha)$ 는  $\mathbb{Q}$  위의 유한확대체이다. (유한차원 벡터공간)

$\mathbb{Q}(\alpha)$ 의 임의의 원소  $\beta$ 에 대하여  $\{1, \beta, \beta^2, \beta^3, \beta^4, \beta^5\}$ 은  $\mathbb{Q}$  위에서 일차종속이므로  $a_0 + a_1\beta + \dots + a_5\beta^5 = 0$ 인 모든 0이 아닌  $a_i \in \mathbb{Q}$  있다.

따라서  $\beta$ 는  $a_0 + a_1x + \dots + a_5x^5 \in \mathbb{Q}[x]$ 의 해.

그러므로  $\mathbb{Q}(\alpha)$ 는  $\mathbb{Q}$  위에서 대수적이다.

↳ 그런  $\beta \in E$  있다 하면  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\beta^2) \subset \mathbb{Q}(\beta) \subset E$ 이므로

$$4 = [E : \mathbb{Q}] = [E : \mathbb{Q}(\beta)][\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}(\beta^2)][\mathbb{Q}(\beta^2) : \mathbb{Q}].$$

4의 표준분해  $2^2$ 이므로 허수 소인수 없다. 모순.

□.  $E = \mathbb{Q}(\gamma)$ 되는  $\gamma \in E$  있다. (원시 원소 정리)

$$* \gamma = \sqrt{2} + \sqrt{11}$$

\* 원시 원소 정리: 분리 가능, 유한 확대는 단순 확대

\* 유한체와 표수 0인 체의 유한확대체는 단순 확대

## 21.

- $R_3$ 가  $\mathbb{Q}$ 의 확대체의 구조를 갖는다.

$f(x)$ 는 소수 3에 대한 아이젠슈타인 판정법에 의해  $\mathbb{Q}$  위에서 기약이고,  $\mathbb{Q}$ 는 체이므로  $\mathbb{Q}[x]$ 는 PID.

따라서  $(f(x))$ 는 극대아이디얼이므로  $R_3$ 는 체이다.

환준동형사상  $\varphi : \mathbb{Q} \rightarrow R_3, \varphi(q) = q + (f(x))$ 에 대하여  $\varphi(q) = \varphi(q) \circ$ 면

$$p - q \in (f(x)) \text{이므로 } p - q = 0, p = q, \varphi \text{는 단사.}$$

따라서  $R_3$ 는  $\mathbb{Q}$ 의 확대체의 구조를 갖는다.

- 다항식  $f(x)$ 의 근의 존재성

①  $f(x)$ 는  $R_1[x]$ 에서 기약이므로 1차 인수를 갖지 않는다.  $R_1$ 에 근 없다.

②  $f(x) \in R_2[x]$ 는 대수학의 기본정리에 따라 근 있다. (중복포함 6개)

③  $\alpha = x + (f(x))$ 라 하면

$$f(\alpha) = \alpha^6 + 12\alpha^4 - 3\alpha^3 - 108\alpha^2 + 24\alpha - 120 = f(x) + (f(x)) = 0 + (f(x)) = \bar{0}. \\ R_3 \text{에 } f(x) \text{의 근 있다.}$$

④  $f(x) = x^6 - x^3 = x^3(x-1)(x^2+x+1) \in \mathbb{Z}_2[x]$ 의 근  $x=0, 1$  있다.

$$\mathbb{Z}_2 \leq F \text{이므로 } f(x) \text{는 } R_4 = \text{GF}(2^{1024}) = \text{SF}(x^{2^{1024}} - x / \mathbb{Z}_2) \text{에 근 있다.}$$

\*  $x^2 + x + 1 \mid x^{2^6} - x \mid x^{2^{1024}} - x$ 이므로  $x^2 + x + 1$ 의 모든 근  $R_4$ 에 있다.

\*  $f$ 는  $R_4$ 에 중복포함 6개 근 있다.

## 22. ③

$$* [K : \mathbb{Z}_3] = 6 \text{이므로 } |K| = |\mathbb{Z}_3|^6 = 3^6 \text{ (벡터공간)}$$

↳  $K$ 는  $x^{3^6} - x \in \mathbb{Z}_3[x]$ 의 분해체이다.

\*  $K$ 는  $\mathbb{Z}_3[x]$ 의 6차 기약다항식으로도 만들 수 있다.

↳  $f(x) = x^{3^6} - x, \gcd(f(x), f'(x)) = 1$ 이므로 옳다.

□.  $\sigma : K \rightarrow K, \sigma(\alpha) = \alpha^3$ 인  $\alpha \in G(K/\mathbb{Z}_3)$ 에 대하여  $G(K/\mathbb{Z}_3) = \langle \sigma \rangle \cong \mathbb{Z}_6$ .

$\mathbb{Z}_6$ 의 위수 2인 부분군은 유일(1개)하므로 갈루아 정리에 의해

$|G(K/E)| = 2$ 가 되는 체  $E$ 는 1개 있다.

\* 순환군  $G(K/\mathbb{Z}_3)$ 의 원소  $\sigma^3$ 일 때,  $H = \langle \sigma^3 \rangle$ 에 의한  $K$ 의 고정체  $K_H$ 에 대하여 갈루아 정리에 의해  $G(K/K_H) = H, [K : K_H] = |G(K/K_H)| = |H| = 2$ .

\*  $F \subset K$ : 분해, 분리, 유한(정규확대)  $\Rightarrow [K : F] = |G(K/F)|$

23.

①: 참

$x, y \in F$ 에 대하여  $\sigma_p(x+y) = (x+y)^p = x^p + y^p = \sigma_p(x) + \sigma_p(y)$ ,  
 $\sigma_p(xy) = (xy)^p = x^p y^p = \sigma_p(x)\sigma_p(y)$ 이므로  $\sigma_p$ 는 환-준동형사상이다.  
 $\sigma_p(x) = 0 \Leftrightarrow x^p = 0 \Leftrightarrow x = 0$ 이므로  $\sigma_p$ : 단사,  $F$ 는 유한집합이므로  $\sigma_p$ : 전사.  
그러므로  $\sigma_p$ 는 환동형사상이다.

②: 거짓

모든  $x \in \mathbb{Z}_p$ 에 대하여  $\sigma_p(x) = x^p = x$ 이다.

( $\because$ )  $x \in \mathbb{Z}_p$  일 때  $x = 0$ 이면  $0^p = 0$ 이고,  $x \neq 0$ 일 때 페르마 정리에 의해  
 $x^{p-1} = 1, x^p = x$ .

모든  $x \in \mathbb{Z}_p$ 에 대하여  $x^p = x, \therefore \sigma_p(x) = x$ .

③: 참

$$\begin{aligned} f(\alpha^p) &= a_n \alpha^{pn} + a_{n-1} \alpha^{p(n-1)} + \cdots + a_1 \alpha^p + a_0 \\ &= \sigma_p(a_n) \sigma(\alpha^n) + \cdots + \sigma_p(a_0) \\ &= \sigma_p(a_n \alpha^n + \cdots + a_0) \\ &= \sigma_p(f(\alpha)) = \sigma_p(0) = 0. \end{aligned}$$

 $\therefore f(\sigma_p(\alpha)) = 0$ .

④: 참

 $F^* = \langle \alpha \rangle, \text{ord}(\alpha) = |F^*| = p^n - 1$ 이므로 $\alpha, \alpha^p, \alpha^{p^2}, \cdots, \alpha^{p^{n-1}}$ 은 서로 다른  $n$ 개의 원소이고

$$k=0, \cdots, n-1$$
에 대하여  $\text{ord}(\alpha^{p^k}) = \frac{\text{ord}(\alpha)}{\gcd(\text{ord}(\alpha), p^k)} = p^n - 1$ 이므로

 $\alpha, \alpha^p, \alpha^{p^2}, \cdots, \alpha^{p^{n-1}}$ 은  $F^*$ 의 생성원이다.

$$* (-1) \cdot [p^n - 1] + (p^{n-k}) \cdot p^k = 1$$

$$\sigma_p(\alpha^{p^k}) = \sigma_p^k(\alpha) \text{이므로 } f(\alpha^{p^k}) = \sigma_p(f(\alpha^{p^{k-1}})) = \cdots = \sigma_p^k(f(\alpha)) = \sigma_p^k(0) = 0.$$

그러므로  $\alpha^{p^k}$ 은  $f(x)$ 의 근이다.

24. ④

프로베니우스 동형사상  $\sigma_2 : E \rightarrow E, \sigma_2(x) = x^2$ 에서 $\alpha \in E = \text{GF}(2^3)$ 가 기약다항식  $f(x)$ 의 근이므로  $\sigma_2(\alpha), \sigma_2^2(\alpha)$ 도  $f(x)$ 의 근.즉,  $\alpha, \alpha^2, \alpha^4 = \alpha^2 - \alpha + 1$ 은  $f(x)$ 의 모든 근.

$$\{\alpha + \beta, \alpha + \gamma\} = \{\alpha^2 + \alpha, \alpha^2 + 1\}$$

$$* x^3 + x^2 + 1 = (x - \alpha)(x - \alpha^2)(x - \alpha^4)$$

\* 근과 계수와의 관계

$$\textcircled{1} \quad \alpha + \beta + \gamma = -1 = 1.$$

$$\textcircled{2} \quad \alpha\beta\gamma = \alpha^7 = 1, \alpha^{-1} = \alpha^6.$$

$$* E = \langle 1, \alpha, \alpha^2 \rangle_{\mathbb{Z}_2}, (E^*, \times) = \langle \alpha \rangle \cong (\mathbb{Z}_7, +)$$

\* 성질

$$\textcircled{1} \quad \text{char}F = p, \sigma_p : F \rightarrow F, \sigma_p(u) = u^p \text{는 환동형사상}$$

특히,  $\{u^p \mid u \in F\} = F$ 환-동형사상  $\sigma_p$ : 유한체  $F$ 의 Frobenius 동형사상

$$\textcircled{2} \quad \text{기약다항식 } f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}_p[x] \text{일 때,}$$

$$\text{(i) } \sigma_p(f(x)) = f(x)^p = a_n (x^p)^n + \cdots + a_0$$

$$= f(x^p) = f(\sigma_p(x))$$

$$\text{(ii) } u \in F \nmid f(u) = 0 \text{이면 } \sigma_p(u) \text{도 } f(x) \text{의 근}$$

$$(\sigma_p(x) \in F \nmid f(x) \text{의 근, } \sigma_p^2(u) \text{도 근, } \dots)$$

25.

25-1.

• (가)의 증명

$$\beta_1 = a_1 + b_1 \sqrt{2} + c_1 \sqrt{3} + d_1 \sqrt{6}, \beta_2 = a_2 + b_2 \sqrt{2} + c_2 \sqrt{3} + d_2 \sqrt{6} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}),$$

$$p, q \in \mathbb{Q} \text{에 대하여 벡터합 } +, \text{ 스칼라곱 } \times \text{를}$$

$$\begin{aligned} \beta_1 + \beta_2 &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \sqrt{2} + (c_1 + c_2) \sqrt{3} + (d_1 + d_2) \sqrt{6} \\ p \times \beta_1 &= pa_1 + pb_1 \sqrt{2} + pc_1 \sqrt{3} + pd_1 \sqrt{6} \end{aligned}$$

라 정의하자.

 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 은 단위원 1을 갖는 가환환이며,

임의의 0아닌 원소가 곱셈 역원을 갖고,

$$p \times (\beta_1 + \beta_2) = p\beta_1 + p\beta_2, (p+q) \times \beta_1 = p\beta_1 + q\beta_1 \text{이므로}$$

 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 은  $\mathbb{Q}$  위의 벡터공간이다.

• (나)의 증명

$$\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}), p, q \in \mathbb{Q} \text{에 대하여}$$

$$T(p\beta_1 + q\beta_2) = \alpha(p\beta_1 + q\beta_2) = p\alpha\beta_1 + q\alpha\beta_2 = pT(\beta_1) + qT(\beta_2) \text{이므로 } T \text{는 선형사상이다.}$$

$$\bullet \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T(1) = \sqrt{2} + \sqrt{3}, T(\sqrt{2}) = 2 + \sqrt{6}, T(\sqrt{3}) = 3 + \sqrt{6}, T(\sqrt{6}) = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 고유다항식 } x^4 - 10x^2 + 1 = f(x)$$

케일리-해밀턴 정리에 의해

$$0 = (T^4 - 10T^2 + I)(\beta) = (\alpha^4 - 10\alpha^2 + 1)\beta = f(\alpha)\beta, \forall \beta \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$$

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \text{이므로}$$

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})][\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}]$$

$$\leq \deg(x^2 - 3)\deg(x^2 - 2) = 4.$$

$$\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \text{이므로 } \mathbb{Q}(\alpha) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}),$$

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\alpha)][\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$$

$$f(x) \in \mathbb{Q}[x] \text{는 기약이므로 } [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = \deg f(x) = 4.$$

$$\text{이때 } [\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\alpha)] = 1 \text{이 되므로 } \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \text{이다.}$$

\*  $f(x)$ 는  $\mathbb{Q}[x]$ 에서 (1차식들의 곱) or (2차식)  $\times$  (2차식)으로 나타낼 수 없다.

25-2.

•  $\alpha = 1 + \sqrt{2}$  일 때 행렬표현과 다항식과 차수

$$\text{행렬 표현 } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 고유다항식 } (x^2 - 2x - 1)^2.$$

 $\alpha$ 를 근으로 갖는 기약 다항식  $f(x) = x^2 - 2x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ .

$$[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = \deg f(x) = 2, [\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 4.$$

따라서  $\mathbb{Q}(\alpha) \subsetneq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ .

• 유한확대체는 대수적확대체

 $F \subset K$ 가 유한확대체라 하자. $\alpha \in K$ 에 대하여 선형사상  $T : K \rightarrow K, T(v) = \alpha v$ 라 정의하자. $T$ 의 고유다항식  $f(x) \in K[x]$ 일 때,  $f(\alpha) = 0$ 이므로  $\alpha$ 는  $F$  위에서 대수적이다.따라서  $F \subset K$ 는 대수적확대체.

26.  $f(x)$ 는 소수 2에 대한 아이젠슈타인 판정에 의해  $\mathbb{Q}[x]$ 에서 기약이다.

$[\mathbb{Q}(\theta) : \mathbb{Q}] = \deg f(x) = 3$ ,  $\{1, \theta, \theta^2\}_{\mathbb{Q}}$ 는  $\mathbb{Q}(\theta)$ 기저.

$(3+\theta)^{-1} = a+b\theta+c\theta^2$ 라 하면

$$1 = (3+\theta)(a+b\theta+c\theta^2) = 3a + (3b+a)\theta + (3c+b)\theta^2 + c\theta^3$$

$$= (3a-2c) + (3b+a+2c)\theta + (3c+b)\theta^2 \text{에서}$$

$$3a-2c=1, 3b+a+2c=0, 3c+b=0.$$

$$\therefore a = \frac{7}{19}, b = -\frac{3}{19}, c = \frac{1}{19}, (3+\theta)^{-1} = \frac{7}{19} - \frac{3}{19}\theta + \frac{1}{19}\theta^2.$$

\* 다른 풀이

$\theta+3=\alpha$ ,  $\theta=\alpha-3$ ,  $f(\theta)=0$ 이므로  $\alpha^3-9\alpha^2+25\alpha-19=0$ 에서

$$\alpha \cdot \frac{1}{19}(\alpha^2-9\alpha+25)=1.$$

$$\alpha^{-1} = (\theta+3)^{-1} = \frac{1}{19}(\alpha^2-9\alpha+25), \alpha=3+\theta\text{이므로 } \alpha^{-1} = \frac{1}{19}(\theta^2-3\theta+7).$$

\* 다른 풀이

$$0=\theta^3-2\theta+2=(\theta^2-3\theta+7)(3+\theta)-19\text{이므로 } \alpha^{-1} = \frac{1}{19}(\theta^2-3\theta+7).$$

\*  $\deg(\theta, \mathbb{Q})$ 는 2의 거듭제곱이 아니므로  $\theta$  작도 불가능.

27.  $x^2+1$ 의 해  $\pm i \not\in \mathbb{Z}_3[x]$ 이므로  $x^2+1$ 은 기약.

\*  $\mathbb{Z}_3$ 에 제곱해서  $-1=2$ 되는 원소 없다.

$\mathbb{Z}_3[x]$ 는 PID이므로  $\mathbb{Z}_3[x]\langle x^2+1 \rangle$ 는 위수  $3^2=9$ 인 체.

$$F_9 = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2+1 \rangle = \{a+bi \mid b \in \mathbb{Z}_3\} = \mathbb{Z}_3[i]$$

$$= \{0, 1, 2, i, 1+i, 2+i, 2i, 1+2i, 2+2i\}$$

$$= \{0+I, 1+I, \dots, 2+2i+I\}, I = \langle x^2+1 \rangle$$

$$* F_9 = GF(3^2) = \{x \in \overline{\mathbb{Z}_3} \mid x^{3^2}-x=0\}, (F_9^*, \cdot) = \langle \alpha \rangle \text{인 } \alpha \in F_9 \text{으로}$$

$$F_9 = \{0, 1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^7\}.$$

28.  $f(x)$ 의 근  $\alpha \in \bar{F}$ 이  $K$ 에 포함된다 하자.

$F \subset F(\alpha) \subset K$ ,  $K$ 는  $F$ 의 유한확대이므로

$$10 = [K : F] = [K : F(\alpha)][F(\alpha) : F] = [K : F(\alpha)]\deg f(x) = 3 \cdot [K : F(\alpha)] \text{에서}$$

$3 \mid 10$ , 모순. 이는  $\alpha \in K$  가정한 데서 생긴 모순이다.

따라서  $f(x)$ 의 어떤 근도  $K$ 에 포함되지 않는다.

즉,  $\langle f(x) \rangle$ 는  $K[x]$ 의 극대이데알이다.

\*  $F \subset F(\alpha) \subset K(\alpha)$ ,  $F \subset K \subset K(\alpha)$ .

\*  $f(x) \in F[x] \subset K[x]$ ,  $f(\alpha)=0$ 이므로  $[K(\alpha) : K] = \deg f(x) = 3$ .

\*  $[K(\alpha) : F] = [K(\alpha) : K][K : F] = 3 \cdot 10 = 30$ .

29.  $\langle p(x) \rangle \subset I \subset F[x]$ 인  $F[x]$ 의 아이디얼  $I$ 라 하자.

$F[x]$ 는 주아이디얼정역(PID)이므로

$$I = \langle f(x) \rangle = f(x) \cdot F[x] = \{f(x)g(x) \mid g(x) \in F[x]\}$$

인  $f(x) \in F[x]$ 이다. (주아이디얼: 배수들의 집합)

$p(x) \in I$ 이므로  $p(x) = f(x)g(x)$ 인  $g(x) \in F[x]$ 이다.

$p(x)$ 는 기약다항식이므로  $f(x)$  또는  $g(x)$ 는  $F[x]$ 의 단원(상수)이다.

\*  $U(F[x]) = U(F) = F^* = F \setminus \{0\}$

$f(x) \in F^*$ 이면  $I = F[x]$ .

$g(x) \in F^*$ 이면  $f(x) = p(x)[g(x)]^{-1} \in \langle p(x) \rangle$ ,  $I = \langle p(x) \rangle$ .

따라서  $\langle p(x) \rangle$ 는  $F[x]$ 의 극대이데알이다.

30. 한 근  $\alpha \in \bar{F}$  택하자.  $F(\alpha)$ 는  $\alpha$ 와  $F$ 를 포함하는 최소체이다.

\* 다른 풀이

$F[x]$ 는 PID이므로  $\langle f(x) \rangle$ 는  $F[x]$ 의 극대이데알,  $F[x]/\langle f(x) \rangle$ 는 체.

$\phi : F \rightarrow F[x]/\langle f(x) \rangle$ ,  $\phi(a) = \bar{a} = a + \langle f(x) \rangle$ 라 하자.

$\phi$ 는 환준동형사상,  $\phi(a) = \phi(b) \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow a - b \in \langle f(x) \rangle$ 이므로  $a = b$ .

$\phi$ 는 단사,  $F[x]/\langle f(x) \rangle$ 를  $F$ 의 확대체로 간주할 수 있다.

$\alpha = x + \langle f(x) \rangle \in F[x]/\langle f(x) \rangle$ 에 대하여  $f(\alpha)$ 를 구하면

$$f(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \dots + a_1\alpha + a_0$$

$$= (a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0) + \langle f(x) \rangle$$

$$= f(x) + \langle f(x) \rangle = 0 + \langle f(x) \rangle = \bar{0}.$$

따라서  $f(x)$ 의 근  $\alpha$  포함하는 확대체  $F[x]/\langle f(x) \rangle$  있다.

31.  $\alpha \in E$ 라 하자.  $F \subset F(\alpha) \subset E(\alpha) = E$ 는 유한확대이므로  $F \subset F(\alpha)$ 는 유한확대이다.

$[F(\alpha) : F] = \deg(\alpha, F) < \infty$ 이므로  $\text{irr}(\alpha, F) = f(x) \in F[x]$ 에 대하여  $f(\alpha) = 0$ . 그러므로  $F \subset E$ 는 대수적 확대.

\* 다른 풀이

$\alpha \in E$ ,  $[E : F] = n < \infty$ 라 하자.

$E$ 를  $F$ 의 벡터 공간이라 할 때,  $n = \dim_F E$ .

$\alpha^0 = 1, \alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n$ 은  $F$ -일차 종속이므로

$$a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots + a_n\alpha^n = 0$$

인 모두는 0이 아닌  $a_i \in F$  ( $0 \leq i \leq n$ ) 있다.

$$f(x) = a_nx^n + \dots + a_1\alpha + a_0 \in F[x], f(\alpha) = 0.$$

따라서  $\alpha$ 는  $F$  위에서 대수적이므로  $E$ 는  $F$  위에서 대수적 확대체이다.

32. ③

$\sqrt[4]{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[4]{3})$ ,  $3 \in \mathbb{Q}$ ,  $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ ,  $\sqrt[4]{3}$ 은 작도 가능.

$\deg(\sqrt[5]{3}, \mathbb{Q}) = \deg(x^5 - 3) = 5$ 는 2의 거듭제곱이 아니므로

$\sqrt[5]{3}$ 은 작도 불가능.

33. ③

① 위수 4인 군  $(\mathbb{Z}_4, +)$ ,  $V_4$ (클라인 4원군)  $\cong (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$

② 위수 4인환  $(\mathbb{Z}_4, +, \times)$ ,  $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +, \times)$

$$\text{char}(\mathbb{Z}_4) = 4, \text{char}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) = 2$$

③ 위수 4인 유한체는  $GF(2^2)$ 과 동형이다.

④  $H$ 가 정규부분군일 때  $G/H$ 의 연산이 잘 정의되어 잉여군을 생각할 수 있다.

⑤  $S$ 가 아이디얼일 때 잉여환 생각할 수 있다.

⑥  $V/W = \{v + W \mid v \in V\}$ 는 연산이 잘 정의된 상공간.

34. ③

$p=q=0$ 일 때  $x^3+1=0$ 의 실근  $-1$ , 두 허근  $e^{\frac{\pi i}{3}}, e^{\frac{2\pi i}{3}}$ .

구하는 값  $e^\pi = -1$ .

35. ①

$D = a^2 - a < 0$ 일 때 즉,  $0 < a < 1$ 일 때 허근 갖는다.

$$x = -a \pm \sqrt{a^2 - a} = -a \pm i\sqrt{a-a^2} := w, \bar{w}.$$

$$w^3 = -2aw^2 - aw = -2a(-2aw - a) - aw$$

$$= 2a^2 + w(4a^2 - a)$$

$$= 2a^2 + (4a^2 - a)(-a + i\sqrt{a-a^2}) \text{이 실수}$$

$$\Rightarrow 4a^2 - a = 0, a = \frac{1}{4}.$$

## [실해석학]

### <미적분학(편도함수 · 다중적분)>

1.

$$0 = f(x, tx), \quad x = \frac{t^2}{t^4 + 1}, \quad y = \frac{t^3}{1+t^4} \text{ 이므로 교점 } \left( \frac{t^2}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4} \right).$$

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) \leq 0, y \geq 0\}$  라 하자.

변수변환  $y = tx$ .

$$(x, y) \in D \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{t^2}{1+t^4}, \quad t \geq 0,$$

$$\text{야코비 행렬식 } \frac{\partial(x, y)}{\partial(x, t)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ t & x \end{vmatrix} = x \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} D \text{의 넓이 } \iint_D 1 dA &= \int_0^\infty \int_0^{t^2/1+t^4} x dx dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{t^4}{(1+t^4)^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{-t}{4(1+t^4)} \right]_0^\infty + \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^4} \right\} \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{32}. \end{aligned}$$

2. 1,  $6\ln 2$

$$\iint_D dA = 2\ln 2 = 2 \times \int_a^{a+1} \frac{dx}{x} = 2\ln\left(\frac{a+1}{a}\right), \quad a = 1.$$

그린 정리에 따라  $\int_C (2x-y)dx + (2x-y)dy = 3 \times \iint_D dA = 6\ln 2$ .

3. 8,  $3\pi$

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \sqrt{(r')^2 + r^2} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left| 2\sin\left(\frac{1}{2}\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)\right) \right| d\theta \\ &= 4 \times \int_{-\pi/6}^{5\pi/6} |\sin u| du \\ &= 8. \\ &\int_\alpha \kappa ds \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{r^2 + 2(r')^2 - rr''}{[r^2 + (r')^2]^{3/2}} \cdot [r^2 + (r')^2]^{1/2} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{r^2 + 2(r')^2 - rr''}{(r')^2 + r^2} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} d\theta \\ &= 3\pi. \end{aligned}$$

4.

$$\text{극좌표 변환, } g(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \sqrt{8r^2 - 1} \cdot r dr d\theta = \frac{\pi}{48} (7^{3/2} + 1).$$

$$\text{변수 변환, } u = 2(x+y), \quad v = 2(x-y), \quad \frac{1}{J} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -8, \quad |J| = \frac{1}{8}.$$

$(x, y) \in D(t) \Leftrightarrow -u \leq v \leq u, \quad u^2 + v^2 \leq 8, \quad u \geq 2t, \quad 0 \leq t \leq 1$ .

$$h(u) = \int_{-u}^u \sqrt{u^2 + v^2 - 1} dv \text{ 라 하면 } g(t) = g(0) - \frac{1}{8} \int_0^{2t} h(u) du.$$

$$g'(t) = -\frac{1}{4}h(2t), \quad g'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} \cdot h(1) = -\frac{1}{4}.$$

$$5. \quad \frac{\pi}{2}(1+a)^4, \quad \frac{43}{20}\pi$$

극좌표 변환  $x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$  라 하면

$$\iint_{D(a)} (x^2 + y^2) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{1+a} r^3 dr d\theta = 2\pi \left[ \frac{1}{4} r^4 \right]_0^{1+a} = \frac{\pi}{2}(1+a)^4.$$

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z(x^2 + y^2) dV &= \int_0^1 \iint_{D(z)} z(x^2 + y^2) dx dy dz \\ &= \int_0^1 \frac{\pi}{2} z(1+z)^4 dz \\ &= \left[ \frac{\pi}{10} z(1+z)^5 \right]_0^1 - \frac{\pi}{10} \int_0^1 (1+z)^5 dz \\ &= \frac{32\pi}{10} - \frac{\pi}{60} [(1+z)^6]_0^1 \\ &= \frac{43}{20}\pi. \end{aligned}$$

(다른 설명)

$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = a$  라 하면

$$\text{야코비 행렬식 } J = \begin{vmatrix} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, a)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z(x^2 + y^2) dV &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{1+a} ar^3 dr d\theta da \\ &= \int_0^1 \frac{a(1+a)^4}{2} \pi da \\ &= \int_1^2 \frac{\pi}{2} (t-1)t^4 dt \\ &= \frac{43}{20}\pi. \end{aligned}$$

$$6. \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{4}{e}$$

$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$  라 하면

$$g(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 + 1)^t r dr d\theta = \begin{cases} \frac{2^{t+1}-1}{t+1}, & t \neq -1, \quad g(-2) = \frac{1}{2}, \\ \ln 2, & t = -1 \end{cases}$$

로피탈 정리에 따라

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t)^{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} e^{\frac{\ln g(t)}{t}} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln g(t)}{t}} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g'(t)}{g(t)}} = e^{2\ln 2 - 1} = \frac{4}{e}.$$

7.

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \int_{\sqrt{1-y^2}}^y (-[x+y]) dx dy = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \int_{\sqrt{1-y^2}}^y -1 dx dy = -\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}.$$

$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$  치환하면,

$$\begin{aligned} &\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \int_{\sqrt{1-y^2}}^y f(x, y) dx dy + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^y f(x, y) dx dy + \int_{\sqrt{2}}^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx dy \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \cos^2\theta dr d\theta = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}, \quad 구하는 값 \frac{\pi-3}{4}. \end{aligned}$$

$$8. \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{8}{5}$$

$$\int_0^1 x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3}{5} \text{ 이므로 } D \text{의 넓이는 } 2 \cdot \left( 1 - \frac{3}{5} \right) = \frac{4}{5}.$$

그린 정리에 의해 선적분 값은  $\iint_{\text{int}(C) \cup b(C)} 2 dA = \frac{8}{5}$ .

9.  $\frac{\pi}{1-e^{-1}}$

$$\begin{aligned} u &= x-y, \quad v=x, \quad \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 1, \quad (x, y) \in D_n \Leftrightarrow u^2 + v^2 \leq n \\ &\iint_{D_n} e^{[(x-y)^2+x^2]} dx dy \\ &= \iint_{u^2+v^2 \leq n} e^{-[u^2+v^2]} dA \\ &= \iint_{0 \leq u^2+v^2 < 1} e^{-[u^2+v^2]} dA + \cdots + \iint_{n-1 \leq u^2+v^2 < n} e^{-[u^2+v^2]} dA \\ &= \iint_{0 \leq u^2+v^2 < 1} e^{-u^2} dA + \cdots + \iint_{n-1 \leq u^2+v^2 < n} e^{-(n-1)} dA \\ &= e^{-0}\pi + e^{-1}(2\pi - \pi) + \cdots + e^{-(n-1)}(n\pi - (n-1)\pi) \\ &= \pi(1 + e^{-1} + \cdots + e^{-(n-1)}). \end{aligned}$$

구하는 극한은  $\pi \cdot \frac{1}{1-e^{-1}} = \frac{\pi}{1-e^{-1}}$ .

10.  $e - e^{-1}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} &= \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -1/2, \quad (x, y) \in A \Leftrightarrow u+v \geq 0, \quad u-v \geq 0, \quad 1 \leq u \leq 3 \\ \iint_A \frac{1}{x+y} e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy &= \int_1^3 \int_{-u}^u \frac{1}{u} e^{\frac{v}{u}} \cdot \left| -\frac{1}{2} \right| dv du \\ &= \int_1^3 \frac{1}{2} [e^{\frac{v}{u}}]_{-u}^u du = \int_1^3 \frac{1}{2} (e^1 - e^{-1}) du = e - e^{-1}. \end{aligned}$$

11.  $\sin 1$

$$\iint_D 3\cos(x^3) dA = \int_0^1 \int_0^{x^2} 3\cos(x^3) dy dx = \int_0^1 3x^2 \cos(x^3) dx = [\sin(x^3)]_0^1 = \sin 1.$$

12. 16

$f_x = 0 = f_y$  되는  $(x, y) = (2, 2)$ 에서  $f(2, 2) = 4$

$D$ 의 경계  $\partial D$ 에서  $f(x, y)$ 의 함숫값을 조사하면

- ①  $0 \leq x \leq 4, y=0$ 에서  $0 \leq f(x, y) = 4x \leq 16$
- ②  $x=0, 0 \leq y \leq 4$ 에서  $0 \leq f(x, y) = y^2 \leq 16$
- ③  $0 \leq x, y \leq 4, x+y=4$ 에서  $4 \leq f(x, y) = 3y^2 - 12y + 16 \leq 16$

최댓값 16, 최솟값 0, 구하는 값 16.

13. 8

$f = 3x + ye^x, \nabla f = (3+ye^x, e^x)$ 이므로 선적분의 기본정리에 의해

$$\int_C (3+ye^x) dx + e^x dy = \int_C \nabla f \cdot (dx, dy) = f(0, 2) - f(-2, 0) = 8.$$

\* 다른 풀이(그린정리 적용)

$(0, 2)$ 에서  $(-2, 0)$ 을 잇는 선분  $L$ 라 하자.

$L$ 의 매개변수표현  $L(t) = (1-t)(0, 2) + t(-2, 0) = (-2t, 2-2t), 0 \leq t \leq 1$

$C+L$ 은 반시계방향 단순폐곡선이다.

$P = 3+ye^x, Q = e^x$ , 그린정리에 의해

$$\int_{C+L} (3+ye^x) dx + e^x dy = \iint_{\text{int}(C+L)} Q_x - P_y dA = 0.$$

$$\int_C (3+ye^x) dx + e^x dy = - \int_L P dx + Q dy$$

$$= - \int_0^1 (3+(2-2t)e^{-2t})(-2dt) + e^{-2t}(-2dt) = 8.$$

14. 81

$$\begin{aligned} &\int_0^2 \int_0^9 f(x, y) dy dx + \int_0^2 \int_0^{\sin \sqrt{x}} (y - \sin \sqrt{x}) dy dx \\ &= \int_0^2 \int_0^{\sin \sqrt{x}} \sin \sqrt{x} dy dx + \int_0^2 \int_{\sin \sqrt{x}}^9 y dy dx + \int_0^2 \int_0^{\sin \sqrt{x}} (y - \sin \sqrt{x}) dy dx \\ &= \int_0^2 \int_0^9 y dy dx = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9^2 = 81. \end{aligned}$$

15.  $32\pi$

$P = e^{\sin x} - 4x^2 y, Q = e^{\cos y} + 4xy^2$ 라 할 때

$$\begin{aligned} &\int_{x^2+y^2=4} P dx + Q dy \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 4} Q_x - P_y dA \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 4} 4x^2 + 4y^2 dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 4r^2 \cdot r dr d\theta = 2\pi \cdot 16 = 32\pi. \end{aligned}$$

16.  $\frac{7}{4}$

$t=0$ 일 때  $x=0, y=f(0)=1, t=1$ 일 때  $x=3, y=f(3)=2$ .

주어진 두 점을 연결하는 직선의 기울기는  $\frac{1}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{4-2t} \text{에서 } t = \frac{1}{2} (x \neq \frac{1}{2}). \\ t = \frac{1}{2} \text{에서 } x &= c = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}, \quad (y = \frac{5}{4}) \end{aligned}$$

17.  $\frac{1}{3}(1-\cos 1)$

$\sqrt{y} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2$ 이므로

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 7y^2 \sin(x^7) dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^{x^2} 7y^2 \sin(x^7) dy dx \\ &= \int_0^1 \frac{7}{3} x^6 \sin(x^7) dx \\ &= \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{7} [-\cos(x^7)]_0^1 = \frac{1}{3}(1-\cos 1). \end{aligned}$$

18. ④

극좌표계를 활용하자.  $(x, y) \in D \Leftrightarrow 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1, J=r$

$$\begin{aligned} &\iint_D \frac{|y|}{\sqrt{(x-2)^2+y^2}} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{|r \sin \theta|}{\sqrt{r^2-4r \cos \theta+4}} \cdot r dr d\theta \\ &= 2 \cdot \int_0^1 \int_0^\pi \frac{r^2 \sin \theta}{\sqrt{r^2-4r \cos \theta+4}} d\theta dr \\ &= 2 \cdot \int_0^1 \frac{r}{2} (r^2-4r \cos \theta+4)^{1/2} \Big|_0^\pi dr \\ &= \int_0^1 2r^2 dr \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

19. ②

구면좌표계 활용,  $x = \rho \sin \phi \cos \theta, y = \rho \sin \phi \sin \theta, z = 2\rho \cos \phi$ 라 하면  $(x, y, z) \in D \Leftrightarrow 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} = 2 \times \rho^2 \sin \phi = 2\rho^2 \sin \phi \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} &\iiint_D z^2 dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 (2\rho \cos \phi)^2 \cdot |2\rho^2 \sin \phi| d\rho d\phi d\theta \\ &= 2\pi \cdot \left( -\frac{1}{3} [\cos^3 \phi]_0^\pi \right) \cdot \frac{8}{5} = \frac{32}{15}\pi. \end{aligned}$$

20. ⑤

$C$ 는 반시계방향의 단순폐곡선이다.

$P=3+yx^2$ ,  $Q=2-xy^2$ 라 할 때 그린 정리를 적용하면

$$\begin{aligned} \int_C (3+yx^2)dx + (2-xy^2)dy &= \int_{x^2+y^2=4} Pdx + Qdy \\ &= \iint_{\text{int } C \cup C} Q_x - P_y dA = \iint_{x^2+y^2 \leq 4} (-x^2-y^2)dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 -r^2 \cdot r dr d\theta \quad (\text{극좌표 변환}) \\ &= 2\pi \cdot (-4) = -8\pi. \end{aligned}$$

21. ③

$$\iint_R \sin\{(y-2x)^2\} dA = \int_{-\frac{1}{2}}^0 \int_0^{2x+1} \sin\{(y-2x)^2\} dA$$

$x=u$ ,  $y-2x=v$ 라 하면

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$-\frac{1}{2} \leq x \leq 0, \quad 0 \leq y \leq 2x+1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq u \leq 0, \quad -2u \leq v \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{v}{2} \leq u \leq 0, \quad 0 \leq v \leq 1 \quad \text{으로}$$

$$\begin{aligned} \iint_R \sin\{(y-2x)^2\} dA &= \int_{-\frac{1}{2}}^0 \int_{-2u}^1 \sin(v^2) \cdot \left| \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} \right| dv du \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^0 \int_{-2u}^1 \sin(v^2) dv du \\ &= \int_0^1 \int_{-\frac{v}{2}}^0 \sin(v^2) du dv \\ &= \int_0^1 \frac{v}{2} \sin(v^2) dv \\ &= \left[ -\frac{1}{4} \cos(v^2) \right]_0^1 = \frac{1}{4}(1-\cos 1). \end{aligned}$$

22.  $2\ln 2$

$$xy=u, \quad xy^2=v \text{라 하자.} \quad \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ y^2 & 2xy \end{vmatrix} = xy^2 = v$$

$$\iint_A ydA = \int_1^2 \int_1^3 \frac{v}{u} \cdot \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dv du = \int_1^2 \int_1^3 \frac{v}{u} \cdot \frac{1}{v} dv du = 2\ln 2.$$

\* 다른 풀이

$$R_1 = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{3} \leq x \leq 1, \quad \frac{1}{x} \leq y \leq \sqrt{\frac{3}{x}} \right\},$$

$$R_2 = \left\{ (x, y) \mid 1 \leq x \leq \frac{4}{3}, \quad \frac{1}{\sqrt{x}} \leq y \leq \sqrt{\frac{3}{x}} \right\},$$

$$R_3 = \left\{ (x, y) \mid \frac{4}{3} \leq x \leq 4, \quad \frac{1}{\sqrt{x}} \leq y \leq \frac{2}{x} \right\},$$

$$R = \sum_{i=1}^3 R_i.$$

$$\begin{aligned} \iint_R ydA &= \iint_{R_1} ydA + \iint_{R_2} ydA + \iint_{R_3} ydA \\ &= \int_{\frac{1}{3}}^1 \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{\frac{3}{x}}} y dy dx + \int_1^{\frac{4}{3}} \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{\sqrt{\frac{3}{x}}} y dy dx + \int_{\frac{4}{3}}^4 \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{\frac{2}{x}} y dy dx \\ &= \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{1}{2} \left( \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx + \int_1^{\frac{4}{3}} \frac{1}{2} \left( \frac{2}{x} \right) dx + \int_{\frac{4}{3}}^4 \frac{1}{2} \left( \frac{4}{x^2} - \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} [3\ln x + x^{-1}]_{1/3}^1 + \frac{1}{2} [2\ln x]_1^{4/3} + \frac{1}{2} [-4x^{-1} - \ln x]_{4/3}^4 \\ &= 2\ln 2. \end{aligned}$$

23.  $2\sqrt{2}-1$

$$\begin{aligned} 0 \leq y \leq 1, \quad y^{\frac{1}{3}} \leq x \leq 1 &\Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq x^3 \text{으로 주어진 반복적분은} \\ I &= \int_0^1 \int_0^{x^3} 6\sqrt{1+x^4} dy dx = \int_0^1 6x^3 \sqrt{1+x^4} dx \\ &= 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot (1+x^4)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = 2^{\frac{3}{2}} - 1 = 2\sqrt{2} - 1. \end{aligned}$$

24.  $\frac{1}{2}$

발산 정리를 적용하자.

$$\iint_S F \cdot n dS = \iiint_{S \cup \text{int}(S)} \text{div}F dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 2z - 2y + 2yz dx dy dz = \frac{1}{2}.$$

\* 다른 풀이: 실제 계산

$$S_1 = \{(0, y, z) \mid 0 \leq y, z \leq 1\}, \quad S_2 = \{(1, y, z) \mid 0 \leq y, z \leq 1\},$$

$$S_3 = \{(x, 0, z) \mid 0 \leq x, z \leq 1\}, \quad S_4 = \{(x, 1, z) \mid 0 \leq y, z \leq 1\},$$

$S_5 = \{(x, y, 0) \mid 0 \leq x, y \leq 1\}$ ,  $S_6 = \{(x, y, 1) \mid 0 \leq x, y \leq 1\}$ 의 외부 쪽을 향하는 단위 벡터  $n_1 = (-1, 0, 0)$ ,  $n_2 = (1, 0, 0)$ ,  $n_3 = (0, -1, 0)$ ,  $n_4 = (0, 1, 0)$ ,

$$n_5 = (0, 0, -1), \quad n_6 = (0, 0, 1), \quad S = \sum_{i=1}^6 S_i \text{이다.}$$

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot n dS &= \sum_{i=1}^6 \iint_{S_i} F \cdot n dS \\ &= \iint_{S_1} (-2xz) dS + \iint_{S_2} (2xz) dS + \iint_{S_3} (y^2) dS \\ &\quad + \iint_{S_4} (-y^2) dS + \iint_{S_5} (-yz^2) dS + \iint_{S_6} (yz^2) dS \\ &= \int_0^1 \int_0^1 0 dy dz + \int_0^1 \int_0^1 2z dy dz + \int_0^1 \int_0^1 0 dx dz \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 (-1) dy dz + \int_0^1 \int_0^1 0 dx dy + \int_0^1 \int_0^1 y dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 2z dy dz + \int_0^1 \int_0^1 (-1) dy dz + \int_0^1 \int_0^1 y dx dy \\ &= 1 - 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

25.

표면적 계산은 단지 선분의 변화량이 높이의 변화량  $dx$ 를 따라 적분하였으므로 오류가 발생하였다. 따라서 구의 표면적은 단위면적소를 활용하여야 한다.

$$y=f(x), \quad a \leq x \leq b \text{의 회전체의 표면적은 } S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{f'(x)^2 + 1} dx$$

여기에서  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$  이므로

따라서 구의 곁넓이는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2} dx = 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \left( \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right)^2} dx \\ &= 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2} dx \\ &= 2\pi r \int_{-r}^r 1 dx \\ &= 4\pi r^2 \end{aligned}$$

26. ③

$$\int_D e^{\frac{y}{x}} dy dx = \int_0^1 \int_0^{x^2} e^{\frac{y}{x}} dy dx = \int_0^1 x e^{\frac{y}{x}} \Big|_{y=0}^{y=x^2} dx = \int_0^1 x e^x - x dx = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

27. ④  $\frac{3}{2}\pi$

$$\begin{aligned} \text{도형의 면적 } S &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left( 1 - 2\cos\theta + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\pi. \end{aligned}$$

시계방향으로  $\frac{\pi}{4}$  회전하는  $\mathbb{R}^2$ 의 회전변환행렬  $R$ ,

$$R = \begin{bmatrix} \cos(-\frac{\pi}{4}) & -\sin(-\frac{\pi}{4}) \\ \sin(-\frac{\pi}{4}) & \cos(-\frac{\pi}{4}) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{에서 } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = R^T \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \text{이므로}$$

주어진 조건에 대입하고 기호를 정리하면

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) = \frac{1}{2} \text{에서 } x^2 - y^2 = 1,$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}}|x| = 2\sqrt{2} \text{에서 } |x| = 2, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) \text{에서 } y = 0.$$

따라서 구하는 입체의 체적  $V$ 는

$x^2 - y^2 = 1$ 과  $|x| = 2$ 로 둘러싸인 도형을

$x$ 축을 기준으로 회전하여 얻은 입체의 부피이다.

$$V = 2 \times \int_1^2 \pi y^2 dx = 2 \int_1^2 \pi(x^2 - 1) dx = \frac{8}{3}\pi.$$

## <실수체계 · 수열 · 연속 · 미분 · 적분>

1.

$$\text{“양 끝 점” } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} te^{-t^2} = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{f(x)}{x} \right] = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \text{ 이므로 } \frac{f(\sqrt{2})}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2e}}.$$

$S \neq \emptyset$  임은 자명하다.

$\frac{f(x)}{x} > 0$  이므로  $S$ 는 아래로 유계,

$$\frac{f(x)}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{2e}} = \frac{f(\sqrt{2})}{\sqrt{2}} \text{ (최댓값이 존재)이므로 } S \text{는 위로 유계.}$$

실수체에 관한 완비성 공리에 따라  $S$ 의 상한과 하한이 모두 존재한다.

따라서 최소 상계(l.u.b)  $\frac{1}{\sqrt{2e}}$ , 최대 하계(g.l.b) 0.

$s > 0$ 에 대하여  $x = st$ 라 하면  $\frac{f(st)}{st} \leq \frac{1}{\sqrt{2e}}$  이므로

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^1 \frac{f(x)}{s} e^{-\frac{x^2}{s^2}} dx \\ &= \int_0^{1/s} f(st) e^{-t^2} dt \\ &\leq \frac{s}{\sqrt{2e}} \int_0^{1/s} t e^{-t^2/2} dt \\ &\leq \frac{s}{\sqrt{2e}} \int_0^{\infty} t e^{-t^2/2} dt \\ &= \frac{s}{2\sqrt{2e}}. \end{aligned}$$

조임정리에 따라  $\lim_{s \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{f(x)}{s} e^{-\frac{x^2}{s^2}} dx = 0$ .

2.

$p = \frac{1}{3}$  일 때,  $x > 0$  이면  $|f(x)| \leq x^{1/3}$  이므로 조임정리에 따라  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ .

$f(0) = 0$  이므로  $f$ 는  $x = 0$ 에서 연속이다.

$p = -1$  일 때,  $L > 0$ 라 하자.

아르카메데스 원리에 따라  $L < 2N\pi$  되는  $N \in \mathbb{N}$  있다.

$f$ 는  $[0, \frac{1}{2N\pi}]$ 에서 연속이고,  $f\left(\frac{1}{2N\pi + \pi/2}\right) = 0 < L < 2N\pi = f\left(\frac{1}{2N\pi}\right)$  이므로 중간값 정리에 따라  $f(x_0) = L$  되는  $x_0$  있다.

3.

$f$ 는  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$ 에서 전단사, 미분가능,  $f' \neq 0$  이므로  $g$ 도  $\mathbb{R}$ 에서 미분가능.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ g\left(1 + \frac{3}{n}\right) - g(1) \right\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+3h) - g(1)}{h} = 3g'(1) = \frac{3}{f'\left(\frac{5\pi}{4}\right)} = \frac{3}{2}.$$

$$g(x) = t \text{라 하면 } g'(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ 이므로 } \int_0^{\infty} \frac{g(x)}{1+x^2} dx = \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} t dt = \frac{5}{8}\pi^2.$$

(다른 설명)

$$x = \tan\theta \text{라 하면 } \int_0^{\infty} \frac{g(x)}{1+x^2} dx = \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{\theta \cdot \sec^2\theta}{1+\tan^2\theta} d\theta = \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \theta d\theta = \frac{5}{8}\pi^2.$$

4.

$g(x) = f(x) - x$ 은  $[0, 1]$ 에서 연속이고  $(0, 1)$ 에서 미분가능하다.

$g(0) = f(0) \geq 0$ ,  $\text{im}f \subset [0, 1]$  이므로  $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ .

사잇값 정리에 따라  $g(a) = 0 = f(a) - a$ 가 되는  $a \in [0, 1]$  있다.

$a \neq b$ 인  $b \in [0, 1]$ 에 대하여  $f(b) = b$  이면  $g(a) = g(b) = 0$  이므로

롤의 정리에 따라  $g'(c) = f'(c) - 1 = 0$ 이 되는  $c$ 가  $a$ 와  $b$ 사이에 존재한다.

이는  $f'(x) \neq 1$ 라는 데 모순이다.

따라서 조건을 만족하는  $a$ 는 유일하다.

5.

$S$ 가 무한집합이면  $f(x) = 0 = f'(x)$ 인 실수  $x$ 가 존재한다.

$S$ 가 무한집합이라고 하자.

$f(x_n) = 0$  되는 상수가 아닌 수열  $\{x_n\} \subset [-1, 1]$ 을 택하면 볼자노-바이어슈트라스 정리에 의해

$c \in [-1, 1]$ 로 수렴하는  $\{x_n\}$ 의 부분수열 있다.

부분수열 중에서 자연수  $k$ 에 대해  $x_{n_k} \neq c$ 인 부분수열  $\{x_{n_k}\}$ 를 택하자.

$f$ 는 연속이므로  $k \rightarrow \infty$  일 때  $f(x_{n_k}) = f(c) = 0$ .

$$f \text{는 미분가능하므로 } f'(c) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x_{n_k}) - f(c)}{x_{n_k} - c} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{0 - 0}{x_{n_k} - c} = 0.$$

즉,  $f(c) = 0 = f'(c)$

\* 다른 설명

모든  $x \in \mathbb{R}$ 에 대하여  $f(x) \neq 0$  이면  $S = \emptyset$ .

모든  $x \in \mathbb{R}$ 에 대하여  $f'(x) \neq 0$  이면  $f$ 는 단사이므로  $f(x) = 0$  되는  $x$ 는 존재하지 않거나, 존재하더라도 1개 있다. (기껏해야 1개 존재한다.)

그러므로 명제  $P$ 가 성립한다.

6.  $n = 16$

직선  $y = x$ 를 따라  $f(x, y)$ 의  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  일 때  $f(x, y)$ 의 극한이

$$f(0, 0) = 0 \text{ 이 되기 위해서는 } \frac{x^{2n}}{2x^{30}} = \frac{1}{2}x^{2n-30} \rightarrow 0 \text{ 이 되어야 하며,}$$

이때  $2n-30 > 0$ ,  $n > 15$ .

$$n = 16 \text{ 이면 } |f(x, y)| \leq \frac{|xy|}{2} \rightarrow 0 \quad ((x, y) \rightarrow (0, 0)) \text{ 이므로 구하는 값 } 16.$$

7.

$n = 1$  일 때  $1 \leq a_1 \leq 2$ ,

$n = k$  일 때  $1 \leq a_k \leq 2$ 라고 가정하면

$$1 \leq 3 \leq a_{k+1}^5 = 2a_k^2 + 1 \leq 9 \leq 32 \text{ 에서 } 1 \leq a_{k+1} \leq 2.$$

수학적 귀납법에 의해  $n \in \mathbb{N}$  일 때  $1 \leq a_n \leq 2$ .

$$n = 1 \text{ 일 때 } a_1 = 1 < 3^{\frac{1}{5}} = a_2.$$

$n = k$  일 때  $a_k \leq a_{k+1}$ 라고 가정하면

$$a_{k+1} = (2a_k^2 + 1)^{\frac{1}{5}} \leq (2a_{k+1}^2 + 1)^{\frac{1}{5}} = a_{k+2} \text{ 이므로}$$

수학적 귀납법에 의해  $n \in \mathbb{N}$  일 때  $a_n \leq a_{n+1}$ .

실수열  $\{a_n\}$ 은 위로 유계인 증가수열이므로 단조수렴정리에 의해 수렴.

\* 극한  $\alpha \approx 1.36396$ ,  $x^5 - 2x^2 - 1$ 의 실근 1개, 허근 4개.

$$8. x \neq 0$$
인  $x$ 에 대하여  $\left| \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} - 0 \right| = \left| \frac{1}{x}f(x) \right| \rightarrow |f'(0)| = 0 \quad (x \rightarrow 0)$

이므로 조임 정리에 의해  $g'(0) = 0$ .

9.  $\frac{1}{\ln 2}$

$$\int_1^{\infty} [f(n)]^t dt = \left[ \frac{f(n)^t}{\ln f(n)} \right]_{t=1}^{\infty} \text{ 가 수렴}$$

$$\Leftrightarrow f(n) \leq 1 \Leftrightarrow 10 - \sqrt{2} \leq n \leq 10 + \sqrt{2}.$$

$$n = 9, 10, 11 \text{ 일 때 } a_n = -\frac{1/2}{\ln(1/2)}, 0, -\frac{1/2}{\ln(1/2)} \text{ 이므로}$$

$$\text{구하는 값 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_9 + a_{10} + a_{11} = -\frac{1}{\ln(1/2)} = \frac{1}{\ln 2}.$$

10.  $x=0$ 일 때  $f(0) \leq f(0) + M \cdot 0 = f(0)$

$x > 0$ 일 때  $f$ 는  $[0, x]$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 따라  $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(c)$ 인  $c \in (0, x)$  있다.

가정에 의해  $f(x) \leq f(0) + Mx$ .

$g(x) = f(x) - x$ 는  $[0, \infty)$ 에서 미분가능하다.

$g(0) = f(0) > 0$ ,

$g(\alpha) \leq 0$ 되는  $\alpha$ 를 찾자.

$$g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha \leq f(0) + M\alpha - \alpha = 0.$$

$$\alpha = \frac{f(0)}{1-M} > 0$$
라 하면  $g(\alpha) \leq 0$ .

중간값 정리에 의해  $g(x) = f(x) - x = 0$  되는  $x$  있다.

한편  $g'(x) = f'(x) - 1 \leq M - 1 < 0$ 이므로  $g$ 는 단사.

그러므로  $f(x) = x$ 는 단 하나의 해를 갖는다.

11.  $[a, b]$ 의 임의의 분할  $P, Q$ 에 대하여  $L(f, P) \leq U(f, Q)$ .

$A \leq U(f, Q), L(f, P) \leq B$ 이므로  $A \leq B$ 이다.

$f$ 는  $[a, b]$ 에서 연속이므로 하이네 정리에 의해 균등연속.

$\frac{\varepsilon}{b-a} > 0$ 에 대하여  $\delta > 0$ 가 존재해서  $|x-y| < \delta$ ,

$$x, y \in [a, b] \text{이면 } |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

아르키메데스 원리에 의해  $\frac{b-a}{N} < \delta$ 인  $N \in \mathbb{N}$  있다.

$[a, b]$ 의  $N$ 등분할  $P_N = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_N = b\}$ 라 하자.

$k = 1, 2, \dots, N$ 에 대하여  $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ 에서  $f$ 는 연속이므로

최대최소정리에 의해  $M(f, I_k) = f(x_{M_k}), m(f, I_k) = f(x_{m_k})$ 인  $x_{M_k}, x_{m_k} \in I_k$  있다.

$$|x_{M_k} - x_{m_k}| < \frac{b-a}{N} < \delta, x_{M_k}, x_{m_k} \in I_k \subset [a, b]$$

$$U(f, P_N) - L(f, P_N) = \sum_{k=1}^N [M(f, I_k) - m(f, I_k)] \frac{b-a}{N}$$

$$= \frac{b-a}{N} \sum_{k=1}^n [f(x_{M_k}) - f(x_{m_k})] \\ < \frac{b-a}{N} \cdot \sum_{k=1}^N \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon \text{ (리만판정법).}$$

좌변 이항하면  $U(f, P_N) < L(f, P_N) + \varepsilon, B \leq A$ .

앞서 보인 사실로부터  $A = B$ 이고  $n \geq N$ 인  $n$ 에 대하여

$L(f, P_n) \leq \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k \leq U(f, P_n), L(f, P_n) \leq A = B \leq U(f, P_n)$ 이므로

$$\left| \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k - A \right| < U(f, P_n) - L(f, P_n) < \varepsilon.$$

그러므로 (다)의 극한  $A$ 이다.

12.  $3 < r < 5$

$$x > 0 \text{일 때 } f'(x) = 6x^5 \sin \frac{1}{x^r} - rx^{-r+5} \cos \frac{1}{x^r} + rx^{r-1} \sin \frac{1}{x^2} - 2x^{r-3} \cos \frac{1}{x^2}.$$

$x \leq 0$ 일 때  $f'(x) = 0$ 이므로

$f'(0) = 0$ 에서 연속

$$\Leftrightarrow f'(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)$$

$$\Leftrightarrow -r+5 > 0, r-1 > 0, r-3 > 0$$

$$\Leftrightarrow 3 < r < 5.$$

\*  $x=0$ 에서 미분가능  $\Leftrightarrow r > 1$

13.  $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여  $M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$ 인  $x_n \in [0, 1]$  있다.

정리 1에 의해  $\{x_n\}$   $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x^* \in [0, 1]$  존재.

$M - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leq M$ 이므로 조임정리에 따라  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = M$ .

$f$ 는 연속이므로  $f(x^*) = M$ .

14. ①

ㄱ.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{(x+1)/(x\sqrt{x^4+1})}{(x+1)/x^3} \right] = 1, \int_1^\infty \frac{x+1}{x^3} dx = \frac{3}{2}$ 이므로 극한비교판정에 의해 주어진 특이적분은 수렴한다.

ㄴ.  $[2, \infty)$ 에서  $\frac{1}{x} < \frac{1}{\ln x}, \int_2^\infty \frac{1}{x} dx = \infty$ 이므로 비교판정에 의해 주어진 특이적분은 발산한다.

ㄷ.  $[0, \frac{\pi}{2}]$ 에서  $\frac{1}{\cos x + \sqrt{1-\sin^2 x}} \geq \frac{1}{\cos x + \sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{2} \sec x, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec x dx = [\ln |\sec x + \tan x|]_0^{\frac{\pi}{2}} = \infty$ 이므로 비교판정에 의해 주어진 특이적분은 발산한다.

15. ⑤

$$* x_n = \frac{1}{2n\pi}, y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{6}}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = f(0), f \text{는 } x=0 \text{에서 불연속.}$$

ㄱ. 그런 수열  $\{x_n\}$  있다.

ㄴ. 일반성을 잊지 않고  $a < b$ 라 하자.

①  $ab > 0$ 일 때  $f$ 는  $[a, b]$ 에서 연속이므로 중간값정리에 의해 성립.

②  $ab < 0$ 일 때 충분히 큰  $N \in \mathbb{N}$ 에 대하여

$$0 < \frac{1}{2N\pi} < b \text{이다. } p = \frac{1}{2N\pi + \frac{3}{2}\pi}, q = \frac{1}{2N\pi} \text{라 하면}$$

$[p, q] \subset (a, b)$ 이고  $-1 = f(p) \leq f(a) < \gamma < f(b) \leq f(q) = 1$ 이다.

$f$ 는  $[p, q]$ 에서 연속이므로 중간값정리에 의해 성립.

③  $ab = 0$ 일 때  $a = 0$ 인 경우  $b > 0$ 이므로 ②와 비슷한 방법으로 성립.

$b = 0$ 인 경우  $a < 0, -a > 0$ 이므로

충분히 큰  $N \in \mathbb{N}$ 에 대하여  $0 < \frac{1}{2N\pi} < -a$ 이다.

$$p = -\frac{1}{2N\pi}, q = -\frac{1}{2N\pi + \frac{3}{2}\pi} \text{라 하면 } [p, q] \subset (a, b)$$

$-1 = f(p) \leq f(a) < \gamma < f(b) = 1/2 \leq f(q) = 1$ .

$f$ 는  $[p, q]$ 에서 연속이므로 중간값정리에 의해 성립.

ㄱ.  $(0, 1)$ 에서  $g(x) = x \sin \frac{1}{x}$ 이고,  $g$ 는  $(0, 1)$ 에서 연속이다.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$ 가 모두 존재하므로 연속확장정리에 의해  $g$ 는  $(0, 1)$ 에서 균등연속이다.

16. ⑤

ㄱ. 양변 미분,  $f'(x) = -f'(-x)$ 에서  $f'(0) = 0$ .

\* 우함수면  $f'(0) = 0$

ㄴ.  $g(x) = x^2$ 은  $\mathbb{R}$ 에서 미분가능하다.

코시 평균값 정리에 의해  $g'(c)[f(1) - f(0)] = f'(c)[g(1) - g(0)]$ 인  $c \in (0, 1)$  있다.

이때  $2c[f(1) - f(0)] = f'(c), 0 < c < 1$ 이므로

$$f(1) - f(0) = \frac{f'(c)}{2c}, 0 < c < 1.$$

ㄷ.  $x < y$ 면

$$0 < (f')^3(x) - (f')^3(y) = [f'(x) - f'(y)][(f')^2(x) + f'(x)f'(y) + (f')^2(y)]$$

이므로  $f'(x) < f'(y)$ , 즉  $f'$ 은 단조함수이다.

그러므로  $f'$ 은 연속함수이다.

17. ②

ㄱ.  $a_n = \sin n, b_n = 1 + \frac{1}{n}, \{a_n b_n\}$ 는 진동한다.

ㄴ. 유계 실수열  $\{a_n\}$ 이 수렴하지 않으므로  $\{a_n\}$ 의 상극한과 하극한이 서로 다르다. 따라서 상극한을  $\alpha$ , 하극한을  $\beta$ 라 할 때 각각  $\alpha, \beta$ 로 수렴하는 부분수열  $\{a_{n_k}\}, \{a_{m_k}\}$ 은 주어진 조건을 만족

ㄷ.  $(-1)^n$ 의 상극한 1,  $a_n < 1 - \varepsilon$ 을 만족시키는  $n$ 의 개수는 무한하다.

18. ①

$0 \leq y \leq \sqrt{t}$ ,  $y \leq x \leq \sqrt{t} \Leftrightarrow 0 \leq y \leq x$ ,  $0 \leq x \leq \sqrt{t}$  이므로  
중적분으로 주어진 함수  $f(t)$ 의 식은

$$f(t) = \int_0^{\sqrt{t}} \int_0^x \frac{1}{2 + \sin(x^2)} dy dx = \int_0^{\sqrt{t}} \frac{x}{2 + \sin(x^2)} dx$$

$\frac{x}{2 + \sin(x^2)}$  은  $\mathbb{R}$ 에서 연속이다.

미적분학의 기본정리에 의해

$$f'(t) = (\sqrt{t})' \cdot \frac{x}{2 + \sin(x^2)} \Big|_{x=\sqrt{t}} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot \frac{\sqrt{t}}{2 + \sin t} = \frac{1}{4 + 2\sin t}.$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{6}.$$

19. ②

ㄱ.  $x=0$ 일 때  $0$ ,  $x \neq 0$ 일 때  $x^2 \sin \frac{1}{x}$ 로 정의한 함수  $f(x)$ ,  $f'(0)=0$ ,

$x \neq 0$ 일 때  $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$  이므로  $f'$ 은 연속이 아니다.

$f$ 를  $x$ 축 방향으로  $\frac{1}{2}$ 만큼 평행이동한 함수  $g(x)$ 는

$(0,1)$ 에서 미분가능하고  $g'$ 은  $x=\frac{1}{2}$ 에서 불연속.

\*  $f'$ 이 단조함수이면 연속된다.

ㄴ.  $f$ 는  $(0,1)$ 에서 단조감소, 연속이므로  $f^{-1}$ 존재. (연속 역함수 정리)

\* 이때  $f^{-1}$ 는  $D=f((0,1))$ 에서 단조감소, 연속

ㄷ.  $D$ 에서  $f' \neq 0$ 이어야 미분가능하다.

\* 예:  $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ ,  $\tan\left[4\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right]$

20. ①

ㄱ.  $[x \ln x - x]_0^1 = -1$ 이므로 주어진 특이적분은 수렴.

ㄴ.  $f$ 의 불연속점의 집합  $A$ 의 측도가  $0$ 이 아니므로  $f$ 는 리만적분 불능.

\* 다른 설명

상적분  $\overline{\int_0^1 f(x)dx} = \int_0^1 1 dx = 1$ , 하적분  $\underline{\int_0^1 f(x)dx} = \int_0^1 0 dx = 0$ 이므로

$f$ 는 리만적분가능하지 않다.

ㄷ. 적분가능 조건만으로는 항상 성립하지 않는다. (연속 조건 필요)

\* 반례:  $0 \leq y \leq 1/2$ 에서  $0$ ,  $1/2 \leq y \leq 1$ 에서  $1$ 로 정의한 함수  $f(y)$ 는 불연속점의 개수가 유한 개인 유계함수이므로  $[0,1]$ 에서 리만적분가능.

이때  $0 \leq x \leq 1/2$ 에서  $F(x) = 0$ ,  $1/2 \leq x \leq 1$ 에서

$F(x) = x - 1/2$ 이며  $x = 1/2$ 에서  $F$ 는 미분가능하지 않다.

21. ①

$1-t^3\sqrt{1+3t^2}$ 은  $\mathbb{R}$ 에서 연속이다. 미적분의 기본 정리를 적용하면

$f'(x) = -2 \cdot [1-t^3\sqrt{1+3t^2}]_{t=1-2x} - 2 \cdot [1-t^3\sqrt{1+3t^2}]_{t=1+2x}$ 에서

$$f'(0) = -2 \cdot (1-1 \cdot \sqrt{4}) - 2 \cdot (1-1 \cdot \sqrt{4})$$

$$= -2 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) = 4.$$

22. ④

ㄱ. 실수열  $\{x_n\}$ 이 코시 수열이므로  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 이 존재하고,  $f$ 는 연속이므로

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ 이 존재한다. 따라서  $\{f(x_n)\}$ 도 코시.

ㄴ.  $g$ : 디리클레 함수,  $g \circ g \equiv 1$ 은 연속함수이지만  $g$ 는 모든 점에서 불연속.

ㄷ.  $h$ 가 단사이므로  $h(0) \neq h(1)$ . 일반성을 잃지 않고  $h(0) < h(1)$ 라 하자.

$h(x) < h(0)$ 인  $x \in (0,1)$  있다 하면 중간값 정리에 의해

$$h(a) = \frac{h(0)+h(x)}{2} = h(b) \text{인 } a \in (0,x), b \in (x,1) \text{ 있다. } h \text{는 단사이므로 } h \text{는 } h(a) < h(b).$$

따라서  $h$ 는 순증가함수이다. ( $h(0) > h(1)$ 라 하면 순감소함수)

그러므로 연속 역함수 정리에 의해  $h^{-1}$ 는  $h([0,1])$ 에서 연속이다.

\* 역함수의 연속

① 실함수  $f$ 가 컴팩트 집합  $K$ 에서 연속  $\Rightarrow f^{-1}$  연속

②  $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ : 단사, 연속  $\Rightarrow f$ 는 순증가(순감소)

③ (연속 역함수 정리)  $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ : 순증가(순감소), 연속  $\Rightarrow f^{-1}$  연속

23. ①

ㄱ.  $(x+x^2)'|_{x=0} = 1 = (x \cos x)'|_{x=0}$  이므로 미분가능할 것이라 추론 가능.

$$x \neq 0 \text{ 일 때 대하여 } \left| \frac{f(x)-f(0)}{x-0} - 1 \right| \leq \max\{|x|, |\cos x - 1|\} \rightarrow 0 \text{ (}x \rightarrow 0\text{)}$$

이므로 조임정리에 의해  $f'(0) = 1$ .

ㄴ.  $g(z) = e^z$ 는 모든  $z \in \mathbb{C}$ 에서  $g'(z) \neq 0$ 이지만 주기가  $2\pi i$ 인 함수로서 단사함수가 아니다.

$$\text{ㄷ. } F(x) = (\sin 2\pi x, e^x)$$

24. ④

ㄱ. 비판정에 의해  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 이 수렴하고,  $x_n$ 은 0으로 수렴

ㄴ. 홀수열  $\frac{1}{n}$ , 짝수열  $-1$ 인 수열  $\{x_n\}$ 은 단 하나의 극한점 0을 갖지만 수렴하지는 않는다.

ㄷ.  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|\sin x_n| \leq 1$ 이므로 볼자노-바이어슈트라스 정리에 의해 주어진 수열은 수렴하는 부분수열을 갖는다.

\* 단조수렴정리

보통위상공간  $\mathbb{R}$ 의 단조 수열이 수렴  $\Leftrightarrow$  유계

① 위로 유계인 증가수열은 수열집합의 상한에 수렴

② 아래로 유계인 감소수열은 수열집합의 하한에 수렴

25. ③

ㄱ.  $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 4x \cdot (2x^2+3)^{-1/2} \rightarrow \sqrt{2}$  ( $x \rightarrow \infty$ )이므로

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 일 때 대하여 } M > 0 \text{이 존재해서 } x \geq M \text{ 일 때 } \frac{\sqrt{2}}{2} < f'(x) < \frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

따라서  $f$ 는  $[M, \infty)$ 에서 균등연속이다.

$\left[0, M + \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ 에서  $f$ 는 연속이므로 하이네 정리에 의해  $f$ 는 균등연속.

$\left[0, M + \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cap [M, \infty) \neq \emptyset$ 이므로  $f$ 는 구간  $[0, \infty)$ 에서 균등연속.

$$* |f'(x)| = \left| \frac{2x}{\sqrt{2x^2+3}} \right| \leq \sqrt{2} \text{이므로 } [0, \infty) \text{에서 균등연속.}$$

ㄴ.  $g$ 는 구간  $[1, \infty)$ 에서 연속,  $[1, \infty)$ 에서  $g'(x) = e^{-x^2} \leq e^{-1^2} = e^{-1}$ 이므로  $g$ 는  $[1, \infty)$ 에서 균등연속이다.

ㄷ.  $h$ 는  $[0, 3)$ 에서 연속,  $\lim_{x \rightarrow 3^-} h(x)$ 가 존재하지 않으므로 연속확장정리에 의해  $h$ 는  $[0, 3]$ 에서 균등연속이 아니다.

26. ①

ㄱ. 일반성을 잃지 않고  $f'$ 이 단조증가 함수라 하자.

$f'$ 이  $x=a$ 에서 불연속이라 하면  $f'$ 이 단조증가하므로

$$\alpha := \lim_{x \rightarrow a^-} f'(x) < \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) := \beta \text{이고,}$$

실수 조밀성에 의해  $f'(a) \neq k$ 인  $k \in (\alpha, \beta)$  있다.

$f'$ 이 단조이므로  $f'(a-1) < k < f'(a+1)$ .

Darboux정리,  $k = f'(c)$ 인  $c \in (a-1, a+1)$  있다.

①  $a-1 < c < a$ 인 경우  $f'(c) \leq \alpha < k = f'(c)$

②  $a < c < a+1$ 인 경우  $k = f'(c) < \beta \leq f'(c)$

두 가지 경우 모두 모순이다. 따라서  $f'$ 은 연속함수이다.

$$* \alpha = \sup\{f'(x) \mid x < a\}, \beta = \inf\{f'(x) \mid x > a\}$$

ㄴ.  $x=0$ 일 때  $0$ ,  $x \neq 0$ 일 때  $x^2 \sin \frac{1}{x}$ 로 정의한 함수  $f(x)$ ,  $g(x) = \sin x$ 는 주어진 명제를 만족하지 않는다.

\* 로피탈 정리의 역은 성립하지 않는다.

ㄷ.  $x=0$ 일 때  $0$ ,  $x \neq 0$ 일 때  $x+2x^2 \sin \frac{1}{x}$ 로 정의한 함수  $f(x)$ 에 대하여  $f'(0) = 1 > 0$ 이다.

임의의  $\delta > 0$ 에 대하여  $\frac{1}{2N\pi} < \delta$ 인  $N \in \mathbb{N}$  있다.

$x, y \in \left(0, \frac{1}{2N\pi}\right) \subset (0-\delta, 0+\delta)$ 일 때  $x = \frac{1}{2N\pi + \pi/2} < \frac{1}{2N\pi - \pi/2} = y$ 에 대하여  $f(x) > f(y)$ 이다.

27.

$$\textcircled{1} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e = \frac{p}{q} (\text{가} \text{약분수}) \text{라 하자.}$$

$$\text{양변에 } q! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot q \text{ 곱하면 } q! \left[ \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} + \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \right] = p \cdot (q-1)!. \quad \text{이므로 } \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!}{n!} = p \cdot (q-1)! - \sum_{n=0}^q \frac{q!}{n!}, \text{ 우변은 정수이다.}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!}{n!} &= \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)\dots(q+2)(q+1)} \\ &< \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^{n-q}} \\ &= \frac{1/(q+1)}{1-[1/(q+1)]} = \frac{1}{q} \leq 1 \end{aligned}$$

이므로 좌변은 정수가 아니다. 모순.

따라서  $e$ 는 무리수.

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \right)^2 &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{-\frac{1}{2}y^2} dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}r^2} r dr d\theta = 2\pi \cdot 1 = 2\pi. \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx > 0 \text{이므로 } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi}.$$

$$\text{그러므로 } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 1.$$

28. ④

$$\neg. (n+1)^{\frac{1}{\log(n+1)}} = e^{\frac{1}{\log(n+1)} \cdot \log(n+1)} = e^1, \text{ 상수수열.}$$

$$\neg. \frac{(n+1)^n}{n!} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n-1} \cdot \dots \cdot \frac{n+1}{1} \geq n+1 \text{이므로 유계가 아니다.}$$

따라서 발산한다.

$$\neg. (1+a)^n = 1 + {}_n C_1 a^1 1^{n-1} + {}_n C_2 a^2 1^{n-2} + \dots \text{이므로}$$

$$0 \leq x_n \leq \frac{1+na}{1+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \text{ 조임정리에 의해 } 0 \text{으로 수렴.}$$

29. ⑤

$\neg. r \in [-1, 1] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여 유리수 조밀성에 의해

$$r_n \in \left[ r - \frac{1}{n}, r + \frac{1}{n} \right] \cap [-1, 1] \text{인 유리수열 } \{r_n\} \text{을 택하면 조임정리에 의해}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( r - \frac{1}{n} \right) = r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( r + \frac{1}{n} \right), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r$$

즉,  $\{r_n\}$ 은 무리수  $r$ 로 수렴하는 유리수 수열이다.

\* 단조 유리수열을 택할 수도 있다.

$$f \text{는 연속이므로 } f(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = 1, \quad f \equiv 1.$$

$\neg. [-1, 1]$ 은 유계폐집합이므로 하이네-보렐 정리에 의해  $\mathbb{R}$ 에서 cpt이므로 폐부분집합  $S$ 는 cpt이다.  $g$ 는 연속이므로  $g(S)$ 은  $\mathbb{R}$ 에서 cpt이고, 하이네-보렐 정리에 의해  $g(S)$ 은 유계폐집합이다.

$\neg. \text{임의의 } x \in [-1, 1], 0 \leq |h(x) - h(0)| \leq \max \left\{ |x^2|, \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \right\} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0),$

조임정리에 의해  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0 = h(0)$ . 따라서  $h$ 는  $x=0$ 에서 연속이다.

30. ②

$g$ 는  $[a, b]$ 에서 미분가능하므로 최대최소 정리에 의해  $\forall x \in [a, b], g(x) \leq g(c)$  (최댓값)인  $c \in [a, b]$  있다.

이때  $g(x) - g(c) \leq 0$ 인  $c \in (a, b)$ 임을 보이자.

$$c=a \text{이면 } 0 < g'(a) = f'(a) - k = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \leq 0,$$

$$c=b \text{이면 } 0 > g'(b) = f'(b) - k = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{g(x) - g(b)}{x - b} \geq 0.$$

두 경우 각각 모순,  $a \in \text{int}[a, b] = (a, b)$ .

따라서  $g$ 는  $(a, b)$ 에서 최댓값  $g(c)$ 를 갖고,  $x=c$ 에서 미분가능하므로 내부 극값 정리에 의해  $0 = g'(c) = f'(c) - k, f'(c) = k$ 이다.

\* 다르부 정리:  $[a, b]$ 에서 미분가능 함수  $f, f'(a) < k < f'(b)$   
 $\Rightarrow f'(c) = k$ 인  $c \in (a, b)$  있다.

\* 내부 극값 정리:  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, a \in \text{int}D$ 에서 극값,  $x=a$ 에서 미분가능  
 $\Rightarrow f'(a) = 0$ .

\* 최대최소 정리:  $f$ 가 컴팩트 집합에서 연속이면 최댓값과 최솟값 있다.

\* 역함수의 미분: 구간  $I$ 에서 순증가(순감소), 연속함수  $f$ 가  $x=a$ 에서 미분 가능하고  $f'(a) \neq 0$

$$\Rightarrow f^{-1} : f(I) \rightarrow \mathbb{R} \text{는 } y=f(a) \text{에서 미분가능, } (f^{-1})'(y)|_{y=f(a)} = \frac{1}{f'(a)}$$

31. ①

$\neg. \text{임의의 } \varepsilon > 0$ 에 대하여  $\delta = \varepsilon^2 > 0$ 라 하자.

$$|x-y| < \delta = \varepsilon^2, \quad x, y \in [a, b] \text{에 대하여 } |f(x) - f(y)| \leq |x-y|^{1/2} < \varepsilon \text{이므로}$$

$f$ 는  $[a, b]$ 에서 균등연속이다. 따라서  $f$ 는 리만적분가능하다.

$\neg. \text{불연속점이 가산 개일 때도 리만적분가능하다.}$

$\neg. \text{디리클레 함수 } f, f^2 \equiv 1 \text{은 리만적분가능하지만 } f \text{의 불연속점의 집합 } \mathbb{R} \text{은 측도(measure)가 } 0 \text{이 아니므로 리만적분가능하지 않다.}$

\* 리만적분에 대한 르벡 판정법

$[a, b]$ 에서 유계인 함수  $f$ 가 리만적분가능  
 $\Leftrightarrow f$ 의 불연속점 집합의 측도가 0(가산 개)

32. ⑤

$\neg. a_n = (-1)^n, |a_n| \neq 0$ 으로 수렴하면  $\{a_n\}$ 도 수렴.

$\neg. (-1)^n a_n$ 이 수렴한다고 하면  $\frac{(-1)^n a_n}{a_n} = (-1)^n$ 도 수렴하므로 모순, 0으로

수렴하면  $(-1)^n a_n$ 도 수렴.

$\neg. \varepsilon > 0, n \geq N$ 일 때  $|a_{2n} - \alpha| < \varepsilon, |a_{2n-1} - \alpha| < \varepsilon$ 되는  $N \in \mathbb{N}$ 택하자.  $m \geq N$ 일 때  $|a_m - \alpha| < \varepsilon$ .

33. ③

$\neg. \text{디리클레 함수}$

$\neg. \text{무리수일 때 } 0, \text{ 유리수일 때 } x \text{로 정의한 함수 } f(x)$ 는  $x=0$ 에서 연속이지만 임의의  $\delta > 0$ 에 대하여  $(0 - \delta, 0 + \delta)$ 에 속하는 한 점에서만 연속.

$\neg. \varepsilon = \frac{f(a)}{2} > 0, |x-a| < \delta$ 인  $x$ 일 때,  $|f(x) - f(a)| < \frac{f(a)}{2}$ 되는  $\delta > 0$ 있다.

$$\text{이때 } 0 < \frac{f(a)}{2} < f(x) < \frac{3f(a)}{2},$$

즉  $\forall x \in (a - \delta, a + \delta), f(x) > 0$ 인  $\delta > 0$ 있다.

34. ④

$$A = e^2, \quad B = e^{\sqrt{1+x^2}}|_{x=2} = e^{\sqrt{5}}, \quad C = e-1, \quad C < A < B.$$

35.  $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여 실수열  $\{x_n\}$ 을  $|f(x_{n+1})| \leq \frac{1}{5}|f(x_n)|$ 로 정의하자.

$$\text{이때 } |f(x_n)| \leq \frac{1}{5^{n-1}}|f(x_1)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

$I \supset \{x_n\}$ 은 유계이므로 볼자노-바이어슈트라스 정리에 의해  $c \in I$ 로 수렴하는 부분수열  $\{x_{n_k}\}$  있다.

$f$ 는  $I$ 에서 연속이므로  $\lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_{n_k})| = f(c) = 0$ .

$$36. f(x) = 3x - \frac{5}{2}, \quad a = -\frac{5}{4}$$

$f$ 는 다행함수이므로

$\mathbb{R}$ 의 임의의 폐구간에 대해 미적분학의 기본정리를 적용할 수 있다.

$$x^2 \int_1^{x^2} f(t)dt - \int_1^{x^2} tf(t)dt = \frac{1}{2}x^6 + ax^4 + x^2 + a + 1.$$

양변  $x$ 에 관하여 미분하면

$$2x \int_1^{x^2} f(t)dt + x^2 \cdot 2xf(x^2) - 2x \cdot x^2 f(x^2) \text{에서}$$

$$2x \int_1^{x^2} f(t)dt = 3x^5 + 4ax^3 + 2x, \quad \int_1^{x^2} f(t)dt = \frac{3}{2}x^4 + 2ax^2 + 1.$$

양변  $x$ 에 관하여 미분하면  $2xf(x^2) = 6x^3 + 4ax, f(x^2) = 3x^2 + 2a$ ,

$$f(x) = 3x + 2a. \quad \text{주어진 식에 } x=1 \text{ 대입, } a = -\frac{5}{4}.$$

$$\text{그러므로 } f(x) = 3x - \frac{5}{2}.$$

\* 다른 풀이

$x^2 = u$ 라 치환하면 주어진 관계식은

$$u \int_1^u f(t)dt - \int_1^u tf(t)dt = \frac{1}{2}u^3 + au^2 + u + a + 1.$$

$$u=1 \text{ 대입, } a = -\frac{5}{4}.$$

$$\text{양변 } u \text{에 관하여 미분하면 } \int_1^u f(t)dt = \frac{3}{2}u^2 - \frac{5}{2},$$

$$\text{한 번 더 미분하면 } f(u) = 3u + 2a, \quad f(x) = 3x - \frac{5}{2}.$$

37.  $x=y$ 일 때 주어진 식이 성립한다. 일반성을 잃지 않고  $x < y$ 라 하자.

$f(t) = \sin t$ 는  $[x, y]$ 에서 연속이고  $(x, y)$ 에서 미분가능.

평균값 정리에 의해  $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c)$ 인  $c \in (x, y)$  있다.

$$|f'(t)| = |\cos t| \leq 1 \text{이므로 } \left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right| = |f'(c)| \leq 1 \text{에서}$$

$$|\sin x - \sin y| \leq |x-y|.$$

\* 코시의 평균값 정리

$f, g: [a, b]$ 에서 연속,  $(a, b)$ 에서 미분가능할 때

$$\Rightarrow g'(c)[f(b)-f(a)] = f'(c)[g(b)-g(a)]$$

\*  $\frac{g'(c)}{f'(c)} = \frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}$  라 이해하고 모순 안되게 쓰면 된다.

38. 최대최소정리에 의해  $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$ 되는  $x_m, x_M \in [0, 1]$  있다.

$f(x_m), f(x), f(x_M), x^n$ 은  $[0, 1]$ 에서 연속이므로 리만적분가능하다.

$$\frac{1}{n+1}f(x_m) \leq \int_0^1 f(x)x^n dx \leq \frac{1}{n+1}f(x_M) \text{에서}$$

$$f(x_m) \leq (n+1) \int_0^1 f(x)x^n dx \leq f(x_M) \text{이므로}$$

중간값 정리에 의해 문제의 식을 만족하는  $c \in [0, 1]$  있다.

39. 미분가능

$$\frac{d}{dx}(x^2+1) \Big|_{x=0} = 0 = \frac{d}{dx}(1) \Big|_{x=0} \text{이므로 } f'(0) = 0 \text{일 것으로 예상할 수 있다.}$$

$$x \neq 0 \text{인 } x \in \mathbb{R} \text{에 대하여 } \left| \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \right| \leq \max \left\{ \left| \frac{x^2}{x} \right|, |0| \right\} = |x| \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0).$$

조임 정리에 의해  $f'(0) = 0$ .

\* Caratheodory 정리

$f$ 가  $x=a$ 에서 미분 가능

$\Leftrightarrow x=a$ 에서 연속인 함수  $F$ 가 존재해서  $f(x)-f(a) = F(x)(x-a)$

$$40. \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 4$$

극한을  $\alpha$ 라 하면  $\alpha^3 = 6\alpha^2 - 8\alpha$ 에서  $\alpha = 0, 2, 4$  중 단 하나이다.

주어진 실수열은 보통위상공간  $\mathbb{R}$ 에서 유계 증가수열일 것이므로  $\alpha = 4$ 일 것이라 추론할 수 있다.

$$\textcircled{1} \quad \{x_n\}: \text{유계}, 3 \leq x_n \leq 4$$

$n=1$  일 때  $3 \leq x_1 = 3 \leq 4, n=k$  일 때  $3 \leq x_k \leq 4$ 라 가정하자.

$$27 \leq 30 \leq x_{k+1}^3 = 6x_k^2 - 8x_k \leq 64, 3 \leq x_{k+1} \leq 4$$

$n \in \mathbb{N}$ 에 대하여  $3 \leq x_n \leq 4$ 이다.

$$\textcircled{2} \quad \{x_n\}: \text{증가수열}$$

$$x_{n+1}^3 - x_n^3 = -x_n(x_n-2)(x_n-4) \geq 0, x_{n+1} \geq x_n.$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 4$$

$\{x_n\}$ 은 위로 유계인 증가수열이므로 단조수렴정리에 의해  $\mathbb{R}$ 에서 수렴.

$$\alpha^3 = 6\alpha^2 - 8\alpha \text{에서 } \alpha = 4.$$

$$41. |f(x)-f(1)| \leq \max\{|x-1|, |x^2-1|\} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 1)$$

이므로  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 1, f$ 는  $x=1$ 에서 연속.

$[0, 2]$ 에서  $f$ 가 리만적분가능하다고 하자.

$$\overline{\int_0^2 f(x)dx} = \int_0^2 f(x)dx = \underline{\int_0^2 f(x)dx} \text{이다.}$$

$$\overline{\int_0^2 f(x)dx} = \frac{1}{2} + \frac{7}{3} \neq \underline{\int_0^2 f(x)dx} = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} \text{이므로 모순.}$$

이는  $f$ 가 리만적분가능하다고 가정한 데 모순이다.

따라서  $f$ 는 리만적분가능하지 않다.

\*  $[0, 2]$ 에서  $f$ 의 불연속점들의 집합  $A = [0, 1] \cup (1, 2]$ ,

$A$ 의 측도(measure)는 0이 아니므로 르벡 정리에 따라 리만적분 불능.

42. 최대최소 정리에 의해  $f$ 는  $[0, 1]$ 에서 유계이다.

하이네 정리에 의해  $f$ 는  $[0, 1]$ 에서 균등연속이다.

임의의  $\frac{\varepsilon}{1-0} > 0$ 에 대하여  $\delta > 0$ 가 존재해서

$|x-y| < \delta$ ,  $x, y \in [0, 1]$ 이면  $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$ .

아르카페데스 원리에 의해  $\frac{1-0}{N} < \delta$ 인  $N \in \mathbb{N}$  있다.

$n \geq N$ 일 때 분할  $P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}\right\}$ 라 하자.

$k=1, 2, \dots, n$ 일 때  $I_k = \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ 에서  $f$ 는 연속이므로

최대최소 정리에 의해 최댓값  $f(x_{M_k}) = M(f, I_k)$ , 최솟값  $f(x_{m_k}) = m(f, I_k)$  있다.

이제 상합과 하합의 차를 구하면

$$\begin{aligned} U(f, P_n) - L(f, P_n) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [M(f, I_k) - m(f, I_k)] \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [f(x_{M_k}) - f(x_{m_k})] \\ &< \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varepsilon = \frac{1}{n} \cdot n\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

따라서  $f$ 는  $[0, 1]$ 에서 리만적분 가능하고

$$L(f, P_n) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq U(f, P_n),$$

$$L(f, P_n) \leq \int_0^1 f dx = \int_0^1 f dx = \overline{\int_0^1 f dx} \leq U(f, P_n).$$

그러므로  $n \geq N$ 일 때,  $\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(x) dx \right| \leq U(f, P_n) - L(f, P_n) < \varepsilon$ .

43.  $\varepsilon > 0$ ,  $p = (a, b)$ ,  $x = (x, y)$ 라 하자.

$d(x, p) < \delta$ 일 때,  $d(f(x), f(p)) < \varepsilon$ 이 되는  $\delta > 0$  찾자.

$$\begin{aligned} d(f(x), f(p)) &= d\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4} |\sqrt{3}(x-a)-(y-b)| + \frac{1}{4} |\sqrt{3}(x-a)+(y-b)| \\ &\leq \frac{\sqrt{3}}{2} (|x-a|+|y-b|) \text{이므로} \end{aligned}$$

$$\delta = \varepsilon \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\varepsilon}{\sqrt{3}} \text{으로 놓으면 } d(x, p) < \delta \text{일 때 } d(f(x), f(p)) < \varepsilon.$$

그러므로  $f$ 는  $\mathbb{R}^2$ 에서 연속함수이다.

\*  $(X, d)$ : 거리공간,  $A \subset X$

$f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$ 인  $f$ 는 연속이다.

44.  $2\sqrt{2}-1$

$\sqrt{1+x}$ ,  $\sqrt{x}$ 는 폐구간  $[0, 1]$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \dots + \sqrt{2n}}{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{k+1}}{\sum_{k=1}^n \sqrt{k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1+\frac{k}{n}}}{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}}} \\ &= \frac{\int_0^1 \sqrt{1+x} dx}{\int_0^1 \sqrt{x} dx} = 2\sqrt{2}-1. \end{aligned}$$

45.

하위 영역	배점	예상정답율(%)	관련사고영역	출제자
해석(실해석)	5	60	적용	좌준수
출제 내용	M.Stoll. Introduction to Real Analysis. Addison-wesley.			
관련자료	pp.13-119			

주어진 조건  $L - \frac{1}{n} < f(x_n) < L + \frac{1}{n^2}$  ( $n=1, 2, \dots$ )과

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(L - \frac{1}{n}\right) = L, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(L + \frac{1}{n^2}\right) = L$$

이므로 샌드위치 정리(Sandwich Tehorem)에 의해

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$$

한편,  $x_n \in [a, b]$  ( $n=1, 2, \dots$ )이고  $[a, b]$ 가 폐집합이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c \in [a, b] \text{ 즉, } c \in [a, b]$$

$f$ 가 점  $c$ 에서 연속이므로  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(c)$ 이고

따라서,  $f(c) = L$ 이다.

#### \* 채점기준

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(L - \frac{1}{n}\right) = L$ 과  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(L + \frac{1}{n^2}\right) = L$ 을 쓰거나

샌드위치 정리를 언급하면 ..... 1점

(샌드위치 정리 대신에 Sandwich Theorem, Squeeze Principle, Squeeze Theorem, 조임정리, 협공의 원리라는 용어를 사용해도 무방... 1점)

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$ 을 언급하면 ..... 1점

$f$ 가  $c$ 에서 (또는  $[a, b]$ 에서) 연속이라는 서술과 함께

( $L =$ )  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(c)$ 라고 쓰면 ..... 3점

#### 46. 발산

$[1, \infty)$ 에서  $\sqrt{1+2\sin^2 x + x^2} \leq \sqrt{3+x^2}$ .

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{3+x^2}} = [\ln|x + \sqrt{3+x^2}|]_1^\infty = \infty.$$

비교판정에 의해 주어진 이상적분은 발산한다.

#### \* 다른 풀이

$[1, \infty)$ 에서  $\sqrt{1+2\sin^2 x + x^2} \leq \sqrt{x^2 + 2x^2 + x^2} = 2x$ .

$$\int_1^\infty \frac{dx}{2x} = \left[ \frac{1}{2} \ln x \right]_1^\infty = \infty \text{이므로 비교판정에 의해 주어진 이상적분은 발산.}$$

47. 조건과  $L$ 이 선형사상이므로  $L(h) = L(h \cdot 1) = h \cdot L(1)$ 이다.

따라서 주어진 극한은

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - h \cdot L(1)|}{|h|} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - L(1) \right| \\ &= |f'(a) - L(1)| \end{aligned}$$

따라서  $L(1) = f'(A)$  성립한다.

#### 48.

(1)  $f(t) = \log t$ 는  $[x, x+1]$ 에서 미분가능하다.

평균값 정리에 의해

$$\log(x+1) - \log x = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} = f'(c) = \frac{1}{c} \text{인 } x < c < x+1 \text{이다.}$$

이때  $\frac{1}{c} < \frac{1}{x}$ 이므로 주어진 명제가 성립한다.

$$(2) g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} = (x+1)\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \text{라 하면}$$

$g$ 는  $(0, \infty)$ 에서 미분가능하고

$$g'(x) = 1 \cdot \ln\frac{x+1}{x} + (x+1) \cdot \left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right] = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x} < 0 \text{이므로}$$

$g$ 는 감소함수이다.

$$\text{그러므로 } g(a) < g(b), \left(1 + \frac{1}{a}\right)^{a+1} < \left(1 + \frac{1}{b}\right)^{b+1}.$$

49. ②

$$\begin{aligned} 2 &= \int_1^2 1 \cdot \{f(x)\}^2 dx = x \cdot f^2(x) \Big|_1^2 - \int_1^2 x \cdot [2f(x)f'(x)] dx \\ &= -2 \int_1^2 xf(x)f'(x) dx, \text{ 구하는 값 } -1. \end{aligned}$$

50. ①

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln x} \text{ 라 하자.}$$

$$f'(x) = (1 - \ln x) \cdot \frac{f(x)}{x^2}, x < e \text{ 일 때 } f \text{는 증가, } x > e \text{ 일 때 } f \text{는 감소한다.}$$

따라서  $e$  값 주변의 자연수  $n$ 에서  $\sqrt[n]{n}$ 의 최댓값과 최솟값을 생각하자.

$n=1$  일 때  $\sqrt[1]{1}=1$ ,  $n=2$  일 때  $\sqrt[2]{2}=\sqrt{2}$ ,

$n=3$  일 때  $\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{3}$ ,  $n=4$  일 때  $\sqrt[4]{4}=\sqrt{2}$ .

$n=3$  일 때 최대,  $n=1$  일 때 최소이다.

따라서  $M=\sqrt[3]{3}$ ,  $m=1$ , 구하는  $\frac{M}{m}=\sqrt[3]{3}$ .

51. ①

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{\pi}{2} \text{ 이고 } x = \frac{\pi}{2} - t \text{ 로 치환하면}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin t}{\cos t + \sin t} (-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx \text{ 이므로}$$

$$\frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx.$$

52. ①

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{1}{x} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x^2 \ln \left( \cos \frac{1}{x} \right)}, e^x \text{ 는 } x = -\frac{1}{2} \text{ 에서 연속}$$

$$= e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos t)}{t^2}} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

53. ②

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (x : \text{유리수}) \\ 1 & (x : \text{무리수}) \end{cases} \text{ 라 하자.}$$

$$f \text{는 } x=0 \text{ 에서 연속이므로 } g(\lim_{x \rightarrow 0} f(x)) = g(f(0))$$

(a)  $f(0)$  가 유리수인 경우  $g(f(0))=0$

무리수 조밀성에 의해  $f(0)$ 로 수렴하는

무리수열  $\{f(x_n)\}$  을 택하면  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(f(x_n))=1$

(b)  $f(0)$  가 무리수인 경우  $g(f(0))=1$

유리수 조밀성에 의해  $f(0)$ 로 수렴하는

유리수열  $\{f(x_n)\}$  을 택하면  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(f(x_n))=0$ .

54. ③

$f(\mathbb{R}) = f([0, 2\pi])$ ,  $[0, 2\pi]$  에서 극값을 찾으면

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$$

이때  $f$ 의 최대, 최소는 1, -1. 구하는 값 2.

55. ①

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \alpha), \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \alpha,$$

$$f(x) = \sqrt{2} \left| \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) \right| \text{ 의 주기 } p = \pi.$$

$$s = \int_0^{5\pi} f(x) dx = \sqrt{2} \int_0^{5\pi} \left| \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) \right| dx = \sqrt{2} \times 5 \times \int_0^{\pi} \sin x dx = 10\sqrt{2}.$$

56. ③

로피탈 정리에 의해

$$\alpha = \frac{\sec^2(\tan_{49}x) \cdot \sec^2(\tan_{48}x) \cdot \dots \cdot \sec^2 x}{1} \Big|_{x=0} = 1,$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{1}{x-1} \ln x} = e^1 = e.$$

$$\therefore \alpha \beta = e.$$

57. ③

$$\log x = t \text{ 치환, } \frac{dx}{x} = dt. \int_1^{\infty} t^{-4} dt = \left[ -\frac{1}{3} t^{-3} \right]_1^{\infty} = \frac{1}{3}.$$

58. ①

$f'$ 이 연속이므로 미적분학의 기본정리를 적용하자.

$0 \leq x \leq 1$ 인  $x$ 에 대하여

$$\int_0^x f'(t) dt = f(x) - f(0) = f(x) \leq \int_0^x M dt = Mx.$$

$$1 = \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 M x dx = \frac{1}{2} M \text{에서 } M \geq 2.$$

59. ①

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 일 때 } |y| < \frac{\pi}{2} \text{ 에서 } y = \tan^{-1} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

$$y' = \frac{(2x)'}{1+(2x)^2} = \frac{2}{1+4x^2} \Big|_{x=\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \text{ 이므로 } \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{3} \right) \text{에서 법선의 방정식은}$$

$$y - \frac{\pi}{3} = -2 \left( x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right), y = -2x + \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}.$$

60. ④

$\ln x$ 는  $(0, \infty)$ 에서 연속이다.

$$f(n) = e^{\frac{1}{n} \ln [n(n+1) \cdots (2n-1)]} = e^{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln(n+k)} = e^{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left[ n \left( 1 + \frac{k}{n} \right) \right]} \ln n \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left( 1 + \frac{k}{n} \right).$$

$$\frac{f(n)}{n} = \frac{n \cdot e^{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left( 1 + \frac{k}{n} \right)}}{n} = e^{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left( 1 + \frac{k}{n} \right)} \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n} = e^{\int_1^2 \ln x dx} = e^{[x \ln x - x]_1^2} = e^{2 \ln 2 - 1} = \frac{4}{e}.$$

## 〈급수 · 합수열〉

1.

모든 자연수  $n$ 과 모든  $x \in [-L, L]$ 에 대하여

$$|f_n(x)| \leq \frac{|x^4 + \sqrt{n}x^3|}{n \cdot n} \leq \frac{L^4 + \sqrt{n}L^3}{n^2} \leq \frac{L^4 + L^3}{n^{3/2}},$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^4 + L^3}{n^{3/2}}$ 는  $p$ -급수 판정에 따라 수렴하므로

바이어슈트라스  $M$ -판정에 따라  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 는  $[-L, L]$ 에서 균등수렴.

실수  $a \in \mathbb{R}$ 과 하자.  $\sum_{k=1}^n f_k(x)$ 는  $x=a$ 에서 연속이다.

아르키메데스 원리에 따라  $0 \leq |a| < N$ 인  $N \in \mathbb{N}$  있다.

앞서 보인 결과로부터  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 는  $x=a$ 에서 연속이다.

그러므로  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 는  $\mathbb{R}$ 에서 연속이다.

2.

충분히 큰 자연수  $n$ 과 모든  $x \in [0, \infty)$ 에 대하여

$$|f_n(x)| \leq \max\left\{\frac{1}{n^2 \ln(2n)}, \frac{1}{n^2}\right\} = \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{은 수렴하므로}$$

바이어슈트라스  $M$ -판정에 따라  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 는  $[0, \infty)$ 에서 균등수렴.

$$a_n = \int_0^{\ln(2n)} f_n(x) dx = \frac{1}{2n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}.$$

3.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \int_0^1 (1-x^2)^{n+1} dx \\ &= 2(n+1) \int_0^1 x^2 (1-x^2)^n dx \quad (\text{부분적분}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2(n+1) \int_0^1 \{1-(1-x^2)\} (1-x^2)^n dx \\ &= 2(n+1) \int_0^1 (1-x^2)^n - (1-x^2)^{n+1} dx \\ &= 2(n+1)(a_n - a_{n+1}) \text{이므로} \end{aligned}$$

$$a_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} a_n, \quad f(n) = \frac{2n+2}{2n+3}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left[ \frac{(a_n)^\alpha}{(a_{n+1})^\alpha} - 1 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left[ \left( \frac{2n+3}{2n+2} \right)^\alpha - 1 \right] = \frac{1}{2} \cdot g'(1) = \frac{\alpha}{2} \text{이므로}$$

$$(g(x) = x^\alpha, \quad h_n = \frac{1}{2n+2})$$

라베 판정에 따라  $\alpha > 2$ 일 때  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^\alpha$ 이 수렴한다.

$$\alpha = 2 \text{인 경우, } a_n > \int_0^1 1-nx^2 dx > \int_0^{1/\sqrt{n}} 1-nx^2 dx = \frac{2}{3\sqrt{n}} \text{이므로}$$

$$a_n^2 > \frac{4}{3} \frac{1}{n}, \quad \sum \frac{1}{n} \text{은 발산하므로 비교판정에 따라 } \sum (a_n)^2 \text{도 발산.}$$

그러므로  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^\alpha$  수렴하는  $\alpha$ 의 범위는  $\alpha > 2$ .

4.

$$\left\| \frac{x}{1+e^{nx}} \right\|_{[0, \infty)} \leq \frac{(1/n)}{e^{n(1/n)}} = \frac{1}{en} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

$$[0, \infty) \text{에서 } x^k (e^{-kx} - e^{-(k+1)x}) \leq (xe^{-x})^k (1-e^{-x}) \leq \frac{1}{e^k},$$

$\sum \frac{1}{e^k} < 0$ 이므로 바이어슈트라스  $M$ -판정에 따라

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k (e^{-kx} - e^{-(k+1)x}) \text{는 균등수렴한다.}$$

그러므로  $\{f_n\}$ 는  $[0, \infty)$ 에서 균등수렴.

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \\ &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} x^n (e^{-nx} - e^{-(n+1)x}) dx \\ &= \int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^x - x} dx \\ &= [\ln(e^x - x)]_0^1 \\ &= \ln(e-1). \end{aligned}$$

$$5. f_n'(x) = nx^{n-1}(1-x)^{n^2-1}(1-(n+1)x), \quad \text{양 끝 점(경계) } f_n(0) = f_n(1) = 0,$$

$$M_n = f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} \text{이므로 } \sum_{n=1}^{\infty} M_n x^n \text{의 수렴반경 } e.$$

$$x \in [0, 1] \subset (-e, e) \text{에 대하여 } |f_n(x)| \leq M_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty \text{이므로}$$

바이어슈트라스  $M$ -판정에 따라  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 는  $[0, 1]$ 에서 균등수렴.

$$6. t = 1 + (\sin x)^{2n} \text{ 치환하면 } dt = 2n(\sin x)^{2n-1} \cos x dx,$$

$$a_n = \int_1^2 \frac{4}{nt} dt = \frac{4 \ln 2}{n} \text{이므로}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+2} = 4 \ln 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = 4 \ln 2 \cdot \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) = 3 \ln 2.$$

$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 에서  $\{f_n\}$ 는 연속이므로 리만적분 가능하다.

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 가  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 에서 균등수렴한다고 가정하면

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 는  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 에서 리만적분 가능하므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \ln 2}{n} \text{이며,}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \ln 2}{n}$ 는  $p$ -급수 판정에 의해 발산하므로 모순이다.

7.

자연수  $n$ 에 대하여  $f_n(x) = e^x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}$ 는  $[0, 1]$ 에서 미분가능하므로  
테일러 정리에 따라  $f_n(x) = \frac{e^{t_x}}{n!} x^n$  되는  $t_x$ 가  $0$ 과  $x$  사이에 존재한다.

$x \in [0, 1]$ 에 대하여  $|f_n(x)| \leq \frac{e}{n!}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e}{n!} = e(e-1)$ 이므로  
( $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e}{n!}$ 은 비판정에 의해 수렴하므로)

바이어슈트라스  $M$ -판정에 따라  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ 는  $[0, 1]$ 에서 균등수렴한다.

$n \geq 1$ 이면 미적분 기본정리에 따라  $f_n' = f_{n-1}$ . ( $\{f_n\}$ : 미분가능 함수열)

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(0) &= f_0(0) + 0 = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{n-1}(x) \text{는 } [0, 1] \text{에서 균등수렴하므로} \\ \frac{d}{dx} [f(x)] &= \frac{d}{dx} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x) \\ &= \frac{d}{dx} f_0'(x) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \\ &= e^x + \sum_{n=1}^{\infty} f_{n-1}(x) \\ &= e^x + f(x). \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx} (e^{-x} f(x)) = 1 \text{이므로 } e^{-x} f(x) = x + C, \quad f(0) = 1 \text{이므로 } f(x) = e^x(x+1).$$

(다른 설명)

$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ 는  $[0, 1]$ 에서 미분가능하고,  $g(0) = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x) = e^x + \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = e^x + g(x) \text{이므로 } g'(x)e^{-x} = 1 + g(x)e^{-x}. \\ \int_0^x g'(t)e^{-t} dt &= x + \int_0^x g(t)e^{-t} dt \\ &= x + [-g(t)e^{-t}]_0^x + \int_0^x g'(t)e^{-t} dt = x - g(x)e^{-x} + g(0) + \int_0^x g'(t)e^{-t} dt \text{이므로} \\ 0 &= x - g(x)e^{-x} + 1, \quad g(x) = e^x(x+1). \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} \|g_n(x) - x\|_{[0, 1]} &= \left\| \int_0^x \{(x-y)^n \sin^n(xy)\} dy \right\|_{[0, 1]} \\ &\leq \left\| \int_0^x (x-y)^n dy \right\|_{[0, 1]} \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \text{이므로} \end{aligned}$$

$[0, 1]$ 에서  $\{g_n\} \rightrightarrows x$ .

$\{g_n\}$ 는  $[0, 1]$ 에서 연속이므로 리만적분가능하다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g_n(x) dx = \int_0^1 g(x) dx = \frac{1}{2}.$$

$$9. x \neq 0 \text{일 때 } h(x) = \left[ \tan^{-1} \left( \frac{t}{x^2} \right) \right]_{t=0}^{t=1} = \tan^{-1} \left( \frac{1}{x^2} \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \tan^{-1} \left( \frac{1}{x^2} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

$\{h_n\}$ 은  $x=0$ 에서 연속이지만  $h$ 는  $x=0$ 에서 불연속이다.

만약,  $\{h_n\} \rightrightarrows h$ 이면  $h$ 는  $x=0$ 에서 연속이 되어야 하므로 모순이다.

따라서  $\{h_n\} \not\rightrightarrows h$ .

10. 1

$$\frac{1}{n} \left( 1 - \frac{1}{n} |x-2n| \right) = \frac{n-|x-2n|}{n^2} \text{이므로}$$

$$n-|x-2n| \leq 0 \text{일 때 } f_n(x) = 0,$$

$$n-|x-2n| \geq 0 \text{일 때 } f_n(x) = \frac{n-|x-2n|}{n^2} \text{이므로 } \int_0^{\infty} f_n = \int_n^{3n} f_n = 1.$$

각  $x \in [0, \infty)$ 에 대하여 아르키메데스 원리에 의해  $x < N$ 인  $N \in \mathbb{N}$  있다.

$n \geq N$ 일 때  $x \in [0, n]$ 이므로  $f_n(x) = 0$ .

$$\int_0^{\infty} (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n) = 0, \quad \text{구하는 값 } 1.$$

$$11. x=0 \text{일 때 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tan^{-1} \frac{x}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0.$$

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{n} \tan^{-1} \frac{x}{n} \right] = \frac{1}{n} \cdot \frac{1/n}{1+(x/n)^2} \leq \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} < \infty \text{이므로}$$

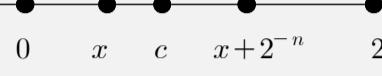
바이어슈트라스  $M$ -판정에 의해  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2} < \infty$ .

미분과 함수열에 관한 정리에 의해  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tan^{-1} \frac{x}{n}$ 는  $\mathbb{R}$ 에서 점별수렴하고,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{이므로 } f \text{는 } \mathbb{R} \text{에서 균등연속이다.}$$

12.  $x \in [0, 1]$ 일 때, 평균값정리에 의해

$$g_n(x) = f'(c) \text{인 } c \in x \text{와 } x+2^{-n} \text{ 사이에 있다.}$$



하이네 정리에 의해  $f'$ 은  $[0, 2]$ 에서 균등연속이므로

$$\varepsilon > 0 \text{에 대하여 } \delta > 0 \text{가 존재해서 } |x-y| < \delta \text{이면 } |f'(x) - f'(y)| < \varepsilon.$$

$$\text{한편 } (x+2^{-n}) - x = 2^{-n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \text{이므로}$$

주어진  $\delta > 0$ 에 대하여  $N \in \mathbb{N}$ 이 존재해서  $n \geq N$ 이면

$$|c-x| < |(x+2^{-n}) - x| < \delta \text{이므로}$$

$$|g_n(x) - f'(x)| = |f'(c) - f'(x)| < \varepsilon, \quad \text{즉 } \{g_n\} \rightrightarrows f'.$$

$f'$ 은  $[0, 1]$ 에서 연속이므로 미적분의 기본정리에 의해

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g_n = \int_0^1 f' = f(1) - f(0).$$

13.  $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여  $f(x_n) = 0$ 인 상수수열이 아닌  $\{x_n\} \subset (-1, 1)$ 은

볼자노-바이어슈트라스 정리에 의해  $c \in (-1, 1)$ 로 수렴하는 부분수열 있다.

이 수열의 부분수열로서 모든 자연수  $k$ 에 대해  $c \neq x_{n_k}$ 인  $\{x_{n_k}\}$ 를 택하면

$$f(x_{n_k}) = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c.$$

(가)에 의해  $r > 0$ 에 대하여  $x \in (c-r, c+r)$ 이면

$$\|R_n(x)\|_{(c-r, c+r)} \leq \frac{3(n+1)^2}{(n+1)!} \cdot (2r)^{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \text{이므로}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n.$$

(나)에 의해  $(c-r, c+r)$ 에서  $f(x) = 0$ .

$r$ 은 임의이므로  $\mathbb{R}$ 에서  $f=0$ , 모순이다.

그러므로 주어진 집합은 유한집합이다. (해의 개수는 유한하다.)

14.  $\{f_n\}$ 은  $[-1, 1]$ 에서 미분가능 함수열이다.

$$0 \in [-1, 1] \text{에 대하여 } \sum_{n=1}^{\infty} f_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0 < \infty,$$

$$|f_n'(x)| \leq \frac{e+1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e+1}{n^2} = \frac{(e+1)\pi^2}{6} < \infty \text{이므로}$$

바이어슈트라스  $M$ -판정에 의해  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ 는  $[-1, 1]$ 에서 균등수렴.

주어진 정리에 의해  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 는  $[-1, 1]$ 에서 미분가능한 함수로 균등수렴.

15.  $(-5, 5]$

$$a_n = \frac{(-1)^n x^n}{5^n \sqrt{n}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x}{5} \right| < 1, \quad |x| < 5.$$

$x=5$ 일 때 교대급수 판정에 의해 수렴.

$x=-5$ 일 때  $p$ -급수판정에 의해 발산.

구하는 수렴구간  $(-5, 5]$ .

16.  $\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} \int_0^1 n^2 x e^{-2nx} dx &= \left[ n^2 x e^{-2nx} \cdot \left( -\frac{1}{2n} \right) \right]_0^1 - \int_0^1 n^2 \left( -\frac{1}{2n} \right) e^{-2nx} dx \\ &= -\frac{n}{2} e^{-2n} + \int_0^1 \frac{n}{2} e^{-2nx} dx \\ &= -\frac{n}{2} e^{-2n} + \frac{n}{2} \left[ -\frac{1}{2n} e^{-2nx} \right]_0^1 \\ &= -\frac{n}{2} e^{-2n} + \frac{1}{4} (1 - e^{-2n}) \end{aligned}$$

구하는 값  $\frac{1}{4}$ .

17. ④

ㄱ. 양항급수로서 절대수렴하므로 주어진 급수도 수렴한다.

ㄴ.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n^2 + 1} \neq 0$ 이므로 일반항판정에 의해 발산한다.

$$\text{ㄷ. } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 < \infty$$

극한비교판정에 의해 주어진 급수는 수렴한다.

18. ④

ㄱ.  $f$ 는  $[0, 1]$ 에서 연속이므로 하이네정리에 의해 옳다.

ㄴ. 점별수렴성만으로는 항상 성립하지 않는다.

ㄷ. 유계폐구간에서 정의된 함수열  $\{f_n\}$ 이 정의역의 한 점에서 수렴(점별수렴)하고  $\{f_n'\}$ 이 균등수렴하면  $\{f_n\}$ 도 균등수렴한다.

19. (가)에 의해

$$\begin{aligned} 2\pi i &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{a \cos t + ib \sin t} (-a \sin t + ib \cos t) dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(b^2 - a^2) \cos t \sin t + iab}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt \text{에서} \end{aligned}$$

실수부와 허수부를 비교하면  $2\pi = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ab}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt$ 에서  $K(a, b) = \frac{1}{ab}$ .

(다)에 의해

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} s_n(x) dx &= \sum_{m=1}^n \frac{1}{2m^2} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(mx) dx \\ &= \sum_{m=1}^n \frac{1}{m^2} \int_0^\pi x \cos(mx) dx \\ &= \sum_{m=1}^n \frac{1}{m^2} \cdot \frac{(-1)^m - 1}{m^2}. \end{aligned}$$

$[-\pi, \pi]$ 에서  $\left| \frac{1}{2m^2} |x| \cos(mx) \right| \leq \frac{\pi}{2m^2}$ ,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi}{2m^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \zeta(2) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^3}{12} < \infty$$
이므로 (라)에 의해  $\{s_n\} \Rightarrow s$ .

(나)와 (마)에 의해

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} s(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} s_n(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^m - 1}{m^4} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^4} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{(2k-1)^4} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n^4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{(2n)^4} \\ &= -\frac{15}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \\ &= -\frac{15}{8} \cdot \zeta(4) = -\frac{\pi^4}{48}. \end{aligned}$$

20. ③

$$a_n = \frac{n!}{n^n} (x-3)^n, \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|x-3|}{e} < 1 \text{에서 } 3-e < x < 3+e.$$

구하는 개수 5.

21. ③

① 하이네 정리에 의해  $[0, 1]$ 에서 균등연속된다.

②  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^3 = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  (0으로 수렴 안하면 모순)이므로  $\{x_n\}$ 은  $\mathbb{R}$ 에서 코시 수열이다. 한편  $f$ 는  $x=0$ 에서 연속이므로  $\{f(x_n)\}$ 은  $f(0)$ 로 수렴 한다. 따라서  $\{f(x_n)\}$ 는 코시 수열이다.

③  $f(x) = e^x, x_n = -n$

④ 서로 다른 두 실수  $x, y$ 에 대하여 평균값 정리에 따라  $\left| \frac{f(x) - f(y)}{x-y} \right| = |f'(c)| \leq M$ 이므로  $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$ 인  $M > 0$  있다 (립쉬츠). 따라서 도함수가 유계이면 균등연속이다.

⑤  $\frac{1}{n}$ 은 단조 유계수열이므로 아벨 판정에 의해 옳다.

22. ⑤

ㄱ. 옳다.

ㄴ.  $f, g$ 가  $(0, 1)$ 에서 연속이므로 옳다.

ㄷ.  $(0, 1)$ 에서  $\{g_n\} \Rightarrow g$ 이므로  $\varepsilon > 0$ 에 대하여  $N \in \mathbb{N}$ 이 존재해서 임의의  $x \in (0, 1)$ 에 대하여  $|f_N(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ .

$g_N$ 은  $(0, 1)$ 에서 균등연속이므로  $\delta > 0$ 가 존재해서

$x, y \in (0, 1), |x-y| < \delta$ 면  $|f_N(x) - f_N(y)| < \varepsilon/3$ .

그러므로  $|x-y| < \delta, x, y \in (0, 1)$ 면

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

\* 연속확장정리

23.

(I)  $f(x) = p_3(x) + \frac{f^{(4)}(t_x)}{4!}(x-c)^4$  인  $t_x \in (c, x)$ 과  $c$ 사이에 있다.

가정에 의해  $f(x) = f(c) + \frac{f^{(4)}(t_x)}{4!}(x-c)^4$ .

$f^{(4)}$ 는 연속,  $f^{(4)}(c) > 0$ 이므로  $x \in (c-\delta, c+\delta)$ 일 때  $f^{(4)}(x) > 0$ 인  $\delta > 0$  있다.

$(c-\delta, c+\delta)$ 에서  $\frac{f^{(4)}(t_x)}{4!}(x-c)^4 > 0$ 이므로

$x \in (c-\delta, c+\delta)$ 일 때  $f(x) \geq f(c)$ .

그러므로  $f$ 는  $x=c$ 에서 극솟값을 갖는다.

(II)  $x_1, x_2 \in (a, b)$ 라 하자.

$0 \leq t \leq 1$ 인  $t \in \mathbb{R}$ 에 대하여  $L_t := (1-t)x_1 + tx_2 \in (a, b)$ 이므로

$f(x) = f(L_t) + f'(L_t) + \frac{f''(t_x)}{2!}(x-L_t)^2$ 인  $t_x \in (x_1, x_2)$ 과  $L_t$ 사이에 있다.

$x_1 - L_t = t(x_1 - x_2), x_2 - L_t = (t-1)(x_1 - x_2)$ 이므로

$$(1-t)f(x_1) + tf(x_2) = f(L_t) + (t-1)\frac{f''(t_x)}{2}(x_1 - x_2)^2.$$

$0 \leq t \leq 1$ 일 때  $-t^2 + t \geq 0$ 이고 가정에 의해  $\frac{f''(t_x)}{2}(x_1 - x_2)^2 \geq 0$ 이므로

$(1-t)f(x_1) + tf(x_2) \geq f(L_t)$ .

그러므로  $f$ 는  $(a, b)$ 에서 볼록함수이다.

(III)  $f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$ 인  $t_x \in (x, c)$ 과  $c$ 사이에 있다.

가정에 의해

$$\| f(x) - p_n(x) \|_{(a, b)} = \left\| \frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} \right\|_{(a, b)}$$

$$\leq \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot (b-a)^{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \text{이므로}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k.$$

24. ⑤

- ㄱ.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n^2}{1/n\sqrt{n^2+7}} = 1 < \infty$  이므로 극한비교판정에 의해 주어진 급수는 수렴한다.
- ㄴ. 양항 수열  $\left\{ \sin \frac{\pi}{\sqrt{n}} \right\}$ 은 0으로 수렴하고  $n \geq 4$  일 때 감소한다. 교대급수판정에 의해 주어진 급수는 수렴한다.
- ㄷ.  $a_n = \frac{2^n + 3^n}{4^n + 12^n} x^{2n}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x^2}{4} \right| < 1$ 에서  $|x| < 2$ , 수렴 반경 2.  
 $* \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{3}{12} |x^2| = \frac{1}{4} |x^2| < 1$ .

25. ④

- ㄱ.  $[0, 1]$ 에서  $|f_n(x)| \leq 2^{-n}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$  이므로 바이어슈트라스  $M$ -판정에 의해  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ 은 균등수렴.
- ㄴ.  $\sum_{k=1}^n f_k$ 은  $[0, 1] - \{r_k \mid k = 1, 2, \dots, n\}$ 에서 연속,  $\{f_n\} \Rightarrow f$  이므로  $f$ 는  $[0, 1] - \{r_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 에서 연속.
- ㄷ.  $\sum_{k=1}^n f_k$ 의 불연속점의 집합  $A$ 의 측도 0이므로  $\sum_{k=1}^n f_k \in \mathfrak{R}([0, 1])$ , 균등수렴하므로  $f \in \mathfrak{R}([0, 1])$ .  
 $\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sum_{k=1}^n f_k(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left[ \frac{1}{2^k} \right]_{x=r_k}^{x=1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-r_n}{2^n}$ .  
임의의  $n \in \mathbb{N}$ ,  $1 > r_n$  이므로  $f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ .  
따라서  $\int_0^1 f(x) dx = f(1)$  라 할 수 없다.

26.

- (I)  $x \in I$  대하여  $|x| < r < 1$ 인  $r > 0$ 을 택하자.  
 $\left\{ \sum_{k=1}^n f_k \right\}$ 가  $I$ 에서 점별수렴하고  $r \in I$  이므로  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k$ 가 수렴한다.  
[정리 1]에 의해  $|a_k r^k| = |a_k| r^k \leq M$  ( $M > 0$  있다).  
이때  $|a_k x^k| \leq \frac{M}{r^k}$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{M}{r^k}$ 는 수렴하므로 [정리 2]에 의해  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < \infty$ .
- (II)  $[-a, a]$ 에서  $|f_n(x)| \leq M|a^n|$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} M|a^n| < \infty$  이므로 [정리 6]에 의해  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ 은  $[-a, a]$ 에서  $f$ 로 균등수렴.
- (III)  $I$ 에서  $f_n(x) = a_n x^n$ 은 미분가능,  $f_n'(x) = n a_n x^{n-1}$ .  
[정리 3]에 의해  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ 은  $I$ 에서  $g \in \mathbb{R}^I$ 로 점별수렴한다.  
 $c \in I$ 에 대하여  $|c| < a < 1$ 인  $a$  택하자.  $x \in (-a, a) \subset I$  일 때, [정리 4]에 의해 다음 식을 만족하는  $t$ 가  $x$ 와  $c$  사이에 있으며,  $t \in (-a, a)$  이므로
$$\begin{aligned} |g(x) - g(c)| &\leq \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| |x^{n-1} - c^{n-1}| \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \cdot ((n-1) \cdot |t|^{n-2} \cdot |x-c|) \\ &\leq \left( \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n| \cdot a^{n-2} \right) \cdot |x-c|. \end{aligned}$$
[정리 3]에 의해  $\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$ 은  $I$ 에서 수렴하므로  $\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)|a_n| a^{n-2} = L > 0$ ,  $|g(x) - g(c)| \leq L|x-c|$  (립쉬츠) 이므로  $g$ 는  $x=c \in I$ 에서 연속, 따라서  $g = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 은  $I$ 에서 연속.  
[정리 5]에 의해  $G(x) = \int_0^x g(t) dt$  라 할 때  $G' = g$ .  
 $\int_0^x \left( \sum_{k=1}^n k a_k t^{k-1} \right) dt = \sum_{k=1}^n a_k x^k$  이므로  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x \left( \sum_{k=1}^n k a_k t^{k-1} \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ .  

$$\left| G(x) - \int_0^x \left( \sum_{k=1}^n k a_k t^{k-1} \right) dt \right| \leq \int_0^x \sum_{k=n+1}^{\infty} k a_k |x|^{k-1} dt = \sum_{k=n+1}^{\infty} k a_k |x|^k.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n |x|^n < \infty$$
 이므로  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} k a_k |x|^k = 0$ .  
조임정리에 의해  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| G(x) - \int_0^x \left( \sum_{k=1}^n k a_k t^{k-1} \right) dt \right| = 0$  이므로  $G(x) = f(x)$ ,  $g = G' = f'$ .

27. ④

ㄱ.  $\|f_n - 0\|_{[0, \infty)} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) 이므로  $\{f_n\} \rightharpoonup 0$ ,

[0,  $\infty$ )에서  $\frac{e^{-kx}}{k^3} \leq \frac{1}{k^3}$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} = \zeta(3) < \infty$  이므로

바이어슈트라스 M-판정에 의해  $\{g_n\}$ 은 균등수렴.

ㄴ.  $n \rightarrow \infty$  일 때,

$$\int_0^\infty f_n = \int_0^n \frac{x}{n^2} dx + \int_n^\infty 0 dx \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$\neq \int_0^\infty f.$$

ㄷ.  $g_n(0) \rightarrow \zeta(3)$ ,  $\left| (-k) \cdot \frac{e^{-kx}}{k^3} \right| \leq \frac{1}{k^2}$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$  이므로 바이어슈트라스 M-판정에 의해  $\{g_n'\}$ 은 균등수렴한다.

그러므로 함수열과 미분에 관한 정리에 의해  $\{g_n\}$ 은  $g$ 로 균등수렴하고,  $\{g_n'\}$ 은  $g'$ 으로 점별수렴. (유계폐구간에서는 균등수렴한다.)

28. ④

\* 리만 제타 함수  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ .

ㄱ.  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{1}{x^2 + k^3} \leq \frac{1}{k^3}$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} = \zeta(3) < \infty$ ,

바이어슈트라스 M-판정에 의해  $\{f_n\}$ 은 균등수렴.

ㄴ.  $\{f_n\}$ 은 균등수렴하는 연속함수열이므로 옳다.

ㄷ.  $\{g_n\}$ 이 균등수렴하면 함수열  $\left\{ \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{x} \right\}$ 은  $\mathbb{R} - \{0\}$ 에서 0으로 균등수렴.

$\|n^{-2}x^{-1}\|_{\mathbb{R} - \{0\}} = \infty$  이므로 모순.  $\{g_n\}$ 은 균등수렴하지는 않는다.

ㄹ.  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \frac{1}{x} \cdot \zeta(2) = \frac{1}{x} \cdot \frac{\pi^2}{6}$  은  $\mathbb{R} - \{0\}$ 에서 연속.

29. ④

$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$ , 수렴반경 1 이므로  $|x| < 1$ 에서 항별 미분가능.

$-(1+x)^{-2} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (-1)^n x^{n-1}$ ,  $x \cdot (1+x)^{-2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^{n+1} x^n$ .

\* 멱급수(거듭제곱급수, power series) 성질

- ① 수렴반경 R이면  $(-R, R)$ 에서 연속이고, 항별 미분, 항별 적분가능하다.  
 ② (아벨정리) 수렴구간(반경) 내 컴팩트 집합 K에서 균등수렴한다. 특히,  
 수렴반경 R일 때  $[R, R]$ 에서 균등수렴할 필요충분조건은  $f(R), f(-R)$   
 이 존재

③  $\sum_n a_n x^n, \sum_n b_n x^n$ 의 수렴반경  $R_1, R_2$ ,

$R = \min\{R_1, R_2\}$  일 때  $|x| < R$ 에서 다음이 성립.

㉠  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$

㉡  $\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k} \right) x^n \right]$

30. ①

①  $x = 0, 1$  일 때  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ ,

$0 < x < 1$  일 때  $0 < 1 - x^2 < 1$  이며

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} nx(1-x^2)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{(1/x^2)^n \ln(1/x^2)} = 0.$$

따라서  $\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{2(n+1)} [(1-x^2)^{n+1}]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

②  $\mathfrak{R}([0, 1])$ 의 함수열  $\{f_n\} \rightharpoonup 0$ 이므로 옳다.

③ 균등수렴하지는 않지만 옳다.

④  $\mathfrak{R}([0, 1])$ 의 함수열  $\{f_n\} \rightharpoonup 0$ 이므로 옳다.

⑤ 균등수렴하지는 않지만 옳다.

31. 극한값은 존재하지 않는다.

$x < 0$  일 때  $(x^2)^{\frac{5}{2}} = -x^5$ ,  $x > 0$  일 때  $(x^2)^{\frac{5}{2}} = x^5$ .

$$\frac{\left[ \sin x - x + \frac{x^3}{6} \right]}{(x^2)^{5/2}} = \frac{x^5}{|x|^5} \left[ \frac{1}{5!} - \frac{x^2}{7!} + \frac{x^4}{9!} - \frac{x^6}{11!} + \dots \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{5}{2}} = 1 \text{ 이므로 주어진 극한의 좌극한은 } -\frac{1}{5!}, \text{ 우극한은 } +\frac{1}{5!}.$$

그러므로 주어진 극한값은 존재하지 않는다.

32. 단조감소 양항 수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 이 수렴  $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$$a_n = \frac{(2n-1)!}{(2^n \cdot n!)^2} \text{은 양항 수열이다. } 0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4n^2 + 2n}{4n^2 + 8n + 4} < 1 \text{ 이므로}$$

$\{a_n\}$ 은 단조감소,  $0 < a_n \leq \frac{1}{2n} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) (조임정리)

교대급수 판정에 의해 주어진 급수는 수렴한다.

33.  $f$ 는  $C^\infty$ 급 함수이므로 테일러 정리에 의해

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!} x^{n+1} \text{인 } t_x \in (0, x) \text{ 사이에 있다.}$$

$$f(0) = 0, f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)! (1+x)^{-n} \Big|_{x=0} = (-1)^{n-1} (n-1)! \text{ 이므로}$$

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k.$$

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+1} (1+t_x)^{-n-1},$$

$$\|f_n(x) - f(x)\|_{[0, 1]} = \|R_n(x) - 0\|_{[0, 1]} \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \text{ ( $n \rightarrow \infty$ ) 이므로}$$

$[0, 1]$ 에서  $f_n(x) \rightharpoonup f(x)$ .

34.  $0 \leq x < 1$  일 때  $f(x) = 0$ ,  $x = 1$  일 때  $f(x) = 1$ ,

$$1 < x \leq 2 \text{ 일 때 } f(x) = \frac{3}{2}.$$

$\{f_n\}$ 은  $[0, 2]$ 에서 연속함수열이다. 만약  $\{f_n\} \rightharpoonup f$ 이면  $f$ 도 연속이다.

$f$ 는  $x = 1$ 에서 불연속이므로  $\{f_n\} \not\rightharpoonup f$ .

35. 수렴

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{(n+1)!}{(n+2)^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^n}{n!} \right] = \frac{1}{e} < 1 \text{ 이므로}$$

비판정에 의해 주어진 급수는 수렴한다.

### 36. \* 출제오류

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \infty \neq 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x).$$

$f$ 는  $x = 0$ 에서 불연속이므로 미분가능하지도 않으며,  $n$ 번 미분가능하지도 않다.

그러므로 테일러급수도 존재하지 않으며 (1)의 결과를 근거로 실함수와 복소함수의 미분가능성이 갖는 특징의 차이도 무엇인지 알 수 없다.

\*  $x = 0$  일 때 0,  $x \neq 0$  일 때  $e^{-\frac{1}{x^2}}$  으로 정의한 함수  $g(x)$ 에 대하여  $g^{(n)}(0) = 0$  이며 테일러급수 0이다.

37.

$$(1) \text{ 임의의 } x \in \mathbb{R} \text{에 대하여 } |2^{-n} \cos(3^n x)| \leq 2^{-n}, \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = \frac{1}{1-2^{-1}} = 2.$$

바이어슈트라스 M-판정에 의해  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(3^n x)$ 는  $\mathbb{R}$ 에서 균등수렴.

$$(2) \sum_{k=0}^n 2^{-k} \cos(3^k x) \in \mathfrak{R}(\mathbb{R}) \text{이므로 } f \in \mathfrak{R}(\mathbb{R}).$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^n 2^{-k} \cos(3^k x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=0}^n 2^{-k} \cdot \int_0^{2\pi} \cos(3^k x) dx \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=0}^n 6^{-k} [\sin(3^k x)]_0^{2\pi} \right] = 0. \end{aligned}$$

38.

$$(1) x=0, 1일 때 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0,$$

$$\begin{aligned} 0 < x < 1일 때 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1-x)nx^n = (1-x) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(1/x)^n} \\ &= (1-x) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1/x)^n \ln(1/x)} = 0. \end{aligned}$$

그러므로  $[0, 1]$ 에서  $f(x) = 0$

$$(2) \|f_n - f\|_{[0, 1]} = f_n(n/n+1) = (1+1/n)^{-n-1} \rightarrow e^{-1} \quad (n \rightarrow \infty).$$

$\therefore \{f_n\} \not\rightarrow f$ .

$$39. \text{ 주어진 가정에 의해 임의의 다항식 } p(x) \text{에 대하여 } \int_0^1 f(x)p(x) dx = 0.$$

바이어슈트라스 균사정리에 의해

$f(x)$ 로 균등수렴하는 다항함수열  $\{p_n(x)\}$  있다.

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x)p_n(x) dx = \int_0^1 f(x)^2 dx, \quad f^2(\geq 0) \text{는 } [0, 1] \text{에서 연속이므로} \\ f^2 &\equiv 0, \quad f \equiv 0. \end{aligned}$$

40. 수렴

$$f(x) = \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}, \quad [1, \infty) \text{에서 } f \geq 0,$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} - e^{-\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{x} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) < 0, \quad f \text{는 감소함수} \end{aligned}$$

$\int_1^{\infty} f(x) dx = 2e^{-1} < \infty$ 이므로 적분판정에 의해 주어진 급수는 수렴한다.

41. ⊕

㉠  $\|f_n(x) - f(x)\|_{\mathbb{R}} = \infty$ , 균등수렴하지 않는다.

㉡  $\|f_n(x) - f(x)\|_{\mathbb{R}} = \infty$ , 균등수렴하지 않는다.

㉢  $\|f_n(x) - f(x)\|_{\mathbb{R}} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \quad \{f_n\} \rightharpoonup f$ .

42. ④

$$\textcircled{1} \quad f(x) = x$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = x$$

$$\textcircled{3} \quad f(x) = 1$$

④ 가정에 의해 임의의 다항식  $p(x)$ 에 대하여

$$\int_{-1}^1 f(x)p(x) dx = 0. \quad \text{바이어슈트라스 균사정리에 의해}$$

$f$ 로 균등수렴하는 다항함수열  $\{p_n(x)\}$  있다.

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 f(x)p_n(x) dx = \int_{-1}^1 f(x)^2 dx,$$

$f^2(\geq 0)$ 는  $[-1, 1]$ 에서 연속이므로  $f^2 \equiv 0, f \equiv 0$ .

43. ②

$t \in [0, 1]$ 에 대하여  $x$ 축 위에서  $a$ 에서  $b$ 를 잇는 선분  $ta + (1-t)b$ ,

$f(ta + (1-t)b)$ 는  $f$ 의  $x=a$ 에서  $x=b$ 까지의 함숫값,

$tf(a) + (1-t)f(b)$ 는  $f(a)$ 에서  $f(b)$ 를 잇는 선분이다.

$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$ 는  $f(a), f(b)$ 를 잇는 선분이

$f([a, b])$ 보다 윗쪽에 그려진다는 것이다. (아래로 볼록)

$f(x) = \sin x \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ 는 조건을 만족하지 않는다.

44. ④  $\frac{1}{4}$ 

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 4|x| < 1, \quad \text{수렴반경(구간) } \frac{1}{4}.$$

45. ④

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{은 } [1, \infty) \text{에서 감소, } f \geq 0, \quad f(n) = \frac{1}{1+n^2}.$$

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \tan^{-1} x \Big|_1^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} < \infty \text{이므로}$$

적분 판정법에 의해 주어진 급수는 수렴

$$\textcircled{2} \quad a_n = \frac{n!}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}, \quad b_n = \frac{1}{1+n^2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 < \infty \text{이므로}$$

극한비교판정에 의해  $\sum a_n, \sum b_n$ 은 동시에 수렴하거나 동시에 발산.

$\sum a_n$ 이 수렴하므로  $\sum b_n$ 도 수렴한다.

$$\textcircled{3} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{e^n}} = \frac{1}{e} < 1 \text{이므로 제곱근 판정에 의해 } \sum \frac{n}{e^n} \text{은 절대수렴한다.}$$

④ 코시 응집 판정 이용하자.

$$\left\{ \frac{\log n}{n} \right\}_{n=3}^{\infty} \text{은 감소하는 양항 수열이다.}$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log n}{n} \text{의 수렴성은 } \sum_{n=3}^{\infty} 2^n \cdot \frac{\log(2^n)}{2^n} = \sum_{n=3}^{\infty} n \log 2 \text{의 수렴성과 동치이다.}$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} n \log 2 \text{는 일반항판정에 의해 발산하므로 } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log n}{n} \text{는 발산한다.}$$

따라서 주어진 급수도 발산한다.

46. ①

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad 1+2+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\cdots+\frac{2^n}{n!}+\cdots=e^2.$$

[기타]

<미분방정식>

$$1. X(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^{-t} + \beta e^{5t} \\ -\alpha e^{-t} + 2\beta e^{5t} \end{pmatrix}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \text{ 라 하면 } x' = x + 2y, y' = 4x + 3y \text{ 에서 } y = \frac{x' - x}{2} \text{ 이므로}$$

$$x'' - 4x' - 5x = 0 \text{ 에서 특성방정식 } t^2 - 4t - 5 = 0, t = -1, 5.$$

$$\text{따라서 } x(t) = \alpha e^{-t} + \beta e^{5t}, y(t) = -\alpha e^{-t} + 2\beta e^{5t}.$$

$$\text{그러므로 } X(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^{-t} + \beta e^{5t} \\ -\alpha e^{-t} + 2\beta e^{5t} \end{pmatrix}.$$

$$2. y = \alpha e^{-x} + \beta e^{4x} - \frac{1}{5} x e^{-x}$$

$$y'' - 3y' - 4y = 0 \text{ 의 해 } y = e^{tx} \text{ 라 하면}$$

$$t^2 - 3t - 4 = 0 \text{ 에서 } t = -1, 4 \text{ 이므로 } y = e^{-x}, e^{4x}.$$

$$\text{따라서 일반해는 } y = \alpha e^{-x} + \beta e^{4x} \text{ 이다.}$$

$$y'' - 3y' - 4y = e^{-x} \text{ 의 특수해 } y = \gamma \cdot x e^{-x} \text{ 라 하면}$$

$$(-2\gamma + \gamma x) - 3(\gamma - \gamma x) - 4\gamma x = 1 \text{ 에서 } k = -\frac{1}{5}.$$

$$\text{그러므로 } y = \alpha e^{-x} + \beta e^{4x} - \frac{1}{5} x e^{-x}.$$

3.

학위 영역	배점	예상 정답율(%)	출제근거 (이유)
고등수학(미분방정식)	4	75	자작

$$y' = p \text{ 라 두면, } xp' + p = 0 \dots \dots \dots \text{ 1점}$$

$$\frac{p'}{p} = -\frac{1}{x} \text{ 에서 } \ln|p| = -\ln x + C$$

$$\therefore p = \frac{C_1}{x} \quad (C_1 = e^C) \dots \dots \dots \text{ 2점}$$

$$y'(1) = 2 \text{ 에서 } C_1 = 2 \dots \dots \dots \text{ 3점}$$

$$y' = \frac{2}{x} \text{ 에서 } y = 2\ln x + C_2$$

$$y(1) = 1 \text{ 에서 } C_2 = 1 \dots \dots \dots \text{ 4점}$$

(답)  $y = \ln x^2 + 1$  또는  $2\ln x + 1$

4. ④

5. ①

6. ②

7. ①