[전공내용학 기출문제 해설]

[정수론]

1.

$\gcd(21,66)=3\mid 45$이므로 $|A|=3$.

$1^{\frac{\varphi(151)}{\gcd(\varphi(151),3)}}\equiv 1 \pmod{151}$, $\gcd(\varphi(151),3)=3$이므로 $|B|=3$.

$|A|=3=|B\cup C|$이려면 $C\subset B$이어야 하므로

$|C|=\gcd(n,150)=1$ 또는 3이어야 한다.

$\gcd(n,150)=1$인 n의 개수 $\varphi(150)=40$.

$\gcd(n,150)=3$인 n의 개수 $\varphi(50)=20$이므로 구하는 값 60.

2.

$5^{\varphi(157)/2}=5^{78}\equiv -1\equiv 156 \pmod{157}$, $5^{\varphi(157)}\equiv 5^{156}\equiv 1 \pmod{157}$.

157과 서로소가 아닌 수는 주어진 합동식의 해가 되지 않는다.

157과 서로소인 $x\equiv 5^t \pmod{157}$라 쓸 수 있다.

$5^{6t}\equiv 5^{78} \pmod{157}$, $t\equiv 13 \pmod{26}$, $t\equiv 13, 39, \cdots, 143 \pmod{156}$.

따라서 A의 원소의 개수는 4.

$157-i\equiv -i \pmod{157}$이므로 $1\le i\le 155$인 i에 대하여

$\left(\frac{5^i}{157}\right)\left(\frac{i^3}{157}\right)\left(\frac{157-i}{157}\right)=\left(\frac{5^i}{157}\right)\left(\frac{i^4}{157}\right)\left(\frac{-1}{157}\right)=\left(\frac{5^i}{157}\right)$,

$5^i\in\{2, 3, \cdots, 156\}$, $5^i-1\in\{1, 2, \cdots, 155\}$이므로

$\sum_{i=1}^{155}\left\{\left(\frac{5^i}{157}\right)\left(\frac{i^3}{157}\right)\left(\frac{157-i}{157}\right)+\left(\frac{5^i-1}{157}\right)\right\}$

$=\sum_{i=1}^{155}\left\{\left(\frac{5^i}{157}\right)+\left(\frac{5^i-1}{157}\right)\right\}$

$=\sum_{k=2}^{156}\left(\frac{k}{157}\right)+\sum_{k=1}^{155}\left(\frac{k}{157}\right)$

$=\left[0-\left(\frac{1}{157}\right)\right]+\left[0-\left(\frac{156}{157}\right)\right]$

$=-2$.

3.

$\gcd(\varphi(p), a)=1=\gcd(\varphi(p), b)$이므로 $\gcd(\varphi(p), ab)=1$.

(법 $\varphi(p)$에 관한 곱셈 역원 a^*, b^*, $(ab)^*$있다.)

$|r^{ab}|=\dfrac{\varphi(p)}{\gcd(\varphi(p), ab)}=\varphi(p)$이므로 r^{ab}는 원시근.

$r^{ab}\equiv r^a \pmod{p}$ 또는 $r^{ab}\equiv r^b \pmod{p}$

$\Leftrightarrow$ $ab\equiv a \pmod{\varphi(p)}$ 또는 $ab\equiv b \pmod{\varphi(p)}$

$\Leftrightarrow$ $b\equiv 1 \pmod{\varphi(p)}$ 또는 $a\equiv 1 \pmod{\varphi(p)}$이므로

포함배제의 원리에 따라 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수 $2|X|-1$.

$p-1=2^k\cdot d$, $k\ge 1$, $\gcd(2,d)=1$라 할 때,

$15=2|X|-1$이려면 $|X|=8=\varphi(p-1)=2^{k-1}\varphi(d)$.

$k=1$일 때 $d=15$, $p=2^k\cdot d+1=31$,

$k=2$일 때 $d=5$, $p=21$,

$k=3$일 때 $d=3$, $p=25$,

$k=4$일 때 $d=1$, $p=17$.

그러므로 모든 $p=17$, 31.

4.

주어진 합동식은 $\begin{cases}(x+1)^2\equiv k+1 \pmod{3}\\(x-1)^2\equiv k+1 \pmod{25}\end{cases}$과 동치이다.

합동식 $(x+1)^2\equiv k+1 \pmod{3}$에 $x\equiv 0,1,2 \pmod{3}$을 대입하면

$-k, -k, 2-k\equiv 0 \pmod{3}$이므로 $k\equiv 0, 2 \pmod{3}$일 때 해가 존재한다.

$1^2\equiv 1$, $2^2\equiv 4$, $3^2\equiv 9$, $4^2\equiv 16$, $5^2\equiv 0$, $6^2\equiv 11$, $7^2\equiv 24$,

$8^2\equiv 14$, $9^2\equiv 6$, $10^2\equiv 0$, $11^2\equiv 21$, $12^2\equiv 19 \pmod{25}$이므로

$k+1\equiv 0$, 1, 4, 9, 11, 14, 16, 19, 21, 24,

즉 $k\equiv 24$, 0, 3, 8, 10, 13, 15, 18, 20, 23 (mod 25)일 때 해가 존재한다.

두 합동방정식의 해가 동시에 존재하는 $k=15$, 18, 20이므로

구하는 k의 값 11, 12, 13, 14, 16, 17, 19.

5.

$x^5\equiv 23 \pmod{35} \Leftrightarrow \begin{cases}x^5\equiv 3 \pmod{5}\\x^5\equiv 2 \pmod{7}\end{cases}$.

$x^5\equiv 3 \pmod{5}$의 해를 찾자.

$1^5\equiv 1$, $2^5\equiv 2$, $3^5\equiv 3$, $4^5\equiv 4 \pmod{5}$이므로 $x\equiv 3 \pmod{5}$.

$x^5\equiv 2 \pmod{7}$의 해를 찾자.

$1^5\equiv 1$, $2^5\equiv 4$, $3^5\equiv 5$, $4^5\equiv 2$, $5^5\equiv 3$, $6^5\equiv 6 \pmod{7}$이므로 $x\equiv 4 \pmod{7}$.

중국인의 나머지 정리에 의해 $x^5\equiv 23 \pmod{35}$의 해는

$x\equiv 3\cdot 7x_1+4\cdot 5x_2\equiv 18 \pmod{35}$

(단, $7x_1\equiv 1 \pmod{5}$, $5x_2\equiv 1 \pmod{7}$, $x_1\equiv -2 \pmod{5}$, $x_2\equiv 3 \pmod{7}$)

(다른 풀이)

3은 법 5와 법 7에 관한 원시근이다.

$5\mathrm{ind}_3x\equiv \mathrm{ind}_3 3\equiv 1 \pmod{4}$이므로 $x^5\equiv 3 \pmod{5}$의 해 $x\equiv 3 \pmod{5}$.

$5\mathrm{ind}_3x\equiv \mathrm{ind}_3 2\equiv 2 \pmod{6}$이므로 $x^5\equiv 2 \pmod{7}$의 해 $x\equiv 4 \pmod{7}$.

중국나머지정리에 따라 $x^5\equiv 23 \pmod{35}$의 해 $x\equiv 18 \pmod{35}$.

(다른 풀이)

$3^{\frac{\varphi(5)}{\gcd(5,\ \varphi(5))}}\equiv 3^4\equiv 1 \pmod{5}$이고 $3^5\equiv 3 \pmod{5}$이므로

$x^5\equiv 3 \pmod{5}$는 $\gcd(5, \varphi(5))=1$개의 해 $x\equiv 3 \pmod{5}$를 갖는다.

$2^{\frac{\varphi(7)}{\gcd(5,\ \varphi(7))}}\equiv 2^6\equiv 1 \pmod{7}$이므로 $\gcd(5, \varphi(7))=1$개의 해를 갖고,

그 해를 x_0라 하면 $\gcd(x_0, 7)=1$이므로

$x_0^5\equiv 2 \pmod{7} \Rightarrow 1\equiv x_0^6\equiv x_0\cdot x_0^5\equiv 2x_0 \pmod{7} \Rightarrow x_0\equiv 4 \pmod{7}$.

따라서 $x^5\equiv 2 \pmod{7}$의 해는 $x\equiv 4 \pmod{7}$이다.

중국인의 나머지 정리에 의해 구하는 값 $x=18$.

6.

61은 홀수 소수이므로 원시근 g있다. $x\equiv g^t \pmod{61}$라 하면

$(x^{10}-1)(x^{10}+x^5+1)(x^{36}-1)\equiv(x^5+1)(x^{15}-1)(x^{36}-1)$

$\equiv(g^{5t}+1)(g^{15t}-1)(g^{36t}-1)\equiv 0 \pmod{61}$

$\Leftrightarrow$ $g^{5t}\equiv -1\equiv g^{30} \pmod{61}$,

$g^{15t}\equiv 1\equiv g^{60} \pmod{61}$,

$g^{36t}\equiv 1\equiv g^{60} \pmod{61}$

$\Leftrightarrow$ $t\equiv 6$, 18, 30, 42, 54 (mod 60),

$t\equiv 0$, 4, 8, $\cdots$, 56 (mod 60),

$t\equiv 0$, 5, 10, $\cdots$, 55 (mod 60)이므로

해의 개수 $5+15+12-0-1-3=32-4=28$개.

7. $a=1$, $b=12(\ne -1)$, $x=77$

오일러 정리와 계산에 의해 $25^{99}\equiv 1 \pmod{19}$, $25^{99}\equiv -1 \pmod{13}$.

$\gcd(19,23)=1$이므로 주어진 합동식은 $\begin{cases}x\equiv 1 \pmod{19}\\x\equiv -1\equiv 12 \pmod{13}\end{cases}$와 동치.

$a=1$, $b=12$. 중국 나머지 정리에 의해

$x\equiv 1\cdot 13x_1+(-1)\cdot 19x_2\equiv 77 \pmod{247}$, 구하는 $x=77$.

(단, $13x_1\equiv 1 \pmod{19}$, $19x_2\equiv 1 \pmod{13}$)

8.

$a\in T_m$이면 $\gcd(a^{\varphi(8m)}, 8m)=\gcd(1, 8m)=1$이므로 $\gcd(a, 8m)=1$.

자연수 a일 때 $\gcd(a, 8m)=1$이면 오일러 정리에 의해 $a\in T_m$,

따라서 $|T_m|=\varphi(8m)$.

m이 2를 소인수로 갖는다고 하면

$m=2^k\cdot d$, $\gcd(2, d)=1$인 정수 $k\ge 1$, d있다.

$\varphi(8m)=2^{k+2}\varphi(d)$, $4\varphi(m)=2^{k+1}\varphi(d)$이므로 모순이다.

m이 2를 소인수로 갖지 않을 때 $\varphi(8m)=\varphi(8)\varphi(m)=4\varphi(m)$가 성립하므로

구하는 m의 개수는 100이하의 양의 홀수 개수 50이다.

9. 60

131과 서로 소 아닌 x는 합동식의 해가 되지 않는다. 131은 소수이므로 원시근 g를 갖고, 131과 서로 소인 x에 대하여

$x\equiv g^t$, $t\in\{1,2,\cdots,130=\varphi(131)\}$인 t있다.

주어진 합동식을 풀면 $x^5\equiv 1$ 또는 $x^n\equiv 1 \pmod{131}$이며,

$g^{5t}\equiv 1 \pmod{131}$, $t\equiv 0,\ 26,\ 52,\ 78,\ 104 \pmod{130}$, 5개 해 있다.

$g^{nt}\equiv 1 \pmod{131}$, $t\equiv 0 \ \left(\mathrm{mod}\ \dfrac{130}{d}\right)$, $d=\gcd(n,130)$개 해 있다.

문제의 조건을 만족하기 위해서는 우선 $d\le 5$여야 한다.

130의 표준분해 $130=2\times5\times13$이므로

① $d=1$인 경우

$t\equiv 0$, 즉 $x\equiv g^0\equiv 1$는 $x^5-1\equiv 0$의 해가 된다. 이때 n의 개수 $\varphi(130)=48$.

② $d=2$인 경우

$t\equiv 0,\ 65$, 즉 $x\equiv\pm1$이며, $x\equiv -1$은 $x^5-1\equiv 0$의 해가 되지 않으므로 해의 개수가 5보다 커지게 되어 조건을 만족하지 않는다.

③ $d=5$인 경우

$t\equiv 0,\ 26,\ \cdots,\ 104$이므로 $x^5-1\equiv 0$의 해와 같다. 이때 n의 개수 $\varphi(26)=12$.

(n은 $d=5=\gcd(n,130)$의 배수 $\Rightarrow 1=\gcd(n,26)$)

그러므로 구하는 n의 개수 60이다.

10. $\displaystyle\sum_{k=3}^{2014}\left(\frac{a_k}{2017}\right)=-4$

$1\le k\le 2016$인 k는 법 2017에 대하여 k^*를 가지며, 윌슨 정리에 의해

$a_k=k!\times(2017-k)!$

$$\begin{aligned}
&=k!\times(2017-k)(2017-k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\\
&=k!\cdot(2017-k)(2017-k-1)\cdots(2017-k+k-2016)\\
&\equiv k!(-k)(-k-1)(-k-2)\cdots(-2015)(-2016)\\
&\equiv k!(-1)^{1+k-2016}\cdot 2016\times 2015\times\cdots\times k\\
&\equiv k!\times(-1)^{k-1}2016!\cdot(k-1)^*(k-2)^*\cdots(k-(k-1))^*\\
&\equiv k(-1)^{k-1}(-1)\\
&\equiv k(-1)^k \pmod{2017}.
\end{aligned}$$

따라서 $\left(\dfrac{a_k}{2017}\right)=\left(\dfrac{k(-1)^k}{2017}\right)=\left(\dfrac{k}{2017}\right)$.

한편, 2017의 원시근 g와 각 $1\le k\le 2016$에 대하여

$k\equiv g^t \pmod{2017}$, $t\in\{1,2,\cdots,2016\}$인 t있다.

따라서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{2016}\left(\frac{a_k}{2017}\right)=\sum_{k=1}^{2016}\left(\frac{g}{2017}\right)^t=\sum_{t=1}^{2016}(-1)^t=0.$

(다른 설명)

법 2017에 대한 이차잉여와 이차비잉여는 각각 1008개씩 있으며

르장드르 기호의 값은 각각 1, -1이므로 $\displaystyle\sum_{k=1}^{2016}\left(\frac{k}{2017}\right)=0.$

그러므로 $\displaystyle\sum_{k=3}^{2014}\left(\frac{a_k}{2017}\right)=0-\left(\frac{1}{2017}\right)-\left(\frac{2}{2017}\right)-\left(\frac{2015}{2017}\right)-\left(\frac{2016}{2017}\right)=-4.$

11.

$\varphi(89)=88$이고, $23^{41n}\equiv 23^1 \pmod{89}$에서 $41n\equiv 1 \pmod{88}$이므로

$n\equiv 41^* \pmod{88}$.

유클리드 호제법에 의해 $15\times41-7\times88=-1$이므로

$41\times(-15)\equiv 1 \pmod{88}$, 즉 $n\equiv 73 \pmod{88}$

그러므로 구하는 $n=73$.

	41	88	
7	42	82	2
	-1	6	

	a	b	
7	$7b-14a$	$2a$	2
	-1	$b-2a$	

* 다른 설명: $\gcd(41,88)=1$, 오일러 정리에 의해

$41^{40}\equiv 1 \pmod{88}$이므로 $41^*\equiv 41^{39}$를 계산하자.

$41^2=1681\equiv -79\equiv 9 \pmod{88}$이므로

$$\begin{aligned}
41^{39}&\equiv 41\times 9^{19}\equiv 41\cdot 9\cdot 81^9\equiv 17\cdot(-7)^9\\
&\equiv -17\cdot 7\cdot 49^4\equiv -31\cdot 39^4\equiv -31\cdot 1521^2\\
&\equiv -31\times 63^2\equiv -31\times 97\equiv -31\times 9\equiv -264\\
&\equiv -15\equiv 73 \pmod{88}.
\end{aligned}$$

12.

5, 13, 31은 쌍마다 서로 소이다. $f(x)=x^2+2x+4$라 하면

법 5, 13, 31 각각에 대하여 $x\equiv 2$는 $f(x)\equiv 0$의 해가 되지 않는다.

$D=2^2-4\cdot1\cdot4=-12$이며, $\left(\dfrac{D}{5}\right)=-1$, $\left(\dfrac{D}{13}\right)=1$, $\left(\dfrac{D}{31}\right)=1$이므로

주어진 합동식은 법 5, 13, 31 각각에 대해 1개, 3개, 3개의 해를 갖는다.

그러므로 중국인의 나머지 정리에 의해

$x^3-8\equiv 0 \pmod{2015}$는 $\mathbb{Z}_{2015}$에 9개 해 있다.

13. 61

가정에 의해 $m^{18}\equiv 21 \pmod{100}$, $\gcd(m,10)=1$이므로 $\gcd(m,10^2)=1$.

오일러 정리에 의해 $m^{\varphi(100)}=m^{40}\equiv 1 \pmod{100}$

한편 $294=40\cdot6+18\cdot3$이므로

$m^{294}=(m^{40})^6\cdot(m^{18})^3\equiv 21^3\equiv 41\cdot 21=800+40+20+1\equiv 61 \pmod{100}$.

그러므로 m^{294}의 마지막 두 자리 수는 61.

14. ②

$50=2\times5^2$이므로 원시근을 갖고, $\varphi(50)=20$이다.

만약 x가 50과 서로 소가 아니면 $\gcd(x,50)\ne 1$이고

이때 $\gcd(x^{12},50)=\gcd(-9,50)=1$이 되어 모순이다.

따라서 주어진 합동식의 해는 50과 서로 소인 정수 중에서 찾을 수 있다.

(해는 기약잉여계 $\mathbb{Z}_{50}^*$에 있다.)

50과 서로 소인 x에 대하여 $x\equiv 3^t \pmod{50}$인 $t\in\{1,2,\cdots,20\}$ 있다.

$3^{12t}\equiv -9\equiv 3^{10}\cdot 3^2\equiv 3^{12} \pmod{50}$에서 $t\equiv 1,\ 6,\ 11,\ 16 \pmod{20}$이므로

$x\equiv 3^t\equiv\pm3,\ \pm3^6\equiv 3,\ 47,\ 29,\ 21 \pmod{50}$.

문제 상황에 맞는 해는 3, 21이므로 구하는 값 24.

15. ⑤ ㄱ, ㄷ

p는 홀수 소수이고 5, 11, 17은 쌍마다 서로 소이다.

가정에 의해 $x^2\equiv -2p \pmod{935}$의 해가 존재하므로

합동식 $x^2\equiv -2p$는 법 5, 11, 17 각각에 대해서 해 있다.

따라서 $1=\left(\dfrac{-2p}{5}\right)=\left(\dfrac{-2p}{11}\right)=\left(\dfrac{-2p}{17}\right)$.

한편 $\left(\dfrac{-2}{5}\right)=-1$, $\left(\dfrac{-2}{11}\right)=1=\left(\dfrac{-2}{17}\right)$이므로 $\left(\dfrac{p}{5}\right)=-1$, $\left(\dfrac{p}{11}\right)=1=\left(\dfrac{p}{17}\right)$이다.

ㄱ. $\left(\dfrac{-11}{p}\right)=\left(\dfrac{-1}{p}\right)\left(\dfrac{11}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}(-1)^{\frac{11-1}{2}\frac{p-1}{2}}\left(\dfrac{p}{11}\right)$

$=1$이므로 -11은 p의 이차잉여.

ㄴ. $\left(\dfrac{5}{p}\right)=(-1)^{\frac{5-1}{2}\frac{p-1}{2}}\left(\dfrac{p}{5}\right)=-1$이므로 5는 p의 이차비잉여.

ㄷ. $\left(\dfrac{17}{p}\right)=(-1)^{\frac{17-1}{2}\frac{p-1}{2}}\left(\dfrac{p}{17}\right)=1$이므로 17은 p의 이차잉여.

그러므로 답은 ㄱ, ㄷ.

16. ②

27은 홀수 소수 3의 거듭제곱이므로 원시근을 갖는데,

문제에 원시근 2가 주어져 있다.

주어진 가정으로부터 $16^n x_0\equiv x_0 \pmod{27}$에서

$\gcd(x_0,27)=1$이므로 양변에 x_0^*를 곱하면

$2^{4n}\equiv 1 \pmod{27}$, $4n\equiv 0 \pmod{18}$에서 $n\equiv 0 \pmod{9}$.

그러므로 최소의 $n=9$.

(오일러 정리에 의해 $1\equiv x_0^{\varphi(27)}\equiv x_0^{18}=x_0\cdot x_0^{17}$, $x_0^*\equiv x_0^{17}$.)

17. ②

ㄱ. 주어진 연립합동식이 해를 갖는다고 하자.

$x \equiv 4 \pmod{28} \Rightarrow x \equiv 0 \pmod{4}$,

$x \equiv 6 \pmod{36} \Rightarrow x \equiv 2 \pmod{4}$이므로 모순.

* $\gcd(28, 36) = 4$는 $6-4=2$를 나누지 않는다.

ㄴ. 정수해를 a라 하자. $a^4 \equiv -1 \pmod{p}$이므로

$a^8 \equiv 1 \pmod{p}$가 되어 $\mathrm{ord}_p a \mid 8$.

$a^4 \not\equiv 1 \pmod{p}$이므로 $\mathrm{ord}_p a \neq 1, 2, 4$.

따라서 $\mathrm{ord}_p a = 8$이다.

한편 $\gcd(a^4, p) = \gcd(p-1, p) = 1$이므로 $\gcd(a, p) = 1$.

오일러 정리에 의해 $a^{\varphi(p)} = a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, $\mathrm{ord}_p a = 8 \mid p-1$.

즉, $p-1 \equiv 0 \pmod{8}$.

ㄷ. 부정방정식의 해가 존재한다고 하면,

$x^2+2x+5 \equiv -4 \pmod{13}$의 해도 존재한다.

$2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = -32$, $\left(\dfrac{-32}{13}\right) = -1$이므로 모순.

18. ⑤

ㄱ. $p!+1$을 나누는 소수 q가 p보다 작다고 하면 가정에 의해 $q \mid p!+1$, $q \mid p!$이므로 $q \mid 1$이 되어 모순이다.

$(p!+1 \equiv 0 \pmod{q},\ p! \equiv 0 \pmod{q} \Rightarrow 1 \equiv 0 \pmod{q})$

그러므로 $p!+1$을 나누는 소수는 p보다 크다.

ㄴ. 윌슨 정리에 의해 $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$,

$\gcd(p-1, p) = 1$이므로 양변에 $(p-1)^*$을 곱하면

$(p-2)! \equiv 1 \pmod{p}$이다.

($p=2$여도 성립)

ㄷ. $\gcd(2p, 3) = 1$, $\varphi(2p) = p-1$이므로 $3^{\varphi(2p)} = 3^{p-1} \equiv 1 \pmod{2p}$ (오일러정리).

($p = 2, 3$일 때는 성립하지 않는다.)

19. ④

111의 표준분해는 $111 = 3 \times 37$이며 $\gcd(3, 37) = 1$.

주어진 합동식은 $\begin{cases} x^2 \equiv 1 \pmod{3} \\ x^2 \equiv -7 \pmod{37} \end{cases}$ 과 동치이며,

$x^2 \equiv 1 \pmod{3}$의 해는 $x \equiv \pm 1 \pmod{3}$.

$\left(\dfrac{-7}{37}\right) = (-1)^{\frac{37-1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{7-1}{2} \cdot \frac{37-1}{2}} \left(\dfrac{2}{7}\right)$

$= (-1)^{\frac{7^2-1}{8}} = 1$이므로

$x^2 \equiv -7 \pmod{37}$의 해는 법 37에 대하여 2개.

20. ①

ㄱ. $\gcd(7, 31) = 1 \mid 2$이므로 정수해가 존재한다. $(x = -13,\ y = 3)$

ㄴ. $\gcd(6, 32) = 2 \mid 22$이므로 주어진 합동식은 법 32에 대하여 2개해 있다.

ㄷ. $\gcd(17, 23) = 1$이고, $x^2+10x+20 \equiv 0 \pmod{17}$에서

$D = 10^2 - 4 \cdot 20 = 20$, $\left(\dfrac{D}{17}\right) = -1$이므로 해 없다.

그러므로 $x^2+10x+20 \equiv 0 \pmod{17 \cdot 23}$의 해도 존재하지 않는다.

21. ④

홀수 소수 29이며 1보다 크거나 같고 28보다 작거나 같은 정수 x에 대하여 $x \equiv 2^t \pmod{29}$인 $t \in \{1, 2, \cdots, 28\}$있다.

$2^{4t} \equiv 1 \pmod{29}$에서 $t \equiv 0,\ 7,\ 14,\ 21 \pmod{28}$.

따라서 $x \equiv 2^t \equiv 2^0,\ 2^7,\ 2^{14},\ 2^{21} \pmod{29}$

$\equiv \pm 1, \pm 12 \pmod{29}$

$\equiv 1,\ 28,\ 12,\ 17 \pmod{29}$,

문제 상황에 맞는 x는 1, 28, 12, 17이며, 이를 모두 곱한 값

$m = 1 \times 28 \times 12 \times 17$

$\equiv 2^0 \cdot 2^{14} \cdot 2^7 \cdot 2^{21} \equiv 2^{42} \equiv 2^{14} \pmod{29}$.

이때 $2^k \equiv 2^{14} \pmod{29}$에서 $2^{k-14} \equiv 1 \pmod{29}$, $k - 14 \equiv 0 \pmod{28}$,

구하는 최소의 양의 정수 $k = 14$. ($\mathrm{ord}_{29} 2 = \varphi(29) = 28$)

22. ③

ㄱ. $\gcd(a, b) = d \Rightarrow as + bt = d$인 정수 s, t가 존재,

(역명제는 항상 성립하지 않는다. $d=1$일 때 성립)

$ap + bq = 1$인 정수 p, q가 존재할 때 a와 b는 서로소.

ㄴ. 정수 $m (\geq 2)$, $2^m - 1$이 소수이면, m도 소수.

정수 $a (\geq 2)$, 양의 정수 m, n,

(1) $n \mid m$이면, $a^n - 1 \mid a^m - 1$.

(2) $(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m,n)} - 1$.

ㄷ. $110_{(25)} = 1 \times 25^2 + 1 \times 25^1 + 0 \times 25^0 = 650$이며,

$650 = 1 \times 5^4 + 1 \times 5^2$이므로 $110_{(25)} = 10100_{(5)}$.

23. ③

ㄱ. 19는 홀수 소수이므로 원시근을 갖는다.

ㄴ. $\varphi(8) = \varphi(2^3) = 4$의 약수 1, 2, 4에 대하여

$3^1 \equiv 3$, $3^2 \equiv 1$, $3^4 \equiv 1 \pmod{8}$이므로

$\mathrm{ord}_8 3 = 2 \neq 4 = \varphi(8)$이 되어 3은 8의 원시근이 아니다.

ㄷ. 양변에 $(g^j)^*$를 곱하면 $g^{i-j} \equiv 1 \equiv g^{\varphi(m)} \pmod{m}$이므로

$\mathrm{ord}_m g = \varphi(m) \mid i - j$, 즉 $i - j \equiv 0 \pmod{\varphi(m)}$.

24. ④

$a = 14$, $b = 32$에 대하여 유클리드 호제법 적용하자.

	14	32	
2	12	28	3
	2	4	

	a	b	
2	$3b-6a$	$2a$	3
	$7a-3b$	$b-2a$	

따라서 $32 \times (-3) + 14 \times 7 = 2$.

특수해 $(x_0, y_0) = (-3, 7)$, 일반해 $x = -3 + \dfrac{14}{2}t$, $y = 7 - \dfrac{32}{2}t$ $(t \in \mathbb{Z})$.

$(x, y) = (-3 + 7t, 7 - 16t)$, $t \in \mathbb{Z}$.

$t = 0$, 1에 대하여 $(x, y) = (-3, 7)$, $(4, -9)$이므로 보기 중에서 답은 10(④).

25. ③

① $\varphi(5) = 4$이고, 4의 약수는 1, 2, 4이다.

법 5에 대하여 $3^1 \equiv 3$, $3^2 \equiv -1$, $3^4 \equiv 1$,

$r = 4$.

② $\varphi(7) = 6$이며 6의 약수는 1, 2, 3, 6이다.

법 7에 대하여 $3^1 \equiv 3$, $3^2 \equiv 2$, $3^3 \equiv -1$, $3^6 \equiv 1$,

$s = 6$.

③ $\varphi(35) = \varphi(5)\varphi(7) = 24$이며,

24의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 12, 24이다.

법 35에 대하여 $3^1 \equiv 3$, $3^2 \equiv 9$, $3^3 \equiv 27$, $3^4 \equiv 11$,

$3^6 \equiv 11 \times 9 \equiv -6$,

$3^{12} \equiv 36 \equiv 1$, $3^{24} \equiv 1^2 \equiv 1$,

$t = 12$.

(다른 방법) $t = \mathrm{lcm}(4, 6) = 12$.

그러므로 구하는 $rst = 288$.

26. $\gcd(3,4,5)=1 \mid 2$이므로 정수해 (x,y,z)가 존재.
$w=3x+4y$로 놓으면, 주어진 방정식은 $w+5z=2$,
$1\times(-3)+5\times1=2$이므로 특수해 $(w_0,z_0)=(-3,1)$,
$(w,z)=(-3+5t,1-t)$, $t\in\mathbb{Z}$.
한편, $3x+4y=w$에서 $3\times(-w)+4\times w=w$이므로
특수해 $(x_0,y_0)=(-w,w)$,
$(x,y)=(-w+4s,w-3s)$, $s\in\mathbb{Z}$이므로
$(x,y,z)=(3-5t+4s,-3+5t-3s,1-t)$, s, $t\in\mathbb{Z}$.

(다른 풀이)
$3x+4y=2-5z$이고, $3\times(-1)+4\times1=1$이므로
$3\times(-1)(2-5z)+4\times1(2-5z)=2-5z$.
따라서 $x=-2+5s-4t$, $y=2-5s+3t$, $z=s$. (s, $t\in\mathbb{Z}$)

27.
주어진 합동식은 $x^2+y^2+z^2\equiv0 \pmod 4$와 동치이다.
임의의 정수 a일 때, $a^2\equiv0,1 \pmod 4$이므로 x^2, y^2, $z^2\equiv0 \pmod 4$.
따라서 x, y, $z\equiv0 \pmod 2$.

28. $a=802$
문제 상황을 합동식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{cases} x\equiv1 \pmod 9 \\ x\equiv2 \pmod{10} \\ x\equiv-1 \pmod{11} \end{cases}$$

9, 10, 11은 쌍마다 서로 소이다.
중국인의 나머지 정리에 의해
$x\equiv1\cdot110x_1+2\cdot99x_2+(-1)\cdot90x_3 \pmod{9\cdot10\cdot11}$
$\equiv-440-198+450$
$\equiv802 \pmod{990}$.
$(110x_1\equiv1 \pmod 9), 99x_2\equiv1 \pmod{10}), 90x_3\equiv1 \pmod{11}))$
그러므로 구하는 $a=802$.

29. 288
1008의 표준분해는 $1008=2^4\times3^2\times7$이므로
$\mathbb{Z}_{1008}^*=\varphi(1008)=\varphi(2^43^27)=\varphi(2^4)\varphi(3^2)\varphi(7)=8\cdot6\cdot6=288$.

30. (1) O (2) X
(1) $\left(\frac{97}{101}\right)=\left(\frac{-4}{101}\right)=\left(\frac{-1}{101}\right)\cdot\left(\frac{2^2}{101}\right)=(-1)^{\frac{101-1}{2}}=1$이므로
주어진 이차합동식은 해를 갖는다.

(2) $x^2+2x-28\equiv0 \pmod{89}$에서 $2^2-4\cdot1\cdot(-28)=116$,
$\left(\frac{116}{89}\right)=\left(\frac{27}{89}\right)=\left(\frac{3}{89}\right)=(-1)^{\frac{3-1}{2}\cdot\frac{89-1}{2}}\left(\frac{-1}{3}\right)=-1$.
그러므로 주어진 이차합동식은 해를 갖지 않는다.
* $D/4=29$라 할 때 $\left(\frac{D/4}{89}\right)=(-1)^{\frac{29-1}{2}\frac{89-1}{2}}\left(\frac{2}{29}\right)=-1$

31. ③
19는 홀수 소수이며, $\varphi(19)=18$이고, 18의 약수는 1, 2, 3, 6, 9, 18이다.
$k=1$, 2, 3, 6, 9, 18에 대하여 $9^k\equiv9$, 5, 7, 11, 1, 1 $\pmod{19}$
즉, $9^9\equiv1\equiv9^{18} \pmod{19}$이다. 보기 중에서는 $(9^9)^4\equiv9^{36}\equiv1^4\equiv1 \pmod{19}$.

(1) 정수 $m(\geq3)$에 대하여 $\mathbb{Z}_m^*=\{s_1,s_2,\cdots,s_{\phi(m)}\}$라 할 때,

$$s_1+s_2+\cdots+s_{\varphi(m)}=\frac{\varphi(m)}{2}m.$$

(2) 정수 $m(\geq3)$에 대하여 법 m에 관한 기약잉여계
$R=\{r_1,r_2,\cdots,r_{\varphi(m)}\}$에 대하여 $r_1+r_2+\cdots+r_{\varphi(m)}\equiv0 \pmod m$.
(3) p: 홀수소수, $(k,p-1)=1$인 양의 정수 k,

$$1^k+2^k+\cdots+(p-1)^k\equiv1+2+\cdots+(p-1)\equiv0 \pmod p$$

32. ③
월요일을 0, 화요일을 1, ⋯, 일요일을 6라 하고,
오늘의 요일을 T요일, 구하는 요일을 x요일이라 할 때,
$T+n^7\equiv4 \pmod 7$, $T+(n+2)^7\equiv x \pmod 7$.
$x\equiv4+(n+2)^7-n^7$ ($\because$ Fermat 정리)
$\equiv4+n^7+2^7-n^7\equiv4+1\cdot2=6 \pmod 7$
그러므로 구하는 요일은 일요일이다.

* Fermat의 정리: 소수 p
(1) 모든 정수 a에 대하여 $a^p\equiv a \pmod p$
(2) $1\leq r\leq p-1$일 때 $\binom{p}{r}\equiv0 \pmod p$
(3) $(a+b)^p=a^p+b^p \pmod p$
(4) $(a,p)=1$, $a^{p-1}\equiv1 \pmod p$
(5) $(a,p)=1$, $ax\equiv b \pmod p$의 해 $x\equiv a^{p-2}b \pmod p$
(6) $1^p+2^p+\cdots+(p-1)^p\equiv0 \pmod p$
(7) $1^{p-1}+2^{p-1}+\cdots+(p-1)^{p-1}\equiv-1 \pmod p$

33. ④
101은 소수이므로 윌슨 정리에 의해 $100!\equiv-1 \pmod{101}$.
그러므로 구하는 값은 100.

* Wilson의 정리
$(p-1)!=-1 \pmod p \Leftrightarrow p$: 소수

* 홀수 소수 p,
(1) $1^2\cdot3^2\cdot\cdots(p-4)^2(p-2)^2$
$\equiv2^2\cdot4^2\cdot\cdots\cdot(p-3)^2(p-1)^2 \pmod p$
$\equiv(-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod p$
(2) $1+2+\cdots+(p-2)+(p-1)\equiv0 \pmod p$
(3) $p\equiv1 \pmod 4$이면, $\left\{\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right\}^2=-1 \pmod p$
(4) $(p-2)!\equiv1 \pmod p$, $2\cdot(p-3)!\equiv-1 \pmod p$

34. ③

$\gcd(5^n, 7^n) = 1$이므로 $500! \times 200! \equiv 0 \pmod{35^n}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 500! \times 200! \equiv 0 \pmod{5^n} \\ 500! \times 200! \equiv 0 \pmod{7^n} \end{cases}$'

$5 < 7$이므로 7의 최대지수만 구하면 충분하다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{500}{7^n}\right] = \left[\frac{500}{7}\right] + \left[\frac{500}{7^2}\right] + \left[\frac{\left[\frac{500}{7^2}\right]}{7}\right] + 0 + 0 + \cdots$$

$$= 71 + 10 + 1 = 82,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{200}{7^n}\right] = \left[\frac{200}{7}\right] + \left[\frac{\left[\frac{200}{7}\right]}{7}\right] + 0 + 0 + \cdots$$

$$= 28 + 4 = 32.$$

그러므로 $500! \times 200!$을 나누는 35의 최대지수는 114.

* $[x] \le x < [x] + 1$, $\lceil x \rceil - 1 < x \le \lceil x \rceil$
  ① $[x+a] = [x] + a$, $[x] + [y] \le [x+y]$
  ② $[-x] = -[x]$, $[x][y] \le [xy]$

* 10!과 최소공배수 $[1, 2, \cdots, 10]$의 표준분해

10보다 크지 않은 모든 소수는 2, 3, 5, 7.

$\left[\frac{10}{2}\right] = 5$, $\left[\frac{10}{2^2}\right] = 2$, $\left[\frac{10}{2^3}\right] = 1$ (3회 계산)

$\left[\frac{10}{3}\right] = 3$, $\left[\frac{10}{3^2}\right] = 1$ (2회 계산)

$\left[\frac{10}{5}\right] = 2$, (1회 계산)

$\left[\frac{10}{7}\right] = 1$ (1회 계산)

$\therefore$ $10! = 2^{5+2+1} \cdot 3^{3+1} \cdot 5^2 \cdot 7^1 = 2^8 3^4 5^2 7$,

(전개했을 때 끝자리에 2개의 0이 있음)

$[1, 2, 3, \cdots, 10] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

35. ①

$\varphi(11) = 10$, $\gcd(11, 2) = 1 = \gcd(11, 14)$이므로

오일러 정리에 의해 $2^{10} \equiv 1 \equiv 14^{10} \pmod{11}$, $2^{10} \cdot 14^{10} \equiv 1 \pmod{11}$.

따라서 $2^{15}14^{10} + 2 \equiv 2^5 \cdot 1 + 2 \equiv 34 \equiv 1 \pmod{11}$.

그러므로 정수 $2^{15}14^{10} + 2$를 11로 나눈 나머지는 1.

36. ②

$\gcd(2, 3) = 1 \mid 55$이므로 정수해 (x, y)가 존재한다.

$2 \times (-1) + 3 \times 1 = 1$에서 특수해 $(x_0, y_0) = (-55, 55)$.

$\therefore$ $(x, y) = (-55 + 3t, 55 - 2t)$, $t \in \mathbb{Z}$.

문제 상황에 맞는 t의 범위는 $\frac{55}{3} < t < \frac{55}{2}$이므로

구하는 양의 정수해 (x, y)의 개수는 9개.

[선형대수학]

1.

$u=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\ v=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix},\ w=u\times v=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$라 하자.

$Au=4u,\ Av=10v$이므로 A의 고유치 4, 10.

$\det(A)=800$이므로 A의 남은 고유치 20이며 고유벡터 w.

따라서 $\{u,v,w\}$는 $\mathbb{R}^3$의 정규직교기저이고, $P=(u\,|\,v\,|\,w)$라 할 때,

$$A=P\begin{pmatrix}4&0&0\\0&10&0\\0&0&20\end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix}4&0&0\\0&10&0\\0&0&20\end{pmatrix}P^T,\ A^{-1}=P\begin{pmatrix}1/4&0&0\\0&1/10&0\\0&0&1/20\end{pmatrix}P^{-1}.$$

가정에 따라 $B=2|B|A^{-1}=2|B|\cdot P\begin{pmatrix}1/4&0&0\\0&1/10&0\\0&0&1/20\end{pmatrix}P^{-1}$,

$|B|=(2|B|)^3\cdot\frac{1}{|A|},\ |B|^2=100,\ \mathrm{tr}B$는 $|B|$의 부호와 같으므로 $|B|=-10$.

B의 고유치 $-5,\ -2,\ -1$, B의 고유벡터로 구성된 정규직교기저 $\{u,v,w\}$.

2.

(나)에 따라 2차원 평면 $x+y+z=0$의 영이 아닌 임의의 벡터 v에 대하여

$\left(A^{-1}-\frac{1}{2}I\right)v=O,\ Av=2v$, 따라서 A의 고유치 2.

(가)에 따라 A의 다른 하나의 고유치 8이므로 $D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&8\end{pmatrix}$.

$v_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1),\ v_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\ v_2=v_1\times v_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$라 하면

$\{v_1,v_2,v_3\}$는 $\mathbb{R}^3$의 정규직교기저이다.

(v_3는 고유치 8에 대응하는 고유벡터)

($(1,-2,1),\ (1,2,-3)$은 서로 다른 고유벡터이지만 수직이 아님)

$P=(v_1\,|\,v_2\,|\,v_3)$로 놓으면 $A=PDP^{-1}=PDP^T$.

3.

(가), (나)에 따라 A의 고유치 $3,\ \alpha,\ \overline{\alpha},\ \alpha\overline{\alpha}=|\alpha|^2=2$.

따라서 B의 고유치는 $3^2-3+5\cdot1=11,\ \alpha^2-\alpha+5,\ \overline{\alpha}^2-\overline{\alpha}+5$.

(다)에 따라 B의 서로 다른 고유치는 2개 이하이며,

$11=\alpha^2-\alpha+5$ 또는 $11=\overline{\alpha}^2-\overline{\alpha}+5$이면 $\alpha,\ \overline{\alpha}$가 실수(실근)가 되어 모순.

따라서 $\alpha^2-\alpha+5=\overline{\alpha}^2-\overline{\alpha}+5,\ \alpha+\overline{\alpha}=1$.

$\alpha,\ \overline{\alpha}$는 $x^2-x+2=0$의 근 $\frac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$.

그러므로 $\det(A)=3\alpha\overline{\alpha}=6,\ \mathrm{tr}(A)=3+\alpha+\overline{\alpha}=4$.

4.

$L(1,1,1)=(0,0,0)$,

$L(0,1,1)=(-1,0,0)=-(1,1,1)+(0,1,1)$,

$L(1,0,1)=(2,-1,1)=-(0,1,1)+2(1,0,1)$이므로 $[L]_\alpha=\left(\begin{array}{c|c|c}0&-1&0\\0&1&-1\\0&0&2\end{array}\right)$.

($a+c=2,\ a+b=-1,\ a+b+c=1$로부터 $b=-1,\ c=2,\ a=0$)

$\left|xI-[L]_\alpha\right|=x(x-1)(x-2)=0 \Leftrightarrow x=0,\ 1,\ 2$에 대응하는 고유공간

$E_0=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle,\ E_1=\left\langle\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\rangle,\ E_2=\left\langle\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}\right\rangle$이므로

($[L]_\alpha$의 고윳값의 대수적 중복도와 기하적 중복도가 일치하므로)

$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&-2\\0&0&2\end{pmatrix}$일 때 $P^{-1}[L]_\alpha P=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 즉 $[L]_\alpha$는 대각화가능하다.

(다른 설명)

$[L]_\alpha\in\mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$는 서로 다른 3개의 고유치를 가지므로 대각화 가능.

5.

$v_1=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix},\ v_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\ v_3=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$라 하면 $Av_1=4v_1,\ Av_2=-2v_2,\ Av_3=-2v_3$.

따라서 고유치 $4,\ -2$

$\begin{bmatrix}a_{11}+a_{12}+a_{13}\\a_{21}+a_{22}+a_{23}\\a_{31}+a_{32}+a_{33}\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=A\left(\frac{1}{2}v_1+\frac{1}{2}v_3\right)=2v_1-v_3=\begin{bmatrix}1\\1\\4\end{bmatrix}$이므로 구하는 값 1.

6.

$|A-xI|=0 \Leftrightarrow x=1,\ 2,\ 3$. 고유치 1, 2, 3이며, $P=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-2&-1&0\end{bmatrix}$라 하면

$$P^{-1}=\frac{1}{\det(P)}\mathrm{adj}(P)=\begin{bmatrix}0&-1&-1\\0&2&1\\1&1&1\end{bmatrix},\quad P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}=D.$$

* $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\-2&-1&0&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&-1&-1\\0&1&0&0&2&1\\0&0&1&1&1&1\end{array}\right)$

$A^n=PD^nP^{-1}=\begin{bmatrix}3^n&3^n-1&3^n-1\\0&2^{n+1}-1&2^n-1\\0&2-2^{n+1}&2-2^n\end{bmatrix}$, 구하는 값 2^n-1.

* $[1\ 1\ 0]\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2^n&0\\0&0&3^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}=2^n-1$.

(2행) (3열)

7.

A는 삼각행렬이므로 고유치 5, 1, -1이다. (계산해도 된다.)

각각 <u>서로 다른</u> 고유치에 대응하는 고유벡터는

$u_1=(1,0,0),\ u_2=(3,-4,0),\ u_3=(0,1,1)$이며 일차독립.

* 다른 설명: $\mathrm{rank}\begin{pmatrix}1&3&0\\0&-4&1\\0&0&1\end{pmatrix}=3$이므로 일차독립.

따라서 $B=\{u_1,u_2,u_3\}$는 $\mathbb{R}^3$의 기저이다.

한편, $T(u_1)=5u_1,\ T(u_2)=1u_2,\ T(u_3)=-u_3$이므로

$[T]_B=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$는 대각행렬.

* $[T]_E^E=PDP^{-1}=[I]_E^B[T]_B^B[I]_B^E$

8. $\mathscr{B}=\{v_1,v_2,v_3\}$는 $\mathbb{R}^3$의 기저이다.

$T_k(v_1)=v_1+v_1+kv_1=(k+2)v_1$,

$T_k(v_2)=v_2+\left[\frac{v_2\cdot v_1}{\|v_1\|^2}v_1+\vec{0}\right]+kv_2=v_1+(k+1)v_2$,

$T_k(v_3)=[\vec{0}+\vec{0}]+v_3+kv_3=(k+1)v_3$이므로 $[T_k]_{\mathscr{B}}=A=\begin{pmatrix}k+2&1&0\\0&k+1&0\\0&0&k+1\end{pmatrix}$.

T_k의 역변환이 존재하지 않으려면 A의 역행렬이 존재하지 않아야 한다.

따라서 $\det A=(k+1)^2(k+2)=0,\ k=-1,-2$.

T_k의 랭크 2가 되는 경우는 $\mathrm{rank}A=2,\ k=-2$.

* 표준기저에 의한 T_k의 행렬 A라 하면

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\0&1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\0&1\end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\\0&1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\\0&1\end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}+kI$$

$$=\begin{pmatrix}k+2&0&0\\0&k+1&0\\0&0&k+1\end{pmatrix}.$$

9. $\{v_1, v_2, v_3\}$는 $\mathbb{R}^3$의 기저이므로 일차독립이다.
스칼라체 $\mathbb{R}$의 원소 a, b, c에 대하여
$a(v_1+v_2)+b(v_1+v_3)+c(v_2+v_3)=0\,(\in\mathbb{R}^3)$라 하면
$(a+b)v_1+(a+c)v_2+(b+c)v_3=0$이므로
$a+b=a+c=b+c=0$에서 $a=b=c=0$,
즉 v_1+v_2, v_1+v_3, v_2+v_3은 일차독립이며, 어떤 벡터도 영벡터가 아니다.
* 다른 설명

기저에 의한 세 벡터의 표현행렬 $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$의 계수$=3$이므로 세 벡터는 벡터공간 $\mathbb{R}^3$의 일차독립인 벡터이며, 따라서 $\mathcal{B}=\{v_1+v_2, v_1+v_3, v_2+v_3\}$는 $\mathbb{R}^3$의 기저이다.

한편 주어진 조건으로부터
$A(v_1+v_2)=v_1+v_2, A(v_1+v_3)=2(v_1+v_3)$, $A(v_2+v_3)=3(v_2+v_3)$이므로
A의 고유치는 1, 2, 3.
그러므로 $\det(A)=1\cdot2\cdot3=6$.
* 다른 설명: $P=(v_1+v_2\,|\,v_1+v_3\,|\,v_2+v_3)$라 할 때

$$A=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}P^{-1}\text{이고, } \det A=\left|P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}P^{-1}\right|=\det\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}=6.$$

* 대각화 $A=PDP^{-1}$, $P=$(고유열벡터)
* 기저변환 $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}=[I]_{\mathcal{B}}^{E}[T]_E^E[I]_E^{\mathcal{B}}$.

10. $|a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}|=3\sqrt{5}$
$\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2=(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2$이므로 양변 노름취하면
$|a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}|\,\|\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2\|=|a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}|=\|\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2\|=\|(6,0,-3)\|=3\sqrt{5}$.

* 다른 설명
$\boldsymbol{v}_3=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2,0,-1)$라 하면 $\boldsymbol{v}_3$는 평면 V의 법벡터와 평행하다.
따라서 $B'=\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\}$는 $\mathbb{R}^3$의 기저가 되며,
$B''=\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{v}_3\}$는 $\mathbb{R}^3$의 정규직교기저이다.
한편 $\boldsymbol{v}_1=a_{11}\boldsymbol{u}_1+a_{12}\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{v}_2=a_{12}\boldsymbol{u}_1+a_{22}\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{v}_3$이므로

이를 행렬로 나타내면 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1\\\boldsymbol{v}_2\\\boldsymbol{v}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&0\\a_{21}&a_{22}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_1\\\boldsymbol{u}_2\\\boldsymbol{v}_3\end{pmatrix}$이다.

B''은 정규직교기저이므로 $\left|\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_1\\\boldsymbol{u}_2\\\boldsymbol{v}_3\end{pmatrix}\right|=1$(|←절대치),

$$|a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}|=\left|\det\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&0\\a_{21}&a_{22}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right|$$
$$=\left|\det\begin{pmatrix}1&2&2\\1&-1&2\\\frac{2}{\sqrt{5}}&0&\frac{-1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}\right|=3\sqrt{5}.$$

11.
$\|T(\mathrm{x})\|^2=T(\mathrm{x})\cdot T(\mathrm{x})=(\mathrm{x}-2(\mathrm{x}\cdot\mathrm{u})\mathrm{u})\cdot(\mathrm{x}-2(\mathrm{x}\cdot\mathrm{u})\mathrm{u})$
$=\|\mathrm{x}\|^2-4(\mathrm{x}\cdot\mathrm{u})^2+4(\mathrm{x}\cdot\mathrm{u})\|\mathrm{u}\|^2$
$=\|\mathrm{x}\|^2$.
$\|T(\mathrm{x})\|\ge0$, $\|\mathrm{x}\|\ge0$이므로 $\|T(\mathrm{x})\|=\|\mathrm{x}\|$.
* 다른 설명
T는 $\langle\mathrm{u}\rangle$와 수직인 직선 $\langle\mathrm{u}\rangle^{\perp}$에 대한 선대칭변환이다.
선대칭변환은 합동변환이므로 등장사상이다.
따라서 $\|T(\mathrm{x}_1-\mathrm{x}_2)\|=\|\mathrm{x}_1-\mathrm{x}_2\|$이므로 $\|T(\mathrm{x})\|=\|\mathrm{x}\|$.
$T(1,0)=(1,0)-(1,1)$, $T(1,1)=-(1,1)$, $[T]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}$.

* $T(\mathrm{x})=\mathrm{x}-2(\mathrm{x}\cdot\mathrm{u})\mathrm{u}=\mathrm{x}-2\dfrac{\mathrm{x}\cdot\mathrm{u}}{\|\mathrm{u}\|^2}\mathrm{u}=\mathrm{x}-2\mathrm{proj}_{\mathrm{u}}\mathrm{x}$

12. $(x-1)(x+1)^2$
$\mathbb{R}^3$의 직선 $\langle(1,2,3)\rangle$의 기저원 $\boldsymbol{u}$와
$(1,2,3)$을 법선으로 하는 평면 $\langle(1,2,3)\rangle^{\perp}$의 기저원 $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$에 대하여
$T(\boldsymbol{u})=1\cdot\boldsymbol{u}$, $T(\boldsymbol{v})=-1\cdot\boldsymbol{v}$, $T(\boldsymbol{w})=-1\cdot\boldsymbol{w}$이므로
T는 고유치 1, -1을 갖고, 고유<u>다항식</u> $(x-1)(x+1)^2$.

* 다른 풀이
$v_1=(1,2,3)$과 수직인 벡터 $v_2=(2,-1,0)$과
그 외적 $v_3=v_1\times v_2=(3,6,-5)$라 하자.
$T(v_1)=v_1$, $T(v_2)=-v_2$, $T(v_3)=-v_3$이므로

$$A=(v_1|v_2|v_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}(v_1|v_2|v_3)^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-6&2&3\\2&-3&6\\3&6&2\end{pmatrix}.$$

단, $(v_1|v_2|v_3)^{-1}=\dfrac{1}{70}(\mathrm{adj}A_{ij})^T=\dfrac{1}{70}\begin{pmatrix}5&28&3\\10&-14&6\\15&0&-5\end{pmatrix}^T=\dfrac{1}{70}\begin{pmatrix}5&10&15\\28&-14&0\\3&6&-5\end{pmatrix}$.

이때 A의 특성다항식

$$|A-xI|=\frac{1}{7^3}\{(6-7x)(-3-7x)(2-7x)+72-9(-3-7x)$$
$$-36(-6-7x)-4(2-7x)\}$$
$$=\frac{1}{7^3}\cdot(-343)(x-1)(x+1)^2$$
$$=-(x-1)(x+1)^2.$$

13.

임의의 스칼라 $a,\ b\in\mathbb{C}$와 임의의 $f,\ g\in V$,

$T(af+bg)=\int_C af(z)+bg(z)dz$

$=a\int_C f(z)dz+b\int_C g(z)dz$

$=aT(f)+bT(g)$이므로 T는 선형사상이다.

$a_1f_1+a_2f_2+a_3f_3+a_4f_4\in\ker T$이면 코시-구르사 정리와 유수 정리에 의해

$0=\int_{|z|=1} a_1f_1+a_2f_2+a_3f_3+a_4f_4\,dz$

$=a_2\int_{|z|=1} f_2\,dz+a_4\int_{|z|=1} f_4\,dz$

$=a_2\int_{|z|=1}\frac{1}{z}dz+a_4\int_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}}dz$

($|z|=1$에서 $1^2=|z|^2=z\bar{z},\ \bar{z}=\frac{1}{z}$)

$=a_2\cdot 2\pi i+a_4\cdot 2\pi i$에서 $a_4=-a_2$.

그러므로 $\ker T\subset\langle f_1,\ (f_2-f_4),\ f_3\rangle$.

$f_1,\ f_2-f_4,\ f_3\in\ker T$이고, 적당한 $a,\ b,\ c\in\mathbb{C}$에 대하여

$af_1+b(f_2-f_4)+cf_3=0$이면 $az+b(\bar{z}-e^{\bar{z}})+ce^z=0,\ \ \forall z\in\mathbb{C}$.

㉠ $z=0$일 때, $b=c$

㉡ $z=\frac{\pi i}{2}$일 때, $\frac{\pi i}{2}a+b=0$

㉢ $z=\pi i$일 때, $\pi ia-b\pi i=0$

따라서 $a=b=c=0$, $f_1,\ f_2-f_4,\ f_3$는 일차독립,

$\ker T$의 기저는 $\{f_1,\ (f_2-f_4),\ f_3\}$.

($\dim\ker T=3$이므로 $\dim\mathrm{im}\,T=1$, $\dim V=4$)

(T는 동형 선형사상은 아니다.)

$f\in T^{-1}(2)\ \Leftrightarrow\ T(f)=2=T(\frac{1}{\pi i}f_2)$

$\Leftrightarrow\ T(f-\frac{1}{\pi i}f_2)=0$

$\Leftrightarrow\ f-\frac{1}{\pi i}f_2\in\ker T$

$\Leftrightarrow\ f\in\frac{1}{\pi i}f_2+\ker T.$

그러므로 $T^{-1}(2)=\frac{1}{\pi i}f_2+\ker T.$

($T(f)=2$의 특수해$+\ker T$)

($A\mathrm{x}=2$의 특수해$+\underline{A\mathrm{x}=0\text{의 일반해}}$)

(A의 영공간)

* A: T의 행렬(선형사상이므로 A 있다.), $\mathrm{rank}A=1$

14. $a=15$

원점을 중심으로 **시계방향으로** 45°만큼 회전이동하는 행렬은

$\begin{pmatrix}\cos(-45^\circ) & -\sin(-45^\circ)\\ \sin(-45^\circ) & \cos(-45^\circ)\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ (직교행렬).

$(x,y)\in C$에 대하여 회전이동한 뒤의 C 위의 점을 (x',y')라 할 때,

$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$에서 $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\right]^T\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}x'-y'\\ x'+y'\end{pmatrix}$이므로

C의 방정식에 대입하여 정리하면

$(14a+a^2)(x')^2+(14a-a^2)(y')^2-\sqrt{2}x'-1=0.$

a는 자연수이므로 $14a+a^2>0$.

이 곡선이 초점이 x축에 있는 쌍곡선이 되려면 $14a-a^2<0$.

그러므로 $a>14$인 자연수 a 중 가장 작은 수 15.

* $\mathbb{R}^2$에서 θ만큼 반시계 회전 행렬 $R=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

* $\mathbb{R}^3$에서 회전변환행렬

① 양의 x축에 대하여 θ만큼 반시계 회전 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & R\end{pmatrix}$

② 양의 y축에 대하여 θ만큼 반시계 회전 $\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}$

③ 양의 z축에 대하여 θ만큼 반시계 회전 $\begin{pmatrix}R & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

15. ⑤

ㄱ. 스칼라 체 $\mathbb{R}$에 속하는 적당한 $a,\ b,\ c$에 대하여

$a(v_1+v_2+v_3)+b(v_2+v_3)+cv_3=(0,0,0,0,0)$라 하면

$av_1+(a+b)v_2+(a+b+c)v_3=\mathbf{0}$,

$v_1,\ v_2,\ v_3$은 일차독립이므로 $a=0,\ a+b=0,\ a+b+c=0$,

$a=b=c=0$. 즉 $v_1+v_2+v_3,\ v_2+v_3,\ v_3$도 일차독립이다.

ㄴ. $\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$로 생성되는 $\mathbb{R}$위의 벡터공간 $\{av_1+bv_2+cv_3|a,\ b,\ c\in\mathbb{R}\}$의 임의의 두 원소 $a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3,\ b_1v_1+b_2v_2+b_3v_3$와 임의의 스칼라 $k\in\mathbb{R}$에 대하여

$(a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3)+(b_1v_1+b_2v_2+b_3v_3)$

$=(a_1+b_1)v_1+(a_2+b_2)v_2+(a_3+b_3)v_3\in\{av_1+bv_2+cv_3|a,\ b,\ c\in\mathbb{R}\}$이고,

$k(a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3)=ka_1v_1+ka_2v_2+ka_3v_3$

$\in\{av_1+bv_2+cv_3|a,\ b,\ c\in\mathbb{R}\}$이므로

$\{av_1+bv_2+cv_3|a,\ b,\ c\in\mathbb{R}\}$는 $\mathbb{R}^5$의 부분공간이다.

ㄷ. $x_1,x_2\in\mathbb{R}^5$에 대하여 $Ax_1=v_1,\ Ax_2=v_2$라 하자.

$\boldsymbol{x}=2x_1+x_2$로 놓으면 $A\boldsymbol{x}=2v_1+v_2$이므로 $Ax=2v_1+v_2$의 해 존재.

* 연립일차방정식 $A\mathrm{x}=\mathrm{b}$의 일반해는 $A\mathrm{x}=0$의 일반해(영공간, 핵, ker)에 $A\mathrm{x}=\mathrm{b}$의 임의의 특수해를 더하여 얻어진다. 즉, x="$A^{-1}\cdot\mathrm{b}$"=특수해+nullity(A))

16. ④

ㄱ. $(a,b,c)\in\ker T$이면 $a=2c$, $\ker T\in\langle(2,0,1)\rangle$

$T(2,0,1)=\mathbf{0}$이므로 $\ker T=\langle(2,0,1)\rangle$.

차원 정리에 의해 $\dim\mathrm{im}\,T=\dim\mathbb{R}^3-\dim\ker T=2$.

* 표준기저에 의한 T의 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}$, $\mathrm{rank}A=2$이므로 $\dim\mathrm{im}\,T=2$

ㄴ. $\ker T$의 기저는 $\{(2,0,1)\}$이므로

$\mathrm{proj}_{\ker T}(1,0,0)=\frac{(1,0,0)\cdot(2,,0,1)}{\|(2,0,1)\|^2}(2,0,1)=\frac{2}{5}(2,0,1).$

ㄷ. $\mathbf{0}$아닌 임의의 $v\in\ker T$에 대하여 $T(v)=1\cdot v$이고, $(\ker T)^\perp$의 기저원 $u,\ w$에 대하여 $T(u)=0\cdot u=\mathbf{0},\ T(w)=0\cdot w=\mathbf{0}$,

T의 고유치 1, 0, $\mathrm{tr}A=1+0+0=1$.

* $(\ker T)^\perp$은 $(2,0,1)$을 법선으로 하는 $\mathbb{R}^3$의 평면

* $\mathrm{proj}_{\ker T}(0,1,0)=\mathbf{0}$, $\mathrm{proj}_{\ker T}(0,0,1)=\frac{1}{5}(2,0,1)$,

표준기저에 의한 직교정사영의 행렬 $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$,

구하는 $\mathrm{tr}A=\mathrm{tr}\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}=\frac{4}{5}+0+\frac{1}{5}=1.$

17. ③

ㄱ. 서로 다른 5개의 벡터이므로 적어도 한 벡터는 0이 아니다. $1 \le \dim V \le 4 = \dim \mathbb{R}^4$이므로 $V \cong \mathbb{R}^n$이 되는 자연수 n있다.

ㄴ. $V \le \mathbb{R}^4$이고, $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$가 V의 기저이면
$\dim V = |\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}| = 5 \le 4 = \dim \mathbb{R}^4$가 되어 모순.

ㄷ. $V \le \mathbb{R}^4$이므로 $\mathbb{R}^4$의 부분공간으로는 $\{0\}$, 0을 지나는 평면(차원 2) 등이 있다. 즉 $\dim V = 2$인 벡터 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5있다.

18. ③

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \ker L$일 때 계산하면 $0 = \begin{pmatrix} 2c & -2a-2b+2d \\ 2c & 2c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이므로

$\ker L \subset \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$은 일차독립이고 $\ker L$에 속한다.

그러므로 $\ker L = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. 차원정리에 의해

$\dim \mathrm{im} L = \dim V - \dim \ker L = 4 - 2 = 2.$

* V의 기저에 의한 L의 4×4 행렬 $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$의 rank구해도 된다.

* $\mathrm{im}(L) = L(V) = L(\langle E_1, E_2, E_3, E_4 \rangle)$
$= \langle L(E_1), L(E_2), L(E_3), L(E_4) \rangle$
$= \langle E_2, E_1 + E_3 - E_4 \rangle.$

19. ③

ㄱ. A는 가역행렬이므로 $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\mathrm{adj}A$이고,

$(\mathrm{adj}A)^n = (A^{-1}|A|)^n = (A^n)^{-1}|A|^n$,

$\mathrm{adj}(A^n) = (A^n)^{-1}|A|^n$이므로 $\mathrm{adj}A^n = (\mathrm{adj}A)^n$.

* $|A| \cdot I = A \cdot \mathrm{adj}A$

ㄴ. $\mathrm{adj}(A^T) = (A^T)^{-1}|A^T| = |A|(A^T)^{-1}$,

$(\mathrm{adj}A)^T = (|A|A^{-1})^T = |A|(A^T)^{-1}$이므로

$\mathrm{adj}(A^T) = (\mathrm{adj}\,A)^T$이다. ($|A| \in \mathbb{R}$)

ㄷ. $\mathrm{adj}(\mathrm{adj}A) = |\mathrm{adj}A|(\mathrm{adj}A)^{-1}$
$= \big||A|A^{-1}\big| \cdot (|A|A^{-1})^{-1}$
$= |A|^3|A^{-1}| \cdot \dfrac{A}{|A|}$
$= |A|A$, $\det A = 1$인 경우에만 성립.

20. ②

ㄱ. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$은 대각화가능하지 않다.

* $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x+y, y)$에 대하여 T는 정칙선형사상이지만 표준기저에 의한 T의 행렬 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$는 대각화가능하지 않다.

ㄴ. $A^T = PDP^{-1}$인 정칙행렬 P, 대각행렬 D 있다.

$A = (A^T)^T = (PDP^{-1})^T = (P^T)^{-1}DP^T$이고,

$\det P^T = \det P \ne 0$이므로 A는 대각화가능하다.

* A^T의 고유다항식
$= \det(A^T - kI)$
$= \det((A^T - kI)^T)$ ($\because$ 행렬식의 성질)
$= \det(A - kI) = A$의 고유다항식

ㄷ. T의 표준기저에 의한 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$에서

$\det(A - xI) = (1-x)^3$, 고유치 $x = 1$(삼중근)이며

$(A - I)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$에서 $a = b = 0$, $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \langle (0, 0, 1) \rangle$.

고유치 1의 대수적 중복도(3)와 기하적 중복도(1)가 일치하지 않으므로 A는 대각화가능하지 않다.

* $\ker T = \{0\}$이므로 T는 단사이면서 전사이다. 즉 정칙선형사상이지만 T의 $\mathbb{R}^3$의 표준기저에 대한 행렬은 대각화가능하지 않다.

21. ④

① A의 고유다항식은

$\det(xI - A) = (x+1)(x-4)(x-3) - 14(x-3)$
$= (x^2 - 3x - 18)(x-3)$
$= x^3 - 6x^2 - 9x + 54.$

② A는 고유치 ± 3, 6을 갖고 그에 대응하는 고유벡터 $(0, 0, 1)$, $(1, -1, 0)$, $(2, 7, 0)$를 갖고 $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$라 할 때 $A = P\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}P^{-1}$이므로 A는 항등행렬이 아닌 두 개의 가역행렬의 곱으로 나타낼 수 있다.

* 다른 설명: $A = (-A)(-I)$이므로 옳다.

③ $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\mathrm{adj}A$에서 $\mathrm{adj}A = |A|A^{-1}$이므로

$|\mathrm{adj}A| = \det(|A|A^{-1}) = |A|^3 \dfrac{1}{|A|} = |A|^2$. ($|AA^{-1}| = 1$이므로 $|A^{-1}| = |A|^{-1}$)

* A^{-1}는 행렬이고 $|A|^{-1}$는 실수이다.

④ $A^2 = P\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix}P^{-1}$이므로 A^2의 모든 고유치의 합은 45이다. (* $\mathrm{tr}(A^2) = 54$)

⑤ $\dim \mathrm{im}\, T = \mathrm{rank}A = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, T는 전사이면서 단사이다. 그러므로 T는 정칙선형사상이다.

22. ②

ㄱ. 스칼라 $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$와 $\mathbb{Q}^3$의 원소 $(1, 1, 1)$에 대하여
$\sqrt{2} \cdot (1, 1, 1) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}) \notin \mathbb{Q}^3$이므로 $\mathbb{Q}^3$는 $\mathbb{R}^3$의 부분공간이 아니다. (스칼라 체 $\mathbb{R}$위의 벡터공간도 안 됨, 합 연산에 대해서는 닫혀 있음.)

* 공집합 아닌 W가 $W \le V$
$\Leftrightarrow$ (1) u, $\mathrm{v} \in W$이면 $\mathrm{u} + \mathrm{v} \in W$
(2) 스칼라 k, $\mathrm{u} \in W$이면 $k\mathrm{u} \in W$

ㄴ. 벡터공간 $\mathbb{R}^3$의 원점을 지나는 평면(부분벡터공간)
$U: x + 5y - z = 0$의 법벡터 $\boldsymbol{n} = (1, 5, -1)$는
임의의 U의 원소와 수직이다.((유클리드)내적이 0.)
그러므로 $\langle \boldsymbol{n} \rangle = U^{\perp}$이고 $U \oplus U^{\perp} = U \oplus \langle \boldsymbol{n} \rangle = \mathbb{R}^3$.

ㄷ. $(a, b, c) \in \ker T$이면 $a - b = 0$, $2b = 0$, $a - 3c = 0$이므로 $a = b = c = 0$.
$\ker T = \{0\}$이므로 $\dim \ker(T) = 0$.

23. ④

가정에 의해 정칙행렬 P가 존재해서 $A = PDP^{-1}$이다.

(단, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$이다.)

ㄱ. $|A| = \det(PDP^{-1}) = \det D = 1(-1) \cdot 2 \cdot 4 = -8$.

ㄴ. $\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}(PDP^{-1}) = \mathrm{tr}(PP^{-1}D)$.
$= \mathrm{tr}D = 1 - 1 + 2 + 4 = 6$

ㄷ. 상(하)삼각 행렬만 되어도 충분, 대칭일 필요는 없다.

ㄹ. $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}(PDP^{-1}) = \mathrm{rank}D = 4$
(P는 가역이므로 D의 행(열)공간의 차원은 P에 의해 불변)

* 다른 설명: $\det A = \det D \ne 0$이므로 $\mathrm{rank}A = 4$.

24. ⑤

① $W = P(W) \le P(V) = \mathrm{Im}P \le W$이므로 $W = \mathrm{Im}P$

② $\ker(P) = \{0\} \cup (V/W)$이므로 $\ker P \cap W = \{0\}$

③ 자명하다.

④ $P(v) \in W$이므로 ③에 의해 성립한다.

⑤ $V = \mathbb{R}^2$(좌표평면)에서 $W = \mathbb{R}$(x축) 위로의 정사영 사상의 표준기저에 의한 행렬은 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이며 가역행렬이 아니다.

25. ④

$3 = \mathrm{a} \cdot \mathrm{b} = \|\mathrm{a}\| \|\mathrm{b}\| \cos\theta = \sqrt{3} \cdot 3\cos\theta$, $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

26. ①

A는 실대칭행렬이므로 직교대각화 가능하다.

$0 = \det(A - tI) = (t-4)(t+2)$에서 고유치 -2, 4

㉠ $t = -2$일 때 $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$에서 $a = b$이므로 한 고유벡터는 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

㉡ $t = 4$일 때 $\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}\mathrm{x} = 0$에서 $\mathrm{x} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle / \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이므로 한 고유벡터는 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

㉠, ㉡에 의해 구하는 $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

27. $T(4+2x+3x^2) = 4+3x+\dfrac{7}{2}x^2$

선형사상의 성질과 계산에 의해

$T(1) = 1 + \dfrac{3}{2}x^2$, $T(x) = -\dfrac{1}{2}x^2$, $T(x^2) = x - \dfrac{1}{2}x^2$.

그러므로 $T(4+2x+3x^2) = 4 + 6x^2 - x^2 + 3x - \dfrac{3}{2}x^2 = 4 + 3x + \dfrac{7}{2}x^2$.

* 다른 설명

P_2의 기저 $\{1, x, x^2\}$에 의한 T의 행렬 A라 하면

가정에 의해 $A\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$이므로

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \mathrm{adj}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right),$$

즉 $T(1) = 1 + 0x + \dfrac{3}{2}x^2$, $T(x) = 0 + 0x - \dfrac{1}{2}x^2$, $T(x^2) = 0 + 1x - \dfrac{1}{2}x^2$.

* 3차 행렬식 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$의 계산

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}\right. + \left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}\right.$$

$= (+aei + bfg + cdh) + (-ceg - afh - bdi)$

$= (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$.

28. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$

$0 = \det(A - xI) = x^2 - 2\cos\theta x + 1$에서 $x = \cos\theta \pm i\sin\theta (= e^{\pm i\theta})$

$(A - e^{-i\theta}I)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$에서 $ai = b((a,b) \neq (0,0))$이므로 $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$는 고유벡터.

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$라 하면 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$.

회전변환행렬 A는 $\mathbb{C}$ 위에서 대각화가능.

29.

$L(\{(1-t)\mathrm{x} + t\mathrm{y} \in \mathbb{R}^n \mid 0 \le t \le 1\}) = \{(1-t)L(\mathrm{x}) + tL(\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^m \mid 0 \le t \le 1\}$는

㉠ $L(\mathrm{x}) = L(\mathrm{y})$일 때 한 점 집합이 된다.

㉡ $L(\mathrm{x}) \neq L(\mathrm{y})$이면 $L(\mathrm{x})$와 $L(\mathrm{y})$를 잇는 선분이 된다.

(단사($\Leftrightarrow$전사$\Leftrightarrow$동형)일 때 선분된다. 이때 $m = n$)

30. $\dim\ker T = 1$, $\dim\mathrm{im}\, T = 2$

$\mathrm{rank}A = 2 = \dim\mathrm{im}\, T$이고, 차원정리에 의해

$\dim\ker T = \dim\mathbb{R}^3 - \dim\mathrm{im}\, T = 1$.

* 다른 풀이

$(a,b,c) \in \ker T$이면 $0 = a + c = b + 2c = -a + b + c$,

$(a,b,c) = a(1,2,-1)$이므로 $\ker T \subset \langle (1,2,-1) \rangle$이며,

$(1,2,-1) \in \ker T$이므로 $\ker T = \langle (1,2,-1) \rangle$.

그러므로 $\dim\ker T = |\{(1,2,-1)\}| = 1$.

$\mathrm{im}\, T = T(\mathbb{R}^3) = T(\langle (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \rangle)$

$\qquad = \langle T(1,0,0), T(0,1,0), T(0,0,1) \rangle$

$\qquad = \langle (1,0,-1), (0,1,1), (1,2,1) \rangle$ (열공간의 기저)

$\qquad = \langle (1,0,-1), (0,1,1) \rangle$

$(1,0,-1)$, $(0,1,1)$은 스칼라체 $\mathbb{R}$ 위에서 일차독립.

따라서 $\dim\mathrm{im}\, T = |\{(1,0,-1), (0,1,1)\}| = 2$.

31. 고유치: 1, 2, 고유공간: $\langle (1,0,0) \rangle \langle (1,1,0), (0,1,1) \rangle$

주어진 행렬을 A라 할 때, A는 상삼각행렬이므로

$0 = \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(2-\lambda)^2$에서 고유치 $\lambda = 1$, 2.

$\lambda = 1$에 대응하는 고유공간은 $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (A - 1 \cdot I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0\right\} = \langle (1,0,0) \rangle$,

$\lambda = 2$에 대응하는 고유공간은

$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (A - 2 \cdot I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0\right\} = \langle (1,1,0), (0,1,1) \rangle$.

* $\lambda = 2$의 대수적 중복도와 기하적 중복도가 일치한다.

32.

($\Rightarrow$) $u \in W_1 \cap W_2 (\subset V$, 실제로 $\le V)$이면 $u = u + 0, u = 0 + u$이므로 $u = 0$, 즉 $W_1 \cap W_2 \subset \{0\}$가 되고 $\{0\} \le W_1 \cap W_2$이므로 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

($\Leftarrow$) 다음 v의 두 가지 표현을 생각하자.

$v = w_1 + w_2$, $v = w_1' + w_2'$ $(w_1, w_1' \in W_1,\ w_2, w_2' \in W_2)$

벡터 연산에 의해 $(W_1 \ni) w_1 - w_1' = -(w_2 - w_2') (\in W_2)$,

W_1, W_2은 연산에 의해 닫혀있으므로 $w_1 - w_1' \in W_2$, $w_2 - w_2' \in W_1$이 되어

$w_1 - w_1'$과 $w_2 - w_2'$은 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$에 속한다.

그러므로 $w_1 = w_1'$, $w_2 = w_2'$, 즉 v는 유일하게 표현된다.

33.

차원정리에 의해 $\dim\ker L + \dim\mathrm{im}\, L = \dim V$에서

$\dim\mathrm{im} L = \dim W$이고 $\mathrm{im} L \le W$이므로 $\mathrm{im} L = W$, 즉 L은 전사이다.

$\ker L = \{0\}$이므로 L은 단사이다.

그러므로 L은 동형사상이다.

(유한차원 벡터공간 간의 선형사상은 단사$\Leftrightarrow$전사이므로 하나면 보여도 충분하다.)

* 다른 설명

$L(u) = L(v)$이면 $L(u - v) = 0$이므로 $u - v \in \ker L = \{0\}$, 즉 $u = v$이므로 L은 단사,

V의 기저 $\{v_1, \cdots, v_n\}$에 대하여 적당한 실수 $c_i (1 \le i \le n)$에 대하여

$c_1 T(v_1) + \cdots + c_n T(v_n) = 0$라 하면 $T(c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n) = 0$ $(\in W)$가 되어

$c_1 v_1 + \cdots c_n v_n = 0$ $(\in V)$, $\{v_1, \cdots, v_n\}$는 기저이므로 $c_1 = \cdots = c_n = 0$ $(\in \mathbb{R})$.

따라서 $\{T(v_1), \cdots, T(v_n)\}$은 W에서 일차독립이고,

$\langle T(v_1), \cdots, T(v_n) \rangle \le W$이므로 $\{T(v_1), \cdots, T(v_n)\}$은 W의 기저이다.

W와 $\mathrm{im} L = L(V)$는 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 같은 차원을 갖는 벡터공간이므로

L은 전사이다.

* 다른 설명(전사 정의)

임의의 $w \in W$에 대하여 $w = \sum_i \alpha_i T(v_i) = \sum_i T(\alpha_i v_i)$ $(\alpha_i \in \mathbb{R}$, 즉 $\alpha_i v_i \in V)$이고, 이는 w의 유일한 표현이다.($\because$ $\{T(v_i)\}_{i=1}^n$이 기저) 그러므로 L은 전사이다.

34. (1) $A=\begin{pmatrix}2&1\\3&-2\end{pmatrix}$ (2) $\dfrac{63}{2}$

(1) f는 선형변환이므로 이에 대응하는 행렬 있다.
그 행렬의 크기는 $\dim(\text{공역})\times\dim(\text{정의역})=2\times 2$.

$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, $A\left(\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right)$, 계산하면 $A=\begin{pmatrix}2&1\\3&-2\end{pmatrix}$.

* 다른 설명 $A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$이므로

$A\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\-2&3\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&2\\-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2\\-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\3&-2\end{pmatrix}$

(2) $P'=(-2,-3)$, $Q'=(1,5)$, $R'=(7,0)$.
x축을 기준으로 두 개의 삼각형의 넓이의 합으로 계산하면

$\triangle P'Q'R'=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{63}{8}(5+3)=\dfrac{63}{2}$.

* 다른 방법

$\triangle P'Q'R'=\dfrac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}-2&-3&1\\1&5&1\\7&0&1\end{pmatrix}\right|=\dfrac{63}{2}$ (3열의 1들 고정)

* 다른 방법

$\overrightarrow{P'Q'}=(3,8)$, $\overrightarrow{P'R'}=(9,3)$, 구하는 넓이는 $\triangle P'Q'R'=\left|\dfrac{1}{2}\cdot\det\begin{pmatrix}3&8\\9&3\end{pmatrix}\right|=\dfrac{63}{2}$.

* $\triangle PQR\times|\det A|=\dfrac{9}{2}\times|-7|=\dfrac{63}{2}=\triangle P'Q'R'$

* $\triangle PQR$의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{9}{4}(3+1)=\dfrac{9}{2}$이므로 f는 넓이(길이)를 보존하지 않는다. 즉, 합동변환이 아니다.

* 합동 변환을 나타내는 행렬의 행렬식은 ± 1.
(합동 변환은 회전변환$(+1)$, 대칭변환(-1) 뿐이다.)

35.

두 근을 t_1, t_2라 하면 타원 ① 위의 두 점
$(x_0+lt_1,\ y_0+mt_1)$, $(x_0+lt_2,\ y_0+mt_2)$의 중점 (x_0,y_0)이다.

즉, $\dfrac{l}{2}(t_1+t_2)=0$, $\dfrac{m}{2}(t_1+t_2)=0$이다.

$\therefore$ 임의의 l, m에 대하여 $t_1+t_2=0$이다.

③에서 $\dfrac{(2ax_0+hy_0+g)l+(hx_0+2by_0+f)m}{al^2+hlm+bm^2}=0$,

$$\begin{cases}2ax_0+hy_0+g=0\\ hx_0+2by_0+f=0,\quad al^2+hlm+bm^2\neq 0\end{cases}$$

$4ab-h^2\neq 0$이면 한 쌍의 (x_0, y_0)를 얻고
$4ab-h^2=0$이면 부정 또는 불능이므로
무수히 많은 (x_0, y_0)가 존재하거나 중심(x_0, y_0)를 갖지 않는다.

따라서 중심을 얻는 식 $\begin{cases}2ax_0+hy_0+g=0\\ hx_0+2by_0+f=0\end{cases}$ $(\Leftrightarrow\ \nabla f(x_0,y_0)=\vec{0})$.

36.

하위 영역	배점	예상정답율(%)	관련사고영역	출제자
선형대수	5	60	이해 및 적용	좌준수
출제 내용 관련자료	W.Nicholson. Linear Algebra with Applications. PWS. pp. 251-257			

$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&1\\0&2-\lambda&0\\0&0&3-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$

이므로 A의 고윳값은 $\lambda=1,\ 2,\ 3$이다.

$\lambda=1$에 대응되는 A의 고유벡터를 $\mathrm{x}_1=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$이라 하면

$(A-\lambda I)\mathrm{x}_1=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_3\\x_2\\2x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

이 식으로부터 $x_3=0$, $x_2=0$이고

따라서, $\mathrm{x}_1=\begin{bmatrix}s\\0\\0\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, s는 0이 아닌 임의의 실수.

$\lambda=2$에 대응되는 A의 고유벡터를 $\mathrm{x}_2=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$라고 하면

$(A-\lambda I)\mathrm{x}_2=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x_1+x_3\\0\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

이 식으로부터 $x_1=0$, $x_3=0$이고

따라서, $\mathrm{x}_2=\begin{bmatrix}0\\t\\0\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, t는 0이 아닌 실수.

$\lambda=3$에 대응되는 A의 고유벡터를 $\mathrm{x}_3=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$라고 하면

$(A-\lambda I)\mathrm{x}_3=\begin{pmatrix}-2&0&1\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2x_1+x_3\\-x_2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

이 식으로부터 $x_3=2x_1$, $x_2=0$이고

따라서, $\mathrm{x}_3=\begin{bmatrix}u\\0\\2u\end{bmatrix}=u\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$, u는 0이 아닌 임의의 실수.

한편 λ가 A의 고윳값이고 x가 λ에 대응되는 고유벡터이면

$$A^{10}\mathrm{x}=A^9(A\mathrm{x})=A^9(\lambda\mathrm{x})=\lambda A^9\mathrm{x}=\cdots=\lambda^{10}\mathrm{x}$$

이므로 A^{10}의 고윳값은 λ^{10}이고 대응되는 고유벡터는 x가 된다.
그런데 A의 고윳값이 1, 2, 3이고, 대응되는 각각의 고유벡터가

$$s\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ t\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\ u\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}\ (s,\ t,\ u\text{는 0이 아닌 임의의 실수})$$

이므로 A^{10}의 고윳값은 $1,\ 2^{10},\ 3^{10}$ 이고,
대응되는 각각의 고유벡터는
$s\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $t\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, $u\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$ (s, t, u는 0이 아닌 임의의 실수) 이다.

*** 채점기준**

A의 고윳값 1, 2, 3을 모두 구하면 ……………………………………… 1점

고윳값 1, 2, 3 각각에 대응되는 고유벡터
$s\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $t\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, $u\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$ (s, t, u는 0이 아닌 임의의 실수)
를 모두 구하면 ……………………………………… 1점

(A의 고유벡터를 $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$ 라고만 언급해도 …………………… 1점)

λ가 A의 고윳값이고 x가 λ에 대응되는 고유벡터일 때
$A^{10}\mathrm{x}=A^9(A\mathrm{x})=A^9(\lambda\mathrm{x})=\lambda A^9\mathrm{x}=\cdots=\lambda^{10}\mathrm{x}$
를 쓰면 ……………………………………… 1점

A^{10}의 고윳값 $1,\ 2^{10},\ 3^{10}$을 모두 구하면 ……………………………… 1점

A^{10}의 고유벡터를
$s\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $t\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, $u\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$ (s, t, u는 0이 아닌 임의의 실수)
또는 $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$
라고 쓰거나, A의 고유벡터와 같다고 기술하면 ………………………… 1점

37.

$P=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$에 대하여 $A=P\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}P^{-1}$

38.

2차원 아핀공간 A^2의 변환은 $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$이므로

주어진 좌표를 위의 식에 대입하면

$\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$에서

$\alpha=1$, $\beta=2$, $a=1$, $b=1$, $c=2$, $d=-1$.

그러므로 아핀변환 $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.

39.

하위 영역	배점	예상 정답율(%)	출제근거 (이유)
고등수학(선형대수)	5	20	L. Smith, Linear Algebra 2nd. ed., pp. 59-64

$T(a)=a\times a+(a\cdot a)a=\|a\|^2=2a$이므로
a는 2를 고유치로 갖는 고유벡터 ………… 2점
(단, a가 고유벡터임을 인지하여 입증하려고 시도했으면 부분점수 가능)

T가 2 이외의 고유치를 가지면 그 고유벡터는 a와 수직
즉, p를 그 이외의 고유벡터라 하면
$p\cdot a=0$, $T(p)=\lambda p$ ………… 3점

$T(p)=a\times p=\lambda p$에서
$0=(a\times p)\cdot p=T(p)\cdot p=\lambda p\cdot p=\lambda\|p\|^2$
이므로, $\lambda=0$ ($\because$ $p\neq 0$). 단, $\mathbf{0}$는 영벡터이다. ………… 4점

이제, $a\times p=\mathbf{0}$.
따라서 벡터 a, p 사잇각은 0(또는 π)이다.
그러나 $p\cdot a=0$에서 벡터 a, p의 사잇각은 $\dfrac{\pi}{2}$이므로 모순. ………… 5점

40.

- $\mathrm{im}\,T$(공역의 부분공간)를 이용하는 방법

선형사상 T의 행렬표현이 A_T라 하면 $A_T=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$이고,
선형사상 T의 차원(dimension)은
$\dim(T(\mathbb{R}^3))=\dim(\mathrm{Im}(T))=\mathrm{rank}(T)=\mathrm{rank}(A_T)$
이므로 선형사상 T의 차원은 다음과 같다.
$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&3\\6&6&6\end{pmatrix}=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}=2$$
따라서 $\dim(T)=2$이다.

- $\ker T$(정의역의 부분공간)를 이용하는 방법

$(a,b,c)\in\ker T$이면 $0=a+2b+3c=4a+5b+6c=7a+8b+9c$에서
$(a,b,c)=a(1,-2,1)$이므로 $\ker T\subset\langle(1,-2,1)\rangle$이고,
$T(1,-2,1)=\mathbf{0}$이므로 $\ker T=\langle(1,-2,1)\rangle$.
따라서 $\dim\ker T=|\{(1,-2,1)\}|=1$.
그러므로 차원정리에 의해
$$\begin{aligned}\dim(T(\mathbb{R}^3))&=\dim(\mathrm{im}\,T)=\dim(\mathrm{dom}(T))-\dim(\ker T)\\&=\dim(\mathbb{R}^3)-\dim(\ker T)=3-1=2.\end{aligned}$$

41. ②

42. ①

가정에 의해 $A=PBP^{-1}=Q\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}Q^{-1}$인 가역행렬 P, Q 있다.

이때, $B=P^{-1}Q\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}(P^{-1}Q)^{-1}$. 그러므로 행렬 B의 고유치는 1, 2, 3
(고유치 같으므로 고유다항식도 같다.)

43. ④

일반적으로 $U\cup V$는 벡터공간이 되지 않는다.
$\dim(U+V)=5$라 놓고 푼다.
$\dim(U+V)=\dim U+\dim V-\dim(U\cap V)$
$\quad 5 \quad =2+8-\dim(U\cap V)$
그러므로 $\dim(U\cap V)=5$.
* $\dim U+\dim V=\dim(U\cap V)+\dim(U+V)$

44. ②

45. ④

* 답만 구하기
$(1,1)$은 $(r\sin\theta+r\cos\theta, r\cos\theta-r\sin\theta)$로 변환되므로 구하는 값 $2r\cos\theta$.

* 다른 설명
$(x,y)\xrightarrow{f}(ry,rx)\xrightarrow{g}(ry\sin\theta+rx\cos\theta,\ ry\cos\theta-rx\sin\theta)$
이를 행렬로 나타내면 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\xrightarrow{g\circ f}\begin{pmatrix}r\cos\theta&r\sin\theta\\-r\sin\theta&r\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.
그러므로 구하는 값은 $2r\cos\theta$.

* 다른 설명: f와 g는 모두 원점을 지나는 선형사상이므로 적절한 행렬에 대응된다. 표준기저에 의한 행렬을 구하면 f의 행렬은 $\begin{pmatrix}0&r\\r&0\end{pmatrix}$이고, g의 행렬은 $\begin{pmatrix}\sin\theta&\cos\theta\\\cos\theta&-\sin\theta\end{pmatrix}$.
그러므로 $g\circ f$를 나타내는 행렬은 $\begin{pmatrix}\sin\theta&\cos\theta\\\cos\theta&-\sin\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&r\\r&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\cos\theta&r\sin\theta\\-r\sin\theta&r\cos\theta\end{pmatrix}$이다.

46. ③

$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in W$이면 $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=b\begin{pmatrix}3&1\\0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-2&0\\1&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$이므로
$W\subset\left\langle\begin{pmatrix}3&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\rangle$.
$\begin{pmatrix}3&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$는 일차독립이며 W에 속하므로
$W=\left\langle\begin{pmatrix}3&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\rangle$. 그러므로 $\dim W=3$.

47. ②

구하는 일차변환은 평면(벡터공간) $\mathbb{R}^2$의
임의의 벡터 (x,y)의 원점을 지나는 직선(부분공간)
$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid mx-y=0,\ m\neq 0\}$으로의 정사영.
(x,y)의 직선의 기저원소 $(1,m)$으로의 정사영은
$$(x',y')=\mathrm{proj}_{(1,m)}(x,y)=\frac{(1,m)\cdot(x,y)}{\|(1,m)\|^2}(1,m)$$
$$=\left(\frac{x+my}{1+m^2},\ \frac{m(x+my)}{1+m^2}\right)$$
문제 상황에 맞게 정리하면 $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\dfrac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix}1&m\\m&m^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.
(2×2이므로 계산해도 되고, 양변 전치 취해도 된다.)
그러므로 $A=\dfrac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix}1&m\\m&m^2\end{pmatrix}$.

* 다른 풀이: A의 고유치는 0, 1이다.

㉠ 0에 대응되는 고유벡터: 직선 $y=-\dfrac{1}{m}x$의 $\mathbf{0}$아닌 임의의 벡터(ex. $(m,-1)$), $A\begin{pmatrix}m\\-1\end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix}m\\-1\end{pmatrix}=\mathbf{0}$

㉡ 1에 대응되는 고유벡터: 직선 $y=mx$의 $\mathbf{0}$아닌 임의의 벡터(ex. $(1,m)$), $A\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}m&1\\-1&m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&m\end{pmatrix}$, $A=\dfrac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix}1&m\\m&m^2\end{pmatrix}$.

㉢ $P=\left(\begin{array}{c|c}m&1\\-1&m\end{array}\right)$라 할 때, $A=P\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}P^{-1}$.

48. ①

주어진 연립방정식을 행렬로 나타내면 다음과 같다.
$\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=O$. 이때 행렬 $\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}$이 역행렬을 가지면
주어진 연립방정식은 해 $x=y=z=0$만 갖는다.
그러므로 $\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}$이 역행렬이 갖지 않을 때 문제의 조건을 만족하므로
$0=\det\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}=-(a-1)^2(a+2)$에서 $a=1,\ -2$. 구하는 값은 -1이다.

49. ①

50. ②

$(1,1,0)$와 $(0,1,-1)$은 일차독립이므로 $(1,x,1)$이 $(1,1,0)$와 $(0,1,-1)$로 생성되는 평면 α에 포함될 경우를 생각하자.

평면 α에 포함되는 임의의 벡터는 $(a,a+b,-b)$ (a, b는 실수) 꼴로 쓸 수 있으며, $x=0$일 때 $(1,x,1)$이 평면에 포함된다. 이때 세 벡터가 일차종속이 된다.

* 다른 설명: $\det\begin{pmatrix}1&1&0\\1&x&1\\0&1&-1\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow x=0$.

* 다른 설명: $\mathrm{rank}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&x&1\\0&1&-1\end{pmatrix}<3$이 될 때 일차종속.

<경우의 수와 생성함수>

1.

특성다항식 t^2-4t+4.

특성방정식의 해 $t=2$(중근)이므로 $a_n=\alpha\cdot 2^n+\beta\cdot n2^n$라 하면

초기조건에 따라 $\alpha=0,\ \beta=1$이므로 $a_n=n2^n$.

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}n(2x)^n$이므로

$$x\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^3$$

$$=x\times\left(\sum_{n=0}^{\infty}nx^n\right)^3$$

$$=x\left\{x\times\frac{d}{dx}(x+x^2+x^3+\cdots)\right\}^3$$

$$=x\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)^3$$

$$=\frac{x^4}{(1-x)^6}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}{}_6\mathrm{H}_nx^{n+4}.$$

그러므로 $0\le n\le 3$일 때 $b_n=0$, $n\ge 4$일 때 $b_n={}_6\mathrm{H}_{n-4}={}_{n+1}\mathrm{C}_5$.

2.

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\frac{x^2}{1-x}$.

$\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=x(1-x)^{-1/2}=x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-x)^n$이므로 $b_5=\binom{-1/2}{4}=\frac{105}{384}=\frac{35}{128}$.

3.

$b_0=2$이며 $\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}=-2\frac{a_n}{n!}+3$이므로 $b_{n+1}=-2b_n+3$,

$\sum_{n=0}^{\infty}b_{n+1}x^n=-2\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n+3\sum_{n=0}^{\infty}x^n$, $\frac{f-b_0}{x}=-2f+\frac{3}{1-x}$에서

$$f(x)=\frac{2+x}{(1+2x)(1-x)}=\frac{(1-x)+(1+2x)}{(1+2x)(1-x)}=\frac{1}{1+2x}+\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}((-2)^n+1)x^n.$$

$b_n=(-2)^n+1$, $a_n=n!((-2)^n+1)$.

(다른 풀이)

$b_{n+1}+2b_n=3$의 특성방정식 $t^2+2t=0$에서

일반(동차)해 $p_n=\alpha(-2)^n+\beta\cdot(0)^n$.

특수해 $q_n=\gamma$라 하면 $\gamma+2\gamma=3$에서 $\gamma=1$.

$b_0=2=p_0+q_0=\alpha+1$, $\alpha=1$. 그러므로 $b_n=(-2)^n+1\ (n\ge 0)$.

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}((-2)^n+1)x^n=\frac{1}{1+2x}+\frac{1}{1-x}$이고 $a_n=n!\{(-2)^n+1\}\ (n\ge 0)$

(다른 설명)

점화식 $b_{n+1}=-2b_n+3$에 대하여 $b_{n+1}+\alpha=-2(b_n+\alpha)$라 할 때 $\alpha=-1$.

$b_n-1=c_n$이라 하자. $c_{n+1}=-2c_n$이므로 $c_n=(-2)^n$, $b_n=c_n+1=1+(-2)^n$.

따라서 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}((-2)^n+1)x^n=\frac{1}{1+2x}+\frac{1}{1-x}$, $a_n=n!\{(-2)^n+1\}\ (n\ge 0)$.

4.

$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$, $\frac{2}{(1-x)^3}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n$이므로

$a_n=\frac{(n+2)(n+1)}{2}={}_3\mathrm{H}_n$.

$$\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=x(1+x)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+2}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^n$$

$=a_0x+\sum_{n=2}^{\infty}(a_{n-1}+a_{n-2})x^n$ (상수항 0, $a_0=1$) 이므로

$b_0=0,\ b_1=1,\ n\ge 2$일 때, $b_n=a_{n-1}+a_{n-2}=n^2$.

그러므로 $b_n=n^2\ (n\ge 0)$, 구하는 값 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{(n+2)(n+1)}=2$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}n^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3}=\frac{3}{2}.$$

5.

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n}=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!}$$

$=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ \cdots\ (2n-1)}{n!(-2)^n}=\frac{(2n)!}{n!n!(-4)^n}=\left(-\frac{1}{4}\right)^n\cdot{}_{2n}\mathrm{C}_n$이므로

$$f(n)=\frac{\binom{2n}{n}}{\binom{-1/2}{n}}=(-4)^n.$$

일반화된 이항정리에 따라

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\left(-\frac{1}{8}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)\binom{-1/2}{n}\left(-\frac{1}{8}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(1+\frac{1}{2}\right)^{-1/2}=\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

6. $g(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$, $\mathrm{E}(X)=-1+\ln 3$

가정에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nx^n$ ($n=1$부터 시작)이므로

$(g(x)-1)+xg(x)=\frac{-x}{1-(-x)}$를 풀면 $g(x)=(1+x)^{-2}$.

(다른 풀이)

특성방정식 $t^2+t=0$, $t=0,\ -1$이므로 일반해 $p_n=\alpha\cdot 0^n+\beta\cdot(-1)^n$.

특수해 $q_n=\gamma\cdot n(-1)^n$라 하면 주어진 점화식에 의해 $\gamma=1$, $q_n=n(-1)^n$.

그러므로 $a_n=p_n+q_n=(-1)^n(n+1)$.

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}{}_2\mathrm{H}_n(-x)^n=\frac{1}{(1-(-x))^2}=\frac{1}{(1+x)^2}.$$

* $g(x)\ne f(x)$

$$\mathrm{E}(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x)dx=\int_{-\frac{1}{3}}^{1}\frac{x}{(1+x)^2}dx=\int_{-\frac{1}{3}}^{1}x\cdot(1+x)^{-2}dx$$

$$=\left[x\cdot\{-(1+x)^{-1}\}\right]_{-1/3}^{1}-\int_{-1/3}^{1}-(1+x)^{-1}dx=-1+\ln 3.$$

$$\mathrm{E}(X)=\int_{-\frac{1}{3}}^{1}\frac{x}{(1+x)^2}dx=\int_{\frac{2}{3}}^{2}\frac{t-1}{t^2}dt=\int_{\frac{2}{3}}^{2}\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}dt=\left[\ln t+t^{-1}\right]_{2/3}^{2}=\ln 3-1.$$

7. 100

${}_5C_4=5$이므로 5가지 경우만 조사하면 된다.

① A, B, C / D 선발: 10×2

② A, B, C / E 선발: 10×2

③ A, B / D, E 선발: 6×3

④ A, C / D, E 선발: 9×3

⑤ B, C / D, E 선발: 5×3

그러므로 구하는 경우의 수 100.

8. $x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}$, $a_n=\frac{1}{2^{n-3}}-\frac{1}{3^{n-2}}$

특성다항식 $x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}$의 해 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$.

$a_n=\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^n+\beta\left(\frac{1}{3}\right)^n$에서 $a_1=1=a_2$이므로

$a_n=8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+(-9)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{2^{n-3}}-\frac{1}{3^{n-2}}$.

9.

생성함수 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}a_{n-1}+\frac{1}{2^n}\right)x^n\right]=1+\frac{1}{2}xf(x)+\frac{x}{2-x}$

$f(x)=\frac{4}{(2-x)^2}=\frac{1}{(1-(x/2))^2}=\sum_{n=0}^{\infty}{}_2\mathrm{H}_n\left(\frac{x}{2}\right)^n$.

$\sum_{n=0}^{\infty}na_n=\sum_{n=1}^{\infty}na_n=f'(1)=8$.

* 다른 설명

특성방정식 $t-\frac{1}{2}=0$, 일반해 $p_n=\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

특수해 $q_n=\beta\cdot n\left(\frac{1}{2}\right)^n$라 하면 $n\beta\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot(n-1)\beta\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{2^n}$에서 $\beta=1$.

$a_n=p_n+q_n=\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^n+n\left(\frac{1}{2}\right)^n$, 초기조건 $a_0=1$이므로 $a_n=(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}{}_2\mathrm{H}_n\left(\frac{x}{2}\right)^n=\frac{1}{\left(1-\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}=\frac{4}{(2-x)^2}$.

10.

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=(x+x^2+x^3+\cdots+x^7)(1+x+x^2+\cdots)^2=\frac{x(1-x^7)}{(1-x)^3}$.

$f(x)=\frac{x(1-x^7)}{(1-x)^3}=(x-x^8)\sum_{n=0}^{\infty}{}_3\mathrm{H}_nx^n$이므로

a_{15}는 x^{15}의 계수 즉, ${}_3\mathrm{H}_{14}-{}_3\mathrm{H}_7=120-36=84$.

11. ①

$1=d_0=a+b$, 특성방정식 $t^2-3t+1=0$에서 두 근의 합 $p+q=3$.

그러므로 $a+b+p+q=4$.

12. ④

① 경우의 수를 이용하는 방법

구하는 경우의 수는 다음 방정식의 정수해 개수이다.

$$a+b+c+d+e=12,\ 0\le a\le3,\ b,c,d,e\ge0$$

$a=0$, 1, 2, 3인 경우의 수를 각각 구하여 더하면

${}_4\mathrm{H}_{12}+{}_4\mathrm{H}_{11}+{}_4\mathrm{H}_{10}+{}_4\mathrm{H}_9=1325$.

② 생성함수를 이용하는 방법

조건 $0\le a\le3$, $b,c,d,e\ge0$을 만족하면서

$a+b+c+d+e=n$이 되는 경우의 수를 a_n라 할 때,

a_n의 생성함수는

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=(x^0+x^1+x^2+x^3)\cdot\left(\frac{1}{1-x}\right)^4$$
$$=\left(\frac{1-x^4}{1-x}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-x}\right)^4$$
$$=(1-x^4)\sum_{n=0}^{\infty}{}_5\mathrm{H}_nx^n\text{에서}$$

구하는 경우의 수 a_{12} 즉, x^{12}의 계수 ${}_5\mathrm{H}_{12}-{}_5\mathrm{H}_8=1325$.

13. ②

규칙을 만족하면서 만들 수 있는 n자리 자연수의 개수를 a_n라 할 때, a_n의 지수생성함수는

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n=\left(\frac{x^1}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^3\cdot\left(\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\cdots\right)^2$$
$$=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^3\cdot e^{2x}$$
$$=\frac{1}{8}(e^{3x}-3e^x+3e^{-x}-e^{-3x})\cdot e^{2x}$$
$$=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(5^n-3\cdot3^n+3\cdot1^n-(-1)^n)\frac{x^n}{n!}\text{에서}$$

구하는 경우의 수 a_8 즉, $\frac{x^8}{8!}$의 계수는 $\frac{1}{8}(5^8-3^9+2)$.

14. ③

① 포함배제의 원리를 이용하는 방법

면접 점수표의 가짓수는 다음 방정식의 정수해의 개수

$$x+y+z+w=14,\ 1\le x,y,z,w\le6\ \text{정수해 개수}$$
$$\Leftrightarrow\ a+b+c+d=10,\ 0\le a,b,c,d\le5\ \text{정수해 개수}$$

포함배제의 원리에 의해

${}_4\mathrm{H}_{10}-(a$가 6이상$+b$가 6이상$+c$가 6이상$+d$가 6이상)

$+(a,b$가 6이상$+\cdots+c,d$가 6이상)

$-(a,b,c$가 6이상$+\cdots)$

$={}_4\mathrm{H}_{10}-{}_4\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{H}_4+{}_4\mathrm{C}_2\times0=286-140=146$.

② 생성함수를 이용하는 방법

조건 $1\le x,y,z,w\le6$을 만족하면서 $x+y+z+w=n$

되는 경우의 수를 a_n라 할 때, a_n의 생성함수는

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=(x+x^2+\cdots+x^6)^4$$
$$=(x^4-4x^{10}+6x^{16}-4x^{22}+x^{28})\sum_{n=0}^{\infty}{}_4\mathrm{H}_nx^n\text{에서}$$

구하는 경우의 수 a_{14} 즉, x^{14}의 계수 ${}_4\mathrm{H}_{10}-4\cdot{}_4\mathrm{H}_4=146$.

15. ①

① 포함배제원리를 이용하는 방법

$x+y+z=30,\ 0\le x,y,z\le 20$

포함배제의 원리에 의해

${}_3\mathrm{H}_{30}-(x$가 21개 이상$+y$가 21개 이상$+z$가 21개 이상$)+(x,y$가 21개 이상$+\cdots)$

$={}_3\mathrm{H}_{30}-3\times{}_3\mathrm{H}_9+0=331.$

② 생성함수를 이용하는 방법

조건 $0\le x,y,z\le 20$을 만족하면서 $x+y+z=n$을 만족하는 경우의 수를 a_n라 할 때, a_n의 생성함수는

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=(1+x+x^2+\cdots+x^{20})^3$$

$$=\left(\frac{1-x^{21}}{1-x}\right)^3$$

$$=(1-3x^{21}+3x^{42}-x^{63})\sum_{n=0}^{\infty}{}_3\mathrm{H}_nx^n\text{에서}$$

구하는 경우의 수는 a_{30}, 즉 x^{20}의 계수 $1\cdot{}_3\mathrm{H}_{30}-3\cdot{}_3\mathrm{H}_9=331.$

16. ③

* $S.\ T$가 구성되는 경우의 수

(i) S에서 5명 통과: ${}_5\mathrm{C}_5$

T에서 $5,4,3,2,1,0$명 통과: ${}_5\mathrm{C}_5+\cdots+{}_5\mathrm{C}_0=2^5$

(ii) S에서 4명 통과: ${}_5\mathrm{C}_4$

T에서 $4,3,2,1,0$명 통과: ${}_4\mathrm{C}_4+\cdots+{}_4\mathrm{C}_0=2^4$

(iii) S에서 3명 통과: ${}_5\mathrm{C}_3$

T에서 $3,2,1,0$명 통과: 2^3

(iv) S에서 2명 통과: ${}_5\mathrm{C}_2$

T에서 $2,1,0$명 통과: 2^2

(v) S에서 1명 통과: ${}_5\mathrm{C}_1$

T에서 $1,0$명 통과: 2^1

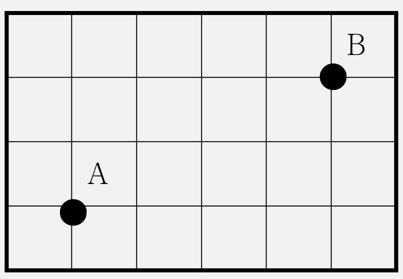
(vi) S에서 0명 통과: ${}_5\mathrm{C}_0$

T에서 0명 통과: 2^0

그러므로 구하는 경우의 수는 $\sum_{k=0}^{5}{}_5\mathrm{C}_k2^k\times1^{5-k}=(2+1)^5=3^5.$

* $\{1,2,3,4,5\}$에서 $\{0,1,2\}$로의 일대일대응의 개수 $|\{0,1,2\}|^{|\{1,2,3,4,5\}|}=3^5.$

17. ③



(i) 집에서 A까지 가는 경우의 수 2

(ii) A에서 B까지 가는 경우의 수 $\frac{6!}{4!2!}=15$

(iii) B에서 학교까지 가는 경우의 수 2

(i), (ii), (iii)은 동시에 일어나야 하므로

구하는 경우의 수는 $2\times15\times2=60.$

18. 점화 관계: $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=4,\ a_n=2n^2-n$

$(a_{n+1}-a_n=4n+1)$

$a_2-a_1=5$

$a_3-a_2=9=5+4=a_2-a_1+4$

$a_4-a_3=13=9+4=a_3-a_2+4$

$\vdots$

이므로 $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n+4$로부터 $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=4.$

특성방정식 $t^2-2t+1=0$에서 $t=1$이므로

일반해 $t_n=\alpha\cdot1^n+\beta n\cdot1^n=\alpha+\beta n.$

특수해 $p_n=\gamma n^2$라 할 때 항등식 $\gamma(n+2)^2-2\gamma(n+1)^2+\gamma n^2=4$에서 $\gamma=2.$

따라서 $a_n=t_n+p_n=\alpha+\beta n+2n^2$이고 $a_1=1,\ a_2=6$로부터 $\alpha=0,\ \beta=-1.$

그러므로 $a_n=2n^2-n.$

* 다른 풀이

$a_{n+1}-a_n=4(n-1)+5=4n+1$이다.

따라서 $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k+1)=2n^2-n.$

19. 600

① 경우의 수를 이용하는 방법

(i) $\{1,3,5,7\}=\{a,b,c,d,e\}$일 때

1, 3, 5, 7이 각각 중복되는 경우: $4\times\frac{5!}{2!1!1!1!}=240,$

(ii) $\{1,3,5,7\}\subsetneq\{a,b,c,d,e\}$일 때

2, 4, 6을 뽑아 1, 3, 5, 7과 배열: $3\times5!=360.$

그러므로 구하는 경우의 수는 600

② 생성함수를 이용하는 방법(뽑고 배열하기)

조건을 만족하면서 만들 수 있는 n자리 자연수의 개수를 a_n라 하면 a_n의 생성함수는

(홀수는 1개 이상, 짝수는 0개 이상 뽑고+배열)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n=(e^x-1)^4(e^x)^3$$

$$=e^{3x}(e^{4x}-4e^{3x}+6e^{2x}-4e^x+1)$$

$$=e^{7x}-4e^{6x}+6e^{5x}-4e^{4x}+e^{3x}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(7^n-4\cdot6^n+6\cdot5^n-4\cdot4^n+3^n)\frac{x^n}{n!}$$

에서 구하는 경우의 수는 a_5 즉, $\frac{x^5}{5!}$의 계수는

$7^5-4\cdot6^5+6\cdot5^5-4\cdot4^5+3^5$

$=16807-31104+18750-4096+243$

$=600.$

20.

(1) 구별되지 않는 6개를 3명에게 나누는 경우의 수 ${}_3\mathrm{H}_6=28$

* 학생에게 나누어주는 개수를 x_1, x_2, x_3라 할 때

$x_1+x_2+x_3=6$의 음이 아닌 정수해 개수

$f(1,m)+f(2,m)+\cdots+f(n,m)={}_m\mathrm{H}_1+{}_m\mathrm{H}_2+\cdots+{}_m\mathrm{H}_n$

$={}_m\mathrm{C}_1+{}_{m+1}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{m+n-1}\mathrm{C}_n$,

$f(n,m+1)-1={}_{m+1}\mathrm{H}_n-1={}_{m+n}\mathrm{C}_n-1$.

(2) $f(1,m)+f(2,m)+\cdots+f(n,m)=f(n,m+1)-1$, 수학적 귀납법 적용

(i) $n=1$일 때

$f(1,m)={}_m\mathrm{H}_1={}_m\mathrm{C}_1=m$,

$f(1,m+1)-1={}_{m+1}\mathrm{H}_1-1={}_{m+1}\mathrm{C}_1-1=m$

이므로 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 하자.

즉, $f(1,m)+f(2,m)+\cdots+f(k,m)=f(k,m+1)$

$f(1,m)+f(2,m)+\cdots+f(k,m)+f(k+1,m)$

$={}_{m+k}\mathrm{C}_k-1+f(k+1,m)$

$={}_{m+k}\mathrm{C}_k-1+{}_m\mathrm{H}_{k+1}$

$={}_{m+k}\mathrm{C}_k-1+{}_{m+k}\mathrm{C}_{k+1}$

$={}_{m+k+1}\mathrm{C}_{k+1}-1=f(k+1,m+1)-1$이므로

$n=k+1$일 때도 등식이 성립한다.

그러므로 수학적 귀납법에 의해 주어진 등식은 참.

21. 25

구별되는 다섯 개를 구별되지 않는 상자에 넣는 경우의 수

(i) 2, 2, 1개 넣는 경우: ${}_5\mathrm{C}_2\cdot{}_3\mathrm{C}_2\cdot{}_1\mathrm{C}_1\times\dfrac{1}{2!}=15$

(ii) 1, 1, 3개 넣는 경우: ${}_5\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_3\times\dfrac{1}{2!}=10$

그러므로 구하는 경우의 수는 25.

22. 45개

① 경우의 수를 이용하는 방법

주어진 방정식은 다음 방정식과 동치이다.

$(x-1)+(y-3)+(-z+2)=8$, $x-1\ge 0$, $y-3\ge 0$, $-z+2\ge 0$

주어진 방정식의 정수해의 개수 ${}_3\mathrm{H}_8=45$.

② 생성함수를 이용하는 방법(뽑기)

주어진 조건을 만족하는 $x+y-z=n$의 정수해의 개수 a_n라 하자. a_n의

생성함수 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=(x+x^2+\cdots)(x^3+x^4+\cdots)(x^{-2}+x^{-1}+\cdots)=\frac{x^2}{(1-x)^3}$

$$=x^2\sum_{n=0}^{\infty}{}_3\mathrm{H}_nx^n.$$

구하는 경우의 수는 a_{10} 즉, x^{10}의 계수 ${}_3\mathrm{H}_8=45$.

23.

피보나치의 저서 「산반서(Liber Abaci)」에 다음과 같은 문제가 있다.

> 한 사람이 암, 수 한 쌍의 토끼를 기르는데 한 달에 한 번씩 한 쌍의 새끼(암, 수)를 출산한다고 합니다. 새로 출산된 새끼 한 쌍은 한 달이면 다 자라고, 두 달 후부터는 매달 한 쌍의 새끼를 출산한 일 년 후에는 모두 몇 쌍의 토끼를 출산하겠습니까?

이 문제의 풀이에 나오는 수열을 Lucas가 피보나치 수열이라고 이름 붙였다.

① $x_n=f_{n+1}\,f_{n-1}-f_n^{\,2}$라 하면

$x_{n+1}=f_{n+2}\,f_n-f_{n+1}^{\,2}$

$=(f_{n+1}+f_n)f_n-(f_n+f_{n-1})f_{n+1}$

$=f_n^2-f_{n-1}f_{n+1}$

$=-x_n$.

② $x_2=f_3f_1-f_2^2=2\cdot1-1^2=1$이므로 $n\ge 2$일 때 $\{x_n\}$은 공비 -1인 등비수열이다. 따라서 $x_n=1\cdot(-1)^n$ $(n\ge 2)$.

③ $f_{n+1}f_{n-1}-f_n^{\,2}=(-1)^n$에서 $f_{n+1}f_{n-1}=f_n^{\,2}+(-1)^n$ $(n\ge 2)$.

24. ②

$c_n=\log_2a_n$, $c_n=\dfrac{c_{n-1}+c_{n-2}}{2}$, $n=3,\ 4,\ \cdots$.

특성방정식 $2t^2-t-1=0$, $t=1,\ -\dfrac{1}{2}$.

$c_n=\alpha+\beta\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n=\log_2a_n$,

$a_n=2^{\alpha+\beta(-2)^{-n}}$, $\alpha=2$, $\beta=4$. $\therefore$ $a_n=2^{2+4(-2)^{-n}}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=4$.

25. ④

$\displaystyle\sum_{j=1}^{i}{}_iC_j={}_iC_1+{}_iC_2+\cdots+{}_iC_i=2^i-1$이므로

$\displaystyle\sum_{i=1}^{9}\sum_{j=1}^{i}{}_iC_j=\sum_{i=1}^{9}(2^i-1)=\frac{2(2^9-1)}{2-1}-9=1013.$

1.

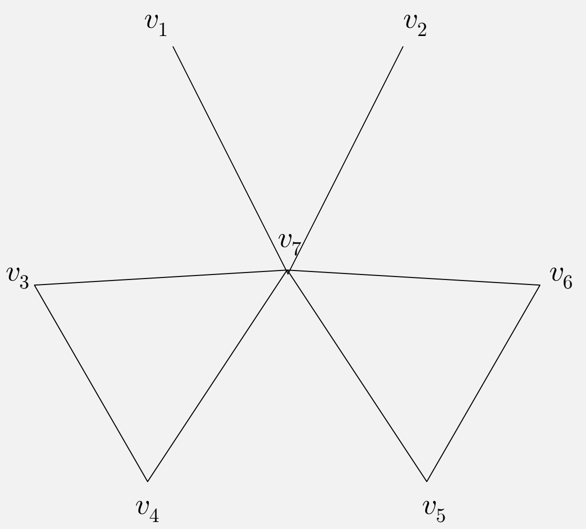
G의 변의 개수 e라 하자.

(가)에 따라 $\deg(v_1) \le 1$, $\deg(v_7) \le 7$, G는 단순그래프이므로 $\deg(v_7) \le 6$.

(나)에 따라 $n \in \{2,3,4,5,6\}$이면 $\deg(v_n) \le 2$.

여기서 $\sum_{v \in V} \deg(v) \le 17$, $2e = \sum \deg(v)$는 짝수이므로 $\sum_{v \in V} \deg(v) \le 16$.

$\deg(v_1) = 1 = \deg(v_2)$, $\deg(v_3) = \deg(v_4) = \deg(v_5) = \deg(v_6) = 2$, $\deg(v_7) = 6$을 만족하는 그래프 G가 존재하므로, $2e = \sum_{v \in V} \deg(v) = 16$, $e = 8$.



2.

근접행렬 B로부터 인접행렬 $A = \begin{bmatrix} 0&1&0&0 \\ 1&0&1&1 \\ 0&1&0&1 \\ 0&1&1&0 \end{bmatrix}$이므로 $L = \begin{bmatrix} 1&-1&0&0 \\ -1&3&-1&-1 \\ 0&-1&2&-1 \\ 0&-1&-1&2 \end{bmatrix}$.

$\det(L) = \begin{vmatrix} 1&-1&0&0 \\ 0&2&-1&-1 \\ 0&-1&2&-1 \\ 0&-1&-1&2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2&-1&-1 \\ -1&2&-1 \\ -1&-1&2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3&-3 \\ -3&3 \end{vmatrix} = 0.$

$(-(2,-1,-1) = (-1,2,-1) + (-1,-1,2)$, 일차종속.)

$A^2 = \begin{bmatrix} 1&0&1&1 \\ 0&3&0&1 \\ 1&1&2&1 \\ 1&1&1&2 \end{bmatrix}$, $A^4 = A^2 \cdot A^2$의 1행 4열 성분$= (1\,0\,1\,1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 4$. 구하는 값 4.

* $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 & x_2 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_2 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_4 & x_2 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_4 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$이므로 길이 4인 길의 개수 4.

3. 16

$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0&1&0&2 \\ 1&0&1&1 \\ 0&1&0&3 \\ 2&1&3&0 \end{pmatrix}$이므로 구하는 값 $\sum_{i,j} (a_{ij}) = 16$

* 다른 설명

A의 모든 성분의 합은 각 행(열)의 합들을 모두 더한 것으로 각 꼭짓점의 차수의 합과 같다. 따라서 구하는 값은 주어진 그래프의 변의 수의 2배, 16이다.

* 루프는 없으나 다중변 있다. 단순그래프 아님

* 평면에 변이 서로 교차하지 않게 그려지므로 평면그래프

* 임의의 두 꼭짓점 사이에 경로 있으므로 연결그래프

4.

① $G = G(V, E)$에 대하여

$2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v) = 4+6+4+7+2+8+4+6+3 = 44$이므로 $|E| = 22$.

② G가 평면그래프라 하자.

G의 임의의 두 꼭짓점 사이에 경로가 존재하므로 G는 연결그래프이다.

따라서 $22 = |E| \le 3|V| - 6 = 21$, 모순.

③ $\{v_2, v_3, v_5, v_7\}$으로 이루어진 G의 부분그래프는 K_4와 동형이다.

$\chi(K_4) = 4$이므로 $\chi(G) \ge \chi(K_4) = 4$.

한편 $v_2, v_4, v_6, v_8, v_{10}$와 v_3, v_9와 v_5와 v_7은 각각 다른 색으로 채색이 가능하므로 $\chi(G) = 4$.

5. ①

ㄱ. 조건을 만족하는 단순그래프가 존재할 필요충분조건

차수열 $(\mathbf{4}, \underline{4,3,3,2}, 0)$: 그래프적

$\Leftrightarrow$ $(4-1, 3-1, 3-1, 2-1, 0) = (\mathbf{3}, \underline{2,2,1}, 0)$: 그래프적

$\Leftrightarrow$ $(2-1, 2-1, 1-1, 0) = (1,1,0,0)$: 그래프적

●——● ● ● 는 단순그래프이므로

차수 4, 3, 3, 2, 0인 단순그래프 있다.

ㄴ. 육각형 / 연결되지 않은 두 삼각형은 조건을 만족하는 두 개의 단순그래프이다.

ㄷ. 조건을 만족하는 단순그래프는 꼭짓점의 개수가 6개, $d_1 \ge 6$이 되는데, 이 경우 v_1에 루프 혹은 다중변이 존재하게 되어 단순그래프라는 데 모순이 된다.

6. ③

(가)에 의해 $v = 5+6 = 11$, (나)에 의해 $e = 5+9+5 \times 6 = 44$

$m = \sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2e = 88$.

(나)에 의해 C_5의 임의의 꼭짓점과 $K_{3,3}$의 임의의 꼭짓점은 인접하므로

그래프 G의 채색수는 C_5의 채색수와 $K_{3,3}$의 채색수의 합이다.

$\chi(C_5) = 3$, $\chi(K_{3,3}) = 2$이므로 $n = 5$.

그러므로 $m + n = 93$.

7. ③

ㄱ. A^2의 (i,i)성분은 꼭짓점 v_i에서 v_i에 이르는 길이 2인 경로의 수이다. 즉, v_i의 차수를 나타내므로 A^2의 대각합은 $2m$이다.

ㄴ. $A^k (k \ge 3)$의 대각합은 길이 k인 경로의 개수.

(회로만 있는 것이 아니다.)

ㄷ. $BB^T = D + A$이며 G는 단순그래프이므로 A의 모든 (i,i)성분은 0이다. 따라서 BB^T의 대각성분 즉, (i,i)성분은 $\deg(v_i)$이다.

8. ⑤

ㄱ. Kuratowski 정리에 의해 옳다.

* 다른 설명

$K_{3,4}$는 연결그래프이다. $K_{3,4}$가 평면그래프이면

오일러 공식에 의해 $v-e+f=2$에서 $f=7$이다.

$K_{3,4}$는 단순그래프이므로 임의의 면의 차수는 1, 2가 될 수 없고,

이분그래프이므로 3도 될 수 없다.

따라서 $K_{3,4}$의 모든 면의 차수는 4이상이다.

한편 $28=4f \le \sum_{f\in F}\deg(f)=2e=24$가 되어 모순.

그러므로 $K_{3,4}$는 평면그래프가 아니다.

ㄴ. 평면그래프 G의 모든 꼭짓점의 차수 6이상 가정.

$6v \le \sum_{v\in V}\deg(v)=2e$에서 $3v \le e$이며, $e \le 3v-6$이므로 $3v \le 3v-6$, 모순.

따라서 평면그래프에 차수 5이하 꼭짓점 있다.

ㄷ. 평면에 그렸으므로 평면그래프, 하나의 면만 사각형이고 나머지 면은 삼각형이므로 임의의 두 꼭짓점이 연결되어 있으므로 연결그래프,

따라서 주어진 그래프는 연결평면그래프이다.

그러므로 다음 등식과 공식 사용가능

$\sum_{f\in F}\deg(f)=4\times1+3(f-1)=3f+1$에서 $f=\dfrac{2e-1}{3}$,

오일러 공식에 의해 $v-e+f=2$에서 $e=83$.

9. ②

분할하여 얻은 그래프를 G라 하면

가정에 의해 G는 연결, 평면, 단순그래프.

G의 꼭짓점의 수 v, 변의 수 e, 면의 수 f에 대하여

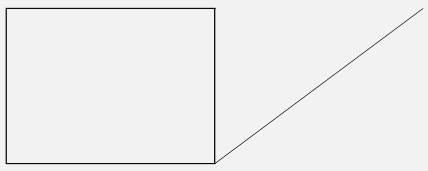
$v=11$, $\sum_{v\in V}\deg(v)=4\cdot11=2e$에서 $e=22$,

$v-e+f=2$에서 $f=13$이다. 삼각형의 개수 x라 하면

$\sum_{f\in F}\deg(f)=2e=44=3x+4(13-x)$에서 $x=8$.

10. ⑤

주어진 문제 상황을 그래프 문제로 생각하자.



위 그래프를 4가지 색으로 칠하는 방법의 수이다.

제거-축약정리에 의해 채색다항식은 다음과 같다.

$$P_G(x)=x(x-1)^4-\{x(x-1)^3-x(x-1)^2\}=x(x-1)^2(x^2-3x+3)$$

그러므로 구하는 값 $P_G(4)=252$.

* $P_G(0)=P_G(1)=0$, $P_G(2)=2$, $P_G(3)=36$.

11. $A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}$, a에서 세 점을 지나 c에 이르는 경로의 수

* 루프, 다중변 없다. 단순그래프

* 평면에 변이 서로 교차하지 않게 그려지므로 평면그래프

* 임의의 두 꼭짓점 사이에 경로 있으므로 연결그래프

* $v=4$, $e=5$, $f=3$

① $2e=\sum\deg(f)=3+3+4$ (삼각형 2개, 외부 사각형 1개)

$\quad=\sum\deg(v)=3+2+3+2$

② $e=5\le 3v-6=6$

* 채색다항식 $P_G(x)=x(x-1)(x-2)^2$,

* 채색수 $\min\{x\in\mathbb{Z}^+ \mid P_G(x)\ne0\}=\chi(G)=3$.

12.

$m=1$일 때 n, 1 / $m\ge2$일 때 $n(n-1)^{m-1}$, 2

1을 칠하면 2는 1과 다른 색으로, 3은 2와 다른 색으로 $\cdots$,

m은 $m-1$과 다른 색으로 칠하면 되므로

① $m=1$일 때 $P_G(n)=n$이고, $\min\{n\in\mathbb{Z}^+ \mid P_G(n)\ne0\}=1$이므로 $\chi(G)=1$.

② $m\ge2$일 때

$P_G(n)=n\times(n-1)\times(n-1)\times\cdots\times(n-1)\times(n-1)=n(n-1)^{m-1}$이고,

$\min\{n\in\mathbb{Z}^+ \mid P_G(n)\ne0\}=2$이므로 $\chi(G)=2$.

그래프 G를 색칠하는 데 필요한 색의 최소 개수는 2.

13.

(1) 인접행렬 $A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}$

(2) 곧바로 가는지 알 수 있는 행렬 A,

한 지점을 거쳐서 갈 수 있는지 알 수 있는 행렬 A^2.

그러므로 구하는 행렬 $A+A^2=\begin{pmatrix}2&1&3&1\\1&0&1&0\\1&1&1&1\\2&1&2&1\end{pmatrix}$.

[확률과통계]

〈이산형〉

1.

$1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 0+\frac{c}{8}+\frac{c}{8}$, $c=4$.

$\mathrm{P}(X \geq 4) = \int_4^{\infty} 4x^{-3}dx = \frac{1}{8}$.

우수 제품이 3개 이상 있을 확률 $\left(\frac{1}{8}\right)^4 + 4 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^3\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{29}{4096}$.

2. 29

$\mathrm{E}(X_i)=5=\mathrm{V}(X_i)$, $\frac{140}{n-1}=\mathrm{V}(X_i)=5$, $n=29$.

3. 4, $\frac{4}{5}$

$1=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$에서 $p+q=\frac{5}{24}$.

$\frac{11}{12}=E(X)=0\cdot P(X=0)+1\cdot P(X=1)+2\cdot P(X=2)$에서

$q=\frac{1}{24}$, $p=\frac{1}{6}$, $p\times\frac{1}{q}=4$.

$$P(X+Y\leq 4 \mid Y-X=2)=\frac{P(X+Y\leq 4,\ Y-X=2)}{P(Y-X=2)}$$

$$=\frac{P(X=0,\ Y=2)+P(X=1,\ Y=3)}{P(X=0,\ Y=2)+P(X=1,\ Y=3)+P(X=2,\ Y=4)}=\frac{\frac{1}{6}}{q+\frac{1}{6}}=\frac{4}{5}.$$

4. $\frac{5}{6}$

$$\mathrm{E}[X \mid Y=1]=\sum_{x=0}^{2} x \cdot \frac{f(x,1)}{f_Y(1)}=\sum_{x=0}^{2} x \cdot \frac{f(x,1)}{\frac{2}{15}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}}=\frac{5}{2}\left(0+\frac{1}{5}+\frac{2}{15}\right)=\frac{5}{6}.$$

5. $n=9$

A가 동전을 던져 앞면이 나오는 횟수 X,

B가 동전을 던져 앞면이 나오는 횟수 Y라 하자.

동전을 던지는 시행은 독립시행이므로 X와 Y는 독립이다.

$$\frac{6}{13}=\mathrm{P}(\mathrm{X}=1 \mid \mathrm{X}+\mathrm{Y}=2)$$

$$=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{X}=1,\mathrm{X}+\mathrm{Y}=2)}{\mathrm{P}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}=2)}$$

$$=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{X}=1,\mathrm{Y}=1)}{\mathrm{P}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}=2)}$$

$$=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{X}=1)\cdot\mathrm{P}(\mathrm{Y}=1)}{\mathrm{P}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}=2)}$$

$$=\frac{{}_n\mathrm{C}_1 p^1(1-p)^{n-1}\cdot {}_{2n}\mathrm{C}_1 p^1(1-p)^{2n-1}}{{}_{3n}\mathrm{C}_2 p^2(1-p)^{3n-2}}$$

$=\frac{2n^2}{3n(3n-1)/2}$에서 $n^2-9n=0$.

그러므로 $n=9$.

6. ⑤

ㄱ. trivial

ㄴ. 가능한 모든 경우의 확률을 더하면 1이므로 옳다.

ㄷ. 12번째까지는 4번 성공하고 13번째에 성공할 확률은 ${}_{12}\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{8}\right)^4\left(\frac{7}{8}\right)^8\times\left(\frac{1}{8}\right)$이므로 옳다.

* 음이항분포

n회의 독립시행에서 k번 성공할 때까지 필요한 총 횟수에 대한 확률변수를 음이항확률변수라 한다. $k=1$일 때 기하분포라 한다.

① 확률질량함수 $f(x)={}_{x-1}\mathrm{C}_{k-1}p^k q^{x-k}$

② $M_X(t)=(pe^t/(1-qe^t))^k$

③ $\mathrm{E}(X)=k/p$, $\mathrm{V}(X)=kq/p^2$

7. ②

흰 공일 사건을 E라 하자.

가정에 의해 $\mathrm{P(A)}=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P(B)}=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P(E|A)}=\frac{3}{5}$, $\mathrm{P(E|B)}=\frac{m}{m+2}$이므로

$$\frac{2}{7}=\mathrm{P(A|E)}=\frac{\mathrm{P(E|A)P(A)}}{\mathrm{P(E)}}$$

$$=\frac{\mathrm{P(E|A)P(A)}}{\mathrm{P(E|A)P(A)+P(E|B)P(B)}}$$

$$=\frac{0.6\times0.\dot{3}}{0.6\times0.\dot{3}+[m/(m+2)]\times0.\dot{6}}$$

$=\frac{0.6}{0.6+2m/(m+2)}$, $m=6$.

8. ④

$$f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{\frac{3x-y}{12}}{\frac{3-y}{12}+\frac{6-y}{12}}=\frac{3x-y}{9-2y},\ (x,y=1,2)$$

$$\mathrm{E}(X \mid Y=1)=\sum_{x=1}^{2} x\cdot\frac{3x-1}{9-2}=\frac{12}{7}.$$

9. ④

$p_{Y|X}(n|m)$=(동전을 m번 던져 앞면이 n번 나올 확률)

$$={}_m\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{m-n}={}_m\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{2}\right)^m.$$

전확률의 법칙(law of total probability)에 의해

$$p_Y(0)=\sum_{m=1}^{6} p_{Y|X}(0|m)\cdot p_X(m)$$

$$=\sum_{m=1}^{6} {}_m\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^m\cdot\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{6}\sum_{m=1}^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^m=\frac{63}{6\cdot 64}.$$

* 초기하분포

특정한 속성을 갖는 원소 m개를 포함한 전체 N개의 원소 중에서 임의로 n개의 원소를 비복원추출할 때, n개에 포함된 특정한 속성을 갖는 원소의 개수에 대응하는 확률변수를 초기하확률변수라 한다. 초기하분포는 m과 N이 무한히 커질 때 $p=\frac{m}{N}$인 이항분포로 근사한다.

① 확률질량함수 $f(x)=\frac{{}_m\mathrm{C}_x\cdot{}_{N-m}\mathrm{C}_{n-x}}{{}_N\mathrm{C}_n}$

$(0\leq x\leq \min\{m,n\})$

② $\mathrm{E}(X)=\frac{nm}{N}$, $\mathrm{V}(X)=\frac{npq(N-n)}{N-1}$

10. ④

$E(Y)=E(X^2)=M_X''(0)=\frac{3}{5}$, $E(Y^2)=E(X^4)=M_X^{(4)}(0)=\frac{3}{5}$이므로

$V(Y)=\frac{3}{5}-\frac{9}{25}=\frac{6}{25}$.

* 주어진 적률 생성함수로부터 X의 분포는 다음과 같다.

X	0	-1	1	계
$P(X)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

11. ⑤

사각연필을 i번째 굴렸을 때 윗면에 나온 수 X_i라 하면

$X_1,\ X_2,\ X_3,\ \cdots,\ X_{80}$은 독립이며, X_i의 분포는 다음과 같다.

X_i	1	2	3	4	계
$P(X_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

이때 $E(X_i)=\frac{5}{2}$, $V(X_i)=\frac{5}{4}$이다.

한편 $X=\frac{1}{80}(X_1+X_2+X_3+\cdots X_{80})$라 하면

$E(X)=\frac{1}{80}\cdot 80\cdot\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$, $V(X)=\frac{1}{80^2}\cdot 80\cdot\frac{5}{4}=\frac{1}{8^2}$.

그러므로 $x=\Pr(X_1+X_2+\cdots+X_{80}\geq 216)=\Pr(X\geq 2.7)$

$\approx \Pr(Z\geq 1.6)=1-\Phi(1.6)$.

12. ②

시합 횟수를 X라 하면 X의 확률분포는 다음과 같다.

X	3	4	5	계
P(X)	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	1

$E(X)=\frac{33}{8}$.

13. $n=1,\ 2$

$E_n=0\cdot(1-\frac{1}{2^n})+n\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{n}{2^n}$.

$f(x)=\frac{x}{2^x}$, $f'(x)=2^{-x}(1-x\ln 2)$는 $x\geq 2$일 때 $f'(x)<0$이므로

$n=1,\ 2$일 때 E_n은 최댓값을 갖는다.

14. X의 적률생성함수를 이용하자.

$M_X(t)=E(e^{tX})=\sum_{x=0}^{n}e^{tx}\cdot{}_nC_x p^x(1-p)^x=\sum_{x=0}^{n}{}_nC_x(pe^t)^x(1-p)^{n-x}$

$=[pe^t+(1-p)]^n$이므로

$E(X)=M_X'(0)=np$.

15. 짝수 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이므로 $X\sim B(288,\frac{1}{3})$.

$E(X)=96$, $V(X)=64=8^2$.

시행횟수가 충분히 크므로 중심극한정리에 따라 $X\sim N(96,8^2)$.

$P(88\leq X\leq 112)=P(-1\leq Z\leq 2)=0.8185$.

16. $\frac{2}{7}$

a에서 생산하는 제품을 선택할 사건 A,

b에서 생산하는 제품을 선택할 사건 B,

c에서 생산하는 제품을 선택할 사건 C라 하자.

A, B, C는 쌍마다 배반 사건이므로

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)$.

가정에 의해 $P(A)=0.2$, $P(B)=0.3$, $P(C)=0.5$,

$P(E|A)=0.005$, $P(E|B)=0.01$, $P(E|C)=0.02$.

베이즈 정리에 따라 구하는 확률은

$P(A\cup B|E)=\frac{P((A\cup B)\cap E)}{P(E)}=\frac{P(A\cap E)+P(B\cap E)}{P(E)}$

$=\frac{P(E|A)P(A)+P(E|B)P(B)}{P(E|A)P(A)+P(E|B)P(B)+P(E|C)P(C)}$

$=\frac{2}{7}$.

17.

(1)

X	P(X)
0	1/4
1	1/2
2	1/4
합	1

Y	P(Y)
0	1/2
1	1/2
합	1

X \ Y	0	1	합
0	1/4	0	1/4
1	0	1/2	1/2
2	1/4	0	1/4
합	1/2	1/2	1

(2) $\sigma_{XY}=E(XY)-\mu_X\mu_Y=\sum_{x,y}\boldsymbol{xy}f(x,y)-1\cdot(1/2)=1/2-1/2=0$.

(3) $P(X=0,Y=0)=1/4\neq P(X=0)\cdot P(Y=0)=1/8$이므로

X와 Y는 독립이 아니다.

18.

하위 영역	배점	예상정답율(%)	관련사고영역	출제자
교직수학	5	50	이해	전무근
출제 내용 관련자료	고등학교 수학Ⅰ 교과서. 동화사. 1998. pp.233-236. 수학과 교육과정, 교육부. 1997. p.103.			

(유형 1) 강원도를 여행할 사건을 A, 제주도를 여행할 사건을 B라 하면

$p(A)=\frac{2}{5}$, $p(B)=\frac{1}{4}$이고 A, B는 독립이므로

$p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B)=\frac{1}{10}$

한편, $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$에서 $p(A\cup B)=\frac{11}{20}$

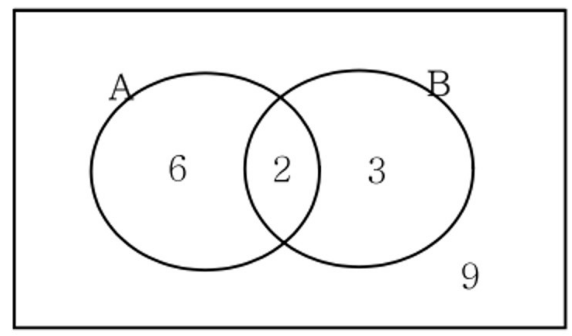
구하는 조건부확률은 $p(B^c\,|\,A^c)=\frac{p(A^c\,|\,B^c)}{p(A^c)}=\frac{1-p(A\cup B)}{1-p(A)}$

$$=\frac{1-\frac{11}{20}}{1-\frac{2}{5}}=\frac{3}{4}$$

(유형 2) $p(A)=\frac{2}{5}$, $p(B)=\frac{1}{4}$이고 A, B는 독립이므로

$p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B)=\frac{1}{10}$

한 반의 학생을 20명으로 생각하여 벤 다이어그램을 그리면 다음과 같다.



$p(A^c\cap B^c)=\frac{9}{20}$

$p(A^c)=\frac{3}{20}+\frac{9}{20}=\frac{12}{20}$,

$p(B^c\,|\,A^c)=\frac{p(A^c\,|\,B^c)}{p(A^c)}$

$=\frac{1-p(A\cup B)}{1-p(A)}=\frac{3}{4}$

* 채점기준

(유형 1) 강원도를 여행할 사건을 A, 제주도를 여행할 사건을 B라 하면

$p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B)=\frac{1}{10}$을 구하면

$p(A\cup B)=\frac{11}{20}$를 구하면

$p(B^c\,|\,A^c)=\frac{p(A^c\,|\,B^c)}{p(A^c)}$를 사용하면

$\frac{p(A^c\,|\,B^c)}{p(A^c)}=\frac{1-p(A\cup B)}{1-p(A)}$를 사용하면

$p(B^c\,|\,A^c)=\frac{3}{4}$을 구하면

(유형 2) $p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B)=\frac{1}{10}$을 구하면

$p(A^c\cap B^c)=\frac{9}{20}$를 구하면

(벤 다이어그램에서 $A\cap B$와 $(A\cup B)^c$의 개수 또는 확률이 정확하면 각각 1점)

$p(B^c\,|\,A^c)=\frac{p(A^c\,|\,B^c)}{p(A^c)}$의 식을 사용하면

$\frac{p(A^c\,|\,B^c)}{p(A^c)}=\frac{1-p(A\cup B)}{1-p(A)}$를 사용하면

$p(B^c\,|\,A^c)=\frac{3}{4}$을 구하면

19. ①

$M_X(t)=E(e^{tX})=\sum_{x=1}^{\infty}e^{tx}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{e^t}{2-e^t}$.

$\mathrm{E}(X)=M_X{}'(0)=2$, $\mathrm{E}(X^2)=M_X{}''(0)=6$. $\mathrm{V}(X)=6-2^2=2$.

20. ②

학생 2명을 뽑아 순서쌍으로 나타내면 다음과 같다.

$(1,2)$	$(2,1)$	$(3,1)$	$(4,1)$	$(5,1)$
$(1,3)$	$(2,3)$	$(3,2)$	$(4,2)$	$(5,2)$
$(1,4)$	$(2,4)$	$(3,4)$	$(4,3)$	$(5,3)$
$(1,5)$	$(2,5)$	$(3,5)$	$(4,5)$	$(5,4)$

서로의 위치를 3번 바꾸었을 때, 첫 번째 학생이 1번일 경우의 수 4이므로

구하는 확률 $\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$.

21. ②

$x+y+\frac{1}{3}=1$에서 $0\le x\le\frac{2}{3}$. $\mathrm{E}(X)=4x+\frac{5}{3}$, $\mathrm{E}(X^2)=\frac{11}{3}+24x$이므로

$\mathrm{V}(X)=\frac{11}{3}+24x-\left(4x+\frac{5}{3}\right)^2=-16x^2+\frac{32}{3}x+\frac{8}{9}=-16\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{3}$.

따라서 $x=\frac{1}{3}$일 때 분산이 최대이다.

22. ③

A가 이길 확률을 구하자.

① A가 2번 연속 이기는 경우

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

② A와 B가 각각 1번 이기고 A가 이기는 경우

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

③ A가 1번, B가 2번 이기고 A가 이기는 경우

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$

따라서 A가 이기는 확률 $\frac{11}{16}$이므로

A는 1100원, B는 500원 갖는 것이 타당하다.

23. ①

$X\sim\mathrm{B}(6,\frac{1}{4})$. $\mathrm{E}(X)=\frac{3}{2}$, $\mathrm{V}(X)=\frac{9}{8}=\mathrm{E}(X^2)-\frac{9}{4}$에서 $\mathrm{E}(X^2)=\frac{27}{8}$.

$X+Y=6$에서 $Y=6-X$.

$\mathrm{E}\left[(X-Y)^2\right]=\mathrm{E}\left[(2X-6)^2\right]=\mathrm{E}(4X^2-24X+36)=\frac{27}{2}-36+36=\frac{27}{2}$.

24. ③

주머니에서 C_i을 뽑는 사건 C_i $(i=1,\ 2,\ 3)$,

주사위를 4번 던져 앞면이 2번 나오는 사건 H라 하자.

가정에 의해 $\mathrm{P}(C_1)=\mathrm{P}(C_2)=\mathrm{P}(C_3)=\frac{1}{3}$,

$\mathrm{P}(H|\,C_1)={}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{128}$,

$\mathrm{P}(H|\,C_2)={}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{8}$,

$\mathrm{P}(H|\,C_3)={}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{27}{128}$.

$\mathrm{P}(H)=\mathrm{P}(H|\,C_1)\mathrm{P}(C_1)+\mathrm{P}(H|\,C_2)\mathrm{P}(C_2)+\mathrm{P}(H|\,C_3)\mathrm{P}(C_3)=\frac{17}{64}$이므로

구하는 확률 $\mathrm{P}(C_2|H)=\frac{\mathrm{P}(H|\,C_2)\mathrm{P}(C_2)}{\mathrm{P}(H)}=\frac{8}{17}$.

1. 500, 50

$\mathrm{Var}(X+Y)=400^2+300^3=500^2,\ \sigma_{X+Y}=500,\ c=\dfrac{\sigma_{X+Y}}{\sqrt{100}}=50$

2. 9, $\dfrac{7}{3}$

$\mu_Y=0+0+\cdots+0=0,\ \mathrm{V}(Y)=\sigma_Y^2=1+1+\cdots+1=9,\ \ Y\sim N(0,3^2).$

$\mathrm{P}(Y\ge -7)=\mathrm{P}\left(Z\ge -\dfrac{7}{3}\right)=\mathrm{P}\left(X_1\ge -\dfrac{7}{3}\right)=\mathrm{P}\left(X_1\le \dfrac{7}{3}\right)$이므로 $a=\dfrac{7}{3}$.

3.

$f_X(x)=\displaystyle\int_0^\infty f(x,y)dy=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x},\ \ x>0.$

$f_Y(y)=\displaystyle\int_0^\infty f(x,y)dx=\left[\frac{e^{-\frac{1}{2}y^2}}{\sqrt{2\pi}}\times\left(-2e^{-\frac{1}{2}x}\right)\right]_0^\infty=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{-y^2/2},\ \ y>0.$

$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$이므로 X, Y는 독립.

$\mathrm{P}(X\le 2\mid Y\le 2)=\mathrm{P}(X\le 2)=\displaystyle\int_0^2 f_X(x)dx=1-e^{-1}.$

4.

$0<z<1$일 때 $Z=F(X)$의 누적분포함수는

$\Pr(Z\le z)=\Pr(F(X)\le z)=\Pr(X\le F^{-1}(z))=F(F^{-1}(z))=z.$

$F(X)$의 확률밀도함수 $f(z)=1,\ 0<z<1.$

$$\begin{aligned}\Pr(-2<\ln F(X)<1)&=\Pr(e^{-2}<F(X)<e)\\&=\Pr(F(X)<e)-\Pr(F(X)<e^{-2})\\&=1-e^{-2}.\end{aligned}$$

5. 0.75, 0.02

두 도시의 정책에 찬성하는 사람의 수를 각각 X, Y라 하면

$X\sim B(350,0.7),\ \ Y\sim B(160,0.8).$

표본의 크기가 충분히 크므로 중심극한 정리에 따라

$X\sim N(350\times0.7,350\times0.7\times0.3),\ \ Y\sim N(160\times0.8,160\times0.8\times0.2)$라 쓸 수 있다.

따라서 $p_1=\dfrac{X}{350}\sim N\!\left(0.7,\dfrac{0.7\times0.3}{350}\right),\ \ p_2=\dfrac{Y}{160}\sim N\!\left(0.8,\dfrac{0.8\times0.2}{160}\right).$

$\dfrac{p_1+p_2}{2}\sim N\!\left(0.75,\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{0.7\times0.3}{350}+\dfrac{0.8\times0.2}{160}\right)\right)=N\!\left(\dfrac{3}{4},\left(\dfrac{0.2}{10}\right)^2\right)$

* $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{0.7\times0.3}{350}+\dfrac{0.8\times0.2}{160}\right)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{0.1\times0.3}{50}+\dfrac{0.1\times0.2}{20}\right)=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{0.06+0.1}{100}=\dfrac{0.04}{100}$

그러므로 평균 $\dfrac{p_1+p_2}{2}$에 대한 90% 신뢰구간은

$\dfrac{3}{4}\pm z_{0.9}\dfrac{0.2}{10}=\left(\dfrac{3}{4}-1.645\times\dfrac{1}{50},\ \dfrac{3}{4}+1.645\times\dfrac{1}{50}\right)$이므로 $a=\dfrac{3}{4}$, $b=0.02$.

6.

$$G(z)=\begin{cases}2\times\displaystyle\int_1^{1+\frac{z}{2}}\int_{y-z}^{y+2}1\,dxdy=\frac{z^2}{2}, & 0\le z\le 1\\ 1-2\times\displaystyle\int_0^{1-\frac{z}{2}}\int_{x+z}^{-x+2}1\,dydx=-\frac{z^2}{2}+2z-1, & 1\le z\le 2\end{cases}$$

$g(z)=G'(z)=\begin{cases}z, & 0\le z\le 1\\ -z+2, & 1\le z\le 2\end{cases},\ \ g(z)>\dfrac{1}{2}\ \Leftrightarrow\ \dfrac{1}{2}<z<\dfrac{3}{2}$이므로

$\mathrm{P}\left(g(Z)>\dfrac{1}{2}\right)=\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2}<Z<\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{3}{4}.$

(다른 풀이)

$z<0$이면 $G(z)=0$,

$0\le z\le 1$이면 $G(z)=\dfrac{1}{2}z^2$,

$1\le z\le 2$이면 $G(z)=1-\dfrac{(2-z)^2}{2}$,

$2<z$이면 $G(z)=1$.

$0<z<2$이면 $g(z)=\begin{cases}z, & 0<z<1\\ 2-z, & 1\le z<2\end{cases}$이므로

$\mathrm{P}\left(g(Z)>\dfrac{1}{2}\right)=\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2}<Z<\dfrac{3}{2}\right)=G\left(\dfrac{3}{2}\right)-G\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}.$

7.

$E(X)=M_X'(0)=8,\ E(X^2)=M_X''(0)=80,\ V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=16.$

중심극한정리에 따라 $\overline{X}\sim N(8,\ 0.4^2)$이므로 $P(\overline{X}\ge 9)=P(Z\ge 2.5)$, $c=2.5$.

8. $a=100$, $b=2$

$\overline{X}\sim N(2500,\ 8^2),\ \overline{Y}\sim N(2200,\ 6^2),\ \overline{X}-\overline{Y}\sim N(300,\ 10^2),\ a=100,$

$\mathrm{P}(\overline{X}-\overline{Y}\le 320)=\mathrm{P}(Z\le 2),\ b=2.$

9.

Y의 확률밀도함수를 $f(y)$, 누적분포함수를 $F(y)$라 하자.

$0<y<1$일 때

$F(y)=\Pr(Y\le y)$

$=\Pr(X_1,\ X_2\le y)+\Pr(X_1,\ X_3\le y)+\Pr(X_2,\ X_3\le y)-2P(X_1,\ X_2,\ X_3\le y)$

$=3y^2-2y^3.$

$f(y)=F'(y)=6y-6y^2,\ 0<y<1$

(다른 풀이)

X_1의 확률밀도함수를 f_{X_1}, Y의 누적분포함수를 F_Y라 하면

$0\le y\le 1$에 대하여

$F_Y(y)=\Pr(Y\le y)=6\displaystyle\int_0^y f_{X_1}(x)\Pr(X_2\le x,\ X_3\ge x\mid X_1=x)\,dx$

$=6\displaystyle\int_0^y x(1-x)\,dx=6\left(\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3\right).$

Y의 확률밀도함수를 f_Y라 하면 $f_Y(y)=6y(1-y),\ 0<y<1$

10. $X\to 0$일 때 $Y\to 0$, $X\to 3$일 때 $Y\to\infty$이므로

$0<X<3$일 때 $0<Y<\infty$이고

$F_Y(y)=\Pr(X\le 3-3e^{-\frac{y}{2}})=\begin{cases}1-e^{-y/2}, & 0<y<\infty\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$

Y의 확률밀도함수 $f_Y(y)=F_Y'(y)=\dfrac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}\ \ (0<y<\infty)$

$P(|Y-2|>2)=P(Y>4\ \text{or}\ Y<0)=P(Y>4)=1-F_Y(4)=e^{-2}.$

11. e^{-3}

$Z=\min\{X, Y\}$이므로

$$\begin{aligned}P(Z>10)&=P(\min\{X, Y\}>10)\\&=P(X>10,\ Y>10)\\&=P(X>10)P(Y>10)\\&=\int_{10}^{\infty}f_X(x)dx\int_{10}^{\infty}f_Y(y)dy\\&=e^{-3}.\end{aligned}$$

(다른 풀이)

$F_X(x)=\int_0^x \frac{1}{5}e^{-\frac{t}{5}}dt=1-e^{-\frac{x}{5}},\ F_Y(y)=\int_0^y \frac{1}{10}e^{-\frac{t}{10}}dt=1-e^{-\frac{y}{10}}$이므로

$$\begin{aligned}P(Z>10)&=P(\min\{X, Y\}>10)=P(X>10,\ Y>10)\\&=(1-P[X\le 10])(1-P[Y\le 10])\\&=(1-F_X(10))(1-F_Y(10))\\&=e^{-2}e^{-1}=e^{-3}.\end{aligned}$$

* 지수분포

양의 실수 구간에서 정의한 어떤 사건이 발생하기까지의 대기시간에 관한 확률변수를 지수확률변수라 한다.

① 확률밀도함수 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0, \lambda>0\\ 0 & , \text{otherwise}\end{cases}$

② $F(x)=1-e^{-\lambda x}$

③ $M_X(t)=\dfrac{\lambda}{\lambda-t}\ \ (t<\lambda)$

④ $E(X)=\dfrac{1}{\lambda},\ \ V(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$

12. $E(\overline{X})=\mu,\ \ V(\overline{X})=1.5^2$이므로 $\overline{X}\sim N(\mu, 1.5^2)$.

$0.1=P(|Z|>c\times\frac{2}{3})=P(|Z|>1.64)$에서 $c=2.46$.

$0.9=P(|Z|\le 1.64)=P(|\overline{X}-\mu|\le 1.64\times\frac{9}{6})=P(|\overline{X}-\mu|\le 2.46)$이므로

모평균 μ에 대한 90% 신뢰구간은 $[57.54, 62.46]$.

13. $k=1.8$

$E(T)=81,\ \ V(T)=5^2$이므로 $T\sim N(81, 5^2)$이다.

$P(T\ge 90)=P(Z\ge 1.8)$이므로 $k=1.8$이다.

14. $\dfrac{7}{16}$

$$\begin{aligned}P\left(Y<\frac{5}{2}\right)&=P(\min\{X_1, X_2]<\frac{5}{2})=1-P(\min\{X_1, X_2\}\ge\frac{5}{2})\\&=1-P(X_1\ge\frac{5}{2}, X_2\ge\frac{5}{2})\\&=1-\left(\int_{\frac{5}{2}}^4\frac{2}{9}x_1-\frac{2}{9}dx_1\right)\left(\int_{\frac{5}{2}}^4\frac{2}{9}x_2-\frac{2}{9}dx_2\right)\\&=1-\left(\int_{\frac{5}{2}}^4\frac{2}{9}x-\frac{2}{9}dx\right)^2\\&=1-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{7}{16}.\end{aligned}$$

15. $f_X(x)=\frac{1}{2}\ \ (0<x<2),\ f_Y(y)=\frac{1}{2}\ \ (0<y<2),\ f(x,y)=\frac{1}{4}\ \ (0<x, y<2)$.

Z의 누적분포함수 $F(z)$라 하자.

$0<z<4$인 z에 대하여

$0<x+y<4,\ 0<x, y<2$의 그래프를 그려 생각한다.

① $0<z\le 2$인 경우

$$F(z)=\int_{-\infty}^z f_Z(z)dz=\Pr(X+Y\le z)=\int_0^z\int_0^{z-x}\frac{1}{4}dydx=\frac{1}{8}z^2.$$

② $2<z<4$인 경우

$$F(z)=\Pr(Z\le z)=1-\int_{z-2}^2\int_{z-x}^2\frac{1}{4}dydx=-1+z-\frac{z^2}{8}.$$

* $F(z)=\frac{1}{4}\left\{2(z-2)+\frac{z}{2}(4-z)\right\}=\frac{1}{4}\times$(직사각형+사다리꼴)

* $2<z<4$일 때 다른 방법

$$F(z)=\int_0^2\int_0^{2-x}\frac{1}{4}dydx+\int_0^{z-2}\int_{2-x}^2\frac{1}{4}dydx+\int_{z-2}^2\int_{2-x}^{z-x}\frac{1}{4}dydx$$
$$=-1+z-\frac{z^2}{8}.$$

그러므로 $f_Z(z)=F'(z)=\begin{cases}\frac{z}{4}, & 0<z\le 2\\ 1-\frac{z}{4}, & 2<z<4\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$.

$E(Z)=E(X+Y)=E(X)+E(Y)=2.$

16. $g(z)=G'(z)=\frac{z}{4}e^{-\frac{z}{2}}\ \ (z>0)$

Z의 누적분포함수 $G(z)$. $z<0$일 때 $G(z)=0$.

$z\ge 0$일 때

$$\begin{aligned}G(z)&=\Pr(Z\le z)\\&=\Pr(X+2Y\le z)\\&=\Pr(X\le z-2Y)\\&=\int_0^{\frac{z}{2}}\int_0^{z-2y}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\cdot e^{-y}dxdy\\&=\int_0^{\frac{z}{2}}(e^{-y}-e^{-\frac{z}{2}})dy\\&=1-e^{-\frac{z}{2}}-\frac{z}{2}e^{-\frac{z}{2}}\ \ (z>0).\end{aligned}$$

그러므로 $g(z)=G'(z)=\frac{z}{4}e^{-\frac{z}{2}}\ \ (z>0)$.

17. $k=0.5$

$E(Y)=\frac{2}{5}E(X)+E(\alpha)=70,\ \ V(Y)=\frac{4}{25}\cdot 25+12=4^2$이므로 $Y\sim N(70, 4^2)$.

따라서 $\Pr(Y>72)=\Pr(Z>0.5)$. 그러므로 $k=0.5$.

18. $\dfrac{1}{9}$

$$\begin{aligned}P(M=2)&=P(2\le\frac{X}{Y}<3)\\&=P(2Y\le X<3Y)\\&=\int_0^{\frac{1}{3}}\int_{2y}^{3y}2xdxdy+\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}\int_{2y}^{1}2xdxdy\\&=\frac{1}{9}.\end{aligned}$$

* 다른 풀이

$$\begin{aligned}P(M=2)&=P(2\le\frac{X}{Y}<3)=P(2Y\le X<3Y)\\&=P(\frac{X}{3}<Y\le\frac{X}{2})\\&=\int_0^1\int_{\frac{x}{3}}^{\frac{x}{2}}2xdydx=\frac{1}{9}.\end{aligned}$$

19. $k=1.5$

통신사를 이용하는 성인의 수 X라 하면 $X\sim B(400, 0.2)$.

$E(X)=80,\ \ V(X)=8^2$이므로 $X\approx N(80, 8^2)$.

$P(80\le X\le 92)=P(0\le Z\le 1.5)$에서 $k=1.5$.

* 이항분포 $X\sim B(n, p)$, n이 충분히 클 때 $\dfrac{X-np}{np(1-p)}$는 근사적으로 정규분포 $N(0,1)$을 따른다.

20. $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\frac{y+3y^2}{30}\ \ (1<y<3)$

$f_{X|Y}(x|2)=\frac{f(x,2)}{f_Y(2)}=\frac{6}{7}(3x-x^2)\ \ (0<x<1)$

$\mathrm{E}[X|Y=2]=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot\frac{6}{7}(3x-x^2)dx=\frac{9}{14}.$

21. ④

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(\frac{2}{X})=\int_1^2 \frac{2}{x}\cdot\frac{2}{3}xdx=\frac{4}{3}.$

22. ③

영양제를 주 2회 이상 복용하는 사람을 X라 하면

$X\sim B(300,0.6)$, $\mathrm{E}(X)=180$, $\mathrm{V}(X)=72$.

$\bar{p}=\frac{X}{300}\sim N(0.6,\frac{(2\sqrt{2})^2}{100^2})=N(0.6,0.0282^2)$,

$0.99=\mathrm{P}(|Z|\le 2.58)=\mathrm{P}(|\bar{p}-p|\le 2.58\times\sqrt{\frac{0.6\cdot 0.4}{300}})$이므로

신뢰구간은 $0.6-2.58\times 0.0282\le p\le 0.6+2.58\times 0.0282$에서 $(0.5272,\ 0.6728)$.

23. ③

$\mathrm{E}(\overline{X}-\overline{Y})=\mu_1-\mu_2$, $\mathrm{V}(\overline{X}-\overline{Y})=\mathrm{V}(\overline{X})+\mathrm{V}(\overline{Y})=\left(\frac{10}{\sqrt{n}}\right)^2$이므로

$\overline{X}-\overline{Y}\sim N(\mu_1-\mu_2,\frac{100}{n})$.

$0.95=\mathrm{P}\left[\left|\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{100/n}}\right|\le 1.96\right]$에서

신뢰구간의 길이 $2\times 1.96\times\sqrt{100/n}=4.9$, $n=64$.

* 두 모집단 X, Y가 서로 독립이고 각 평균 μ_1, μ_2, 각 분산 σ_1^2, σ_2^2이며, 여기서 크기가 각각 n_1, n_2인

표본평균 $\overline{X}$, $\overline{Y}$라 할 때 $\overline{X}-\overline{Y}\sim N(\mu_1-\mu_2,\ \frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2})$.

24. ③

$1=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\int_0^1 adx+\int_1^{\infty}be^{1-x}dx=a+b$

$\frac{3}{2}=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x)dx=\frac{a}{2}+\int_1^{\infty}bxe^{1-x}dx=\frac{a}{2}+2b$

따라서 $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{2}{3}$이므로 구하는 값 $\frac{5}{9}$.

25. ①

㉠ 귀무가설 H_0: $\mu=141$, 대립가설 H_1: $\mu>141$

㉡ 검정통계량 $Z=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

㉢ 기각역 R : $Z\ge 1.645$

㉣ 검정통계량의 관측값 $\frac{142.2-141}{6/\sqrt{81}}=1.8\ge 1.645$이므로 유의수준 5%에서 줄넘기 운동이 신장 발육에 도움이 된다고 할 수 있다.

26. ④

$f_X(x)=2x\ \ (0\le x\le 1)$, $f_Y(y)=2y\ \ (0\le y\le 1)$에서

$f(x,y)=4xy\ \ (0\le x,y\le 1)$이다.

$\mathrm{P}(X^2\le Y\le X)=\int_0^1\int_{x^2}^{x}4xy\,dydx=\int_0^1 4x(x^2-x^4)dx=2\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}.$

27. ②

표본비율 $\bar{p}$, 모비율 p라 하면 $\bar{p}\sim N(p,\frac{p(1-p)}{n})$.

$0.95=\Pr(|Z|\le 1.96)=\Pr(|\bar{p}-p|\le 0.05)=\Pr(|Z|\le\frac{0.05}{\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}})$에서

$\sqrt{n}=20\times 1.96\times 0.4$, $n=39.2^2\times 0.4^2=245.92$.

그러므로 n이 246이상이 될 때 조건을 만족한다.

* 모비율의 구간추정

$X\sim B(n,p)$, 표본비율 $\bar{p}=\frac{X}{n}$일 때,

$\bar{p}\sim N(p,\frac{p(1-p)}{n})$, 모비율 p $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간

$\bar{p}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}\le p\le\bar{p}+z_{\alpha/2}\frac{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})}}{n}$

28. $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{5-1}=\frac{1}{4}, & 1\le x\le 5\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$

$\mathrm{E}(X)=\int_1^5 x\cdot\frac{1}{4}dx=3$, $\mathrm{E}(X^2)=\int_1^5 x^2\cdot\frac{1}{4}dx=\frac{31}{3}$,

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-[\mathrm{E}(X)]^2=\frac{4}{3}.$

29.

(1) $[46.628, 49.372]$

표본평균 $\overline{X}=48$, 표준편차 $\sigma=5.6$이므로 $\overline{X}\sim\mathrm{N}(48,0.7^2)$.

모평균 m에 대하여 $0.95=\mathrm{P}(|Z|\le 1.96)=\mathrm{P}(|\overline{X}-m|\le 1.96\times\frac{5.6}{8})$이므로

신뢰구간은 $[46.628, 49.372]$.

(2) $[36.235, 47.765]$

표본평균 $\overline{Y}=42$, 표준편차 $S=7.5$, 자유도 8이므로 $\overline{Y}\sim t(8)$.

모평균 m에 대하여 $0.95=\mathrm{P}(|t|\le 2.306)=\mathrm{P}(|\overline{Y}-m|\le 2.306\times\frac{7.5}{3})$이므로

신뢰구간은 $[36.235, 47.765]$.

* 모평균의 구간추정

① 모분산 σ^2 알 때, $\mu(=m)$의 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간

$\overline{X}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le\mu\le\overline{X}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

② 모분산 σ^2 모를 때, $\mu(=m)$의 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간

$\overline{X}-z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\le\mu\le\overline{X}+z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$

③ 표본의 크기가 작을 때 $(n<30)$ $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간

$\overline{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\le\mu\le\overline{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$

30. 65.4

응시자의 성적을 X라 하면 $X\sim N(55,8^2)$, 최저 점수를 k라 하자.

$0.096=\frac{480}{5000}=\Pr(X\ge k)=\Pr(Z\ge\frac{k-55}{8})$에서 $\frac{k-55}{8}=1.3$, $k=65.4$.

31. 남자 성인 지지자를 X, 여자 성인 지지자를 Y라 하자.
$X \sim B(400, 0.8)$, $X \sim B(400, 0.9)$, X, Y는 독립이다.
$\mathrm{E}(X)=320$, $\mathrm{V}(X)=8^2$, $\mathrm{E}(Y)=360$, $\mathrm{V}(Y)=6^2$이다.
(1) 시행횟수가 충분히 크므로 $X+Y \sim N(680, 10^2)$.
$\mathrm{P}(X+Y \geq 700)=\mathrm{P}(Z \geq 2)=0.0228$.
(2) 시행횟수가 충분히 크므로 $Y-X \sim N(40, 10^2)$.
$\mathrm{P}(Y-X=25)=\mathrm{P}(Y-X \leq 25)-\mathrm{P}(Y-X \leq 24)$
$=\mathrm{P}(Z \leq -1.5)-\mathrm{P}(Z \leq -1.6)=0.0120$.

* 모비율과 표본비율
모비율이 p이고 표본의 크기 n이 충분히 클 때, 임의로 추출한 표본 X_1, X_2, $\cdots$, X_n의 표본비율 $\bar{p}$

$$\bar{p}=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} \sim N\left(p, \frac{pq}{n}\right)$$

32.
(1) $0.95=\mathrm{P}(|\overline{X}-m| \leq 1.96 \times \frac{2}{10})$이므로 신뢰도 95%로 m의 신뢰구간은
$10-1.96 \times \frac{2}{10} \leq m \leq 10+1.96 \times \frac{2}{10}$에서 $9.608 \leq m \leq 10.392$.
(2) $\mathrm{P}(|\overline{X}-m| \leq \frac{1}{2})=\mathrm{P}(|Z| \leq \frac{\sqrt{n}}{4}) \geq 0.95$이려면
$\frac{\sqrt{n}}{4} \geq 1.96$에서 $n \geq 61.4656$이다. 구하는 $n=62$.

33.

하위 영역	배점	예상 정답율(%)	출제근거 (이유)
교직수학 (고등학교 수학, 통계)	5	60	박한식. 교직수학. pp. 139-150

$\int_0^\infty ke^{-3x}dx=\left[-\frac{k}{3}e^{-3x}\right]_0^\infty=\frac{k}{3}=1 \quad \therefore\ k=3$ ………… 2점

(단, 다른 식 없이 확률밀도함수가 되려면 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1$이라는 사실을 언급해도 부분점수 가능)

$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_0^\infty 3xe^{-3x}dx$ ………… 3점

$=\left[-xe^{-3x}\right]_0^\infty-\int_0^\infty(-e^{-3x})dx$ ………… 4점

$=\int_0^\infty e^{-3x}dx=\left[-\frac{1}{3}e^{-3x}\right]_0^\infty=\frac{1}{3}$ ………… 5점

34. $\Pr(Z \leq x)$
각각의 확률변수 X_i는 포아송 분포 $\mathrm{Pois}(\lambda)$에 따르고, X_i들의 표본평균 $\overline{X}=\frac{S_n}{n}$라 하면 $\mathrm{E}(\overline{X})=\frac{1}{n}\cdot n\lambda=\lambda$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{1}{n^2}\cdot n\lambda=\frac{\lambda}{n}$.
중심극한정리에 의해 n이 충분히 클 때 $\overline{X}=\frac{S_n}{n} \sim N(\lambda, \frac{\lambda}{n})$.

이때 $\dfrac{\frac{S_n}{n}-\lambda}{\sqrt{\frac{\lambda}{n}}}=\frac{S_n-n\lambda}{\sqrt{n}\lambda} \sim N(0, 1^2)$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\Pr\left(\frac{S_n-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leq x\right)=\Pr(Z \leq x)\left(=\int_{-\infty}^{x}\frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dz\right)$$

* 포아송분포
일정한 단위 내에서 발생하는 사건의 수에 대응하는 확률변수를 포아송 확률변수라 한다.
① 확률질량함수 $f(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$
② $M_X(t)=e^{\lambda(\exp(t)-1)}$, $\mathrm{E}(X)=\lambda=\mathrm{V}(X)$

35. ②
두 사건의 합사건의 확률은
$\mathrm{P}(a<X_1<b \text{ or } c<X_2<d)$
$=\mathrm{P}(a<X_1<b)+\mathrm{P}(c<X_2<d)-\mathrm{P}(a<X_1<b, c<X_2<d)$
$=\frac{2}{3}+\frac{5}{8}-\frac{2}{3}\times\frac{5}{8}=\frac{7}{8}$.

36. ②
$\Pr[X<Y]=\int_0^\infty\int_x^\infty 2e^{-(x+2y)}dydx=\int_0^\infty e^{-3x}dx=\frac{1}{3}$.
* $\Pr(X<Y)=\int_0^\infty\int_0^y f(x,y)dxdy=\frac{1}{3}$.

37. ①
$0 \leq z$인 z에 대하여 Z의 누적분포함수 $F(z)$
$F(z)=\Pr(Z \leq z)=\Pr(X+Y \leq z)=\int_0^z\int_0^{z-x}e^{-(x+y)}dydx=1-e^{-z}-ze^{-z}$
그러므로 구하는 값 $\Pr(Z \leq 1)=F(1)=1-2e^{-1}$.
* Z의 pdf $f(z)=F'(z)=ze^{-z}$ $(z \geq 0)$.
* 다른 풀이
$\Pr(Z \leq 1)=\Pr(X+Y \leq 1)=\int_0^1\int_0^{1-x}f(x,y)dydx$
$=\int_0^1\int_0^{1-x}e^{-(x+y)}dydx=1-\frac{2}{e}$.

38. ③
귀무가설 H_0: $\mu=5$, 대립가설 H_1: $\mu \neq 5$
검정통계량 $Z=\frac{6.085-5}{0.5}=2.17$
기각역 R : $|Z| \geq z_{\alpha/2}$이므로
귀무가설을 기각하기 위해서는 $2.17 \geq z_{\alpha/2}$이어야 한다.
이때 최소의 유의수준은 $\alpha/2=0.015$에서 $\alpha=3\%$.

39. ③ $f(x)=3x^2$
$0 \leq x \leq 1$인 x에 대하여 X의 누적분포함수 $F(x)$,
$F(x)=\mathrm{P}(X \leq x)$
$=\mathrm{P}(\max\{x_1, x_2, x_3\} \leq x)$
$=\mathrm{P}(x_1 \leq x, x_2 \leq x, x_3 \leq x)$
$=\mathrm{P}(x_1 \leq x)\mathrm{P}(x_2 \leq x)\mathrm{P}(x_3 \leq x)$
$=\int_0^x 1dx_1 \times \int_0^x 1dx_2 \times \int_0^x 1dx_3$
$=x^3$.
그러므로 $f(x)=F'(x)=3x^2$ $(0 \leq x \leq 1)$.

* 균등분포
임의의 실수 구간 $[a, b]$에서 나타날 가능성이 동일한 확률변수를 균등확률변수라 한다.
① 확률밀도함수 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$
② $F(x)=\frac{x-a}{b-a}$
③ $M_X(t)=\frac{e^{bt}-e^{at}}{(b-a)t}$
④ $\mathrm{E}(X)=\frac{a+b}{2}$, $\mathrm{V}(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$

[복소해석학]

<해석함수>

1. $6\pi i$, 5

$f(z)$의 영점 $-1+i(5)$, $-1-i(4)$, 9개, 극 $0(6)$, $1-4i(3)$, $9-2i(5)$, 14개.

편각원리에 따라 $\int_{C(r)}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\begin{cases}12\pi i, & r=1\\ 6\pi i, & r=2,3,4\\ 0, & r=5,6,7,8,9\\ 10\pi i, & r=10,11,\cdots\end{cases}$이므로

$\int_{C(2)}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=6\pi i$, $\int_{C(r)}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=0$이 되는 r은 5개 있다.

2.

$T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$라 하면 $b=-d$, $ai-c=b(i-1)$, $a-3c=-2b$이므로

$a=b=c=-d$. 따라서 $T(z)=\frac{z+1}{z-1}$.

선형분수변환은 원을 직선이나 원으로 사상한다.

$T(i)=-i$, $T(-1)=0$, $T(-i)=i$이므로 W는 허수축이다.

구하는 거리의 최솟값 1.

3.

$u(x,y)=e^{-x}\cos y$라 하자.

f는 정함수이므로 임의의 $z=x+iy$에 대하여 코시리만방정식을 만족.

$v(x,y)=-e^{-x}\sin y+C$, $f(0)=1$이므로 $v=-e^{-x}\sin y$.

$f(x+iy)=e^{-x}[\cos(-y)+i\sin(-y)]=e^{-x}e^{-iy}=e^{-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{n!}$.

$z\neq 0$일 때, $f\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n\frac{1}{n!}$이므로 유수정리에 따라 $\int_C f\left(\frac{1}{z}\right)dz=-2\pi i$.

4.

$f(z)$는 정함수이므로 코시-리만 방정식을 만족하고 u, v는 연속이다.

$\overline{f(\overline{z})}=u(x,-y)-iv(x,-y)$, $u(x,-y)$, $-v(x,-y)$는 연속이다.

$\frac{\partial}{\partial x}u(x,-y)=\frac{\partial}{\partial y}\{-v(x,-y)\}$, $\frac{\partial}{\partial y}u(x,-y)=-\frac{\partial}{\partial x}\{-v(x,-y)\}$이므로

$\overline{f(\overline{z})}$는 정함수이다.

(다른 설명)

$f(z)=\sum a_n z^n$, $\overline{f(\overline{z})}=\overline{\sum a_n\overline{z}^n}=\sum\overline{a_n}z^n$이므로 $\overline{f(\overline{z})}$는 정함수이다.

가정에 의해 $|f'(z)|^2>\left|\overline{f(\overline{z})}\right|^2\geq 0$, $0<\left|\frac{\overline{f(\overline{z})}}{f'(z)}\right|^2<1$, $\left|\frac{\overline{f(\overline{z})}}{f'(z)}\right|<1$.

$g(z)=\frac{\overline{f(\overline{z})}}{f'(z)}$는 정함수이므로 리우빌 정리에 따라 $g(z)$는 상수함수.

$g(1+i)=g(i)=\frac{1}{\pi}$이므로 구하는 값 π.

5. 적분값 10π, 최솟값 -5.

$a=-1$일 때, $u_{xx}+u_{yy}=0$이므로 u는 $\mathbb{R}^2$에서 조화함수이다.

따라서 u의 $\mathbb{C}$에서의 조화공액 v가 존재한다.

(정함수 $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$가 존재한다.)

$f=u+iv$는 정함수이므로 가우스 평균값 정리에 따라

$\int_0^{2\pi}u(1+2\cos\theta,2\sin\theta)d\theta=\mathrm{Re}\left[\int_0^{2\pi}f(1+2e^{i\theta})d\theta\right]=\mathrm{Re}[2\pi f(1)]=2\pi u(1,0)$

$=10\pi$.

$a=2$일 때, $u(x,y)=x^2-2xy+2y^2+4x-6y$.

$\nabla u(x,y)=(2x-2y+4,\,-2x+4y-6)=0 \Leftrightarrow (x,y)=(-1,1)$

$D(-1,1)=\begin{vmatrix}2 & -2\\ -2 & 4\end{vmatrix}=4>0$, $u_{xx}(-1,1)=2>0$이므로

이계도함수 판정법에 따라 $u(x,y)$의 최솟값 $u(-1,1)=-5$.

(다른 설명)

$a=2$이면 $u(x,y)=(x-y+2)^2+(y-1)^2-5\geq -5$이므로

$x=-1$, $y=1$일 때 최솟값 -5를 갖는다.

6. $a=3$, $b=4$, $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=8+9i$.

$f(z)$가 정함수이면 $u(x,y)=e^{-3y}\cos(ax)+bx^2-4y^2$는 조화함수이다.

임의의 실수 x, y에 대하여

$0=u_{xx}+u_{yy}=2(b-4)+(9-a^2)e^{-3y}\cos(ax)$, $a=3$, $b=4$.

$f'(z)=f_x=u_x+iv_x=u_x-iu_y$, $f''(z)=f'_x=u_{xx}-iu_{yx}$이므로

$f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=8+9i$.

7. $\sqrt{14}$.

$\frac{1}{f(z)+z^2}$은 정함수이고 유계이므로 리우빌정리에 의해

$f(z)+z^2=a+bi$, a, b는 실수라 할 수 있다.

(가)에 의해 $\sqrt{a^2+b^2}\geq 3$, (나)에 의해 $\sqrt{(a-4)^2+b^2}=3$이므로

$|f(i)|=\sqrt{(a+1)^2+b^2}$(반지름의 길이)가 최소가 될 때는

$\sqrt{a^2+b^2}=3$, $\sqrt{(a-4)^2+b^2}=3$이 될 때이다.

$a^2+b^2=9$, $(a-4)^2+b^2=9$에서 $a=2$, $b=\sqrt{5}$.

이때 $|f(i)|=\sqrt{14}$.

8. $f(0)=3$, $u(x,y)=3-e^{-y}(x\sin x+y\cos x)$.

$f(0)=u(0,0)+iv(0,0)$, $v(0,0)=0$이므로 $f(0)\in\mathbb{R}$.

주어진 정리에 의해

$f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{it})dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[u(\cos t,\sin t)+iv(\cos t,\sin t)]dt$

$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\cos t,\sin t)dt+\frac{1}{2\pi}\cdot i\cdot\int_0^{2\pi}v(\cos t,\sin t)dt.$

$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\cos t,\sin t)dt$

선적분의 정의로부터

$6\pi=\int_C -yu(x,y)dx+xu(x,y)dy$

$=\int_0^{2\pi}(-\sin t)\cdot u(\cos t,\sin t)(-\sin t dt)+\cos t\cdot u(\cos t,\sin t)(\cos t dt)$

$=\int_0^{2\pi}u(\cos t,\sin t)dt$

$=2\pi f(0)$이므로 $f(0)=3$.

코시-리만 방정식 $u_x=v_y$에서

$u=-e^{-y}(x\sin x+y\cos x)+C$($C$: 상수), $u(0,0)=3$, $C=3$.

그러므로 $u(x,y)=3-e^{-y}(x\sin x+y\cos x)$.

9. $T(2i)=-\frac{2}{3}$

$T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$라 두자. 가정에 의해 $d=2b$, $2i(a+b)=c+d$, $c=-2a$에서

$i(a+b)=-a+b$, $a=-ib$.

그러므로 $T(2i)=\frac{-4ai+2b}{2ai+b}=\frac{b(-4+2)}{b(2+1)}=-\frac{2}{3}$.

10. $f'(0)=\frac{1}{e-1}$.

$e^z-1=0 \Leftrightarrow z=2n\pi i$ $(n\in\mathbb{Z})$, $g(z)=\frac{f(z)}{e^z-1}$라 두자.

g는 $0<|z-2n\pi i|<1$에서 해석적이고 유계이므로 <정리>를 만족하는 함수 h있다.

h는 정함수이고 $|h(z)|\leq 1$이므로 리우빌정리에 의해 h는 상수함수.

$f(1)=1$이므로 $f(z)=\frac{1}{e-1}(e^z-1)$, 구하는 값 $f'(0)=\frac{1}{e-1}$.

11. $n=1$, $f'(1)=1-3i$.

$r>0$이 존재해서 f는 $D: |z-1|<r$에서 해석적이다.

따라서 $x^n y + xy^n + x + y$는 D에서 조화함수이다.

임의의 $x+iy \in D$에 대하여 $0=n(n-1)x^{n-2}y+n(n-1)xy^{n-2}$이 되는 자연수 $n=1$이다.

$f'(z)=(x+y+2xy)_x + i\left[-(x+y+2xy)_y\right]=(1+2y)-i(1+2x)$이므로

$f'(1+0 \cdot i)=1-3i$.

12.

$\lim_{z\to 0} zf(z)=0$이므로 리만정리에 의해 $z=0$는 f의 제거가능특이점이다.

$0<r<1$인 실수 r에 대하여 f는 $|z|\le r$에서 해석적이고

$|z|=r$위에서 $|f(z)|\le 1+\ln\left(\frac{1+r}{2r}\right)$이므로 최대절댓값 정리에 의해

$|z|\le r$에서 $|f(z)|\le 1+\ln\left(\frac{1+r}{2r}\right)$.

r은 임의이므로 $|z|<1$에서 $|f(z)|\le 1$. ($r\to 1$로 생각해도 된다.)

$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$이므로 f는 D에서 상수함수, 구하는 값 1.

13. ②

f는 정함수이므로 코시리만 방정식에 의해 임의의 $x+iy \in \mathbb{C}$에 대하여

$(x_3-2axy-bxy^2)_x=(2x^2-ay^2+bx^2y-y^3)_y$,

$(x_3-2axy-bxy^2)_y=-(2x^2-ay^2+bx^2y-y^3)_x$이므로

$a=2$, $b=3$. 그러므로 구하는 값 13. (조화함수로 해결가능)

14. ⑤

ㄱ. 테일러급수전개가능 $\Leftrightarrow$ 해석적

ㄴ. 모레라 정리(모든 단순폐곡선 C에서 연속+C를 따라 선적분 0)

ㄷ. 코시 적분공식의 결과

15. ④

f는 정함수이므로 코시-리만방정식을 만족하며 u, v는 조화함수이다.

따라서 다음 등식 성립 $u_x=v_y$, $u_{xx}+u_{yy}=0=v_{xx}+v_{yy}$.

(가)에 의해 $u_x=-v_y$이므로 $u_x=v_y=0$.

즉, u는 y에 관한 함수, v는 x에 관한 함수.

그리고 $u''=u_{yy}=0=v_{xx}=v''$이다.

따라서 u는 y에 관한 일차 이하의 다항함수,

v는 x에 관한 일차 이하의 다항함수.

$u=ay+b$, $v=cx+d$라 놓으면 (나)에 의해 $a=1$, $b=0$, $c=-1$, $d=1$이다.

따라서 $f(x+iy)=y+i(-x+1)$. 구하는 값 $f(-1+i)=1+2i$.

16. ④

ㄱ. $x=0$일 때 0, $x\ne 0$일 때 $e^{-\frac{1}{x^2}}$으로 정의한 함수는 $\mathbb{R}$에서 미분가능하며 주어진 조건을 만족하지만 상수함수가 아니다.

ㄴ. 테일러 급수 전개, $f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_2^{(n)}(0)}{n!}z^n=0$.

ㄷ. $x=0$일 때 0, $x\ne 0$일 때 $x^2\sin\frac{\pi}{x}$로 정의한 함수는 $\mathbb{R}$에서 미분가능하며 주어진 조건을 만족하지만 상수함수가 아니다.

ㄹ. 상수수열이 아닌 수열 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$는 $0\in\mathbb{C}$으로 수렴하고 f_4와, $g\equiv 0$는 정함수이다. 모든 $n\in\mathbb{N}$에 대하여 $f_4\left(\frac{1}{n}\right)=g\left(\frac{1}{n}\right)=0$이므로 항등정리에 의해 $\mathbb{C}$에서 $f_4(z)=0$.

17. ⑤

<1단계>

함수 f는 D에서 해석적이므로 (테일러)급수 전개가능

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$$
$$=z^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^{n-2}$$
$$=z^2\cdot g(z)\ \ (g(0)\ne 0)\text{이다.}$$

이때 g는 D에서 해석적이다. ($\frac{1}{z^n}(n\in\mathbb{N})$꼴의 항 없다.)

<2단계>

$0<r<2$인 r에 대하여 g는 $|z|\le r$에서 해석적이고 $|z|=r$위에서

$|g(z)|\le\frac{|f(z)|}{|z|^2}=\frac{3}{r^2}$이다. 최대절댓값정리에 의해 $|z|\le r$에서 $|g(z)|\le\frac{3}{r^2}$.

r은 임의이므로 $D: |z|<2$에서 $|g(z)|\le\frac{3}{2^2}=\frac{3}{4}$.

<3단계>

$\frac{i}{12}=f\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^2 g\left(\frac{1}{3}\right)$에서 $\left|g\left(\frac{1}{3}\right)\right|=\left|\frac{9i}{12}\right|=\frac{3}{4}$.

D의 내부에서 g는 최댓값을 가지므로 최대절댓값 정리에 의해

g는 D에서 상수함수이다. 따라서 $f(z)=g\left(\frac{1}{3}\right)\cdot z^2=\frac{3i}{4}z^2$.

그러므로 구하는 값 $f\left(\frac{2i}{3}\right)=-\frac{i}{3}$.

18. ②

$g(z)=\frac{f(z)}{ze^z}$는 $0<|z|$에서 해석적이고 유계이다.

따라서 리만 정리에 의해 g는 $\mathbb{C}$에서 해석적인 함수 g^*로 확장된다.

$z\in\mathbb{C}$에 대하여 $|g^*(z)|\le\max\{2, g^*(0)\}$.

리우빌 정리에 의해 g^*는 상수함수.

따라서 $f(z)=C\cdot ze^z$라 할 때 $f'(1)=1$에서 $C=\frac{1}{2e}$.

그러므로 구하는 값 $f(1)=\frac{1}{2}$.

* 다른 풀이

$R>1$에 대하여 $g(z)=\frac{f(z)}{e^z}$는 $|z|\le R$에서 해석적,

$|z|=R$ 위에서 $|g(z)|\le 2R$이므로 코시부등식에 의해

$|g^{(n)}(z)|\le\frac{n!\cdot 2R}{R^n}=\frac{2n!}{R^{n-1}}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$이다.

g는 정함수이므로 $n-1>0$ 즉, $n\ge 2$에서 $R\to\infty$일 때도 부등식이 성립.

따라서 $g^{(n)}(0)=0$ $(n\ge 2)$이므로 g의 급수전개에서

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}z^n=g(0)+g'(0)z$$
$$=f(0)+(f'(0)-f(0))z$$
$$=f'(0)\cdot z=\frac{f(z)}{e^z}$$

$\therefore\ f(z)=f'(0)\cdot ze^z$, $f'(1)=1$에서 $f'(0)=\frac{1}{2e}$.

그러므로 $f(1)=f'(0)\cdot e^1=\frac{1}{2}$.

* 다른 풀이

$\left|\frac{f(z)}{e^z}\right|\le|2z|$이므로 일반화된 리우빌정리에 따라

$\frac{f(z)}{e^z}$는 1차 이하 다항함수, $f(z)=(az+b)e^z$인 복소수 a, b있다.

$|f(0)|\le 0$이므로 $f(0)=b=0$, $f'(1)=1=2ae$, $a=\frac{1}{2e}$.

$f(z)=\frac{z}{2}e^{z-1}$, $f(1)=\frac{1}{2}$.

19.

(가) 최대·최소의 정리에 의해 임의의 $x\in[a,b]$에 대하여

$$f(x_m)g(x)\le f(x)g(x)\le f(x_M)g(x)$$

되는 $x_m,\ x_M\in[a,b]$있다.

$f,\ g$는 유계폐구간 I에서 연속이므로 리만적분가능하고,

$$f(x_m)\le \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}\le f(x_M).$$

중간값 정리에 따라 $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(c)\int_a^b g(x)dx$되는 $c\in I$ 있다.

(나) $z=z_0+re^{i\theta}$ $(0\le\theta\le 2\pi)$라 하면 코시의 적분 공식에 의해

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{(z-z_0)}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})\cdot i\,d\theta$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})d\theta.$$

(가)와 (나)의 의미 비교

$$f(c)=\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx},\ f(z_0)=\frac{\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})d\theta}{\int_0^{2\pi}1d\theta}$$

① (가)에서 $x=c$의 존재성은 알 수 있으나 c를 정할 수 없고, $f(c)$의 값을 알기 위해서는 I에서 $f(x)$의 함숫값을 알아야 한다.

② (나)에서 z_0는 적분경로 $z=z_0+re^{i\theta}$의 중심이므로 z_0를 알 수 있다.

(다) $f(z)$는 유계이므로 $|f(z)|\le M$인 실수 $M>0$ 있다. $R>0$에 대하여

f는 $|z|\le R$에서 해석적이므로 코시의 적분 공식에 의해

$$|f^{(n)}(0)|=\left|\frac{n!}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right|\le\frac{n!}{2\pi}\cdot 2\pi R\cdot\frac{M}{R^{n+1}}=\frac{n!M}{R^n}.$$

f는 정함수이므로 $R\to\infty$일 때도 부등식이 성립.

(코시부등식에 따라 $|f^{(n)}(0)|\le\frac{n!\cdot M}{R^n}$.)

따라서 $f^{(n)}(0)=0$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$.

그러므로 f의 테일러 급수전개 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n=f(0)$이므로

f는 상수함수이다.

(다)와 관련된 명제는 성립하지 않는다.

$f(x)=\tan^{-1}x$는 $\mathbb{R}$에서 C^∞급 함수이고,

임의의 $x\in\mathbb{R}$에 대하여 $|f(x)|\le\frac{\pi}{2}$이지만 $f(x)$는 상수함수가 아니다.

* 다른 반례

$\mathbb{R}$에서 C^∞급 함수 $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\ne 0\text{에 대하여}\\ 0, & x=0\end{cases}$

$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=e^0=1$, $x\ne 0$일 때 $f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$이므로

$x<0$이면 감소, $x>0$이면 증가하므로 $0\le f(x)<1$, 즉 f는 유계.

그러나 $f(x)$는 상수함수가 아니다.

20. ②

ㄱ. $f(z)$는 $\mathbb{C}\setminus(-\infty,-3]$에서 해석적이므로 D에서 해석적이다.

ㄴ. f가 정함수이면 f'도 정함수이다.

$f'=u+iv$로 놓을 때 $u=xy^3,\ v=0$이며 코시-리만방정식에 의해

$u_x=y^3=0=v_y$이므로 $y\ne0$일 때 성립하지 않는다.

이는 $\mathbb{C}$에서 해석적인 함수 f가 있다고 가정한 데 모순이다.

* 다른설명: $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$라 할 때

f가 정함수라 가정하면 $f'(z)=u_x+iv_x$이므로 $\mathbb{C}$에서 $u_x=xy^3,\ v_x=0$.

코시-리만방정식 $u_x=xy^3=v_y,\ u_y=-v_x=0$에서

$v=\frac{1}{4}xy^4+C(x)$ ($C(x)$는 x에 관한 함수),

$v_x=\frac{1}{4}y^4+C'(x)=0$ $(x+iy\in\mathbb{C})$이므로 모순이다.

따라서 조건을 만족하는 정함수 없다.

ㄷ. 임의의 폐곡선 C일 때 조건을 만족해야 C의 내부에서 해석적이 된다. (Morera 정리)

21.

$f(z)=z-2,\ g(z)=e^{-z}$는 $|z-2|\le 2$에서 해석적,

$|z-2|=2$ 위에서 $|g(z)|=e^{-\mathrm{Re}(z)}\le e^0=1<2=|f(z)|$이므로

Rouche 정리에 의해 $f(z)+g(z)$의 $|z-2|<2$에서의 영점의 수는

$f(z)$의 $|z-2|<2$에서의 영점의 수 1과 같다.

한편, $h(x)=x-2+e^{-x}$는 $[0,4]$에서 연속이고

$h(0)=-1<0,\ h(4)=2+e^{-4}>0$이므로

중간값 정리에 의해 $h(x)=0$는 $(0,4)$에 실근 있다.

그러므로 주어진 복소방정식은 주어진 범위에서 단 하나의 실근을 갖는다.

22. $2+i$

D에서 $|f(z)|\le\sqrt{5}$, D 내부의 점 $z=0$에서 $|f(0)|=\sqrt{5}$, 이므로

최대절댓값 정리에 따라 f는 D에서 상수함수.

$f(1)+f'(i)=2+i$.

23. $z=x+iy\in D$에 대하여 $\mathrm{Re}f(z)=u(x,y)$, $\mathrm{Im}f(z)=v(x,y)$라 하자.

$f'(z)=u_x+i(2u_x)=-if_y=2u_y-iu_y$에서 $u_x=2u_y,\ 2u_x=-u_y$이므로

$u_x=u_y=0$ 즉, u는 D에서 상수함수이다.

즉, $f'(z)=u_x+i(2u_x)=0$ $(z\in D)$이다.

그러므로 f는 D에서 상수함수이다.

24.

$R>1$에 대하여 f는 $|z|\le R$에서 해석적이고 $|z|=R$ 위에서 $|f(z)|\le R$.

Cauchy 부등식에 의해 $|f^{(n)}(0)|\le\frac{n!R}{R^n}=\frac{n!}{R^{n-1}}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$

f는 $\mathbb{C}$에서 해석적이므로 $R\to\infty$일 때도 부등식이 성립하므로

$n\ge 2$이면 $f^{(n)}(0)=0$.

따라서 f의 급수전개 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n=f(0)+f'(0)z$이며

가정에 의해 $f(0)=0,\ f(1)=1$이므로 $f(z)=z$.

* 다른 풀이

$g(z)=\frac{f(z)}{z}$라 하면

g는 $0<|z|(\mathbb{C}-\{0\})$에서 해석적이고, $|g|\le 1$이므로 유계이다.

리만정리에 의해 g는 $\mathbb{C}$에서 해석적인 함수 g^*로 확장된다.

$g^*(0)=\alpha$라 할 때 $M=\max\{\alpha,1\}$라 하면

임의의 $z\in\mathbb{C}$에 대하여 $|g^*(z)|\le M$이므로

리우빌 정리에 의해 g^*는 상수함수이다.

$g^*(1)=1$이므로 $g^*\equiv 1$ 즉, $f(z)=z$이다. ($g^*(0)=\lim_{z\to 0}g(z)=f'(0)=1$)

* 다른 풀이

일반화된 리우빌 정리에 의해 f는 1차 이하의 다항식.

따라서 $f(z)=az+b$이고 가정에 의해 $f(z)=z$.

25. * 출제오류

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \infty \neq 0 = \lim_{x\to 0^+} f(x)$.

f는 $x=0$에서 불연속이므로 미분가능하지도 않으며,

n번 미분가능하지도 않다.

그러므로 테일러급수도 존재하지 않으며 (1)의 결과를 근거로

실함수와 복소함수의 미분가능성이 갖는 특징의 차이도 무엇인지 알 수 없다.

* $x=0$일 때 0, $x\neq 0$일 때 $e^{-\frac{1}{x^2}}$으로 정의한 함수 $g(x)$에 대하여

$g^{(n)}(0)=0$이며 테일러급수 0이다.

26.

$|f(z)| = \sqrt{[\mathrm{Re}f(z)]^2 + [\mathrm{Im}f(z)]^2} > \sqrt{1+[\mathrm{Im}f(z)]^2} \geq 1$ ($z\in\mathbb{C}$)이므로

$\frac{1}{|f(z)|} \leq 1$이고 $\frac{1}{f(z)}$는 정함수이므로 리우빌 정리에 의해 상수함수이다.

따라서 $f(z)$도 상수함수이다.

* 다른 설명: $g=e^f$, $g\neq 0$, $\left|\frac{1}{g}\right| = e^{-\mathrm{Re}f(z)} < 1$, g:상수이므로 f:상수.

27. $f(1+i)=i$

$A=\{z\in\mathbb{C} \mid 0\leq \mathrm{Re}(z)\leq 2,\ 0\leq \mathrm{Im}(z)\leq 1\}$은 $\mathbb{C}$에서 유계폐집합이다.

f는 연속이므로 $f(A)$는 $\mathbb{C}$에서 유계폐집합이다.

가정에 의해 임의의 $z\in\mathbb{C}$에 대하여 $f(z)=f(z')\in f(A)$인 $z'\in A$ 있다.

따라서 $f(A)=f(\mathbb{C})$ 즉, f는 유계이다.

그러므로 리우빌 정리에 의해 f는 상수함수이다.

구하는 값 $f(1+i)=f(0)=i$.

28. $v=-\ln|z|+C$ (C는 상수), 조화공액을 v라 하자.

$z=re^{i\theta}$ $(-\pi<\theta<\pi)$라 하면 $u=\mathrm{Arg}\,z=\theta$이다.

코시-리만 방정식에 의해 $u_r=0=\frac{1}{r}v_\theta$에서 v는 r에 관한 함수이고,

$v_r=-\frac{1}{r}u_\theta=-\frac{1}{r}$에서 $v=-\ln r+C$ (C: 복소상수)

이때 $r=|z|$이므로 조화함수 u의 조화공액 $v=-\ln|z|+C$ (C: 상수)

* 다른 설명

조화공액 v라 하자. $z=x+iy$ $(x,\ y\in\mathbb{R})$라 하면 $\tan(\mathrm{Arg}\,z)=\frac{y}{x}$이므로

$\mathrm{Arg}\,z=u=\tan^{-1}\frac{y}{x}$. 코시-리만 방정식에 의해

$u_x=\frac{-y}{x^2+y^2}=v_y$, $u_y=\frac{x}{x^2+y^2}=-v_x$.

v_y를 y에 관하여 적분하면 $v=-\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C(x)$,

이를 x에 관하여 미분하면 $v_x=-\frac{x}{x^2+y^2}+C'(x)$.

따라서 $C'(x)=0$, $C(x)=C$ (상수)이다.

그러므로 $v=-\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C=-\ln|z|+C$.

29. ④

$z=x+i(\tan\theta x)$와 원이 접하면 $6=\frac{10}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$에서 $\cos\theta=\pm\frac{3}{5}$

$\cos\theta_1=\frac{3}{5}$, $\cos\theta_2=-\frac{3}{5}$인 θ_1, θ_2에 대하여 $0<\theta_1\leq\theta\leq\theta_2<\pi$이다.

한편 $f(\theta)=8\sin\theta+6\cos\theta$, $f'(\theta)=0 \Leftrightarrow \tan\theta=\frac{4}{3}$

$\tan\theta'=\frac{4}{3}$되는 $\theta_1\leq\theta'\leq\theta_2$에서 $f(\theta')=10$,

$f(\theta_1)=10$, $f(\theta_2)=\frac{14}{5}$이므로 구하는 값 28.

30. ①

w를 18번 곱하면 한 바퀴, $w^{18}=1$ (9번 곱하면 반 바퀴, $w^9=-1$)

$w=e^{i(20^\circ)}=e^{\frac{\pi}{18}i}$, $\frac{1}{w}=w^{-1}=e^{-\frac{\pi}{18}i}=\overline{w}$ ($w\overline{w}=|w|^2=1$).

$S=w+2w^2+3w^3+\cdots+18w^{18}$,

$wS=w^2+2w^3+\cdots+17w^{18}+18w^{19}$에서 $S=\frac{-18w}{1-w}$.

$\frac{1}{|S|}=\frac{|1-w|}{18|w|}=\frac{1}{18}|w^{-1}-1|=\frac{1}{18}|(\cos 20^\circ-1)-i\sin 20^\circ|$

$=\frac{1}{18}\sqrt{(\cos 20^\circ-1)^2+\sin^2 20^\circ}=\frac{1}{18}\sqrt{2-2\cos 20^\circ}$

$=\frac{1}{18}\cdot(2\sin 10^\circ)=\frac{1}{9}\sin 10^\circ$.

31. ④

$0<|z|<1$인 $z\in\mathbb{C}$에 대하여 $0<\cdots<|z|^2<|z|<1$이며

선분들의 길이의 합은 $|z-z^2|+|z^2-z^3|+|z^3-z^4|+\cdots=\frac{|z-z^2|}{1-|z|}$.

32. ② π

$z^n=1=e^{2k\pi i}$ $(k\in\mathbb{Z})$에서 $z=e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ $(k\in\mathbb{Z})$이며

$0\leq\theta<2\pi$인 $\theta=\frac{2k\pi}{n}$ $(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$.

$S_n=\frac{2\pi}{n}(0+1+\cdots+(n-1))=(n-1)\pi$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\pi$.

<비해석함수>

1.

$u(x,y)=\dfrac{x+ay}{x^2+y^2}+x^2+by^2,\ v(x,y)=\dfrac{cy}{x^2+y^2}+dxy$라 하자.

코시-리만 방정식 $u_x=v_y,\ u_y=-v_x$를 풀면 $a=0,\ b=-1,\ c=-1,\ d=2.$

$f(z)=\dfrac{x-iy}{x^2+y^2}+(x^2-y^2+i2xy)=\dfrac{\overline{z}}{|z|^2}+z^2=\dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}}+z^2=\dfrac{1}{z}+z^2$이므로

$e^{\frac{1}{z}}f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}\left(\frac{1}{z}+z^2\right),\ a_{-1}=1+\frac{1}{3!}=\frac{7}{6}.$

2.
$4\pi i$

$z=e^{it},\ dz=ie^{it}dt,\ 0\le t\le 2\pi.$

$\overline{z}=e^{-it},\ d\overline{z}=-ie^{-it}dt.$

$\displaystyle\int_C \overline{z}\,dz-\frac{1}{\overline{z}}\,d\overline{z}=\int_0^{2\pi} i+i\,dt=4\pi i.$

3.

$|z|=2$이면 $|-z-4|\le 6<8=|z|^3$이므로 주어진 <정리>에 의해

$z^3-z-4=0$의 해는 $|z|<2$에서만 존재한다.

$f(z)=\dfrac{1}{(z-3)(z^3-z-4)}$라 하면 유수 정리에 따라

$\displaystyle\int_{|z|=4} f(z)dz=2\pi i\cdot \mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right)=0.$

$\displaystyle=\int_C f(z)dz=\int_{|z-3|=\frac{1}{2}} f(z)dz$이므로

$\displaystyle\int_C f(z)dz=\int_{|z|=4} f(z)dz-\int_{|z-3|=\frac{1}{2}} f(z)dz$

$\displaystyle\qquad=2\pi i\cdot\mathrm{Res}(f(z),3)=-\frac{\pi i}{10}.$

(다른 풀이)

$|z|=2$일 때 $|z^3|=8>6\ge|-z-4|$이므로 주어진 정리에 의해

$z^3-z-4=0$의 영역 $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<2\}$의 근의 개수 3.

유수 정리에 따라

$\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{1}{(z-3)(z^3-z-4)}dz$

$\displaystyle=-\oint_{|w|=\frac{1}{2}}\frac{1}{(\frac{1}{w}-3)(\frac{1}{w^3}-\frac{1}{w}-4)}\cdot\left(-\frac{1}{w^2}\right)dw$

$\displaystyle=\int_{|w|=\frac{1}{2}}\frac{w^2}{3(w-\frac{1}{3})(4w^3+w^2-1)}\,dw$

$\displaystyle=2\pi i\cdot\frac{1}{3^2\cdot 3\cdot\left(\frac{4}{27}+\frac{1}{9}-1\right)}$

$=-\dfrac{\pi i}{10}.$

4. C는 시계반대방향 단순폐곡선이므로 그린 정리에 따라

$\displaystyle\int_C \overline{z}\,dz=2i\times(C$ 내부의 넓이$)=2i\cdot 4\pi=8\pi i.\ (z=x+iy)$

유수 정리에 따라 $\displaystyle\int_C\frac{4e^{-iz}}{(z+6i)(z-2i)}dz=2\pi i\times\frac{e^2}{2i}=\pi e^2.$

그러므로 구하는 값 $\pi e^2+8\pi i.$

(다른 풀이)

$C:\ |z-i|=2$ 위에서 $4=|z-i|^2=(z-i)\overline{(z-i)},\ \overline{z}=\dfrac{4}{z-i}-i,$

유수 정리에 따라

$\displaystyle\int_C\left\{\frac{4e^{-iz}}{(z+6i)(z-2i)}+\overline{z}\right\}dz=\int_C\frac{4e^{-iz}}{(z+6i)(z-2i)}+\frac{4}{z-i}-i\,dz$

$=2\pi i\cdot\left(\dfrac{4e^2}{8i}+4\right)=\pi e^2+8\pi i.$

5. $\dfrac{5}{4},\ \dfrac{3}{4}$

$z=2e^{it}=2(\cos t+i\sin t),\ 0\le t\le 2\pi$라 하면 $f=\dfrac{5}{4}c+\dfrac{3}{4}is$이므로

$|f(z)|^2=f(z)\overline{f(z)}=\dfrac{9}{16}+\cos^2 t$이므로 $|f(z)|$의 최댓값 $\dfrac{5}{4}$, 최솟값 $\dfrac{3}{4}$.

6. $g(z)=\dfrac{z^3f'(z)}{f(z)}$의 C 내부의 특이점 $z=1,\ e^{\frac{\pi i}{3}},\ e^{\frac{5\pi i}{3}}$(단순특이점).

$g(z)$는 특이점을 제외한 C와 C 내부에서 해석적이다.

유수정리에 따라 $\displaystyle\int_C g(z)dz=2\pi i\cdot\left(1^3+e^{\frac{\pi i}{3}\cdot 3}+e^{\frac{5\pi i}{3}\cdot 3}\right)=-2\pi i.$

* 다른 풀이

일반화된 편각 원리에 따라 $\displaystyle\int_C\frac{z^3f'(z)}{f(z)}dz=2\pi i(1^3+e^{\pi i}+e^{5\pi i})=-2\pi i.$

7. $x+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{5}{3}x^3,\ \dfrac{10}{3}\pi i$

$(e^x-1)\cdot(1-x)^{-1}$ 곱의 미분법으로 직접 계산하면

$f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=3,\ f^{(3)}(0)=10$이므로

$f(x)$의 3차 테일러 다항식 $x+\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{5}{3}x^3.$

* 다른 설명

$f(x)=(e^x-1)(1-x)^{-1}$

$\quad=\left(\dfrac{x^1}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots\right)(1+x+x^2+x^3+\cdots)$

3차 테일러 다항식 $(x+x^2+x^3)+\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{2}\right)+\dfrac{x^3}{6}=x+\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{5}{3}x^3.$

$g(z)=\dfrac{e^z-1}{z^4(1-z)}$라 하면 유수 정리에 의해

$\displaystyle\int_{|z|=\frac{1}{2}}g(z)dz=2\pi i\cdot\mathrm{Res}(g(z),0)=2\pi i\cdot(3\text{차항 계수})=\frac{10}{3}\pi i.$

8. π

곡선 C는 원점 중심인 반지름 1인 상반원이다. (이때 C는 단순폐곡선)

$z=x+iy,\ dz=dx+idy$이므로

$\displaystyle\int_C(x^2-y^2-y)+i(2xy-x)\,dz$

$\displaystyle=\int_C[x^2-y^2-y+i(2xy-x)]dx+[-2xy+x+i(x^2-y^2-y)]dy$

$\displaystyle=\iint_{\mathrm{int}\,C\cup \mathrm{b}(C)}2dA$ (그린 정리)

$=2\cdot\dfrac{\pi}{2}=\pi.$

* $\mathbb{C}\cong\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}.$

9. 임의의 $|z|<\frac{\pi}{2}$인 z에 대하여 $f(-z)=f(z)$이므로

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(-z)^n=f(-z)$에서 $a_{2n+1}=0$.

$f(z)$는 $|z|\le 1$에서 (테일러 급수 전개가능하므로) 해석적이므로

코시적분공식에 따라 $\int_C \frac{f(z)}{z^3}dz=2\pi i\cdot\frac{f''(0)}{2!}=2\pi i\cdot a_2=-\frac{\pi i}{2}$.

* $f(z)=\frac{1}{e^z+e^{-z}}=\frac{1}{2\cosh z}$

* 다른 설명

$$f(z)=\frac{1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots}{2+2z+\frac{4z^2}{2!}+\frac{8z^3}{3!}+\frac{16z^4}{4!}+\frac{32z^5}{5!}+\cdots}$$

$=\frac{1}{2}-\frac{z^2}{4}+\frac{5}{48}z^4-\cdots$이므로

$a_{2n+1}=0$(비약), $\mathrm{Res}[\frac{f(z)}{z^3},0]=-\frac{1}{4}$, 유수정리에 의해 적분값 $-\frac{\pi i}{2}$.

10. $R>a$일 때 $|z|=R$위에서 $\left|\frac{z}{z^2+a^2}\right|\le\frac{R}{R^2-a^2}\to 0$ $(R\to\infty)$ 이므로

Jordan 보조정리에 의해 $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{z}{z^2+a^2}\cdot e^{ibz}dz=0$.

C_R과 $(-R,0)$에서 $(R,0)$을 잇는 반시계방향 폐곡선 C라 하면

유수 정리에 의해 $\int_C\frac{ze^{ibz}}{z^2+a^2}dz=2\pi i\mathrm{Res}\left(\frac{ze^{ibz}}{z^2+a^2},ai\right)=\pi ie^{-ab}$.

따라서 $\pi ie^{-ab}=\int_{C_R}\frac{ze^{ibz}}{z^2+a^2}dz+\int_{-R}^{R}\frac{xe^{ibx}}{x^2+a^2}dx$에서 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ibx}}{x^2+a^2}dx=\pi ie^{-ab}$.

11. ①

주어진 조건을 만족하는 고립특이점은 진성특이점이다.
(카소라티-바이어슈트라스 정리)

ㄱ. $f(z)=z\sin\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{-2n}$에 대하여 z^{-n} (n: 자연수)꼴의 항이 무한히 많다. 즉 $z=0$는 진성특이점.

ㄴ. $\lim_{z\to0}f(z)=1\ne0$이므로 $z=0$는 제거가능특이점.

ㄷ. $\lim_{z\to0}zf(z)=1\ne0$이므로 $z=0$는 위수 1인극.

12. ⑤

$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$이므로 $\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\cos z}{\sin z}dz=\frac{1}{2\pi}\int_C\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1}dz$.

$e^{2iz}-1=0 \Leftrightarrow 2iz=2n\pi i$ $(n\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow z=n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$이며
$|z|=5$ 내부에 속하는 $z=0,\ \pm\pi$ 3개 있다.

$\mathrm{Res}(n\pi)=\left.\frac{e^{2iz}+1}{[2ie^{iz}]}\right|_{z=n\pi}=1$이므로 유수정리에 의해

구하는 값 $\frac{1}{2\pi i}\cdot2\pi i\cdot(1+1+1)=3$.

* 다른 풀이

$\sin z=0 \Leftrightarrow z=0,\ \pm\pi,\ \pm2\pi,\ \cdots$. 편각 원리에 따라 적분값 3.

13. ①

자연수 n에 대하여 z^ne^z는 정함수이므로 코시-구르사 정리에 의해 C를 따라 선적분 0이다.

$0<|z|<1$인 z에 대하여 $z^ne^{\frac{1}{z}}$의 급수전개

$z^n\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{z^{n+1}}+\cdots\right)$,

$\mathrm{Res}[z^ne^{\frac{1}{z}},0]=\frac{1}{(n+1)!}$이므로 유수정리에 의해

$a_n=\frac{2\pi i}{(n+1)!}$. 그러므로 구하는 값 0.

14. ①

e^{z^2}은 C와 C내부에서 해석적이므로 코시-구르사 정리에 의해 $\int_C e^{z^2}dz=0$.

$0<|z|<1$에서 $z^2e^{\frac{1}{z}}=z^2+z+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\frac{1}{z^2}+\cdots$이므로 유수 $\frac{1}{6}$.

유수 정리에 따라 $A=\frac{\pi i}{3}$.

$\sin z=0 \Leftrightarrow z=n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$이며 C 내부에 있는 $z=0$, 1개 있다.

$\lim_{z\to0}z\frac{1-z}{\sin z}=1$이므로 유수 정리에 의해 $B=2\pi i$

(실제로 나누면 $\frac{1-z}{\sin z}=\frac{1}{z}-1+\frac{z}{3!}+\cdots$)

$\therefore\ \frac{A}{B}=\frac{1}{6}$.

15. ①

ㄱ. $X=\mathbb{R}$라 하자. $f(0)=0$이고

$0\le\lim_{t\to0}|f(t)|=\lim_{t\to0}|t\cos\frac{1}{t}|\le\lim_{t\to0}|t|=0$이므로

$f(0)=0=\lim_{t\to0}f(t)$가 되어 f는 $t=0$에서 연속.

ㄴ. $\lim_{z\to0}f(z)$는 존재하지 않으므로 불연속이다.

* $\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$이므로 $f(z)=z\cdot\frac{e^{\frac{i}{z}}+e^{-\frac{i}{z}}}{2}$. 허수축 $z(t)=it$을 따라

$|f(z(t))|=\left|it\cdot\frac{e^{\frac{1}{t}}+e^{-\frac{1}{t}}}{2}\right|\ge\left|t\frac{e^{1/t}}{2}\right|\to\infty$ $(t\to0+)$이므로

f는 $t=0$에서 불연속이다.

* 연속이라 가정하면 $0<|z|<R$에서 $\left|z\cos\frac{1}{z}\right|<1$이 되는 R 있다.

리만 정리에 의해 $g(z)=\begin{cases} z\cos\frac{1}{z}, & z\ne0 \\ w=\lim_{z\to0}f(z), & z=0\end{cases}$는 $\mathbb{C}$에서 해석적이므로

$\int_{|z|=1}g(z)dz=0$이다.

한편, 유수 정리에 의해 $\int_{|z|=1}g(z)dz=\int_{|z|=1}z\cos\frac{1}{z}dz=-\pi i$, 모순.

이는 f가 연속이라 가정한 데서 비롯된 것이다.

ㄷ. $|z|>0$에서 f는 해석적이므로 (로랑)급수전개 가능

$z\cos\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{1-2n}$.

ㄹ. 유수정리에 의해 적분값은 $-\pi i$이다.

16. ④

(가) $\int_C f(z)dz=2\pi i\cdot\left(-\frac{i}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$

(나) $\left|\int_\Gamma f(z)dz\right|\le|\Gamma|\cdot|f(z)|$

$$=\pi R\cdot\frac{R^2}{(R^2-1)^2}=\frac{\pi R^3}{(R^2-1)^2}$$

(다) $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}f(x)dx$

$$=\int_C f(z)dz-\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)dz$$

$$=\int_C f(z)dz=\frac{\pi}{2}.$$

17. $-\pi i$

$f(z)=\dfrac{1}{z-2}$는 C와 C내부에서 해석적이다.

코시 적분공식에 의해 $\int_C \dfrac{f(z)}{z}dz=2\pi i\cdot f(0)=-\pi i.$

* $f(z)=\dfrac{1}{z(z-2)}$의 C 내부의 특이점 $z=0$이다.

$\mathrm{Res}[f,0]=-\dfrac{1}{2}$이므로 유수정리에 의해 적분은 $2\pi i\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\pi i.$

* $\dfrac{1}{z^2-2z}=-\dfrac{1}{2z}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{z}{8}+\dfrac{z^2}{16}+\dfrac{z^3}{32}+\dfrac{z^4}{64}+\cdots$

18. $|z|=1$ 위의 $z=1\cdot e^{i\theta}$ $(0\le\theta\le 2\pi)$라 쓸 수 있다. 선적분의 정의로부터 $\int_{|z|=1} z^n dz=\int_0^{2\pi} e^{in\theta}ie^{i\theta}d\theta=i\int_0^{2\pi}e^{i(n+1)\theta}d\theta=\begin{cases}2\pi i, & n=-1\\ 0, & n\neq -1\end{cases}.$

19. $-\dfrac{8\pi i}{e^2}$

$|z|=2$ 내부의 특이점 $z=-1$이다.

$\lim_{z\to -1}\left[\dfrac{(z^2+7)e^{2z}}{(z-3)}\right]'\cdot\dfrac{1}{(2-1)!}=\dfrac{-4}{e^2}$이므로 유수정리에 의해 적분은 $-\dfrac{8\pi i}{e^2}.$

* $f(z)=\dfrac{(z^2+7)e^{2z}}{(z-3)}$은 $|z|\le 2$에서 해석적이므로 코시 적분공식에 의해

$\int_{|z|=2}\dfrac{(z^2+7)e^{2z}}{(z-3)(z+1)^2}dz=\int_{|z|=2}\dfrac{f(z)}{(z+1)^{1+1}}dz=\dfrac{2\pi i}{1!}f'(-1)=-\dfrac{8\pi i}{e^2}.$

20.

하위 영역	배점	예상 정답율(%)	출제근거 (이유)
고등수학(복소함수)	4	75	H. Silverman. Complex Variables. pp. 251-266

$\cos z=1-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}-\cdots$이므로 ………… 1점

$\cos\dfrac{1}{z}=1-\dfrac{1}{2!}\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{4!}\dfrac{1}{z^4}-\cdots.$ ………… 2점

(직접 이 식을 유도해도 2점)

이제 $z^3\cos\dfrac{1}{z}=z^3-\dfrac{z}{2!}+\dfrac{1}{4!}\dfrac{1}{z}-\cdots$에서

$z^3\cos\dfrac{1}{z}$의 $z=0$에서의 유수(residue)는 $\dfrac{1}{4!}$이다. ………… 3점

$\oint_U z^3\cos\dfrac{1}{z}\,dz=2\pi i\left(\dfrac{1}{4!}\right)=\dfrac{\pi i}{12}$ ………… 4점

21.

$f(z)=\dfrac{e^z-1}{z(z-1)(z-i)}$

복소 평면의 세 점 0, 1, i 모두 원 $|z|=3$ 내부에 있으므로 각 점에서 유수를 계산하면

$\mathrm{Res}[f,0]=\lim_{z\to 0}zf(z)=0,$

$\mathrm{Res}[f,1]=\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=\dfrac{e-1}{1-i},$

$\mathrm{Res}[f,i]=\lim_{z\to i}(z-i)f(z)=-\dfrac{e^i-1}{1+i}.$

이제 유수 정리에 의하여 적분은

$\int_{|z|=3}f(z)dz=2\pi i(0+\dfrac{e-1}{1-i}-\dfrac{e^i-1}{1+i})=\pi i(e+ie+ie^i-2i-e^i).$

$=2\pi i\cdot\mathrm{Res}\left(\dfrac{1}{z^2}f\left(\dfrac{1}{z}\right),0\right)$

22. ②

$z=1,\ -2$는 $|z|=3$ 내부에 있다. 유수 정리에 따라

$\int_{|z|=3}\dfrac{z^3+3z-1}{(z-1)(z+2)}dz=2\pi i(\mathrm{Res}(1)+\mathrm{Res}(-2))=2\pi i\cdot(1+5)=12\pi i.$

* $\dfrac{z^3+2z-1}{(z-1)(z+2)}=\dfrac{z^3+2z-1}{z^2+z-2}=z-1+\dfrac{6}{z}-\dfrac{9}{z^2}-\dfrac{3}{z^3}-\dfrac{15}{z^4}+\dfrac{9}{z^5}+\cdots$

23. ④

$0<|z|<1$인 z에 대하여 $e^{\frac{1}{z^2}}$의 (로랑) 급수 전개에서 $\dfrac{1}{z}$항 없다.

즉, $\mathrm{Res}[e^{\frac{1}{z^2}},0]=0$. 유수 정리에 의해 구하는 적분값은 0.

24. ①

* $f(z)$는 코시-리만 방정식을 만족하지 않으므로 해석함수가 아니다.
선적분의 정의를 적용하자.
C의 매개변수 방정식 $c(t)=(1+i)t=1+it,\ 0\le t\le 1,\ c'(t)=(1+i)$이므로

$\int_C f(z)dz=\int_{t=0}^{t=1}f(c(t))c'(t)dt=\int_0^1(-3t^2i)(1+i)dt=(1+i)[-t^3i]_0^1$

$=(1+i)(-i)=1-i.$

[미분기하학]

〈곡선〉

1. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$

$\mathrm{v}=1$, 프레네-세레 공식 적용.

$0=\frac{d}{ds}\alpha(s)\cdot\alpha'(s)+\alpha(s)\cdot\frac{d}{ds}\alpha'(s)$

$=T(s)\cdot T(s)+\alpha(s)\cdot T'(s)$

$=1+\alpha(s)\cdot\kappa(s)N(s)$

$=1-2\kappa(s)s^2$이므로

$\kappa(1)=\frac{1}{2}$.

$-4s=\frac{d}{ds}\alpha(s)\cdot N(s)+\alpha(s)\cdot\frac{d}{ds}N(s)$

$=T\cdot N+\alpha\cdot(-\kappa T+\tau B)$

$=0+(0+\tau\alpha\cdot B)$이므로

$-4=12\tau(1)$, $\tau(1)=-\frac{1}{3}$, $|\tau(1)|=\frac{1}{3}$.

2. $\frac{3}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{4}$

$C(t)=(t,e^{at},be^{-at})$, $C(0)=(0,1,b)=\mathrm{P}$, $C'(0)=(1,a,-ab)$.

$\mathrm{P}+t\,C'(0)=(t,1+at,b-abt)$이므로 $t=2\sqrt{2}$.

$(2\sqrt{2},1+2a\sqrt{2},b-2ab\sqrt{2})=(2\sqrt{2},3,-1)$, $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $b=1$, $a^2+b^2=\frac{3}{2}$.

$C''(0)=(0,a^2,a^2b)=\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. $C'(0)\perp C''(0)$이므로

$\kappa=\frac{\| C''(0)\|}{\| C'(0)\|^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

3. $\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$, $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

$\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right)\approx(2,1,0)$, $\alpha'\left(\frac{\pi}{2}\right)\approx(2,-2,0)$, $\alpha''\left(\frac{\pi}{2}\right)\approx(-2,-4,0)$이므로

$T=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$, $(\alpha'\times\alpha'')\left(\frac{\pi}{2}\right)=(0,0,-12)$, $B=(0,0,-1)$,

$N=B\times T=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$, $\kappa=\frac{|\alpha'\times\alpha''|}{|\alpha'|^3}=\frac{3}{4\sqrt{2}}$

(곡률중심)$=\alpha+\frac{1}{\kappa}N=\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

(곡률반경)$=\frac{1}{\kappa}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

4.

$\beta'=\tau_\alpha T+\kappa_\alpha B$, $\|\beta'\|=\sqrt{\tau_\alpha^2+\kappa_\alpha^2}\neq 0$이므로 β는 정칙곡선이다.

$\beta'(1)=\kappa_\alpha(1)\sqrt{3}\,T+\kappa_\alpha(1)B$, $\beta''=\tau_\alpha{}'T+\kappa_\alpha{}'B$,

$\beta''(1)=\left(\sqrt{3}\kappa_\alpha{}'(1)-2\kappa_\alpha(1)\right)T+\kappa_\alpha{}'(1)B$, $\|\beta'(1)\|=2\kappa_\alpha(1)$,

$$\beta'(1)\times\beta''(1)=\begin{vmatrix} T & N & B \\ \sqrt{3}\kappa_\alpha(1) & 0 & \kappa_\alpha(1) \\ \sqrt{3}\kappa_\alpha{}'(1)-2\kappa_\alpha(1) & 0 & \kappa_\alpha{}'(1)\end{vmatrix}=-2\kappa_\alpha(1)^2N,$$

$\|\beta'(1)\times\beta''(1)\|=2\kappa_\alpha(1)^2$.

구하는 값 $\tau_\alpha(1)\kappa_\beta(1)=\sqrt{3}\kappa_\alpha(1)\cdot\left[\frac{2\kappa_\alpha(1)^2}{8\kappa_\alpha(1)^3}\right]=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

5. 0, $\frac{2}{\sqrt{3}}$

γ는 구면곡선이므로 $\|\gamma\|=1$, $n=\frac{\gamma}{\|\gamma\|}=\gamma$, $n'=\gamma'=T$.

$0=(B\cdot n)'=B'\cdot n+B\cdot n'=-\tau N\cdot n+B\cdot n'$이므로

$B\cdot n'=B\cdot T=0=\tau N\cdot n$, $\tau=0=a(s)$.

구면 위의 곡선으로서 열률$=0$이므로 γ는 원(의 일부).

B, n의 사잇각 $\frac{\pi}{3}$이므로 $b(s)=\frac{1}{\kappa}=\frac{1}{1\cdot\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$

6. $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{2}{13}$

$\gamma'(t)=(2+\sin t,1+\cos t,2)$가 $(6,2,4)$와 평행하게 되는 $t_0=\frac{\pi}{2}\in(0,2\pi)$.

$\gamma(t_0)=(\pi,\frac{\pi}{2}+1,\pi+1)$에서

$\gamma'=(3,1,2)$, $\gamma''=(0,-1,0)$, $\gamma'\times\gamma''=(2,0,-3)$, $\gamma'''=(-1,0,0)$.

γ의 열률 $\tau=\frac{(\gamma'\times\gamma'')\cdot\gamma'''}{\|\gamma'\times\gamma''\|^2}=\frac{-2}{13}$.

7. $\tau=0$, $a=3$

C의 매개변수표현 $C(t)=(t,t^3-at+a,t-1)$이다.

$C'(t)=(1,3t^2-a,1)$, $C''(t)=(0,6t,0)$, $C'''(t)=(0,6,0)$,

$C(1)=(1,1,0)$, $C'(1)=(1,3-a,1)$,

$C''(1)=(0,6,0)$, $C'(1)\times C''(1)=(-6,0,6)$,

$(C'\times C'')\cdot C'''=0$이므로 $\tau=0$.

C의 곡률 $3=\frac{6\sqrt{2}}{[2+(a-3)^2]^{3/2}}$에서 $a=3$.

8. $\frac{1}{4}$

$\beta'(t)=\alpha(t)+t^2N(t)$, $\beta''(t)=T(t)+2tN(t)+t^2(-\kappa(t)T(t)+\tau(t)B(t))$에서

$\beta''(2)=[1-4\kappa(2)]\,T(2)+4N(2)+4\tau(2)B(2)$

양변 $\alpha'(2)=T(2)$내적하면 $0=1+0-4\kappa(2)$이므로 $\kappa(2)=\frac{1}{4}$.

9. $\frac{6}{\sqrt{5}}$

γ의 곡률 $\kappa(s)$라 하자.

$3t=\int_0^t\|\beta'(s)\|ds=\int_0^t\|\frac{1}{2}\kappa(s)N(s)-\kappa(s)T(s)+0B(s)\|ds=\int_0^t\frac{\sqrt{5}}{2}\kappa(s)ds$

$3=\frac{\sqrt{5}}{2}\kappa(t)$, $\kappa(1)=\frac{6}{\sqrt{5}}$.

10. $\frac{7}{3}$

$\|\alpha'(t)\|=t^2+2$, $\int_0^1 t^2+2\,dt=\frac{7}{3}$.

* 정규직교기저 $\{T,N,B\}$에 관한 α'의 좌표 $(1,\kappa,0)$

11. $a^2+b^2=3$
(3차항 없음) $\beta'''(t)=0$이므로 임의의 $t\in\mathbb{R}$에 대하여
β의 열률 $\tau_\beta\equiv 0=\tau_\alpha=\dfrac{24a}{\|\alpha'\times\alpha''\|^2}$에서 $a=0$.
α의 곡률 $\kappa_\alpha=\dfrac{4}{(4+4t^2)^{3/2}}$의 최댓값 $\dfrac{1}{2}$ (곡률반경 최소)
β의 곡률 $\kappa_\beta=\dfrac{\sqrt{4b^2+4}}{(b^2+1+4t^2)^{3/2}}$의 최댓값 $\dfrac{2}{b^2+1}$에서
$\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{b^2+1}$, $b^2=3$. 구하는 값 $a^2+b^2=3$.

12. $\sqrt{1+\tau^2}$
α의 프레네 세레틀 $\{T,N,B\}$라 하자.
$\beta'=N$, $\beta''=N'=-T+\tau B$, $\beta'\times\beta''=B+\tau T$,
$\beta'''=-N-\tau^2N=(-1-\tau^2)N$.
$\kappa_\beta=\left\|\dfrac{T_\beta{}'}{ds}\right\|=\|\beta''(s)\|=\dfrac{\|\beta'\times\beta''\|}{\|\beta'\|^3}=\dfrac{\sqrt{1+\tau^2}}{1^3}=\sqrt{1+\tau^2}$,
$\tau_\beta=\dfrac{(\beta'\times\beta'')\cdot\beta'''}{\|\beta'\times\beta''\|^2}=0$.
구하는 값 $\kappa_\beta+\tau_\beta=\sqrt{1+\tau^2}$.

13. ③
$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $f(x,y,z)=\begin{pmatrix}x\\y\\-z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$라 하면
f는 $xy-$평면의 대칭이동(직교변환, 기저에 의한 표현행렬이 직교행렬)으로서, $f(\alpha(t))=\beta(t)$인 등장사상이다.
ㄱ. 곡선 α와 β의 곡률 $\kappa_\alpha=\kappa_\beta$.
ㄴ. f의 표현행렬의 행렬식은 -1이므로 $\tau_\alpha=-\tau_\beta$.
ㄷ. 그런 L이 있으면 $\tau_\alpha=1\cdot\tau_\beta=-\tau_\beta$에서 $\tau_\alpha=\tau_\beta=0$가 되는데, α, β는 평면 곡선이 아니다.

* 직접 계산으로도 확인할 수 있다.
* 등장사상의 불변량
① 곡선 길이, κ 불변
② $|\tau|$ 불변, 부호는 등장사상의 행렬식의 부호를 따른다.

14. ③
C의 매개변수표현 $\alpha(t)$라 하자.
C는 정칙곡선이므로 $\alpha'(t)\neq 0$, $\mathrm{v}=\|\alpha'(t)\|\in\mathbb{R}$라 하자.
ㄱ. $T'=\kappa\mathrm{v}N=0$이므로 $T=c$인 $c\in\mathbb{R}^3$있다.
$\alpha'(t)=\mathrm{v}c$이므로 $\alpha(t)=\mathrm{v}ct+b$인 $b\in\mathbb{R}^3$있다.
따라서 C는 직선이거나 직선의 일부이다.
ㄴ. $B'=-\tau\mathrm{v}N=0$이므로 $B=c$인 $c\in\mathbb{R}^3$있다.
따라서 C는 B를 법선으로 하는 평면에 놓여 있다.
ㄷ. 주면나선

15. ①
$(2,0,4\pi)=\gamma(t_1)=(a\cos t_1, a\sin t_1, bt_1)$,
$(2,0,8\pi)=\gamma(t_2)=(a\cos t_2, a\sin t_2, bt_2)$라 하면
$a^2=4$에서 $a=2$, $b(t_2-t_1)=4\pi$에서 $t_2-t_1=\dfrac{4\pi}{b}$
$\gamma'(t)=(-a\sin t, a\cos t, b)$이므로
$$4\sqrt{10}\pi=\int_{t_1}^{t_2}\|\gamma'(t)\|dt$$
$$=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{a^2+b^2}\,dt$$
$$=(t_2-t_1)\sqrt{a^2+b^2}\text{에서 } 9b^2=4,\ b=\frac{2}{3}.\ \therefore\ a+b=\frac{8}{3}.$$

16. ⑤
$q=(1,0,0)$에서 $\nabla(x^2-y^2-1)=(2x,-2y,0)=(2,0,0)$,
$\nabla(z-xy)=(-y,-x,1)=(0,-1,1)$이므로 $(1,0,0)\times(0,-1,1)=(0,-1,-1)$.
교선 γ의 접선벡터는 $(0,-1,-1)$과 평행하다.
따라서 구하는 평면의 방정식은 $(x-1,y,z)\cdot(0,-1,-1)=0$에서 $y+z=0$.
구하는 답은 $(-1,1,-1)$

* 다른 설명
γ의 매개변수 표현 $\gamma(t)=(\cosh t, \sinh t, \dfrac{1}{2}\sinh 2t)$,
$\gamma(0)=(1,0,0)$, $\gamma'(0)=(0,1,1)$이므로
구하는 평면은 $(x-1,y,z)\cdot(0,1,1)=0$에서 $y+z=0$.

* 공간 $\mathbb{R}^3$에서 γ의 접선벡터 T는 S_1, S_2의 단위법벡터 U_1, U_2와 각각 수직이다. 그러므로 T는 U_1과 U_2를 포함하는 평면의 법벡터 $U_1\times U_2$와 평행하다.
(T를 고정하고 U_1과 U_2를 포함하는 평면을 생각)

17. ①
$\beta'(0)=-4\alpha'(0)$, $\beta''(0)=8\alpha''(0)$, $\beta'(0)\times\beta''(0)=-32\alpha'(0)\times\alpha''(0)$,
$\beta'''(0)=-16\alpha'''(0)$이므로
β의 비틀림 $\dfrac{(\beta'(0)\times\beta''(0))\cdot\beta'''(0)}{\|\beta'(0)\times\beta''(0)\|^2}=\dfrac{-32\times(-16)}{32^2}\tau(0)=\dfrac{1}{2}\tau(0)$.

18. ②
$\alpha'(t)=(\sinh t, \cosh t, 1)$, $\|\alpha'(t)\|=\sqrt{\sinh^2t+\cosh^2t+1}=\sqrt{2}\cosh t$
$s(t)=\displaystyle\int_0^t\|\alpha'(u)\|du=\sqrt{2}\sinh t$,
$t=t(s)=\sinh^{-1}\dfrac{s}{\sqrt{2}}$, $\cosh^2t-\sinh^2t=1$에서
$\cosh t=\sqrt{1+\sinh^2t}=\sqrt{1+\dfrac{s^2}{2}}$,
$\beta(s)=\alpha(t(s))=\left(\sqrt{1+\dfrac{s^2}{2}}, \dfrac{s}{\sqrt{2}}, \sinh^{-1}\dfrac{s}{\sqrt{2}}\right)$.
* $\cosh^2t-\sinh^2t=1$, $\cosh^2t=1+\sinh^2t$
* $\cosh^2t+\sinh^2t=\cosh 2t$, $\sinh 2t=2\sinh t\cosh t$

19. $t=\sqrt{\dfrac{5}{3}}$
$\alpha'(t)=(3t^2+1,2t,1)$, $\alpha''(t)=(6t,2,0)$, $\alpha'(t)\times\alpha''(t)=(-2,6t,-6t^2+2)$.
$xy-$평면의 법벡터 $(0,0,1)$이므로
$\cos 45^\circ=\dfrac{(-2,6t,-6t^2+2)\cdot(0,0,1)}{\|(-2,6t,-6t^2+2)\|\|(0,0,1)\|}$에서
$3t^4-5t^2=0$, $t=0,\pm\sqrt{\dfrac{5}{3}}$이므로 구하는 $t=\sqrt{\dfrac{5}{3}}$.

20. $0\neq\alpha''(s)=\kappa(s)N(s)$이므로 $\kappa(s)\neq 0$ $(s\in[a,b])$.
$c\in\mathbb{R}^3$에 대하여 $c=\alpha(s)+\dfrac{1}{\kappa(s)}N(s)$라 하자.
양변을 미분하면, 프레네 공식에 의해
$$0=T(s)+\frac{N'(s)\kappa(s)-\kappa'(s)N(s)}{[\kappa(s)]^2}$$
$$=T+\frac{1}{\kappa^2}(-\kappa^2T+\kappa\tau B-\kappa'N)$$
$$=\frac{\tau}{\kappa}B-\frac{\kappa'}{\kappa^2}N.$$
$\{T,, N, B\}$는 $\mathbb{R}^3$의 정규직교기저이므로
$\dfrac{\tau}{\kappa}=0=\dfrac{\kappa'}{\kappa^2}$, $\tau=0$이므로 α는 평면곡선, $\kappa'=0$이므로 κ는 상수.
$\|c-\alpha(s)\|=\left\|\dfrac{1}{\kappa(s)}N(s)\right\|=\dfrac{1}{\kappa(s)}$이므로 α는 반지름 $\dfrac{1}{\kappa(s)}$인 원의 일부.

21. $\frac{\pi}{4}$

구하고자 하는 각을 θ라 하자.

단위접선벡터 $T(t)=\frac{1}{1+2t^2}(1,2t,2t^2)$.

평면의 단위법벡터 $\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$.

$\cos(\theta-\frac{\pi}{2})=\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로 $\theta=\frac{\pi}{4}$.

* $T(t)\cdot\vec{n}=\cos\frac{\pi}{4}$(상수) 이므로 $\mathrm{x}(t)$는 주면나선이다.

* $\vec{n}=\cos\theta T+\sin\theta B$, $\frac{\tau}{\kappa}=\cot\theta$.

22. $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 0, 반지름 $\sqrt{2}$인 원

$\mathrm{x}'(\theta)=(-\sin\theta,-\sin\theta,\sqrt{2}\cos\theta)$, $\|\mathrm{x}'(\theta)\|=\sqrt{2}$,

$\mathrm{x}''(\theta)=(-\cos\theta,-\cos\theta,-\sqrt{2}\sin\theta)$,

$\mathrm{x}'(\theta)\times\mathrm{x}''(\theta)=(\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$,

$\mathrm{x}'''(\theta)=(-\sin\theta,-\sin\theta,-\sqrt{2}\cos\theta)$이므로 곡률 $\kappa=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

열률 $\tau=0$이므로 주어진 곡선은 반지름 $\sqrt{2}$인 원이다.

* 원의 중심(곡률중심) $\mathrm{x}(\theta)+\frac{1}{\kappa}N=(-2,2,0)$

23. 비꼬임 $\frac{1}{2}$, $\int_\alpha\phi=\frac{8}{5}$

(1) $t=0$에서 $\alpha'=(2,0,0)$, $\alpha''=(0,2,0)$, $\alpha'\times\alpha''=(0,0,4)$, $\alpha'''=(0,0,2)$.

α의 비꼬임은 $\frac{(\alpha'\times\alpha'')\cdot\alpha'''}{\|\alpha'\times\alpha''\|^2}=\frac{1}{2}$.

(2) $dx=2dt$, $dy=2tdt$, $dz=t^2dt$이므로 $\int_\alpha\phi=\int_{-1}^{1}2t^2+\frac{2}{3}t^4+2t^5dt=\frac{8}{5}$.

24.

(1) $T=\frac{X'}{\|X'\|}=\left(-\frac{4}{5}\sin t,\frac{4}{5}\cos t,\frac{3}{5}\right)$

(2) 곡률을 κ라 하면 $T'=\kappa\|X'\|N$에서 $\kappa=\frac{4}{25}$

(3) 곡률반경 $\frac{1}{\kappa}=\frac{25}{4}$.

* 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡선 α, $\|\alpha'\|=\mathrm{v}$일 때 다음이 성립

$$\begin{bmatrix}T'\\N'\\B'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\mathrm{v}\kappa&0\\-\mathrm{v}\kappa&0&\mathrm{v}\tau\\0&-\mathrm{v}\tau&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T\\N\\B\end{bmatrix}$$

25.

하위 영역	배점	예상정답율(%)	관련사고영역	출제자
기하 및 위상	5	30	적용	방승진
출제 내용 관련자료	R.S. Milman/G.D.Parker. Elements of Differential Geometry. pp102-104			

반지름의 길이가 r인 원의 곡률은 $\frac{1}{r}$이고, 이 원이 측지선이므로 $k_g\equiv 0$이다.

$k^2=k_n^2+k_g^2$이고 따라서 $k_n=\pm\frac{1}{r}$이다.

k_n은 미분가능이므로 연속이다.

따라서, $k_n\equiv\frac{1}{r}$ 또는 $k_n\equiv-\frac{1}{r}$이다.

*** 채점기준**

공식 $k^2=k_n^2+k_g^2$을 쓰면

측지선이면 $k_g\equiv 0$을 언급하면

원의 곡률은 $\frac{1}{r}$임을 언급하면

$k_n\equiv\frac{1}{r}$ 또는 $k_n\equiv-\frac{1}{r}$의 답 중 어느 하나만 구해도

($\equiv$ 대신 $=$로 써도 점수를 줄 수도 있다.)

26. ①

X는 단위속력곡선이므로 $X(t)$의 곡률 κ는 $\kappa=\|X''(t)\|=\frac{a}{a^2+1}$.

〈곡면〉

1.
존재하지 않는 함수에 관한 미분법은 존재하지 않는다.

해당 문항에서는 측지곡률 조건을 이용하면 함수 f(x)를 구할 수 있습니다. 비록 구한 f(x)가 일부 구간에서 첫 번째 문장의 조건을 만족시키지 않지만 이러한 상황이 f(x)를 구하거나 문항 전체를 해결하는 데 영향을 주지는 않습니다.
다만 $f(x)$를 구한 후에 구한 $f(x)$가 첫 번째 문장의 조건을 만족하지 않는다는 사실을 인지한 경우 더 이상 문제 풀이를 진행하지 못할 수 있다는 점과 서술형 평가의 특성 및 채점의 공정성, 객관성을 고려하여 채점 기준에 반영하기로 했습니다.

2.

$X(0,\frac{\pi}{4})=(1,\sqrt{2},\sqrt{2})=\mathrm{P}$에서 $X_u=(2,0,0)$, $X_v=(0,-\sqrt{2},\sqrt{2})$이므로

$U=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,-1)$, 접평면의 방정식 $y+z=2\sqrt{2}$.

P에서 $E=4$, $F=0$, $G=4$, $L=-2$, $M=0$, $N=2$이므로

$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=-\frac{1}{4}$, $H=\frac{1}{2}\cdot\frac{EN+GL-2FM}{EG-F^2}=0$.

3.
M은 $x^2+4y^2=4$를 x축으로 회전한 회전면이다.
M의 조각사상 $X(u,v)=(2\cos u,\ \sin u\cos v,\ \sin u\sin v)$.

$X\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=\left(\sqrt{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$에서

$L=-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$, $M=0$, $N=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$,

$E=\frac{5}{2}$, $F=0$, $G=\frac{1}{2}$이므로

$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{16}{25}$.

M의 경계 $\alpha_1=X(u,0)$, $\alpha_2=X\left(u,\frac{\pi}{3}\right)$, $\alpha_3=X\left(\frac{\pi}{2},v\right)$, $\alpha_4=X\left(\cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}},v\right)$.

α_1, α_2, α_3는 측지선이다.
외각합 $\sum e_j=2\pi$, $\chi(M)=4-4+1=1$.
가우스-보네 정리에 따라

$\iint_M K\,dA=2\pi\chi(M)-\int_{\partial M}\kappa_g\,ds-\sum e_j=\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$.

4. $\gamma(t)=\left(-\frac{1}{2}+\cosh t,\ \frac{1}{2}+\sinh t,\ 1-\cosh t-\sinh t\right)$라 하면 $p=\gamma(0)$.

$\gamma'(0)=(0,1,-1)$, $\gamma''(0)=(1,0,-1)$, $\gamma'\times\gamma''(0)=(-1,-1,-1)$.

$X(u,v)=(u,v,u^2-v^2)$라 하면 $p=X\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$에서 $U=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$.

그러므로 $\kappa_g=\kappa BU=-\frac{1}{2\sqrt{6}}$, $\kappa_n=\frac{\gamma''\cdot U}{\|\gamma'\|^2}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

(다른 풀이)
M의 조각사상 $X(u,v)=(u,v,u^2-v^2)$라 하면 p에서

$L=\frac{2}{\sqrt{3}}$, $M=0$, $N=-\frac{2}{\sqrt{3}}$, $E=2$, $F=-1$, $G=2$.

M, N의 p에서 단위법벡터를 각각 U_M, U_N라 하면

$U_M=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$, $U_N=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$

γ의 p에서 단위접선벡터 T라 하면 $T\ /\!/\ U_M\times U_N\ /\!/\ -\frac{1}{\sqrt{2}}X_v$이므로

$\kappa_n=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}=\frac{N}{G}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

γ의 곡률, 단위주법선벡터를 각각 κ, N라 하면

$\kappa N=-\frac{1}{\sqrt{3}}U_M+\kappa_g(U_M\times T)$이므로

$0=\kappa(N\cdot U_N)=-\frac{1}{\sqrt{3}}(U_M\cdot U_N)+\kappa_g(U_M\times T)\cdot U_N$, $\kappa_g=-\frac{1}{2\sqrt{6}}$.

5. $\frac{3}{4}$, 2

주곡률 κ_1, κ_2라 하고 κ_1에 대한 주방향을 e라 하자.
오일러 공식에 따라

$\frac{11\pi}{8}=\int_0^{\pi}\kappa_n(\theta)d\theta=\int_0^{\pi}\kappa_1\cos^2\theta+\kappa_2\sin^2\theta\,d\theta=\frac{\pi}{2}(\kappa_1+\kappa_2)$, $\kappa_1+\kappa_2=\frac{11}{4}$.

$K=\kappa_1\kappa_2=\frac{3}{2}$이므로 κ_1, κ_2는 $x^2-\frac{11}{4}x+\frac{3}{2}=0$의 근 $\frac{3}{4}$, 2.

6. M의 조각사상 $X(u,v)=\left((u^4-2u^2+5)\cos v,\ (u^4-2u^2+5)\sin v,\ u\right)$.
S의 경계는 M과 평면 $z=\pm1$의 교선
$\alpha_1(t)=(4\cos t,4\sin t,-1)$, $\alpha_2(t)=(4\cos t,4\sin t,1)$.

S의 경계에서 측지곡률 $\kappa_g=\frac{(\alpha'\times\alpha'')\cdot U}{\|\alpha'\|^3}=0$.

* $B\cdot U=0$
외각은 없으며, $\chi(S)=4-6+2=0$. 가우스-보네 정리에 따라

$\iint_S KdA=2\pi\chi(S)-\int_{\partial S}\kappa_g ds-\sum\varepsilon_j=-\int_{\alpha_1}\kappa_g ds-\int_{\alpha_2}\kappa_g ds=0$.

7.
$\mathrm{x}(1,2)=\mathrm{P}=(3,-3,2)$에서 $\mathrm{x}_u=(2,1,2)$, $\mathrm{x}_v=(1,-4,1)$, $\mathrm{x}_u\times\mathrm{x}_v=(9,0,-9)$
접평면의 방정식 $0=(1,0,-1)\cdot(x-3,y+3,z-2)$, $x-z=1$.

점 P에서 $E=9$, $F=0$, $G=18$, $L=\sqrt{2}$, $M=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $N=0$이므로

$H=\frac{1}{2}\cdot\frac{EN+GL-2FM}{EG-F^2}=\frac{L}{2E}=\frac{\sqrt{2}}{18}$.

* 다른 설명

모양연산자 $S=\begin{pmatrix}E&F\\F&G\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}L&M\\M&N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{9}&-\frac{1}{9\sqrt{2}}\\-\frac{1}{18\sqrt{2}}&0\end{pmatrix}$,

$H=\frac{1}{2}\mathrm{tr}S=\frac{\sqrt{2}}{18}$, $K=\det S=\frac{1}{18^2}$, κ_1, $\kappa_2=\frac{\sqrt{2}\pm1}{18}$.

8. $d=\frac{3}{2}$, $K=1$
가정에 의해 점 p에서 M과 H의 단위법벡터는 평행하므로

$\nabla\left(z-\frac{1}{4}(x^4+y^4)\right)=k\cdot\nabla(x+y-z-d)$인 $k\in\mathbb{R}$ 있다.

이때 $k=-1$, $-x^3=-1$, $-y^3=-1$,

$x=1$, $y=1$, $z=\frac{1}{2}$에서 $d=\frac{3}{2}$. $(z\neq1)$

* 점 p에서 곡면 M의 접평면이 H이다.
① $\mathbb{R}^2$에서 접한다. ⇔ 접선이 같다.
② $\mathbb{R}^3$에서 접한다. ⇔ 접평면이 같다.

한편, M의 매개변수표현 $X(u,v)=\left(u,v,\frac{1}{4}(u^4+v^4)\right)$,

$X(1,1)=p$에서 $E=2$, $F=1$, $G=2$, $L=\sqrt{3}$, $M=0$, $N=\sqrt{3}$,

$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=1=\kappa_1\kappa_2$.

* $H=\frac{EN+GL-2FM}{2(EG-F^2)}=\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}$이므로

주요곡률 κ_1, κ_2는 $x^2-\frac{4}{\sqrt{3}}x+1=0$의 근이다.

따라서 $x=\frac{2\pm1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sqrt{3}$.

* 모양연산자 S일 때, $K=\det S$, $H=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{tr}S$.

9. $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{2}}{6}$

$X(1,0)=p$에서

$X_u=(1,0,-1)$, $X_v=(0,1,0)$, $X_u\times X_v=(1,0,1)$, $U=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$,

$X_{uu}=(0,0,2)$, $X_{uv}=(0,1,0)$, $X_{vv}=(-1,0,0)$,

$E=2$, $F=0$, $G=1$, $L=\sqrt{2}$, $M=0$, $N=-\frac{1}{\sqrt{2}}$이므로

$\kappa_1=\frac{L}{E}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\kappa_2=\frac{N}{G}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$. $(\kappa_1>\kappa_2)$

$\boldsymbol{w}$는 접벡터 $1X_u+1X_v$와 평행하므로 $\boldsymbol{w}$ 방향 법곡률

$$\kappa_n(\boldsymbol{w})=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}=\frac{\sqrt{2}+0-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2+0+1}=\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

* 다른 설명

$F=M=0$이므로 주벡터 X_u, X_v이다.

X_u와 w의 사잇각 θ라 할 때, $X_u\cdot w=\frac{2}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}\cos\theta$.

오일러 공식에 의해 $\boldsymbol{w}$ 방향 법곡률

$\kappa_n(\boldsymbol{w})=\kappa_1\cos^2\theta+\kappa_2\sin^2\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=\frac{1}{3\sqrt{2}}$.

* 주어진 곡면은 경선 $(u,0,\frac{1}{u})$을 z축 회전한 회전면이며,

곡면의 방정식 $(x^2+y^2)z^2=1$이다.

10. $\gamma(\theta)=(1+\cos\theta, \sin\theta, \sqrt{2-2\cos\theta})$, $\kappa_g=1$

S_2의 매개변수표현 $(1+\cos\theta, \sin\theta, z)$을 S_1에 대입하면

$(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta+z^2=4$, $z=\sqrt{2-2\cos\theta}=(2-2\cos\theta)^{1/2}$.

$\gamma(\theta)=(1+\cos\theta, \sin\theta, (2-2\cos\theta)^{1/2})=(1+\cos\theta, \sin\theta, 2\sin\frac{\theta}{2})$.

$\gamma(\pi)=(0,0,2)$에서 $\nabla(x^2+y^2+z^2)\big|_{(0,0,2)}=(0,0,4)$, $U=(0,0,1)$.

$\gamma'(\pi)=(0,-1,0)$, $\gamma''(\pi)=(1,0,-\frac{1}{2})$, $\gamma'(\pi)\times\gamma''(\pi)=(\frac{1}{2},0,1)$,

그러므로 측지곡률 $\kappa_g=\frac{(\gamma'(\pi)\times\gamma''(\pi))\cdot U}{\|\gamma'(\pi)\|^3}=1$.

* $\kappa_n=\kappa N\cdot U,=\frac{\alpha''\cdot U}{\|\alpha'\|^2}$, $\kappa_g=\kappa B\cdot U=\frac{(\alpha'\times\alpha'')\cdot U}{\|\alpha'\|^3}$.

* S_1 위에서 $\begin{cases}\kappa_n=-\frac{1}{2} \\ \kappa_g=1\end{cases}$, S_2위에서 $\begin{cases}\kappa_n=-1 \\ \kappa_g=-\frac{1}{2}\end{cases}$이며,

$U_{S_1}=(0,0,1)\perp(-1,0,0)=U_{S_2}$이다. (사잇각 $\frac{\pi}{2}$)

11. $\kappa_1=0$, $\kappa_2=\frac{\sqrt{15}}{3}$, $\kappa=\frac{16\sqrt{15}}{75}$

원뿔은 회전면이므로 점 p에서 주곡률은 경선 · 위선 법곡률.

점 p에서 경선(모선) $\overline{pq}$의 법곡률 $\kappa_1=0$,

점 p에서 위선은 반지름 $\frac{3}{4}$인 원이므로

단위법벡터 U가 원뿔의 외부방향을 향한다고 정할 때,

위선의 단위주법선벡터 N과 U의 사잇각 α라 하자.

위선방향 법곡률 $\kappa_2=\frac{4}{3}N\cdot U=\frac{4}{3}\cos\alpha=\frac{4}{3}\cos(\pi-\alpha)=-\frac{\sqrt{15}}{4}$.

γ의 접벡터 γ'과 경선이 이루는 각을 θ라 하면 $\cos\theta=\frac{3}{5}$.

오일러 공식에 의해 점 p에서 γ의 법곡률

$\kappa_n=\kappa_1\cos^2\theta+\kappa_2\sin^2\theta=-\frac{16\sqrt{15}}{75}$,

γ의 측지곡률 $\kappa_g=0$이므로 $\kappa=|\kappa_n|=\frac{16\sqrt{15}}{75}$.

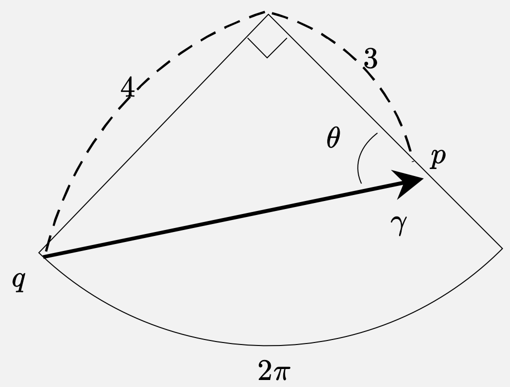
* 조각사상 $X(u,v)=(u\cos v, u\sin v, \sqrt{15}(1-u))$일 때,

$p=X(3/4,0)$, $q=X(1,0)$, 주곡률까지는 계산할 수 있다.

* γ는 측지선이므로 평면에 그려지면 직선이다.

* 원뿔은 평면과 국소등장적($K=0$)이므로 평면에 그릴 수 있다.

(전개도)



12. 회전면 M의 조각사상 $X(u,v)=(\frac{(u^2+v^2)^2}{4}, u, v)$.

$X(u,0)=p$에서 $X_u=(u^3,1,0)$, $X_v=(0,0,1)$, $U=\frac{1}{\sqrt{1+u^6}}(1,-u^3,0)$,

$X_{uu}=(3u^2,0,0)$, $X_{uv}=\mathbf{0}$, $X_{vv}=(u^2,0,0)$,

$E=1+u^6$, $F=0$, $G=1$, $L=\frac{3u^2}{\sqrt{1+u^6}}$, $M=0$, $N=\frac{u^2}{\sqrt{1+u^6}}$.

$K(u)=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{LN}{EG}=\frac{3u^4}{(1+u^6)^2}$.

$F=M=0$이므로 모양연산자$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} L/E & 0 \\ 0 & N/G \end{pmatrix}$의

고유벡터는 $(1,0)$, $(0,1)$.

따라서 $0X_u+1X_v=X_v=(0,0,1)_p$는 주벡터이다.

이에 대응하는 주곡률을 κ_1라 하면 오일러 공식에 의해

$\kappa_n(w_p)=\cos^2\frac{\pi}{6}\kappa_1(u)+\sin^2\frac{\pi}{6}\kappa_2(u)$.

그러므로 $ab=\frac{3}{16}$.

* $X(u,v)=(\frac{u^4}{4}, u\cos v, u\sin v)$일 때, $X(u,0)=p$에서

$E=1+u^6$, $F=0$, $G=u^2$, $L=3u^2(1+u^6)^{1/2}$, $M=0$, $N=u^2(1+u^6)^{1/2}$

M은 회전면($F=M=0$)이므로 X_u, X_v는 주벡터이고

$(0,0,1)_p \mathbin{/\!/} X_v$, X_v에 대응하는 주곡률 $\kappa_1(u)$라 하면

오일러 공식에 의해 $\kappa_n(w_p)=\cos^2\frac{\pi}{6}\kappa_1(u)+\sin^2\frac{\pi}{6}\kappa_2(u)$.

13. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

M은 곡선 $\alpha(u)=(u,0,\frac{1}{2}u^2)$을 z축으로 회전한 회전면.

$X_u=(\cos v,\sin v,u)$, $X_v=(-u\sin v, u\cos v, 0)$,

$X_u\times X_v=(-u^2\cos v, -u^2\sin v, u)$,

$U=\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}(-u\cos v, -u\sin v, 1)$.

각 경계의 매개변수표현은

위선 $\alpha_1(t)=(\cos t, \sin t, \frac{1}{2})$ $(0\le t\le \pi)$,

경선 $\alpha_2(t)=(t,0,\frac{1}{2}t^2)$ $(-1\le t\le 1)$ (측지선).

각 측지곡률 $\frac{(\alpha_1{}'\times\alpha_1{}'')\cdot U_{\alpha_1}}{\|\alpha_1{}'\|^3}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{(\alpha_2{}'\times\alpha_2{}'')\cdot U_{\alpha_2}}{\|\alpha_2{}'\|^3}=0$,

$\int_{\partial S}\kappa_g ds=\int_{\alpha_1}\kappa_g ds=\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}ds=\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}\|\alpha_1{}'\|dt=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

* α_1의 법곡률 $\kappa_n=\kappa\cdot NU=1\cdot\cos\alpha=1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

* α_2의 법곡률 $\kappa_n=\frac{\alpha_2{}''\cdot U_{\alpha_2}}{\|\alpha'\|^2}=\frac{1}{(1+t^2)^2}$

* 가우스-보네 정리로 풀 수도 있다.

$\iint_M KdS=\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\chi(M)=3-3+1=1$

$\sum_p \varepsilon_p=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$, (경선과 위선은 직교)

* M은 경선 $(x,0,\frac{1}{2}x^2)$을 z축 회전한 회전면

* M의 방정식 $x^2+y^2=2z$

14. ①

* 원환면 T는 $xz-$평면의 원 $(x-2)^2+z^2=1$을 z축을 기준으로 회전하여 얻은 회전면이다.

T의 매개변수표현

$$X(u,v)=((2+\cos u)\cos v, (2+\cos u)\sin v, \sin u)$$
$$(0\le u\le 2\pi,\ 0\le v\le 2\pi)$$

$X(\pi,0)=(1,0,0)=\alpha(0)$에서

$X_u=(0,0,-1)$, $X_v=(0,1,0)$, $X_u\times X_v=(1,0,0)$.

한편 $\nabla(y+z)=(0,1,1)$이므로

$\alpha'(0)$의 방향은 $(1,0,0)\times(0,1,1)=(0,-1,1)$과 평행.

이때 $(0,-1,1)=-X_u-X_v$이므로 $\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$를 구하자.

$E=1$, $F=0$, $G=1$, $L=1$, $M=0$, $N=-1$이므로

$$\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}=\frac{L(-1)^2+2M(-1)(-1)+N(-1)^2}{E(-1)^2+2F(-1)(-1)+G(-1)^2}=0.$$

* 곡면 T를 평면 P로 잘랐을 때 곡선이 생겼다고 할 때,
곡선의 접선벡터, 주법선벡터는 P에 포함되며,
곡선의 종법선벡터는 T의 법벡터와 평행하다.
특히, 접선벡터는 T의 법벡터와 P의 법벡터의 외적과 평행.

15. ④

ㄱ. f의 표현행렬 A는 직교행렬이며 A^{-1}도 직교행렬이므로 f^{-1}도 등장사상된다. (회전/대칭변환 행렬)

ㄴ. 등장사상은 가우스곡률 보존, S의 모든 점에서 가우스곡률 0이다. 등장사상있으면 위상동형된다.

ㄷ. 가우스곡률, 측지곡률을 보존한다. $(u,u^2,1)$의 $(0,0,0)$에서 평균곡률 $H\neq 0$.

16. ②

M의 매개변수표현

$$X(u,v)=\left(u, 2\cosh\left(\frac{u}{2}\right)\cos v, 2\cosh\left(\frac{u}{2}\right)\sin v\right),$$
$$(u\in\mathbb{R},\ 0\le v\le 2\pi).$$

$E=1+\sinh^2\frac{u}{2}=\cosh^2\frac{u}{2}$, $F=0$, $G=4\cosh^2\frac{u}{2}$,

$L=-\frac{1}{\cosh\frac{u}{2}}\cdot\frac{1}{2}\cosh\frac{u}{2}=-\frac{1}{2}$,

$M=0$,

$N=\frac{1}{\cosh\frac{u}{2}}\cdot 2\cosh\frac{u}{2}=2$.

$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{LN}{EG}=\frac{-1}{4\cosh^4\frac{u}{2}}$이므로

임의의 p에 대하여 $-\frac{1}{4}\le K(\mathrm{p})<0$(쌍곡점).

거리동형은 가우스곡률을 보존하므로 M은 평면($K=0$)과 동형이 아니다.

* $y=f(x)$를 x축 중심 회전한 회전면일 때 $K=\frac{-f''}{f\left[1+(f')^2\right]^2}$.

17.

(Ⅰ) α 위의 모든 점에서 Y의 가우스곡률 0

(가)와 [정리 1]에 의해 $\mathrm{N}_X{}'(t)=k\alpha'(t)$인 $k\in\mathbb{R}$ 있다.

$\alpha(t)$의 X, Y에서 단위법벡터 $\mathrm{N}_X(t)$, $\mathrm{N}_Y(t)$라 하자.

$\alpha'(t)\perp\mathrm{N}_X(t)$, $\alpha'(t)\perp\mathrm{N}_Y(t)$이므로 $\alpha'(t)$는 $\mathrm{N}_X(t)\times\mathrm{N}_Y(t)$와 평행하다.

두 곡면 X, Y가 수직으로 만나므로 $\mathrm{N}_X(t)\cdot\mathrm{N}_Y(t)=0\in\mathbb{R}$, 양변 미분하면

$0=\mathrm{N}_X{}'(t)\cdot\mathrm{N}_Y(t)+\mathrm{N}_X(t)\cdot\mathrm{N}_Y{}'(t)$

$\ =k\alpha'(t)\cdot\mathrm{N}_Y(t)+\mathrm{N}_X(t)\cdot\mathrm{N}_Y{}'(t)$

$\ =\mathrm{N}_X(t)\cdot\mathrm{N}_Y{}'(t)$.

즉, $\mathrm{N}_Y{}'(t)\perp\mathrm{N}_X(t)$.

한편 $\|\mathrm{N}_Y(t)\|=1$이므로 $1=\mathrm{N}_Y(t)\cdot\mathrm{N}_Y(t)$, 양변 미분하면 $\mathrm{N}_Y{}'(t)\cdot\mathrm{N}_Y(t)=0$.

즉, $\mathrm{N}_Y{}'(t)\perp\mathrm{N}_Y(t)$.

$\mathrm{N}_Y{}'(t)\perp\mathrm{N}_X(t)$, $\mathrm{N}_Y{}'(t)\perp\mathrm{N}_Y(t)$이므로 $\mathrm{N}_Y{}'(t)$는 $\mathrm{N}_X(t)\times\mathrm{N}_Y(t)$와 평행하다.

$\mathrm{N}_Y{}'(t)$는 $\alpha'(t)$와 평행하므로 $\mathrm{N}_Y{}'(t)=l\cdot\alpha'(t)$인 $l\in\mathbb{R}$ 있다.

그러므로 [정리 1]에 의해 $\alpha(t)$는 Y의 주요곡선이다.

(나)에 의해 $\alpha''(t)$는 $\mathrm{N}_X(t)$와 평행하고 $\mathrm{N}_X\perp\mathrm{N}_Y(t)$이므로 $\alpha''(t)\perp\mathrm{N}_Y(t)$.

Y의 곡선으로서 $\alpha(t)$의 법곡률 $\dfrac{\alpha''(t)\cdot\mathrm{N}_Y(t)}{\|\alpha'(t)\|^2}=0$.

주요곡선 $\alpha(t)$의 법곡률 0이므로 α 위의 모든 점에서 Y의 가우스곡률 0.

(Ⅱ) $(X,\mathfrak{I})$에서 $\overline{A}=X$

$x\in X$를 포함하는 개집합 $G\in\mathfrak{I}$라 하자.

$G\in\mathfrak{I}_A$인 경우 $G\cap A\neq\varnothing$.

$G\notin\mathfrak{I}_A$인 경우 $G=X-F$인 $(A,\mathfrak{I}_A)$의 컴팩트 집합 F 있다.

(다)에 의해 A는 컴팩트가 아니므로 $F\subsetneq A$, 즉 $A-F\neq\varnothing$.

$A\cap G=A\cap(X-F)=A-F\neq\varnothing$.

그러므로 $X\subset\overline{A}$가 되어 $\overline{A}=X$, A는 X에서 조밀.

(Ⅲ) $f|_A$가 상수함수이면 f는 상수함수

보통위상공간 $\mathbb{R}^3$는 거리공간이므로 T_2-공간이며,

따라서 부분공간 Y도 T_2-공간이다.

$f|_A$가 상수함수이므로 $f(A)=\{k\}$인 $k\in Y$ 있다.

상수함수 $g:X\to Y$, $g(x)=k$라 하면

임의의 Y-개집합들의 g에 의한 역상은 $\varnothing$ 또는 X이므로 g는 연속함수.

$F=\{x\in X\,|\,f(x)=g(x)\}$라 하면 [정리 2]에 의해 F는 폐집합이다.

임의의 $t\in I$에 대하여 $f(\alpha(t))=k=g(\alpha(t))$이므로 $A\subset F$

(Ⅱ)에 의해 $X=\overline{A}\subset\overline{F}=F$이므로 $F=X$.

그러므로 $f=f|_X=g$가 되어 f는 상수함수이다.

18. ④

α는 반지름 $\sqrt{2}$인 $z=2$ 위의 원이므로

α의 매개변수표현 $\alpha(t)=(\sqrt{2}\cos t,\sqrt{2}\sin t,2)$, α 곡률 $\kappa=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

$\nabla(z^2-x^2-y^2-2)=(-2x,-2y,2z)$,

α의 S 위의 법벡터 $U=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(\cos t,\sin t,\sqrt{2})$,

S 위에 놓인 α의 법곡률 $\kappa_n=\dfrac{\alpha''\cdot U}{\|\alpha'\|^2}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$,

$\kappa^2=\kappa_n^2+\kappa_g^2$에서 $|\kappa_g|=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

* 다른 설명: $\kappa_g=\dfrac{(\alpha'\times\alpha'')\cdot U}{\|\alpha'\|^3}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

* 다른 풀이: S의 매개변수표현

$X(u,v)=\sqrt{2}(\sinh u\cos v,\sinh u\sin v,\cosh u)$

$X_u=\sqrt{2}(\cosh u\cos v,\cosh u\sin v,\sinh u)$,

$X_v=\sqrt{2}(-\sinh u\sin v,\sinh u\cos v,0)$,

$E=2\cosh^2u+2\sinh^2u=2\cosh 2u$, $F=0$, $G=2\sinh^2u$

$L=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cosh 2u}}$, $M=0$, $N=\dfrac{\sqrt{2}\sinh^2u}{\sqrt{\cosh 2u}}$.

$\cosh u=\sqrt{2}$, $\sinh u=1$, $v=t$일 때

$X_v=\sqrt{2}(-\sqrt{2}\sin t,\sqrt{2}\cos t,0)$이므로

$\alpha'=(-\sqrt{2}\sin t,\sqrt{2}\cos t,0)=X_v$.

$\kappa_n(\alpha')=\dfrac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}=\dfrac{N\cdot 1^2}{G\cdot 1^2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\cosh 2u}}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$, $\kappa=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$이므로 $\kappa_g=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

19.

- X는 T_2-공간

$f:D\to Y$, $f(x,y)=\mathrm{x}(2\pi x,2\pi y)$라 하면 f는 연속, 전사이며,

$(x,y)\sim(x',y')\Leftrightarrow\mathrm{x}(2\pi x,2\pi y)=\mathrm{x}(2\pi x',2\pi y')\Leftrightarrow f(x,y)=f(x',y')$이다.

f가 폐사상임을 보인다.

D는 유계폐집합이므로 하이네-보렐 정리에 의해 cpt이고,

f는 연속이므로 $f(D)=Y$는 cpt이다.

$F\subset D$인 폐집합 F에 대하여 D는 cpt이므로 F도 cpt이다.

따라서 $f(F)$는 Y에서 cpt이며 원환면 Y는 T_2-공간이므로

$f(F)$는 Y에서 폐집합이 된다. f는 폐사상.

따라서 f는 상사상이므로 $X=D/\sim\cong Y$ (위상동형).

Y가 T_2-공간이므로 상공간 X도 T_2-공간이다.

- X, Y의 가우스곡률 비교

상공간 X의 가우스곡률은 정의할 수 없으며, X는 $r>1$인 실수 r에 대해 $X(u,v)=((r+\cos u))\cos v,\ (r+\cos u)\sin v,\ \sin u)$와 위상 동형이다.

이때 가우스곡률 $K=\dfrac{\cos u}{r+\cos u}$는 r의 값에 따라 변하며 $r=2$일 때 Y의 가우스곡률과 같다. 즉, 가우스곡률이 서로 다르게 주어질 수 있다.

- 가우스-보네 정리의 의미

가우스-보네 정리에 따라 컴팩트 유향 곡면 X, Y에 대하여

$\iint_X KdS=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\dfrac{\cos u}{r+\cos u}(r+\cos u)dudv=0=2\pi\chi(X)$이므로 $\chi(X)=0$.

$\iint_Y KdS=0=2\pi(v-e+f)$이므로 $\chi(Y)=0$.

위상불변량 $\chi(X)=\chi(Y)$이므로 X와 Y는 위상적 구조가 일치한다(위상동형).

가우스-보네 정리는 두 곡면의 가우스곡률이 다르게 주어질 수 있더라도 전가우스곡률이 같으면 두 곡면의 위상적 구조가 일치함을 의미한다.

20. ⑤

직선 $l_0(v)=(0,v,2v)$를 곡선 $c(u)=(u,0,u^3)$을 따라 평행이동하면 $X(u,v)=l_0(v)+c(u)=(u,v,u^3+2v)$.

$E=\|c'(u)\|^2=1+9u^4,\ F=c'(u)\cdot l_0{}'(v)=6u^2,\ G=\|l_0{}'(v)\|^2=5.$

$L=\dfrac{6u}{\sqrt{9u^4+5}},\ M=0,\ N=0.$

$K=\dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}=0,\ H=\dfrac{EN+GL-2FM}{2(EG-F^2)}=\dfrac{15u}{(9u^4+5)^{3/2}}.$

$\begin{pmatrix}E&F\\F&G\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}L&M\\M&N\end{pmatrix}$의 고유치 $0,\ 2H$, 고유벡터 $(0,1),\ (1,0)$.

주곡률: $0,\ \dfrac{30u}{(9u^4+5)^{3/2}}$.

주방향: $0\cdot X_u+1\cdot X_v=X_v=l_0{}'(v)$,

$1\cdot X_u+0\cdot X_v=X_u=c'(u)=(1,0,3u^2)$.

p에서 l_0의 방향 $l_0{}'(p)$은 M의 주방향이므로 l_p는 M의 주요곡선도 된다.

l_0와 평행인 직선 $l_p(t)$으로서 M에서 법곡률(=주곡률) 0이므로 l_p는 M의 점근곡선이다.

l_p는 직선이므로 곡률 $\kappa=0$이다. M에서 l_p의 측지곡률 κ_g라 하면 $0^2=\kappa_n^2+\kappa_g^2$에서 $\kappa_g=0$이므로 l_p는 M의 측지선도 된다.

가우스-보네 정리에 의해

$\iint_\triangle KdA+\int_{\partial\triangle}\kappa_g ds+\sum_{i=1}^{3}e_i$

$=\iint_\triangle 0dA+\int_{\partial\triangle}0ds+\sum_{j=1}^{3}(\pi-i_j)$

$=3\pi-\sum$내각$=2\pi\chi(\triangle)=2\pi\cdot(3-3+1)=2\pi$이므로 내각의 합 π.

21. ①

오일러 공식에 의해 v방향의 법곡률 $\kappa_n(v)=1\cdot\cos^2\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{1}{3}\cdot\sin^2\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$.

* 오일러의 공식

곡면 M 위의 점 p에서 주곡률 $\kappa_1,\ \kappa_2$, 주방향 $e_1,\ e_2$에 대하여 $u=e_1\cos\theta+e_2\sin\theta$의 법곡률 $\kappa_n(u)$는

$$\kappa_n(u)=\kappa_1\cos^2\theta+\kappa_2\sin^2\theta.$$

22.

(1) $x(1,1)$에서 $x_u=(1,2,2),\ x_v=(2,1,-2)$,

$x_u\times x_v=(-6,6,-3)$이므로 $\vec{n}=\dfrac{1}{3}(-2,2,-1)$.

(2) $xy-$평면의 (정규직교)기저 $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$이므로

$\vec{n}$을 $xy-$평면에 정사영한 벡터를 $\boldsymbol{p}$라 하면

$\boldsymbol{p}=\mathrm{proj}_{(1,0,0)}\vec{n}+\mathrm{proj}_{(0,1,0)}\vec{n}=-\dfrac{2}{3}(1,0,0)+\dfrac{2}{3}(0,1,0)=(-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},0).$

$\cos\alpha=\dfrac{\vec{n}\cdot\boldsymbol{p}}{\|\vec{n}\|\|\boldsymbol{p}\|}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}.$

* 다른 설명

$xy-$평면의 법벡터 $(0,0,1)\in\langle(1,0,0),(0,1,0)\rangle^\perp$,

$\vec{n}\cdot(0,0,1)=\|\vec{n}\|\|(0,0,1)\|\cos(\dfrac{\pi}{2}-\alpha)$에서 $-\dfrac{1}{3}=\sin\alpha,\ \cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

23.

$x(0,0)=(2,0,1)$에서 $x_\theta=(0,2,0),\ x_\phi=(1,0,0)$,

$x(0,0)$에서 접평면의 법벡터 $(0,0,1)$,

$(x-2,y-0,z-1)\cdot(0,0,1)=0$이므로 접평면의 방정식 $z=1$.

$\sin^2\phi+\cos^2\phi=1$에서 $\cos\phi=1$이면 $\sin\phi=0$이므로

$x(\theta,\cos^{-1}(1))=(2\cos\theta,2\sin\theta,1)$이므로 교선의 방정식 $x^2+y^2=4,\ z=1$.

* 원환면 x을 평면 $z=1$로 자르면 반지름 2인 원(위도선)

* 곡면 x는 곡선 $(x-2)^2+z^2=1$을 z축 회전하여 얻은 회전면이다.

* x의 방정식 $(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+z^2=1$,

24.

$\iint_G\cos^2\dfrac{\theta}{2}dS=\iint_G\dfrac{1}{2}+\dfrac{\cos\theta}{2}dS$

$=\dfrac{1}{2}\iint_G dS+\dfrac{1}{2}\iint_D dA$

$=\dfrac{1}{2}S(G)+\dfrac{1}{2}A(D)$

* 곡면 $M:\mathrm{x}(u,v):D\to\mathbb{R}^3$위의 호의 길이 l, 영역의 넓이 S

① $l=\int_a^b\|\mathrm{x}'(u(t),v(t))\|\,dt$

$=\int_a^b\sqrt{E\left(\dfrac{du}{dt}\right)^2+2F\left(\dfrac{du}{dt}\right)\left(\dfrac{dv}{dt}\right)+G\left(\dfrac{dv}{dt}\right)^2}\,dt$

② $S=\iint_M 1\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_D\|\mathrm{x}_u\times\mathrm{x}_v\|\,dA$

$=\iint_D\sqrt{EG-F^2}\,dA=\iint_D\|\nabla f\|\,dA$

($f(x,y,z)=0$는 M의 음함수 표현)

25.

하위 영역	배점	예상정답율(%)	관련사고영역	출제자
고등미적분학	5	40	지식 및 이해	방승진
출제 내용 관련자료	박을룡/김영원/고성은(역). Thomas/Finney. Calculus and Analytic Geometry. pp.995-1004			

$f(x,y)=1-x^2-y^2$라 두면

$\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}=\sqrt{4x^2+4y^2+1}=\sqrt{4(1-z)+1}=\sqrt{5-4z}$이고

S를 xy평면에 내린 정사영은 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$이므로 주어진 적분은

$\iint_S\dfrac{1}{\sqrt{5-4z}}dS=\iint_D\dfrac{1}{\sqrt{5-4z}}\sqrt{5-4z}\,dA=\iint_D dA=\pi$이다.

* 채점기준

$f(x,y)=1-x^2-y^2$라 두고

$\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}=\sqrt{4x^2+4y^2+1}=\sqrt{4(1-z)+1}=\sqrt{5-4z}$를 계산하면……2점

영역 D를 구하면 ……………………………………1점

적분값을 구하면 ……………………………………1점

26.

폐곡면 S는 컴팩트 곡면을 가지므로 반지름 r인 구면으로 덮을 수 있다.

구면에 접하는 S의 점 p라 하자. 구면의 가우스 곡률은 $\dfrac{1}{r^2}$이고,

p에서 S는 구면보다 더 많이 굽어있으므로

p에서 가우스곡률 $K(p)\ge\dfrac{1}{r^2}>0$이다.

* 임의의 컴팩트 곡면은 가우스 곡률이 양수인 점 있다.

27.

하위 영역	배점	예상 정답율(%)	출제근거 (이유)
고등수학(미분기하학)	4	50	B. O'Neill. Elementary Differential Geometry. pp.380-390.

가우스-보네 정리에 의해

$\int_{S^1\times S^1}KdA=2\pi\chi(S^1\times S^1)$

단, $\chi(S^1\times S^1)$은 $S^1\times S^1$의 오일러 지표이다. ………… 2점

(단, 식 없이 가우스-보네 정리만 언급했을 경우 부분점수 가능, $\chi(S^1\times S^1)$의 의미는 언급하지 않아도 됨)

$S^1\times S^1$의 지너스 g는 1이므로

$\chi(S^1\times S^1)=2(1-g)=2(1-1)=0$

따라서, $\int_{S^1\times S^1}KdA=0$ ………… 3점

$K(p)$가 연속함수이므로 $K(p)=0$ 되는 점 $p\in S^1\times S^1$가 적어도 하나 존재한다. ………… 4점

28. 유향 폐곡면 S에 대하여 가우스-보네정리를 이용하면
$\int_S K\,dS = 2\pi\chi(S)$가 성립하고 주어진 타원면 E는 구면 S(또는 정육면체 P)과 위상동형이므로 $\chi(S)=2$이다.

따라서 $\int_E KdE = 2\pi\chi(E) = 2\pi\chi(P) = 2\pi(V-E+F) = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$이다.

* 가우스-보네 정리

① 컴팩트 곡면 M, $\iint_M KdM = 2\pi\chi(M)$

② M이 고리 h개를 가지면 $\iint_M KdM = 4\pi(1-h)$

[위상수학]

<u>〈집합・위상의기초・사상・거리공간〉</u>

1. $\mathfrak{I}_{\mathbb{Z}}=\{\varnothing,\{0\},\{0,1,2\},\{0,1,2,3,4\},\mathbb{Z}\}$, $\{0,1,2\}$

$\mathfrak{I}_{\mathbb{Z}}$의 원소로서 A를 포함하는 가장 큰 개집합 $\{0,1,2\}$.

2.

여가산위상공간에서 구간 $(0,1)$에 포함되는 개집합 G라 하면

G^c은 가산집합이고, $(0,1)^c\subset G^c$, $(0,1)^c$은 비가산집합이므로 $G=\varnothing$.

따라서 $S^\circ=\varnothing$.

또한 여가산위상에서 폐집합은 가산집합이거나 전체집합이므로 $\overline{(0,1)}=\mathbb{R}$.

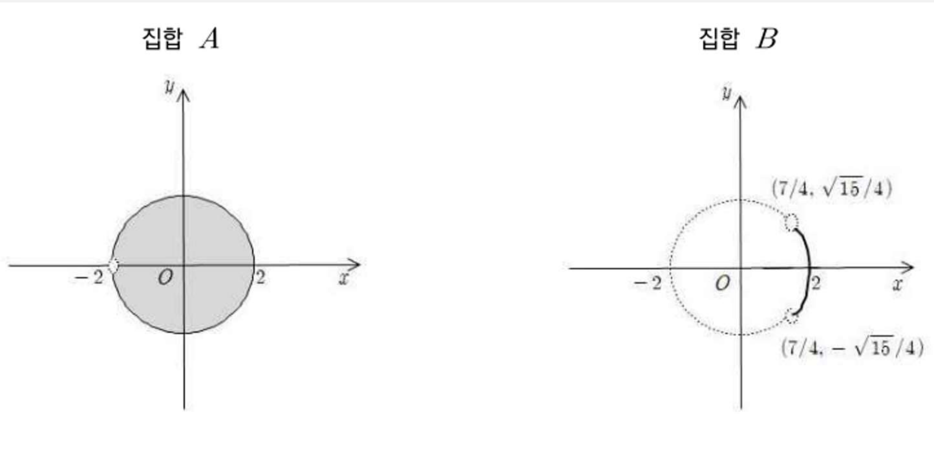
보통위상공간의 기저 $\mathscr{B}=\{(a,b)\times(c,d)\,|\,a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$이므로

$B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;x>0,\ y=\sin\frac{1}{x}\right\}$라 할 때,

$\overline{B}=\bigcap_{F^c\in\mathscr{B},\,B\subset F}F=B\cup\{(0,y)\mid -1\le y\le 1\}$.

그러므로 $\overline{S}=\mathbb{R}\times[B\cup(0,y)\mid -1\le y\le 1\}]$.

3.



$\|(2,0)\|=2$, $P=(x,y)$라 할 때

$$A:\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}+2<4 & ,\ \sqrt{x^2+y^2}\neq 2\\ \sqrt{(x-2)^2+y^2}<4 & ,\ \sqrt{x^2+y^2}=2\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x^2+y^2<2^2 & ,\ x^2+y^2\neq 2^2\\ (x-2)^2+y^2<4^2 & ,\ x^2+y^2=2^2\end{cases}$$

$$B:\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}+2<1 & ,\ \sqrt{x^2+y^2}\neq 2\\ \sqrt{(x-2)^2+y^2}<1 & ,\ \sqrt{x^2+y^2}=2\end{cases}$$

$$=(x-2)^2+y^2<1\ ,\ x^2+y^2=2^2$$

4. $(1,2)$, $[1,2]$, $(0,2]$

$(\mathbb{R},\ \mathfrak{I})$의 기저개집합 $f_1^{-1}(G)\cap f_2^{-1}(H)=[m,m+1)\cap(n,n+1]$, $m,n\in\mathbb{Z}$

$(\mathbb{R},\mathfrak{I})$의 기저 $\mathscr{B}=\{[m,n),(m,n],(m,n),\{m\}\mid m,n\in\mathbb{Z}\}$

$=\{\{n\}\mid n\in\mathbb{Z}\}\cup\{(n,n+1)\mid n\in\mathbb{Z}\}$.

$\sqrt{2}$를 포함하는 개집합 $(1,2)$에 대하여 $(1,2)^c\in\mathfrak{I}$이므로 $(1,2)$는 폐집합.

상대위상 $\mathfrak{I}_{(1,2)}=\{(1,2)\cap G\mid G\in\mathfrak{I}\}=\{\varnothing,(1,2)\}$는 비이산위상이므로

$(1,2)$는 $((1,2),\ \mathfrak{I}_{(1,2)})$에서 연결이다.

따라서 $(1,2)$는 $(\mathbb{R},\mathfrak{I})$에서 연결이므로 연결성분이다.

$$\mathrm{int}\left[\frac{1}{2},2\right]=\bigcup_{\substack{G\in\mathscr{B},\\ G\subset[1/2,2]}}G=[1,2]$$

$=(\left[\frac{1}{2},2\right]$를 포함하는 가장 큰 개집합)

$$\overline{\left[\frac{1}{2},2\right]}=\left[\mathrm{int}\left(\left[\frac{1}{2},2\right]^c\right)\right]^c$$

$=[\mathrm{int}((-\infty,1/2)\cup(2,\infty))]^c$

$=[(-\infty,0]\cup(2,\infty)]^c$

$=(0,2]$

$=(\left[\frac{1}{2},2\right]$에 포함되는 가장 작은 폐집합)

* $\mathrm{int}(A)=(\overline{A^c})^c$, $\overline{A}=[\mathrm{int}(A^c)]^c$

5. $\frac{11}{2}$, 41

$e((1,3),(-1,1/2))=\{|0-1|+|0-3|\}+\{|0-(-1)|+|0-1/2|\}$

$=1+3+1+\frac{1}{2}=\frac{11}{2}$.

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,e((x,y),(1,3))<9\}$의 정수점

$=\{(1,3)\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2\mid |x|+|y|+1+3<9,\ (x,y)\neq(1,3)\}$

$=\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2\mid |x|+|y|\le 4\}$, 41개.

6. 8, $B'=\{2,3\}$

① $k=-1,\ -2,\ -3$일 때,

$f^{-1}(\{-3\})=f^{-1}(\{-2\})=f^{-1}(\{-1\})=\varnothing\in\mathfrak{I}_u$,

② $k=0,\ 1,\ 2,\ 3$일 때,

$f^{-1}(\{k\})=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,k\le x^2+y^2<k+1\}$.

$(X,\ \mathfrak{I})$의 기저개집합 $\{-3\}$, $\{-2\}$, $\{-1\}$, $\{0\}$, $\{0,1\}$, $\{0,1,2\}$, $\{0,1,2,3\}$,

$\mathfrak{I}=\wp(\{-1,-2,-3\})\cup\{\{0\},\{0,1\},\{0,1,2\},\{0,1,2,3\}\}\cup\{\varnothing\}$.

3을 포함하는 개집합은 8개 있다.

* $\{0,1,2,3\}\cup G\ (G\in\wp(\{-1,-2,-3\})$

$\overline{B}=\{1,2,3\}$, $\{B$의 고립점$\}=\{1\}$이므로 $B'=\overline{B}-\{B$의 고립점$\}=\{2,3\}$.

7. $\overline{A}=\{(x,0)\,|\,0\le x<1\}$, $B=\left\{\left(\frac{1}{n},0\right)\;\middle|\;n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{0\}$

한 점 $x\in\mathbb{R}^2$, $\varepsilon>0$라 하자.

① $0<\varepsilon\le\|x\|$일 때,

$B_d(x,\varepsilon)=\{p\in\mathbb{R}^2\mid d(x,p)<\varepsilon\}=\{p\in\mathbb{R}^2\mid x=p\}=\{x\}$.

(원점을 제외하면 이산위상)

② $\|x\|<\varepsilon$일 때,

$B_d(x,\varepsilon)=\{p\in\mathbb{R}^2\mid d(x,p)<\varepsilon\}$

$$=\left\{p\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;\begin{cases}d(x,p)=0<\varepsilon,\ p=x\\ d(x,p)=\max\{\|x\|,\|p\|\}<\varepsilon,\ p\neq x\end{cases}\right\}$$

$$=\left\{p\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;\begin{cases}p=x\\ p\neq x,\|x\|<\varepsilon,\|p\|<\varepsilon\end{cases}\right\}$$

$=\{p\in\mathbb{R}^2\mid\|p\|<\varepsilon\}$: 원점 중심 반지름 ε인 원

$(\mathbb{R}^2,\ \mathfrak{I}_d)$의 기저

$\mathscr{B}=\{B_d(x,\varepsilon)\mid x\in\mathbb{R}^2,\varepsilon>0\}$

$=\{\{x\}\mid x\neq(0,0)\}\cup\{\{x\}\mid\|x\|<\varepsilon\}$이므로

$\overline{A}=\bigcap_{A\subset F,\,F^c\in\mathscr{B}}F=\{(x,0)\mid 0\le x<1\}=[0,1)\times\{0\}\neq[0,1)$.

$B=\left\{\left(\frac{1}{n},0\right)\;\middle|\;n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{0=(0,0)\}$: 컴팩트 무한 부분집합

$(\because)$ B의 개피복 $\{G_i\}_{i\in I}$라 하면 $0\in G_0\in\{G_i\}_{i\in I}$있다.

이때, $0\in B_d(0,\varepsilon)\subset G_0$인 $\varepsilon>0$있다.

$\frac{1}{N}<\varepsilon$인 $N\in\mathbb{N}$을 택하면 $n\ge N$일 때, $\left(\frac{1}{n},0\right)\in G_0$.

한편, $(1,0)$, $\left(\frac{1}{2},0\right)$, $\cdots$, $\left(\frac{1}{N-1},0\right)$을 포함하는

G_1, G_2, $\cdots$, G_{N-1}있다.

그러므로 $B\subset G_0\cup G_1\cup\cdots\cup G_{N-1}$, B는 컴팩트이다.

* $(0,0)$의 연결성분 $\{(0,0)\}$, $(\mathbb{R}^2,\mathfrak{I}_d)$는 비연결공간

8.

$(\mathbb{R},\ \mathfrak{I}_l)\times(\mathbb{R},\ \mathfrak{I}_u)$의 기저 $\mathscr{B}=\{[a,b)\times(c,d]\in\mathbb{R}^2\mid a<b,\ c<d\}$이므로

$A^\circ=\cup\{G\,|\,G\subset A,\ G\in\mathscr{B}\}$

$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2<1\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2=1,\ x<0,\ y>0\}$.

$\overline{A}=\cap\{F\,|\,A\subset F,\ F^c\in\mathscr{B}\}=\{A$의 밀착점$\}=A$.

$\mathrm{b}(A)=\overline{A}-A^\circ=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2=1,\ x\ge 0\ \vee\ y\le 0\}$.

* $\{A$의 고립점$\}=\{(1,0),(0,-1)\}$

9. $A' = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

$(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$의 기저 $\mathcal{B} = \{\{m\} \mid m \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{(n, n+2^{-k}) \mid n \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\right\}$

$A' = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \forall G \in \mathcal{B},\ (G - \{x\}) \cap A \neq \varnothing\} = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

* 다른 설명

$\overline{A} = [\mathrm{int}(A^c)]^c = [\mathrm{int}((-\infty, 1/2) \cup (1/2, \infty))]^c$

$= \left[\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \{m\} \cup \bigcup_{n \neq 0} (n, n+1) \cup (0, 1/2)\right]^c = \left[\frac{1}{2}, 1\right)$.

$\{A$의 고립점$\} = \left\{p \in A \mid \exists G_0 \in \mathfrak{I} \text{ s.t } G_0 \cap A = \{p\}\right\} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

$A' = \overline{A} - \{A$의 고립점$\} = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

* $\mathrm{int}(A) = \varnothing$, $\mathrm{b}(A) = \left[\frac{1}{2}, 1\right)$, $\mathrm{ext}(A) = (-\infty, 1/2) \cup [1, \infty)$.

10. $|A| = 9$

$\mathfrak{I} = \{\mathbb{N} - F \mid F:$ 유한 $\}$, $\mathfrak{I}_d$의 기저 $\{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

㉠ $1 \le n \le 4$일 때, $f(n) = 1$을 포함하는 기저 개집합 $\{1\}$에 대하여
$f^{-1}(\{1\}) = \{1, 2, 3, 4\}$는 유한집합이므로
$n \in G \subset f^{-1}(\{1\})$가 되는 $G \in \mathfrak{I}$가 존재하지 않는다.
따라서 $1 \le n \le 4$일 때 불연속이다.

㉡ $5 \le n \le 9$일 때, $f(n) = 2$를 포함하는 기저 개집합 $\{2\}$에 대하여
$f^{-1}(\{2\}) = \{5, 6, 7, 8, 9\}$는 유한집합이므로
$n \in G \subset f^{-1}(\{2\})$가 되는 $G \in \mathfrak{I}$가 존재하지 않는다.
따라서 $5 \le n \le 9$일 때 불연속이다.

㉢ $n \ge 10$일 때 $f(n) = 3$을 포함하는 기저 개집합 $\{3\}$에 대하여
$f^{-1}(\{3\}) = \{10, 11, 12, \cdots\} = \mathbb{N} - \{1, 2, 3, \cdots, 9\}$,
$n \in \mathbb{N} - \{1, 2, \cdots, 9\} = f^{-1}(\{3\})$이므로 $n \ge 10$일 때 연속이다.

그러므로 $|A| = 9$.

11. $\overline{A \times B} = \mathbb{Z} \times \{\pm 1\}$, $(A \times B)^\circ = \{0\} \times \{\pm 1\}$, $b(A \times B) = (\mathbb{Z} - \{0\}) \times \{\pm 1\}$.

$n \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$에 대하여

$f(n) = n^2 \in (n^2 - 1, n^2 + 1) \in \mathfrak{I}$, $f^{-1}((n^2 - 1, n^2 + 1)) = \{\pm n\} \in \mathfrak{I}_1$.

따라서 $\mathfrak{I}_1$의 기저 $\mathcal{B} = \{\{\pm n\} \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

한편, $[n^2 - 1, n^2 + 1] \in \mathfrak{I}^c$이고, f역상 $\{\pm n\}$이다.

* f는 연속이므로 폐집합의 역상은 $(\mathbb{Z}, \mathfrak{I}_1)$에서 폐집합

A를 포함하는 최소 폐집합 $\overline{A} = \{0\} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$,

B를 포함하는 최소 폐집합 $\overline{B} = \{\pm 1\} = B$이므로 $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B} = \mathbb{Z} \times \{\pm 1\}$.

A에 포함되는 최대 개집합(기저 개집합) $\{0\}$,

B에 포함되는 최대 개집합(기저 개집합) $\{\pm 1\}$이므로

$(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ = \{0\} \times \{\pm 1\}$.

$\mathrm{b}(A \times B) = \overline{A \times B} - \mathrm{int}(A \times B) = (\mathbb{Z} \times \{\pm 1\}) - (\{0\} \times \{\pm 1\}) = (\mathbb{Z} - \{0\}) \times \{\pm 1\}$.

* $A' = \{-1, -2, -3, -4, \cdots\}$, $\{A$의 고립점$\} = A$

* $B' = B$, $\{B$의 고립점$\} = \varnothing$

12. ②

ㄱ. $f : (\mathbb{Q} \times \mathbb{R} - \mathbb{Q}) \to \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $f(x, y) = y$라 하면
f는 전사이므로 $\mathbb{Q} \times (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$의 기수(cardinal number)는 $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$이상.
따라서 $\mathbb{Q} \times (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$는 비가산집합.

ㄴ. $g : F \to \mathbb{Q}$, $g(x) = x$라 정의하면 g는 단사이므로 F의 기수는 $\mathbb{Q}$이하가 되고 $\mathbb{Q}$는 가산집합이므로 F는 가산집합이다.

ㄷ. $\mathbb{R}/\sim = \{[x] \mid x \in \mathbb{R}\} = \{[r], [0] \mid r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}\}$,
$h : \mathbb{R}/\sim \to \mathbb{R} - \mathbb{Q} \cup \{0\}$, $h([x]) = x$라 하면 h는 전사이므로
$\mathbb{R}/\sim$은 비가산집합이다.

13. ③

a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$라 하자.

(i) $b \le 0$, $f^{-1}([a, b)) = \varnothing \in \mathfrak{I}_1$

(ii) $0 = a < b$, $f^{-1}([a, b)) = (-b, b) \in \mathfrak{I}_1$

(iii) $0 < a < b$, $f^{-1}([a, b)) = (-b, -a) \cup [a, b) \in \mathfrak{I}_1$

이므로 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_1)$의 기저 $\mathcal{B}$는

$\mathcal{B} = \{\varnothing\} \cup \{(-b, b) \mid b > 0\} \cup \{(-b, -a] \cup [a, b) \mid 0 < a < b\}$.

$(-2, 1)$에 포함되는 가장 큰 개집합 $A = (-1, 1)$

$[1, 2)$에 포함되는 가장 큰 개집합 $B = \varnothing$

* 하한위상은 보통위상을 포함하고 $[a, b)$는 폐집합

14. ④

ㄱ. $A \cap A \neq \varnothing$이므로 $\sim$은 반사적이다.

ㄴ. $A \cap B \neq \varnothing$이면 $B \cap A \neq \varnothing$이므로 $\sim$은 대칭적이다.

ㄷ. $(0, 2) \cap (1, 3) \neq \varnothing$, $(1, 3) \cap (2, 3) \neq \varnothing$이지만
$(0, 2) \cap (2, 3) = \varnothing$이므로 $\sim$은 추이적이지 않다.

그러므로 관계 $\sim$은 X위의 동치관계가 아니다.

15. ①

ㄱ. $\mathrm{int}(A^c) = \left[\overline{(A^c)^c}\right]^c = (\overline{A})^c = X - \overline{A}$.

ㄴ. 보통위상공간에서 $A = \{0\}$라 하면
$\overline{A} = \{0\}$, $\mathrm{int}(\overline{A}) = \varnothing$에서 $\overline{\mathrm{int}(\overline{A})} = \varnothing \neq \overline{A}$.

ㄷ. 일반적으로 $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$이므로 성립하지 않는다.
(보통위상공간에서 $A = \{0\}$, $B = (0, 1)$)

16. ①

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$라 하자.

(i) $0 \in (a, b)$일 때

$f^{-1}((a, b)) = (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q} \cap (a, b)) = [(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}] \cap (a, b) = (a, b) \in \mathfrak{I}_0$

(ii) $0 \not\in (a, b)$일 때

$f^{-1}((a, b)) = (a, b) \cap \mathbb{Q} \in \mathfrak{I}_0$

따라서 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_0)$의 기저 $\mathcal{B}$는

$\{\{f^{-1}(G) \mid 0 \in G \in \mathfrak{I}\}\} \cup \{\{f^{-1}(G) \mid 0 \not\in G \in \mathfrak{I}\}\}$

$= \{(a, b) \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \mid a < 0 < b\} \cup \{(a, b) \cap \mathbb{Q} \mid 0 \not\in (a, b)\}$

(0을 포함) (0이 없음)

① $\sqrt{2} \in G \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$인 $G = (a, b) \in \mathcal{B}$ 있다($a < 0 < b$).
유리수 조밀성에 의해 $q \in G$있다. 모순.

② 0을 포함하는 개집합은 무리수를 항상 가지므로 $\mathbb{Q}$의 내점이 될 수 없다. $(a, b) \cap \mathbb{Q}$꼴의 개집합 중에서 $\mathbb{Q}$에 포함되는 가장 큰 개집합은 $\mathbb{Q} - \{0\} = [(-\infty, 0) \cup (0, \infty)] \cap \mathbb{Q}$이므로 $\mathrm{int}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} - \{0\}$.
폐집합은 $[a, b] (a < 0 < b)$, $[a, b] \cap \mathbb{Q} (0 \not\in (a, b))$꼴과 그 합집합이며, 유리수를 항상 포함. 따라서 $\mathbb{Q}$를 포함하는 가장 작은 폐집합 $\mathbb{R}$.
$\mathrm{b}(\mathbb{Q}) = \overline{\mathbb{Q}} - \mathrm{int}(\mathbb{Q})$
$= \mathbb{R} - [\mathbb{Q} - \{0\}] = (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cup \{0\}$.
($\overline{\mathbb{Q}} = [\mathrm{ext}(\mathbb{Q})]^c$임을 이용할 수도 있다.)

③ $f^{-1}((-1, 1)) = (-1, 1) \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$이므로 옳다.

④ f는 연속이고 $[-1, 1] \in \mathfrak{I}^c$이므로 $f^{-1}([-1, 1]) = [-1, 1] \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \in \mathfrak{I}_0^c$.

⑤ 0을 포함하는 임의의 개집합 G에 대하여
$0 \in (a, b) \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \subset G$인 a, $b \in \mathbb{R}$ 있다.
따라서 $(G - \{x\}) \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \supset [G - [(a, b) \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})]] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \neq \varnothing$,
0은 $(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$의 집적점이다.

17. ③

ㄱ. 옳은 설명

ㄴ. $f^{-1}(f(A)\cap B)=f^{-1}(f(A))\cap f^{-1}(B)\supset A\cap f^{-1}(B)$이고 단사일 때 같다.

ㄷ. $f(A\cap f^{-1}(B))\subset f(A)\cap f(f^{-1}(B))\subset f(A)\cap B$,
$y\in f(A)\cap B$이면 $y\in B$, $y=f(x)$인 $x\in A$있다.
$x=f^{-1}(y)\in B$이므로 $x\in A\cap f^{-1}(B)$이다.
따라서 $y=f(x)\in f(A\cap f^{-1}(B))$
그러므로 $f(A\cap f^{-1}(B))=f(A)\cap B$이다.

18. ①

㉠ $\mathrm{int}(\mathbb{Z})=\left(\overline{\mathbb{Z}^c}\right)^c=[c(\mathbb{Z}^c)]^c=\mathbb{R}^c=\varnothing$.

㉡ $\mathrm{int}([0,1])=\left(\overline{[0,1]^c}\right)^c=[c([0,1]^c)]^c=\mathbb{R}^c=\varnothing$.

㉢ $\mathrm{int}(\mathbb{R}-\mathbb{Z})=\left(\overline{(\mathbb{R}-\mathbb{Z})^c}\right)^c=[c(\mathbb{R}-\mathbb{Z})^c]^c=\mathbb{Z}^c=\mathbb{R}-\mathbb{Z}$.

$$[c(A)]^c=\begin{cases}\mathbb{R}-A, & A\text{는 가산(countable)집합}\\ \varnothing, & A\text{는 비가산(uncountable)집합}\end{cases}$$

⇒ 여가산 위상

19. ②

ㄱ. $A_n\cap B_n=\{-n,-n+1,\cdots,0,\cdots,n-1,n\}=[-n,n]\cap\mathbb{Z}$,
$\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n\cap B_n)=A_1\cap B_1=\{-1,0,1\}$.

ㄴ. $A_n\cup B_n=\mathbb{Z}$이므로 $\mathbb{Z}\cap\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n^c\cap B_n^c)\right)=\varnothing$.

ㄷ. $A_n-B_n=\{-n-1,-n-2,-n-3\}$이므로
$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n-B_n)=\{x\in\mathbb{Z}\mid x\le -2\}$,

20. ③

$\mathfrak{I}=\left\{U\subset A\mid f^{-1}(U)\in\mathfrak{I}_1\right\}$
$=\{A,\varnothing,\{1\},\{4\},\{1,4\},\{3,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}$
8개 있다.

21. ①

① $6\in\{2,4,6,8,10\}$이며 $B_6=\{1,2,3,6\}$이다. 만약 $A=\{2,4,6,8,10\}$가 열린 집합이면 $6\in B_6\subset A$에서 $3\notin A$가 되어 모순이다.

② $\cup\{p\mid p:\text{소수}\}=\{2\}\cup\{3\}\cup\{5\}\cup\cdots$
$=\bigcup_{p:\text{ 소수}}B_p$이므로
소수 전체의 집합은 열린 집합이다.

③ 소수 전체의 집합을 P라 하고 $\overline{P}=X$임을 보인다.
$x\in X=\{2,3,4,\cdots\}$를 포함하는 개집합 G,
$x\in B_x\subset G$인 기저원 B_x있고, 소수 p가 존재해서
$p|x$이므로 $B_p\subset B_x$, $G\cap P\supset B_x\cap P\ni p$이므로
$G\cap P\neq\varnothing$. 그러므로 $\overline{P}=X$.

④ $y\in\overline{\{x\}}$이면 $B_y\cap\{x\}\neq\varnothing$ 즉, $x\in B_y$이므로 $x|y$.
따라서 y는 x의 배수이므로 $y\in\{nx|n\in\mathbb{N}\}$.
$y\in\{nx|n\in\mathbb{N}\}$이면 $y=mx$인 $m\in\mathbb{N}$있다.
이때 $x|y$이므로 $x\in B_y$. y를 포함하는 임의의 개집합 G에 대하여
$y\in B_y\subset G$이므로 $\varnothing\neq B_y\cap\{x\}\subset G\cap\{x\}$.
그러므로 $\overline{\{x\}}=\{nx|n\in\mathbb{N}\}=x\mathbb{N}$.

⑤ $f(2)=2$를 포함하는 $\mathfrak{I}'$-개집합 G는 $\{2\}\subset G$이며,
$2\in\{2\}=f^{-1}(\{2\})\subset f^{-1}(G)$, $B_2=\{2\}\in\mathfrak{I}$이므로
f는 $x=2$에서 연속이다.

22. ④

$x\in X-A$에 대하여 $[x]=\{x\}$, $y\in A$에 대하여 $[y]=\{2,4,6\}$.
그러므로 $\mathrm{n}(X/R)=|X/R|=|\{[1],[3],[5],[7],[8],[2]\}|=6$.

* $R(\sim)$은 X 상의 동치관계이다.

㉠ $x\in X$이면 $x\in A$ 또는 $x\in X-A$이며
$x\in A$일 때, $x\sim 2,4,6$, $x\in X-A$일 때, $x\sim x$.
따라서 R은 반사적이다.

㉡ $x,y\in X$에 대하여 $x\sim y$이면 $x,y\in A$ 또는 $x=y\in X-A$이므로 $y\sim x$.
따라서 R은 대칭적이다.

㉢ $x,y,z\in X$에 대하여 $x\sim y$, $y\sim z$이면 x, y, $z\in A$ 또는 $x=y=z\in X$이므로 $x\sim z$. 따라서 R은 추이적이다.

23. ②

가정에 의해 a를 포함하는 개집합은 $\{a,c\}$를 포함하고 있어야 하고 b를 포함하는 개집합은 $\{b,c\}$를 포함하고 있어야 하며 c를 포함하는 개집합은 $\{c\}$를 포함하고 있어야 하며 d를 포함하는 개집합은 X 뿐이다.
따라서 $\{a,c\}$, $\{b,c\}$, $\{c\}\in\mathfrak{I}$이다.

㉠ $\{a,c\}\cup\{b,c\}=\{a,b,c\}\in\mathfrak{I}$

㉡ $\{a,b\}\in\mathfrak{I}$이면 $\{a\}=\{a,b\}\cap\{a,c\}\in\mathfrak{I}$가 되어 $\{a,c\}\subset\{a\}$, 모순이다.

㉢ $\{a,c,d\}\in\mathfrak{I}$이면 $\{a,c,d\}$는 d를 포함하는 개집합이므로 $X\subset\{a,c,d\}$가 되어 모순이다.

24. ②

$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)^c=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n^c=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\{0\}$.

㉠ 0이 아닌 x가 존재해서 $x\in\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)^c$라 하자.

$0<|x|$이고, 아르키메데스 원리에 의해 $0<\frac{1}{N}<|x|$인 자연수 N 있다. 모순이다. ($n\ge N$이면 $x\notin\left(\bigcup_{n=N}^{\infty}A_n\right)^c$)

㉡ 임의의 자연수 $n\in\mathbb{N}$에 대하여 $-\frac{1}{n}<0<\frac{1}{n}$이므로 $0\in\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)^c$.

25. ④

① $(1,\infty)$는 개집합이고, $f^{-1}((1,\infty))=\varnothing\in\mathfrak{I}$

② $(-1,1)$는 개집합이고 $f^{-1}((-1,1))=\{0\}\in\mathfrak{I}$

③ $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$는 개집합이고
$f^{-1}((-\infty,0)\cup(0,\infty))=\mathbb{Z}-\{0\}\in\mathfrak{I}$

④ $f^{-1}(G)=\{2k\mid k\text{는 자연수}\}$이 되는 개집합 G가 존재한다고 하면
$f(f^{-1}(G))=f(\{2k\mid k\text{는 자연수}\})=\{1\}\subset G$.
이때 $f^{-1}(\{1\})=\mathbb{Z}-\{0\}\subset f^{-1}(G)$, 모순이다.

⑤ $(-\infty,1)$는 개집합이고 $f^{-1}((-\infty,1))=\{2k-1\mid k\text{는 정수}\}\cup\{0\}\in\mathfrak{I}$

* $\mathfrak{I}=\left\{f^{-1}(G)\mid G:\mathbb{R}-\text{개집합}\right\}$

26. ②

㉠ 현정: 틀림

㉡ 기태: 위상 공간에는 열린 집합도 닫힌 집합도 아닌 집합이 있다.

㉢ 수연: $\overline{A}=\mathrm{int}(A)\cup\mathrm{b}(A)$에서 $\mathrm{int}(A)=\overline{A}-\mathrm{b}(A)$라 쓸 수 있는 것은 $\mathrm{int}(A)\cap\mathrm{b}(A)=\varnothing$이기 때문이다.

㉣ 영호: 보통위상공간에서 개집합 $A=(-1,1)$에 대하여
$\mathrm{int}(A)=A$, $\overline{A}=[-1,1]$, $\mathrm{b}(A)=\overline{A}-\mathrm{int}(A)=\{-1,1\}\neq\varnothing$.

27. $\mathrm{int}(A)=A$, $A'=\mathbb{R}$, $\overline{A}=\mathbb{R}$, $\mathrm{b}(A)=\mathbb{Q}$.

$\mathfrak{I}^c=\{F\subset\mathbb{R}\mid F$는 가산집합$\}\cup\{\mathbb{R}\}$이고 $A^c=\mathbb{Q}\in\mathfrak{I}^c$이므로 A^c은 폐집합.

따라서 A는 개집합이다. $\mathrm{int}(A)=A$.

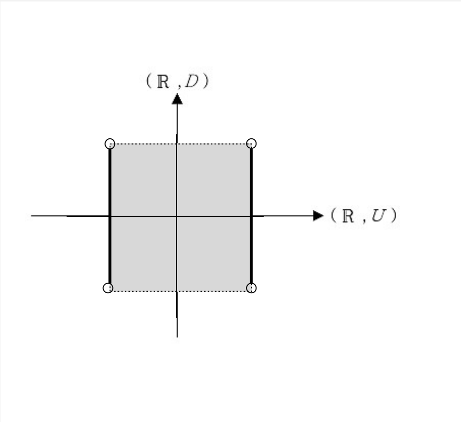
$\mathfrak{I}^c$의 원소는 가산집합 또는 $\mathbb{R}$(비가산집합)이므로 $\overline{A}=\mathbb{R}$.

$\mathrm{b}(A)=\overline{A}-\mathrm{int}(A)=\mathbb{R}-(\mathbb{R}-\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$

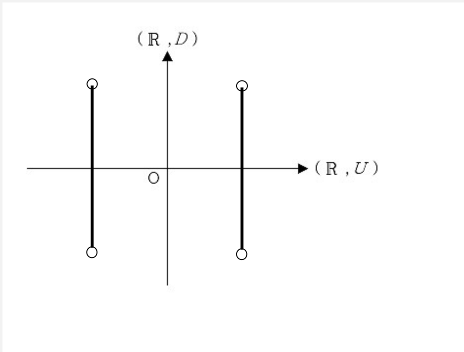
$A'=\{x\in\mathbb{R}\mid x\in\forall G\in\mathfrak{I},\ (G-\{x\})\cap A\neq\varnothing\}=\mathbb{R}$.

28. 실폐포: $[-1,1]\times(-1,1)$, 경계: $\{-1,1\}\times(-1,1)$

- 폐포



- 경계



U에서 $\overline{(-1,1)}=[-1,1]$, D에서 $\overline{(-1,1)}=(-1,1)$,

$\overline{A}=\overline{(-1,1)\times(-1,1)}=[-1,1]\times(-1,1)$이다.

$(-1,1)\in U, D$이므로 $\mathrm{int}(A)=A$.

$\mathrm{b}(A)=\overline{A}-\mathrm{int}(A)$

$=\overline{(-1,1)\times(-1,1)}-\mathrm{int}((-1,1)\times(-1,1))$

$=[-1,1]\times(-1,1)-(-1,1)\times(-1,1)$

$=\{-1,1\}\times(-1,1)$.

* 다른 풀이

적공간의 기저 $\mathscr{B}=\{(a,b)\times\{c\}\mid a,b,c\in\mathbb{R},a<b\}$.

$\overline{A}=\cup\{F\mid A\subset F, F^c\in\mathscr{B}\}=[-1,1]\times(-1,1)$

$\mathrm{int}(A)=\cup\{G\mid G\subset A,\ G\in\mathscr{B}\}=A$

따라서 $\mathrm{b}(A)=\overline{A}-\mathrm{int}(A)=\{-1,1\}\times(-1,1)$

* 다른 설명: $\mathrm{b}(A\times B)=\left(\mathrm{b}(A)\times\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\times\mathrm{b}(B)\right)$

$\mathrm{b}((-1,1)\times(-1,1))$

$=\left(\mathrm{b}((-1,1))\times\overline{(-1,1)}\right)\cup\left(\overline{(-1,1)}\times\mathrm{b}((-1,1))\right)$

$=(\{-1,1\}\times(-1,1))\cup((-1,1)\times\varnothing)$

$=\{-1,1\}\times(-1,1)$

* $\mathrm{b}(A)=\mathbb{R}\times\mathbb{R}-(\mathrm{int}(A)\cup\mathrm{ext}(A))$, $\mathrm{int}(A)=\left(\overline{A^c}\right)^c$,

$\mathrm{ext}(A)=\mathrm{int}(A^c)=\left(\overline{A}\right)^c$를 이용해도 된다.

29.

$\mathbb{R}$에서 개집합 G에 대하여 $f^{-1}(G)=G\times\mathbb{R}$는 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$에서 개집합이므로 f는 연속사상이다.

폐집합 $A=\left\{(x,\frac{1}{x})\ \middle|\ x>0\right\}\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}$에 대하여

$f(A)=(0,\infty)$는 폐집합이 아니므로 f는 폐사상 아니다.

30.

상위상: $\{\mathbb{Z}\}\cup\{\varnothing\}\cup\{\{\cdots n-2,n-1,n\}\mid n\in\mathbb{Z}\}$

보통위상을 $\mathfrak{I}$, 상위상을 $\mathfrak{I}_1$라 하자. $f^{-1}(\mathbb{Z})=\mathbb{R}$, $f^{-1}(\varnothing)=\varnothing\in\mathfrak{I}$이다.

$n\in\mathbb{Z}$에 대하여 $f^{-1}(\{n\})=[n,n+1)\not\in\mathfrak{I}$이므로

$\mathfrak{I}_1=\{U\subset\mathbb{Z}\mid f^{-1}(U)\in\mathfrak{I}\}=\{\mathbb{Z}\}\cup\{\varnothing\}\cup\{\{\cdots n-2,n-1,n\}\mid n\in\mathbb{Z}\}$.

31. (1) 여유한 위상 (2) $\mathbb{N}'=\mathbb{R}$

(1) $\mathfrak{I}$: 여유한 위상

$\mathscr{I}=\{\mathbb{R}-\{p\}\mid p\in\mathbb{R}\}$의 유한 교집합은

$\mathbb{R}-\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}=\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}^c$이므로

$\mathfrak{I}=\{\mathbb{R}-F\mid F$: 유한집합$\}\cup\{\varnothing\}$.

즉, $\mathfrak{I}$는 $\mathbb{R}$ 상의 여유한 위상이다.

(2) $\mathbb{N}'=\mathbb{R}$

$x\in\mathbb{R}$를 포함하는 $\mathfrak{I}$의 원소 G에 대하여 $G=\mathbb{R}-F$인 유한집합 F있다.

($\mathfrak{I}$의 원소는 $\varnothing$ 아니면 $\mathbb{R}-F$인데, x를 포함하려면 $\mathbb{R}-F$ 꼴 밖에 없다.)

$G-\{x\}=\mathbb{R}-F-\{x\}\supset\mathbb{N}-F-\{x\}\neq\varnothing$이므로

$(G-\{x\})\cap\mathbb{N}\neq\varnothing$, $\mathbb{R}\subset\mathbb{N}'$, 즉 $\mathbb{N}'=\mathbb{R}$.

32.

(1) $f^{-1}(\{1\})=\{1,2\}$, $f^{-1}(\{3\})=\{3,4,5\}$,

$f^{-1}(\{2\})=\varnothing=f^{-1}(\{4\})=f^{-1}(\{5\})$는 모두 $\mathfrak{I}$에 속하므로

임의의 2^X의 원소의 역상도 모두 $\mathfrak{I}$에 속한다.

그러므로 f는 연속이다.

(2) $\mathfrak{I}^c=\{\varnothing,\ X,\ \{3,4,5\},\ \{1,3,4,5\},\ \{1,2\},\ \{1\},\ \{1,2,3,5\},\ \{3,5\},\ \{1,3,5\}\}$

$\overline{\{2\}}=\{1,2\}$, $\overline{\{4\}}=\{3,4,5\}$이다.

(3) 구하는 원소의 개수는 1이다.

(2)에서 구한 폐포를 활용하자. f가 연속이면

$f(\overline{\{2\}})=f(\{1,2\})\subset\overline{f(\{2\})}=\overline{\{1\}}=\{1\}$,

$f(\overline{\{4\}})=f(\{3,4,5\})\subset\overline{f(\{4\})}=\overline{\{3\}}=\{3\}$이다.

(공역의 위상은 이산위상이다.)

그러므로 구하는 원소의 개수는 1개.

33.

(1) 위상동형사상의 정의

① f가 1−1대응함수이다.

② f가 연속함수이다. 즉, Y의 임의의 열린집합 U에 대하여 $f^{-1}(U)$가 X의 열린집합이다.

③ f^{-1}가 연속함수이다. 즉, X의 임의의 열린집합 V에 대하여 $f(V)$가 Y의 열린집합이다.

(2) 위상동형사상의 개수

$f:(X,\mathfrak{I})\to(X,\mathfrak{I})$가 위상동형사상이라 하자.

$f(X)=X$, $f(\varnothing)=\varnothing$, $G\in\mathfrak{I}\Leftrightarrow f(G)\in\mathfrak{I}$이고 $\mathrm{n}(G)=\mathrm{n}(f(G))$이다.

가능한 경우는 다음 8가지 있다.

(i) $f(\{a,b\})=\{a,b\}$, $f(\{c,d\})=\{c,d\}$

㉠ $f(a)=a$, $f(b)=b$, $f(c)=c$, $f(d)=d$

㉡ $f(a)=a$, $f(b)=b$, $f(c)=d$, $f(d)=c$

㉢ $f(a)=b$, $f(b)=a$, $f(c)=c$, $f(d)=d$

㉣ $f(a)=b$, $f(b)=a$, $f(c)=d$, $f(d)=c$

(ii) $f(\{a,b\})=\{c,d\}$, $f(\{c,d\})=\{a,b\}$

㉠ $f(a)=c$, $f(b)=d$, $f(c)=a$, $f(d)=b$

㉡ $f(a)=c$, $f(b)=d$, $f(c)=b$, $f(d)=a$

㉢ $f(a)=d$, $f(b)=c$, $f(c)=a$, $f(d)=b$

㉣ $f(a)=d$, $f(b)=c$, $f(c)=b$, $f(d)=a$

34. $A'=\{d,e\}$

① a를 포함하는 가장 작은 개집합: $\{a\}$

② b를 포함하는 가장 작은 개집합: $\{b\}$

③ c를 포함하는 가장 작은 개집합: $\{a,c,d\}$

④ d를 포함하는 가장 작은 개집합: $\{a,c,d\}$

⑤ e를 포함하는 가장 작은 개집합: X

그러므로 $x\in X$를 포함하는 임의의 개집합 G에 대하여$(G-\{x\})\cap A\neq\varnothing$을 만족하는 $x=d,\ e$. 그러므로 $A'=\{d,e\}$.

* 다른 풀이

$A'=\{x\in X\mid x\in\forall G\in\mathfrak{I},\ (G-\{x\})\cap A\neq\varnothing\}=\{d,e\}$.

35. $x,\ y,\ z\in X$라 하자.

(i) $d_1(x,y)=\dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}\geq 0$.

(ii) $d_1(x,y)=0 \Leftrightarrow \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}=0 \Leftrightarrow d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$.

(iii) $d_1(x,y)=\dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}=\dfrac{d(y,x)}{1+d(y,x)}=d_1(y,x)$.

(iv)
$$\begin{aligned} d_1(x,y)+d_1(y,z)&=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}+\frac{d(y,z)}{1+d(y,z)}\\ &\geq\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)+d(y,z)}+\frac{d(y,z)}{1+d(y,z)+d(x,y)}\\ &=\frac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)}\\ &\geq\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)}=d_1(x,z). \end{aligned}$$

따라서 (X,d_1)은 거리공간이다.

한편 $d_1(x,y)=\dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}\leq\dfrac{d(x,y)}{d(x,y)}=1$이므로 (X,d_1)은 유계이다.

36. $\overline{\{x_2\}}=\{x_2,x_5\}$

$T^c=\{X,\ \varnothing,\ \{x_2,x_3,x_4,x_5\},\ \{x_3,x_4,x_5\},\ \{x_2,x_5\},\ \{x_5\}\}$이므로 $\{x_2\}$를 포함하는 가장 작은 폐집합은 $\overline{\{x_2\}}=\displaystyle\bigcap_{\{x_2\}\subset F,\,F^c\in T}F=\{x_2,x_5\}$.

37. 두 도형이 위상동형이라 하고, 연결성은 위상적 성질임을 이용하자.

첫 번째 도형의 두 선분이 교차하는 점을 제외한 도형에서 연결성분은 4개 있다.

그런데 두 번째 도형의 어떤 한 점을 제외해도 연결성분이 4개가 될 수 없으므로 이는 두 도형이 위상동형이라 가정한 데 모순이다.

따라서 두 평면도형은 위상적으로 동형이 아니다.

* 다른 풀이

두 도형 X,Y가 서로 위상적으로 동형이라 하자.

X에서 Y로의 함수 f가 존재해서 위상적 성질에 의해서 연결성이 같아야 한다.

① $f(A)=B$일 때

$X-\{A\}$, $Y-\{f(A)\}$ 사이의 위상동형을 준다. 그런데 부분위상공간 $X-\{A\}$는 연결성분이 3개인 위상공간이고, $Y-\{f(A)\}$는 연결성분이 4개인 위상공간이므로 동형일 수 없다.

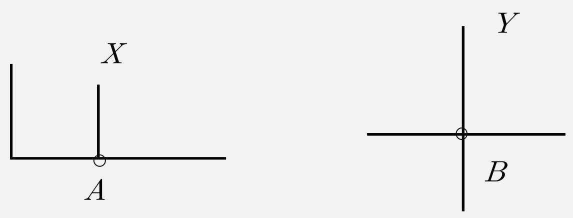
② $f(A)\neq B$일 때

$X-\{A\}$는 3개의 연결성분이 존재, $Y-\{f(A)\}$는 연결성분이 2개인 위상공간이므로 동형일 수 없다.

이때, 두 도형이 위상적으로 동형이라는 가정에 모순이다.

그러므로 f는 위상동형사상이 될 수 없다.

따라서 두 도형 X,Y는 위상적으로 동형이 아니다.



38. ④

④는 열린(개) 사상의 정의

* $f:X\rightarrow Y$가 연속일 필요충분조건

① $Y-$개집합 B에 대하여 $f^{-1}(B)$가 $X-$개집합

② $Y-$폐집합 B에 대하여 $f^{-1}(B)$가 $X-$폐집합

③ $X-$부분집합 A에 대하여 $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$

④ $Y-$부분집합 B에 대하여 $\overline{f^{-1}(B)}\subset f^{-1}(\overline{B})$

$(\because)$ ① $\Leftrightarrow$ ②임은 자명하다.

② $\Rightarrow$ ③: $\overline{f(A)}$는 $Y-$폐집합이므로 ②에 의해 $f^{-1}(\overline{f(A)})$는 $X-$폐집합.

$A\subset f^{-1}(f(A))\subset f^{-1}(\overline{f(A)})$이고, $\overline{A}$는 A를 포함하는 최소의 $X-$폐집합이므로 $\overline{A}\subset f^{-1}(\overline{f(A)})$.

따라서 $f(\overline{A})\subset f^{-1}(\overline{f(A)})$.

③ $\Rightarrow$ ②: $Y-$폐집합 B에 대하여 $f^{-1}(B)$가 $X-$폐집합임을 보이자.

$A=f^{-1}(B)$라 하면 ③에 의해

$f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right)\subset\overline{f(f^{-1}(B))}\subset\overline{B}=B,\ \overline{f^{-1}(B)}\subset f^{-1}(B)$,

$f^{-1}(B)\subset\overline{f^{-1}(B)}$이므로 $f^{-1}(B)=\overline{f^{-1}(B)}$

따라서 $f^{-1}(B)$는 $X-$폐집합이다.

② $\Rightarrow$ ④: $\overline{B}$는 $Y-$폐집합이므로 $f^{-1}(\overline{B})$는 $X-$폐집합이다.

따라서 $\overline{f^{-1}(\overline{B})}=f^{-1}(\overline{B})$이다. $B\subset\overline{B}$이므로

$f^{-1}(B)\subset f^{-1}(\overline{B})$, $\overline{f^{-1}(B)}\subset\overline{f^{-1}(\overline{B})}=f^{-1}(\overline{B})$이므로 $\overline{f^{-1}(B)}\subset f^{-1}(\overline{B})$.

④ $\Rightarrow$ ②: $Y-$폐집합 B이면 $\overline{B}=B$이고, ④에 의해

$\overline{f^{-1}(B)}\subset f^{-1}(\overline{B})=f^{-1}(B)\subset\overline{f^{-1}(B)}$이므로

$\overline{f^{-1}(B)}=f^{-1}(B)$가 되어 $f^{-1}(B)$는 $X-$폐집합.

39. ②

① $\overline{A}\subset\overline{\overline{A}}$이므로 $\overline{A}\subset\overline{\overline{A}}$이다. $x\in\overline{\overline{A}}$이면 x를 포함하는 임의의 개집합 G에 대하여 $y\in G\cap\overline{A}$인 y있다. $y\in\overline{A}$이므로 y를 포함하는 임의의 개집합 H에 대하여 $H\cap A\neq\varnothing$이다. 한편 G는 y를 포함하는 개집합이므로 $G\cap A\neq\varnothing$. 따라서 $\overline{\overline{A}}\subset\overline{A}$. 그러므로 $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$.

② 보통위상에서 $A=\{0\}$, $B=(0,1)$이면 성립하지 않는다.

③ $x\in A-\overline{B}$이면 $x\in A$, $x\in(\overline{B})^c$이고, $B=(B^c)^c$,

$x\in\left[\overline{(B^c)^c}\right]^c=\mathrm{int}(B^c)(=\mathrm{ext}(B))\subset B^c$.

즉 $x\in A$이고 $x\in B^c$이므로 $x\in A\cap B^c=A-B\subset\overline{A-B}$.

④ $\varnothing$은 폐집합이므로 $\varnothing$을 포함하는 제일 작은 폐집합 $\overline{\varnothing}=\varnothing$이다.

<수렴과분리공리 · 컴팩트 · 연결>

1.

$-1 \le x < 1$일 때 $\frac{1}{2} \ge d((-1,0),(x,0)) = \min\{|x-1|, |x+1|, |x+3|\}$를 풀면,

$-1 \le x \le -\frac{1}{2}$ 또는 $\frac{1}{2} \le x < 1$이므로 구하는 값 $\frac{1}{2}$.

$(\mathbb{R}^2_*, d_*)$에서 $a_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$이 코시열이라 하자.

거리함수 d_*는 연속이므로 양의 실수 $\varepsilon_0 = \ln 2$가 주어질 때,

$m,\ n \ge N$이면 $d_*(a_m, a_n) < \varepsilon_0$되는 자연수 N 있다.

$d_*(a_{2N},\ a_N) = d((1/2, -\ln 2N),\ (1/2, -\ln N)) = \ln\frac{2N}{N} = \ln 2$, 모순.

따라서 $\left\{\left(0, \frac{1}{n}\right)\right\}$은 코시수열이 아니다.

2.

$\pi_1(a,b) = a^2 + b^2$, $\pi_2(c,d) = c^2 + d^2$, $\pi_3(a,b,c,d) = ac + bd$는 연속이고,

$\{1\}$, $\{0\}$는 폐집합이므로 $\pi_1^{-1}(1) \cap \pi_2^{-1}(1) \cap \pi_3^{-1}(0) = A$는 폐집합.

p, $\mathrm{q} \in A$일 때 $d(\mathrm{p},\mathrm{q}) \le d(\mathrm{O},\mathrm{p}) + d(\mathrm{O},\mathrm{q}) = 2\sqrt{2}$이므로

$d(A) \le 2\sqrt{2}$, 따라서 A는 유계집합.

하이네-보렐 정리에 따라 A는 컴팩트.

(다른 설명)

$d(A) < 2024$, A^c은 개집합이므로 A는 유계폐집합.

하이네-보렐 정리에 따라 A는 컴팩트.

$f : A \to \mathbb{R}$, $f(a,b,c,d) = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$는 직교행렬이므로 $\mathrm{im} f = \{\pm 1\}$.

A가 연결이면 f는 연속이므로 $f(A) = \{-1, 1\}$가 연결이어야 한다.

이는 모순이므로 A는 연결집합이 아니다.

3. $\alpha \not\in K$인 경우, $G_\alpha = (\alpha - 1, \alpha + 1) \setminus K$일 때 $K \cap (G_\alpha - \{\alpha\}) = \varnothing$, $\alpha \not\in K'$.

자연수 n에 대하여 $G_n = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n(n+1)}, \frac{1}{n} + \frac{1}{2n(n+1)}\right)$라 하면

* G_n은 $\frac{1}{n} \in K$을 포함하는 길이 $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$인 개구간

$K \cap \left(G_n - \left\{\frac{1}{n}\right\}\right) = \varnothing$, $\frac{1}{n} \not\in K'$.

그러므로 $K' = \varnothing$.

$G_0 = (-1, 1)$, $G_n = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n(n+1)}, \frac{1}{n} + \frac{1}{2n(n+1)}\right)$, $I = \{0\} \cup \mathbb{N}$라 하자.

$\{G_i\}_{i \in I}$는 $[0,1]$의 개피복이지만 유한부분피복이 존재하지 않으므로

$[0,1]$은 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$의 컴팩트 부분집합이 아니다.

(다른 풀이)

$\mathbb{R}$ 위의 보통위상 U라 하고 K의 $(\mathbb{R}, U)$에서 도집합을 K_1라 하자.

$U \subset \mathfrak{I}$, $K_1 = \{0\}$이므로 $K' \subset \{0\}$.

$G = (-1,1) - K$는 0을 포함하는 $\mathfrak{I}$에서의 개집합이지만

$(G - \{0\}) \cap K = \varnothing$이므로 $0 \not\in K'$. 따라서 $K' = \varnothing$.

$[0,1]$가 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$의 컴팩트 부분집합이라고 하면

$[0,1]$의 임의의 무한 부분집합에 대하여 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$에서의 집적점이 존재한다.

그러나 위 결과에 의해 $[0,1]$는 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$의 컴팩트 부분집합이 아니다.

(다른 풀이)

$x \in \mathbb{R}$라 하자.

① $x \in K$인 경우 자연수 N이 존재해서 $x = \frac{1}{N}$라 할 수 있으며

x를 포함하는 기저의 원소 $B = \left(\frac{1}{N+1}, \frac{1}{N-1}\right)$일 때

$(B - \{x\}) \cap K = \varnothing$이므로 $x \not\in K'$.

② $x \notin K$인 경우 x를 포함하는 개집합 $G = \mathbb{R} - K$에 대하여

$(G - \{x\}) \cap K = \varnothing$이므로 $x \not\in K'$.

$C = \{(-2,2) - K\} \cup \left\{\left(\frac{1}{n}, 2\right) \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$는 $[0,1]$의 개피복이지만 유한부분피복을

갖지 않으므로 $[0,1]$은 컴팩트가 아니다.

4. $\mathfrak{I}_{\mathscr{B}} = \{\varnothing, X, \{a\}, \{a,b\}, \{c\}, \{a,c\}\}$.

임의의 자연수 n에 대하여 $x_{2n} \notin \{a\}$, $x_{2n-1} \not\in \{c\}$이므로

a, c는 점열 $\{x_n\}$의 극한이 될 수 없다.

b를 포함하는 모든 개집합 X, $\{a,b\}$는 a, b를 모두 포함하고 있다.

즉 $N=1$라 할 때 b를 포함하는 개집합 $G \in \mathfrak{I}_{\mathscr{B}}$에 대하여

$n \ge N$이면 $b \in \{a,b\} \subset G$이므로 $\{x_n\}$의 극한 b.

$\mathfrak{I}_{\mathscr{B}}^c = \{X, \varnothing, \{b,c\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b\}\}$이므로

공집합이 아닌 진부분 폐집합 $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,b\}$, $\{b, c\}$.

서로소가 될 수 있는 경우는 $F_1 = \{b\}$, $F_2 = \{c\}$ 혹은 $F_1 = \{a,b\}$, $F_2 = \{c\}$

2가지이며, 각각 $G_1 = \{a,b\}$, $G_2 = \{c\}$ 혹은 $G_1 = \{a,b\}$, $G_2 = \{c\}$인

개집합 G_1, G_2를 택하면 조건을 만족한다.

5.

$(x,y) \ne (0,0)$이면 $[x,y]$는 (x,y)와 원점을 지나는 직선에서 원점을 제외한 집합이고, $[0,0] = \{(0,0)\}$이다.

$Y = \{[0,0]\} \cup \{[\cos\theta, \sin\theta] \mid 0 \le \theta < \pi\}$

$[0,0]$를 포함하는 $G \in \mathfrak{I}$에 대하여 $\pi^{-1}(G)$는 $(0,0)$을 포함하는 $\mathbb{R}^2$에서의 개집합이다.

따라서 $r > 0$이 존재해서 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le r^2\} \subset \pi^{-1}(G)$이므로 $G = Y$.

$[0,0] \ne [1,1]$이고 $[0,0]$를 포함하는 개집합은 Y 뿐이므로

위상공간 $(Y, \mathfrak{I})$는 T_1-공간이 아니다.

6. $\mathrm{b}(C) = A$, $(X,\ \mathfrak{I}')$는 컴팩트공간

$\mathfrak{I}_A$는 A위의 여유한 위상, $\mathfrak{I}_B$는 B위의 이산 위상이며,

$\mathfrak{I}'$는 $\mathfrak{I}_A$와 $\mathfrak{I}_B$의 합위상이다.

$(A, \mathfrak{I}_A)$에서 $\mathrm{int}\left\{3 - \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} = \varnothing$, $\overline{\left\{3 - \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}} = A$.

* (무한)여유한 위상에서 폐집합은 유한집합$\vee$전체집합

$(B, \mathfrak{I}_B)$에서 $\mathrm{int}\{3\} = \{3\}$, $\overline{\{3\}} = \{3\}$이므로

$(X,\ \mathfrak{I}')$에서 $\mathrm{int}(C) = \{3\}$, $\overline{C} = A \cup \{3\}$. 따라서 $\mathrm{b}(C) = \overline{C} - \mathrm{int}(C) = A$.

부분공간 $(A, \mathfrak{I}_A)$는 여유한 위상공간이므로 cpt공간이다.

따라서 $(X,\ \mathfrak{I}')$에서 A는 cpt이다.

B는 유한집합이므로 $(X,\ \mathfrak{I}')$에서 cpt이다.

그러므로 $A \cup B = X$는 $(X,\ \mathfrak{I}')$에서 cpt이다.

7. 7

$\mathfrak{I}_{\mathrm{N}}$은 $\mathrm{N} - f(X)$의 이산위상과 $f(X)$의 여유한위상의 합위상.

부분공간 $f(X)$는 여유한위상공간이므로 연결공간이다.

따라서 $f(X)$는 $(\mathrm{N},\ \mathfrak{I}_{\mathrm{N}})$의 연결성분.

$2^{\mathrm{N} - f(X)}$는 완전비연결공간이므로 연결성분은 단집합이다.

따라서 $\{1\}$, $\{2\}$, $\cdots$, $\{6\}$는 $(\mathrm{N},\ \mathfrak{I}_{\mathrm{N}})$의 연결성분.

그러므로 $(\mathrm{N},\ \mathfrak{I}_{\mathrm{N}})$의 연결성분의 개수 7.

8.

$A=\mathbb{N}\cup\{-1,-2\}$, $\mathbb{N}\cup\{-1,-3\}$, $B=\mathbb{N}\cup\{-2,-3\}$. $\mathbb{N}\cup\{-2\}$. $\mathbb{N}\cup\{-3\}$

①에서 A가 될 수 있는 후보들은
$\mathbb{N}\cup\{-1,-2\}$, $\mathbb{N}\cup\{-1,-3\}$, $\mathbb{N}\cup\{-2,-3\}$. $\mathbb{N}\cup\{-2\}$, $\mathbb{N}\cup\{-3\}$
5개 있다. 이 중에서 -1을 포함하는 집합은 컴팩트.
-1을 포함하는 개집합은 $(\mathbb{N}\cup\{-1\})-F(F:\ \mathbb{N}-$유한집합)과 $\{-2,-3\}$의 합집합 꼴이므로 F가 뺀 것만큼 채워주면 컴팩트된다.
-1을 포함하지 않는 집합은 멱집합 $\wp(\mathbb{N})$ 때문에 유한부분피복을 가질 수 없다.

②에서 B가 될 수 있는 후보들은
$\mathbb{N}\cup\{-1,-2\}$, $\mathbb{N}\cup\{-1,-3\}$, $\mathbb{N}\cup\{-2,-3\}$.
$\mathbb{N}\cup\{-2\}$, $\mathbb{N}\cup\{-3\}$, $\mathbb{N}\cup\{-1\}$
6개 있다. -1을 포함하면 컴팩트되므로 제외한다.
$\mathbb{N}\cup\{-2,-3\}$. $\mathbb{N}\cup\{-2\}$. $\mathbb{N}\cup\{-3\}$는 컴팩트가 아니다.
개피복을 $\wp(\mathbb{N})$을 포함하도록 하면 유한부분피복을 갖지 않는다.
($\mathbb{N}\cup\{-2,-3\}$의 경우 $\{\{n\}\mid n\in\mathbb{N}\}\cup\{-2,-3\}$)

* $(X,\mathfrak{I})$는 다음 두 위상공간의 합공간이다.
① 이산공간 $(\mathbb{N},\mathfrak{I}_d)$의 한 점 cpt화 위상공간 $(\mathbb{N}^*,\mathfrak{I}^*)$
② 비이산공간 $(\{-2,-3\},\{\varnothing,\{-2,-3\}\})$

9. ④
ㄱ. 짝수집합을 E라 하자. 임의의 $n\in\mathbb{N}$을 포함하는 개집합 G는 A_n을 포함하므로 $G\cap E\supset G\cap A_n\neq\varnothing$이므로 $\overline{E}=X$이다.
임의의 $y\in Y$를 포함하는 개집합 G는 적당한 $\varepsilon>0$이 존재해서 $H=Y\cap(y-\varepsilon,y+\varepsilon)\subset G$이고, 유리수의 조밀성에 의해 H에 유리수 있다.
따라서 $G\cap(Y\cap\mathbb{Q})\supset H\cap(Y\cap\mathbb{Q})\neq\varnothing$.
즉, $\overline{(Y\cap\mathbb{Q})}=Y$. 그러므로 $\overline{E\times(Y\cap\mathbb{Q})}=X\times Y$.
ㄴ. ㄱ에서 구한 폐포를 활용하자. 만약 f가 연속이라면 $f(\overline{E})\subset\overline{f(E)}$이어야 한다.
$f(\overline{E})=E\times\left\{\frac{1}{n}\,\middle|\,n\in\mathbb{N}\right\}$,
$\overline{f(E)}=\overline{\{4n\mid n\in\mathbb{N}\}}\times\overline{\left\{\frac{1}{2n}\,\middle|\,n\in\mathbb{N}\right\}}=X\times\left(\{0\}\cup\left\{\frac{1}{2n}\,\middle|\,n\in\mathbb{N}\right\}\right)$이므로
$f(\overline{E})\not\subset\overline{f(E)}$가 되어 모순이다.
그러므로 f는 연속함수가 아니다.
ㄷ. X의 개피복 $\{G_i\}_{i\in I}$에 대하여
$1\in G_{i_1}$인 $G_{i_1}=A_1=X$이므로 X는 컴팩트공간이다.
Y는 하이네-보렐 정리에 의해 컴팩트공간이다.
티호노프정리에 의해 $X\times Y$는 컴팩트공간이다.

10. ②
ㄱ. 보통위상공간에서 연결집합은 구간이다.
$\mathbb{Q}$의 분리: $\{(-\infty,\sqrt{2}),(\sqrt{2},\infty)\}$있다.
ㄴ. $A=(-2,-1)$, $B=(0,1)$, $C=\{\sqrt{2}\}$라 하자.
A, B, C는 쌍마다 서로 소인 연결집합이다. ($\{\sqrt{2}\}=[\sqrt{2},\sqrt{2}]$)
X에서 연결집합은 구간이므로
A, B, C의 어떤 합집합도 연결이 되지 않는다.
그러므로 $A\cup B\cup C$의 연결성분은 A, B, C, 3개.
ㄷ. f는 연속이고 X는 연결공간이므로 $f(X)$는 Y에서 연결공간이다.
Y는 이산공간이고 $X\neq\varnothing$이므로 $f(X)$는 단집합이다.
즉, f는 상수함수이다.
그러므로 $f(5)\neq f(6)$일 수 없다.

11.
(I)
(가) 참
함수 $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z,w)=x^2+y^2+z^2+w^2$은 연속.
$\{1\}$은 $\mathbb{R}$에서 폐집합이므로 $f^{-1}(\{1\})=S^3$은 $\mathbb{R}^4$에서 폐집합이다.
임의의 $\mathrm{p},\mathrm{q}\in S^3$에 대하여
p, q사이의 거리(지름) $d(\mathrm{p},\mathrm{q})=2<\infty$이므로 S^3는 $\mathbb{R}^4$에서 유계집합.
따라서 하이네-보렐 정리에 의해 S^3는 $\mathbb{R}^4$에서 컴팩트.

표준사상(자연사상, canonical function) $p:S^3\to S^3/\sim$, $p(\mathrm{x})=[\mathrm{x}]$는 연속, 전사이므로 $p(S^3)=S^3/\sim$는 컴팩트.

(나) 거짓
$S^3/\sim$과 S^3가 위상동형이라 하자.
$\overline{\mathrm{p}}\in S^3/\sim$에 대하여
$\overline{\mathrm{p}}=\{(x,y,z,w)\in S^3\mid w>0\}$는 S^3에서 개집합이므로 $\{\overline{\mathrm{p}}\}$는 $S^3/\sim$에서 개집합.
위상동형사상에 의해 $\{\overline{\mathrm{p}}\}$는 S^3의 열린 단집합(singleton)에 대응된다.
거리공간 S^3에서 한 점 집합은 폐집합이므로
S^3는 공이 아닌 진부분집합으로서 개, 폐집합을 갖게 된다.
따라서 S^3는 비연결공간이 된다. 모순.

(II) $K=3$
M의 방정식 $x^2+2y^2+2z^2+2yz=1$에서 점 $(1,0,0)$을 포함하는 조각사상은
$$X(u,v)=(\sqrt{1-2u^2-2v^2-2uv},u,v)$$
$X(0,0)=(1,0,0)$에서
$X_u=(0,1,0)$, $X_v=(0,0,1)$, $U=(1,0,0)$,
$X_{uu}=(-4,0,0)$, $X_{uv}=(-2,0,0)$, $X_{vv}=(-4,0,0)$,
$E=1$, $F=0$, $G=1$, $L=-2$, $M=-1$, $N=-2$.
$K=\dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}=\dfrac{3}{1}=3$,
* $H=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{EN+GL-2FM}{EG-F^2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{-2-2-0}{1}=-2$.

12. ④
ㄱ. X의 개피복 $\{G_i\}_{i\in I}$라 하자. $q\in G_{i_0}$인 $i_0\in I$를 택하면 $A-G_{i_0}$는 유한집합이므로 $A-G_{i_0}=\varnothing$이면 $X\subset G_{i_0}$이고, $\varnothing\neq A-G_{i_0}=\{a_1,\cdots,a_n\}$라 하면 $a_1\in G_{i_1}$, $\cdots$, $a_n\in G_{i_n}$인 i_1, $\cdots$, $i_n\in I$있다.
따라서 $X\subset G_{i_0}\cup G_{i_1}\cup\cdots\cup G_{i_n}$.
그러므로 $(X,\mathfrak{I})$는 컴팩트공간이다.
ㄴ. $(X,\mathfrak{I})$의 서로소 폐집합 E, F라 하자. 둘 중 하나가 공집합이면 개집합 $\varnothing$, X에 의해 각각 피복된다.
둘 다 공집합이 아니라고 하자.
① 일반성을 잃지 않고 $q\in E$라 하자. 그러면 $F\subset A$이므로 F는 개집합이다. 따라서 $E\subset F^c$, $F\subset F$.
② E와 F 모두 q를 포함하고 있지 않으면
E, $F\subset A$이므로 $E\subset E$, $F\subset F$. 그러므로 $(X,\mathfrak{I})$는 정규공간이다.
ㄷ. X의 가산집합 C에 대하여 $\overline{C}\subset C\cup\{q\}\neq X$이므로 X는 분리가능공간이 아니다.

13. ⑤
ㄱ. 곱공간 $(\mathbb{R},\mathfrak{I}_1)\times(\mathbb{R},\mathfrak{I}_2)$에서 $\mathbb{Q}\times\mathbb{R}$는 개폐집합이므로 곱공간은 비연결.
ㄴ. $\mathfrak{I}_1^c=\{\varnothing,\mathbb{R},\mathbb{R}-\mathbb{Q},\mathbb{Q}\}$, $\mathfrak{I}_2^c=\{\varnothing,\mathbb{R},\mathbb{R}-\mathbb{N},\mathbb{N}\}$,
$\overline{[0,1]\times[0,1]}=\overline{[0,1]}\times\overline{[0,1]}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
ㄷ. 곱공간의 공집합이 아닌 개집합 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $\mathbb{R}\times\mathbb{N}$, $\mathbb{R}\times(\mathbb{R}-\mathbb{N})$, $\mathbb{Q}\times\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}\times\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}\times(\mathbb{R}-\mathbb{N})$, $(\mathbb{R}-\mathbb{Q})\times\mathbb{R}$, $(\mathbb{R}-\mathbb{Q})\times\mathbb{N}$, $(\mathbb{R}-\mathbb{Q})\times(\mathbb{R}-\mathbb{N})$의 F의 역상
$$\mathbb{R},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{R}-\mathbb{Q},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{Q},\ \varnothing,\ \mathbb{R}-\mathbb{Q},\ \varnothing,\ \mathbb{R}-\mathbb{Q}$$
는 $(\mathbb{R},\mathfrak{I}_1)$에서 개집합이므로 F는 연속함수이다.

14. ②

ㄱ. $f^{-1}([0,\frac{1}{2}))=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[n,n+\frac{1}{2})\not\in\mathfrak{I}$이므로 $[0,\frac{1}{2})\not\in\mathfrak{I}_0$.

ㄴ. $[0,1]$은 하이네-보렐 정리에 의해 보통위상공간 $(\mathbb{R},\mathfrak{I})$에서 컴팩트이며 f는 연속이므로 $f([0,1])=[0,1)$은 $([0,1),\mathfrak{I}_0)$에서 컴팩트이다.

$(f([0,1])=f([0,1))\cup f(\{1\})=[0,1)\cup\{0\}=[0,1))$

ㄷ. $h([0,1))=(0,1]$이다. $(\frac{1}{2},2)\in\mathfrak{I}$이므로 h가 연속이면 $h^{-1}((\frac{1}{2},2))\in\mathfrak{I}_0$이어야 한다. $h^{-1}((\frac{1}{2},2))=[0,\frac{1}{2})$, 보기 ㄱ.에서 $[0,\frac{1}{2})\not\in\mathfrak{I}_0$.

그러므로 h는 연속이 아니다.

* 다른 설명

보기 ㄴ.에서 $[0,1)$은 $\mathfrak{I}_0$에서 컴팩트이므로 h가 연속이면

$h([0,1))=(0,1]$은 $\mathfrak{I}$에서 컴팩트, 이는 모순이다.

따라서 h는 연속이 아니다.

15.

(Ⅰ) $\mathbb{R}^3-S$는 비연결

$\mathbb{R}^3-S=\mathbb{R}^3-f^{-1}(\{1\})=f^{-1}([0,1)\cup(1,\infty))=f^{-1}([0,1))\cup f^{-1}((1,\infty))$.

$G=f^{-1}([0,1))$, $H=f^{-1}((1,\infty))$라 하면 (가)에 의해 $G\neq\varnothing$, $H\neq\varnothing$.

$[0,1)$, $(1,\infty)$는 $[0,\infty)$에서 개집합이므로 G, H는 $\mathbb{R}^3-$개집합.

$G\cap H=f^{-1}([0,1)\cap(1,\infty))=f^{-1}(\varnothing)=\varnothing$.

따라서 $\mathbb{R}^3-S$는 비연결이다.

(Ⅱ) ϕ는 최솟값을 갖는다.

(가)에 의해 폐집합 $\{1\}$의 역상 $f^{-1}(\{1\})=S$는 $f^{-1}([0,2011])$의 폐집합이며,

(나)에 의해 S는 cpt.

x, y, z는 연속이므로 $x+y+z=\phi$는 연속이다.

$\phi(S)=\phi(f^{-1}(\{1\}))$는 $\mathbb{R}$에서 cpt이므로 최솟값 $m=\inf\{\phi(S)\}=\min\{\phi(S)\}$있다.

(Ⅲ) ϕ가 최솟값을 갖는 점 p에서 S의 가우스 곡률 $K\geq 0$

최솟값 $m=\phi(\mathrm{p})$, $\mathrm{p}\in S$라 하자.

S 위의 p를 지나는 단위속력곡선 $c(t)$, $c(0)=\mathrm{p}$, $c'(0)=\mathrm{v}$라 하자.

(그런 단위속력곡선 있다?)

$\nabla\phi=(1,1,1)$이므로 단위법벡터 $U(\mathrm{p})=\dfrac{\nabla\phi(\mathrm{p})}{\|\nabla\phi(\mathrm{p})\|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.

$\forall t\in\mathbb{R}$, $\phi(c(t))\geq\phi(c(0))=\phi(\mathrm{p})=m$(극솟값)이므로

$$\left.\frac{d}{dt}\phi(c(t))\right|_{t=0}=\nabla\phi(c(0))\cdot c'(0)=0,$$

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\phi(c(t))\right|_{t=0}=\left.\frac{d}{dt}\nabla\phi(c(t))\cdot c'(t)\right|_{t=0}$$

$$=\nabla\phi(c(0))\cdot c''(0)\geq 0$$

$$=\nabla\phi(\mathrm{p})\cdot c''(0)\geq 0\text{이 성립한다.}$$

S위의 곡선으로서 c의 법곡률 $\kappa_n(\mathrm{v})=\dfrac{c''(0)\cdot U(\mathrm{p})}{\|c'(0)\|^2}=c''(0)\cdot\dfrac{\nabla\phi(\mathrm{p})}{\|\nabla\phi(\mathrm{p})\|}\geq 0$.

주곡률 $\kappa_1(\mathrm{p})$, $\kappa_2(\mathrm{p})\geq 0$이므로 가우스곡률 $K(\mathrm{p})=\kappa_1(\mathrm{p})\kappa_2(\mathrm{p})\geq 0$.

16. ⑤

ㄱ. $\mathbb{R}-U$가 유한집합인 $U\subset\mathbb{R}$에 대하여 $\mathbb{R}-U$는 가산집합이므로 $(\mathbb{R},\mathfrak{I})$는 T_1-공간이다.

* 단집합은 가산집합이므로 폐집합이다. 따라서 T_1-공간이다.

ㄴ. $(\mathbb{R},\mathfrak{I})$의 폐집합은 $\mathbb{R}$, $\varnothing$, 가산집합이므로 가산조밀부분집합을 갖지 않는다. 따라서$(\mathbb{R},\mathfrak{I})$는 분리공간이 아니다.

ㄷ. 무한 부분집합 A가 컴팩트라 하자. A는 무한 집합이므로

서로 다른 a_1, a_2, a_3, $\cdots\in A$를 택하자.

$G_i=\mathbb{R}-\{a_i,a_{i+1},a_{i+2},\cdots\}$라 하면 G_i는 개집합이고 $A\subset\bigcup_{i\in\mathbb{N}}G_i$이므로

$A\subset G_{i_1}\cup\cdots\cup G_{i_n}$이 되는 i_1, $\cdots$, $i_n\in\mathbb{N}$있다.

$N=\max\{i_1,\cdots,i_n\}+1$일 때 $a_N\not\in G_{i_1}\cup\cdots\cup G_{i_n}$

즉, $a_N\not\in A$가 되어 모순이다. 따라서 A는 컴팩트가 아니다.

그러므로 $(\mathbb{R},\mathfrak{I})$에서 컴팩트 집합은 유한집합이다.

17. ③

ㄱ. $(\mathbb{R},\mathfrak{I})$의 개집합 G에 대하여 $j^{-1}(G)=G\cap\mathbb{Q}$는 $(\mathbb{Q},\mathfrak{I}_{\mathbb{Q}})$에서 개집합이므로 j는 연속이다.

ㄴ. 하이네-보렐 정리에 의해 $A=[\sqrt{2},\sqrt{3}]$는 $(\mathbb{R},\mathfrak{I})$에서 cpt이다.

$j^{-1}(A)=[\sqrt{2},\sqrt{3}]\cap\mathbb{Q}=(\sqrt{2},\sqrt{3})\cap\mathbb{Q}$는 cpt가 아니다.

$(\because)$ $\left\{\left(\sqrt{2}-\dfrac{1}{n},\sqrt{3}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$은 $j^{-1}(A)$의 개피복이지만

어떤 유한 피복도 $j^{-1}(A)$를 피복할 수 없다.

ㄷ. $(\mathbb{Q},\mathfrak{I}_{\mathbb{Q}})$의 개집합 $H=G\cap\mathbb{Q}$, $G\in\mathfrak{I}$에 대하여

$f^{-1}(H)=f^{-1}(G\cap\mathbb{Q})=f^{-1}(j^{-1}(G))=(j\circ f)^{-1}(G)$이며,

$j\circ f$는 연속이므로 $f^{-1}(H)=(j\circ f)^{-1}(G)$는 $X-$개집합. f는 연속이다.

18. ①

$\mathfrak{I}_1$은 하한위상으로, 완전비연결공간, 따라서 $A_1=\{0\}$.

($\mathfrak{I}_1$의 공이 아닌 기저원 $[a,b)$는 진부분 개폐집합)

$\mathfrak{I}_2$에서 공집합이 아닌 진부분집합으로서 개・폐집합 없으므로 연결위상이다.

따라서 $A_2=\mathbb{R}$.

19.

* Y_1: T_2공간(O), cpt공간(X), 연결공간(O)

① $p\neq q$인 p, $q\in Y_1$에 대하여 $\varepsilon=d(p,q)>0$라 하자.

$G=Y_1\cap B_d(p,\frac{\varepsilon}{2})$, $H=Y_1\cap B_d(q,\frac{\varepsilon}{2})$라 하면

$G\cap H=\varnothing$이고 G, H는 Y_1-개집합이다.

따라서 Y_1은 T_2공간이다.

② Y_1은 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$에서 유계가 아니므로 하이네-보렐 정리에 의해 $(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathfrak{I}_1)$에서 cpt가 아니다.

③ 함수 $f:\mathbb{R}\to Y_1$, $f(x)=(x,1-x)$라 정의하자. $p\in Y_1$과 $\varepsilon>0$에 대하여

$f^{-1}(B_d(p,\varepsilon))=(p-\varepsilon,p+\varepsilon)$은 $\mathbb{R}-$개집합이므로 f는 연속이다.

$(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathfrak{I}_1)$의 부분공간 $\mathbb{R}$은 연결공간이므로 $f(\mathbb{R})=Y_1$은 연결공간이다.

* Y_2: T_2공간(X), cpt공간(O), 연결공간(O)

① $p\neq q$인 p, $q\in Y_2$에 대하여

$p\in G$, $q\in H$, $G\cap H=\varnothing$인 G, $H\in\mathfrak{I}_2$있다 하면 $G\neq\varnothing$, $H\neq\varnothing$이므로

$G=\mathbb{R}^2-U$, $H=\mathbb{R}^2-V$인 $(\mathbb{R}^2,\mathfrak{I}_1)$에서 cpt 부분집합 U, V있다.

하이네-보렐 정리에 따라

U, V는 $(\mathbb{R}^2,\mathfrak{I}_1)$에서 유계폐집합이므로 $U\cup V$는 유계이다.

$\varnothing=G\cap H=(\mathbb{R}^2-U)\cap(\mathbb{R}^2-V)$, $\mathbb{R}^2=U\cup V$이므로

$\mathbb{R}^2$가 유계가 되어 모순. Y_2는 T_2공간이 아니다.

② Y_2의 개피복 $\{G_i\}_{i\in I}$라 하자. $\varnothing\neq G_{i_0}$인 $i_0\in I$에 대하여

$$F_{i_0}\cap Y_2\subset Y_2\subset\bigcup_{i\in I}(\mathbb{R}^2-F_i),$$

$$G_{i_0}=\mathbb{R}^2-F_{i_0},\ G_i=\mathbb{R}^2-F_i$$

인 $(\mathbb{R}^2,\mathfrak{I}_1)$에서 cpt부분집합 F_{i_0}, F_i있다.

Y_2는 $(\mathbb{R}^2,\mathfrak{I}_1)$에서 폐집합이므로 $F_{i_0}\supset F_{i_0}\cap Y_2$는 cpt,

(유계)폐집합 F_i에 대하여 $(\mathbb{R}^2-F_i)$는 $(\mathbb{R}^2,\mathfrak{I}_1)$에서 개집합이므로

$$F_{i_0}\cap Y_2\subset(\mathbb{R}^2-F_{i_1})\cup\cdots\cup(\mathbb{R}^2-F_{i_n})$$

인 i_1, $\cdots$, $i_n\in I$ 있다.

$$Y_2\subset\bigcup_{k=1}^{n}G_{i_k}=(\mathbb{R}^2-F_{i_0})\cup(\mathbb{R}^2-F_{i_1})\cup\cdots\cup(\mathbb{R}^2-F_{i_n})$$

이므로 Y_2는 cpt공간이다.

③ Y_2의 공집합이 아닌 진부분집합으로서 개폐집합이 되는 집합 A 있다 하자. $A\neq\varnothing$이므로 $A=\mathbb{R}^2-F$인 $(\mathbb{R}^2,\mathfrak{I}_1)$에서 cpt집합 F있다. A^c은 개집합이므로 $A^c=F=\mathbb{R}^2-G$인 $(\mathbb{R}^2,\mathfrak{I}_1)$에서 cpt집합 G있다.

F, G는 하이네-보렐 정리에 따라 $(\mathbb{R}^2,\mathfrak{I}_1)$에서 유계(폐집합)이므로

$F=\mathbb{R}^2-G$는 모순이다. (좌변은 유계, 우변은 비유계)

그러므로 Y_2는 연결공간이다.

20. ⑤

ㄱ. 부분공간을 생각하자. 유한집합상의 여유한위상은 이산위상이므로 비연결이다.

ㄴ.ㄷ. 부분공간을 생각하자. 무한집합상의 여유한위상공간에서 공집합이 아닌 진부분집합으로서 개집합이면서 폐집합이 되는 부분집합이 있으면 비연결이다. 이때 폐집합은 유한집합이고, 개집합도 되므로 여집합이 유한집합이 되어야 하는데, 이는 모순이다. 따라서 ㄴ. ㄷ. 보기는 연결이다.

* 무한 집합 상의 여유한위상공간에서 연결집합
: 단집합, 공집합, 무한부분집합, 전체집합

21.

21-1.

(공식 1)에 의해 $E=(g')^2+(h')^2,\ F=0,\ G=h^2$.

(공식 2)에 의해 $K=\dfrac{-1}{h(u)\sqrt{g'(u)^2+h'(u)^2}}\left(\dfrac{h'(u)}{\sqrt{g'(u)^2+h'(u)^2}}\right)_u$.

(공식 3)에 의해 $\|\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v\|=h(u)\sqrt{g'(u)^2+h'(u)^2}$이므로

$$\iint_M KdA=\int_0^{2\pi}\int_a^b-\left(\frac{h'(u)}{\sqrt{g'(u)^2+h'(u)^2}}\right)_u du$$
$$=-2\pi\left[\frac{h'(u)}{\sqrt{g'(u)^2+h'(u)^2}}\right]_a^b$$
$$=-2\pi\left[\frac{h'(b)}{\sqrt{g'(b)^2+h'(b)^2}}-\frac{h'(a)}{\sqrt{g'(a)^2+h'(a)^2}}\right].$$

21-2.

- 회전면 M의 회전축: x축
- M이 긴밀 정칙곡면일 h 및 도함수 h', g'의 조건

① 정칙곡선 $\alpha(u)$의 양 끝점이 다른 경우, 양 끝점이 회전축에 수직으로 만날 때 M이 긴밀 정칙곡면이 되므로

$g(a)\neq g(b),\ h(a)=0=h(b)$,
(a,b)에서 $h(u)>0$,
$g'(a)=0=g'(b)$,
$h'(b)<0<h'(a)$.

전곡률 4π, 오일러 표수 2, 구면과 위상동형.

② 정칙곡선 $\alpha(u)$의 양 끝점이 같은 경우, 양 끝점에서 공통인 접선을 가질 때 M이 긴밀 정칙곡면이 되므로

$g(a)=g(b),\ h(a)=h(b)$,
$[a,b]$에서 $h(u)>0$,
양수 k에 대하여 $(g'(a),h'(a))=k\cdot(g'(b),h'(b))$.

전곡률 0, 오일러 표수 0, 원환면(torus)과 위상동형.

22. * 일반적으로 $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cap\overline{B}$가 안 된다. (합집합일 때는 성립)

가정에 의해 $\overline{A}=X=\overline{B}$이다.

$x\in X$라 하자.

$x\in\overline{B}$이므로 x를 포함하는 임의의 개집합 G에 대하여 $G\cap B\neq\varnothing$이다.

$y\in G\cap B(\subset X)$인 y를 택하자.

$G\cap B$는 y를 포함하는 개집합이고 $y\in X=\overline{A}$이므로

$(G\cap B)\cap A\neq\varnothing$. 즉, $G\cap(A\cap B)\neq\varnothing$이 되어 $x\in\overline{A\cap B}$.

따라서 $X\subset\overline{A\cap B}$로부터 $\overline{A\cap B}=X$.

그러므로 $A\cap B$는 X에서 조밀하다.

23. $p\in F^c$는 개집합이므로 $p\in V\subset F^c$인 $V\in\mathcal{B}$있다.

이때 V, V^c은 개집합이다.

$f:X\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}1, & x\in V^c\\ 0, & x\in V\end{cases}$라 하면

(F1) $x\in X$에 대하여 $f(x)=0$ 또는 1이며 $0,\ 1\in\mathbb{R}$
(F2) $x_1=x_2\in X$이면 $x_1=x_2\in V$ 또는 $x_1=x_2\in V^c$.
이때, $f(x_1)=f(x_2)$이다.
따라서 f는 X에서 $\mathbb{R}$로의 함수이다.

$f(p)=0,\ f(F)\subset f(V^c)=\{1\}$이고,

문제의 문맥상 F는 공집합이 아니므로 $f(F)=\{1\}$이다.

f가 연속함수임을 보이자.

$\mathbb{R}$에서 임의의 개집합 G에 대하여

$f^{-1}(G)$는 X, $\varnothing$, V, V^c중 하나이므로 f는 연속함수이다.

24. X의 개피복 $\{G_i\}_{i\in I}$라 하자. $0\in X$이므로 $0\in G_{i_0}$인 $i_0\in I$있다.

$\mathfrak{I}$의 원소 중에서 0을 포함하는 원소는 $(-1,1)$을 포함하므로 $(-1,1)\subset G_{i_0}$.

-1, 1을 포함하는 $G_{i_{-1}}$과 G_{i_1}에 대하여 $X\subset G_{i_{-1}}\cup G_{i_0}\cup G_{i_1}$이므로

$(X,\mathfrak{I})$는 컴팩트공간이다.

25. $W=(0,1),\ X=\{0,1\},\ Y=\varnothing,\ Z=\mathbb{R}$

26. $x\in X-A$라 하자. $y\in A$이면 X는 T_2−공간이므로

$x\in G_y,\ y\in H_y,\ G_y\cap H_y=\varnothing$인 개집합 $G_y,\ H_y$있다.

이때 $x\in\bigcup_{y\in A}G_y,\ A\subset\bigcup_{y\in A}H_y,\ \left(\bigcup_{y\in A}G_y\right)\cap\left(\bigcup_{y\in A}H_y\right)=\varnothing$.

A는 cpt이므로 유한부분피복 $\{H_{y_1},H_{y_2},\cdots,H_{y_n}\}$있다.

$x\in\bigcup_{i=1}^{n}G_{y_i}=U,\ A\subset\bigcup_{i=1}^{n}H_{y_i}=V,\ U\cap V=\bigcup_{i=1}^{n}(G_{y_i}\cap H_{y_i})=\varnothing$.

27.

하위 영역	배점	예상 정답율(%)	출제근거 (이유)
고등수학(위상수학)	5	40	J. R. Munkres. Topology, a First Course. pp. 77-78 ; pp. 126-131

임의의 정수 $m\in\mathbb{Z}$을 택하고 m의 임의의 열린 집합(개집합) U를 택하자.

U^c가 유한 집합이므로 유한 개의 정수를 제외하면 나머지는 모두 U안에 있다. ………… 2점

(단, 수열의 수렴 정의를 알고 있다고 판단되는 경우 부분 점수 가능)

U안에 들어있지 않은 수열 $\{a_n\}$의 서로 다른 원소들의 개수는 유한 개 뿐이다. ………… 3점

그 유한 개 원소 a_{n_1}, a_{n_2}, $\cdots$, a_{n_k}의 첨자 n_1, n_2, $\cdots$, n_k 중 최대를 N이라 하자. ………… 4점

그러면, N보다 큰 모든 정수 n에 대하여, $a_n\in U$이므로 수열 $\{a_n\}$은 m에 수렴한다. ………… 5점

28. ①

㉠ $U\in\tau' \Leftrightarrow f^{-1}(U)\in\tau$ (닫힌 집합도 필요충분조건)

㉡ f는 연속이므로 $f(C)$는 X/R에서 컴팩트이다.

㉢ 일반적으로 성립하지 않는다. (개사상 정의)

* 함수가 전사일 때 상위상, 전사가 아닐 때 강위상

* $\tau'=\{U\subset X/R \mid f^{-1}(U)\in\tau\}$

29. ④

① 하이네-보렐 정리

② 폐집합 F와 컴팩트 집합 T에 대하여 $F\cap T=\varnothing$은 컴팩트이다. $F\cap T\neq\varnothing$일 때 F^c은 개집합이고, $F\cap T$의 개피복 $\{G_i\}_{i\in I}$라 하자. $F\cap T\subset\bigcup_{i\in I}G_i$,

$T\subset\bigcup_{i\in I}G_i\cup F^c$이고 T는 컴팩트이므로

$T\subset G_{i_1}\cup G_{i_2}\cup\cdots\cup G_{i_n}\cup F^c$.

따라서 $F\cap T\subset G_{i_1}\cup G_{i_2}\cup\cdots\cup G_{i_n}$가 되어

$F\cap T$는 컴팩트이다.

③ 위상공간 X의 컴팩트 집합T의 폐부분 집합F에 대하여 F^c은 개집합이고 F의 개피복 $\{G_i\}_{i\in I}$라 하자.

$F\subset\bigcup_{i\in I}G_i$에서 $T\subset X=F^c\cup F\subset\bigcup_{i\in I}G_i\cup F^c$,

따라서 $T\subset\bigcup_{i\in I}G_i\cup F^c$이고 T는 컴팩트이므로

$T\subset G_{i_1}\cup G_{i_2}\cup\cdots\cup G_{i_n}\cup F^c$이 되어

$F\subset G_{i_1}\cup G_{i_2}\cup\cdots\cup G_{i_n}$. 그러므로 F는 컴팩트이다.

④ $\mathbb{R}^5$는 폐집합이지만 유계가 아니다.

[현대대수학]

<군>

1.
유한순환군의 부분군은 순환군이며, 각 위수별로 유일하게 존재한다.
$\mathbb{Z}_{200}$의 부분군으로서 6개의 부분군을 갖는 경우는 위수가 $2^2\times5$일 때이다.
따라서 $\mathbb{Z}_{200}$의 부분군 $\mathrm{Im}(\phi)$의 위수 $|\mathrm{Im}(\phi)|=20$.
동형정리에 따라 $\mathbb{Z}_{20}\times\mathbb{Z}_{26}/\ker\phi\cong\mathrm{Im}(\phi)$이므로 $|\ker\phi|=26$.

2.
소수 a에 대하여 자연수 n이 존재해서 $G=\mathbb{Z}_4\times F^*\cong\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_{a^n-1}$.
G는 순환군이므로 $\gcd(4,a^n-1)=1$.
(유한순환군이므로 $\mathbb{Z}_k$꼴로 나타낼 수 있다.)
a는 홀수일 수 없으므로 $a=2$.
$|G|=4(2^n-1)|\le160$, $2^n\le41$이 되는 $n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$이므로 $b=5$.

3.
192, 8
G는 순환군이므로 $G/H,\ K/H,\ L/H$도 순환군이다.
$|G/H|=|G:H|=520$이므로 $G/H\cong\mathbb{Z}_{520}$.
$\langle aH\rangle=G/H$의 생성원 개수는 $\varphi(520)=192$.
$|K/H|=\dfrac{520}{\gcd(35,520)}=104$.
$G/H=(K/H)(L/H)$이 성립하기 위해서는
$520=\dfrac{104\cdot|L/H|}{|K/H\cap L/H|}$, $|L/H|=5\cdot|K/H\cap L/H|$, $|L/H|$는 5의 배수.
라그랑지 정리에 따라 $|L/H|$는 5×104의 약수.
순환군의 부분군은 각 위수별로 유일하므로 구하는 값 8.

4.
$(a,b)\in\mathbb{Z}_{13}^*\times\mathbb{C}^*$일 때, $18=|(a,b)|=\mathrm{lcm}(|a|,|b|)$가 되는 경우의 수를 구하자.
$|b|=18$일 때, $|a|=1,\ 2,\ 3,\ 6$이므로 경우의 수는
$\varphi(18)\cdot[\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\varphi(6)]=36$.
$|b|=9$일 때, $|a|=2,\ 6$이므로 경우의 수는 $\varphi(9)\cdot[\varphi(2)+\varphi(6)]=18$.
$|b|=6,\ 3,\ 2,\ 1$일 때, 가능한 $a\in\mathbb{Z}_{13}^*$는 존재하지 않는다.
G의 위수 18인 원소의 개수 54이므로
G의 위수 18인 순환부분군의 개수 $\dfrac{54}{\varphi(18)}=9$.

5. 6, 12
$1\to2\to4\to1$, $3\to5\to3$이므로 $\sigma=(124)(35)$. 따라서 $|\sigma|=6$.
* $(124)(35)=(35)(124)$, $|\langle(124)\rangle\cap\langle(35)\rangle|=1$.
$\mathbb{Z}_{12}$에서 $|9|=|9\cdot1|=\dfrac{12}{\gcd(9,12)}=4$이므로
$S_5\times\mathbb{Z}_{12}$에서 $|(\sigma,9)|=\mathrm{lcm}(|\sigma|,|9|)=\mathrm{lcm}(6,4)=12$.

6. 위수 6인 부분군을 H라 하면 가정에 의해 H는 G의 정규부분군.
(다른 설명)
$g\in G$일 때 gHg^{-1}도 위수 6인 G의 부분군이므로 $gHg^{-1}=H$, 즉 $H\triangle G$.
* 6은 소수 아니다.
코시 정리(제1 Sylow정리)에 의해 위수 5인 G의 부분군 K있다.
H가 정규이므로 HK는 G의 부분군이다.
라그랑지 정리에 의해 $|H\cap K|\mid\gcd(|H|,|K|)=1$.
따라서 $|H\cap K|=1$이고, $|HK|=\dfrac{|H||K|}{|H\cap K|}=30$.
그러므로 HK는 위수 30인 G의 부분군이다.

7. 36
$\mathbb{Z}_{10}\times\mathbb{Z}_n$: 순환군 $\Leftrightarrow\gcd(10,n)=1\Leftrightarrow\gcd(2,n)=1=\gcd(5,n)$
10이하의 자연수 중에서 2, 5와 서로 소인 개수=4이므로
구하는 값 $4\times(10-1)=36$.
* $1=\gcd(10,n)=\gcd(10,n+10k)$, $k\ge0$

8. 잉여군 G/N의 위수 $|G/N|=[G:N]=\dfrac{|G|}{|N|}=5$.
$h\in H\subset G$, $h^5N=(hN)^5=N$이므로 $h^5\in N$.
$|H|=8$이므로 $(hN)^8=h^8N=N$에서 $h^8\in N$.
$\gcd(5,8)=1$이므로 $5s+8t=1$인 정수 $s,\ t$있다.
따라서 $h=h^1=h^{5s+8t}\in N$, H는 군이므로 $H\le N$.

9. 4
$\mathrm{im}f=f(\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_6)=f(\langle(1,0),(0,1)\rangle)=\langle f(1,0),f(0,1)\rangle$
$=\langle9,0\rangle=\{9s+0t\mid s,t\in\mathbb{Z}\}=\langle9\rangle$.
$\mathbb{Z}_{12}$에서 $9=9\cdot1=1+1+1+1+1+1+1+1+1$의 위수는
$\dfrac{12}{\gcd(9,12)}=4$이므로 $|\mathrm{im}f|=4$.
동형정리에 의해 $|(\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_5)/K|=|\mathrm{im}f|=4$.
* 다른 풀이
$K=\ker f$
$=\{(m,n)\in\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_6\mid 9m=0\pmod{12}\}$
$=\{(m,n)\in\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_6\mid m\equiv0,4,8\pmod{12}\}$
$=\{0,4,8\}\times\mathbb{Z}_6$
$=\{(4s,t)\}=\{s\cdot(4,0)+t\cdot(0,1)\}$
$=\langle(4,0),(0,1)\rangle$
$=\langle4\rangle\times\langle1\rangle\neq\langle(4,1)\rangle$이므로 동형정리에 의해
$|K|=18$, $|(\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_6)/K|=72/18=4$.
* $f(x,y)=9\cdot x+0\cdot y$
$=(x+x+\cdots+x)+0\cdot y$

10. 1
$|(5,5)|=\mathrm{lcm}(12,6)=12=|G|$이므로 $|G/H|=6$.
라그랑지 정리에 의해 $\overline{(3,3)}$의 위수는 1. 2, 3, 6중의 하나이며
$\overline{(3,3)}\in H$이므로 구하는 값 1.
$H=\{(5,5),(10,4),(3,3),(8,2),(1,1),(6,0),(11,5),\cdots\}$
* $\begin{pmatrix}12&0\\0&6\\5&5\\x&y\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0\\0&6\\0&0\\x&y-x\end{pmatrix}$이므로 $G/H\cong\mathbb{Z}_1\times\mathbb{Z}_6$, $\overline{(3,3)}\to(0,0)$.

11. $m+n=26$
① G는 유한 위수를 갖는 가환군이므로 라그랑지 정리의 역도 성립한다.
2014를 나누는 약수의 개수만큼 부분군을 갖는다.
따라서 $m=2\cdot2\cdot2=8$.
* 위수 n인 부분군의 개수$=\dfrac{(\text{위수 } n\text{인 원소 개수})}{\varphi(n)}$
$=1$ (순환군일 때)
② 유한순환군 G의 부분군은 유한순환군이며 38은 2014를 나누므로 G의 위수 38인 순환부분군 H 있으며, 이때 $H\cong\mathbb{Z}_{38}$의 생성원의 개수는 $\varphi(38)=\varphi(2\cdot19)=18=n$, 구하는 값 $m+n=26$

* 다른 설명
$G=\langle g\rangle$라 하자. $38\mid2014$이므로 위수 38인 원소 k있다.
(그런 k중의 한 예시: $k=g^{\frac{2014}{38}}=g^{53}$)
이때 $k=g^s$인 $s\in\{1,2,\cdots,2014\}$있다.
$|k|=|g^s|=38=\dfrac{2014}{(s,2014)}$
$\Leftrightarrow(s,2014)=\dfrac{2014}{38}=53$.
$\Leftrightarrow(\dfrac{s}{53},38)=1$. ($\dfrac{s}{53}$는 정수)
∴ 구하는 개수는 38과 서로소인 개수 $\varphi(38)=18$.

12. ③

중국인의 나머지 정리 적용.

ㄱ. $\ker f=\{n\in\mathbb{Z}\mid f(n)=([n]_2,[n]_3)=(0,0)\}$

$=\{n\in\mathbb{Z}\mid n\equiv 0 \pmod 2, n\equiv 0 \pmod 3\}$

$=\{n\in\mathbb{Z}\mid n\equiv 0 \pmod 6\}$

$=\{6k\mid k\in\mathbb{Z}\}$

$=6\mathbb{Z}$

ㄴ. $G/Z(G)=\langle g+Z(G)\rangle$인 $g+Z(G)\in G/Z(G)$있다.

$a,\ b\in G$이면

$a+Z(G)=mg+Z(G),\ b+Z(G)=ng+Z(G)$인 $m,\ n\in\mathbb{Z}$있다.

* 여기서 mg란 g를 “m번” 더한다는 뜻이다.

이때, $a=mg+\alpha,\ b=ng+\beta$인 $\alpha,\ \beta\in Z(G)$있다.

이제 $a+b=(mg+\alpha)+(ng+\beta)$

$=\alpha+mg+\beta+ng$

$=\beta+ng+\alpha+mg$

$=ng+\beta+mg+\alpha$

$=b+a$이므로 G는 아벨군이다.

* 잉여군의 연산을 곱셈으로 간주하고 계산해도 된다.

ㄷ. $400=16\times 25=2^4\cdot 5^2$의 지수 4와 2의 분할은 각각

$4=3+1=2+2=2+1+1=1+1+1+1$, 5가지,

$2=1+1$, 2가지 있다.

따라서 총 10가지의 서로 동형이 아닌 군이 있다.

13. ⑤

ㄱ. $\phi:\mathbb{Z}\to G=\langle g\rangle,\ \phi(n)=g^n$은 동형사상.

ㄴ. $4_{\square}\ /\ 2_{\triangle}\times 9_{\square}\ /\ 3_{\star}\times 5_{\triangle},\ 3_{\star}\ /\ 2_{\triangle}\times 5_{\triangle}\ /\ 4_{\square}\times 9_{\square}$,

$\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_{18}\times\mathbb{Z}_{15}\cong\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_{10}\times\mathbb{Z}_{36}$.

ㄷ. 위수 360인 순환군은 $(\mathbb{Z}_{360},+)=\langle 1\rangle$과 동형이며 $\mathbb{Z}_{360}$의 원소는 $k\cdot 1=1+1+\cdots+1=k$로 쓸 수 있다.

$\mathbb{Z}_{360}=\langle k\rangle \Leftrightarrow |k|=360=\dfrac{360}{\gcd(360,k)}$에서

$\gcd(360,k)=1$.

구하는 개수는 $\varphi(360)=\varphi(2^3\cdot 3^2\cdot 5)=4\cdot 6\cdot 4=96$.

14. ③

주어진 가정에 의해 $|G|=2\times 3\times 2=12$이고,

G의 적당한 원소 몇 개 계산을 통해 $\mathrm{im}\phi=\mathbb{Z}_3^*$이므로

동형정리에 의해 $|\ker\phi|=6$이다. ($\ker\phi\triangle G$)

$S_3\cong D_3$에는 위수 2인 원소 3개, 위수 3인 원소 1개.

$\mathbb{Z}_6$에는 위수 2인 원소 1개, 위수 3인 원소 2개.

$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\in\ker\phi$는 위수 3, $\therefore\ \ker\phi\cong\mathbb{Z}_6$.

* $\ker\phi=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}\in G\,\middle|\,\phi\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}=ac\equiv 1 \pmod 3\right\}$

$=\left\{I,\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&2\\0&2\end{pmatrix}\right\}$

(위수: 1, 3, 3, 2, 2, 6)

* 순환군의 부분군은 순환군이므로 부분순환군의 위수가 n이면 위수 n인 원소는 $\varphi(n)$개 있다.

* $G/\ker\phi\cong(\mathbb{Z}_2=\{0,1\},+)$

15. ⑤

$\gcd(12,7)=1$이므로 $G\cong\mathbb{Z}_{84}$.

ㄱ. G는 가환군이므로 모든 부분군이 정규부분군이다.

ㄴ. $|(3,1)|=\mathrm{lcm}(|3|,|1|)=\mathrm{lcm}(4,7)=28$.

$\phi:(G,+)\to(\mathbb{Z}_{84},\times),\ \phi(a,b)=[ab]_{84}$는 동형사상,

$(3,1)\mapsto 3$의 위수 28이므로 $(3,1)$의 G에서 위수 28.

16. ③

① G와 H의 부분군의 개수가 같은데 $G\neq H$라 하면 $H\leq G,\ G\leq G$이므로 G의 부분군의 개수가 더 많아야 한다.

② G가 가환군이면 $H,\ K$는 G의 정규부분군이므로 $H\cap K$와 HK도 G의 정규부분군이 된다.

* 이때 $|HK|=\dfrac{|H||K|}{|H\cap K|},\ [HK:K]=[H:H\cap K],\ [HK:K]=[H:H\cap K]$.

③ 실로우 정리 적용, $|G|=2^2\cdot 3$, 실로우-3부분군 H있다.

H의 개수를 n_3라 하면 $n_3=3k_1+1\mid 12$에서 $k_1=0,\ 1,\ n_3=1,\ 4$.

$n_3=1$인 경우 $H\triangle G$이므로 G는 단순군이 아니다.

$(\langle 2\rangle\triangle\mathbb{Z}_{12})$

④ $G=\langle g\rangle$인 $g\in G$있다. $H=\langle g^s\rangle,\ K=\langle g^t\rangle$인 $s,\ t\in\mathbb{Z}$있다.

이때 $H,\ K$는 가환군임이 자명하다.

(순환군(가환군)의 부분군은 가환군)

⑤ $e^{-1}=e\in H$이므로 $H\neq\varnothing$.

$g,\ h\in H^{-1}$이면 $g=h_1^{-1},\ h=h_2^{-1}$인 $h_1,\ h_2\in H$있다.

이때 $gh^{-1}=h_1^{-1}h_2\in H$이므로 $H^{-1}\leq G$.

17. ①

ㄱ. 실로우 정리(코시 정리) 적용, 실로우-5부분군 H있다. H의 개수를 n_5라 하면 $n_5=5k_1+1\mid 40$에서 $k_1=0,\ n_5=1$이므로 $H\triangle G$이며 잉여군 G/H가 정의되고, $|G/H|=[G:H]=|G|\div|H|=40\div 5=8$.

ㄴ. G는 유한 가환군이므로 라그랑지 정리의 역이 성립한다. 즉, $|G|=4$의 약수 1, 2, 4를 위수로 하는 G의 부분군이 각각 존재한다. (유일하지는 않다. $\mathbb{Z}_2\times\{0\},\ \{0\}\times\mathbb{Z}_2$) G가 가환이므로 모든 부분군이 정규이다. $|N|=1$일 때 $G/N\cong G$, $|N|=2$일 때 $G/N\cong\mathbb{Z}_2$, $|N|=4$일 때 $G/N\cong\{0\}$. 따라서 X에 속하면서 서로 동형이 아닌 잉여군은 모두 3개. 동형을 고려하면 4개 있다.

ㄷ. $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}=\{0+\mathbb{Z},1+\mathbb{Z},2+\mathbb{Z},3+\mathbb{Z},4+\mathbb{Z},5+\mathbb{Z}\}$

$=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5}\}\cong\mathbb{Z}_6$의 위수는 $6=2\times 3$이므로

라그랑지 정리의 역에 의해 위수를 1, 2, 3, 6으로 갖는 부분군이 각각 1개씩, 총 4개 있다.

18. ④

ㄱ. 정이면체군 D_4, 사원수군 Q_8은 위수 8인 비가환군.

ㄴ. G: 부분군의 개수가 유한인 무한군이라 하자.

$G=\bigcup_{g\in G}\langle g\rangle$라 쓸 수 있고, $|G|=\infty$이므로 $|g|=\infty$인 $g\in G$있다. 이때의 부분군 $\langle g\rangle$는 무한순환군이므로 $\mathbb{Z}$와 동형이며, $\mathbb{Z}$의 부분군은 $\langle 1\rangle$. $\langle 2\rangle,\ \langle 3\rangle,\ \cdots$이므로 부분군의 개수가 유한하지 않다. 이는 부분군의 개수가 유한인 무한군이 있다고 가정한 데 모순이다.

그러므로 부분군의 개수가 유한인 군은 유한군이다.

ㄷ. $27=3^3$이며, 지수 3의 분할의 수는 $3=2+1=1+1+1$, 3가지이므로 유한 Abel군의 기본정리에 의해 위수 27인 아벨군 중에서 동형이 아닌 것의 종류는 3가지.

19. ⑤

① 위수 2인 부분군은 $\langle(1\,2)\rangle,\ \langle(1\,3)\rangle,\ \langle(2\,3)\rangle$, 3개 있다.

② 위수 6인 군은 $\mathbb{Z}_6$ 또는 S_3와 동형이므로 옳다.

③ 항등원이 아닌 원소 $g\in G$에 대하여 라그랑지 정리에 의해 $|g|\mid|G|=p$에서 $|g|=p$이므로 G는 위수 p인 순환군이 된다. 따라서 G의 생성원의 개수 $\varphi(p)=p-1$.

④ 서로 다른 소수 p_i와 자연수 e_i가 존재해서

$|G|=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_k^{e_k}$라 하면 실로우 정리(혹은 코시 정리)에 의해

G는 비자명 진부분군을 갖게 되어 모순이다.

따라서 G의 위수는 1 또는 소수이다.

그러므로 G는 순환군이며 순환군은 가환군이다.

⑤ 라그랑지 정리에 의해 $|b|\mid|G|=4$이므로 b의 위수는 1, 2, 4 중 하나이다. $b,\ b^2=c$는 항등원이 아니므로 $|b|=4$, 즉 G는 b를 생성원으로 갖는 순환군.

20.
S_3에서 $(1\,2)^2 = \mathrm{id}$, $(1\,2\,3)^3 = \mathrm{id}$,

$(1\,2)^{-1}(1\,2\,3)(1\,2) = (1\,2)(1\,2\,3)(1\,2) = (1\,3\,2) = (1\,2\,3)^{-1}$이므로

$\phi : D_3 \to S_3$, $\phi(a) = (1\ 2)$, $\phi(b) = (1\ 2\ 3)$으로 정의한 ϕ는 군동형사상이다.

$D_3 = \langle (1\,2), (1\,2\,3) \mid (1\,2)^2 = (1\,2\,3)^3 = \mathrm{id},\ (1\,2)^{-1}(1\,2\,3)(1\,2) = (1\,2\,3)^{-1} \rangle$
$\cong S_3$.

* D_n=(정n각형의 자기 자신으로의 합동변환)
=회전변환∪대칭변환
$\cong \mathbb{Z}_n\ \cup$ 위수2

* 다른 설명
$|D_3| = |S_3| = 6$이고 D_3는 조건으로부터 $ab \neq ba$이므로 비가환이며, 순환군도 아니다.
$|D_3| = |S_3| = 6 = 2 \cdot 3$이고 코시 정리에 의해서 위수가 2,3인 부분군이 존재하고(항등원은 제외) 이들을 각각 H, K라 하자. H, K의 개수를 각각 n_2, n_3라 하면 Sylow정리에 의해 $n_2 = 2k_1 + 1 \mid 3$, $n_3 = 3k_2 + 1 \mid 2$ 에서 $k_1 = 0$또는 1이고 $k_2 = 0$이다.
$\therefore\ n_2 = 1$또는 3이고 $n_3 = 1$이다.
그런데 만약 H를 한 개만 가지면 $|H \cup K \cup \{e\}| = 4$이므로 D_3의 원소의 개수 6에 대하여 모순이다. 그러므로 위수 2인 부분군은 3개 있다.
S_3는 항등원을 제외한 위수 3인 $\langle(123)\rangle = \langle(132)\rangle$이 1개 존재하고
위수 2인 부분군이 $\langle(1\,2)\rangle, \langle(1\,3)\rangle, \langle(2\,3)\rangle$으로 3개 있다.
그러므로 Hasse 다이어그램이 일치하므로 $D_3 \cong S_3$이다.

21. $|Q| = 2^3$이므로
라그랑지 정리에 의해 Q의 부분군 H의 위수는 1, 2, 4, 8 중 하나이고,
Sylow 정리에 의해 위수 1, 2, 4, 8인 부분군 H가 반드시 존재한다.
① $|H| = 1,\ 8$이면 $H = \{I\}$, Q이므로 자명한 정규부분군이다.
② $|H| = 2$인 $H = \{I, A^2\}$ 뿐이므로 $H \triangle Q$.
③ $|H| = 4$이면 $[Q : H] = \dfrac{|Q|}{|H|} = 2$이므로 H는 Q의 정규부분군이다. (실로우 정리에 의해 $H \triangle K$, 위수 2^3인 부분군 K있다. $K = Q$이므로 $H \triangle Q$)
* $H = \langle A, B \rangle$, $|A| = 4 = |B|$
* $N \triangle G$, $[G : N] = n$이면 $a^n \in N\ (a \in G)$

22. $(\varnothing \neq) G$는 순환군이므로 가환군이다.
(1) σ: (잘 정의됨), 준동형, 단사, 전사
① 준동형: $\sigma(gh) = (gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1} = g^{-1}h^{-1} = \sigma(g)\sigma(h)$
② 단사: $g \in \ker\sigma \Leftrightarrow \sigma(g) = g^{-1} = e \Leftrightarrow g = e \Leftrightarrow \ker\sigma = \{e\}$.
③ 전사: $\mathrm{Im}\sigma = \{\sigma(g) \mid g \in G\} = \{g^{-1} \mid g \in G\} = \{g \mid g^{-1} \in G\} = G$.

(2) $\phi : G \to G$가 동형사상이라 하자.
$G = \langle \alpha \rangle = \{\alpha^s \mid s \in \mathbb{Z}\}$라 할 때, $\phi(\alpha) = \alpha^n$인 $n \in \mathbb{Z}$있다.
$\phi(G) = \phi(\langle \alpha \rangle) = \langle \phi(\alpha) \rangle$이므로 $\langle \alpha^n \rangle = G = \langle \alpha \rangle$.
이때 $(\alpha^n)^t = \alpha^{nt} = \alpha$인 $t \in \mathbb{Z}$있다.
nt가 1이 아니면 α가 유한 위수를 갖게 되어 모순.
따라서 $nt = 1$, 곱해서 1되는 정수는 ±1들 밖에 없다.
그러므로 $n = \pm 1$.
즉, G에서 G로의 동형사상은 $\phi(\alpha) = \alpha^{-1}$ 또는 α인 σ와 항등사상 뿐.
* 무환순환군은 $\mathbb{Z}$와 동형.
* $\phi : G \to \mathbb{Z}$, $\phi(g) = \phi(\alpha^n) = n$라 두면 ϕ는 동형사상.
* 유한순환군 G의 위수 n이면 G는 $\mathbb{Z}_n$과 구조가 같다.

23. 2, 6, 7, 8
원시근은 위수 10인 군 G의 생성원이므로 원시근을 g라 하면 $|g| = 10$.
10의 약수는 1, 2, 5, 10이므로
법 11에 대하여 $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^5 = -1$이므로 2는 G의 원시근이다.
따라서 G의 모든 원소는 $k = 1, \cdots, \phi(11) = 10$에 대해 2^k라 쓸 수 있다.
다른 원시근은 2^k로 쓸 수 있고, $10 = |2^k| = \dfrac{|G|}{\gcd(10, k)} \Leftrightarrow \gcd(10, k) = 1$.
$\therefore\ k = 1,\ 3,\ 7,\ 9$.
모든 원시근은 2^1, 2^3, $2^7 = -2^2$, $2^9 = -2^4$.
정리하면 G의 모든 원시근 2, 8, 7, 6이다.
* $G = \langle 2 \rangle = \langle 6 \rangle = \langle 7 \rangle = \langle 8 \rangle$.

24.

하위 영역	배점	예상정답율(%)	관련사고영역	출제자
대 수	5	50	이해	좌준수
출제 내용 관련자료	W.Nicholson. Introduction to Abstract Algebra. PWS. pp. 114-125			

G가 군이므로 임의의 $g,\ h \in G$에 대하여 $gh \in G$이고
문제의 가정에 의해 $g^{-1} = g$, $h^{-1} = h$, $(gh)^{-1} = gh$가 성립한다.
한편, $(gh)h^{-1}g^{-1} = gg^{-1} = e$(항등원)이므로 $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$이다.
따라서 다음이 성립한다. $gh = (gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1} = hg$.
그러므로 G는 가환군이다.

* 채점기준
$(gh)^{-1} = gh$를 언급하면 ··1점
$(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$를 증명하면 ··3점
($(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$를 증명없이 언급만 하면 ································2점)
$h^{-1}g^{-1} = hg$를 언급하면 ··1점

25.

하위 영역	배점	예상 정답율(%)	출제근거 (이유)
고등수학(대수학)	4	50	김응태, 박승안, 현대대수학, pp. 59-64

두 번째 조건식의 양변을 제곱하면
$$b^4 = (b^2)^2 = (aba^{-1})(aba^{-1}) \quad \therefore\ b^4 = ab^2a^{-1} \ \cdots\cdots\cdots\cdots\ 1점$$
우변의 b^2 대신에 aba^{-1}을 대입하면
$$b^4 = a(aba^{-1})a^{-1} = a^2ba^{-2} \ \cdots\cdots\cdots\cdots\ 2점$$
이 식을 다시 제곱하면
$$b^8 = (a^2ba^{-2})(a^2ba^{-2}) \quad \therefore\ b^8 = a^2b^2a^{-2} \ \cdots\cdots\cdots\cdots\ 3점$$
우변의 b^2 대신에 다시 aba^{-1}을 대입하면
$$b^8 = a^2(aba^{-1})a^{-2} = a^3ba^{-3} = b$$
$b \neq e$이므로, $b^7 = e$
7은 소수이므로 b의 위수는 7이다. ············ 4점

26. $\ker\phi \triangle H$
① $\ker\phi \leq H$
$\phi(e_G) = e_H$, $e_G \in \ker\phi$이므로 $\ker\phi \neq \varnothing$.
$a,\ b \in \ker\phi$에 대하여 $\phi(ab^{-1}) = \phi(a)\phi(b)^{-1} = e_H$이므로 $ab^{-1} \in \ker\phi$.
그러므로 $\ker\phi \leq H$.
② $\ker\phi \triangle H$
임의의 $h \in H$와 임의의 $k \in \ker\phi$에 대하여
$\phi(hkh^{-1}) = \phi(h)\phi(k)\phi(h^{-1}) = \phi(h)e_H\phi(h^{-1}) = \phi(h)\phi(h)^{-1} = e_H$.
즉 $gkg^{-1} \in \ker\phi$
따라서 위의 결과에 의해서 $\ker\phi$는 H의 정규부분군이다.

27. ②

㉠ $i \not\in \mathbb{R}$

㉡ $\gcd(5, 12) = 1$이므로 옳다.

* $\langle 5 \rangle = \{5n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ (덧셈군으로 간주)

$= \{5n + 12m \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$

$\ni 5 \cdot (5) + 12 \cdot (-2) = 1$이므로

$\mathbb{Z}_{12} = \langle 1 \rangle \subset \langle 5 \rangle \subset \mathbb{Z}_{12}$, 즉 $\mathbb{Z}_{12} = \langle 5 \rangle$.

㉢ $f : \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_{mn}$, $f(a, b) = [a+b]_{mn}$라 하자.

$$\begin{aligned} f((a,b)+(c,d)) &= f(a+c, b+d) \\ &= [a+c+b+d]_{mn} \\ &= [(a+b)+(c+d)]_{mn} \\ &= [a+b]_{mn} + [c+d]_{mn} \\ &= f(a,b) + f(c,d) \end{aligned}$$ 이므로

f는 준동형사상이다.

$$\begin{aligned} f(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n) &= f(\langle (1,0), (0,1) \rangle) \\ &= \langle f(1,0), f(0,1) \rangle \\ &= \langle 1 \rangle = \mathbb{Z}_{mn} \end{aligned}$$ 이므로

f는 전사이다. 따라서 f는 단사이다.

그러므로 f는 군-동형사상이다.

㉣ 치환군은 비가환군이다.

28. ③

$G = \{i, -i, 1, -1\}$

① $a^2 + b^2 + c^2 = (-i)^2 + 1^2 + (-1)^2 = 1$

② 곱셈 교환법칙이 성립한다.

③ 덧셈 항등원 0이 없다.

④ $\{1\}$는 곱셈군을 이룬다.

〈환〉

1.
$\mathbb{Z}_{10}$에서 3은 단원이므로 3을 포함하는 가장 작은 아이디얼은 $\mathbb{Z}_{10}$이다.
$\mathbb{Z}_{12}$에서 8을 포함하는 가장 작은 아이디얼은 $\langle 8\rangle=\langle 4\rangle$.
따라서 $(3,8)$을 포함하는 R의 가장 작은 아이디얼은 $\mathbb{Z}_{10}\times\langle 4\rangle$.
동형정리에 따라 $R/\ker\phi\cong S$. $\phi(3,8)=0_S$이므로 $(3,8)\in\ker\phi$.
따라서 $\mathbb{Z}_{10}\times\langle 4\rangle\subset\ker\phi$.
이때 가능한 $\ker\phi$는 $\mathbb{Z}_{10}\times\langle 4\rangle$, $\mathbb{Z}_{10}\times\langle 2\rangle$, $\mathbb{Z}_{10}\times\langle 1\rangle$이므로
$R/(\mathbb{Z}_{10}\times\langle 4\rangle)\cong\mathbb{Z}_4$, $R/(\mathbb{Z}_{10}\times\langle 2\rangle)\cong\mathbb{Z}_2$, $R/(\mathbb{Z}_{10}\times\langle 1\rangle)\cong\{0_R\}$, 3개 있다.

2.
$|\mathbb{Z}_n[x]/I|=n^2\le 40$, $n\le 6$.
$(\mathbb{Z}_n[x]/I,+,\times)$의 표수 n이 홀수이므로 $n=3,\ 5$.
$\mathbb{Z}_n[x]/I$은 유한정역이므로 체이다.
따라서 I는 극대아이디얼이 되어야 하므로
2차 다항식 $x^2+ax+1-a$는 PID $\mathbb{Z}_n[x]$에서 기약이다.
$n=3$일 때 $a=0,\ 2$.
$n=5$일 때 $a=2,\ 3,\ 4$.
구하는 순서쌍 $(3,0)$, $(3,2)$, $(5,2)$, $(5,3)$, $(5,4)$.

3.
$\mathbb{Z}[i]$는 ED이므로 PID이다. $I=\langle a+bi\rangle$인 정수 a, b가 존재.
$\nu(\alpha)=10$, $\nu(\beta)=25$, $\alpha,\ \beta\in I$이므로 $\nu(a+bi)=a^2+b^2\mid\gcd(10,25)=5$,

$a=\pm1$, $b=0$ 또는 $a=0$, $b=\pm1$인 경우 $I=\mathbb{Z}[i]$.
$a=\pm2$, $b=\pm1$ 또는 $a=\pm1$, $b=\pm2$인 경우 $(\mathbb{Z}[i])^*=\{\pm1,\pm i\}$이므로
$I=\langle 2+i\rangle$ 또는 $\langle 2-i\rangle$가 가능하며, 이 중 α, β를 포함하는 $I=\langle 2-i\rangle$.
그러므로 가장 작은 $I=\langle 2-i\rangle=\langle\pm2\mp i\rangle$.

정수 c, d가 존재해서 $\eta=(2-i)\cdot(c+di)$이므로
$\nu(\eta)=5\cdot(c^2+d^2)\ge 5$, $\nu(\eta)$의 최솟값 5.
$\mathbb{Z}[i]/I=\{\overline{r+si}\mid 0\le r<5,\ 0\le s<1\}$
$=\{\bar{r}\mid 0\le r<5\}$
$\cong(\mathbb{Z}_5,+,\cdot)$이므로 $\mathbb{Z}[i]/I$의 표수$=5$.

$$\mathbb{Z}[i]/\langle a+bi\rangle=\left\{\overline{r+si}\ \middle|\ 0\le r<\frac{a^2+b^2}{\gcd(a,b)},\ 0\le s<\gcd(a,b)\right\}$$
위수: a^2+b^2, 표수: $\dfrac{(a^2+b^2)}{\gcd(a,b)}$

4. 2, 6, 7, 8
2의 위수 10이므로 $\mathbb{Z}_{11}^*=\langle 2\rangle$이며, 생성원 2^k, $\gcd(k,\varphi(11))=1$ 꼴이다.
따라서 생성원(원시근)은 2, $2^3=8$, $2^7=7$, $2^9=6$, 즉 2, 6, 7, 8.

5. $\gcd(2,5)=1$, $\ker\psi=\{0\}\times 5\cdot 2^n\mathbb{Z}$이므로 동형정리에 따라
$\mathrm{im}\psi\cong(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})/\ker\psi\cong\mathbb{Z}/\{0\}\times\mathbb{Z}/5\cdot 2^n\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{5\cdot 2^n}$.
$\left|(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{5\cdot 2^n})^*\right|=2\cdot\varphi(5\cdot 2^n)=2\cdot(4\cdot 2^{n-1})=2^{n+2}$이므로 구하는 $n=5$.

6. $p(x)=x^4-4x^2+2$, $g(x)=-\dfrac{1}{2}\cdot(x^3+2x^2)$
α를 근으로 갖는 다항식 $p(x)=x^4-4x^2+2$는
소수 2에 대한 아이젠슈타인 판정법에 의해 $\mathbb{Q}[x]$에서 기약,
$K=\{f(x)\in\mathbb{Q}[x]\mid\varphi_\alpha(f(x))=f(\alpha)=0\}$
$\quad=\{f(x)\in\mathbb{Q}[x]\mid\mathrm{irr}(\alpha,\mathbb{Q})\mid f(x)\}$
$\quad=\{f(x)\in\mathbb{Q}[x]\mid f(x)\in\langle p(x)\rangle\}$
$\quad=\langle p(x)\rangle$
체 $\mathbb{Q}$의 다항식환 $\mathbb{Q}[x]$에 관한 나눗셈 알고리즘에 의해
$p(x)=(x-2)(x^3+2x^2)+2$이므로
$\bar{0}=\overline{p(x)}=\overline{(x-2)}\cdot\overline{(x^3+2x^2)}+\bar{2}$, $\overline{x-2}\cdot\overline{-\frac{1}{2}(x^3+2x^2)}=\bar{1}$.

그러므로 $g(x)=-\dfrac{1}{2}x^3-x^2\ne\overline{g(x)}$.
* 정수환 $\mathbb{Z}$의 분수체 $\mathbb{Q}$
* $\mathbb{Q}$는 체이므로 $\mathbb{Q}[x]$는 PID
* $\mathbb{Q}[x]$는 PID이므로 $\langle p(x)\rangle=K$는 극대아이디얼
* K가 극대아이디얼이므로 $\mathbb{Q}[x]/K$는 체
* $\mathbb{Q}[x]/K$가 체이므로 영 아닌 모든 원소가 역원 갖는다
* $\gcd(p(x),x-2)=\gcd(x-2,2)=1$, $\overline{x-2}\in(\mathbb{Q}[x]/K)^*$

7. 36
$J=\langle x\rangle$, $K=\langle x-1\rangle$, $x-(x-1)=1$,
$J+K=\langle\gcd(x,x-1)\rangle=\langle 1\rangle=\mathbb{Z}_7[x]$,
$J\cap K=\langle\mathrm{lcm}(x,x-1)\rangle=\langle x\cdot(x-1)\rangle=I$이므로
중국인의 나머지 정리와 제1동형정리에 의해
$\mathbb{Z}_7[x]/I=\mathbb{Z}_7[x]/J\cap K\cong(\mathbb{Z}_7[x]/J)\times(\mathbb{Z}_7[x]/K)\cong\mathbb{Z}_7[0]\times\mathbb{Z}_7[1]\cong\mathbb{Z}_7\times\mathbb{Z}_7$.
$|U(\mathbb{Z}_7\times\mathbb{Z}_7)|=|\mathbb{Z}_7^*\times\mathbb{Z}_7^*|=6\cdot 6=36$이므로 $|U(\mathbb{Z}_7[x]/I)|=36$.

* $\mathbb{Z}_7[x]/\langle x\rangle=\{\overline{f(x)}\mid\deg f(x)<\deg x=1\}$
$\qquad=\{\cdots,\bar{x},\overline{x+1},\overline{x+2},\cdots\}$
$\qquad=\{\cdots,\bar{0},\bar{1},\cdots,\bar{6},\cdots\}$
$\qquad\cong\mathbb{Z}_7$
* PID에서 $\langle a\rangle+\langle b\rangle=\langle c\rangle\Leftrightarrow c=\gcd(a,b)$
$\qquad\Rightarrow as+bt=c$인 s, t있다.

8. 10
$\mathbb{Z}_5$는 체이므로 $\mathbb{Z}_5[x]$는 PID이다. 따라서 $I=\langle f(x)\rangle$인 $f(x)\in\mathbb{Z}_5[x]$있다.
(가)에 의해
$|\mathbb{Z}_5[x]/I|=|\{r(x)+I\mid r(x)\in\mathbb{Z}_5[x],\deg r(x)<\deg f(x)\}|$
$\qquad=5^{\deg f(x)}=25$, $\deg f(x)=2$.
$f(x)=(x-a)^2$ 꼴이면 (나)를 만족하지 않는다.
$a\ne b$인 a, $b\in\mathbb{Z}_5$에 대하여 $f(x)=(x-a)(x-b)$라 하면
제3동형정리에 의해
$\mathbb{Z}_5[x]/\langle f(x)\rangle\cong(\mathbb{Z}_5[x]/\langle x-a\rangle)\times(\mathbb{Z}_5[x]/\langle x-b\rangle)$
$\qquad\cong\mathbb{Z}_5[a]\times\mathbb{Z}_5[b]$
$\qquad\cong\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_5$의 극대 아이디얼 $\mathbb{Z}_5\times\{0\}$, $\{0\}\times\mathbb{Z}_5$, 2개 있다.
* $\langle x-a\rangle/\langle f(x)\rangle$, $\langle x-b\rangle/\langle f(x)\rangle\subset\mathbb{Z}_5[x]/\langle f(x)\rangle$
그러므로 조건을 만족시키는 아이디얼의 개수는 $\mathbb{Z}_5$의 서로 다른 a, b를 순서와 관계없이 뽑는 경우의 수 ${}_5C_2=10$과 같다.

* $\mathbb{Z}_5[x]$에서 $\langle 2x+1\rangle=\langle x+3\rangle$, $3\in U(\mathbb{Z}_5[x])$
* 대응정리에 의해 $\mathbb{Z}_5[x]/I$의 모든 아이디얼은
$r(x)\mid f(x)$인 $r(x)$에 대해 $\langle r(x)\rangle/I$라 나타낼 수 있다.
* $r(x)\mid f(x)\Leftrightarrow f(x)\in\langle r(x)\rangle\Leftrightarrow I\subset\langle r(x)\rangle$

9. $\mathrm{char}R=30$

$\mathbb{Z}$는 PIR이며, $\mathbb{Z}$의 잉여환 $\mathbb{Z}/\langle 60\rangle\cong\mathbb{Z}_{60}$은 PID.

$\mathbb{Z}_{60}$의 아이디얼은 $k\,|\,60$인 k에 대하여 $\langle k\rangle$,

$\mathbb{Z}_{60}/\langle k\rangle\cong\mathbb{Z}_{\gcd(60,\,k)}=\mathbb{Z}_k$이다.

* $\mathbb{Z}_{60}$의 아이디얼의 개수$=(2+1)(1+1)(1+1)=12$

* $2\neq 14$이지만 $\langle 2\rangle=\langle 14\rangle$, $\langle 2\rangle=\langle k\rangle$인 k개수$=\varphi(60/2)$

60의 표준분해 $60=2^2\cdot 3\cdot 5$이므로

$\mathbb{Z}_k$가 체가 되는 $k=2,\ 3,\ 5.$

그러므로 $R=(\mathbb{Z}_{60}/\langle 2\rangle)\times(\mathbb{Z}_{60}/\langle 3\rangle)\times(\mathbb{Z}_{60}/\langle 5\rangle)$

$\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_5\cong\mathbb{Z}_{30}$, $\mathrm{char}R=\mathrm{char}\,\mathbb{Z}_{30}=30.$

10. ⑤

ㄱ. $ab=0$인 $b\neq 0$인 $b\in\mathbb{Z}_n$있다. 이때 a가 단원이면 $ac=1=ca$인 $c\in\mathbb{Z}_n$있다.

$0=0\cdot c=ab\cdot c=ac\cdot b=b$가 되어 모순이다.

* $U(\mathbb{Z}_n)=\{m\in\mathbb{Z}_n\,|\,\gcd(m,n)=1\}$, $|U(\mathbb{Z}_n)|=\varphi(n)$.

ㄴ. $\mathrm{char}R=n=ab$, $a>1$, $b>1$라 하자.

$0=n\cdot 1$

$=1+1+\cdots+1$ (n번$=ab$번 연산)

$=(1+1+\cdots+1)(1+1+\cdots+1)$ (a번$\cdot b$번 연산)

$=(a\cdot 1)(b\cdot 1)$이므로

$n=\mathrm{char}R=\min\{a,b\}<n$이 되어 모순이다.

* 표수는 덧셈군에서 단위원 1의 위수(라그랑지 적용가능)

ㄷ. 소수 3에 대한 아이젠슈타인 판정법에 의해 옳다.

* 주어진 다항식은 실근 1개, 허근 6개를 갖는다.

* 실근 $-3<\alpha<-2$, $\deg(\alpha,\mathbb{Q})=[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]=7$

11. ①

$\ker\varphi=\{a+b\alpha\in\mathbb{Z}[\alpha]\,|\,\varphi(a+b\alpha)=0\}$

$=\{a+b\alpha\in\mathbb{Z}[\alpha]\,|\,[a]_3\varphi(1)+[b]_3\varphi(\alpha)=0\}$

$=\left\{a+b\alpha\in\mathbb{Z}[\alpha]\,\middle|\,[a]_3\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+[b]_3\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=0\right\}$

$=\{a+b\alpha\in\mathbb{Z}[\alpha]\,|\,[a]_3=0=[b]_3\}$ ($\because$ 일차독립)

$=\{3(r+s\alpha)\,|\,r,s\in\mathbb{Z}\}$

$=3\cdot\mathbb{Z}[\alpha]$

$=\langle 3\rangle.$

동형정리에 의해 $\mathrm{im}(\varphi)\cong\mathbb{Z}[\alpha]/\ker\varphi=\mathbb{Z}[\alpha]/\langle 3\rangle\cong\mathbb{Z}_3[\alpha].$

$f(x)=x^2-x-1\in\mathbb{Z}_3[x]$는 α를 근으로 갖는 기약다항식이므로 $\mathbb{Z}_3[\alpha]$는 체.
따라서 $\mathbb{Z}_3[\alpha]=\mathbb{Z}_3(\alpha)$이고 $\mathrm{im}(\varphi)$는 F_9와 동형이다.

* $\varphi(1)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\varphi(\alpha)=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$는 $M_2(\mathbb{Z}_3)$에서 일차독립.

* $\mathrm{im}\varphi=\varphi(\mathbb{Z}[\alpha])=\varphi(\langle 1,\alpha\rangle)=\left\langle\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\right\rangle$, $|\mathrm{im}\varphi|=3^2=9.$

* 환 $(\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3,+,\times)$에는 곱셈 위수 3 넘는 원소 없다.

* 환 $\mathrm{im}(\varphi)$의 원소 $\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$은 위수 $8(=|[\mathrm{im}(\varphi)]^*|)$이다.

12.

(Ⅰ) 참

S의 아이디얼 J라 하자.

(나)에 의해 $\Phi^{-1}(J)$는 $\mathbb{R}[x]$의 아이디얼이고,

(가)에 의해 $\Phi^{-1}(J)=\langle f(x)\rangle$인 $f(x)\in\mathbb{R}[x]$있다.

$\Phi(\mathbb{R}[x])=S$, 즉 Φ는 전사이므로 $\Phi(\Phi^{-1}(J))=J$, $J=\Phi(\langle f(x)\rangle)=\langle\Phi(f(x))\rangle$.

그러므로 S는 PID.

(Ⅱ) 거짓

Φ는 전사 환준동형사상이고,

환준동형사상 $\psi:\mathbb{R}[x]\to S/\Phi(I)$, $\psi(f(x))=\Phi(f(x))+\Phi(I)$에 대하여

$\ker\psi=\Phi^{-1}(\Phi(I))=I$, $\mathrm{im}\psi=\psi(\mathbb{R}[x])=\Phi(\mathbb{R}[x])/\Phi(I)=S/\Phi(I)$이므로

동형정리에 따라 $\mathbb{R}[x]/I\cong S/\Phi(I)$.

즉, $S/\Phi(I)$의 대수적 구조는 $\mathbb{R}[x]/I$와 일치한다.

$x^2+2x+2\in\mathbb{R}[x]$는 $\mathbb{R}[x]$에서 해를 갖지 않으므로 기약이다.

(다)에 의해 I는 $\mathbb{R}[x]$의 극대아이디얼이며, $\mathbb{R}[x]/I$는 체이다.

체(단순환)의 아이디얼은 2개 있으므로 $S/\Phi(I)$의 아이디얼은 2개 있다.

(Ⅲ) 참

$\Phi(1)=\Phi(1^2)=\Phi(1)^2$에서 $\Phi(1)=0$ 또는 $\Phi(1)=1$.

$\Phi(1)=1$라 하자.

$\Phi(\sqrt{2})=m$인 $m\in\mathbb{Z}$있다.

$\Phi(2)=m^2=\Phi(1+1)=2\Phi(1)=2$, 즉 제곱해서 2가 되는 정수 있다. 모순.

따라서 $\Phi(1)=0$이고, $\Phi(\mathbb{R}[x])=\Phi(1\cdot\mathbb{R}[x])=\Phi(\langle 1\rangle)=\langle\Phi(1)\rangle=\langle 0\rangle=\{0\}$.

그러므로 $\mathbb{R}[x]/\ker\Phi=\mathbb{R}[x]/\mathbb{R}[x]\cong\{0\}$의 아이디얼 1개 있다.

13. ①

ㄱ. $\delta:\mathbb{Z}[i]\to\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\delta(a+bi)=a^2+b^2$라 정의하자.

① $\delta(\alpha)=0\Leftrightarrow N(\alpha)=\alpha\overline{\alpha}=0\Leftrightarrow\alpha=0$이고,

$\alpha,\ \beta\in\mathbb{Z}[i]$, $\beta\neq 0$이면 $\delta(\beta)\geq 1$이므로

$\delta(\alpha)\leq\delta(\alpha)\delta(\beta)=|N(\alpha)||N(\beta)|=\delta(\alpha\beta)$.

② $\alpha,\ \beta\in\mathbb{Z}[i]$, $\beta\neq 0$일 때

$\dfrac{\alpha}{\beta}=u+vi\in\mathbb{Q}(i)$일 때,

$x,\ y$를 각각 유리수 $u,\ v$에 가장 가까운 정수,

$$\gamma=x+yi\in\mathbb{Z}[i],\ \varepsilon=\alpha-\beta\gamma\in\mathbb{Z}[i]$$

라 하면,

$$\varepsilon=\alpha-\beta\gamma=\beta\left(\frac{\alpha}{\beta}-\gamma\right)=\beta[(u-x)+(v-y)i],$$

$$N(\varepsilon)=N(\beta)[(u-x)^2-m(v-y)^2]$$

이고 $0\leq|u-x|\leq\dfrac{1}{2}$, $0\leq|v-y|\leq\dfrac{1}{2}$이므로

$0\leq(u-x)^2-m(v-y)^2\leq\dfrac{1}{4}-\dfrac{m}{4}<1.$

$\delta(\varepsilon)=|N(\varepsilon)|<|N(\beta)|=\delta(\beta)$이므로 $\mathbb{Z}[i]$는 유클리드 정역이다.

그러므로 $\mathbb{Z}[i]$는 PID이다.

ㄴ. $U(\mathbb{Z}[i])=\{a^2-b^2=\pm 1\,|\,a,b\in\mathbb{Z}\}=\{\pm 1,\ \pm i\}$

ㄷ. $\mathbb{Z}[i]$는 PID이고, $2=(1+i)(1-i)$이며 $1+i$, $1-i$는 $\mathbb{Z}[i]$의 단원이 아님.

따라서 2는 $\mathbb{Z}[i]$의 기약원이 아니므로 $\langle 2\rangle$는 극대아이디얼이 아니다.

실제로, $\langle 2\rangle\subsetneq\langle 1+i\rangle\subsetneq\mathbb{Z}[i]$.

14. ①

ㄱ. $g(1)=g(1^2)=[g(1)]^2$이므로 $g(1)=0$ 또는 1. g는 단사이므로 $g(1)=1$.
환준동형사상의 성질에 따라 $n\in\mathbb{Z}$에 대해 $g(1\cdot n)=g(n)=n$.

ㄴ. $\mathbb{Z}$는 PID이므로 $\mathbb{Z}$의 이데알 $I=\langle m\rangle=m\mathbb{Z}$인 $m\in\mathbb{Z}$있다.
$g(I)=g(m\mathbb{Z})=m\cdot g(\mathbb{Z})=mg(\langle 1\rangle)=m\langle g(1)\rangle=m\mathbb{Z}$.
$m\cdot 3\in m\mathbb{Z}$, $\frac{1}{2}\in\mathbb{Q}$에 대하여 $\frac{1}{2}\cdot(m\cdot 3)=m\cdot\frac{3}{2}\notin m\mathbb{Z}$이므로
$m\mathbb{Z}$는 $\mathbb{Q}$의 아이디얼이 아니다.
* $I\neq m+\mathbb{Z}$

ㄷ. 유리수체 $\mathbb{Q}$의 아이디얼 $\{0\}$, $\mathbb{Q}$, 2개 뿐이다.
$\mathbb{Q}$의 아이디얼 $J=\{0\}$에 대하여 $g(I)=J$되는 $\mathbb{Z}$의 아이디얼 $\{0\}$있다.
$\mathbb{Q}$의 아이디얼 $J=\mathbb{Q}$에 대하여 $g(I)=J$가 되는 아이디얼 없다.
($\because$) 임의의 $n\in\mathbb{Z}$에 대하여 $g(n)=n$이므로
$g(I)=J=\mathbb{Q}$되는 아이디얼이 존재하지 않는다.
* 임의의 $\mathbb{Z}$의 아이디얼 $n\mathbb{Z}$에 대하여 $g(n\mathbb{Z})=n\mathbb{Z}\subsetneq\mathbb{Q}$.

15. ②

① R에서 $4\neq 0$, $6\neq 0$, $4\cdot 6=0$이므로 R은 정역이 아니다.
② $U(\mathbb{Z}_{24})=\{n\mid\gcd(n,24)=1\}$, $\mathbb{Z}_{24}\subset R$이므로
$U(\mathbb{Z}_{24})\subset U(R)$, $|U(\mathbb{Z}_{24})|=\varphi(24)=8\leq|U(R)|$.
* $n\in\mathbb{N}$, $(12x^n+1)\cdot(12x^n+1)=1$, $|U(R)|=\infty$.
③ R의 단위원(곱셈항등원) 1, $\mathrm{char}R=24$,
$S=\mathbb{Z}_4[x]\times\mathbb{Z}_6[x]$의 단위원 1, $\mathrm{char}S=\mathrm{lcm}(4,6)=12$.
표수가 다르므로 환동형이 아니다.
* $\mathbb{Z}_{24}[x]\cong\mathbb{Z}_3[x]\times\mathbb{Z}_8[x]$, $\gcd(3,8)=1$
④ $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\equiv 0 \pmod{24}$
$\Leftrightarrow$ $f(x)\equiv 0 \pmod 3$, $f(x)\equiv 0 \pmod 8$
$\Leftrightarrow$ $x\equiv 1,2,3 \pmod 3$, $x\equiv 1,2,3,5,7 \pmod 8$
이므로 $\mathbb{Z}_{24}$에서 $f(x)$는 15개 해를 갖는다.
(중국인 나머지 정리)
* $x\equiv a_i 8x_1+b_j 3x_2 \pmod{24}$, $a_i\in\{1,2,3\}$, $b_j\in\{1,2,3,5,7\}$.
* $8x_1\equiv 1 \pmod 3$, $3x_2\equiv 1 \pmod 8$에서
$x_1\equiv 2 \pmod 3$, $x_2\equiv 3 \pmod 8$.
* $x\equiv 16a_i+9b_j\equiv 1,10,19,13,7,17,2,11,29,23,9,18,3,45,15$
⑤ $x^2+12=(x+6)(x-6)$, $0+I=\bar{0}=\overline{x+6}\cdot\overline{x-6}$,
$\overline{x+6}=x+6+I\neq 0+I$, $\overline{x-6}\neq I$이므로 R/I는 정역이 아니며, 체도 아님.

16. ②

① $\langle 1\rangle=\mathbb{Z}$, $\langle 2\rangle=2\mathbb{Z}$, $\cdots$, $\langle 2,6\rangle=\langle 2\rangle$, $\langle 5,6\rangle=\langle 1\rangle$, $\cdots$
* $n\mathbb{Z}$는 $\mathbb{Z}$의 부분환 $(n\in\mathbb{Z})$
② $\mathbb{Z}$에는 곱셈항등원(단위원) 1있다. $3\mathbb{Z}$에는 곱셈항등원 없다.
③ $\mathbb{Z}$는 PID, 17은 $\mathbb{Z}$의 소원(기약원), $\langle 17\rangle=17\mathbb{Z}$은 극대이데알.
* $\mathbb{Z}$는 PID이고 PID에서 기약원 $\Leftrightarrow$ 극대아이디얼 생성
* $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}_{17}$은 체이므로 $17\mathbb{Z}$는 $\mathbb{Z}$의 극대아이디얼.
* 정수계수 다항식환 $\mathbb{Z}[x]$는 PID 아님, $(2,x)$
④ (1), (2), (-4), (-17), $\cdots$ 많다.
⑤ 정역에서 소원 $\Rightarrow$ 기약원
* $\mathbb{Z}$는 UFD이고 UFD에서 소원 $\Leftrightarrow$ 기약원
* F: UFD이면 $F[x]$: UFD

17. ②

① $\mathbb{Z}$는 환이고 임의의 $m\in\mathbb{Z}$에 대하여 $m\in\mathbb{Z}[x]$이므로 $\mathbb{Z}$는 $\mathbb{Z}[x]$의 부분환이다.
② $\mathbb{Z}[i]$에는 제곱해서 -1이 되는 원소 i있다. $\mathbb{Z}[x]$가 $\mathbb{Z}[i]$와 환동형이라면 $\mathbb{Z}[x]$에도 제곱해서 -1이 되는 원소가 있어야 한다. 그러나 임의의 정수 다항식의 제곱은 0이상이므로 모순이다.
* $\mathbb{Z}[i]$는 PID, $\mathbb{Z}[x]$는 PID가 아니다. ($\mathbb{Z}$는 체가 아니다.)
* $\mathbb{Z}[x]$의 단원 ± 1, $\mathbb{Z}[i]$의 단원 ± 1, $\pm i$.
③ $\mathbb{Z}$는 UFD(유클리드 호제법 사용가능)이므로 $\mathbb{Z}[x]$는 UFD이다.
④ 정역 $\mathbb{Z}$에 대하여 $E=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbb{Z}, b\neq 0\}$ 위의 $(a,b)\sim(c,d)$ $\Leftrightarrow$ $ad=bc$로 정의된 동치관계 $\sim$에 대하여 $(a,b)\in E$를 포함하는 동치류를 $\frac{a}{b}$, 동치류 전체의 집합을 F, F 의 연산을

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd},\ \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

로 정의하자. $\mathbb{Z}$의 분수체 $(F,+,\times)$는 유리수체 $\mathbb{Q}$와 동형이다.
* 이차 체 $\mathbb{Q}(\sqrt{m})=\{a+b\sqrt{m}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$는 정역 $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$의 분수체.
⑤ $f(x)\in U(\mathbb{Z}[x])$이면 $f(x)g(x)=1$되는 $g(x)\in\mathbb{Z}[x]$있다.
양변 비교하면 $f(x)$, $g(x)\in\mathbb{Z}-\{0\}$,
이때 $f(x)=\pm 1$. 따라서 $U(\mathbb{Z}[x])=U(\mathbb{Z})=\{\pm 1\}$.

18. ④

ㄱ. α가 F 위에서 대수적이므로 α를 근으로 갖는 $f(x)\in F[x]$있다.
$f(x)\in\ker\phi_\alpha$이므로 $\ker\phi_\alpha\neq\{0\}$.
* 실제로 $\ker\phi_\alpha=\langle\mathrm{irr}(\alpha,F)\rangle$ ($F[x]$: PID, 자연수 정렬성 이용)

ㄴ. ϕ_α가 전사일 때 동형정리에 의해 성립한다. 항상 성립하지 않는다.
* 예: $F=\mathbb{Q}$, $\alpha=\sqrt{2}$, $E=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})=\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

ㄷ. $F[x]/\ker\phi_\alpha$는 체이므로 $\ker\phi_\alpha$는 $F[x]$의 소아이디얼.
* $\ker\phi_\alpha=\langle\mathrm{irr}(\alpha,F)\rangle$는 $F[x]$에서 극대아이디얼, 소아이디얼도 된다.

19. ⑤

① $\mathbb{Z}_5$는 체이므로 $\mathbb{Z}_5[x]$는 주아이디얼정역이고,
여기서 극대아이디얼 $\langle f(x)\rangle$ $\Leftrightarrow$ $f(x)$가 기약다항식.
$x^3+3x+2\in\mathbb{Z}_5[x]$는 $\mathbb{Z}_5$에서 해를 갖지 않으므로
기약다항식이다. 따라서 $\langle x^3+3x+2\rangle$는 극대이데알.
② $\mathbb{Z}_6/\langle 3\rangle\cong\mathbb{Z}_3$는 체이므로 $\langle 3\rangle$는 극대이데알.
$\mathbb{Z}_6/\langle 3\rangle\cong\mathbb{Z}_{\gcd(6,3)}=\mathbb{Z}_3\neq\mathbb{Z}_2$
③ 소수 2에 대한 아이젠슈타인 판정법에 의해
$x^5-4x+22\in\mathbb{Q}[x]$는 기약이고 $\mathbb{Q}$는 체이므로
$\langle x^5-4x+22\rangle$는 $\mathbb{Q}[x]$의 극대아이디얼.
④ $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})/(2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})=(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})/(\langle 2\rangle\times\langle 1\rangle)$
$=(\mathbb{Z}/\langle 2\rangle)\times(\mathbb{Z}/\langle 1\rangle)$
$\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_1\cong\mathbb{Z}_2$는 체이므로 옳다.
⑤ 정역 $\mathbb{Z}[x]$의 원소 $3x^3+x^2+x-2=(3x-2)(x^2+x+1)$이므로 극대아이디얼이 아니다.
* $\mathbb{Z}[x]$의 아이디얼 $I=\langle 3x^3+x^2+x-2\rangle$라 하자.
$\mathbb{Z}[x]/I$에서 $\overline{3x+2}\neq 0+I$, $\overline{x^2+x+1}\neq 0+I$이지만
(3차 다항식이 1, 2차 다항식은 못나눈다.)
$\overline{3x+2}\cdot\overline{x^2+x+1}=(3x^3+x^2+x-2)+I=0+I=\bar{0}$.
따라서 $\mathbb{Z}[x]/I$는 정역부터 안된다. 그래서 체도 안된다.
즉, I는 $\mathbb{Z}[x]$의 극대이데알이 아니다.

20. ①

① UFD의 성질, I의 조건과 무관하다.

* 체 $\Rightarrow$ ED $\Rightarrow$ PID $\Rightarrow$ UFD

[② $\Rightarrow$ ③]

$I=\langle p(x)\rangle$인 기약다항식 $p(x)\in F[x]$택하자.

$\langle p(x)\rangle=0+I\neq f(x)+\langle p(x)\rangle\in F[x]/I$에 대하여

$f(x)\notin\langle p(x)\rangle$이므로 $p(x)$는 $f(x)$를 나누지 못하므로

$\gcd(p(x),f(x))=1$ 즉, $p(x)s(x)+f(x)t(x)=1$인 $s(x),\ t(x)\in F[x]$있다.

$1-f(x)t(x)=p(x)s(x)\in\langle p(x)\rangle$이므로 $1+\langle p(x)\rangle=f(x)t(x)+\langle p(x)\rangle$

즉, 영이 아닌 $\overline{f(x)}\in F[x]/I$는 곱셈 역원 $\overline{t(x)}$갖는다.

[③ $\Rightarrow$ ④]

$I\subset J\subset F[x]$인 이데알 J라 하자. $F[x]/J\subset F[x]/I$이므로

$\overline{0}\neq\overline{f(x)}\in F[x]/J\subset F[x]/I$에 대하여

$\overline{f(x)}\cdot\overline{t(x)}=\overline{1}=1+\langle p(x)\rangle$인 $\overline{t(x)}\in F[x]/I$있다.

이때 $f(x)t(x)-1=\alpha$인 $\alpha\in I$있다.

여기서 $1=f(x)t(x)-\alpha\in J,\ J=F[x]$.

[④ $\Rightarrow$ ⑤]

I는 극대이데알이므로 $F[x]/I$는 체이고 따라서 $F[x]/I$는 정역이다.

그러므로 I는 $F[x]$의 소이데알이다.

21. $a\neq0$일 때, $a\,|\,b$임을 보이자.

* $\mathbb{Z}$: 체 아님 $\Leftrightarrow$ $\mathbb{Z}[x]$: PID 아님

$\mathbb{Z}$: 정역 $\Leftrightarrow$ $\mathbb{Z}[x]$: 정역

$I=\langle f(x)\rangle$인 $f(x)\in\mathbb{Z}[x]$를 택하자.

$\langle a,bx\rangle\subset\langle f(x)\rangle,\ a,bx\in\langle f(x)\rangle$이므로 $f|a,\ f|bx$이며,

a는 정수이므로 $f\in\mathbb{Z},\ f|a,\ f|b$.

$\langle f(x)\rangle\subset\langle a,bx\rangle,\ f(x)\in\langle a,bx\rangle=\langle a\rangle+\langle bx\rangle$이므로

$f(x)=a\cdot s(x)+bx\cdot t(x)$인 $s(x),\ t(x)\in\mathbb{Z}[x]$있다.

$x=0$ 대입하면 $f(x)=f(0)=a\cdot s(0),\ a|f$.

그러므로 $a|b$.

22.

$$\begin{aligned}\mathrm{im}f=f(\mathbb{Z})&=f(\langle1\rangle)=\langle f(1)\rangle\\&=\langle 6m+4n\rangle(m,\ n\in\mathbb{Z})\\&=2\langle 3m+2n\rangle=2\langle1\rangle\ (\because\ \gcd(3,2)=1)\\&=2\mathbb{Z}_6.\end{aligned}$$

* 0, 1, 2, 3, 4, $5\in\mathbb{Z}$만 대입해서 비교해도 충분하다.

$\ker f=\{n\in\mathbb{Z}\mid f(n)\equiv4n\equiv0\ (\mathrm{mod}\ 6)\}=3\mathbb{Z}$.

동형정리에 의해 $\mathbb{Z}/\ker f=\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\cong\mathrm{im}f=2\mathbb{Z}_6$.

23. $\ker f=105\mathbb{Z}$

중국인의 나머지 정리에 의해

$$\begin{aligned}x\in\ker f&\Leftrightarrow \text{법 } 3,\ 5,\ 7\text{에 대하여 } x\equiv0\\&\Leftrightarrow \text{법 } 3\cdot5\cdot7\text{에 대하여 } x\equiv0\\&\Leftrightarrow x\equiv0\ (\mathrm{mod}\ 105)\\&\Leftrightarrow x\in105\mathbb{Z},\end{aligned}$$

$\ker f=105\mathbb{Z}$.

24. 특수해 $f(53)=(\overline{2},\overline{3},\overline{4})$이므로 일반해 $53+\ker f=53+105\mathbb{Z}$.

구하는 정수 $x=53+105m,\ m\in\mathbb{Z}$.

* $x\equiv2\ (\mathrm{mod}\ 3),\ x\equiv3\ (\mathrm{mod}\ 5),\ x\equiv4\ (\mathrm{mod}\ 7)$

* 해집합 $f^{-1}[(2+3\mathbb{Z},3+5\mathbb{Z},4+7\mathbb{Z})]=53+\ker f$

* $4+7\mathbb{Z}$ 원소 나열하면서 비교, 특수해$+\ker f$.

25. $F[x]$의 이데알 I라 하자. $I=\langle0\rangle$는 주이데알이다. $I\neq\langle0\rangle$라 하자.

$D=\{\deg f(x)\,|\,f(x)\in I\setminus\{0\}\}$라 하면

$D\subset\mathbb{N}\cup\{0\}$이므로 자연수 정렬성 원리에 의해 $n=\min D$있다.

$\deg f(x)=n$인 $f(x)\in I$ 택하자. $\langle f(x)\rangle\subset I$임은 자명하다.

$g(x)\in I$에 대하여 나눗셈 알고리즘에 의해

$$g(x)=f(x)Q(x)+R(x),\ 0\le\deg R(x)<\deg f(x)\ \text{또는}\ R(x)=0$$

인 $Q(x),\ R(x)\in F[x]$가 유일하게 존재한다.

이때 $f(x)Q(x)$ 좌변 이항하면

$R(x)=g(x)-f(x)Q(x)\in I=\{0,f(x),g(x),\cdots\}$이고

I는 아이디얼이므로 $R(x)\in I$이다.

이때 $\deg f(x)$는 I의 최소차수 다항식이므로 $R(x)=0$.

즉 $g(x)=f(x)Q(x)\in\langle f(x)\rangle$.

그러므로 $I=\langle f(x)\rangle$는 $F[x]$의 주아이디얼이다.

26. $a\neq0$인 $a\in D$에 대하여 $a,\ a^2,\ a^3,\ \cdots\in D$이고 D는 유한집합이므로

$m>n,\ a^m=a^n$인 자연수 $m,\ n$ 있다.

$a^n(a^{m-n}-1)=0,\ a\neq0$이므로 $a^{m-n}=a\cdot a^{m-n-1}=1$.

영 아닌 임의의 원소가 단원이므로 D는 체이다.

27. J는 R의 아이디얼

① $0\in J$이므로 $J\neq\varnothing$

② $a,\ b\in J$이면 $a^m=0,\ b^n=0$인 $m,\ n\in\mathbb{Z}^+$있다.

$$\begin{aligned}(a-b)^{m+n}&=\sum_{k=0}^{n}{}_{m+n}\mathrm{C}_k(-b)^ka^{m+n-k}+\sum_{k=n+1}^{m+n}{}_{m+n}\mathrm{C}_k(-b)^ka^{m+n-k}\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{m+n}{k}(-b)^k\cdot0+\sum_{k=n+1}^{m+n}\binom{m+n}{k}0\cdot a^{m+n-k}\\&=0,\ \text{즉 } a-b\in J\text{이므로 } (J,+)\le(R,+)\end{aligned}$$

③ $a\in J,\ r\in R$라 하면 $a^n=0$인 $n\in\mathbb{Z}^+$있다. R은 가환환이므로

$(ra)^m=r^ma^m=r^m\cdot0=0$이므로 $ra=ar\in J$.

그러므로 J는 R의 아이디얼이다.

28. ②

$\mathbb{Z}_2$는 체이므로 $\mathbb{Z}_2[x]$는 PID, $f(x)$는 $\mathbb{Z}_2$에서 해를 갖지 않으므로 기약.

PID에서 기약다항식 $f(x)$에 대하여 $\langle f(x)\rangle$는 극대이데알.

$\left|\mathbb{Z}_2[x]/(f(x))\right|=2^{\deg f(x)}=4$.

$f(x)$의 한 근을 $\alpha\in\overline{\mathbb{Z}_2}$라 할 때,

$\phi:\mathbb{Z}_2[x]\to\mathbb{Z}_2[x]/(f(x)),\ \phi(g(x))=g(\alpha)+\langle f(x)\rangle$,

$\ker\phi=\langle f(x)\rangle,\ \mathrm{im}\phi=\mathbb{Z}_2[x]/(f(x))$.

* $\mathbb{Z}_2[x]/\langle f(x)\rangle=\langle1,\alpha\rangle_{\mathbb{Z}_2}=\{a+b\alpha\mid a,b\in\mathbb{Z}_2\}$

* $\mathbb{Z}_2[x]/\langle f(x)\rangle$는 $x^{2^2}-x\in\mathbb{Z}_2[x]$의 분해체이며,

$f(x)$의 두 개 해는 $x^{2^2}-x$의 해이다.

* $\mathbb{Z}_2[x]$의 $f(x)$는 분리다항식이다.

29. ④

(가) $\mathbb{Z}_2[x]$의 이차 다항식은 $x^2,\ x^2+x,\ x^2+1,\ x^2+x+1$, 4개 있으며, $\mathbb{Z}_2$에서 근을 갖지 않으면 기약이므로 x^2+x+1만 기약이다.

(나) $2x^2\in\mathbb{Z}_4[x],\ 2x^2\neq0$이지만 $(2x^2)\cdot(2x^2)=0$이므로 $\mathbb{Z}_4[x]$는 정역이 아니다. $\mathbb{Z}_4[x]\supset\mathbb{Z}_4$부터 정역이 아님

(다) $\sum_{i=0}^{n}a_ix^i,\ \sum_{j=0}^{m}b_jx^j\in R[x]$에 대하여

$$\begin{aligned}f(x)g(x)&=c_0+c_1x+\cdots+c_{n+m}x^{n+m},\ c_i=\sum_{k=0}^{i}a_kb_{i-k}\\&=d_0+d_1x+\cdots+d_{m+n}x^{m+n},\ d_i=\sum_{k=0}^{i}b_ka_{i-k}\\&=g(x)f(x).\end{aligned}$$

(라) $f(x),\ g(x)\in R[x],\ f(x)\neq0,\ g(x)\neq0$이면

$\deg(f(x)g(x))=\deg f(x)+\deg g(x)\ge0$이므로

$f(x)g(x)\neq0$, $R[x]$는 정역이다.

* $R[x]$의 단원군 $U(R[x])=U(R)$, R의 단원군

<체>

1.
$k \in \mathbb{Z}_7$일 때 $f(k) \neq 0$이므로 $f(x)$는 일차 인수를 갖지 않는다.
$f(x) = (x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$인 $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{Z}_7$가 있다고 하면
$a+c=0,\ ac+b+d=3,\ ad+bc=0,\ bd=-1.$
$0 = a(d-b)$이므로 $a=0$ 또는 $b=d.$
$a=0$인 경우 $b+d=3,\ bd=-1$이 되는 $b,\ d$는 $\mathbb{Z}_7$에 존재하지 않는다.
$b=d$인 경우 $b^2=-1=6$이 되는 b는 $\mathbb{Z}_7$에 존재하지 않는다.
그러므로 $f(x)$는 기약이다.
유한체 $\mathbb{Z}_7(\alpha)/\mathbb{Z}_7 = GF(7^4)$의 갈루아군 $G(\mathbb{Z}_7(\alpha)/\mathbb{Z}_7)$는 위수 4인 순환군.
따라서 위수 4인 원소 σ는 $G(\mathbb{Z}_7(\alpha)/\mathbb{Z}_7)$의 생성원이므로 $|\sigma^2|=2.$
갈루아 정리에 따라 $|E| = 7^2 = 49.$

2.
K는 $\mathbb{Q}$ 위의 갈루아 확대체이므로 갈루아 정리 적용.
$[K:\mathbb{Q}] = |G(K/\mathbb{Q})| = |\mathbb{Z}_2 \times S_3| = 12,\ 6=[E:\mathbb{Q}]$이므로 $|G(E/\mathbb{Q})|=2.$
$\mathbb{Z}_2 \times S_3 = \mathbb{Z}_2 \times D_3$의 위수 2인 원소의 개수는 7개 있으므로
$G(K/\mathbb{Q})$의 위수 2인 (순환)부분군의 개수 $7/\varphi(2)=7.$
따라서 조건을 만족하는 K의 부분체 E의 개수는 7.
정규부분군 $\mathbb{Z}_2 \times \{1\}$와 동형인 $G(K/\mathbb{Q})$의 부분군 H라 하자.
고정체 $K_H = F$는 $\mathbb{Q}$ 위의 정규확대체이며,
$G(F/\mathbb{Q}) \cong G(K/\mathbb{Q})/H \cong (\mathbb{Z}_2 \times S_3)/(\mathbb{Z}_2 \times \{1\}) \cong S_3.$

3.
$\alpha = \sqrt[23]{88},\ \zeta = e^{\frac{2\pi i}{23}}$일 때 $K = SF(x^{23}-88/\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}(\alpha, \zeta).$
$[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] = \deg(\alpha, \mathbb{Q}) = 23,\ [\mathbb{Q}(\zeta):\mathbb{Q}] = \varphi(23) = 22.$
$\gcd(23, 22) = 1$이므로 $[K:\mathbb{Q}] = \operatorname{lcm}(23, 22) = 506 = 2 \cdot 11 \cdot 23.$
$[K:E]-[E:\mathbb{Q}]$가 $1010 = 2 \cdot 5 \cdot 101$의 양의 약수인 경우는
$[K:E]=506$ 또는 $[K:E]=23,$ 2가지 있다.
$[K:E]=506$인 경우, 소체 $E=\mathbb{Q}.$
$[K:E]=23$인 경우, $E=\mathbb{Q}(\zeta).$
(실로우 23−부분군의 개수 $n_{23} = 23k+1 \mid 22,\ n_{23}=1$)
그러므로 문제의 조건을 만족하는 체 E의 개수 2.

4.
K는 $\mathbb{Q}$위의 13번째 원분확대체이므로
$K = SF(x^{13}-1/\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}(\zeta),\ [K:\mathbb{Q}]=12,$
$G(K/\mathbb{Q}) = \{\sigma_i \mid \sigma_i(\zeta)=\zeta^i,\ \gcd(i,13)=1,\ 1 \le i \le \varphi(13)\}$
$= \langle \sigma_2 \rangle = \langle \sigma_6 \rangle = \langle \sigma_7 \rangle = \langle \sigma_{11} \rangle$
$\cong (\mathbb{Z}_{13}^*,\ \cdot)$
$= \langle 2 \rangle = \langle 2^5 \rangle = \langle 2^{11} \rangle = \langle 2^7 \rangle$이다.

$\sigma \in X \Leftrightarrow K_{\langle \sigma \rangle} = \mathbb{Q} \Leftrightarrow G(K/K_{\langle \sigma \rangle}) = \langle \sigma \rangle = G(K/\mathbb{Q})$이므로
X의 원소 개수는 순환군 $G(K/\mathbb{Q})$의 생성원의 개수 $\varphi(12)=4$와 같다.
X의 원소 각각에 대한 ζ의 상은 다음과 같다.
$\sigma_2(\zeta)=\zeta^2,\ \sigma_6(\zeta)=\zeta^6,\ \sigma_7(\zeta)=\zeta^7,\ \sigma_{11}(\zeta)=\zeta^{11}.$
$\sigma_2^2(\beta)=\beta$이므로 $\beta \in K_{\langle \sigma_2^2 \rangle},\ \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\beta) \subset K_{\langle \sigma_2^2 \rangle}.$
$6 = |\sigma_2^2| = |G(K/K_{\langle \sigma_2^2 \rangle})| = [K:K_{\langle \sigma_2^2 \rangle}] = \dfrac{[K:\mathbb{Q}]}{[K_{\langle \sigma_2^2 \rangle}:\mathbb{Q}]} = \dfrac{12}{[K_{\langle \sigma_2^2 \rangle}:\mathbb{Q}]}$에서
$[K_{\langle \sigma_2^2 \rangle}:\mathbb{Q}]=2,\ \beta \notin \mathbb{Q}$이므로 $\deg(\beta,\mathbb{Q}) = [\mathbb{Q}(\beta):\mathbb{Q}] = [K_{\langle \sigma_2^2 \rangle}:\mathbb{Q}]=2.$
$\mathbb{Q}$위의 β와 켤레 원소들=해집합$=\{\tau(\beta) \mid \tau \in G(K/\mathbb{Q})\} = \{\beta, \sigma_2(\beta)\}.$
$0 = \zeta^{13}-1 = (\zeta-1)(\zeta^{12}+\zeta^{11}+\cdots\zeta+1),\ \zeta^{12}+\cdots+\zeta+1=0$임을 이용하면
두 근의 합 $\beta+\sigma_2(\beta)=-1,$ 두 근의 곱 $\beta \cdot \sigma_2(\beta) = -1-1-1=-3.$
$\therefore\ \operatorname{irr}(\beta,\mathbb{Q}) = (x-\beta)(x-\sigma_2(\beta)) = x^2+x-3.$

$$* \ SF(x^n-a/\mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q}(e^{2\pi i/n},\ \sqrt[n]{a}) & ,\ a>0 \\ \mathbb{Q}(e^{2\pi i/n},\ \sqrt[n]{a} \cdot e^{\pi i/n}) & ,\ a<0 \end{cases}$$

5. $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}):\mathbb{Q}] = \deg(x^3-2) = 3,$
$SF(x^{75}-1/\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{75}}, \sqrt[75]{1}) = \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{75}})$는 $\mathbb{Q}$위의 75번째 원분확대체이므로
$[\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{75}}:\mathbb{Q})] = \varphi(75) = 40$이다. $\gcd(3,40)=1$이므로 $[K:\mathbb{Q}]=120.$
K는 $\mathbb{Q}$위의 갈루아 확대체이므로 $|G(K/\mathbb{Q})| = [K:\mathbb{Q}] = 120.$

$x^3-2,\ x^{25}-1$의 $\mathbb{Q}$ 위의 분해체를 각각 $E_1,\ E_2$라 하면
$E_1 = \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{3}}, \sqrt[3]{2}),\ E_2 = \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{25}}, \sqrt[n]{1}) = \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{25}}),$
$[E_1:\mathbb{Q}] = \deg(x^3-2) \cdot \deg(x^2+x+1) = 6,\ [E_2:\mathbb{Q}] = \varphi(25) = 20$이다.
따라서 $H_1 = G(K/E_1),\ H_2 = G(K/E_2)$는 각각 위수 20, 6인
$G(K/\mathbb{Q})$의 정규부분군이다.

"$[E_1 \cap E_2 : \mathbb{Q}] = 1$이므로 $|H_1 \cap H_2| = 1$이다."
$\sigma \in H_1 \cap H_2$이면 $\alpha = \sqrt[3]{2},\ e^{\frac{2\pi i}{3}},\ e^{\frac{2\pi i}{25}}$라 할 때 $\sigma(\alpha)=\alpha$이므로 $\sigma(e^{\frac{2\pi i}{75}}) = e^{\frac{2\pi i}{75}}.$
그러므로 σ에 의한 K의 고정체 $K_{\langle \sigma \rangle} = K$이므로 $\sigma = \mathrm{id},\ H_1 \cap H_2 = \{\mathrm{id}\}.$
(다른 설명)
$E_1,\ E_2$의 부분체 $E_1 \cap E_2$에 대하여 $[E_1 \cap E_2 : \mathbb{Q}] \mid \gcd(6,20) = 2$이므로
$[E_1 \cap E_2 : \mathbb{Q}] = 1$ 또는 2이다.
$[E_1 \cap E_2 : \mathbb{Q}] = 2$이면 $G(E_1/E_1 \cap E_2)$는 $G(E_1/\mathbb{Q})$의 위수 3인 부분군이므로
$E_1 \cap E_2 = \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{3}})$이다. 따라서 $e^{\frac{2\pi i}{3}} \in E_2 = \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{25}})$이므로
$$e^{\frac{2\pi i}{75}} = \frac{\left(e^{\frac{2\pi i}{75}}\right)^{25}}{\left(e^{\frac{2\pi i}{75}}\right)^{8}} = \frac{e^{\frac{2\pi i}{3}}}{\left(\frac{e^{2\pi i}}{25}\right)^{8}} \in \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{25}}) = E_2$$가 되어 모순이다.
따라서 $[E_1 \cap E_2 : \mathbb{Q}] = 1 = |G(E_1 \cap E_2/\mathbb{Q})| = |H_1 \cap H_2|,\ H_1 \cap H_2 = \{1\}.$

H_1H_2는 $G(K/\mathbb{Q})$의 정규부분군, $|H_1H_2| = \dfrac{|H_1||H_2|}{|H_1 \cap H_2|} = 120 = |G(K/\mathbb{Q})|$이므로
$G(K/\mathbb{Q}) = H_1H_2.$

6.

$\alpha=\sqrt[5]{5}$, $\zeta=e^{\frac{2\pi i}{5}}$ 일 때 $K=\mathbb{Q}(\alpha,\zeta)$, $\zeta+\zeta^{-1}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$이므로 $\sqrt{5}\in K$.

* $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{-5},\zeta)=\mathbb{Q}(\sqrt[5]{5},\zeta)$

$\zeta+\zeta^{-1}=e^{\frac{2\pi i}{5}}+e^{-\frac{2\pi i}{5}}=\cos\dfrac{2\pi}{5}>0$, $\zeta^5=1$, $\zeta^4-\zeta^3+\zeta^2-\zeta+1=0$이므로

$(\zeta+\zeta^{-1})^2-(\zeta+\zeta^{-1})-1=0$, $\zeta+\zeta^{-1}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\in K$.

$\sqrt{5}=5^{\frac{1}{2}}\in K$, $\left(5^{\frac{1}{5}}\right)^{-2}\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{1}=\sqrt[10]{5}\in K$이므로 $\mathbb{Q}(\sqrt[10]{5})$는 K의 부분체.

* $\sqrt[10]{5}=5^{\frac{1}{10}}=\left(5^{\frac{1}{5}}\right)^{a}\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{b}$, $\dfrac{a}{5}+\dfrac{b}{2}=\dfrac{1}{10}$, $2a+5b=1$에서 $a=-2$, $b=1$

$\alpha=\zeta-\zeta^{-1}$, $\alpha^2=\zeta^2+\zeta^{-2}-2=(\zeta+\zeta^{-1})^2-4=\dfrac{-5-\sqrt{5}}{2}$, $\alpha^4+5\alpha^2+5=0$.

α를 근으로 갖는 $x^4+5x^2+5\in\mathbb{Q}[x]$는
소수 5에 대한 아이젠슈타인 판정에 따라 $\mathbb{Q}$ 위에서 기약이므로
$\mathrm{irr}(\alpha,\mathbb{Q})=x^4+5x^2+5$.

7. K는 $\mathbb{Q}$ 위의 24번째 원분확대체이므로
$K=\mathbb{Q}(\zeta)$, $|G(K/\mathbb{Q})|=\varphi(24)=8=\deg(\zeta,\mathbb{Q})$.
$G(K/\mathbb{Q})=\{\sigma_i \mid \sigma_i(\zeta)=\zeta^i, \gcd(i,24)=1, 1\le i\le\varphi(24)\}\cong\mathbb{Z}_{24}^*$이므로
$\mathrm{irr}(\zeta,\mathbb{Q})=\prod_{\sigma\in G(K/\mathbb{Q})}(x-\sigma(\zeta))=x^8-x^4+1$.

$\zeta^{24}=1$, $\zeta^{12}=-1$임을 이용하자.

$$\begin{aligned}\Phi_{24}(x)&=\prod_{\sigma\in G(K/\mathbb{Q})}(x-\sigma(\zeta))\in K[x]\ \text{(일차식의 곱)}\\&=(x-\zeta^1)(x-\zeta^5)(x-\zeta^7)(x-\zeta^{11})\\&\quad\times(x-\zeta^{13})(x-\zeta^{17})(x-\zeta^{19})(x-\zeta^{23})\in K[x]\\&=(x^2-\zeta^2)(x^2-\zeta^{10})(x^2-\zeta^{14})(x-\zeta^{22})\\&=(x^4-\zeta^4)(x^4-\zeta^{20})\\&=x^8+(\zeta^8-\zeta^4)x^4+1\\&=x^8-x^4+1\in\mathbb{Q}[x].\end{aligned}$$

(다른 설명)
$x^{24}-1=\Phi_1\Phi_2\Phi_3\Phi_4\Phi_6\Phi_8\Phi_{12}\Phi_{24}=(x^{12}-1)\Phi_8\Phi_{24}$이므로

$\Phi_{24}=\dfrac{x^{12}+1}{\Phi_8}=\dfrac{x^{12}+1}{\left(x^8-1/\Phi_1\Phi_2\Phi_4\right)}=\dfrac{(x^4)^3+1}{x^4+1}=x^8-x^4+1$.

* $\zeta+\zeta^{-1}=2\cos\dfrac{\pi}{12}$.

* $\sigma_{23}(\zeta)=\zeta^{23}=\zeta^{-1}$, $\sigma_{23}(\zeta+\zeta^{-1})=\zeta+\zeta^{-1}$이므로 $\mathbb{Q}(\zeta+\zeta^{-1})\subset K_{\langle\sigma_{23}\rangle}$

8. 가정에 의해 $a-bi\in K$이므로 $a\in K$, $K=\mathbb{Q}(a)(a+bi)$이다.
갈루아 정리에 따라 $[K:\mathbb{Q}(a)]=\deg(x^2-2ax+a^2+b^2)=2=|G(K/\mathbb{Q}(a)|$.
$G(K/\mathbb{Q}(a))<G(K/\mathbb{Q})$이므로 라그랑지 정리에 따라 $G(K/\mathbb{Q})$의 위수는 짝수.

$G(K/\mathbb{Q})$는 가환이므로 $G(\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q})$의 위수 $\dfrac{m}{d}$인 정규부분군 H있다.
갈루아 정리에 따라 $\mathbb{Q}(a)_H$는 $\mathbb{Q}$위의 확대차수 d인 갈루아 확대이며,
원시원소정리에 따라 $\mathbb{Q}(a)_H=\mathbb{Q}(\gamma)$인 $\gamma\in\mathbb{Q}(a)\subset\mathbb{R}$ 있다.
따라서 문제에서 요구하는 $\mathrm{irr}(\gamma,\mathbb{Q})$있다.

* $H=G(\mathbb{Q}(a)/F)$, $\mathbb{Q}(a)_H=\mathbb{Q}(a)_{G(\mathbb{Q}(a)/F)}=F$ (갈루아정리)
* 부분체의 차수와 부분군의 위수는 "역대응"한다.
* 라그랑지 정리의 역은 가환군일 때 성립한다.

9. $f(x)$의 한 근 $\alpha\in\mathbb{C}$ 택하자. (대수학의 기본정리)
$\mathbb{Q}\subset\mathbb{Q}(\alpha)\subset K$, $\mathrm{G}(K/\mathbb{Q})$는 아벨군이다.
따라서 $\mathrm{G}(K/\mathbb{Q}(\alpha))$는 $\mathrm{G}(K/\mathbb{Q})$의 정규부분군이므로
갈루아 정리에 의해 $\mathbb{Q}\subset\mathbb{Q}(\alpha)$는 갈루아 확대이며,
$f(x)$는 $\mathbb{Q}(\alpha)[x]$에서 일차식의 곱으로 인수분해된다.
그러므로 $K\subset\mathbb{Q}(\alpha)$, $K=\mathbb{Q}(\alpha)$.

* 다른 풀이
$\mathbb{Q}$-기약다항식 $f(x)$의 한 근 $\alpha\in\overline{\mathbb{Q}}$ 택하면 $\mathbb{Q}(\alpha)\subset K$.
$\mathbb{Q}\subset K$는 갈루아 확대체(분해체)이므로
$f(x)=\prod_{\sigma\in\mathrm{G}(K/\mathbb{Q})}(x-\sigma(\alpha))\in K[x]$라 쓸 수 있다.
($\Leftrightarrow$ 일차식의 곱으로 인수분해된다.)
$\mathrm{G}(K/\mathbb{Q})$의 (임의의) 원소 σ와 $\mathrm{G}(K/\mathbb{Q}(\alpha))$의 원소 τ일 때,
$\mathrm{G}(K/\mathbb{Q})$는 가환이므로
$(\sigma\circ\tau)(\alpha)=\sigma(\tau(\alpha))=\sigma(\alpha)=(\tau\circ\sigma)(\alpha)=\tau(\sigma(\alpha))$.
따라서 $\sigma(\alpha)\in\mathbb{Q}(\alpha)$가 되어(모든 근을 포함하므로)
$f(x)\in\mathbb{Q}(\alpha)[x]$이 되며, $K\subset\mathbb{Q}(\alpha)$, $K=\mathbb{Q}(\alpha)$.

갈루아 정리에 의해 $|\mathrm{G}(K/\mathbb{Q})|=[K:\mathbb{Q}]=[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]=\deg f(x)$.
$\deg f(x)=2018$이면 유한가환군의 기본정리에 따라 $\mathrm{G}(K/\mathbb{Q})\cong\mathbb{Z}_{2018}$이므로
갈루아 정리에 의해 K의 모든 부분체의 개수는 $\mathbb{Z}_{2018}$의 부분군의 개수 4.

10. $[F:\mathbb{Q}]=50$
$\sigma(\alpha+\alpha^{-1})=\alpha+\alpha^{-1}$이므로 $\mathbb{Q}\subset F\subset K_{\langle\sigma\rangle}$.
"$\alpha+\alpha^{-1}\notin\mathbb{Q}$이므로" $F=K_{\langle\sigma\rangle}$.
$\therefore$ $[F:\mathbb{Q}]=[K_{\langle\sigma\rangle}:\mathbb{Q}]=\dfrac{[K:\mathbb{Q}]}{[K:K_{\langle\sigma\rangle}]}=\dfrac{100}{|\sigma|}=50$.

(다른 풀이)

$\sigma(\alpha)=\alpha^{-1}$이므로 $\mathrm{irr}(\alpha,\mathbb{Q})=\mathrm{irr}(\alpha^{-1},\mathbb{Q})=f(x)$.
K는 분해체이므로 $f(x)$는 $K[x]$에서 일차식들의 곱.
즉, $K[x]$에서 $f(x)=(x-\alpha)(x-\alpha^{-1})\cdot\cdots$
$=(x^2-(\alpha+\alpha^{-1})x+1)\cdot\cdots$
$x^2-(\alpha+\alpha^{-1})x+1\in F[x]$, $(x-\alpha)(x-\alpha^{-1})\notin F[x]$

$K\supset F\supset\mathbb{Q}$, $K\supset F(\alpha)\supset\mathbb{Q}(\alpha)=K$이므로 $K=F(\alpha)$.
이차다항식 $x^2-(\alpha+\alpha^{-1})x+1\in F[x]$의 두 근 α, $\alpha^{-1}\notin F$.
따라서 $[K:F]=[F(\alpha):F]=\deg(\alpha,F)=2$.

$\sigma(\alpha+\alpha^{-1})=\alpha+\alpha^{-1}$이므로 $F\subset K_{\langle\sigma\rangle}$.
$K_\sigma\subset K$는 갈루아 확대이므로 갈루아 정리에 의해
$[K:K_{\langle\sigma\rangle}]=|\mathrm{G}(K/K_{\langle\sigma\rangle})|=|\sigma|=2=[K:F]$이므로 $F=K_{\langle\sigma\rangle}$.
구하는 값 $[F:\mathbb{Q}]=\dfrac{[K:\mathbb{Q}]}{[K:K_{\langle\sigma\rangle}]}=\dfrac{100}{2}=50$.

* $\alpha=i=e^{\frac{\pi}{2}i}=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$일 때, $\alpha+\alpha^{-1}=0$,
$F=\mathbb{Q}(\alpha+\alpha^{-1})=\mathbb{Q}$, $K=\mathbb{Q}(i)$.

* $\alpha=e^{\frac{2\pi i}{n}}=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$일 때, $\dfrac{\alpha+\alpha^{-1}}{2}=\cos\dfrac{2\pi}{n}$.
이때, $n=125$이면 K는 $\mathbb{Q}$위의 확대차수 100인 125번째 원분확대체.

11. $E=\mathbb{Q}(a_1,a_2,\cdots,a_r)$라 하면 $E\subset F$.
$\mathrm{irr}(\alpha,F)\in E[x]$는 $F[x]$에서 기약이므로 부분환 $E[x]$에서도 기약이다.
따라서 $\mathrm{irr}(\alpha,F)=\mathrm{irr}(\alpha,E)$, $\deg(\alpha,F)=\deg(\alpha,E)$, 즉 $[F(\alpha):F]=[E(\alpha):E]$.
$K=\mathbb{Q}(\alpha)=F(\alpha)=E(\alpha)$이므로 $[K:F]=[K:E]$.
따라서 $[F:E]=1$, $E=F$.

$x^2-2\sqrt{2}x+3\in F[x]$는 실근을 갖지 않고 $F\subset\mathbb{R}$이므로 F에서 기약이다.

12. $\sqrt{2}$를 포함하는 K의 부분체 F라 하면 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset F \subset K$.
가정에 의해 K는 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 위의 갈루아 확대체.
갈루아 정리에 따라 $[K : \mathbb{Q}(\sqrt{2})] = \dfrac{270}{\deg(\sqrt{2}, \mathbb{Q})} = 135 = |\mathrm{G}(K/\mathbb{Q}(\sqrt{2})|$이므로
$\mathrm{G}(K/\mathbb{Q}(\sqrt{2})) \cong \mathbb{Z}_{135}$이며, $\mathbb{Z}_{135}$의 부분군의 개수 8이므로 F의 개수는 8.

* 다른 설명
갈루아 정리에 따라
순환군 $\mathrm{G}(K/\mathbb{Q}) = \langle \sigma \rangle$의 부분군은 유일하므로 고정체 $K_{\langle \sigma^2 \rangle}$는 유일하게 존재.
$[K : K_{\langle \sigma^2 \rangle}] = |\langle \sigma^2 \rangle| = 135$, $[K_{\langle \sigma^2 \rangle} : \mathbb{Q}] = 2 = [\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}]$이므로 $K_{\langle \sigma^2 \rangle} = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
$\langle \sigma^2 \rangle = \mathrm{G}(K/K_{\langle \sigma^2 \rangle}) \cong \mathbb{Z}_{135}$이며, $\mathbb{Z}_{135}$의 부분군의 개수 8이므로
K와 $K_{\langle \sigma^2 \rangle}$ 사이의 중간체의 개수 8.

13.
* $x^9 + 3x^6 + 9x^3 + 1 \equiv (x^3+2)(x^3+3)(x^3+11) \pmod{13}$
* $f_{13}(x)$는 $\mathbb{Z}_{13}[x]$에서 기약다항식임이 알려져 있지 않다.

- $[K : \mathbb{Q}] = 9$

$\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3} \in K$이므로 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}) \subset K$.
$[K : \mathbb{Q}] \geq [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}) : \mathbb{Q}] = 9$,
$[K : \mathbb{Q}] = [K : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})][\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}]$
$= \deg(\sqrt[3]{3}, \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}))\deg(x^3 - 2)$
$\leq \deg(x^3 - 3) \cdot 3 = 9$.
그러므로 $[K : \mathbb{Q}] = 9$, 즉 $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3})$.

- $|\mathrm{G}(E/\mathbb{Q})| = 18$

$\alpha = \sqrt[3]{2}$, $\beta = \sqrt[3]{3}$, $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$에 대하여
$E = \mathbb{Q}(\alpha, \alpha\zeta, \alpha\zeta^2, \beta, \beta\zeta, \beta\zeta^2) = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \zeta) = K(\zeta) = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \sqrt{3}i)$.
$K \subset \mathbb{R}$이고 $x^2 + 3 \in K[x]$의 근 $\sqrt{3}i$는 실수가 아니므로 K에서 기약이다.
$\mathbb{Q} \subset E$는 분해, 분리확대이므로 갈루아 정리에 의해
$|\mathrm{G}(E/\mathbb{Q})| = [E : \mathbb{Q}] = [E : K][K : \mathbb{Q}]$
$= \deg(\sqrt{3}i, K)\deg(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}, \mathbb{Q})$
$= 2 \cdot 9 = 18$.

14. $\alpha = i\sqrt[6]{3}$, $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{6}} = e^{\frac{\pi i}{3}}$일 때 $x^6 + 3 = 0$의 모든 근 α, $\alpha\zeta$, $\alpha\zeta^2$, $\cdots$, $\alpha\zeta^5$.
$\zeta = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2} = \dfrac{1-\alpha^3}{2}$이므로 $K = \mathbb{Q}(\alpha, \alpha\zeta, \cdots, \alpha\zeta^5) = \mathbb{Q}(\alpha)$.
$\mathbb{Q} \subset K$는 분해, 분리확대체이므로 갈루아 정리에 의해
$|\mathrm{G}(K/\mathbb{Q})| = [K : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = \deg(\alpha, \mathbb{Q}) = 6$.

* $x^3 - 3$의 분해체 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \sqrt{3}i) = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{3}i)$
$\mathbb{Q}$위의 $x^3 - 3$의 분해체 $[\mathbb{Q}(\sqrt[6]{3}) : \mathbb{Q}] \leq 3!$,
$[\mathbb{Q}(\sqrt[6]{3}i) : \mathbb{Q}] = \deg(x^6 + 3) = 6$의 배수

15. ②
$F = x^{2^{60}} - x \in \mathbb{Z}_2[x]$의 분해체
$= \{x \in \overline{\mathbb{Z}_2} \mid x^{2^{60}} - x = 0\}$
$= \mathbb{Z}_2(\alpha)$, $\deg(\alpha, \mathbb{Z}_2) = 60$
$= \mathrm{GF}(2^{60})$
ㄱ. F의 표수는 2이므로 $\mathrm{char}K = 2$, $\mathbb{Z}_2 \subset K$.
ㄴ. $[K_1 : \mathbb{Z}_2] = 12$, $[K_2 : \mathbb{Z}_2] = 6$.
K_2의 모든 원소는 $x^{2^{12}} - x$의 해가 되므로 $K_2 \subset K_1$.
ㄷ. $[K_1 : \mathbb{Z}_2] = 10$, $[K_2 : \mathbb{Z}_2] = 6$,
$[K_1 \cap K_2 : \mathbb{Z}_2] = \gcd(10, 6) = 2$에서 $K_1 \cap K_2 = \mathrm{GF}(2^2) \neq \mathbb{Z}_2$.
* $K_1 \cap K_2 = \{x \in \overline{\mathbb{Z}_2} \mid \gcd(x^{2^{10}} - x, x^{2^6} - x) = 0\}$
$= \{x \in \overline{\mathbb{Z}_2} \mid x^{2^2} - x = 0\}$.
* ㄷ의 다른 설명
$\sigma(x) = x^2$인 생성원 $\sigma \in \mathrm{G}(F/\mathbb{Z}_2)$일 때, $K_1 = F_{\langle \sigma^{10} \rangle}$, $K_2 = F_{\langle \sigma^6 \rangle}$.
$K_1 \cap K_2 = \{x \in F \mid \sigma^{10}(x) = x, \sigma^6(x) = x\}$
$= \{x \in F \mid x^{2^{10}} = x, x^{2^6} = x\}$
$= \{x \in F \mid x^{2^2} = x\}$
$= F_{\langle \sigma^2 \rangle} \neq \mathbb{Z}_2$.

16. ④
① $|F| = |\mathbb{Z}_2|^6 = 2^6 = 64$.
② $\varphi_\alpha(0) = 0$이므로 $\ker(\varphi_\alpha) \neq \varnothing$.
u, $v \in \ker(\varphi_\alpha)$에 대하여 $\varphi_\alpha(u - v) = (u - v)(\alpha) = u(\alpha) - v(\alpha) = 0$이므로
$\ker(\varphi_\alpha)$는 $\mathbb{Z}_2[x]$의 덧셈부분군.
$f(x) \in \ker(\varphi_\alpha)$, $g(x) \in \mathbb{Z}_2[x]$일 때
$\varphi_\alpha(f(x)g(x)) = f(\alpha)g(\alpha) = 0 \cdot g(\alpha) = 0$이므로 $f(x)g(x) \in \ker(\varphi_\alpha)$.
따라서 $\ker(\varphi_\alpha)$는 $\mathbb{Z}_2[x]$의 아이디얼이다.
$\mathbb{Z}_2[x]$는 PID이므로 $\ker(\varphi_\alpha)$는 $\mathbb{Z}_2[x]$의 주아이디얼.
* $\ker(\varphi_\alpha) = \langle \mathrm{irr}(\alpha, \mathbb{Z}_2) \rangle$.
③ F는 $x^{2^6} - x \in \mathbb{Z}_2[x]$의 분해체이므로 $\alpha^{2^6} - \alpha = 0$.
따라서 $\mathrm{irr}(\alpha, \mathbb{Z}_2)$는 $x^{64} - x$를 나눈다.
④ 그런 $\alpha \in F$있다 하자. $\mathbb{Z}_2 \subset \mathbb{Z}_2(\alpha) \subset F$,
$[F : \mathbb{Z}_2] = 6 = [F : \mathbb{Z}_2(\alpha)][\mathbb{Z}_2(\alpha) : \mathbb{Z}_2]$
$= [F : \mathbb{Z}_2(\alpha)]\deg(\alpha, \mathbb{Z}_2)$
$= 4 \cdot [F : \mathbb{Z}_2(\alpha)]$, 모순.
⑤ 동형 정리에 의해 $\mathbb{Z}_2(\alpha) = \mathrm{im}(\varphi_\alpha) \cong \mathbb{Z}_2[x]/\ker(\varphi_\alpha)$,
$\ker(\varphi_\alpha)$는 $\mathbb{Z}_2[x]$의 극대아이디얼이므로 $\mathrm{im}(\varphi_\alpha)$는 F의 부분체이다.

17. $R[x]$는 PID이고 x는 소원이므로 $\langle x \rangle$는 극대아이디얼이다.
따라서 $R[x]/\langle x \rangle \cong R[0] = R$은 체.

* 다른 풀이
다항식 환 $R[x]$가 주 아이디얼 정역이면 R는 체
$R \subset R[x]$가 정역이므로 R은 단위원 1을 갖는 가환환.
R의 0아닌 원소가 단원임을 보이면 충분하다.

$a \neq 0$인 $a \in R$라 하자.
아이디얼 $I = \langle a \rangle + \langle x \rangle = \langle a, x \rangle = \langle f(x) \rangle$인 $f(x) \in R[x]$있다.
$a \in I$이므로 $a = f(x)g(x)$인 $g(x) \in R[x]$있다.
양변 차수비교하면 $0 = \deg a = \deg f(x) + \deg g(x)$에서 $f(x) \in R - \{0\}$.
한편 $x \in I$이므로 $x = f(x)h(x)$인 $h(x) \in R[x]$있다.
양변 일차항 계수를 비교하자.
$h(x)$의 1차항 계수를 $h \in R$라 할 때 $h \cdot f(x) = 1$.
따라서 $1 = h \cdot f(x) \in I$.
이때 $1 = a \cdot p(x) + x \cdot q(x)$인 $p(x)$, $q(x) \in R[x]$있다.
양변 $x = 0$ 대입하면 $1 = a \cdot p(0)$. 따라서 $a \in U(R)$.
그러므로 R은 체이다.

18. ⑤

$|K| = \deg f(x) = p^4$, $[K : \mathbb{Z}_p] = \log_p p^4 = 4 = |\mathrm{G}(K/\mathbb{Z}_p)|$,

$\mathrm{G}(K/\mathbb{Z}_p) = \langle \sigma_p \rangle \cong (\mathbb{Z}_4, +)$, $\sigma_p : K \to K$, $\sigma_p(x) = x^p$.

$(K^*, \times) = \langle \alpha \rangle$, α는 $f(x)$의 0아닌 근.

$\mathbb{Z}_p \subset K$는 분해, 분리, 유한 확대체(유한정규확대체)이므로 갈루아 정리 적용.

ㄱ. $0^{p^4} = 0$, 0 아닌 원소 $\alpha \in K$, $\alpha^{p^4 - 1} = 1$, $\alpha^{p^4} = \alpha$

그러므로 모든 $\alpha \in K$에 대하여 $\alpha^{p^4} = \alpha$.

ㄴ. $\mathbb{Z}_4$의 비자명 진부분군은 1개 있으므로

갈루아 정리에 의해 $\mathbb{Z}_p \subsetneq L \subsetneq K$인 중간체 L은 1개.

* $L = K_{\langle \sigma_p^2 \rangle}$, $\mathbb{Z}_p = K_{\langle \sigma_p^4 \rangle}$, $K = K_{\langle \sigma_p \rangle} = K_{\mathrm{G}(K/\mathbb{Z}_p)}$.

ㄷ. 옳다.

19.

(Ⅰ) $\psi_\alpha(\sigma) \in \mathbb{Z}_p$, $K = \mathbb{Z}_p(\alpha)$

표수 p인 유한체 $\mathbb{Z}_p = \{x \in K \mid x^{p^1} - x = 0\}$이고 $\sigma \in G(K/\mathbb{Z}_p)$에 대하여

$[\psi_\alpha(\sigma)]^p - \psi_\alpha(\sigma)$

$= [\sigma(\alpha) - \alpha]^p - [\sigma(\alpha) - \alpha]$

$= [\sigma(\alpha) - \alpha] - [\sigma(\alpha) - \alpha]$

$= 0$이므로

$\psi_\alpha(\sigma) = \sigma(\alpha) - \alpha$는 $x^p - x \in \mathbb{Z}_p[x]$의 근, 즉 $\psi_\alpha(\sigma) \in \mathbb{Z}_p$.

$k \in \mathbb{Z}_p$에 대하여

$f(\alpha + k) = (\alpha + k)^p - (\alpha + k) - a$

$= \alpha^p + k^p - \alpha - k - a$

$= \alpha^p - \alpha - a + k - k$

$= \alpha^p - \alpha - a = 0$이므로 $\alpha + k$는 $f(x)$의 해이다.

따라서 $f(x)$의 분해체 $K = \mathbb{Z}_p(\alpha, \cdots, \alpha + p - 1) = \mathbb{Z}_p(\alpha)$.

(Ⅱ) $\psi_\alpha : G(K/\mathbb{Z}_p) \to (\mathbb{Z}_p, +)$는 군-동형사상

σ, $\tau \in G(K/\mathbb{Z}_p)$에 대하여 $f(\sigma(\alpha)) = 0 = f(\tau(\alpha))$이므로

$\tau(\alpha) = \alpha + k$인 $k \in \mathbb{Z}_p$있다.

$\psi_\alpha(\sigma \circ \tau) = (\sigma \circ \tau)(\alpha) - \alpha$

$= \sigma(\tau(\alpha)) - \tau(\alpha) + \tau(\alpha) - \alpha$

$= \sigma(\alpha + k) - (\alpha + k) + \tau(\alpha) - \alpha$

$= \sigma(\alpha) + k - \alpha - k + \psi_\alpha(\tau)$ ($\because$ σ는 $\mathbb{Z}_p$를 고정)

$= \psi_\alpha(\sigma) + \psi_\alpha(\tau)$이므로

ψ_α는 준동형사상이다.

$\sigma \in G(K/\mathbb{Z}_p)$에 대하여 $\psi_\alpha(\sigma) = 0 \Leftrightarrow \sigma(\alpha) = \alpha$이므로 $\sigma = \mathrm{id}$.

$\therefore$ $\ker \psi_\alpha = \{\mathrm{id}\}$, ψ_α는 단사이다.

$(\mathbb{Z}_p, +)$는 유한집합이므로 ψ_α는 전사이다.

그러므로 ψ_α는 군-동형사상이다.

(Ⅲ) $f(x)$의 두 근 α, β, $\psi_\alpha = \psi_\beta$

$\beta = \alpha + k$인 $k \in \mathbb{Z}_p$있다. 이때 $\beta - \alpha = k \in \mathbb{Z}_p$이므로

$\sigma(\beta - \alpha) = \sigma(\beta) - \sigma(\alpha) = \sigma(k) = k = \beta - \alpha$.

즉, $\sigma(\beta) - \beta = \sigma(\alpha) - \alpha$이므로 $\psi_\beta = \psi_\alpha$.

20. ⑤

ㄱ. $E = \mathbb{Q}(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{11}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{11})$,

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\alpha) \subset E$, E는 $\mathbb{Q}$위의 유한확대체이므로

$\mathbb{Q}(\alpha)$는 $\mathbb{Q}$위의 유한확대체이다. (유한차원 벡터공간)

$\mathbb{Q}(\alpha)$의 임의의 원소 β에 대하여 $\{1, \beta, \beta^3, \beta^4, \beta^5\}$은 $\mathbb{Q}$위에서 일차종속이므로

$a_0 + a_1\beta + \cdots + a_5\beta^5 = 0$인 모두는 0이 아닌 $a_i \in \mathbb{Q}$있다.

따라서 β는 $a_0 + a_1 x + \cdots + a_5 x^5 \in \mathbb{Q}[x]$의 해.

그러므로 $\mathbb{Q}(\alpha)$는 $\mathbb{Q}$위에서 대수적이다.

ㄴ. 그런 $\beta \in E$있다 하면 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\beta^2) \subset \mathbb{Q}(\beta) \subset E$이므로

$4 = [E : \mathbb{Q}] = [E : \mathbb{Q}(\beta)][\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}(\beta^2)][\mathbb{Q}(\beta^2) : \mathbb{Q}]$.

4의 표준분해 2^2이므로 홀수 소인수 없다. 모순.

ㄷ. $E = \mathbb{Q}(\gamma)$되는 $\gamma \in E$있다. (원시 원소 정리)

* $\gamma = \sqrt{2} + \sqrt{11}$

* 원시 원소 정리: 분리 가능, 유한 확대는 단순 확대

* 유한체와 표수 0인 체의 유한확대체는 단순 확대

21.

• R_3가 $\mathbb{Q}$의 확대체의 구조를 갖는다.

$f(x)$는 소수 3에 대한 아이젠슈타인 판정법에 의해 $\mathbb{Q}$ 위에서 기약이고, $\mathbb{Q}$는 체이므로 $\mathbb{Q}[x]$는 PID.

따라서 $(f(x))$는 극대아이디얼이므로 R_3는 체이다.

환준동형사상 $\varphi : \mathbb{Q} \to R_3$, $\varphi(q) = q + (f(x))$에 대하여 $\varphi(q) = \varphi(q)$이면

$p - q \in (f(x))$이므로 $p - q = 0$, $p = q$, φ는 단사.

따라서 R_3는 $\mathbb{Q}$의 확대체의 구조를 갖는다.

• 다항식 $f(x)$의 근의 존재성

① $f(x)$는 $R_1[x]$에서 기약이므로 1차 인수를 갖지 않는다. R_1에 근 없다.

② $f(x) \in R_2[x]$는 대수학의 기본정리에 따라 근 있다. (중복포함 6개)

③ $\alpha = x + (f(x))$라 하면

$f(\alpha) = \alpha^6 + 12\alpha^4 - 3\alpha^3 - 108\alpha^2 + 24\alpha - 120 = f(x) + (f(x)) = 0 + (f(x)) = \overline{0}$.

R_3에 $f(x)$의 근 있다.

④ $f(x) = x^6 - x^3 = x^3(x-1)(x^2 + x + 1) \in \mathbb{Z}_2[x]$의 근 $x = 0$, 1 있다.

$\mathbb{Z}_2 \le F$이므로 $f(x)$는 $R_4 = \mathrm{GF}(2^{1024}) = \mathrm{SF}(x^{2^{1024}} - x / \mathbb{Z}_2)$에 근 있다.

* $x^2 + x + 1 \,\big|\, x^{2^2} - x \,\big|\, x^{2^{1024}} - x$이므로 $x^2 + x + 1$의 모든 근 R_4에 있다.

* f는 R_4에 중복포함 6개 근 있다.

22. ③

* $[K : \mathbb{Z}_3] = 6$이므로 $|K| = |\mathbb{Z}_3|^6 = 3^6$ (벡터공간)

ㄱ. K는 $x^{3^6} - x \in \mathbb{Z}_3[x]$의 분해체이다.

* K는 $\mathbb{Z}_3[x]$의 6차 기약다항식으로도 만들 수 있다.

ㄴ. $f(x) = x^{3^6} - x$, $\gcd(f(x), f'(x)) = 1$이므로 옳다.

ㄷ. $\sigma : K \to K$, $\sigma(\alpha) = \alpha^3$인 $\alpha \in \mathrm{G}(K/\mathbb{Z}_3)$에 대하여 $\mathrm{G}(K/\mathbb{Z}_3) = \langle \sigma \rangle \cong \mathbb{Z}_6$.

$\mathbb{Z}_6$의 위수 2인 부분군은 유일(1개)하므로 갈루아 정리에 의해

$|\mathrm{G}(K/E)| = 2$가 되는 체 E는 1개 있다.

* 순환군 $\mathrm{G}(K/\mathbb{Z}_3)$의 원소 σ^3일 때, $H = \langle \sigma^3 \rangle$에 의한 K의 고정체 K_H에 대하여 갈루아 정리에 의해 $\mathrm{G}(K/K_H) = H$, $[K : K_H] = |\mathrm{G}(K/K_H)| = |H| = 2$.

* $F \subset K$: 분해, 분리, 유한(정규확대) $\Rightarrow$ $[K : F] = |\mathrm{G}(K/F)|$

23.

㉠: 참

$x,\ y \in F$에 대하여 $\sigma_p(x+y)=(x+y)^p=x^p+y^p=\sigma_p(x)+\sigma_p(y)$,

$\sigma_p(xy)=(xy)^p=x^py^p=\sigma_p(x)\sigma_p(y)$이므로 σ_p는 환-준동형사상이다.

$\sigma_p(x)=0 \Leftrightarrow x^p=0 \Leftrightarrow x=0$이므로 σ_p: 단사, F는 유한집합이므로 σ_p: 전사.

그러므로 σ_p는 환동형사상이다.

㉡: 거짓

모든 $x \in \mathbb{Z}_p$에 대하여 $\sigma_p(x)=x^p=x$이다.

$(\because)$ $x \in \mathbb{Z}_p$일 때 $x=0$이면 $0^p=0$이고, $x \neq 0$일 때 페르마 정리에 의해 $x^{p-1}=1,\ x^p=x$.

모든 $x \in \mathbb{Z}_p$에 대하여 $x^p=x$, 즉 $\sigma_p(x)=x$.

㉢: 참

$$\begin{aligned} f(\alpha^p) &= a_n\alpha^{pn}+a_{n-1}\alpha^{p(n-1)}+\cdots+a_1\alpha^p+a_0 \\ &= \sigma_p(a_n)\sigma(\alpha^n)+\cdots+\sigma_p(a_0) \\ &= \sigma_p(a_n\alpha^n+\cdots+a_0) \\ &= \sigma_p(f(\alpha))=\sigma_p(0)=0. \end{aligned}$$

즉 $f(\sigma_p(\alpha))=0$.

㉣: 참

$F^*=\langle \alpha \rangle$, $\mathrm{ord}(\alpha)=|F^*|=p^n-1$이므로

$\alpha,\ \alpha^p,\ \alpha^{p^2},\ \cdots,\ \alpha^{p^{n-1}}$은 서로 다른 n개의 원소이고

$k=0,\ \cdots,\ n-1$에 대하여 $\mathrm{ord}(\alpha^{p^k})=\dfrac{\mathrm{ord}(\alpha)}{\gcd(\mathrm{ord}(\alpha),p^k)}=p^n-1$이므로

$\alpha,\ \alpha^p,\ \alpha^{p^2},\ \cdots,\ \alpha^{p^{n-1}}$은 F^*의 생성원이다.

* $(-1)\cdot[p^n-1]+(p^{n-k})\cdot p^k=1$

$\sigma_p(\alpha^{p^k})=\sigma_p^k(\alpha)$이므로 $f(\alpha^{p^k})=\sigma_p(f(\alpha^{p^{k-1}}))=\cdots=\sigma_p^k(f(\alpha))=\sigma_p^k(0)=0$.

그러므로 α^{p^k}은 $f(x)$의 근이다.

24. ④

프로베니우스 동형사상 $\sigma_2: E \to E,\ \sigma_2(x)=x^2$에서

$\alpha \in E=\mathrm{GF}(2^3)$가 기약다항식 $f(x)$의 근이므로 $\sigma_2(\alpha),\ \sigma_2^2(\alpha)$도 $f(x)$의 근.

즉, $\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^4=\alpha^2-\alpha+1$은 $f(x)$의 모든 근.

$\{\alpha+\beta,\ \alpha+\gamma\}=\{\alpha^2+\alpha,\ \alpha^2+1\}$

* $x^3+x^2+1=(x-\alpha)(x-\alpha^2)(x-\alpha^2+\alpha-1)$

* 근과 계수와의 관계

① $\alpha+\beta+\gamma=-1=1$.

② $\alpha\beta\gamma=\alpha^7=1,\ \alpha^{-1}=\alpha^6$.

* $E=\langle 1,\alpha,\alpha^2 \rangle_{\mathbb{Z}_2}$, $(E^*,\times)=\langle \alpha \rangle \cong (\mathbb{Z}_7,+)$

* 성질

① $\mathrm{char}F=p$, $\sigma_p: F \to F$, $\sigma_p(u)=u^p$는 환동형사상

특히, $\{u^p \mid u \in F\}=F$

환-동형사상 σ_p: 유한체 F의 Frobenius 동형사상

② 기약다항식 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_0 \in \mathbb{Z}_p[x]$일 때,

(i) $\sigma_p(f(x))=f(x)^p=a_n(x^p)^n+\cdots+a_0$

$\qquad =f(x^p)=f(\sigma_p(x))$

(ii) $u \in F$가 $f(u)=0$이면 $\sigma_p(u)$도 $f(x)$의 근

($\sigma_p(x) \in F$가 $f(x)$의 근, $\sigma_p^2(u)$도 근, $\cdots$)

25.

25-1.

- (가)의 증명

$\beta_1=a_1+b_1\sqrt{2}+c_1\sqrt{3}+d_1\sqrt{6}$, $\beta_2=a_2+b_2\sqrt{2}+c_2\sqrt{3}+d_2\sqrt{6} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2},\ \sqrt{3})$,

$p,q \in \mathbb{Q}$에 대하여 벡터합 $+$, 스칼라곱 $\times$를

$$\beta_1+\beta_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{2}+(c_1+c_2)\sqrt{3}+(d_1+d_2)\sqrt{6}$$

$$p\times\beta_1=pa_1+pb_1\sqrt{2}+pc_1\sqrt{3}+pd_1\sqrt{6}$$

라 정의하자.

$\mathbb{Q}(\sqrt{2},\ \sqrt{3})$은 단위원 1을 갖는 가환환이며,

임의의 0아닌 원소가 곱셈 역원을 갖고,

$p\times(\beta_1+\beta_2)=p\beta_1+p\beta_2$, $(p+q)\times\beta_1=p\beta_1+q\beta_1$이므로

$\mathbb{Q}(\sqrt{2},\ \sqrt{3})$은 $\mathbb{Q}$ 위의 벡터공간이다.

- (나)의 증명

$\beta_1,\ \beta_2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2},\ \sqrt{3})$, $p,\ q \in \mathbb{Q}$에 대하여

$T(p\beta_1+q\beta_2)=\alpha(p\beta_1+q\beta_2)=p\alpha\beta_1+q\alpha\beta_2=pT(\beta_1)+qT(\beta_2)$이므로

T는 선형사상이다.

- $A=\begin{pmatrix} 0&2&3&0 \\ 1&0&0&3 \\ 1&0&0&2 \\ 0&1&1&0 \end{pmatrix}$

$T(1)=\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $T(\sqrt{2})=2+\sqrt{6}$, $T(\sqrt{3})=3+\sqrt{6}$, $T(\sqrt{6})=3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$.

$A=\begin{pmatrix} 0&2&3&0 \\ 1&0&0&3 \\ 1&0&0&2 \\ 0&1&1&0 \end{pmatrix}$, 고유다항식 $x^4-10x^2+1=f(x)$

케일리-해밀턴 정리에 의해

$$\mathbf{0}=(T^4-10T^2+I)(\beta)=(\alpha^4-10\alpha^2+1)\beta=f(\alpha)\beta,\ \ \forall \beta \in \mathbb{Q}(\sqrt{2},\ \sqrt{3})$$

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2},\ \sqrt{3})$이므로

$$\begin{aligned} [\mathbb{Q}(\sqrt{2},\ \sqrt{3}):\mathbb{Q}] &= [\mathbb{Q}(\sqrt{2},\ \sqrt{3}):\mathbb{Q}(\sqrt{2})][\mathbb{Q}(\sqrt{2}):\mathbb{Q}] \\ &\le \deg(x^2-3)\deg(x^2-2)=4. \end{aligned}$$

$\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{2},\ \sqrt{3})$이므로 $\mathbb{Q}(\alpha) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2},\ \sqrt{3})$,

$[\mathbb{Q}(\sqrt{2},\ \sqrt{3}):\mathbb{Q}]=[\mathbb{Q}(\sqrt{2},\ \sqrt{3}):\mathbb{Q}(\alpha)][\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$

$f(x) \in \mathbb{Q}[x]$는 기약이므로 $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]=\deg f(x)=4$.

이때 $[\mathbb{Q}(\sqrt{2},\ \sqrt{3}):\mathbb{Q}(\alpha)]=1$이 되므로 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\ \sqrt{3})$이다.

* $f(x)$는 $\mathbb{Q}[x]$에서 (1차식들의 곱) or (2차식)×(2차식)으로 나타낼 수 없다.

25-2.

- $\alpha=1+\sqrt{2}$일 때 행렬표현과 다항식과 차수

행렬 표현 $A=\begin{pmatrix} 1&2&0&0 \\ 1&1&0&0 \\ 0&0&1&2 \\ 0&0&1&1 \end{pmatrix}$, 고유다항식 $(x^2-2x-1)^2$.

α를 근으로 갖는 기약 다항식 $f(x)=x^2-2x-1 \in \mathbb{Q}[x]$.

$[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]=\deg f(x)=2$, $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}):\mathbb{Q}]=4$.

따라서 $\mathbb{Q}(\alpha) \subsetneq \mathbb{Q}(\sqrt{2},\ \sqrt{3})$.

- 유한확대체는 대수적확대체

$F \subset K$가 유한확대체라 하자.

$\alpha \in K$에 대하여 선형사상 $T: K \to K$, $T(v)=\alpha v$라 정의하자.

T의 고유다항식 $f(x) \in K[x]$일 때, $f(\alpha)=0$이므로 α는 F 위에서 대수적이다.

따라서 $F \subset K$는 대수적확대체.

26. $f(x)$는 소수 2에 대한 아이젠슈타인 판정에 의해 $\mathbb{Q}[x]$에서 기약이다.
$[\mathbb{Q}(\theta):\mathbb{Q}]=\deg f(x)=3$, $\{1,\theta,\theta^2\}_{\mathbb{Q}}$는 $\mathbb{Q}(\theta)$기저.
$(3+\theta)^{-1}=a+b\theta+c\theta^2$라 하면
$1=(3+\theta)(a+b\theta+c\theta^2)=3a+(3b+a)\theta+(3c+b)\theta^2+c\theta^3$
$=(3a-2c)+(3b+a+2c)\theta+(3c+b)\theta^2$에서
$$3a-2c=1,\ 3b+a+2c=0,\ 3c+b=0.$$
즉 $a=\frac{7}{19}$, $b=-\frac{3}{19}$, $c=\frac{1}{19}$, $(3+\theta)^{-1}=\frac{7}{19}-\frac{3}{19}\theta+\frac{1}{19}\theta^2$.

* 다른 풀이
$\theta+3=\alpha$, $\theta=\alpha-3$, $f(\theta)=0$이므로 $\alpha^3-9\alpha^2+25\alpha-19=0$에서
$\alpha\cdot\frac{1}{19}(\alpha^2-9\alpha+25)=1$.
$\alpha^{-1}=(\theta+3)^{-1}=\frac{1}{19}(\alpha^2-9\alpha+25)$, $\alpha=3+\theta$이므로 $\alpha^{-1}=\frac{1}{19}(\theta^2-3\theta+7)$.

* 다른 풀이
$0=\theta^3-2\theta+2=(\theta^2-3\theta+7)(3+\theta)-19$이므로 $\alpha^{-1}=\frac{1}{19}(\theta^2-3\theta+7)$.

* $\deg(\theta,\mathbb{Q})$는 2의 거듭제곱이 아니므로 θ 작도 불가능.

27. x^2+1의 해 $\pm i\notin\mathbb{Z}_3[x]$이므로 x^2+1은 기약.
* $\mathbb{Z}_3$에 제곱해서 $-1=2$되는 원소 없다.
$\mathbb{Z}_3[x]$는 PID이므로 $\mathbb{Z}_3[x]\langle x^2+1\rangle$는 위수 $3^2=9$인 체.
$F_9=\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2+1\rangle=\{a+bi\mid b\in\mathbb{Z}_3\}=\mathbb{Z}_3[i]$
$=\{0,1,2,i,1+i,2+i,2i,1+2i,2+2i\}$
$=\{0+I,1+I,\cdots,2+2x+I\}$, $I=\langle x^2+1\rangle$

* $F_9=\mathrm{GF}(3^2)=\left\{x\in\overline{\mathbb{Z}_3}\ \middle|\ x^{3^2}-x=0\right\}$, $(F_9^*,\ \cdot\ )=\langle\alpha\rangle$인 $\alpha\in F_9$있으므로
$F_9=\{0,1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^7\}$.

28. $f(x)$의 근 $\alpha\in\overline{F}$이 K에 포함된다 하자.
$F\subset F(\alpha)\subset K$, K는 F의 유한확대이므로
$10=[K:F]=[K:F(\alpha)][F(\alpha):F]=[K:F(\alpha)]\deg f(x)=3\cdot[K:F(\alpha)]$에서
$3\mid 10$, 모순. 이는 $\alpha\in K$ 가정한 데서 생긴 모순이다.
따라서 $f(x)$의 어떤 근도 K에 포함되지 않는다.
즉, $\langle f(x)\rangle$는 $K[x]$의 극대이데알이다.

* $F\subset F(\alpha)\subset K(\alpha)$, $F\subset K\subset K(\alpha)$.
* $f(x)\in F[x]\subset K[x]$, $f(\alpha)=0$이므로 $[K(\alpha):K]=\deg f(x)=3$.
* $[K(\alpha):F]=[K(\alpha):K][K:F]=3\cdot 10=30$.

29. $\langle p(x)\rangle\subset I\subset F[x]$인 $F[x]$의 아이디얼 I라 하자.
$F[x]$는 주아이디얼정역(PID)이므로
$$I=\langle f(x)\rangle=f(x)\cdot F[x]=\{f(x)g(x)\mid g(x)\in F[x]\}$$
인 $f(x)\in F[x]$있다. (주아이디얼: 배수들의 집합)
$p(x)\in I$이므로 $p(x)=f(x)g(x)$인 $g(x)\in F[x]$있다.
$p(x)$는 기약다항식이므로 $f(x)$ 또는 $g(x)$는 $F[x]$의 단원(상수)이다.
* $U(F[x])=U(F)=F^*=F\setminus\{0\}$
$f(x)\in F^*$이면 $I=F[x]$.
$g(x)\in F^*$이면 $f(x)=p(x)[g(x)]^{-1}\in\langle p(x)\rangle$, $I=\langle p(x)\rangle$.
따라서 $\langle p(x)\rangle$는 $F[x]$의 극대이데알이다.

30. 한 근 $\alpha\in\overline{F}$ 택하자. $F(\alpha)$는 α와 F를 포함하는 최소체이다.

* 다른 풀이
$F[x]$는 PID이므로 $\langle f(x)\rangle$는 $F[x]$의 극대이데알, $F[x]/\langle f(x)\rangle$는 체.
$\phi:F\to F[x]/\langle f(x)\rangle$, $\phi(a)=\overline{a}=a+\langle f(x)\rangle$라 하자.
ϕ는 환준동형사상, $\phi(a)=\phi(b)\Leftrightarrow\overline{a}=\overline{b}\Leftrightarrow a-b\in\langle f(x)\rangle$이므로 $a=b$.
ϕ는 단사, $F[x]/\langle f(x)\rangle$를 F의 확대체로 간주할 수 있다.

$\alpha=x+\langle f(x)\rangle\in F[x]/\langle f(x)\rangle$에 대하여 $f(\alpha)$를 구하면
$f(\alpha)=a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0$
$=(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0)+\langle f(x)\rangle$
$=f(x)+\langle f(x)\rangle=0+\langle f(x)\rangle=\overline{0}$.
따라서 $f(x)$의 근 α 포함하는 확대체 $F[x]/\langle f(x)\rangle$있다.

31. $\alpha\in E$라 하자. $F\subset F(\alpha)\subset E(\alpha)=E$는 유한확대이므로
$F\subset F(\alpha)$는 유한확대이다.
$[F(\alpha):F]=\deg(\alpha,F)<\infty$이므로 $\mathrm{irr}(\alpha,F)=f(x)\in F[x]$에 대하여 $f(\alpha)=0$.
그러므로 $F\subset E$는 대수적 확대.

* 다른 풀이
$\alpha\in E$, $[E:F]=n<\infty$라 하자.
E를 F의 벡터 공간이라 할 때, $n=\dim_F E$.
$\alpha^0=1$, α^1, α^2, $\cdots$, α^n은 $F-$일차 종속이므로
$$a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2+\cdots+a_n\alpha^n=0$$
인 모두는 0이 아닌 $a_i\in F(0\le i\le n)$있다.
$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1\alpha+a_0\in F[x]$, $f(\alpha)=0$.
따라서 α는 F 위에서 대수적이므로 E는 F위에서 대수적 확대체이다.

32. ③
$\sqrt[4]{3}\in\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt[4]{3})$, $3\in\mathbb{Q}$, $\sqrt{3}\in\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $\sqrt[4]{3}$은 작도가능.
$\deg(\sqrt[5]{3},\mathbb{Q})=\deg(x^5-3)=5$는 2의 거듭제곱이 아니므로
$\sqrt[5]{3}$은 작도 불가능.

33. ③
㉠ 위수 4인 군 $(\mathbb{Z}_4,+)$, V_4(클라인 4원군)$\cong(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,+)$
㉡ 위수 4인 환 $(\mathbb{Z}_4,+,\times)$, $(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,+,\times)$
$\mathrm{char}(\mathbb{Z}_4)=4$, $\mathrm{char}(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2)=2$
㉢ 위수 4인 유한체는 $\mathrm{GF}(2^2)$과 동형이다.
㉣ H가 정규부분군일 때 G/H의 연산이 잘 정의되어 잉여군을 생각할 수 있다.
㉤ S가 아이디얼일 때 잉여환 생각할 수 있다.
㉥ $V/W=\{v+W\mid v\in V\}$는 연산이 잘 정의된 상공간.

34. ③
$p=q=0$일 때 $x^3+1=0$의 실근 -1, 두 허근 $e^{\frac{\pi i}{3}}$, $e^{\frac{2\pi i}{3}}$.
구하는 값 $e^{\pi}=-1$.

35. ①
$D=a^2-a<0$일 때 즉, $0<a<1$일 때 허근 갖는다.
$x=-a\pm\sqrt{a^2-a}=-a\pm i\sqrt{a-a^2}:=w$, $\overline{w}$.
$w^3=-2aw^2-aw=-2a(-2aw-a)-aw$
$=2a^2+w(4a^2-a)$
$=2a^2+(4a^2-a)(-a+i\sqrt{a-a^2})$이 실수
$\Rightarrow 4a^2-a=0$, $a=\frac{1}{4}$.

[실해석학]

〈미적분학(편도함수 · 다중적분)〉

1.

$0=f(x,tx)$, $x=\dfrac{t^2}{t^4+1}$, $y=\dfrac{t^3}{1+t^4}$이므로 교점 $\left(\dfrac{t^2}{1+t^4}, \dfrac{t^3}{1+t^4}\right)$.

$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f(x,y)\le 0,\ y\ge 0\}$라 하자.

변수변환 $y=tx$.

$(x,y)\in D \Leftrightarrow 0\le x\le \dfrac{t^2}{1+t^4}$, $t\ge 0$,

야코비 행렬식 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(x,t)}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ t & x\end{vmatrix}=x$이므로

D의 넓이 $\displaystyle\iint_D 1dA=\int_0^\infty\int_0^{t^2/1+t^4} x\,dxdt$

$\displaystyle =\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{t^4}{(1+t^4)^2}dt$

$\displaystyle =\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{-t}{4(1+t^4)}\right]_0^\infty+\frac{1}{4}\int_0^\infty\frac{dt}{1+t^4}\right\}$

$\displaystyle =\frac{\sqrt{2}\pi}{32}$.

2. 1, 6ln2

$\displaystyle\iint_D dA=2\ln2=2\times\int_a^{a+1}\frac{dx}{x}=2\ln\left(\frac{a+1}{a}\right)$, $a=1$.

그린 정리에 따라 $\displaystyle\int_C(2x-y)dx+(2x-y)dy=3\times\iint_D dA=6\ln2$.

3. 8, 3π

$\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{(r')^2+r^2}\ d\theta$

$\displaystyle=\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)}\ d\theta$

$\displaystyle=\int_0^{2\pi}\left|2\sin\left(\frac{1}{2}\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right|\ d\theta$

$\displaystyle=4\times\int_{-\pi/6}^{5\pi/6}|\sin u|\ du$

$=8$.

$\displaystyle\int_\alpha \kappa ds$

$\displaystyle=\int_0^{2\pi}\frac{r^2+2(r')^2-rr''}{[r^2+(r')^2]^{3/2}}\cdot[r^2+(r')^2]^{1/2}\,d\theta$

$\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{r^2+2(r')^2-rr''}{(r')^2+r^2}\,d\theta$

$\displaystyle=\int_0^{2\pi}\frac{3}{2}\,d\theta$

$=3\pi$.

4.

극좌표 변환, $\displaystyle g(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\sqrt{|8r^2-1|}\cdot r\,dr\,d\theta=\frac{\pi}{48}(7^{3/2}+1)$.

변수 변환, $u=2(x+y)$, $v=2(x-y)$, $\dfrac{1}{J}=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-8$, $|J|=\dfrac{1}{8}$.

$(x,y)\in D(t) \Leftrightarrow -u\le v\le u$, $u^2+v^2\le 8$, $u\ge 2t$, $0\le t\le 1$.

$\displaystyle h(u)=\int_{-u}^{u}\sqrt{u^2+v^2-1}\ dv$라 하면 $\displaystyle g(t)=g(0)-\frac{1}{8}\int_0^{2t}h(u)du$.

$g'(t)=-\dfrac{1}{4}h(2t)$, $g'\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}\cdot h(1)=-\dfrac{1}{4}$.

5. $\dfrac{\pi}{2}(1+a)^4$, $\dfrac{43}{20}\pi$

극좌표 변환 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$라 하면

$\displaystyle\iint_{D(a)}(x^2+y^2)dA=\int_0^{2\pi}\int_0^{1+a}r^3drd\theta=2\pi\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^{1+a}=\frac{\pi}{2}(1+a)^4$.

$\displaystyle\iiint_\Omega z(x^2+y^2)dV=\int_0^1\iint_{D(z)}z(x^2+y^2)dx\,dy\,dz$

$\displaystyle=\int_0^1\frac{\pi}{2}z(1+z)^4dz$

$\displaystyle=\left[\frac{\pi}{10}z(1+z)^5\right]_0^1-\frac{\pi}{10}\int_0^1(1+z)^5dz$

$\displaystyle=\frac{32\pi}{10}-\frac{\pi}{60}\left[(1+z)^6\right]_0^1$

$\displaystyle=\frac{43}{20}\pi$.

(다른 설명)

$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $z=a$라 하면

야코비 행렬식 $J=\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,a)}\right|=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta & 0\\ \sin\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=r$이므로

$\displaystyle\iiint_\Omega z(x^2+y^2)dV=\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{1+a}ar^3\,dr\,d\theta\,da$

$\displaystyle=\int_0^1\frac{a(1+a)^4}{2}\pi\,da$

$\displaystyle=\int_1^2\frac{\pi}{2}(t-1)t^4\,dt$

$\displaystyle=\frac{43}{20}\pi$.

6. $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{4}{e}$

$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$라 하면

$\displaystyle g(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1(r^2+1)^t r\,drd\theta=\begin{cases}\dfrac{2^{t+1}-1}{t+1}, & t\ne -1\\ \ln2, & t=-1\end{cases}$, $g(-2)=\dfrac{1}{2}$,

로피탈 정리에 따라

$\displaystyle\lim_{t\to0}g(t)^{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to0}e^{\frac{\ln g(t)}{t}}=e^{\lim_{t\to0}\frac{\ln g(t)}{t}}=e^{\lim_{t\to0}\frac{g'(t)}{g(t)}}=e^{2\ln2-1}=\frac{4}{e}$.

7.

$\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\int_{\sqrt{1-y^2}}^y(-[x+y])\,dxdy=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\int_{\sqrt{1-y^2}}^y-1\,dxdy=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}$.

$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ 치환하면,

$\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\int_{\sqrt{1-y^2}}^y f(x,y)\,dxdy+\int_1^{\sqrt{2}}\int_0^y f(x,y)\,dxdy+\int_{\sqrt{2}}^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)\,dxdy$

$\displaystyle=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,drd\theta$

$\displaystyle=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2\cos^2\theta\,drd\theta=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$, 구하는 값 $\dfrac{\pi-3}{4}$.

8. $\dfrac{4}{5}$, $\dfrac{8}{5}$

$\displaystyle\int_0^1 x^{\frac{2}{3}}dx=\frac{3}{5}$이므로 D의 넓이는 $2\cdot\left(1-\dfrac{3}{5}\right)=\dfrac{4}{5}$.

그린 정리에 의해 선적분 값은 $\displaystyle\iint_{\mathrm{int}(C)\cup\mathrm{b}(C)}2dA=\frac{8}{5}$.

9. $\dfrac{\pi}{1-e^{-1}}$

$u=x-y,\ v=x,\ \dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1.\ \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=1,\ (x,y)\in D_n \Leftrightarrow u^2+v^2\le n$

$\iint_{D_n} e^{[(x-y)^2+x^2]}dxdy$

$=\iint_{u^2+v^2\le n} e^{-[u^2+v^2]}dA$

$=\iint_{0\le u^2+v^2<1} e^{-[u^2+v^2]}dA+\cdots+\iint_{n-1\le u^2+v^2<n} e^{-[u^2+v^2]}dA$

$=\iint_{0\le u^2+v^2<1} e^{-0}dA+\cdots+\iint_{n-1\le u^2+v^2<n} e^{-(n-1)}dA$

$=e^{-0}\pi+e^{-1}(2\pi-\pi)+\cdots+e^{-(n-1)}(n\pi-(n-1)\pi)$

$=\pi(1+e^{-1}+\cdots+e^{-(n-1)}).$

구하는 극한은 $\pi\cdot\dfrac{1}{1-e^{-1}}=\dfrac{\pi}{1-e^{-1}}.$

10. $e-e^{-1}$

$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2\end{vmatrix}=-1/2,\ (x,y)\in A \Leftrightarrow u+v\ge 0,\ u-v\ge 0,\ 1\le u\le 3$

$\iint_A \dfrac{1}{x+y}e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy=\int_1^3\int_{-u}^{u}\dfrac{1}{u}e^{\frac{v}{u}}\cdot\left|-\dfrac{1}{2}\right|dvdu$

$=\int_1^3\dfrac{1}{2}[e^{\frac{v}{u}}]_{-u}^{u}du=\int_1^3\dfrac{1}{2}(e^1-e^{-1})du=e-e^{-1}.$

11. $\sin 1$

$\iint_D 3\cos(x^3)dA=\int_0^1\int_0^{x^2}3\cos(x^3)dydx=\int_0^1 3x^2\cos(x^3)dx=\left[\sin(x^3)\right]_0^1=\sin 1.$

12. 16

$f_x=0=f_y$ 되는 $(x,y)=(2,2)$에서 $f(2,2)=4$

D의 경계 ∂D에서 $f(x,y)$의 함숫값을 조사하면

① $0\le x\le 4,\ y=0$에서 $0\le f(x,y)=4x\le 16$

② $x=0,\ 0\le y\le 4$에서 $0\le f(x,y)=y^2\le 16$

③ $0\le x,y\le 4,\ x+y=4$에서 $4\le f(x,y)=3y^2-12y+16\le 16$

최댓값 16, 최솟값 0, 구하는 값 16.

13. 8

$f=3x+ye^x,\ \nabla f=(3+ye^x,e^x)$이므로 선적분의 기본정리에 의해

$\int_C(3+ye^x)dx+e^xdy=\int_C\nabla f\cdot(dx,dy)=f(0,2)-f(-2,0)=8.$

* 다른 풀이(그린정리 적용)

$(0,2)$에서 $(-2,0)$을 잇는 선분 L라 하자.

L의 매개변수표현 $L(t)=(1-t)(0,2)+t(-2,0)=(-2t,2-2t),\ 0\le t\le 1$

$C+L$은 반시계방향 단순폐곡선이다.

$P=3+ye^x,\ Q=e^x$, 그린정리에 의해

$\int_{C+L}(3+ye^x)dx+e^xdy=\iint_{\mathrm{int}(C+L)}Q_x-P_y\,dA=0.$

$\int_C(3+ye^x)dx+e^xdy=-\int_L Pdx+Qdy$

$=-\int_0^1(3+(2-2t)e^{-2t})(-2dt)+e^{-2t}(-2dt)=8.$

14. 81

$\int_0^2\int_0^9 f(x,y)dydx+\int_0^2\int_0^{\sin\sqrt{x}}(y-\sin\sqrt{x})dydx$

$=\int_0^2\int_0^{\sin\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}\,dydx+\int_0^2\int_{\sin\sqrt{x}}^9 ydydx+\int_0^2\int_0^{\sin\sqrt{x}}(y-\sin\sqrt{x})dydx$

$=\int_0^2\int_0^9 ydydx=2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 9^2=81.$

15. 32π

$P=e^{\sin x}-4x^2y,\ Q=e^{\cos y}+4xy^2$라 할 때

C는 양의 방향 단순폐곡선이므로 그린 정리에 의해

$\int_{x^2+y^2=4}Pdx+Qdy$

$=\iint_{x^2+y^2\le 4}Q_x-P_y\,dA$

$=\iint_{x^2+y^2\le 4}4x^2+4y^2\,dA$

$=\int_0^{2\pi}\int_0^2 4r^2\cdot r\,drd\theta=2\pi\cdot 16=32\pi.$

16. $\dfrac{7}{4}$

$t=0$일 때 $x=0,\ y=f(0)=1,\ t=1$일 때 $x=3,\ y=f(3)=2.$

주어진 두 점을 연결하는 직선의 기울기는 $\dfrac{1}{3}$이므로

$\dfrac{1}{3}=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{2t}{4-2t}$에서 $t=\dfrac{1}{2}(x\ne\dfrac{1}{2}).$

$t=\dfrac{1}{2}$에서 $x=c=2-\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{4}.\ (y=\dfrac{5}{4})$

17. $\dfrac{1}{3}(1-\cos 1)$

$\sqrt{y}\le x\le 1,\ 0\le y\le 1 \Leftrightarrow 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x^2$이므로

$\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1 7y^2\sin(x^7)dx\,dy$

$=\int_0^1\int_0^{x^2}7y^2\sin(x^7)dydx$

$=\int_0^1\dfrac{7}{3}x^6\sin(x^7)dx$

$=\dfrac{7}{3}\cdot\dfrac{1}{7}\left[-\cos(x^7)\right]_0^1=\dfrac{1}{3}(1-\cos 1).$

18. ④

극좌표계를 활용하자. $(x,y)\in D \Leftrightarrow 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le r\le 1,\ J=r$

$\iint_D\dfrac{|y|}{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}dxdy$

$=\int_0^{2\pi}\int_0^1\dfrac{|r\sin\theta|}{\sqrt{r^2-4r\cos\theta+4}}\cdot r\,drd\theta$

$=2\cdot\int_0^1\int_0^{\pi}\dfrac{r^2\sin\theta}{\sqrt{r^2-4r\cos\theta+4}}d\theta dr$

$=2\cdot\int_0^1\dfrac{r}{2}\left(r^2-4r\cos\theta+4\right)^{1/2}\Big]_0^{\pi}dr$

$=\int_0^1 2r^2\,dr$

$=\dfrac{2}{3}.$

19. ②

구면좌표계 활용, $x=\rho\sin\phi\cos\theta,\ y=\rho\sin\phi\sin\theta,\ z=2\rho\cos\phi$라 하면

$(x,y,z)\in D \Leftrightarrow 0\le\rho\le 1,\ 0\le\phi\le\pi,\ 0\le\theta\le 2\pi$

$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)}=2\times\rho^2\sin\phi=2\rho^2\sin\phi$이므로

$\iiint_D z^2\,dx\,dy\,dz=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1(2\rho\cos\phi)^2\cdot\left|2\rho^2\sin\phi\right|d\rho d\phi d\theta$

$=2\pi\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\left[\cos^3\phi\right]_0^{\pi}\right)\cdot\dfrac{8}{5}=\dfrac{32}{15}\pi.$

20. ⑤

C는 반시계방향의 단순폐곡선이다.

$P=3+yx^2,\ Q=2-xy^2$라 할 때 그린 정리를 적용하면

$$\int_C (3+yx^2)dx+(2-xy^2)dy=\int_{x^2+y^2=4} Pdx+Qdy$$

$$=\iint_{\mathrm{int}\,C\cup C} Q_x-P_y\,dA=\iint_{x^2+y^2\le 4}(-x^2-y^2)dA$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^2 -r^2\cdot r\,drd\theta \text{ (극좌표 변환)}$$

$$=2\pi\cdot(-4)=-8\pi.$$

21. ③

$$\iint_R \sin\{(y-2x)^2\}dA=\int_{-\frac{1}{2}}^0\int_0^{2x+1}\sin\{(y-2x)^2\}dA$$

$x=u,\ y-2x=v$라 하면

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1\end{vmatrix}=1,$$

$$-\frac{1}{2}\le x\le 0,\ 0\le y\le 2x+1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le u\le 0,\ -2u\le v\le 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{v}{2}\le u\le 0,\ 0\le v\le 1\text{이므로}$$

$$\iint_R \sin\{(y-2x)^2\}dA$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^0\int_{-2u}^1 \sin(v^2)\cdot\left|\frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}\right|dvdu$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^0\int_{-2u}^1 \sin(v^2)dvdu$$

$$=\int_0^1\int_{-\frac{v}{2}}^0 \sin(v^2)dudv$$

$$=\int_0^1 \frac{v}{2}\sin(v^2)dv$$

$$=\left[-\frac{1}{4}\cos(v^2)\right]_0^1=\frac{1}{4}(1-\cos 1).$$

22. $2\ln 2$

$xy=u,\ xy^2=v$라 하자. $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y & x \\ y^2 & 2xy\end{vmatrix}=xy^2=v$

$$\iint_A ydA=\int_1^2\int_1^3 \frac{v}{u}\cdot\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dvdu=\int_1^2\int_1^3\frac{v}{u}\cdot\frac{1}{v}\,dvdu=2\ln 2.$$

* 다른 풀이

$$R_1=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{1}{3}\le x\le 1,\ \frac{1}{x}\le y\le\sqrt{\frac{3}{x}}\right\},$$

$$R_2=\left\{(x,y)\,\middle|\,1\le x\le\frac{4}{3},\ \frac{1}{\sqrt{x}}\le y\le\sqrt{\frac{3}{x}}\right\},$$

$$R_3=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{4}{3}\le x\le 4,\ \frac{1}{\sqrt{x}}\le y\le\frac{2}{x}\right\},$$

$$R=\sum_{i=1}^3 R_i.$$

$$\iint_R ydA=\iint_{R_1}ydA+\iint_{R_2}ydA+\iint_{R_3}ydA$$

$$=\int_{\frac{1}{3}}^1\int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{\frac{3}{x}}}ydydx+\int_1^{\frac{4}{3}}\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{\sqrt{\frac{3}{x}}}ydydx+\int_{\frac{4}{3}}^4\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{\frac{2}{x}}ydydx$$

$$=\int_{\frac{1}{3}}^1\frac{1}{2}\left(\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx+\int_1^{\frac{4}{3}}\frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}\right)dx+\int_{\frac{4}{3}}^4\frac{1}{2}\left(\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[3\ln x+x^{-1}\right]_{1/3}^1+\frac{1}{2}\left[2\ln x\right]_1^{4/3}+\frac{1}{2}\left[-4x^{-1}-\ln x\right]_{4/3}^4$$

$$=2\ln 2.$$

23. $2\sqrt{2}-1$

$0\le y\le 1,\ y^{\frac{1}{3}}\le x\le 1 \Leftrightarrow 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x^3$이므로 주어진 반복적분은

$$I=\int_0^1\int_0^{x^3}6\sqrt{1+x^4}\,dydx=\int_0^1 6x^3\sqrt{1+x^4}\,dx$$

$$=6\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot(1+x^4)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=2^{\frac{3}{2}}-1=2\sqrt{2}-1.$$

24. $\dfrac{1}{2}$

발산 정리를 적용하자.

$$\int\int_S F\cdot ndS=\iiint_{S\cup\mathrm{int}(S)}\mathrm{div}F\,dV=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 2z-2y+2yz\,\,dxdydz=\frac{1}{2}.$$

* 다른 풀이: 실제 계산

$S_1=\{(0,y,z)|0\le y,z\le 1\},\ S_2=\{(1,y,z)|0\le y,z\le 1\},$

$S_3=\{(x,0,z)|0\le x,z\le 1\},\ S_4=\{(x,1,z)|0\le y,z\le 1\},$

$S_5=\{(x,y,0)|0\le x,y\le 1\},\ S_6=\{(x,y,1)|0\le x,y\le 1\}$의 외부 쪽을 향하는 단위 법선벡터 $\boldsymbol{n}_1=(-1,0,0),\ \boldsymbol{n}_2=(1,0,0),\ \boldsymbol{n}_3=(0,-1,0),\ \boldsymbol{n}_4=(0,1,0),$ $\boldsymbol{n}_5=(0,0,-1),\ \boldsymbol{n}_6=(0,0,1),\ S=\sum_{i=1}^6 S_i$이다.

$$\int\int_S F\cdot ndS=\sum_{i=1}^6\iint_{S_i}F\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

$$=\iint_{S_1}(-2xz)dS+\iint_{S_2}(2xz)dS+\iint_{S_3}(y^2)dS$$

$$+\iint_{S_4}(-y^2)dS+\iint_{S_5}(-yz^2)dS+\iint_{S_6}yz^2dS$$

$$=\int_0^1\int_0^1 0\,dydz+\int_0^1\int_0^1 2z\,dydz+\int_0^1\int_0^1 0\,dxdz$$

$$+\int_0^1\int_0^1(-1)\,dydz+\int_0^1\int_0^1 0\,dxdy+\int_0^1\int_0^1 ydxdy$$

$$=\int_0^1\int_0^1 2zdydz+\int_0^1\int_0^1(-1)dydz+\int_0^1\int_0^1 y\,dxdy$$

$$=1-1+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

25.

표면적 계산은 단지 선분의 변화량이 높이의 변화량 dx를 따라 적분하였으므로 오류가 발생하였다. 따라서 구의 표면적은 단위면적소를 활용하여야 한다.

$y=f(x),\ a\le x\le b$의 회전체의 표면적은 $S=2\pi\displaystyle\int_a^b|f(x)|\sqrt{f'(x)^2+1}\,dx$

여기에서 $y=\sqrt{r^2-x^2}$이므로

따라서 구의 겉넓이는 다음과 같다.

$$S=2\pi\int_{-r}^r\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=2\pi\int_{-r}^r\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\,dx$$

$$=2\pi\int_{-r}^r\sqrt{r^2}\,dx$$

$$=2\pi r\int_{-r}^r 1\,dx$$

$$=4\pi r^2$$

26. ③

$$\int_D e^{\frac{y}{x}}dydx=\int_0^1\int_0^{x^2}e^{\frac{y}{x}}dydx=\int_0^1 xe^{\frac{y}{x}}\Big]_{y=0}^{y=x^2}dx\ =\int_0^1 xe^x-x\,dx\ =1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

27. ④ $\dfrac{3}{2}\pi$

도형의 면적 $S=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}r^2d\theta$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left(1-2\cos\theta+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta=2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\pi.$$

28. ④

시계방향으로 $\frac{\pi}{4}$회전하는 $\mathbb{R}^2$의 회전변환행렬 R,

$$R=\begin{bmatrix}\cos(-\frac{\pi}{4}) & -\sin(-\frac{\pi}{4}) \\ \sin(-\frac{\pi}{4}) & \cos(-\frac{\pi}{4})\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1 \\ -1 & 1\end{bmatrix}.$$

$\begin{bmatrix}x' \\ y'\end{bmatrix}=R\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix}$에서 $\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix}=R^{-1}\begin{bmatrix}x' \\ y'\end{bmatrix}=R^T\begin{bmatrix}x' \\ y'\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1 \\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x' \\ y'\end{bmatrix}$이므로

주어진 조건에 대입하고 기호를 정리하면

$\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)=\frac{1}{2}$에서 $x^2-y^2=1$,

$\frac{2}{\sqrt{2}}|x|=2\sqrt{2}$에서 $|x|=2$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)$에서 $y=0$.

따라서 구하는 입체의 체적 V는

$x^2-y^2=1$과 $|x|=2$로 둘러싸인 도형을

x축을 기준으로 회전하여 얻은 입체의 부피이다.

$$V=2\times\int_1^2\pi y^2dx=2\int_1^2\pi(x^2-1)\,dx=\frac{8}{3}\pi.$$

1.

“양 끝 점” $\lim_{x\to0+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{t\to\infty}te^{-t^2}=0$, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$.

$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{x}\right]=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{2}$이므로 $\frac{f(\sqrt{2})}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2e}}$.

$S\neq\varnothing$임은 자명하다.
$\frac{f(x)}{x}>0$이므로 S는 아래로 유계,
$\frac{f(x)}{x}\le\frac{1}{\sqrt{2e}}=\frac{f(\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$(최댓값이 존재)이므로 S는 위로 유계.
실수체에 관한 완비성 공리에 따라 S의 상한과 하한이 모두 존재한다.

따라서 최소 상계(l.u.b) $\frac{1}{\sqrt{2e}}$, 최대 하계(g.l.b) 0.

$s>0$에 대하여 $x=st$라 하면 $\frac{f(st)}{st}\le\frac{1}{\sqrt{2e}}$이므로

$$\begin{aligned}0&\le\int_0^1\frac{f(x)}{s}e^{-\frac{x^2}{s^2}}dx\\&=\int_0^{1/s}f(st)e^{-t^2}dt\\&\le\frac{s}{\sqrt{2e}}\int_0^{1/s}te^{-t^2/2}dt\\&\le\frac{s}{\sqrt{2e}}\int_0^{\infty}te^{-t^2/2}dt\\&=\frac{s}{2\sqrt{2e}}.\end{aligned}$$

조임정리에 따라 $\lim_{s\to0+}\int_0^1\frac{f(x)}{s}e^{-\frac{x^2}{s^2}}dx=0$.

2.

$p=\frac{1}{3}$일 때, $x>0$이면 $|f(x)|\le x^{1/3}$이므로 조임정리에 따라 $\lim_{x\to0+}f(x)=0$.
$f(0)=0$이므로 f는 $x=0$에서 연속이다.
$p=-1$일 때, $L>0$라 하자.
아르키메데스 원리에 따라 $L<2N\pi$ 되는 $N\in\mathbb{N}$ 있다.
f는 $\left[0,\frac{1}{2N\pi}\right]$에서 연속이고, $f\left(\frac{1}{2N\pi+\pi/2}\right)=0<L<2N\pi=f\left(\frac{1}{2N\pi}\right)$이므로
중간값 정리에 따라 $f(x_0)=L$ 되는 x_0 있다.

3.

f는 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right)$에서 전단사, 미분가능, $f'\neq0$이므로 g도 $\mathbb{R}$에서 미분가능.

$\lim_{n\to\infty}n\left\{g\left(1+\frac{3}{n}\right)-g(1)\right\}=\lim_{h\to0}\frac{g(1+3h)-g(1)}{h}=3g'(1)=\frac{3}{f'\left(\frac{5\pi}{4}\right)}=\frac{3}{2}$.

$g(x)=t$라 하면 $g'(x)=\frac{1}{1+x^2}$이므로 $\int_0^\infty\frac{g(x)}{1+x^2}dx=\int_\pi^{\frac{3}{2}\pi}t\,dt=\frac{5}{8}\pi^2$.

(다른 설명)

$x=\tan\theta$라 하면 $\int_0^\infty\frac{g(x)}{1+x^2}dx=\int_\pi^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\theta\cdot\sec^2\theta}{1+\tan^2\theta}\,d\theta=\int_\pi^{\frac{3}{2}\pi}\theta\,d\theta=\frac{5}{8}\pi^2$.

4.

$g(x)=f(x)-x$는 $[0,1]$에서 연속이고 $(0,1)$에서 미분가능하다.
$g(0)=f(0)\ge0$, $\mathrm{im}f\subset[0,1]$이므로 $g(1)=f(1)-1\le0$.
사잇값 정리에 따라 $g(a)=0=f(a)-a$가 되는 $a\in[0,1]$ 있다.
$a\neq b$인 $b\in[0,1]$에 대하여 $f(b)=b$이면 $g(a)=g(b)=0$이므로
롤의 정리에 따라 $g'(c)=f'(c)-1=0$이 되는 c가 a와 b사이에 존재한다.
이는 $f'(x)\neq1$라는 데 모순이다.
따라서 조건을 만족하는 a는 유일하다.

5.

S가 무한집합이면 $f(x)=0=f'(x)$인 실수 x가 존재한다.
S가 무한집합이라고 하자.
$f(x_n)=0$ 되는 상수가 아닌 수열 $\{x_n\}\subset[-1,1]$을 택하면
볼자노-바이어슈트라스 정리에 의해
$c\in[-1,1]$로 수렴하는 $\{x_n\}$의 부분수열 있다.
부분수열 중에서 자연수 k에 대해 $x_{n_k}\neq c$인 부분수열 $\{x_{n_k}\}$를 택하자.
f는 연속이므로 $k\to\infty$일 때 $f(x_{n_k})=f(c)=0$.

f는 미분가능하므로 $f'(c)=\lim_{k\to\infty}\frac{f(x_{n_k})-f(c)}{x_{n_k}-c}=\lim_{k\to\infty}\frac{0-0}{x_{n_k}-c}=0$.

즉, $f(c)=0=f'(c)$

* 다른 설명
모든 $x\in\mathbb{R}$에 대하여 $f(x)\neq0$이면 $S=\varnothing$.
모든 $x\in\mathbb{R}$에 대하여 $f'(x)\neq0$이면 f는 단사이므로 $f(x)=0$되는 x는 존재하지 않거나, 존재하더라도 1개 있다. (기껏해야 1개 존재한다.)
그러므로 명제 P가 성립한다.

6. $n=16$

직선 $y=x$를 따라 $f(x,y)$의 $(x,y)\to(0,0)$일 때 $f(x,y)$의 극한이
$f(0,0)=0$이 되기 위해서는 $\frac{x^{2n}}{2x^{30}}=\frac{1}{2}x^{2n-30}\to0$이 되어야 하며,
이때 $2n-30>0$, $n>15$.
$n=16$이면 $|f(x,y)|\le\frac{|xy|}{2}\to0$ $((x,y)\to(0,0))$이므로 구하는 값 16.

7.

$n=1$일 때 $1\le a_1\le2$,
$n=k$일 때 $1\le a_k\le2$라고 가정하면
$1\le3\le a_{k+1}^5=2a_k^2+1\le9\le32$에서 $1\le a_{k+1}\le2$.
수학적 귀납법에 의해 $n\in\mathbb{N}$일 때 $1\le a_n\le2$.

$n=1$일 때 $a_1=1<3^{\frac{1}{5}}=a_2$.
$n=k$일 때 $a_k\le a_{k+1}$라고 가정하면
$a_{k+1}=(2a_k^2+1)^{\frac{1}{5}}\le(2a_{k+1}^2+1)^{\frac{1}{5}}=a_{k+2}$이므로
수학적 귀납법에 의해 $n\in\mathbb{N}$일 때 $a_n\le a_{n+1}$.

실수열 $\{a_n\}$은 위로 유계인 증가수열이므로 단조수렴정리에 의해 수렴.

* 극한 $\alpha\fallingdotseq1.36396$, x^5-2x^2-1의 실근 1개, 허근 4개.

8. $x\neq0$인 x에 대하여 $\left|\frac{g(x)-g(0)}{x-0}-0\right|=\left|\frac{1}{x}f(x)\right|\to|f'(0)|=0$ $(x\to0)$
이므로 조임 정리에 의해 $g'(0)=0$.

9. $\frac{1}{\ln2}$

$\int_1^\infty[f(n)]^t dt=\left[\frac{f(n)^t}{\ln f(n)}\right]_{t=1}^\infty$가 수렴
$\Leftrightarrow f(n)\le1 \Leftrightarrow 10-\sqrt{2}\le n\le10+\sqrt{2}$.
$n=9,\ 10,\ 11$일 때 $a_n=-\frac{1/2}{\ln(1/2)}$, 0, $-\frac{1/2}{\ln(1/2)}$이므로
구하는 값 $\sum_{n=1}^\infty a_n=a_9+a_{10}+a_{11}=-\frac{1}{\ln(1/2)}=\frac{1}{\ln2}$.

10. $x=0$일 때 $f(0)\le f(0)+M\cdot 0=f(0)$

$x>0$일 때 f는 $[0,x]$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 따라

$\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(c)$인 $c\in(0,x)$있다.

가정에 의해 $f(x)\le f(0)+Mx$.

$g(x)=f(x)-x$는 $[0,\infty)$에서 미분가능하다.

$g(0)=f(0)>0$,

$g(\alpha)\le 0$되는 α를 찾자.

$g(\alpha)=f(\alpha)-\alpha\le f(0)+M\alpha-\alpha=0.$

$\alpha=\dfrac{f(0)}{1-M}>0$라 하면 $g(\alpha)\le 0.$

중간값 정리에 의해 $g(x)=f(x)-x=0$ 되는 x있다.

한편 $g'(x)=f'(x)-1\le M-1<0$이므로 g는 단사.

그러므로 $f(x)=x$는 단 하나의 해를 갖는다.

11. $[a,b]$의 임의의 분할 P, Q에 대하여 $L(f,P)\le U(f,Q)$.

$A\le U(f,Q)$, $L(f,P)\le B$이므로 $A\le B$이다.

f는 $[a,b]$에서 연속이므로 하이네 정리에 의해 균등연속.

$\dfrac{\varepsilon}{b-a}>0$에 대하여 $\delta>0$가 존재해서 $|x-y|<\delta$,

$x,\ y\in[a,b]$이면 $|f(x)-f(y)|<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$.

아르키메데스 원리에 의해 $\dfrac{b-a}{N}<\delta$인 $N\in\mathbb{N}$있다.

$[a,b]$의 N등분할 $P_N=\{x_0=a,x_1,\cdots,x_N=b\}$라 하자.

$k=1,\ 2,\ \cdots,\ N$에 대하여 $I_k=[x_{k-1},x_k]$에서 f는 연속이므로

최대최소정리에 의해 $M(f,I_k)=f(x_{M_k})$, $m(f,I_k)=f(x_{m_k})$인 x_{M_k}, $x_{m_k}\in I_k$있다.

$\left|x_{M_k}-x_{m_k}\right|<\dfrac{b-a}{N}<\delta$, x_{M_k}, $x_{m_k}\in I_k\subset[a,b]$이므로

$$\begin{aligned}U(f,P_N)-L(f,P_N)&=\sum_{k=1}^{N}\left[M(f,I_k)-m(f,I_k)\right]\frac{b-a}{N}\\&=\frac{b-a}{N}\sum_{k=1}^{n}\left[f(x_{M_k})-f(x_{m_k})\right]\\&<\frac{b-a}{N}\cdot\sum_{k=1}^{N}\frac{\varepsilon}{b-a}=\varepsilon\ (\text{리만판정법}).\end{aligned}$$

좌변 이항하면 $U(f,P_N)<L(f,P_N)+\varepsilon$, $B\le A$.

앞서 보인 사실로부터 $A=B$이고 $n\ge N$인 n에 대하여

$L(f,P_n)\le\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\triangle x_k\le U(f,P_n)$, $L(f,P_n)\le A=B\le U(f,P_n)$이므로

$\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\triangle x_k-A\right|<U(f,P_n)-L(f,P_n)<\varepsilon.$

그러므로 (다)의 극한 A이다.

12. $3<r<5$

$x>0$일 때 $f'(x)=6x^5\sin\dfrac{1}{x^r}-rx^{-r+5}\cos\dfrac{1}{x^r}+rx^{r-1}\sin\dfrac{1}{x^2}-2x^{r-3}\cos\dfrac{1}{x^2}$.

$x\le 0$일 때 $f'(x)=0$이므로

f'이 $x=0$에서 연속

$\Leftrightarrow f'(0)=0=\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0+}f'(x)=0=\lim\limits_{x\to 0-}f'(x)$

$\Leftrightarrow -r+5>0,\ r-1>0,\ r-3>0$

$\Leftrightarrow 3<r<5.$

* $x=0$에서 미분가능 $\Leftrightarrow r>1$

13. $n\in\mathbb{N}$에 대하여 $M-\dfrac{1}{n}<f(x_n)\le M$인 $x_n\in[0,1]$있다.

정리 1에 의해 $\{x_n\}$ $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x^*\in[0,1]$존재.

$M-\dfrac{1}{n_k}<f(x_{n_k})\le M$이므로 조임정리에 따라 $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=M.$

f는 연속이므로 $f(x^*)=M.$

14. ①

ㄱ. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{(x+1)/(x\sqrt{x^4+1})}{(x+1)/x^3}\right]=1$, $\displaystyle\int_1^\infty\frac{x+1}{x^3}dx=\frac{3}{2}$이므로

극한비교판정에 의해 주어진 특이적분은 수렴한다.

ㄴ. $[2,\infty)$에서 $\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{\ln x}$, $\displaystyle\int_2^\infty\frac{1}{x}dx=\infty$이므로

비교판정에 의해 주어진 특이적분은 발산한다.

ㄷ. $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$에서 $\dfrac{1}{\cos x+\sqrt{1-\sin x}}\ge\dfrac{1}{\cos x+\sqrt{1-\sin^2 x}}=\dfrac{1}{2}\sec x$,

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sec x\,dx=\left[\ln|\sec x+\tan x|\right]_0^{\pi/2}=\infty$이므로

비교판정에 의해 주어진 특이적분은 발산한다.

15. ⑤

* $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}$, $y_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{6}}$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$,

$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}0=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}=f(0)$,

f는 $x=0$에서 불연속.

ㄱ. 그런 수열 $\{x_n\}$ 있다.

ㄴ. 일반성을 잃지 않고 $a<b$라 하자.

① $ab>0$일 때 f는 $[a,b]$에서 연속이므로 중간값정리에 의해 성립.

② $ab<0$일 때 충분히 큰 $N\in\mathbb{N}$에 대하여

$0<\dfrac{1}{2N\pi}<b$이다. $p=\dfrac{1}{2N\pi+\dfrac{3}{2}\pi}$, $q=\dfrac{1}{2N\pi}$라 하면

$[p,q]\subset(a,b)$이고 $-1=f(p)\le f(a)<\gamma<f(b)\le f(q)=1$이다.

f는 $[p,q]$에서 연속이므로 중간값정리에 의해 성립.

③ $ab=0$일 때 $a=0$인 경우 $b>0$이므로 ②와 비슷한 방법으로 성립.

$b=0$인 경우 $a<0$, $-a>0$이므로

충분히 큰 $N\in\mathbb{N}$에 대하여 $0<\dfrac{1}{2N\pi}<-a$이다.

$p=-\dfrac{1}{2N\pi}$, $q=-\dfrac{1}{2N+\dfrac{3}{2}\pi}$라 하면 $[p,q]\subset(a,b)$이고

$-1=f(p)\le f(a)<\gamma<f(b)=1/2\le f(q)=1.$

f는 $[p,q]$에서 연속이므로 중간값정리에 의해 성립.

ㄱ. $(0,1)$에서 $g(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$이고, g는 $(0,1)$에서 연속이다.

$\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^-}g(x)$가 모두 존재하므로 연속확장정리에 의해

g는 $(0,1)$에서 균등연속이다.

16. ⑤

ㄱ. 양변 미분, $f'(x)=-f'(-x)$에서 $f'(0)=0$.

* 우함수면 $f'(0)=0$

ㄴ. $g(x)=x^2$은 $\mathbb{R}$에서 미분가능하다.

코시 평균값 정리에 의해 $g'(c)[f(1)-f(0)]=f'(c)[g(1)-g(0)]$인

$c\in(0,1)$있다.

이때 $2c[f(1)-f(0)]=f'(c)$, $0<c<1$이므로

$f(1)-f(0)=\dfrac{f'(c)}{2c}$, $0<c<1.$

ㄷ. $x<y$이면

$0<(f')^3(x)-(f')^3(y)=[f'(x)-f'(y)]\left[(f')^2(x)+f'(x)f'(y)+(f')^2(y)\right]$

이므로 $f'(x)<f'(y)$, 즉 f'은 단조함수이다.

그러므로 f'은 연속함수이다.

17. ②

ㄱ. $a_n=\sin n$, $b_n=1+\dfrac{1}{n}$, $\{a_nb_n\}$는 진동한다.

ㄴ. 유계 실수열 $\{a_n\}$이 수렴하지 않으므로 $\{a_n\}$의 상극한과 하극한이 서로 다르다. 따라서 상극한을 α, 하극한을 β라 할 때 각각 α, β로 수렴하는 부분수열 $\{a_{n_k}\}$, $\{a_{m_k}\}$은 주어진 조건을 만족

ㄷ. $(-1)^n$의 상극한 1, $a_n<1-\varepsilon$을 만족시키는 n의 개수는 무한하다.

18. ①

$0 \le y \le \sqrt{t},\ y \le x \le \sqrt{t} \Leftrightarrow 0 \le y \le x,\ 0 \le x \le \sqrt{t}$이므로

중적분으로 주어진 함수 $f(t)$의 식은

$f(t)=\int_0^{\sqrt{t}}\int_0^x \frac{1}{2+\sin(x^2)}dydx=\int_0^{\sqrt{t}}\frac{x}{2+\sin(x^2)}dx$

$\frac{x}{2+\sin(x^2)}$은 $\mathbb{R}$에서 연속이다.

미적분학의 기본정리에 의해

$f'(t)=(\sqrt{t})'\cdot \left.\frac{x}{2+\sin(x^2)}\right|_{x=\sqrt{t}}=\frac{1}{2\sqrt{t}}\cdot\frac{\sqrt{t}}{2+\sin t}=\frac{1}{4+2\sin t}.$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{6}.$

19. ②

ㄱ. $x=0$일 때 0, $x\neq0$일 때 $x^2\sin\frac{1}{x}$로 정의한 함수 $f(x)$, $f'(0)=0$,

$x\neq0$일 때 $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$이므로 f'은 연속이 아니다.

f를 x축 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 함수 $g(x)$는

$(0,1)$에서 미분가능하고 g'은 $x=\frac{1}{2}$에서 불연속.

* f'이 단조함수이면 연속된다.

ㄴ. f는 $(0,1)$에서 단조감소, 연속이므로 f^{-1}존재. (연속 역함수 정리)

* 이때 f^{-1}는 $D=f((0,1))$에서 단조감소, 연속

ㄷ. D에서 $f'\neq0$이어야 미분가능하다.

* 예: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$, $\tan\left[4\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right]$

20. ①

ㄱ. $[x\ln x-x]_0^1=-1$이므로 주어진 특이적분은 수렴.

ㄴ. f의 불연속점의 집합 A의 측도가 0이 아니므로 f는 리만적분 불능.

* 다른 설명

상적분 $\overline{\int_0^1} f(x)dx=\int_0^1 1dx=1$, 하적분 $\underline{\int_0^1} f(x)dx=\int_0^1 0dx=0$이므로

f는 리만적분가능하지 않다.

ㄷ. 적분가능 조건만으로는 항상 성립하지 않는다. (연속 조건 필요)

* 반례: $0\le y\le 1/2$에서 0, $1/2\le y\le1$에서 1로 정의한 함수 $f(y)$는 불연속점의 개수가 유한 개인 유계함수이므로 $[0,1]$에서 리만적분가능.

이때 $0\le x\le 1/2$에서 $F(x)=0$, $1/2\le x\le1$에서

$F(x)=x-1/2$이며 $x=1/2$에서 F는 미분가능하지 않다.

21. ①

$1-t^3\sqrt{1+3t^2}$은 $\mathbb{R}$에서 연속이다. 미적분의 기본 정리를 적용하면

$f'(x)=-2\cdot\left[1-t^3\sqrt{1+3t^2}\right]_{t=1-2x}-2\cdot\left[1-t^3\sqrt{1+3t^2}\right]_{t=1+2x}$에서

$f'(0)=-2\cdot(1-1\cdot\sqrt{4})-2\cdot(1-1\cdot\sqrt{4})$

$=-2\cdot(-1)-2\cdot(-1)=4.$

22. ④

ㄱ. 실수열 $\{x_n\}$이 코시 수열이므로 $\lim_{n\to\infty}x_n$이 존재하고, f는 연속이므로

$\lim_{n\to\infty}f(x_n)$이 존재한다. 따라서 $\{f(x_n)\}$도 코시.

ㄴ. g: 디리클레 함수, $g\circ g\equiv1$은 연속함수이지만 g는 모든 점에서 불연속.

ㄷ. h가 단사이므로 $h(0)\neq h(1)$. 일반성을 잃지 않고 $h(0)<h(1)$라 하자.

$h(x)<h(0)$인 $x\in(0,1)$있다 하면 중간값 정리에 의해

$h(a)=\frac{h(0)+h(x)}{2}=h(b)$인 $a\in(0,x)$, $b\in(x,1)$있다. h는 단사이므로 모순.

따라서 h는 순증가함수이다. ($h(0)>h(1)$라 하면 순감소함수)

그러므로 연속 역함수 정리에 의해 h^{-1}는 $h([0,1])$에서 연속이다.

* 역함수의 연속

① 실함수 f가 컴팩트 집합 K에서 연속 $\Rightarrow f^{-1}$ 연속

② $f:[a,b]\to\mathbb{R}$: 단사, 연속 $\Rightarrow f$는 순증가(순감소)

③ (연속 역함수 정리) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$: 순증가(순감소), 연속 $\Rightarrow f^{-1}$ 연속

23. ①

ㄱ. $(x+x^2)'\big|_{x=0}=1=(x\cos x)'\big|_{x=0}$이므로 미분가능할 것이라 추론 가능.

$x\neq0$인 x에 대하여 $\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}-1\right|\le\max\{|x|,|\cos x-1|\}\to0\ (x\to0)$

이므로 조임정리에 의해 $f'(0)=1$.

ㄴ. $g(z)=e^z$는 모든 $z\in\mathbb{C}$에서 $g'(z)\neq0$이지만 주기가 $2\pi i$인 함수로서 단사함수가 아니다.

ㄷ. $F(x)=(\sin2\pi x, e^x)$

24. ④

ㄱ. 비판정에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$이 수렴하고, x_n은 0으로 수렴

ㄴ. 홀수열 $\frac{1}{n}$, 짝수열 -1인 수열 $\{x_n\}$은 단 하나의 극한점 0을 갖지만 수렴하지는 않는다.

ㄷ. $n\in\mathbb{N}$, $|\sin x_n|\le1$이므로 볼자노-바이어슈트라스 정리에 의해 주어진 수열은 수렴하는 부분수열을 갖는다.

* 단조수렴정리

보통위상공간 $\mathbb{R}$의 단조 수열이 수렴 $\Leftrightarrow$ 유계

① 위로 유계인 증가수열은 수열집합의 상한에 수렴

② 아래로 유계인 감소수열은 수열집합의 하한에 수렴

25. ③

ㄱ. $f'(x)=\frac{1}{2}\cdot4x\cdot(2x^2+3)^{-1/2}\to\sqrt{2}\ \ (x\to\infty)$이므로

$\varepsilon=\frac{\sqrt{2}}{2}$에 대하여 $M>0$이 존재해서 $x\ge M$이면 $\frac{\sqrt{2}}{2}<f'(x)<\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

따라서 f는 $[M,\infty)$에서 균등연속이다.

$\left[0,M+\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$에서 f는 연속이므로 하이네 정리에 의해 f는 균등연속.

$\left[0,M+\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\cap[M,\infty)\neq\varnothing$이므로 f는 구간 $[0,\infty)$에서 균등연속.

* $|f'(x)|=\left|\frac{2x}{\sqrt{2x^2+3}}\right|\le\sqrt{2}$이므로 $[0,\infty)$에서 균등연속.

ㄴ. g는 구간 $[1,\infty)$에서 연속, $[1,\infty)$에서 $g'(x)=e^{-x^2}\le e^{-1^2}=e^{-1}$이므로

g는 $[1,\infty)$에서 균등연속이다.

ㄷ. h는 $[0,3)$에서 연속, $\lim_{x\to3}h(x)$가 존재하지 않으므로 연속확장정리에 의해

h는 $[0,3)$에서 균등연속이 아니다.

26. ①

ㄱ. 일반성을 잃지 않고 f'이 단조증가 함수라 하자.

f'이 $x=a$에서 불연속이라 하면 f'이 단조증가하므로

$\alpha:=\lim_{x\to a^-}f'(x)<\lim_{x\to a^+}f'(x):=\beta$이고,

실수 조밀성에 의해 $f'(a)\neq k$인 $k\in(\alpha,\beta)$있다.

f'이 단조이므로 $f'(a-1)<k<f'(a+1)$.

Darboux정리, $k=f'(c)$인 $c\in(a-1,a+1)$있다.

① $a-1<c<a$인 경우 $f'(c)\le\alpha<k=f'(c)$

② $a<c<a+1$인 경우 $k=f'(c)<\beta\le f'(c)$

두 가지 경우 모두 모순이다. 따라서 f'은 연속함수이다.

* $\alpha=\sup\{f'(x)\mid x<a\}$, $\beta=\inf\{f'(x)\mid x>c\}$

ㄴ. $x=0$일 때 0, $x\neq0$일 때 $x^2\sin\frac{1}{x}$로 정의한 함수 $f(x)$, $g(x)=\sin x$는 주어진 명제를 만족하지 않는다.

* 로피탈 정리의 역은 성립하지 않는다.

ㄷ. $x=0$일 때 0, $x\neq0$일 때 $x+2x^2\sin\frac{1}{x}$로 정의한 함수 $f(x)$에 대하여

$f'(0)=1>0$이다.

임의의 $\delta>0$에 대하여 $\frac{1}{2N\pi}<\delta$인 $N\in\mathbb{N}$있다.

$x,y\in\left(0,\frac{1}{2N\pi}\right)\subset(0-\delta,0+\delta)$인 $x=\frac{1}{2N\pi+\pi/2}<\frac{1}{2N\pi-\pi/2}=y$에 대하여

$f(x)>f(y)$이다.

27.

① $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e=\frac{p}{q}$(기약분수)라 하자.

양변에 $q!=1\cdot 2\cdot\ \cdots\ \cdot q$ 곱하면 $q!\left[\displaystyle\sum_{n=0}^{q}\frac{1}{n!}+\sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{1}{n!}\right]=p\cdot(q-1)!.$

$\displaystyle\sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{q!}{n!}=p\cdot(q-1)!-\sum_{n=0}^{q}\frac{q!}{n!}$, 우변은 정수이다.

$$\sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{q!}{n!}=\sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)\cdots(q+2)(q+1)}$$
$$<\sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{1}{(q+1)^{n-q}}$$
$$=\frac{1/(q+1)}{1-[1/(q+1)]}=\frac{1}{q}\le 1$$

이므로 좌변은 정수가 아니다. 모순.

따라서 e는 무리수.

② $\displaystyle\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx\right)^2=\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy\right)$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}x^2}e^{-\frac{1}{2}y^2}dxdy=\iint_{\mathbb{R}^2}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy$$
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}e^{-\frac{1}{2}r^2}rdrd\theta=2\pi\cdot 1=2\pi.$$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx>0$이므로 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx=\sqrt{2\pi}.$

그러므로 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx=1.$

28. ④

ㄱ. $(n+1)^{\frac{1}{\log(n+1)}}=e^{\frac{1}{\log(n+1)}\cdot\log(n+1)}=e^1$, 상수수열.

ㄴ. $\displaystyle\frac{(n+1)^n}{n!}=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+1}{n-1}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{n+1}{1}\ge n+1$이므로 유계가 아니다.
따라서 발산한다.

ㄷ. $(1+a)^n=1+{}_nC_1a^11^{n-1}+{}_nC_2a^21^{n-2}+\cdots$이므로
$0\le x_n\le\dfrac{1+na}{1+na+\dfrac{n(n-1)}{2}a^2}\to 0\ (n\to\infty)$, 조임정리에 의해 0으로 수렴.

29. ⑤

ㄱ. $r\in[-1,1]\cap(\mathbb{R}-\mathbb{Q})$, $n\in\mathbb{N}$에 대하여 유리수 조밀성에 의해
$r_n\in\left[r-\dfrac{1}{n},r+\dfrac{1}{n}\right]\cap[-1,1]$인 유리수열 $\{r_n\}$을 택하면 조임정리에 의해
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(r-\frac{1}{n}\right)=r=\lim_{n\to\infty}\left(r+\frac{1}{n}\right)$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}r_n=r$
즉, $\{r_n\}$은 무리수 r로 수렴하는 유리수 수열이다.
* 단조 유리수열을 택할 수도 있다.
f는 연속이므로 $f(r)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}f(r_n)=1$, $f\equiv 1$.

ㄴ. $[-1,1]$은 유계폐집합이므로 하이네-보렐 정리에 의해 $\mathbb{R}$에서 cpt이므로 폐부분집합 S는 cpt이다. g는 연속이므로 $g(S)$은 $\mathbb{R}$에서 cpt이고, 하이네-보렐 정리에 의해 $g(S)$은 유계폐집합이다.

ㄷ. 임의의 $x\in[-1,1]$, $0\le|h(x)-h(0)|\le\max\left\{|x^2|,\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|\right\}\to 0\ (x\to 0)$,
조임정리에 의해 $\displaystyle\lim_{x\to 0}h(x)=0=h(0)$. 따라서 h는 $x=0$에서 연속이다.

30. ②

g는 $[a,b]$에서 미분가능하므로 최대최소 정리에 의해
$\forall x\in[a,b]$, $g(x)\le g(c)$ (최댓값)인 $c\in[a,b]$있다.
이때 $g(x)-g(c)\le 0$인 $c\in(a,b)$임을 보이자.

$c=a$이면 $0<g'(a)=f'(a)-k=\displaystyle\lim_{x\to a^+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\le 0$,

$c=b$이면 $0>g'(b)=f'(b)-k=\displaystyle\lim_{x\to b^-}\frac{g(x)-g(b)}{x-b}\ge 0$.

두 경우 각각 모순, $a\in\mathrm{int}[a,b]=(a,b)$.
따라서 g는 (a,b)에서 최댓값 $g(c)$를 갖고, $x=c$에서 미분가능하므로
내부 극값 정리에 의해 $0=g'(c)=f'(c)-k$, $f'(c)=k$이다.

* 다르부 정리: $[a,b]$에서 미분가능 함수 f, $f'(a)<k<f'(b)$
  $\Rightarrow f'(c)=k$인 $c\in(a,b)$있다.
* 내부 극값 정리: $f:D\to\mathbb{R}$, $a\in\mathrm{int}D$에서 극값, $x=a$에서 미분가능
  $\Rightarrow f'(a)=0$.
* 최대최소 정리: f가 컴팩트 집합에서 연속이면 최댓값과 최솟값 있다.
* 역함수의 미분: 구간 I에서 순증가(순감소), 연속함수 f가 $x=a$에서 미분가능하고 $f'(a)\neq 0$
  $\Rightarrow f^{-1}:f(I)\to\mathbb{R}$는 $y=f(a)$에서 미분가능, $(f^{-1})'(y)\big|_{y=f(a)}=\dfrac{1}{f'(a)}$

31. ①

ㄱ. 임의의 $\varepsilon>0$에 대하여 $\delta=\varepsilon^2>0$라 하자.
$|x-y|<\delta=\varepsilon^2$, x, $y\in[a,b]$에 대하여 $|f(x)-f(y)|\le|x-y|^{1/2}<\varepsilon$이므로
f는 $[a,b]$에서 균등연속이다. 따라서 f는 리만적분가능하다.

ㄴ. 불연속점이 가산 개일 때도 리만적분가능하다.

ㄷ. 디리클레 함수 f, $f^2\equiv 1$은 리만적분가능하지만 f의 불연속점의 집합 $\mathbb{R}$은 측도(measure)가 0이 아니므로 리만적분가능하지 않다.

* 리만적분에 대한 르벡 판정법
  $[a,b]$에서 유계인 함수 f가 리만적분가능
$\Leftrightarrow$ f의 불연속점 집합의 측도가 0(가산 개)

32. ⑤

ㄱ. $a_n=(-1)^n$, $|a_n|$이 0으로 수렴하면 $\{a_n\}$도 수렴.

ㄴ. $(-1)^na_n$이 수렴한다고 하면 $\dfrac{(-1)^na_n}{a_n}=(-1)^n$도 수렴하므로 모순, 0으로 수렴하면 $(-1)^na_n$도 수렴.

ㄷ. $\varepsilon>0$, $n\ge N$일 때 $|a_{2n}-\alpha|<\varepsilon$, $|a_{2n-1}-\alpha|<\varepsilon$되는 $N\in\mathbb{N}$택하자. $m\ge N$일 때 $|a_m-\alpha|<\varepsilon$.

33. ③

ㄱ. 디리클레함수

ㄴ. 무리수일 때 0, 유리수일 때 x로 정의한 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이지만 임의의 $\delta>0$에 대하여 $(0-\delta,0+\delta)$에 속하는 한 점에서만 연속.

ㄷ. $\varepsilon=\dfrac{f(a)}{2}>0$, $|x-a|<\delta$인 x일 때, $|f(x)-f(a)|<\dfrac{f(a)}{2}$되는 $\delta>0$있다.
이때 $0<\dfrac{f(a)}{2}<f(x)<\dfrac{3f(a)}{2}$,
즉 $\forall x\in(a-\delta,a+\delta)$, $f(x)>0$인 $\delta>0$있다.

34. ④

$A=e^2$, $B=e^{\sqrt{1+x^2}}\big|_{x=2}=e^{\sqrt{5}}$, $C=e-1$, $C<A<B$.

35. $n \in \mathbb{N}$에 대하여 실수열 $\{x_n\}$을 $|f(x_{n+1})| \le \frac{1}{5}|f(x_n)|$로 정의하자.

이때 $|f(x_n)| \le \frac{1}{5^{n-1}}|f(x_1)| \to 0 \ (n \to \infty)$.

$I \supset \{x_n\}$은 유계이므로 볼자노-바이어슈트라스 정리에 의해

$c \in I$로 수렴하는 부분수열 $\{x_{n_k}\}$있다.

f는 I에서 연속이므로 $\lim_{k\to\infty}|f(x_{n_k})| = f(c) = 0$.

36. $f(x) = 3x - \frac{5}{2},\ a = -\frac{5}{4}$

f는 다항함수이므로

$\mathbb{R}$의 임의의 폐구간에 대해 미적분학의 기본정리를 적용할 수 있다.

$x^2\int_1^{x^2} f(t)dt - \int_1^{x^2} tf(t)dt = \frac{1}{2}x^6 + ax^4 + x^2 + a + 1.$

양변 x에 관하여 미분하면

$2x\int_1^{x^2} f(t)dt + x^2 \cdot 2xf(x^2) - 2x \cdot x^2 f(x^2)$에서

$2x\int_1^{x^2} f(t)dt = 3x^5 + 4ax^3 + 2x,\ \int_1^{x^2} f(t)dt = \frac{3}{2}x^4 + 2ax^2 + 1.$

양변 x에 관하여 미분하면 $2xf(x^2) = 6x^3 + 4ax,\ f(x^2) = 3x^2 + 2a,$

$f(x) = 3x + 2a$. 주어진 식에 $x = 1$대입, $a = -\frac{5}{4}$.

그러므로 $f(x) = 3x - \frac{5}{2}$.

* 다른 풀이

$x^2 = u$라 치환하면 주어진 관계식은

$u\int_1^{u} f(t)dt - \int_1^{u} tf(t)dt = \frac{1}{2}u^3 + au^2 + u + a + 1.$

$u = 1$ 대입, $a = -\frac{5}{4}$.

양변 u에 관하여 미분하면 $\int_1^{u} f(t)dt = \frac{3}{2}u^2 - \frac{5}{2}$,

한 번 더 미분하면 $f(u) = 3u + 2a,\ f(x) = 3x - \frac{5}{2}$.

37. $x = y$이면 주어진 식이 성립한다. 일반성을 잃지 않고 $x < y$라 하자.

$f(t) = \sin t$는 $[x, y]$에서 연속이고 (x, y)에서 미분가능.

평균값 정리에 의해 $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c)$인 $c \in (x, y)$있다.

$|f'(t)| = |\cos t| \le 1$이므로 $\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| = |f'(c)| \le 1$에서

$|\sin x - \sin y| \le |x - y|$.

* 코시의 평균값 정리

$f,\ g$: $[a, b]$에서 연속, (a, b)에서 미분가능할 때

$\Rightarrow g'(c)[f(b) - f(a)] = f'(c)[g(b) - g(a)]$

* $\frac{g'(c)}{f'(c)} = \frac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)}$라 이해하고 모순 안되게 쓰면 된다.

38. 최대최소정리에 의해 $f(x_m) \le f(x) \le f(x_M)$되는 $x_m,\ x_M \in [0, 1]$있다.

$f(x_m),\ f(x),\ f(x_M),\ x^n$은 $[0, 1]$에서 연속이므로 리만적분가능하다.

$\frac{1}{n+1}f(x_m) \le \int_0^1 f(x)x^n dx \le \frac{1}{n+1}f(x_M)$에서

$f(x_m) \le (n+1)\int_0^1 f(x)x^n dx \le f(x_M)$이므로

중간값 정리에 의해 문제의 식을 만족하는 $c \in [0, 1]$있다.

39. 미분가능

$\frac{d}{dx}(x^2 + 1)\Big|_{x=0} = 0 = \frac{d}{dx}(1)\Big|_{x=0}$ 이므로 $f'(0) = 0$일 것으로 예상할 수 있다.

$x \ne 0$인 $x \in \mathbb{R}$에 대하여 $\left|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right| \le \max\left\{\left|\frac{x^2}{x}\right|, |0|\right\} = |x| \to 0 \ (x \to 0)$.

조임 정리에 의해 $f'(0) = 0$.

* Caratheodory 정리

f가 $x = a$에서 미분 가능

$\Leftrightarrow$ $x = a$에서 연속인 함수 F가 존재해서 $f(x) - f(a) = F(x)(x - a)$

40. $\lim_{n\to\infty} x_n = 4$

극한을 α라 하면 $\alpha^3 = 6\alpha^2 - 8\alpha$에서 $\alpha = 0,\ 2,\ 4$중 단 하나이다.

주어진 실수열은 보통위상공간 $\mathbb{R}$에서 유계 증가수열일 것이므로

$\alpha = 4$일 것이라 추론할 수 있다.

① $\{x_n\}$: 유계, $3 \le x_n \le 4$

$n = 1$일 때 $3 \le x_1 = 3 \le 4,\ n = k$일 때 $3 \le x_k \le 4$라 가정하자.

$27 \le 30 \le x_{k+1}^3 = 6x_k^2 - 8x_k \le 64,\ 3 \le x_{k+1} \le 4$이므로

$n \in \mathbb{N}$에 대하여 $3 \le x_n \le 4$이다.

② $\{x_n\}$: 증가수열

$x_{n+1}^3 - x_n^3 = -x_n(x_n - 2)(x_n - 4) \ge 0,\ x_{n+1} \ge x_n$.

③ $\lim_{n\to\infty} x_n = 4$

$\{x_n\}$는 위로 유계인 증가수열이므로 단조수렴정리에 의해 $\mathbb{R}$에서 수렴.

$\alpha^3 = 6\alpha^2 - 8\alpha$에서 $\alpha = 4$.

41. $|f(x) - f(1)| \le \max\{|x - 1|, |x^2 - 1|\} \to 0 \ (x \to 1)$

이므로 $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 1$, f는 $x = 1$에서 연속.

$[0, 2]$에서 f가 리만적분가능하다고 하자.

$\overline{\int_0^2} f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx = \underline{\int_0^2} f(x)dx$이다.

$\overline{\int_0^2} f(x)dx = \frac{1}{2} + \frac{7}{3} \ne \underline{\int_0^2} f(x)dx = \frac{1}{3} + \frac{3}{2}$이므로 모순.

이는 f가 리만적분가능하다고 가정한 데 모순이다.

따라서 f는 리만적분가능하지 않다.

* $[0, 2]$에서 f의 불연속점들의 집합 $A = [0, 1) \cup (1, 2]$,

A의 측도(measure)는 0이 아니므로 르벡 정리에 따라 리만적분 불능.

42. 최대최소 정리에 의해 f는 $[0,1]$에서 유계이다.
하이네 정리에 의해 f는 $[0,1]$에서 균등연속이다.

임의의 $\frac{\varepsilon}{1-0}>0$에 대하여 $\delta>0$가 존재해서

$|x-y|<\delta,\ x,\ y\in[0,1]$이면 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

아르키메데스 원리에 의해 $\frac{1-0}{N}<\delta$인 $N\in\mathbb{N}$있다.

$n\ge N$일 때 분할 $P_n=\left\{0,\frac{1}{n},\cdots,\frac{n-1}{n},\frac{n}{n}\right\}$라 하자.

$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$일 때 $I_k=\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$에서 f는 연속이므로

최대최소 정리에 의해 최댓값 $f(x_{M_k})=M(f,I_k)$, 최솟값 $f(x_{m_k})=m(f,I_k)$있다.

이제 상합과 하합의 차를 구하면

$$\begin{aligned}U(f,P_n)-L(f,P_n)&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[M(f,I_k)-m(f,I_k)\right]\\&\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[f(x_{M_k})-f(x_{m_k})\right]\\&<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon=\frac{1}{n}\cdot n\varepsilon=\varepsilon.\end{aligned}$$

따라서 f는 $[0,1]$에서 리만적분가능하고

$$L(f,P_n)\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\le U(f,P_n),$$

$$L(f,P_n)\le\underline{\int_0^1}f\,dx=\int_0^1 f\,dx=\overline{\int_0^1}f\,dx\le U(f,P_n).$$

그러므로 $n\ge N$일 때, $\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)-\int_0^1 f(x)dx\right|\le U(f,P_n)-L(f,P_n)<\varepsilon.$

43. $\varepsilon>0$, $\mathrm{p}=(a,b)$, $\mathrm{x}=(x,y)$라 하자.
$d(\mathrm{x},\mathrm{p})<\delta$일 때, $d(f(\mathrm{x}),f(\mathrm{p}))<\varepsilon$이 되는 $\delta>0$ 찾자.

$$\begin{aligned}d(f(\mathrm{x}),f(\mathrm{p}))&=d\left(A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{4}\left|\sqrt{3}(x-a)-(y-b)\right|+\frac{1}{4}\left|\sqrt{3}(x-a)+(y-b)\right|\\&\le\frac{\sqrt{3}}{2}(|x-a|+|y-b|)\text{이므로}\end{aligned}$$

$\delta=\varepsilon\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\varepsilon}{\sqrt{3}}$으로 놓으면 $d(\mathrm{x},\mathrm{p})<\delta$일 때 $d(f(\mathrm{x}),f(\mathrm{p}))<\varepsilon$.

그러므로 f는 $\mathbb{R}^2$에서 연속함수이다.

* (X,d): 거리공간, $A\subset X$
  $f:X\to\mathbb{R}$, $f(x)=d(x,A)=\inf\{d(x,a)\mid a\in A\}$인 f는 연속이다.

44. $2\sqrt{2}-1$
$\sqrt{1+x}$, $\sqrt{x}$는 폐구간 $[0,1]$에서 연속이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\cdots+\sqrt{2n}}{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k+1}}{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}}$$

$$=\frac{\int_0^1\sqrt{1+x}\,dx}{\int_0^1\sqrt{x}\,dx}=2\sqrt{2}-1.$$

45.

하위 영역	배점	예상정답율(%)	관련사고영역	출제자
해석(실해석)	5	60	적용	좌준수
출제 내용 관련자료	M.Stoll. Introduction to Real Analysis. Addison-wesley. pp.13-119			

주어진 조건 $L-\frac{1}{n}<f(x_n)<L+\frac{1}{n^2}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$과

$\lim_{n\to\infty}\left(L-\frac{1}{n}\right)=L$, $\lim_{n\to\infty}\left(L+\frac{1}{n^2}\right)=L$

이므로 샌드위치 정리(Sandwich Tehorem)에 의해

$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=L$

한편, $x_n\in[a,b]$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$이고 $[a,b]$가 폐집합이므로

$\lim_{n\to\infty}x_n=c\in[a,b]$ 즉, $c\in[a,b]$

f가 점 c에서 연속이므로 $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(c)$이고

따라서, $f(c)=L$이다.

*** 채점기준**

$\lim_{n\to\infty}\left(L-\frac{1}{n}\right)=L$과 $\lim_{n\to\infty}\left(L+\frac{1}{n^2}\right)=L$을 쓰거나
샌드위치 정리를 언급하면 ……………………………………1점
(샌드위치 정리 대신에 Sandwich Theorem, Squeeze Principle, Squeeze Theorem, 조임정리, 협공의 원리 라는 용어를 사용해도 무방…1점)
$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=L$을 언급하면 ……………………………………1점
f가 c에서 (또는 $[a,b]$)에서) 연속이라는 서술과 함께
$(L=)\ \lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(c)$라고 쓰면 ……………………………………3점

46. 발산
$[1,\infty)$에서 $\sqrt{1+2\sin^2x+x^2}\le\sqrt{3+x^2}$.

$\int_1^\infty\frac{dx}{\sqrt{3+x^2}}=\left[\ln\left|x+\sqrt{3+x^2}\right|\right]_1^\infty=\infty.$

비교판정에 의해 주어진 이상적분은 발산한다.

* 다른 풀이
$[1,\infty)$에서 $\sqrt{1+2\sin^2x+x^2}\le\sqrt{x^2+2x^2+x^2}=2x$.

$\int_1^\infty\frac{dx}{2x}=\left[\frac{1}{2}\ln x\right]_1^\infty=\infty$이므로 비교판정에 의해 주어진 이상적분은 발산.

47. 조건과 L이 선형사상이므로 $L(h)=L(h\cdot1)=h\cdot L(1)$이다.
따라서 주어진 극한은

$$\begin{aligned}0&=\lim_{h\to0}\frac{|f(a+h)-f(a)-h\cdot L(1)|}{|h|}\\&=\lim_{h\to0}\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-L(1)\right|\\&=|f'(a)-L(1)|\end{aligned}$$

따라서 $L(1)=f'(A)$이 성립한다.

48.
(1) $f(t)=\log t$는 $[x,x+1]$에서 미분가능하다.
평균값 정리에 의해
$\log(x+1)-\log x=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}=f'(c)=\frac{1}{c}$인 $x<c<x+1$있다.
이때 $\frac{1}{c}<\frac{1}{x}$이므로 주어진 명제가 성립한다.

(2) $g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}=(x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$라 하면
g는 $(0,\infty)$에서 미분가능하고
$g'(x)=1\cdot\ln\frac{x+1}{x}+(x+1)\cdot\left[\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right]=\ln(x+1)-\ln x-\frac{1}{x}<0$이므로
g는 감소함수이다.
그러므로 $g(a)<g(b)$, $\left(1+\frac{1}{a}\right)^{a+1}<\left(1+\frac{1}{b}\right)^{b+1}$.

49. ②

$$2=\int_1^2 1\cdot\{f(x)\}^2dx = x\cdot f^2(x)\big]_1^2-\int_1^2 x\cdot[2f(x)f'(x)]\,dx$$

$$=-2\int_1^2 xf(x)f'(x)dx,$$ 구하는 값 -1.

50. ①

$f(x)=x^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln x}$라 하자.

$f'(x)=(1-\ln x)\cdot\dfrac{f(x)}{x^2}$, $x<e$일 때 f는 증가, $x>e$일 때 f는 감소한다.

따라서 e 값 주변의 자연수 n에서 $\sqrt[n]{n}$의 최댓값과 최솟값을 생각하자.

$n=1$일 때 $\sqrt[n]{n}=1$, $n=2$일 때 $\sqrt[n]{n}=\sqrt{2}$,

$n=3$일 때 $\sqrt[n]{n}=\sqrt[3]{3}$, $n=4$일 때 $\sqrt[n]{n}=\sqrt[4]{4}$.

$n=3$일 때 최대, $n=1$일 때 최소이다.

따라서 $M=\sqrt[3]{3}$, $m=1$, 구하는 $\dfrac{M}{m}=\sqrt[3]{3}$.

51. ①

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{\pi}{2}$이고 $x=\dfrac{\pi}{2}-t$로 치환하면

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\sin t}{\cos t+\sin t}(-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$이므로

$$\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx.$$

52. ①

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}e^{x^2\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)}$, e^x는 $x=-\dfrac{1}{2}$에서 연속

$$=e^{\lim_{t\to 0}\frac{\ln(\cos t)}{t^2}}=e^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

53. ②

$g(x)=\begin{cases}0 & (x\ :\ \text{유리수})\\ 1 & (x\ :\ \text{무리수})\end{cases}$ 라 하자.

f는 $x=0$에서 연속이므로 $g(\lim_{x\to 0}f(x))=g(f(0))$

(a) $f(0)$가 유리수인 경우 $g(f(0))=0$

무리수 조밀성에 의해 $f(0)$로 수렴하는

무리수열$\{f(x_n)\}$을 택하면 $\lim_{n\to\infty}g(f(x_n))=1$

(b) $f(0)$가 무리수인 경우 $g(f(0))=1$

유리수 조밀성에 의해 $f(0)$로 수렴하는

유리수열 $\{f(x_n)\}$을 택하면 $\lim_{n\to\infty}g(f(x_n))=0$.

54. ③

$f(\mathbb{R})=f([0,2\pi])$, $[0,2\pi]$에서 극값을 찾으면

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0,\ \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi,\ 2\pi$

이때 f의 최대, 최소는 1, -1. 구하는 값 2.

55. ①

$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\alpha)$, $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\sin\alpha$,

$f(x)=\sqrt{2}\left|\sin(x+\dfrac{\pi}{4})\right|$의 주기 $p=\pi$.

$$s=\int_0^{5\pi}f(x)dx=\sqrt{2}\int_0^{5\pi}\left|\sin(x+\frac{\pi}{4})\right|dx=\sqrt{2}\times 5\times\int_0^{\pi}\sin x dx=10\sqrt{2}.$$

56. ③

로피탈 정리에 의해

$$\alpha=\frac{\sec^2(\tan_{49}x)\cdot\sec^2(\tan_{48}x)\cdot\ \cdots\ \cdot\sec^2x}{1}\bigg|_{x=0}=1,$$

$$\beta=\lim_{x\to 1}e^{\frac{1}{x-1}\ln x}=e^1=e.$$

$\therefore\ \alpha\beta=e.$

57. ③

$\log x=t$치환, $\dfrac{dx}{x}=dt$. $\displaystyle\int_1^{\infty}t^{-4}dt=\left[-\frac{1}{3}t^{-3}\right]_1^{\infty}=\frac{1}{3}$.

58. ①

f'이 연속이므로 미적분학의 기본정리를 적용하자.

$0\le x\le 1$인 x에 대하여

$$\int_0^x f'(t)dt=f(x)-f(0)=f(x)\le\int_0^x Mdt=Mx.$$

$1=\displaystyle\int_0^1 f(x)dx\le\int_0^1 Mxdx=\frac{1}{2}M$에서 $M\ge 2$.

59. ①

$x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$일 때 $|y|<\dfrac{\pi}{2}$에서 $y=\tan^{-1}\sqrt{3}=\dfrac{\pi}{3}$.

$y'=\dfrac{(2x)'}{1+(2x)^2}=\dfrac{2}{1+4x^2}\bigg|_{x=\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{1}{2}$이므로 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{\pi}{3}\right)$에서 법선의 방정식은

$y-\dfrac{\pi}{3}=-2\left(x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $y=-2x+\sqrt{3}+\dfrac{\pi}{3}$.

60. ④

$\ln x$는 $(0,\infty)$에서 연속이다.

$$f(n)=e^{\frac{1}{n}\ln[n(n+1)\cdots(2n-1)]}=e^{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln(n+k)}=e^{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left[n\left(1+\frac{k}{n}\right)\right]}e^{\ln n\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}.$$

$\dfrac{f(n)}{n}=\dfrac{n\cdot e^{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}}{n}=e^{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n}=e^{\int_1^2\ln x dx}=e^{[x\ln x-x]_1^2}=e^{2\ln 2-1}=\frac{4}{e}.$$

1.
모든 자연수 n과 모든 $x\in[-L,L]$에 대하여

$|f_n(x)|\le \dfrac{|x^4+\sqrt{n}x^3|}{n\cdot n}\le \dfrac{L^4+\sqrt{n}L^3}{n^2}\le \dfrac{L^4+L^3}{n^{3/2}}$,

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L^4+L^3}{n^{3/2}}$는 $p-$급수 판정에 따라 수렴하므로

바이어슈트라스 $M-$판정에 따라 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$는 $[-L,\ L]$에서 균등수렴.

실수 $a\in\mathbb{R}$라 하자. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f_k(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

아르키메데스 원리에 따라 $0\le|a|<N$인 $N\in\mathbb{N}$ 있다.

앞서 보인 결과로부터 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

그러므로 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$는 $\mathbb{R}$에서 연속이다.

2.
충분히 큰 자연수 n과 모든 $x\in[0,\infty)$에 대하여

$|f_n(x)|\le \max\left\{\dfrac{1}{n^2\ln(2n)},\ \dfrac{1}{n^2}\right\}=\dfrac{1}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$은 수렴하므로

바이어슈트라스 M판정에 따라 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$는 $[0,\infty)$에서 균등수렴.

$a_n=\displaystyle\int_0^{\ln(2n)}f_n(x)dx=\frac{1}{2n^2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{12}$.

3.
$$\begin{aligned}a_{n+1}&=\int_0^1(1-x^2)^{n+1}\,dx\\&=2(n+1)\int_0^1 x^2(1-x^2)^n\,dx\ (\text{부분적분})\\&=2(n+1)\int_0^1\{1-(1-x^2)\}(1-x^2)^n\,dx\\&=2(n+1)\int_0^1(1-x^2)^n-(1-x^2)^{n+1}\,dx\\&=2(n+1)(a_n-a_{n+1})\text{이므로}\end{aligned}$$

$a_{n+1}=\dfrac{2n+2}{2n+3}a_n$, $f(n)=\dfrac{2n+2}{2n+3}$.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\cdot\left[\frac{(a_n)^\alpha}{(a_{n+1})^\alpha}-1\right]=\lim_{n\to\infty}n\cdot\left[\left(\frac{2n+3}{2n+2}\right)^\alpha-1\right]=\frac{1}{2}\cdot g'(1)=\frac{\alpha}{2}$이므로

$(g(x)=x^\alpha,\ h_n=\dfrac{1}{2n+2})$

라베 판정에 따라 $\alpha>2$일 때 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^\alpha$이 수렴한다.

$\alpha=2$인 경우, $a_n>\displaystyle\int_0^1 1-nx^2\,dx>\int_0^{1/\sqrt{n}}1-nx^2\,dx=\frac{2}{3\sqrt{n}}$이므로

$a_n^2>\dfrac{4}{3}\dfrac{1}{n}$, $\displaystyle\sum\frac{1}{n}$은 발산하므로 비교판정에 따라 $\sum(a_n)^2$도 발산.

그러므로 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^\alpha$이 수렴하는 α의 범위는 $\alpha>2$.

4.
$\left\|\dfrac{x}{1+e^{nx}}\right\|_{[0,\infty)}\le\dfrac{(1/n)}{e^{n(1/n)}}=\dfrac{1}{en}\to 0\ (n\to\infty)$.

$[0,\infty)$에서 $x^k(e^{-kx}-e^{-(k+1)x})\le(xe^{-x})^k(1-e^{-x})\le\dfrac{1}{e^k}$,

$\displaystyle\sum\frac{1}{e^k}<0$이므로 바이어슈트라스 M-판정에 따라

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}x^k(e^{-kx}-e^{-(k+1)x})$는 균등수렴한다.

그러므로 $\{f_n\}$는 $[0,\infty)$에서 균등수렴.

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx\\&=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}x^n(e^{-nx}-e^{-(n+1)x})\,dx\\&=\int_0^1\frac{e^x-1}{e^x-x}\,dx\\&=\left[\ln(e^x-x)\right]_0^1\\&=\ln(e-1).\end{aligned}$$

5. $f_n{}'(x)=nx^{n-1}(1-x)^{n^2-1}(1-(n+1)x)$, 양 끝 점(경계) $f_n(0)=f_n(1)=0$,

$M_n=f_n\left(\dfrac{1}{n+1}\right)=\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{M_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=\frac{1}{e}$이므로 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}M_nx^n$의 수렴반경 e.

$x\in[0,1]\subset(-e,e)$에 대하여 $|f_n(x)|\le M_n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}M_n<\infty$이므로

바이어슈트라스 M판정에 따라 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$는 $[0,1]$에서 균등수렴.

6. $t=1+(\sin x)^{2n}$ 치환하면 $dt=2n(\sin x)^{2n-1}\cos x\,dx$,

$a_n=\displaystyle\int_1^2\frac{4}{nt}dt=\frac{4\ln2}{n}$이므로

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n+2}=4\ln2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}=4\ln2\cdot\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=3\ln2.$

$\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$에서 $\{f_n\}$는 연속이므로 리만적분가능하다.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$가 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$에서 균등수렴한다고 가정하면

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$는 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$에서 리만적분가능하므로

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f_n(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\ln2}{n}$이며,

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\ln2}{n}$는 p급수 판정에 의해 발산하므로 모순이다.

7.

> 자연수 n에 대하여 $f_n(x)=e^x-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}$는 $[0,1]$에서 미분가능하므로
>
> 테일러 정리에 따라 $f_n(x)=\frac{e^{t_x}}{n!}x^n$ 되는 t_x가 0과 x 사이에 존재한다.

$x\in[0,1]$에 대하여 $|f_n(x)|\le\frac{e}{n!}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e}{n!}=e(e-1)$이므로

($\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e}{n!}$은 비판정에 의해 수렴하므로)

바이어슈트라스 M 판정에 따라 $\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)$는 $[0,1]$에서 균등수렴한다.

$n\ge1$이면 미적분 기본정리에 따라 $f_n{}'=f_{n-1}$. ($\{f_n\}$: 미분가능 함수열)

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)$라 하면

$\sum_{n=0}^{\infty}f_n(0)=f_0(0)+0=1$, $\sum_{n=1}^{\infty}f_n{}'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_{n-1}(x)$는 $[0,1]$에서 균등수렴하므로

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[f(x)]&=\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}f_n(x)\\&=\frac{d}{dx}f_0{}'(x)+\sum_{n=1}^{\infty}f_n{}'(x)\\&=e^x+\sum_{n=1}^{\infty}f_{n-1}(x)\\&=e^x+f(x).\end{aligned}$$

$\frac{d}{dx}\left(e^{-x}f(x)\right)=1$이므로 $e^{-x}f(x)=x+C$, $f(0)=1$이므로 $f(x)=e^x(x+1)$.

(다른 설명)

$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)$는 $[0,1]$에서 미분가능하고, $g(0)=1$이므로

$g'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n{}'(x)=e^x+\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)=e^x+g(x)$이므로 $g'(x)e^{-x}=1+g(x)e^{-x}$.

$\int_0^x g'(t)e^{-t}\,dt=x+\int_0^x g(t)e^{-t}\,dt$

$=x+\left[-g(t)e^{-t}\right]_0^x+\int_0^x g'(t)e^{-t}\,dt=x-g(x)e^{-x}+g(0)+\int_0^x g'(t)e^{-t}\,dt$이므로

$0=x-g(x)e^{-x}+1$, $g(x)=e^x(x+1)$.

8.

$$\begin{aligned}\|g_n(x)-x\|_{[0,1]}&=\left\|\int_0^x\{(x-y)^n\sin^n(xy)\}dy\right\|_{[0,1]}\\&\le\left\|\int_0^x(x-y)^n dy\right\|_{[0,1]}\le\frac{1}{n+1}\to0\ \ (n\to\infty)\text{이므로}\end{aligned}$$

$[0,1]$에서 $\{g_n\}\rightrightarrows x$.

$\{g_n\}$는 $[0,1]$에서 연속이므로 리만적분가능하다.

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g_n(x)dx=\int_0^1 g(x)dx=\frac{1}{2}$.

9. $x\ne0$일 때 $h(x)=\left[\tan^{-1}\left(\frac{t}{x^2}\right)\right]_{t=0}^{t=1}=\tan^{-1}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

$\lim_{x\to0}h(x)=\lim_{x\to0}\tan^{-1}\left(\frac{1}{x^2}\right)=\frac{\pi}{2}$.

$\{h_n\}$은 $x=0$에서 연속이지만 h는 $x=0$에서 불연속이다.

만약, $\{h_n\}\rightrightarrows h$이면 h는 $x=0$에서 연속이 되어야 하므로 모순이다.

따라서 $\{h_n\}\not\rightrightarrows h$.

10. 1

$\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}|x-2n|\right)=\frac{n-|x-2n|}{n^2}$이므로

$n-|x-2n|\le0$일 때 $f_n(x)=0$,

$n-|x-2n|\ge0$일 때 $f_n(x)=\frac{n-|x-2n|}{n^2}$이므로 $\int_0^{\infty}f_n=\int_n^{3n}f_n=1$.

각 $x\in[0,\infty)$에 대하여 아르키메데스 원리에 의해 $x<N$인 $N\in\mathbb{N}$있다.

$n\ge N$일 때 $x\in[0,n]$이므로 $f_n(x)=0$.

$\int_0^{\infty}\left(\lim_{n\to\infty}f_n\right)=0$, 구하는 값 1.

11. $x=0$일 때 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\tan^{-1}\frac{x}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}0=0$.

$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{n}\tan^{-1}\frac{x}{n}\right]=\frac{1}{n}\cdot\frac{1/n}{1+(x/n)^2}\le\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}<\infty$이므로

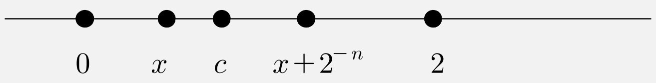
바이어슈트라스 $M-$판정에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2}<\infty$.

미분과 함수열에 관한 정리에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\tan^{-1}\frac{x}{n}$는 $\mathbb{R}$에서 점별수렴하고,

$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$이므로 f는 $\mathbb{R}$에서 균등연속이다.

12. $x\in[0,1]$일 때, 평균값정리에 의해

$g_n(x)=f'(c)$인 c가 x와 $x+2^{-n}$ 사이에 있다.



하이네 정리에 의해 f'은 $[0,2]$에서 균등연속이므로

$\varepsilon>0$에 대하여 $\delta>0$가 존재해서

$|x-y|<\delta$, x, $y\in[0,2]$이면 $|f'(x)-f'(y)|<\varepsilon$.

한편 $(x+2^{-n})-x=2^{-n}\to0$ $(n\to\infty)$이므로

주어진 $\delta>0$에 대하여 $N\in\mathbb{N}$이 존재해서 $n\ge N$이면

$|c-x|<\left|(x+2^{-n})-x\right|<\delta$이므로

$|g_n(x)-f'(x)|=|f'(c)-f'(x)|<\varepsilon$, 즉 $\{g_n\}\rightrightarrows f'$.

f'은 $[0,1]$에서 연속이므로 미적분의 기본정리에 의해

$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g_n=\int_0^1 f'=f(1)-f(0)$.

13. $n\in\mathbb{N}$에 대하여 $f(x_n)=0$인 상수수열이 아닌 $\{x_n\}\subset(-1,1)$은

볼자노-바이어슈트라스 정리에 의해 $c\in(-1,1)$로 수렴하는 부분수열 있다.

이 수열의 부분수열로서 모든 자연수 k에 대해 $c\ne x_{n_k}$인 $\{x_{n_k}\}$를 택하면

$f(x_{n_k})=0$, $\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=c$.

(가)에 의해 $r>0$에 대해 $x\in(c-r,c+r)$이면

$\|R_n(x)\|_{(c-r,c+r)}\le\frac{3(n+1)^2}{(n+1)!}\cdot(2r)^{n+1}\to0$ $(n\to\infty)$이므로

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$.

(나)에 의해 $(c-r,c+r)$에서 $f(x)=0$.

r은 임의이므로 $\mathbb{R}$에서 $f=0$, 모순이다.

그러므로 주어진 집합은 유한집합이다. (해의 개수는 유한하다.)

14. $\{f_n\}$은 $[-1,1]$에서 미분가능 함수열이다.

$0\in[-1,1]$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(0)=\sum_{n=1}^{\infty}0=0<\infty$,

$|f_n{}'(x)|\le\frac{e+1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e+1}{n^2}=\frac{(e+1)\pi^2}{6}<\infty$이므로

바이어슈트라스 $M-$판정에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n{}'(x)$는 $[-1,1]$에서 균등수렴.

주어진 정리에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$는 $[-1,1]$에서 미분가능한 함수로 균등수렴.

15. $(-5,5]$

$a_n=\frac{(-1)^n x^n}{5^n\sqrt{n}}$, $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{x}{5}\right|<1$, $|x|<5$.

$x=5$일 때 교대급수 판정에 의해 수렴.

$x=-5$일 때 $p-$급수판정에 의해 발산.

구하는 수렴구간 $(-5,5]$.

16. $\frac{1}{4}$

$$\int_0^1 n^2xe^{-2nx}dx = \left[n^2xe^{-2nx}\cdot\left(-\frac{1}{2n}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 n^2\left(-\frac{1}{2n}\right)e^{-2nx}dx$$

$$= -\frac{n}{2}e^{-2n} + \int_0^1 \frac{n}{2}e^{-2nx}dx$$

$$= -\frac{n}{2}e^{-2n} + \frac{n}{2}\left[-\frac{1}{2n}e^{-2nx}\right]_0^1$$

$$= -\frac{n}{2}e^{-2n} + \frac{1}{4}(1-e^{-2n})$$

구하는 값 $\frac{1}{4}$.

17. ④

ㄱ. 양항급수로서 절대수렴하므로 주어진 급수도 수렴한다.

ㄴ. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n^2+1}\neq 0$이므로 일반항판정에 의해 발산한다.

ㄷ. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{a_n}-1}{a_n}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1<\infty$

극한비교판정에 의해 주어진 급수는 수렴한다.

18. ④

ㄱ. f는 $[0,1]$에서 연속이므로 하이네정리에 의해 옳다.

ㄴ. 점별수렴성만으로는 항상 성립하지 않는다.

ㄷ. 유계폐구간에서 정의된 함수열 $\{f_n\}$이 정의역의 한 점에서 수렴(점별수렴)하고 $\{f_n{}'\}$이 균등수렴하면 $\{f_n\}$도 균등수렴한다.

19. (가)에 의해

$$2\pi i = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{a\cos t+ib\sin t}(-a\sin t+ib\cos t)dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{(b^2-a^2)\cos t\sin t+iab}{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}dt\text{에서}$$

실수부와 허수부를 비교하면 $2\pi=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{ab}{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}dt$에서 $K(a,b)=\frac{1}{ab}$.

(다)에 의해

$$\int_{-\pi}^{\pi}s_n(x)dx = \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2m^2}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos(mx)dx$$

$$= \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^2}\int_0^{\pi}x\cos(mx)dx$$

$$= \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^2}\cdot\frac{(-1)^m-1}{m^2}.$$

$[-\pi,\pi]$에서 $\left|\frac{1}{2m^2}|x|\cos(mx)\right|\le\frac{\pi}{2m^2}$,

$\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{\pi}{2m^2}=\frac{\pi}{2}\cdot\zeta(2)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^3}{12}<\infty$이므로 (라)에 의해 $\{s_n\}\rightrightarrows s$.

(나)와 (마)에 의해

$$\int_{-\pi}^{\pi}s(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}s_n(x)dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^m-1}{m^4}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^4}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-2}{(2k-1)^4}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{n^4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{(2n)^4}$$

$$=-\frac{15}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

$$=-\frac{15}{8}\cdot\zeta(4)=-\frac{\pi^4}{48}.$$

20. ③

$a_n=\frac{n!}{n^n}(x-3)^n,\ \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{|x-3|}{e}<1$에서 $3-e<x<3+e$.

구하는 개수 5.

21. ③

① 하이네 정리에 의해 $[0,1]$에서 균등연속된다.

② $\lim\limits_{n\to\infty}x_n^3=0,\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ (0으로 수렴 안하면 모순)이므로 $\{x_n\}$은 $\mathbb{R}$에서 코시 수열이다. 한편 f는 $x=0$에서 연속이므로 $\{f(x_n)\}$은 $f(0)$로 수렴한다. 따라서 $\{f(x_n)\}$는 코시 수열이다.

③ $f(x)=e^x,\ x_n=-n$

④ 서로 다른 두 실수 $x,\ y$에 대하여 평균값 정리에 따라 $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|=|f'(c)|\le M$이므로 $|f(x)-f(y)|\le M|x-y|$인 $M>0$있다(립쉬츠). 따라서 도함수가 유계이면 균등연속이다.

⑤ $\frac{1}{n}$은 단조 유계수열이므로 아벨 판정에 의해 옳다.

22. ⑤

ㄱ. 옳다.

ㄴ. $f,\ g$가 $(0,1)$에서 연속이므로 옳다.

ㄷ. $(0,1)$에서 $\{g_n\}\rightrightarrows g$이므로 $\varepsilon>0$에 대하여 $N\in\mathbb{N}$이 존재해서

임의의 $x\in(0,1)$에 대하여 $|f_N(x)-f(x)|<\varepsilon/3$.

g_N은 $(0,1)$에서 균등연속이므로 $\delta>0$가 존재해서

$x,\ y\in(0,1),\ |x-y|<\delta$이면 $|f_N(x)-f_N(y)|<\varepsilon/3$.

그러므로 $|x-y|<\delta,\ x,\ y\in(0,1)$이면

$$|f(x)-f(y)|\le|f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(y)|+|f_N(y)-f(y)|$$
$$<\varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon.$$

* 연속확장정리

23.

(Ⅰ) $f(x)=p_3(x)+\frac{f^{(4)}(t_x)}{4!}(x-c)^4$ 인 t_x가 x와 c사이에 있다.

가정에 의해 $f(x)=f(c)+\frac{f^{(4)}(t_x)}{4!}(x-c)^4$.

$f^{(4)}$는 연속, $f^{(4)}(c)>0$이므로 $x\in(c-\delta,c+\delta)$일 때 $f^{(4)}(x)>0$인 $\delta>0$있다.

$(c-\delta,c+\delta)$에서 $\frac{f^{(4)}(t_x)}{4!}(x-c)^4>0$이므로

$x\in(c-\delta,c+\delta)$일 때 $f(x)\ge f(c)$.

그러므로 f는 $x=c$에서 극솟값을 갖는다.

(Ⅱ) $x_1,\ x_2\in(a,b)$라 하자.

$0\le t\le 1$인 $t\in\mathbb{R}$에 대하여 $L_t:=(1-t)x_1+tx_2\in(a,b)$이므로

$f(x)=f(L_t)+f'(L_t)+\frac{f''(t_x)}{2!}(x-L_t)^2$인 t_x가 x와 L_t사이에 있다.

$x_1-L_t=t(x_1-x_2),\ x_2-L_t=(t-1)(x_1-x_2)$이므로

$(1-t)f(x_1)+tf(x_2)=f(L_t)+(t-t^2)\frac{f''(t_x)}{2}(x_1-x_2)^2$.

$0\le t\le 1$일 때 $-t^2+t\ge 0$이고 가정에 의해 $\frac{f''(t_x)}{2}(x_1-x_2)^2\ge 0$이므로

$(1-t)f(x_1)+tf(x_2)\ge f(L_t)$.

그러므로 f는 (a,b)에서 볼록함수이다.

(Ⅲ) $f(x)-p_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$인 t_x가 x와 c사이에 있다.

가정에 의해

$$\|f(x)-p_n(x)\|_{(a,b)}=\left\|\frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}\right\|_{(a,b)}$$

$$\le\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot(b-a)^{n+1}\to 0\ (n\to\infty)\text{이므로}$$

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}p_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

24. ⑤

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1/n^2}{1/n\sqrt{n^2+7}}=1<\infty$이므로 극한비교판정에 의해 주어진 급수는 수렴한다.

ㄴ. 양항 수열 $\left\{\sin\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right\}$은 0으로 수렴하고 $n\geq 4$일 때 감소한다. 교대급수 판정에 의해 주어진 급수는 수렴한다.

ㄷ. $a_n=\frac{2^n+3^n}{4^n+12^n}x^{2n}$, $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{x^2}{4}\right|<1$에서 $|x|<2$, 수렴 반경 2.

* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{3}{12}|x^2|=\frac{1}{4}|x^2|<1$.

25. ④

ㄱ. $[0,1]$에서 $|f_n(x)|\leq 2^{-n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}=1$이므로

바이어슈트라스 $M-$판정에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$은 균등수렴.

ㄴ. $\sum_{k=1}^{n}f_k$은 $[0,1]-\{r_k\,|\,k=1,2,\cdots,n\}$에서 연속,

$\{f_n\}\rightrightarrows f$이므로 f는 $[0,1]-\{r_n\,|\,n\in\mathbb{N}\}$에서 연속.

ㄷ. $\sum_{k=1}^{n}f_k$의 불연속점의 집합 A의 측도 0이므로

$\sum_{k=1}^{n}f_k\in\mathfrak{R}([0,1])$, 균등수렴하므로 $f\in\mathfrak{R}([0,1])$.

$\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\sum_{k=1}^{n}f_k(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2^k}\right]_{x=r_k}^{x=1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-r_n}{2^n}$.

임의의 $n\in\mathbb{N}$, $1>r_n$이므로 $f(1)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$.

따라서 $\int_0^1 f(x)dx=f(1)$라 할 수 없다.

26.

(Ⅰ) $x\in I$에 대하여 $|x|<r<1$인 $r>0$을 택하자.

$\left\{\sum_{k=1}^{n}f_k\right\}$가 I에서 점별수렴하고 $r\in I$이므로 $\sum_{k=1}^{\infty}a_kr^k$가 수렴한다.

[정리 1]에 의해 $\left|a_kr^k\right|=|a_k|r^k\leq M$인 $M>0$있다.

이때 $\left|a_kx^k\right|\leq\frac{M}{r^k}$, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M}{r^k}$는 수렴하므로 [정리 2]에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|<\infty$.

(Ⅱ) $[-a,a]$에서 $|f_n(x)|\leq M|a^n|$, $\sum_{n=1}^{\infty}M|a^n|<\infty$이므로 [정리 6]에 의해

$\sum_{n=1}^{\infty}f_n$은 $[-a,a]$에서 f로 균등수렴.

(Ⅲ) I에서 $f_n(x)=a_nx^n$은 미분가능, $f_n'(x)=na_nx^{n-1}$.

[정리 3]에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n'$은 I에서 $g\in\mathbb{R}^I$로 점별수렴한다.

$c\in I$에 대하여 $|c|<a<1$인 a택하자. $x\in(-a,a)\subset I$일 때, [정리 4]에 의해 다음 식을 만족하는 t가 x와 c사이에 있으며, $t\in(-a,a)$이므로

$$
\begin{aligned}
|g(x)-g(c)| &\leq \sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|\left|x^{n-1}-c^{n-1}\right| \\
&= \sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|\cdot(|n-1|\cdot|t|^{n-2}\cdot|x-c|) \\
&\leq \left(\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)|a_n|\cdot a^{n-2}\right)\cdot|x-c|.
\end{aligned}
$$

[정리 3]에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$은 I에서 수렴하므로

$\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)|a_n|a^{n-2}=L>0$, $|g(x)-g(c)|\leq L|x-c|$ (립쉬츠)이므로

g는 $x=c\in I$에서 연속, 따라서 $g=\sum_{n=1}^{\infty}f_n'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$은 I에서 연속.

[정리 5]에 의해 $G(x)=\int_0^x g(t)dt$라 할 때 $G'=g$.

$\int_0^x\left(\sum_{k=1}^{n}ka_kt^{k-1}\right)dt=\sum_{k=1}^{n}a_kx^k$이므로 $\lim_{n\to\infty}\int_0^x\left(\sum_{k=1}^{n}ka_kt^{k-1}\right)dt=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=f(x)$.

$$\left|G(x)-\int_0^x\left(\sum_{k=1}^{n}ka_kt^{k-1}\right)dt\right|\leq\int_0^x\sum_{k=n+1}^{\infty}ka_k|x|^{k-1}dt=\sum_{k=n+1}^{\infty}ka_k|x|^k.$$

$\sum_{n=1}^{\infty}na_n|x|^n<\infty$이므로 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}ka_k|x|^k=0$.

조임정리에 의해 $\lim_{n\to\infty}\left|G(x)-\int_0^x\left(\sum_{k=1}^{n}ka_kt^{k-1}\right)dt\right|=0$이므로

$G(x)=f(x)$, $\quad g=G'=f'$.

27. ④

ㄱ. $\|f_n - 0\|_{[0,\infty)} \le \frac{1}{n} \to 0\ (n\to\infty)$이므로 $\{f_n\}\rightrightarrows 0$,

$[0,\infty)$에서 $\frac{e^{-kx}}{k^3} \le \frac{1}{k^3}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} = \zeta(3) < \infty$이므로

바이어슈트라스 $M-$판정에 의해 $\{g_n\}$은 균등수렴.

ㄴ. $n\to\infty$일 때,

$$\int_0^\infty f_n = \int_0^n \frac{x}{n^2}dx + \int_n^\infty 0dx \to \frac{1}{2}$$

$$\ne \int_0^\infty f.$$

ㄷ. $g_n(0)\to\zeta(3)$, $\left|(-k)\cdot\frac{e^{-kx}}{k^3}\right| \le \frac{1}{k^2}$, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$이므로 바이어슈트라스 $M-$판정에 의해 $\{g_n{}'\}$는 균등수렴한다.

그러므로 함수열과 미분에 관한 정리에 의해 $\{g_n\}$는 g로 균등수렴하고, $\{g_n{}'\}$는 g'으로 점별수렴. (유계폐구간에서는 균등수렴한다.)

28. ④

* 리만 제타 함수 $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

ㄱ. $x\in\mathbb{R}$, $\frac{1}{x^2+k^3}\le\frac{1}{k^3}$, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}=\zeta(3)<\infty$,

바이어슈트라스 $M-$판정에 의해 $\{f_n\}$은 균등수렴.

ㄴ. $\{f_n\}$은 균등수렴하는 연속함수열이므로 옳다.

ㄷ. $\{g_n\}$이 균등수렴하면 함수열 $\left\{\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{x}\right\}$은 $\mathbb{R}-\{0\}$에서 0으로 균등수렴.

$\|n^{-2}x^{-1}\|_{\mathbb{R}-\{0\}}=\infty$이므로 모순. $\{g_n\}$은 균등수렴하지는 않는다.

ㄹ. $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \frac{1}{x}\cdot\zeta(2)=\frac{1}{x}\cdot\frac{\pi^2}{6}$은 $\mathbb{R}-\{0\}$에서 연속.

29. ④

$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$, 수렴반경 1이므로 $|x|<1$에서 항별 미분가능.

$-(1+x)^{-2}=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot(-1)^n x^{n-1}$, $x\cdot(1+x)^{-2}=\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^{n+1}x^n$.

* 멱급수(거듭제곱급수, power series) 성질

① 수렴반경 R이면 $(-R,R)$에서 연속이고, 항별 미분, 항별 적분가능하다.

② (아벨정리) 수렴구간(반경) 내 컴팩트 집합 K에서 균등수렴한다. 특히, 수렴반경 R일 때 $[R,R]$에서 균등수렴할 필요충분조건은 $f(R)$, $f(-R)$이 존재

③ $\sum_{n}^{\infty} a_nx^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n$의 수렴반경 R_1, R_2,

$R=\min\{R_1,R_2\}$일 때 $|x|<R$에서 다음이 성립.

㉠ $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$

㉡ $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_kb_{n-k}\right)x^n\right]$

30. ①

① $x=0,\ 1$일 때 $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0$,

$0<x<1$일 때 $0<1-x^2<1$이며

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}nx(1-x^2)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{(1/1-x^2)^n\ln(1/1-x^2)}=0.$$

따라서 $\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n=0.$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{2(n+1)}\left[(1-x^2)^{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{2}.$$

② $\Re([0,1])$의 함수열 $\{f_n\}\rightrightarrows 0$이므로 옳다.

③ 균등수렴하지는 않지만 옳다.

④ $\Re([0,1])$의 함수열 $\{f_n\}\rightrightarrows 0$이므로 옳다.

⑤ 균등수렴하지는 않지만 옳다.

31. 극한값은 존재하지 않는다.

$x<0$일 때 $(x^2)^{\frac{5}{2}}=-x^5$, $x>0$일 때 $(x^2)^{\frac{5}{2}}=x^5$.

$$\frac{\left[\sin x - x+\frac{x^3}{6}\right]}{(x^2)^{5/2}}=\frac{x^5}{|x|^5}\left[\frac{1}{5!}-\frac{x^2}{7!}+\frac{x^4}{9!}-\frac{x^6}{11!}+\cdots\right]$$

$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{5}{2}}=1$이므로 주어진 극한의 좌극한은 $-\frac{1}{5!}$, 우극한은 $+\frac{1}{5!}$.

그러므로 주어진 극한값은 존재하지 않는다.

32. 단조감소 양항 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n$이 수렴 $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

$a_n=\frac{(2n-1)!}{(2^n\cdot n!)^2}$은 양항 수열이다. $0<\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{4n^2+2n}{4n^2+8n+4}<1$이므로

$\{a_n\}$은 단조감소, $0<a_n\le\frac{1}{2n}\to0\ (n\to\infty)$ (조임정리)

교대급수 판정에 의해 주어진 급수는 수렴한다.

33. f는 C^∞급 함수이므로 테일러 정리에 의해

$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!}x^{n+1}$인 t_x가 0과 x사이에 있다.

$f(0)=0$, $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}\big|_{x=0}=(-1)^{n-1}(n-1)!$이므로

$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$.

$R_n(x)=\frac{(-1)^n}{n+1}(1+t_x)^{-n-1}$,

$\|f_n(x)-f(x)\|_{[0,1]}=\|R_n(x)-0\|_{[0,1]}\le\frac{1}{n+1}\to0\ (n\to\infty)$이므로

$[0,1]$에서 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$.

34. $0\le x<1$일 때 $f(x)=0$, $x=1$일 때 $f(x)=1$,

$1<x\le2$일 때 $f(x)=\frac{3}{2}$.

$\{f_n\}$은 $[0,2]$에서 연속함수열이다. 만약 $\{f_n\}\rightrightarrows f$이면 f도 연속이다.

f는 $x=1$에서 불연속이므로 $\{f_n\}\not\rightrightarrows f$.

35. 수렴

$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)!}{(n+2)^{n+1}}\cdot\frac{(n+1)^n}{n!}\right]=\frac{1}{e}<1$이므로

비판정에 의해 주어진 급수는 수렴한다.

36. * 출제오류

$\lim_{x\to0^-}f(x)=\infty\ne0=\lim_{x\to0^+}f(x)$.

f는 $x=0$에서 불연속이므로 미분가능하지도 않으며, n번 미분가능하지도 않다.

그러므로 테일러급수도 존재하지 않으며 (1)의 결과를 근거로

실함수와 복소함수의 미분가능성이 갖는 특징의 차이도 무엇인지 알 수 없다.

* $x=0$일 때 0, $x\ne0$일 때 $e^{-\frac{1}{x^2}}$으로 정의한 함수 $g(x)$에 대하여

$g^{(n)}(0)=0$이며 테일러급수 0이다.

37.

(1) 임의의 $x \in \mathbb{R}$에 대하여 $|2^{-n}\cos(3^n x)| \le 2^{-n}$, $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = \dfrac{1}{1-2^{-1}} = 2$.

바이어슈트라스 $M-$판정에 의해 $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}\cos(3^n x)$는 $\mathbb{R}$에서 균등수렴.

(2) $\sum_{k=0}^{n} 2^{-k}\cos(3^k x) \in \Re(\mathbb{R})$이므로 $f \in \Re(\mathbb{R})$이고,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{n} 2^{-k}\cos(3^k x)dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} 2^{-k}\cdot\int_0^{2\pi}\cos(3^k x)dx\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} 6^{-k}\left[\sin(3^k x)\right]_0^{2\pi}\right] = 0.\end{aligned}$$

38.

(1) $x=0,\ 1$일 때 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$,

$0<x<1$일 때 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}(1-x)nx^n = (1-x)\cdot\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{(1/x)^n}$

$$= (1-x)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1/x)^n \ln(1/x)} = 0.$$

그러므로 $[0,1]$에서 $f(x)=0$

(2) $\| f_n - f \|_{[0,1]} = f_n(n/n+1) = (1+1/n)^{-n-1} \to e^{-1}\ (n\to\infty)$.

$\therefore\ \{f_n\} \not\rightrightarrows f$.

39. 주어진 가정에 의해 임의의 다항식 $p(x)$에 대하여 $\int_0^1 f(x)p(x)dx = 0$.

바이어슈트라스 근사정리에 의해

$f(x)$로 균등수렴하는 다항함수열 $\{p_n(x)\}$있다.

$0 = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)p_n(x)dx = \int_0^1 f(x)^2 dx$, $f^2(\ge 0)$는 $[0,1]$에서 연속이므로

$f^2 \equiv 0$, $f \equiv 0$.

40. 수렴

$f(x) = \dfrac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$, $[1,\infty)$에서 $f \ge 0$,

$$f'(x) = \frac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x} - e^{-\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$= -\dfrac{1}{2}\dfrac{e^{-\sqrt{x}}}{x}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) < 0$, f는 감소함수

$\int_1^\infty f(x)dx = 2e^{-1} < \infty$이므로 적분판정에 의해 주어진 급수는 수렴한다.

41. ㉢

㉠ $\| f_n(x) - f(x) \|_{\mathbb{R}} = \infty$, 균등수렴하지 않는다.

㉡ $\| f_n(x) - f(x) \|_{\mathbb{R}} = \infty$, 균등수렴하지 않는다.

㉢ $\| f_n(x) - f(x) \|_{\mathbb{R}} \le \dfrac{1}{n} \to 0\ (n\to\infty)$, $\{f_n\} \rightrightarrows f$.

42. ④

① $f(x) = x$

② $f(x) = x$

③ $f(x) = 1$

④ 가정에 의해 임의의 다항식 $p(x)$에 대하여

$\int_{-1}^{1} f(x)p(x)dx = 0$. 바이어슈트라스 근사정리에 의해

f로 균등수렴하는 다항함수열 $\{p_n(x)\}$있다.

$0 = \lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1} f(x)p_n(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)^2 dx$,

$f^2(\ge 0)$는 $[-1,1]$에서 연속이므로 $f^2 \equiv 0$, $f \equiv 0$.

43. ②

$t \in [0,1]$에 대하여 x축 위에서 a에서 b를 잇는 선분 $ta+(1-t)b$,

$f(ta+(1-t)b)$는 f의 $x=a$에서 $x=b$까지의 함숫값,

$tf(a)+(1-t)f(b)$는 $f(a)$에서 $f(b)$를 잇는 선분이다.

$f(ta+(1-t)b) \le tf(a)+(1-t)f(b)$는 $f(a)$, $f(b)$를 잇는 선분이

$f([a,b])$보다 윗쪽에 그려진다는 것이다. (아래로 볼록)

$f(x) = \sin x\ (0 \le x \le \dfrac{\pi}{2})$는 조건을 만족하지 않는다.

44. ④ $\dfrac{1}{4}$

$a_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}x^n$, $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 4|x| < 1$, 수렴반경(구간) $\dfrac{1}{4}$.

45. ④

① $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$은 $[1,\infty)$에서 감소, $f \ge 0$, $f(n) = \dfrac{1}{1+n^2}$.

$\int_1^\infty f(x)dx = \tan^{-1}x\big|_1^\infty = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} < \infty$이므로

적분 판정법에 의해 주어진 급수는 수렴

② $a_n = \dfrac{n!}{(n+2)!} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$, $b_n = \dfrac{1}{1+n^2}$, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = 1 < \infty$이므로

극한비교판정에 의해 $\sum a_n$, $\sum b_n$은 동시에 수렴하거나 동시에 발산.

$\sum a_n$이 수렴하므로 $\sum b_n$도 수렴한다.

③ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n}{e^n}} = \dfrac{1}{e} < 1$이므로 제곱근 판정에 의해 $\sum\dfrac{n}{e^n}$은 절대수렴한다.

④ 코시 응집 판정 이용하자.

$\left\{\dfrac{\log n}{n}\right\}_{n=3}^{\infty}$은 감소하는 양항 수열이다.

$\sum_{n=3}^{\infty}\dfrac{\log n}{n}$의 수렴성은 $\sum_{n=3}^{\infty} 2^n\cdot\dfrac{\log(2^n)}{2^n} = \sum_{n=3}^{\infty} n\log 2$의 수렴성과 동치이다.

$\sum_{n=3}^{\infty} n\log 2$는 일반항판정에 의해 발산하므로 $\sum_{n=3}^{\infty}\dfrac{\log n}{n}$는 발산한다.

따라서 주어진 급수도 발산한다.

46. ①

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$, $1+2+\dfrac{2^2}{2!}+\dfrac{2^3}{3!}+\cdots+\dfrac{2^n}{n!}+\cdots = e^2$.

[기타]

<미분방정식>

1. $X(t)=\begin{pmatrix}\alpha e^{-t}+\beta e^{5t}\\-\alpha e^{-t}+2\beta e^{5t}\end{pmatrix}$

$X(t)=\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\end{bmatrix}$라 하면 $x'=x+2y,\ y'=4x+3y$에서 $y=\dfrac{x'-x}{2}$이므로

$x''-4x'-5x=0$에서 특성방정식 $t^2-4t-5=0,\ t=-1,\ 5.$

따라서 $x(t)=\alpha e^{-t}+\beta e^{5t},\ y(t)=-\alpha e^{-t}+2\beta e^{5t}.$

그러므로 $X(t)=\begin{pmatrix}\alpha e^{-t}+\beta e^{5t}\\-\alpha e^{-t}+2\beta e^{5t}\end{pmatrix}.$

2. $y=\alpha e^{-x}+\beta e^{4x}-\dfrac{1}{5}xe^{-x}$

$y''-3y'-4y=0$의 해 $y=e^{tx}$ 라 하면

$t^2-3t-4=0$에서 $t=-1,\ 4$이므로 $y=e^{-x},\ e^{4x}.$

따라서 일반해는 $y=\alpha e^{-x}+\beta e^{4x}$이다.

$y''-3y'-4y=e^{-x}$의 특수해 $y=\gamma\cdot xe^{-x}$라 하면

$(-2\gamma+\gamma x)-3(\gamma-\gamma x)-4\gamma x=1$에서 $k=-\dfrac{1}{5}.$

그러므로 $y=\alpha e^{-x}+\beta e^{4x}-\dfrac{1}{5}xe^{-x}.$

3.

하위 영역	배점	예상 정답율(%)	출제근거 (이유)
고등수학(미분방정식)	4	75	자작

$y'=p$라 두면, $xp'+p=0$ ………… 1점

$\dfrac{p'}{p}=-\dfrac{1}{x}$에서 $\ln|p|=-\ln x+C$

$\therefore\ p=\dfrac{C_1}{x}\ (C_1=e^C)$ ………… 2점

$y'(1)=2$에서 $C_1=2$ ………… 3점

$y'=\dfrac{2}{x}$에서 $y=2\ln x+C_2$

$y(1)=1$에서 $C_2=1$ ………… 4점

(답) $y=\ln x^2+1$ 또는 $2\ln x+1$

4. ④

5. ①

6. ②

7. ①