[전공내용학 기출문제]

[정수론]

1. 집합 A, B, C가

$$A=\{x\in\mathbb{Z}\mid 21x\equiv 45\ (\mathrm{mod}\ 66),\ 0\le x\le 65\},$$
$$B=\{x\in\mathbb{Z}\mid x^3-1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 151),\ 0\le x\le 150\},$$
$$C=\{x\in\mathbb{Z}\mid x^n-1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 151),\ 0\le x\le 150\}$$

이다. A와 B의 원소의 개수를 순서대로 구하시오.
또한 $|A|=|B\cup C|$를 만족시키는 정수 $n(0\le n\le 150)$의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, 151은 소수이고 $|X|$는 집합 X의 원소의 개수이다.) [4점, 서술형B-7] [2026]

2. 소수 157의 원시근(primitive root) 5에 대하여 집합 A를

$$A=\{5^i\mid i\text{는 } 100 \text{ 이하의 양의 정수}\}$$

라고 할 때, 합동식 $x^6+1\equiv 0$ (mod 157)의 해가 되는 A의 원소의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오.
또한 다음 식의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.

$$\sum_{i=1}^{155}\left\{\left(\frac{5^i}{157}\right)\left(\frac{i^3}{157}\right)\left(\frac{157-i}{157}\right)+\left(\frac{5^i-1}{157}\right)\right\}$$

(단, $\left(\frac{}{-}\right)$는 르장드르 기호(Legendre symbol)이다.) [4점, 서술형A-11] [2025]

3. r을 홀수인 소수 p의 원시근(primitive root)이라 하고 $X=\{k\in\mathbb{N}\mid 1\le k<p-1,\ \gcd(k,p-1)=1\}$이라 하자. 임의의 a, $b\in X$에 대하여 r^{ab}이 p의 원시근임을 보이시오.
또한, a, $b\in X$에 대하여 $r^{ab}\equiv r^a$ (mod p) 또는 $r^{ab}\equiv r^b$ (mod p)를 만족시키는 순서쌍 (a,b)의 개수를 $|X|$의 식으로 나타내고, 이러한 순서쌍의 개수가 15가 되도록 하는 모든 소수 p의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $|X|$는 집합 X의 원소의 개수이다.) [4점, 서술형B-9] [2024]

4. $11\le k\le 20$인 정수 k에 대하여 합동식

$$x^2+23x-k\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 75)$$

의 정수해가 존재하지 않도록 하는 모든 k의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B-10] [2023]

5. 합동식 $x^5\equiv 23$ (mod 35)의 정수해 x를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, x는 35와 서로소이고 $0\le x\le 34$이다.) [4점, 서술형B-8] [2022]

6. 합동방정식

$$(x^{10}-1)(x^{10}+x^5+1)(x^{36}-1)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 61)$$

의 법 61에 대한 해의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형A-11] [2021]

7. 합동방정식 $x\equiv 25^{99}$ (mod $19\cdot 13$)과 연립합동방정식 $\begin{cases} x\equiv a & (\mathrm{mod}\ 19)\\ x\equiv b & (\mathrm{mod}\ 13)\end{cases}$이 동치가 되도록 하는 정수 a, b의 값을 각각 구하시오. 또한 합동방정식의 정수해 x의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $0\le a<19$, $0\le b<13$, $0\le x<247$) [2점, 기입형A-7] [2020]

8. 자연수 m에 대하여 집합 T_m을

$$T_m = \{a \in \mathbb{N} \mid a^{\varphi(8m)} \equiv 1 \pmod{8m},\ 1 \le a \le 8m\}$$

으로 정의할 때, 집합 T_m의 원소의 개수가 $4\varphi(m)$이 되도록 하는 100 이하의 자연수 m의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $\mathbb{N}$은 자연수 전체의 집합이고, $\varphi(n)$ $(n \in \mathbb{N})$은 n 이하의 자연수 중에서 n과 서로소인 수의 개수로 정의되는 오일러 $\varphi-$함수이다.) [4점, 서술형B-3] [2019]

9. 합동식

$$x^{n+5} - x^n - x^5 + 1 \equiv 0 \pmod{131}$$

의 법 131에 대한 해의 개수가 5가 되도록 하는 130 이하의 자연수 n의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형A-13] [2018]

10. $1 \le k \le 2016$인 자연수 k에 대하여 $a_k = k! \times (2017-k)!$일 때, 르장드르 기호(Legendre symbol)의 합

$$\sum_{k=3}^{2014} \left(\frac{a_k}{2017}\right)$$

의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. (참고 : 2017은 소수이다.) [4점, 서술형A-13] [2017]

11. 정수 23은 법(modulo) 89에 대한 원시근(primitive root)이고, 89는 소수이다. 정수 $a = 23^{41}$에 대하여 $a^n \equiv 23 \pmod{89}$를 만족하는 가장 작은 양의 정수 n의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형A-13] [2016]

12. 다음 삼차 합동방정식에 대하여 $\mathbb{Z}_{2015}$에 속하는 해의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [5점, 서술형A-4] [2015]

$$x^3 - 8 \equiv 0 \pmod{2015} \quad (\text{참고 : } 2015 = 5 \times 13 \times 31)$$

13. 10과 서로소인 양의 정수 m에 대하여 m^{18}의 마지막 두 자리 수가 21이다. m^{294}의 마지막 두 자리 수를 구하시오. [2점, 기입형A-5] [2014]

14. 정수 3은 법 50에 대한 원시근(primitive root)이다. 1보다 크거나 같고 25보다 작거나 같은 정수 중 합동식

$$x^{12} \equiv -9 \pmod{50}$$

의 해를 모두 더한 값은? [2점] [2013-15]

① 22 ② 24 ③ 26
④ 28 ⑤ 30

15. 소수 $p(p>2)$에 대하여 $-2p$가 $935(=5\times 11\times 17)$의 이차잉여(quadratic residue)일 때, p의 이차잉여만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2013-16]

<보기>

ㄱ. -11 ㄴ. 5 ㄷ. 17

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

16. 정수 x_0과 27은 서로소이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$x_n \equiv 16x_{n-1} \pmod{27},\ 0<x_n<27$$

이 성립할 때, $x_n \equiv x_0 \pmod{27}$이 되는 최소의 자연수 n의 값은? [2점] [2012-16] (단, 2는 법 27에 관한 원시근(primitive root)이다.)

① 4 ② 9 ③ 13
④ 18 ⑤ 26

17. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2012-17]

<보기>

ㄱ. 연립합동식 $\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{28} \\ x \equiv 6 \pmod{36} \end{cases}$의 정수해가 존재한다.

ㄴ. 홀수인 소수 p에 대하여 합동식 $x^4 \equiv -1 \pmod{p}$의 정수해가 존재하면 $p \equiv 1 \pmod{8}$이다.

ㄷ. 부정방정식 $x^2+2x+5-65y^2=2011$의 정수해가 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

18. 소수(prime number)에 대한 <보기>의 명제 중 옳은 것만을 모두 고른 것은? [2점] [2011-17]

<보기>

ㄱ. p가 소수일 때, $p!+1$을 나누는 소수는 p보다 크다.
ㄴ. 홀수인 소수 p는 합동식 $(p-2)! \equiv 1 \pmod{p}$를 만족시킨다.
ㄷ. 홀수인 소수 $p(p\neq 3)$은 합동식 $3^{p-1} \equiv 1 \pmod{2p}$를 만족시킨다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 이차합동식 $x^2+44 \equiv 0 \pmod{111}$의 정수해는 법 111에 대하여 m개다. m의 값은? [2점] [2011-18]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

20. <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [2점] [2010-21]

<보기>

ㄱ. 부정방정식 $7x+31y=2$의 정수해가 존재한다.
ㄴ. 합동식 $6x \equiv 22 \pmod{32}$의 정수해는 법 32에 대하여 1개뿐이다.
ㄷ. 합동식 $x^2+10x+20 \equiv 0 \pmod{17\cdot 23}$의 정수해가 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 정수 2는 법 29에 대한 원시근(primitive root)이다. 1보다 크거나 같고 28보다 작거나 같은 정수 중 합동식 $x^4 \equiv 1 \pmod{29}$의 해를 모두 곱한 값을 m이라 할 때, $2^k \equiv m \pmod{29}$를 만족시키는 최소의 양의 정수 k는? [2점] [2010-22]

① 1　② 4　③ 7
④ 14　⑤ 28

22. 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [2점] [2009-17]

〈보기〉

ㄱ. 정수 a, b가 서로소이기 위한 필요충분조건은 적당한 정수 s, t에 대하여 $as+bt=1$이 성립하는 것이다.
ㄴ. 양의 정수 m과 n에 대하여, 2^m-1과 2^n-1이 서로소이기 위한 필요충분조건은 m과 n이 서로소인 것이다.
ㄷ. 양의 정수가 25진법으로 표현될 때 3자리수이기 위한 필요충분조건은 5진법으로 표현될 때 6자리수인 것이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

23. 원시근(primitive root)과 관련된 〈보기〉의 명제 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [2점] [2009-18]

〈보기〉

ㄱ. 19는 원시근을 갖는다.
ㄴ. 3은 8의 원시근이다.
ㄷ. 1보다 큰 정수 m의 원시근 g와 양의 정수 i, j에 대하여, $g^i \equiv g^j \pmod{m}$이면 $i \equiv j \pmod{\phi(m)}$이다.
(단, $\phi(m)$은 1, 2, $\cdots$, m 중 m와 서로소인 수의 개수이다.)

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

24. 절댓값이 10 이하인 두 정수 x, y가

$$32x+14y=(32,\ 14)$$

를 만족시킬 때, $|x|+|y|$의 값은? (단, (a, b)는 a와 b의 최대공약수이다.) [2점] [2009 모의-17]

① 4　② 6　③ 8
④ 10　⑤ 12

25. 정수의 곱셈에서 법 m에 대한 3의 위수(order of 3 modulo m)를 $\mathrm{ord}_m 3$으로 나타낸다.

$$r=\mathrm{ord}_5 3$$
$$s=\mathrm{ord}_7 3$$
$$t=\mathrm{ord}_{35} 3$$

일 때, 세 수 r, s, t의 곱 rst의 값은? [2점] [2009 모의-18]

① 48　② 144　③ 288
④ 24^2　⑤ 35^2

26. 정수 x, y, z에 관한 다음 방정식의 일반해를 구하시오. [4점] [2008-7]

$$3x+4y+5z=2$$

27. 정수 x, y, z에 관한 합동식

$$x^2+y^2 \equiv 3z^2 \pmod{4}$$

의 해집합은

$$\{(x, y, z) \mid x \equiv y \equiv z \equiv 0 \pmod{2}\}$$

임을 보이시오. [4점] [2007-11]

28. K고등학교 전체 학생을 같은 인원수의 9팀으로 나누면 1명이 남고, 같은 인원수의 10팀으로 나누면 2명이 남으며, 같은 인원수의 11팀으로 나누면 10명이 남는다. K고등학교 전체 학생 수 x가 $x \equiv a \pmod{990}$을 만족할 때, 정수 a의 값을 구하시오. (단, $0 \le a < 990$) [4점] [2006-11]

29. 1부터 1008까지의 자연수 중 1008과 서로소(relatively prime)인 자연수의 개수를 구하시오. [2점] [2005-10]

30. 다음 두 이차합동식의 해가 존재하는지 판별하시오. [총 5점] [2004-6]

(1) $x^2 \equiv 97 \pmod{101}$ [2점]

(2) $x^2 + 2x \equiv 28 \pmod{89}$ [3점]

31. 다음 합동식을 만족하는 정수 x, y는 어느 것인가? [1996-17]

$$9^x \equiv y \pmod{19}$$

① $x=35,\ y=1$ ② $x=36,\ y=-1$

③ $x=36,\ y=1$ ④ $x=36,\ y=-1$

32. 오늘부터 n^7째 되는 날이 금요일이면 오늘부터 $(n+2)^7$째 되는 날은 무슨 요일인가? (단, n은 자연수) [1996-20]

① 금요일 ② 토요일

③ 일요일 ④ 월요일

33. 100!를 101로 나누었을 때 나머지는? (단, $n! = 1, 2, 3, \cdots, n$) [1995-26]

① 1 ② 2

③ 99 ④ 100

34. $500! \times 200!$이 35^n으로 나누어떨어질 때, 정수 n의 최댓값은? [1994-9]

① 32 ② 82

③ 114 ④ 146

35. 정수 $2^{15}14^{10}+2$를 11로 나누었을 때의 나머지는? [1993-19]

① 1 ② 4

③ 7 ④ 10

36. 방정식 $2x+3y=55$ 를 만족하는 양의 정수해 (x, y)의 개수는? [1993-25]

① 10 ② 9

③ 8 ④ 7

[선형대수학]

1. 모든 성분이 실수인 3×3 행렬 A가

$$A\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\8\\8\end{pmatrix},\qquad A\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\\-20\\10\end{pmatrix},\qquad \det(A)=800$$

을 만족시킬 때, A의 모든 고윳값(eigenvalue)을 구하시오.
또한 가역 대칭행렬(symmetric matrix) B가

$$AB=2\det(B)I,\qquad \mathrm{tr}(B)<0$$

을 만족시킬 때, B의 모든 고윳값과, B의 고유벡터(eigenvector)로 구성된 $\mathbb{R}^3$의 정규 직교 기저(orthonormal basis)를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $\det(M)$은 행렬 M의 행렬식(determinant), $\mathrm{tr}(M)$은 M의 대각합(trace)이고, I는 3×3 단위행렬이다.) [4점, 서술형A-9] [2026]

2. 모든 성분이 실수인 3×3 대칭행렬(symmetric matrix) A가 다음 <조건>을 만족시킨다.

<조 건>

(가) 행렬 A의 행렬식(determinant)은 32이다.

(나) 행렬 $A^{-1}-\frac{1}{2}I$의 영공간(null space)은 두 벡터 $(1,-2,1)$, $(1,2,-3)$으로 생성된다.

대각행렬(diagonal matrix) $D=(d_{ij})$와 직교행렬(orhogonal matrix) P가 $D=P^TAP$를 만족시킬 때, D와 P를 각각 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, A^{-1}은 A의 역행렬, I는 3×3 단위행렬, P^T는 P의 전치행렬(transpose matrix)이고 $d_{11}\le d_{22}\le d_{33}$이다.) [4점, 서술형A-8] [2025]

3. 모든 성분이 실수인 3×3 행렬 A과 행렬 $B=A^2-A+5I$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 행렬 $A-3I$는 역행렬을 갖지 않는다.
(나) 행렬 A의 특성방정식(고유방정식, characteristic equation)은 허근 α를 가지고 $|\alpha|=\sqrt{2}$이다.
(다) 행렬 B의 최소다항식(minimal polynomial)의 차수는 B의 특성다항식(고유다항식, characteristic polynomial)의 차수보다 낮다.

행렬 A의 모든 고윳값(eigenvalue)과 대각합(trace) 및 행렬식(determinant)을 각각 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, I는 3×3 단위행렬이다.) [4점, 서술형A-8] [2024]

4. 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간 $\mathbb{R}^3$에 대하여 선형변환 $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$을

$$L(x_1,x_2,x_3)=(x_1-2x_2+x_3,\,x_2-x_3,\,-x_2+x_3)$$

으로 정의하고, $\mathbb{R}^3$의 순서 기저(ordered basis) α를

$$\alpha=\{(1,1,1),\,(0,1,1),\,(1,0,1)\}$$

이라 하자. 순서 기저 α에 대한 L의 행렬 $[L]_\alpha$를 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 $[L]_\alpha$가 대각화가능인지 판별하고 그 이유를 쓰시오. [4점, 서술형A-9] [2023]

5. 3차 정사각행렬 $A=(a_{ij})$가

$$A\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\4\\8\end{bmatrix},\ A\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\-2\end{bmatrix},\ A\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\-2\\0\end{bmatrix}$$

을 만족할 때, A의 고윳값(eigenvalue)을 모두 쓰시오.
또한, $a_{11}+a_{12}+a_{13}$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형A-11] [2022]

6. 행렬 $A=\begin{bmatrix}3&2&2\\0&3&1\\0&-2&0\end{bmatrix}$에 대하여 $A=PDP^{-1}$을 만족하는 행렬 $D=\begin{bmatrix}d_1&0&0\\0&d_2&0\\0&0&d_3\end{bmatrix}$와 가역행렬 P를 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 행렬 A^n의 2행 3열의 성분을 구하시오. (단, $d_1\le d_2\le d_3$이고 n은 자연수이다.) [4점, 서술형 B-6] [2021]

7. 행렬 $A=\begin{bmatrix}5&3&-3\\0&1&-2\\0&0&-1\end{bmatrix}$의 고윳값을 모두 구하시오. 또한 선형변환 $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$을 $T(\mathbf{x})=A\mathbf{x}$라 할 때, $\mathbb{R}^3$의 기저 B에 대한 T의 행렬표현 $[T]_B$이 대각행렬이 되도록 하는 기저 B를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B-6] [2020]

8. 3차원 유클리드 내적 공간 $\mathbb{R}^3$의 세 벡터 $\boldsymbol{v}_1=(1,0,0)$, $\boldsymbol{v}_2=(1,1,1)$, $\boldsymbol{v}_3=(0,-1,1)$에 대하여 두 벡터 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$로 생성된 부분공간을 W_{12}라 하고 두 벡터 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_3$으로 생성된 부분공간을 W_{13}이라 하자. $\mathbb{R}^3$의 벡터 $\boldsymbol{u}$에 대하여 부분공간 W위로의 $\boldsymbol{u}$의 정사영(orthogonal projection)을 $\mathrm{proj}_W\boldsymbol{u}$라 하고, 실수 k에 대하여 선형변환 $T_k:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$을

$$T_k(\boldsymbol{u})=\mathrm{proj}_{W_{12}}\boldsymbol{u}+\mathrm{proj}_{W_{13}}\boldsymbol{u}+k\boldsymbol{u}$$

로 정의하자. T_k의 역변환(inverse transformation)이 존재하지 않도록 하는 모든 k의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 T_k의 랭크(계수, 계급수, 유효차수, rank)가 2인 k의 값을 구하시오. (단, 두 벡터 $\boldsymbol{u}_1=(a_1,a_2,a_3)$, $\boldsymbol{u}_2=(b_1,b_2,b_3)$의 유클리드 내적은 $\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_2=\sum_{i=1}^{3}a_ib_i$이다.) [4점, 서술형A-13] [2019]

9. 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간 $\mathbb{R}^3$의 기저(basis) $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\}$에 대하여 세 벡터 $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_3$, $\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3$이 일차독립임을 보이시오. 또 모든 성분이 실수인 3×3 행렬 A가

$$(A-I)(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)=\mathbf{0},$$
$$(A-2I)(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_3)=\mathbf{0},$$
$$(A-3I)(\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3)=\mathbf{0}$$

을 만족시킬 때, A의 행렬식(determinant) $\det(A)$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, I는 3×3 단위행렬이다.) [4점, 서술형B-3] [2018]

10. 3차원 유클리드 내적 공간 $\mathbb{R}^3$에서 두 벡터 $\boldsymbol{v}_1=(1,\ 2,\ 2)$, $\boldsymbol{v}_2=(1,\ -1,\ 2)$로 생성된 부분공간을 V라 하자. V의 임의의 정규직교 기저(orthonormal basis) $B=\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2\}$에 대하여 B에 의해 결정되는 네 실수 a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}가 존재하여

$$\boldsymbol{v}_1=a_{11}\boldsymbol{u}_1+a_{12}\boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{v}_2=a_{21}\boldsymbol{u}_1+a_{22}\boldsymbol{u}_2$$

일 때, $|a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}|$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.
(단, 두 벡터 $\boldsymbol{u}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\boldsymbol{v}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$의 유클리드 내적은
$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$이다.) [4점, 서술형B-3] [2017]

11. 2차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^2$의 단위벡터(unit vector) $\mathbf{u}$에 대하여 선형사상 T : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$을

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}$$

로 정의하자. 모든 벡터 $\mathbf{x}$에 대하여 $\|T(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$임을 보이시오.

또한 $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$일 때, $\mathbb{R}^2$의 기저(basis) $\mathscr{B} = \{(1,\ 0),\ (1,\ 1)\}$에 대한 T의 행렬 $[T]_{\mathscr{B}}$를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, 두 벡터 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$에 대하여 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$는 $\mathbf{x}$와 $\mathbf{y}$의 점곱(유클리드 내적, dot product, Euclidean inner product)이고, $\|\mathbf{x}\|$은 $\mathbf{x}$의 유클리드 노름(Euclidean norm)이다.) [4점, 서술형B-3] [2016]

12. 좌표공간 $\mathbb{R}^3$에서 원점과 점 $(1, 2, 3)$을 지나는 직선을 회전축으로 하여 180° 회전이동하는 변환을 T라 하자. 벡터 (x, y, z)에 대하여 $T(x, y, z) = A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$가 되는 행렬 A의 특성다항식(고유다항식, characteristic polynomial)을 구하시오. [2점, 기입형A-4] [2015]

13. 다음 4개의 복소함수

$$f_1(z) = z,\ f_2(z) = \overline{z},\ f_3(z) = e^z,\ f_4(z) = e^{\overline{z}}$$

로 생성되는 복소 벡터 공간

$$\{a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 + a_4 f_4 \mid a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{C}\}$$

를 V라 하자. 여기서 $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.

복소평면 $\mathbb{C}$상의 시계반대방향의 단위원 C : $|z| = 1$에 대하여 사상(map) T : $V \to \mathbb{C}$를 다음과 같이 정의하자.

$$T(f) = \int_C f(z)dz$$

T가 선형사상임을 증명하시오. 선형사상 T의 핵(kernel) $\ker(T)$의 기저를 구하고, $\ker(T)$를 이용하여 $T^{-1}(2) = \{f \in V \mid T(f) = 2\}$를 나타내시오. [10점, 논술형B-2] [2014]

14. 좌표평면 $\mathbb{R}^2$ 위에 곡선

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 14ax^2 + 2a^2xy + 14ay^2 + x + y - 1 = 0\}$$

이 주어져 있다. 곡선 C를 원점을 중심으로 시계방향으로 45°만큼 회전이동했을 때, 초점이 x축에 있는 쌍곡선이 되는 자연수 a 중에서 가장 작은 수를 구하시오. [2점, 기입형A-13] [2014]

15. 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간 $\mathbb{R}^5$에 속하는 벡터 $v_1,\ v_2,\ v_3$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [1.5점] [2013-13]

<보기>

ㄱ. $v_1,\ v_2,\ v_3$이 일차독립이면 $v_1+v_2+v_3,\ v_2+v_3,\ v_3$도 일차독립이다.
ㄴ. 집합 $\{av_1+bv_2+cv_3 \mid a, b, c\in\mathbb{R}\}$는 $\mathbb{R}^5$의 부분공간이다.
ㄷ. 5차 정사각행렬 A에 대하여 두 방정식 $Ax=v_1,\ Ax=v_2$가 모두 해를 가지면 방정식 $Ax=2v_1+v_2$도 해를 가진다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간 $\mathbb{R}^3$에 대하여 선형사상 $T:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$을 $T(x, y, z)=(x+y-2z, y, x-2z)$로 정의하자. T의 상(image) $\mathrm{im}(T)$와 T의 핵(kernel) $\ker(T)$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2.5점] [2013-14]

<보기>

ㄱ. $\mathrm{im}(T)$의 차원은 1이다.
ㄴ. 벡터 $(1, 0, 0)$의 $\ker(T)$ 위로의 직교정사영(orthogonal projection)은 $\frac{2}{5}(2, 0, 1)$이다.
ㄷ. 벡터 (x, y, z)의 $\ker(T)$ 위로의 직교정사영을 $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$로 나타낼 때, 행렬 A의 고유치(eigenvalue, characteristic value)를 모두 더한 값은 1이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간 $\mathbb{R}^4$의 서로 다른 벡터 $v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ v_5$로 생성되는 벡터공간

$$V=\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle$$

에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2012-14]

<보기>

ㄱ. 벡터공간 V와 $\mathbb{R}^n$이 동형(isomorphic)이 되는 자연수 n이 존재한다.
ㄴ. 집합 $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$가 V의 기저(basis)인 벡터 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5가 존재한다.
ㄷ. $\dim V=2$인 벡터 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5가 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 실수체 $\mathbb{R}$ 위에서 정의된 벡터공간

$$V=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle|\, a, b, c, d\in\mathbb{R}\right\}$$

와 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$에 대하여 선형사상 $L: V\to V$를

$$L(B)=AB-BA$$

로 정의하자. V의 부분공간(subspace) $\mathrm{im}(L)=\{L(B) \mid B\in V\}$의 차원은? [2점] [2012-15]

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

19. 각 성분이 실수인 3×3 정칙행렬(가역행렬) A의 수반행렬(adjoint matrix)을 $\mathrm{adj}\,A$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 모두 고른 것은? [2점] [2011-15]

<보기>

ㄱ. 임의의 자연수 n에 대하여 $\mathrm{adj}(A^n)=(\mathrm{adj}A)^n$이다.

ㄴ. 행렬 A의 전치행렬(transpose matrix)을 A^T라 할 때, $\mathrm{adj}(A^T)=(\mathrm{adj}\,A)^T$이다.

ㄷ. $\mathrm{adj}(\mathrm{adj}A)=A$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 정사각행렬(square matrix)에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2점] [2011-16]

<보기>

ㄱ. 정칙행렬은 대각화가능(diagonalizable)하다.

ㄴ. 행렬 A의 전치행렬이 대각화가능하면 A는 대각화가능하다.

ㄷ. 선형사상

$$T:\ \mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}^3,\ T(x,\ y,\ z)\ =(x,\ x+y,\ y+z)$$

의 $\mathbb{R}^3$의 표준기저(standard basis)에 대한 행렬은 대각화가능하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

21. 행렬 $A=\begin{pmatrix}-1&2&0\\7&4&0\\0&0&3\end{pmatrix}$에 대한 다음 명제 중 옳지 않은 것은? [2점] [2010-23]

① A의 고유다항식(characteristic polynomial)은 $x^3-6x^2-9x+54$이다.

② A는 항등행렬이 아닌 두 개의 가역행렬(정칙행렬)의 곱으로 나타낼 수 있다.

③ A의 수반행렬(adjoint matrix)의 행렬식(determinant)은 A의 행렬식의 제곱과 같다.

④ A^2의 모든 고윳값(eigenvalue, characteristic value)들의 합은 36이다.

⑤ 함수 $T:\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}^3$를 임의의 $v\in\mathbb{R}^3$에 대하여 $T(v)=Av$로 정의할 때, T는 정칙선형사상이다.

22. 실수체 $\mathbb{R}$ 위에서 정의된 벡터공간 $\mathbb{R}^3$에 관련된 <보기>의 명제 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [1.5점] [2010-24]

<보기>

ㄱ. 유리수 전체의 집합 $\mathbb{Q}$에 대하여 $\mathbb{Q}^3$는 $\mathbb{R}^3$의 부분공간이다.

ㄴ. $\mathbb{R}^3$의 부분공간 $U=\{(x,\ y,\ z)\,|\,z=x+5y\}$에 대하여 $\mathbb{R}^3$가 U와 W의 직합(direct sum) $U\oplus W$와 같게 되는 $\mathbb{R}^3$의 부분공간 W가 존재한다.

ㄷ. 선형사상 $T:\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}^3$, $T(x,y,z)=(x-y,\ 2y,\ x-3z)$에 대하여 T의 핵(kernel) $\ker(T)$의 차원은 1이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

23. 각 성분이 실수인 4×4 행렬 A의 고윳값(eigenvalue)이 1, -1, 2, 4일 때, 행렬 A의 특징으로 항상 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? [1.5점] [2009-15]

<보기>

ㄱ. A의 행렬식(determinant)은 -8이다.

ㄴ. A의 자취(trace)는 6이다.

ㄷ. A는 대칭행렬(symmetric matrix)이다.

ㄹ. A의 계수(rank)는 4이다.

① ㄱ, ㄴ ② ㄴ, ㄷ ③ ㄷ, ㄹ
④ ㄱ, ㄴ, ㄹ ⑤ ㄱ, ㄷ, ㄹ

24. 유한차원 내적공간 V의 부분공간 $W(W \neq V)$에 대하여 선형사상 P를 V에서 W로의 정사영(orthogonal projection)이라 하자. P에 관한 설명 중 옳지 않은 것은? [2점] [2009-16]

① $\mathrm{Im}(P) = W$ 이다.
② $\mathrm{Ker}(P) \cap W = \{0\}$이다.
③ 임의의 $w \in W$ 에 대하여 $P(w) = w$이다.
④ 임의의 $v \in V$에 대하여 $P(P(v)) = P(v)$이다.
⑤ P를 나타내는 행렬은 가역행렬이다.

25. 실수의 집합 $\mathbb{R}$ 위에서 정의된 벡터공간 $\mathbb{R}^4$의 두 벡터 $\mathrm{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, $\mathrm{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$에 대하여 내적 $\mathrm{a} \cdot \mathrm{b}$를 $\mathrm{a} \cdot \mathrm{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4$로 정의하자. 두 벡터 $(1, 0, 1, -1)$과 $(1, 2, 2, 0)$이 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값은? [1.5점] [2009 모의-15]

① $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$
④ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

26. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 다음 중 $P^{-1}AP$가 대각행렬이 되도록 하는 행렬 P는? [2점] [2009 모의-16]

① $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

27. 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간 $P_2 = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$에 대하여 선형변환(linear transformation) $T : P_2 \to P_2$가 다음을 만족한다고 하자.

$$T(1+x) = 1 + x^2$$
$$T(x+x^2) = x - x^2$$
$$T(1+x^2) = 1 + x + x^2$$

이 때, $T(4 + 2x + 3x^2)$을 구하시오. [4점] [2008-10]

28. 행렬 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$가 대각화가능함을 보이고, $P^{-1}AP$가 대각행렬이 되는 행렬 P를 하나 구하시오. [4점] [2007-7]

29. 실수 집합을 $\mathbb{R}$이라 하자. 선형변환(linear transformation) $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$은 $\mathbb{R}^n$의 임의의 두 점 x, $\mathrm{y}(\mathrm{x} \neq \mathrm{y})$를 잇는 선분 $\{(1-t)\mathrm{x} + t\mathrm{y} \mid 0 \le t \le 1\}$을 $\mathbb{R}^m$에 포함되는 선분 (또는 점)으로 보내는 것을 보이시오. [4점] [2006-7]

30. 선형사상 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$는 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$에 의한 곱이다. 즉, $x \in \mathbb{R}^3$에 대하여 $Tx = Ax$이다. T의 핵(kernel)의 차원(dimension)과 T의 상(image)의 차원을 각각 구하시오. [5점] [2005-11]

31. 다음 행렬의 고유치(eigen value)와 고유공간(eigen space)을 구하시오. [총 5점] [2004-5]

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

32. 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간 V에 대하여 W_1, W_2를 V의 부분공간이라 하자. $V=W_1+W_2$일 때, 임의의 $v\in V$에 대하여

$$v=w_1+w_2(w_1\in W_1,\ w_2\in W_2)$$

로 유일하게 표현될 필요충분조건은 $W_1\cap W_2=\{0\}$임을 증명하시오. [5점] [2003-7]

33. V와 W가 n차원 실벡터공간이라 하자. 선형사상 $L: V\rightarrow W$에 대하여 $\ker L=\{0\}$이면 L은 동형사상(isomorphism)임을 보이시오. [5점] [2002-9]

34. $\mathbb{R}^2$의 두 기저(basis), $\alpha=\langle v_1, v_2\rangle$, $\beta=\langle u_1, u_2\rangle$에 대하여 $v_1=(0,1)$, $v_2=(1,0)$, $u_1=(1,-2)$, $u_2=(2,3)$일 때, 다음 물음에 답하시오. [총 4점] [2001-6]

(1) 선형변환 $f:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2$, $f(v_1)=u_1$, $f(v_2)=u_2$를 나타내는 행렬 A를 구하시오. [2점]

(2) 이 선형변환에 의하여 세 점 $P(-1,0)$, $Q(1,-1)$, $R(2,3)$이 옮겨지는 점을 각각 P', Q', R'이라 할 때, $\triangle P'Q'R'$의 넓이를 구하시오. [2점]

35. 타원을 이루는 이차곡선 $ax^2+hxy+by^2+gx+fy+c=0$의 중심을 구하고자 한다. 타원의 중심 $P(x_0, y_0)$를 지나고 방향코사인이 l, m인 직선의 매개변수 방정식을 이용하여 x_0, y_0에 대한 연립방정식을 유도하는 아래 풀이 과정의 나머지 부분을 완성하시오. [5점] [2001-12]

〈풀이과정〉

$$ax^2+hxy+by^2+gx+fy+c=0\ \cdots\cdots①$$

점 $P(x_0, y_0)$를 지나는 직선의 매개변수 방정식을 $\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \end{cases}\cdots\cdots②$ 라 하자.

②식을 ①식에 대입하여 t에 관하여 정리하면

$$(al^2+hlm+bm^2)t^2+\{(2ax_0+hy_0+g)l+(hx_0+2by_0+t)m\}t$$
$$+ax_0^2+hx_0y_0+by_0^2+gx_0+fy_0+c=0\cdots\cdots③$$

36. 3×3행렬

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

에 대하여, A^{10}의 고윳값(eigenvalues)과 고유벡터(eigenvectors)를 모두 구하시오. [5점] [2000-8]

37. $P^{-1}AP$가 대각행렬이 되도록 적당한 정칙행렬 P를 사용하여, 행렬

$$A=\begin{pmatrix}-5&9\\-6&10\end{pmatrix}$$

를 대각화하시오. [6점] [1999-7]

38. 2차원 아핀공간 A^2에서 $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$인 $\triangle ABC$를 $A'(1,-2)$, $B'(2,0)$, $C'(3,-1)$인 $\triangle A'B'C'$로 옮기는 아핀변환을 구하시오. [5점] [1998-9]

39. 실벡터공간 $\mathbb{R}^3$에서의 벡터 a에 대하여 선형사상

$$T(p)=a\times p+(p\cdot a)a\ \ (p\in\mathbb{R}^3)$$

가 정의되었다. 벡터 a의 크기가 $\sqrt{2}$일 때 T의 고유치를 구하고, T의 고유치는 그것뿐임을 보이시오. [5점] [1997-7]

(단, $u\times v$와 $u\cdot v$는 각각 벡터 u, v의 외적(Cross product)과 내적(Inner product)을 나타낸다.)

40. 선형 사상 $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$이

$$T(x, y, z) = (x+2y+3z,\ 4x+5y+6z,\ 7x+8y+9z)$$

로 정의될 때, $T(\mathbb{R}^3)$의 차원(dimension)을 구하시오. [3점] [1997 모의-11]

41. 직선 $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+2}{2}$와 점 $(1,\ -3,\ -4)$를 포함하는 평면을 α라 할 때, 원점에서 평면 α까지의 거리는? [1996-27]

① $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

③ $\sqrt{3}$ ④ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

42. 두 행렬 A, B가 유사(similar)행렬이고, A의 고유치(eigen value)가 1, 2, 3이면 행렬 B의 고유치는? [1995-8]

① $1,\ 2,\ 3$ ② $-1,\ 2,\ 3$

③ $-1,\ -2,\ -3$ ④ $1,\ -2,\ -3$

43. U, V는 두 벡터 공간(vector space)이고, $\dim(U)=2$, $\dim(V)=8$, $\dim(U \cup V)=5$일 때, 벡터공간 $U \cap V$의 차원(dimension)은? [1995-12]

① 2 ② 3

③ 4 ④ 5

44. $\mathbb{R}^3$위에서 다음 세 사영직선(projective line)이 공점선(concurrent line)이 될 k의 값은? [1995-33]

$x_1 - x_2 + x_3 = 0$

$kx_1 + x_2 + 3x_3 = 0$

$x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$

① -2 ② -1

③ 0 ④ 1

45. 점(x, y)를 점(ry, rx)로 옮기는 일차변환 f와 점(x, y)를 점 $(x\sin\theta + y\cos\theta,\ x\cos\theta - y\sin\theta)$로 옮기는 일차변환 g에 의한 합성 변환 $g \circ f$를 나타내는 행렬의 모든 성분의 합은? [1995-34]

① $2r(\cos\theta + \sin\theta)$ ② $2r(\cos\theta - \sin\theta)$

③ $2r\sin\theta$ ④ $2r\cos\theta$

46. 벡터공간 $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$의 부분공간

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle|\ a - 3b + 2c + d = 0 \right\}$$

의 차원 $\dim(W)$는? [1994-14]

① 1 ② 2

③ 3 ④ 4

47. 직교좌표평면 위의 임의의 점 $P(x,y)$에서 직선 $y = mx\ (m \neq 0)$에 내린 수선의 발을 $P'(x', y')$이라고 할 때, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$를 만족하는 일차변환의 행렬 A는? [1994-35]

① $\frac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix} m & 1 \\ m^2 & m \end{pmatrix}$ ② $\frac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix} 1 & m \\ m & m^2 \end{pmatrix}$

③ $\frac{1}{m^2+2}\begin{pmatrix} 1 & m^2 \\ -m & m \end{pmatrix}$ ④ $\frac{1}{m^2+2}\begin{pmatrix} -1 & m \\ m^2 & m \end{pmatrix}$

48. 연립방정식$\begin{cases} x+y+az=0 \\ x+ay+z=0 \\ ax+y+z=0 \end{cases}$이 $x=y=z=0$이외의 해를 갖도록 하는 a의 값들의 합은? [1993-16]

① -1　② 0
③ 1　④ 2

49. 세 집합

$$U=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle|\, a,\ b\ \ c\text{는 실수}\right\},$$

$$A=\left\{Y \,\middle|\, Y=X\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ X\in U\right\},\ B=\left\{Z \,\middle|\, Z=X\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ X\in U\right\}$$

에서 A와 B의 포함관계는? [1993-23]

① $A\subset B$　② $A\supset B$
③ $A=B$　④ $A\cap B=\varnothing$

50. 세 벡터 $(1, 1, 0)$, $(1, x, 1)$, $(0, 1, -1)$가 일차종속이 될 x의 값은? [1993-29]

① -1　② 0
③ 1　④ 2

[이산수학]

<경우의 수와 생성함수>

1. 수열 $\{a_n\}$이 점화식

$$a_0=0,\quad a_1=2,\quad a_n=4a_{n-1}-4a_{n-2}\ (n\geq 2)$$

를 만족시킨다. 이 점화식의 특성다항식(고유다항식, characteristic polynomial)과 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 순서대로 구하시오.

또한 수열 $\{a_n\}$의 생성함수(generating function)를 $f(x)$라 할 때, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = x\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^3$을 만족시키는 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형A-7] [2026]

2. 수열 $\{a_n\}$이 $a_0=a_1=0$, $a_n=1\ (n\geq 2)$를 만족시킬 때, $\{a_n\}$의 생성함수(generating function) $f(x)$를 구하시오.

또한, 수열 $\{b_n\}$이 $0<x<1$에서 $\sqrt{f(x)}=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$을 만족시킬 때, b_5의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B-8] [2024]

3. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_0=2,\ a_{n+1}=-2(n+1)a_n+3(n+1)!\quad (n\geq 0)$$

을 만족시킨다. $b_n=\frac{a_n}{n!}\ (n\geq 0)$인 수열 $\{b_n\}$의 생성함수(generating function) $f(x)$를 풀이 과정과 함께 쓰시오.

또한 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형 A-8] [2023]

4. $|x|<1$인 실수 x에 대하여

$$\frac{1}{(1-x)^3}=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\quad \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.

또한, 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$의 값을 쓰시오. [4점, 서술형A-7] [2022]

※ 다음 식은 필요하면 증명 없이 사용할 수 있다.

$\lvert x\rvert<1$인 실수 x에 대하여 $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} x^n$이다.

5. 일반화된 이항계수 $\binom{-\frac{1}{2}}{n}$이 $\binom{2n}{n}=f(n)\times\binom{-\frac{1}{2}}{n}$을 만족할 때, $f(n)$과 $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\left(-\frac{1}{8}\right)^n$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, n은 음이 아닌 정수이다.) [4점, 서술형A-7] [2021]

6. 점화식

$$a_0 = 1,\ a_n + a_{n-1} = (-1)^n\ (n \ge 1)$$

을 만족하는 수열 $\{a_n\}$의 생성함수(generating function) $g(x)$를 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 함수

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & -\frac{1}{3} < x < 1 \\ 0\ , & \text{그 외의 경우} \end{cases}$$

가 연속확률변수 X의 확률밀도함수일 때, 확률변수 X의 기댓값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형A-8] [2020]

7. 특정 프로젝트에 지원한 5명의 위원 A, B, C, D, E가 있다. 다음은 이 5명의 위원이 작업할 수 있는 요일을 각각 ○ 기호로 표시한 것이다. 이 프로젝트를 수행하기 위하여 5명의 위원 중 4명을 선발하여 서로 다른 요일에 배치하는 경우의 수를 구하시오. (단, 선발된 위원은 일주일 중 하루만 작업한다.) [2점, 기입형A-8] [2019]

위원 \ 요일	월	화	수	목	금	토	일
A	O	O	O	O			
B	O		O				
C	O	O		O			
D					O	O	
E					O		O

8. 점화식

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ 6a_n = 5a_{n-1} - a_{n-2}\ (n \ge 3)$$

의 특성다항식(고유다항식, characteristic polynomial)과 이 점화식을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n을 각각 구하시오. [2점, 기입형A-8] [2018]

9. 점화식

$$a_0 = 1,\ a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2^n}\,(n \ge 1)$$

을 만족하는 수열 $\{a_n\}$의 생성함수와 $\sum_{n=0}^{\infty} na_n$의 값을 각각 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B-2] [2016]

10. 자연수 n에 대하여, 방정식

$$x + y + z = n\ (\text{단, } 1 \le x \le 7,\ 0 \le y,\ 0 \le z)$$

을 만족하는 정수해의 개수를 a_n이라 하자. a_n의 생성함수 $f(x)$를 구하고, 이를 이용하여 a_{15}를 구하시오. [3점, 서술형A-6] [2014]

11. 점화식 $d_0=1$, $d_1=\frac{3}{2}+4\sqrt{5}$, $d_n=3d_{n-1}-d_{n-2}$ $(n\geq 2)$에 대하여 $d_n=ap^n+bq^n$일 때, $a+b+p+q$의 값은? [2점] [2013-38] (단, a, b, p, q는 상수이다.)

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

12. A, B, C, D, E 다섯 종류의 과자가 있다. 이 중에서 A 과자를 4개 이상 포함하지 않도록 과자 12개를 택하는 경우의 수는? (단, 각 종류의 과자는 12개 이상씩 있다.) [2점] [2013-39]

① 1310 ② 1315 ③ 1320
④ 1325 ⑤ 1330

13. 숫자 1, 2, 3, 4, 5를 다음 규칙

(가) 1, 2, 3은 각각 홀수 번 사용한다.
(나) 4와 5의 사용 횟수는 각각 음이 아닌 정수이다.

에 따라 일렬로 나열하여 8자리 자연수를 만들려고 할 때, 만들 수 있는 서로 다른 자연수의 개수는? [2점] [2012-39]

① $\frac{1}{8}(5^8-3^9-6)$ ② $\frac{1}{8}(5^8-3^9+2)$ ③ $\frac{1}{8}(5^8-3^9+10)$
④ $\frac{1}{8}(5^8-3^9+18)$ ⑤ $\frac{1}{8}(5^8-3^9+26)$

14. 어느 회사에서 신입 사원을 채용하려고 한다. 면접 위원 A, B, C, D 면접 점수표에 각각 점수를 1점에서 6점까지 줄 수 있다. 면접 점수의 합이 14점이 되는 면접 점수표의 가짓수는? (단, 각 면접 위원이 주는 점수는 자연수이다.) [2점] [2011-39]

면접 점수표

면접 위원	A	B	C	D	계
점수					14

① 138 ② 142 ③ 146
④ 150 ⑤ 154

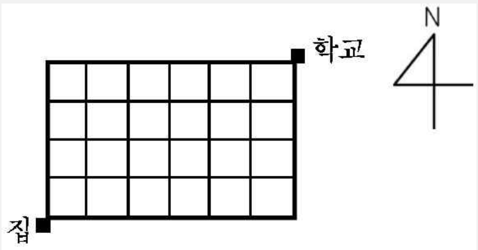
15. 빨간색, 노란색, 파란색 구슬이 각각 20개씩 들어 있는 바구니에서 30개의 구슬을 한꺼번에 꺼낸다고 하자. 꺼낸 구슬 중 빨간색, 노란색, 파란색 구슬의 개수를 각각 x, y, z라 할 때, 서로 다른 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는? [2점] [2010-37]

① 331 ② 341 ③ 351
④ 361 ⑤ 371

16. A고등학교에는 체조 선수가 5명이 있다. 어떤 체조 선수권 대회에 출전하기 위해서는 학교에서 실시하는 두 번의 자격 테스트를 통과해야 하는데, 1차 테스트를 통과한 사람만이 2차 테스트에 도전할 수 있다고 한다. 1차, 2차 테스트를 통과한 선수들의 집합을 각각 S, T라고 할 때, 두 집합 S, T가 구성될 수 있는 방법의 수는? (단, 각 테스트에 통과한 선수가 한 명도 없을 수 있다.) [2점] [2009-33]

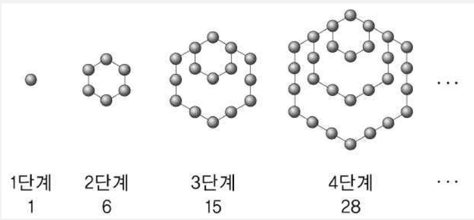
① 2^5 ② $6 \cdot 2^5$ ③ 3^5
④ $10 \cdot 2^5$ ⑤ 4^5

17. 그림은 집과 학교 사이의 도로를 나타낸 것이다. 굵은 선은 대로(大路)를, 가는 선은 소로(小路)를 나타낸다. 직선 도로를 따라갈 때, 한 교차로와 다음 교차로 사이를 구간이라 하자. 집에서 출발하여 각 교차로에서 동쪽 또는 북쪽 방향만을 택하여 학교까지 갈 때, 대로를 두 구간만 지나는 경로의 개수는? [2점] [2009모의-39]



① 30 ② 32 ③ 60
④ 120 ⑤ 210

18. 다음 그림과 같은 규칙으로 구슬이 배열되어 있다.



n단계에서의 구슬의 개수를 a_n이라 할 때, 두 항 a_n과 a_{n+1}사이의 점화관계(recurrence relation)를 구하고, a_n을 n에 관한 다항식으로 나타내시오. [4점] [2008-18]

19. 자연수

$$N = a \times 10^4 + b \times 10^3 + c \times 10^2 + d \times + e$$

에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족하는 N의 개수를 구하시오. [4점] [2006-12]

(i) $\{a, b, c, d, e\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
(ii) $\{1, 3, 5, 7\} \subset \{a, b, c, d, e\}$

20. 같은 종류의 물건 n개를 m명의 학생에게 나누어주는 경우의 수를 $f(n, m)$이라 할 때, 다음 물음에 답하시오. [총 5점] [2004-13]
(1) $f(6, 3)$의 값을 구하시오. [1점]
(2) 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명하시오. [4점]

$$f(1, m) + f(2, m) + \cdots + f(n, m) = f(n, m+1) - 1$$

21. 크기가 100KB, 150KB, 200KB, 250KB, 300KB인 다섯 개의 파일을 용량이 각각 1440KB인 같은 색의 구별이 안 되는 세 장의 플로피 디스켓에 저장하려고 한다. 디스켓 세 장 모두를 사용하여 다섯 개의 파일을 저장하는 방법의 수를 구하시오. (단, 디스켓에 저장하는 파일의 순서는 생각하지 않는다.) [5점] [2002-14]

22. 다음 조건을 만족하는 정수해 (x, y, z)는 모두 몇 개인가? [4점] [1999-14]

$$\begin{cases} x + y - z = 10 \\ x > 0,\ y > 2,\ z < 3 \end{cases}$$

23. 피보나치 수열 $\{f_n\}$은 다음과 같이 정의된다.

$$f_1 = f_2 = 1,\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}\ (n \geq 3)$$

피보나치 수열의 유래를 간단히 쓰고[3점], 다음 등식이 성립함을 보이시오[5점]. [총 8점] [1998-7]

$$f_{n+1} f_{n-1} = f_n^2 + (-1)^n\ (n \geq 2)$$

24. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = 1$, $a_2 = 8$, $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}\,(n = 3, 4, \cdots)$일 때, $\lim_{n \to \infty} a_n$의 값은? [1994-10]

① 3 ② 4

③ 5 ④ 6

25. $\sum_{i=1}^{9} \sum_{j=1}^{i} {}_iC_j$의 값은? [1994-25]

(단, 기호 ${}_iC_j$는 서로 다른 i개에서 j개를 택하는 조합의 수이다.)

① 1024 ② 1020

③ 1017 ④ 1013

<그래프>

1. 꼭짓점의 집합이 $V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$인 단순그래프(simple graph) G가 다음 <조건>을 만족시킨다.

<조 건>
(가) $n\in\{1,7\}$이면 $\deg(v_n)\le\chi(K_n)$이다.
(나) $n\in\{2,3,4,5,6\}$이면 $\deg(v_n)\le\chi(K_{n,n})$이다.

이때, $\sum_{n=1}^{7}\deg(v_n)$의 값이 최대가 되도록 하는 G의 변(edge)의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $\deg(v_n)$은 꼭짓점 v_n의 차수(degree)이고, $\chi(K_n)$과 $\chi(K_{n,n})$은 각각 완전그래프(complete graph) K_n과 완전이분그래프(complete bipartite graph) $K_{n,n}$의 채색수(chromatic number)이다.) [4점, 서술형A-10] [2025]

2. 꼭짓점의 집합이 $V=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$이고 변(edge)의 집합이 $E=\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$인 단순그래프(simple graph) G에 대하여, 4차 정사각행렬 $B=(b_{ij})$를

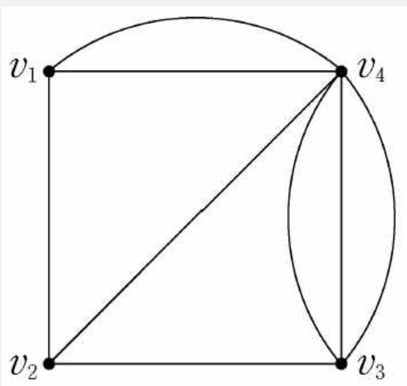
$$b_{ij}=\begin{cases}1 & (x_i\text{와 } e_j\text{가 근접(incidence)한 경우}) \\ 0 & (\text{그 외의 경우})\end{cases} \qquad (i, j=1,2,3,4)$$

로 정의하자. d_i가 꼭짓점 x_i의 차수(degree)이고 G의 인접행렬(adjacency matrix) A에 대하여

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix},\quad L=\begin{pmatrix}d_1&0&0&0\\0&d_2&0&0\\0&0&d_3&0\\0&0&0&d_4\end{pmatrix}-A$$

일 때, L의 행렬식(determinant)의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.
또한, 꼭짓점 x_1에서 꼭짓점 x_4로 가는 길이가 4인 길(경로, walk)의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형A-8] [2022]

3. 다음 그래프의 인접행렬(adjacency matrix)을 A라 할 때, A의 모든 성분의 합을 구하시오. [2점, 기입형A-2] [2017]



4. 다음 조건 ①, ②에 의해 정의된 그래프 G의 변(edge)의 개수를 구하고, G는 평면그래프(planar graph)가 아님을 보이시오. 그리고 그래프 G의 채색수(chromatic number) $\chi(G)$를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [5점, 서술형B-4] [2015]

① 그래프 G의 꼭짓점의 집합은 아홉 개의 원소로 구성된 $V(G)=\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$이다.
② 두 꼭짓점 v_a와 v_b는 두 정수 a와 b가 서로소일 때만 인접한다. 예를 들어, v_2와 v_7은 인접하지만, v_4와 v_{10}은 인접하지 않는다.

5. 꼭짓점의 개수가 6인 단순그래프(simple graph)에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2013-40]

<보기>

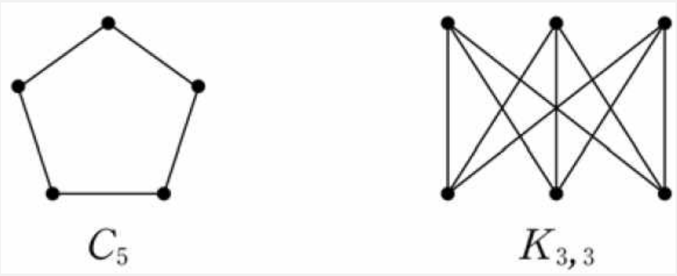
ㄱ. 꼭짓점의 차수(degree)가 4, 4, 3, 3, 2, 0인 단순그래프가 존재한다.
ㄴ. 꼭짓점의 차수가 2, 2, 2, 2, 2, 2인 단순그래프는 유일하다.
ㄷ. 꼭짓점의 차수가 d_1, d_2, d_3, d_4 ,d_5, d_6 $(d_1 > d_2 > d_3 > d_4 > d_5 > d_6 > 0)$인 단순그래프가 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

6. 꼭짓점을 공유하지 않는 두 그래프, 회로(cycle) C_5와 완전이분그래프(complete bipartite graph) $K_{3,3}$에 대하여 다음 조건을 만족하는 그래프를 G라 하자.

(가) $V(G) = V(C_5) \cup V(K_{3,3})$
(나) $E(G) = E(C_5) \cup E(K_{3,3}) \cup \{xy \mid x \in V(C_5),\ y \in V(K_{3,3})\}$

그래프 G의 모든 꼭짓점(vertex)의 차수(degree)의 합이 m, 그래프 G의 채색수(chromatic number)가 n일 때, $m+n$의 값은? [2점] [2012-40] (단, 그래프 H에 대하여 $V(H)$는 H의 꼭짓점의 집합, $E(H)$는 H의 변(edge)의 집합이고, xy는 두 꼭짓점 x와 y가 양 끝점(endpoint)인 변이다.)



① 91 ② 92 ③ 93
④ 94 ⑤ 95

7. G는 꼭짓점이 v_1, v_2, $\cdots$, $v_n (n \ge 3)$이고 변의 개수가 $m (m \ge 1)$인 단순그래프(simple graph)이다.

G의 인접행렬(adjacency matrix)과 근접행렬(결합행렬, incidence matrix)을 각각 A와 B라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 모두 고른 것은? [2점] [2011-40]

<보기>

ㄱ. A^2의 대각합(trace), 즉 모든 (i, i)성분의 합은 $2m$이다.
ㄴ. 자연수 $k \ge 3$에 대하여 A^k의 대각합은 G에서 길이가 k인 회로(cycle)의 개수이다.
ㄷ. BB^T의 (i, i)성분은 꼭짓점 v_i의 차수(degree)와 같다. (단, B^T는 행렬 B의 전치행렬이다.)

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

8. 단순평면그래프(simple planar graph)에 대한 <보기>의 명제 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [2점] [2010-38]

<보기>

ㄱ. 완전이분그래프 $K_{3,4}$는 평면그래프가 아니다.
ㄴ. 모든 꼭짓점의 차수(degree)가 6 이상인 평면그래프가 존재한다.
ㄷ. 꼭짓점의 개수가 30인 평면그래프를 변(edge)이 교차하지 않게 평면에 그렸을 때, 하나의 면(face)만 사각형이고 나머지 면은 모두 삼각형이면 변의 개수는 83이다. (단, 여기서 삼각형(사각형)이라 함은 3(4)개의 변으로 둘러싸인 면을 의미하고, 외부영역(unbounded region)도 면으로 간주한다.)

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

9. 사각형 R의 내부에 7개의 점이 찍혀있다. 사각형 R의 4개의 꼭짓점을 포함한 11개의 점들 중에서 두 점씩 적당히 선택하여 두 점을 양 끝점으로 하는 선분을 그리되, 어떤 두 선분도 교차되지 않게 하면서 사각형 R를 삼각형과 사각형만으로 분할하였다. 각 점의 차수(degree)가 4일 때, 분할의 결과로 생긴 삼각형의 개수는? (단, 사각형 R의 4개의 변도 선분으로 생각한다.) [2점] [2009-34]

〈도움말〉

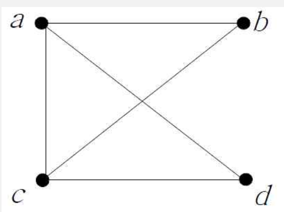
- 선분(변, edge)은 곧은 선 또는 구부러진 선을 모두 의미한다.
- 삼(사)각형이란 세(네) 개의 점과 세(네) 개의 선분으로 둘러싸인 도형을 말한다.
- ‘사각형 R를 분할한다.’ 라는 것은 사각형 R를 내부가 겹치지 않는 다각형들로 빈틈없이 채운다는 것이다.

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

10. 다섯 마리의 물고기 A, B, C, D, E가 있다. A는 B를, B는 C를, C는 D를, D는 E와 A를 잡아먹는다. 잡아먹히는 물고기가 생기지 않도록 다섯 마리의 물고기를 서로 다른 모양의 어항 4개에 넣는 방법의 수는?
(단, 빈 어항이 남아 있어도 된다.) [2점] [2009 모의-40]

① 36 ② 108 ③ 144
④ 216 ⑤ 252

11. 그림과 같이 주어진 그래프에서 꼭짓점 a, b, c, d 순서의 인접행렬(adjacency matrix) A에 대하여 A^4은 다음과 같다.



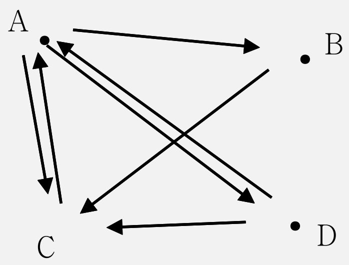
$$A^4=\begin{pmatrix} 15 & 9 & 14 & 9 \\ 9 & 10 & 9 & 10 \\ 14 & 9 & 15 & 9 \\ 9 & 10 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

인접행렬 A를 구하고, 행렬 A^4에서 1행 3열의 값 14가 무엇을 의미하는지 쓰시오. [4점] [2007-10]

12. 단순그래프 G와 음이 아닌 정수 n에 대하여, n보다 작거나 같은 개수의 색으로 그래프 G를 적절하게 색칠하는(즉, 변으로 연결된 두 꼭짓점을 서로 다른 색으로, 모든 꼭짓점을 칠하는) 방법의 수를 $P_G(n)$이라 하면 $P_G(n)$은 n에 대한 다항식이다. 또, m개의 꼭짓점을 가진 선형 그래프(linear graph 또는 path graph) L_m은 다음과 같다.

이 때, $G=L_m$의 다항식 $P_G(n)$을 구하고, $P_G(n)$을 사용하여 이 그래프를 적절하게 색칠하는 데 필요한 색의 최소 개수를 구하시오. [5점] [2005-8]

13. 다음 그래프는 어느 도시의 A, B, C, D 네 지점 사이에서 자동차로 곧바로 갈 수 있는 경우를 화살표로 나타내고 있다. 예를 들면, A지점에서 B지점으로 향하는 화살표는 A지점에서 B지점으로 자동차로 곧바로 갈 수 있지만 B지점에서 A지점으로는 곧바로 갈 수 없음을 나타낸다. 다음 물음에 답하시오. [총 5점] [2003-5]



(1) 주어진 그래프를 인접행렬(adjacent matrix)로 나타내시오. [2점]

(2) 어떤 지점에서 다른 지점으로 갈 때, '곧바로 또는 한 지점을 거쳐서' 갈 수 있는지 없는지를 알 수 있는 행렬을 구하시오. (단, (1)에서 구한 인접행렬을 이용하시오.) [3점]

[확률과통계]

<이산형>

1. 어떤 공장에서 생산하는 제품의 수명 X의 확률밀도함수(probability density function)가 다음과 같다.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{c}{x^3}, & x>2\\ \dfrac{c}{16}x, & 0\le x\le 2\\ 0, & x<0\end{cases}$$

이 공장에서 생산하는 제품은 수명이 4 이상인 경우 우수 제품으로 분류되고, 4 미만인 경우 일반 제품으로 분류된다. 상수 c의 값과 임의로 선택한 제품이 우수 제품일 확률 $\mathrm{P}(X\ge 4)$의 값을 순서대로 구하시오. 또한 임의로 4개의 제품을 선택했을 때, 우수 제품이 일반 제품보다 더 많이 포함되어 있을 확률을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B-6] [2026]

2. 포아송분포(Poisson distribution) $Poisson(5)$로부터의 확률표본(random sample) X_1, X_2, $\cdots$, X_n에 대하여

$\overline{X}$를 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$라 하자. $\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\right)=140$일 때,

n의 값을 구하시오. [2점, 기입형B-2] [2024]

※ 다음은 필요하면 사용할 수 있다.

확률변수 X가 $Poisson(\lambda)$를 따르면 $\mathrm{P}(X=x)=\dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$이다.

3. 두 확률변수 X와 Y의 결합확률질량함수(joint probability mass function)가 다음과 같다.

X \ Y	1	2	3	4
0	p	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$
1	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{24}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	q

X의 기댓값이 $E(X)=\dfrac{11}{12}$일 때, $p\times\dfrac{1}{q}$의 값과 조건부확률 $P(X+Y\le 4\,|\,Y-X=2)$의 값을 순서대로 쓰시오. [2점, 기입형A-4] [2022]

4. 두 이산확률변수 X, Y의 결합확률분포가 다음과 같다.

X \ Y	0	1	2	3
0	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	0	$\frac{1}{5}$
1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$
2	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	0

조건 $Y=1$이 주어졌을 때, 확률변수 X의 조건부기댓값(conditional expectation) $\mathrm{E}[X|\,Y=1]$을 구하시오. [2점, 기입형A-7] [2018]

5. 앞면이 나올 확률이 $p(0<p<1)$인 동전을 학생 A가 n번 던지고, 학생 B가 $2n$번 던진다. 학생 A가 던져서 앞면이 나온 횟수와 학생 B가 던져서 앞면이 나온 횟수의 합이 2일 때, 학생 A가 던져서 앞면이 나온 횟수가 1일 확률이 $\frac{6}{13}$이다. n의 값을 구하시오. [2점, 기입형A-7] [2016]

6. 동전 3개를 동시에 던져서 모두 앞면이 나오는 경우를 성공이라고 하자. 동전 3개를 동시에 던지는 시행을 독립적으로 반복할 때, 5번 성공할 때까지의 시행 횟수를 확률변수 X라 하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2013-35]

<보기>

ㄱ. $\mathrm{P}(X \le 4)=0$

ㄴ. $\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(X=k)=1$

ㄷ. $\mathrm{P}(X=13)={}_{12}\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{8}\right)^5\left(\frac{7}{8}\right)^8$

① ㄴ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

7. 상자 A에 빨간 공 2개와 흰 공 3개가 들어 있고, 상자 B에 빨간 공 2개와 흰 공 m개가 들어 있다. 상자 A가 선택될 확률이 $\frac{1}{3}$이고 상자 B가 선택될 확률이 $\frac{2}{3}$이다. 두 상자 A, B 중 하나를 선택하여 그 상자에서 임의로 추출한 한 개의 공이 흰 공일 때, 이 흰 공이 상자 A에서 추출되었을 조건부 확률이 $\frac{2}{7}$이다, m의 값은? [2점] [2012-36]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

8. 두 이산형 확률변수 X와 Y의 결합확률질량함수(joint probability mass function) $f(x,y)=\mathrm{P}(X=x,\, Y=y)$를

$$f(x,\, y)=\frac{3x-y}{12},\ \ x=1,\, 2\ \ y=1,\, 2$$

라 하자. $Y=1$일 때, X의 조건부 기댓값(조건부 평균) $\mathrm{E}(X|Y=1)$의 값은? [2점] [2012-37]

① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{13}{9}$
④ $\frac{12}{7}$ ⑤ $\frac{9}{5}$

9. 한 개의 주사위를 던져 나온 눈의 수를 X라 하고, 나온 눈의 수와 같은 개수의 동전을 던져 나오는 앞면의 수를 Y라 하자.

$X=m$이 주어질 때 Y의 조건부 확률함수(조건부 확률질량함수, conditional probability function)를 $p_{Y|X}(n|m)$, Y의 확률함수를 $p_Y(n)$이라고 하자. $p_{Y|X}(n|m)$, $p_Y(0)$을 옳게 나타낸 것은? [2.5점] [2011-38]

	$p_{Y\|X}(n\|m)$	$p_Y(0)$
①	$\frac{{}_m\mathrm{C}_n}{6\cdot 2^m}$	$\frac{67}{6\cdot 64}$
②	$\frac{{}_m\mathrm{C}_n}{6\cdot 2^n}$	$\frac{63}{6\cdot 64}$
③	$\frac{{}_m\mathrm{C}_n}{2^m}$	$\frac{67}{6\cdot 64}$
④	$\frac{{}_m\mathrm{C}_n}{2^m}$	$\frac{63}{6\cdot 64}$
⑤	$\frac{{}_m\mathrm{C}_n}{2^n}$	$\frac{61}{6\cdot 64}$

10. 이산형 확률변수 X의 적률생성함수(moment generating function)가 다음과 같다.

$$M_X(t) = \mathrm{E}[e^{tX}] = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}e^{-t} + \frac{2}{5}e^{t} \quad (t\text{는 실수})$$

이때 확률변수 $Y = X^2$의 평균과 분산은? [2점] [2010-39]

	평균	분산
①	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{25}$
②	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{25}$
③	$\frac{1}{5}$	$\frac{14}{25}$
④	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{25}$
⑤	$\frac{3}{5}$	$\frac{14}{25}$

11. 1, 2, 3, 4의 숫자가 중복되지 않게 한 개씩 각 면에 새겨져 있는 사각연필이 있다. 이 사각연필을 굴렸을 때 각 면이 나올 확률이 같다고 하자. 이 사각연필을 80번 굴렸을 때 윗면에 나온 수의 합이 216 이상일 확률을 x라 할 때, 표준정규분포함수 $\Phi(z)$를 이용하여 x를 가장 가깝게 나타낸 것은? (단, ‘표준정규분포함수’는 Z가 표준정규확률변수일 때 확률 $\Phi(z) = \mathrm{P}(Z \le z)$로 정의된다.) [2점] [2009-32]

① $1-\Phi(0.2)$ ② $\Phi(0.2)$ ③ $1-\Phi(0.9)$
④ $\Phi(0.9)$ ⑤ $1-\Phi(1.6)$

12. 두 팀이 줄다리기를 하는데 세 번 먼저 이기는 팀이 우승한다. 각 시합에서 두 팀이 이길 확률은 각각 $\frac{1}{2}$이고, 각 시합은 독립적으로 진행된다고 가정한다. 우승팀이 결정될 때까지의 시합 횟수의 기댓값과 가장 가까운 자연수는? [2점] [2009모의-37]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

13. 동전 n개를 동시에 던져서 모두 앞면이 나오면 n점을 얻고, 그렇지 않으면 0점을 얻는다고 하자. 이 규칙에 따라 동전 n개를 동시에 던지는 시행에서 얻을 수 있는 점수의 기댓값 E_n을 구하고, E_n이 최대가 되는 n을 모두 구하시오. (단, n은 자연수이다.) [4점] [2008-19]

14. 확률변수 X가 이항분포 $B(n, p)$를 따를 때, X의 평균(기댓값)이 np임을 보이시오. [4점] [2007-17]

15. 정육면체 모양의 주사위가 있다. 이 주사위의 두 면에는 3, 나머지 네 면에는 1, 2, 4, 5가 각각 하나씩 적혀 있다. 이 주사위를 288번 던질 때, 짝수 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면, X는 이항분포 $B(n, p)$를 따른다. 이 때, X의 평균 $\mathrm{E}(X)$와 분산 $\mathrm{V}(X)$를 구하고, 짝수 눈이 88번 이상 112번 이하로 나올 확률 $\mathrm{P}(88 \le X \le 112)$를 정규근사시켜 구하시오. (단, $\mathrm{P}(88 \le X \le 112)$를 구하는 과정에서 연속성 수정(continuity correction)은 하지 않는다. 그리고 Z가 표준정규확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1) = 0.3413$, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2) = 0.4772$이다.) [4점] [2006-19]

16. 어떤 회사에서는 세 대의 기계 a, b, c로 같은 종류의 빵을 만들고 있다. 세 대의 기계는 각각 총생산량의 20%, 30%, 50%를 생산하고 있으며, 생산품의 불량률은 각각 0.5%, 1%, 2%이다. 생산된 빵을 임의로 한 개 택하여 검사했을 때, 그것이 불량품이었다고 하자. 이 불량품이 기계 a 또는 b에서 생산되었을 확률을 구하시오. [5점] [2003-9]

17. 동전 2개를 던질 때 앞면이 나오는 개수를 확률 변수 X라 하고, 확률 변수 Y를

$$Y = \begin{cases} 0, & X = 0, 2 \\ 1, & X = 1 \end{cases}$$

으로 정의할 때, 다음 물음에 답하시오. [총 5점] [2002-13]

(1) 다음 표를 완성하시오. [3점]

X의 확률 분포

X	P(X)
0	
1	
2	
합	1

Y의 확률 분포

Y	P(Y)
0	
1	
합	1

X와 Y의 결합 확률 분포

X \ Y	0	1	합
0			
1			
2			
합			1

(1) X와 Y의 공분산(covariance) σ_{XY}를 구하여라. [1점]

(2) X와 Y의 독립성 여부를 판별하시오. [1점]

18. 어떤 반에서 방학 후 여행에 대한 설문조사를 하였다. 강원도를 다녀온 학생이 전체의 $\frac{2}{5}$, 제주도를 다녀온 학생이 전체의 $\frac{1}{4}$이었다. 강원도를 다녀오지 않은 학생을 임의로 뽑았을 때, 이 학생이 제주도를 다녀오지 않았을 조건부 확률을 구하시오. (단, 강원도를 다녀올 사건과 제주도를 다녀올 사건은 서로 독립이다.) [5점] [2000-14]

19. 확률 변수 X의 확률밀도함수(p.d.f)가

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x & (x = 1, 2, 3, \cdots) \\ 0 & \text{이외의 경우} \end{cases}$$

으로 정의될 때, X의 분산은? [1996-5]

① 2 ② 4
③ 6 ④ 8

20. 1에서 5까지의 번호가 붙여진 학생 5명이 1번부터 번호순으로 세워져 있다. 이 중에서 2명의 학생을 뽑아 서로의 위치를 바꾸어 놓는 시행을 3회 반복하였을 때, 첫 번째 학생이 1번일 확률은? [1996-12]

① $\frac{3}{10}$ ② $\frac{1}{5}$
③ $\frac{2}{5}$ ④ $\frac{7}{25}$

21. 확률변수 X가 [표]에 나타난 분포를 따를 때, X의 분산을 최대가 되게 하는 x의 값은? [1995-32]

X	1	3	5
P	y	$\frac{1}{3}$	x

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{3}$
③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$

22. 두 선수 A, B가 반복되는 시합을 진행하여, 5번을 먼저 이기는 사람이 우승하고, 우승자에게는 1,600원의 상금을 주도록 하였다. A가 3번, B가 2번 이긴 상태에서 부득이한 사정으로 시합을 중단하였다. 상금 1,600원을 어떻게 배분하여 갖는 것이 타당한가? (단, 각 시합에서 이길 확률은 서로 같고, 비기는 경우는 없다.) [1994-33]

① A : 920원, B : 680원
② A : 960원, B : 640원
③ A : 1,100원, B : 500원
④ A : 1,200원, B : 400원

23. 두 개의 동전을 동시에 6번 던졌다. 두 개 모두 앞면이 나오는 횟수를 X, 적어도 한 개가 뒷면이 나오는 횟수를 Y라 할 때, $(X-Y)^2$의 기댓값은? [1993-4]

① $\frac{27}{2}$ ② $\frac{27}{4}$

③ $\frac{9}{2}$ ④ $\frac{9}{4}$

24. 주머니 속에 앞면이 나올 확률이 각각 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$인 동전 C_1, C_2, C_3가 한 개씩 들어있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 동전을 꺼내 4번을 던졌더니 앞면이 2번 나왔다. 균형 잡힌 동전 C_2가 꺼내졌을 확률은? [1993-35]

① $\frac{6}{17}$ ② $\frac{7}{17}$

③ $\frac{8}{17}$ ④ $\frac{9}{17}$

<연속형>

1. A 과수원에서 판매하는 수박의 무게 X와 B 과수원에서 판매하는 수박의 무게 Y는 각각 정규분포 $N(\mu_1, 400^2)$, $N(\mu_2, 300^2)$을 따르며 서로 독립이다. $X+Y$의 표준편차를 구하시오.
A 과수원에서 임의로 추출한 수박 100개의 무게의 표본평균이 3000이었고, B 과수원에서 임의로 추출한 수박 100개의 무게의 표본평균이 2000이었을 때, $\mu_1+\mu_2$에 대한 95% 신뢰구간은 $(5000-1.96\times c, 5000+1.96\times c)$이다. c의 값을 구하시오. (단, 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z에 대하여 $\mathrm{P}(Z\le 1.96)=0.975$이다.) [2점, 기입형A-2] [2026]

2. 서로 독립인 확률변수 X_1, X_2, $\cdots$, X_9가 모두 표준정규분포 $N(0,1)$을 따른다. 확률변수 Y를 $Y=\sum_{i=1}^{9}(-1)^{i+1}X_i$라고 하면 $\mathrm{P}(Y\ge -7)=\mathrm{P}(X_1\le a)$를 만족시키는 실수 a가 존재한다.
이때, Y의 분산 $\mathrm{V}(Y)$와 a의 값을 순서대로 구하시오. [2점, 기입형A-4] [2025]

3. 두 확률변수 X와 Y의 결합확률밀도함수(joint probability density function)가

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x+y^2)}, & x>0,\ y>0\\ 0, & \text{그 외의 경우}\end{cases}$$

일 때, 확률변수 X와 Y가 서로 독립인지를 판별하고 그 이유를 쓰시오. 또한 조건부확률 $\mathrm{P}(X\le 2\mid Y\le 2)$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B-6] [2025]

※ 다음은 필요하면 사용할 수 있다.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=1$$

4. 연속확률변수 X의 누적분포함수(cumulative distribution function) $F(x)$가 연속인 순증가함수(strictly increasing function)라 하자. 확률변수 $F(X)$의 확률밀도함수(probability density function)를 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한, $\mathrm{P}(-2<\ln F(X)<1)$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형A-11] [2024]

5. 어떤 정책에 대한 A, B 두 도시 시민의 의견을 알아보기 위하여 각 도시에서 확률표본을 선택하여 이 정책에 대한 찬성 여부를 알아본 결과는 다음과 같다.

	A 도시	B 도시
표본의 수	350명	160명
정책에 찬성한 비율	0.7	0.8

A, B 두 도시의 이 정책에 대한 찬성 비율을 각각 p_1, p_2라 할 때, 찬성 비율의 평균 $\dfrac{p_1+p_2}{2}$에 대한 90% 신뢰구간은 $(a-1.645\times b, a+1.645\times b)$이다. a, b의 값을 각각 구하시오.
(단, 확률변수 Z가 $N(0,1)$을 따를 때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.645)=0.45$로 계산한다.) [2점, 기입형A-4] [2023]

6. 두 확률변수 X와 Y의 결합확률밀도함수(joint probability density function) $f(x,y)$를

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & 0<x<2-y<1\\ 0, & \text{그 외의 경우}\end{cases}$$

라 하고 확률변수 Z를 $Z=Y-X$라 하자. Z의 누적분포함수(cumulative distribution function) $G(z)$를 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 $g(z)$를 Z의 확률밀도함수(probability density function)라 할 때, $\mathrm{P}\left(g(Z)>\frac{1}{2}\right)$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B-8] [2023]

7. 확률변수 X의 적률생성함수(moment generating function) $M_X(t)$가

$$M_X(t)=\frac{1}{(1-2t)^4}\quad\left(t<\frac{1}{2}\right)$$

이다. 확률변수 X의 분산을 풀이 과정과 함께 쓰시오.
또한, X_1, X_2, $\cdots$, X_{100}이 적률생성함수가 $M_X(t)$인 분포로부터 뽑힌 확률표본일 때, 이들의 평균 $\overline{X}=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}X_i$에 대하여 $\overline{X}$가 9 이상이 될 확률은 중심극한정리(central limit theorem)를 적용하면 근사적으로 $P(Z\geq c)$이다. 상수 c의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, Z는 표준정규분포를 따르는 확률변수이다.) [4점, 서술형B-7] [2022]

8. A 회사와 B 회사에서 생산하는 전기자동차용 배터리의 수명은 각각 정규분포 $\mathrm{N}(2500, 80^2)$, $\mathrm{N}(2200, 66^2)$을 따른다고 한다.
A 회사의 제품에서 100개를 임의로 추출한 표본의 평균수명을 $\overline{X}$,
B 회사의 제품에서 121개를 임의로 추출한 표본의 평균수명을 $\overline{Y}$라 할 때,
$\overline{X}-\overline{Y}$의 분산 $\mathrm{Var}(\overline{X}-\overline{Y})$는 a이고, $\mathrm{P}(\overline{X}-\overline{Y}\leq 320)=\mathrm{P}(Z\leq b)$이다.
상수 a와 b의 값을 각각 구하시오. (단, 배터리 수명의 단위는 $100\,\mathrm{km}$이고, Z는 표준정규분포를 따르는 확률변수이다.) [2점, 기입형A-3] [2021]

9. X_1, X_2, X_3을 균등분포(uniform distribution) $Unif(0,1)$로부터의 확률표본(random sample)이라 하고, Y를 X_1, X_2, X_3의 중앙값(median)이라 하자. 이때 Y의 누적분포함수(cumulative distribution function)와 Y의 확률밀도함수(probability density function)를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B-9] [2021]

10. 확률변수 X가 구간 $(0,3)$에서 균등분포(uniform distribution)를 따른다. 확률변수 Y를 $Y=2\ln\left(\frac{3}{3-X}\right)$이라 할 때, Y의 누적분포함수(cumulative distribution function) $F_Y(y)=P(Y\leq y)$를 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 Y의 확률밀도함수와 $P(|Y-2|>2)$의 값을 각각 구하시오. [4점, 서술형B-7] [2020]

11. 두 개의 부품 ㉮와 ㉯로 구성된 시스템이 있다. 이 시스템의 수명은 작동을 시작한 후 두 부품 중 하나가 고장 날 때까지 걸리는 시간이다. 부품 ㉮가 고장 날 때까지 걸린 시간 X와 부품 ㉯가 고장 날 때까지 걸린 시간 Y는 서로 독립이고, 두 확률변수 X, Y의 확률밀도함수는 각각

$$f_X(x) = \frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}} \ (x>0)$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{10}e^{-\frac{y}{10}} \ (y>0)$$

이다. 이 시스템의 수명 Z에 대하여 확률 $\mathrm{P}(Z>10)$을 구하시오. [2점, 기입형A-7] [2019]

12. 어느 지역 고등학생들의 몸무게(kg)는 정규분포 $N(\mu, 9^2)$을 따른다고 한다. 이 지역의 고등학생 중에서 임의로 추출한 36명의 몸무게에 대한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자.

$$\mathrm{P}(|\overline{X}-\mu|>c)=0.1$$

을 만족시키는 상수 c의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.

또한 36명의 표본으로부터 관측된 표본평균의 값이 60일 때, 모평균 μ에 대한 90% 신뢰구간(confidence interval)을 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z에 대하여 $\mathrm{P}(Z<1.64)=0.95$이고, 모평균에 대한 신뢰구간은 양면신뢰구간(two-sided confidence interval)을 의미한다.) [4점, 서술형B-2] [2019]

13. 어느 회사의 입사 시험 지원자들의 필기시험 점수와 면접시험 점수는 각각 정규분포 $N(82, 6^2)$, $N(80, 8^2)$을 따르고 서로 독립이라고 한다. 이 회사의 입사 시험 지원자 중에서 임의로 뽑은 한 지원자의 필기시험 점수를 확률변수 X, 면접시험 점수를 확률변수 Y라 하자. 이 지원자의 평균 점수를 $T=\dfrac{X+Y}{2}$라 할 때, 평균 점수가 90점 이상일 확률은 $\mathrm{P}(T\ge 90)=\mathrm{P}(Z\ge k)$이다. 이때 k의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, Z는 표준정규분포를 따르는 확률변수이다.) [4점, 서술형B-2] [2018]

14. 연속확률변수 X의 확률밀도함수(probability density function) $f_X(x)$는

$$f_X(x) = \frac{2}{9}x - \frac{2}{9} \ (1<x<4)$$

이다. X와 같은 분포를 따르고 서로 독립인 2개의 연속확률변수 X_1, X_2에 대하여 $Y=\min\{X_1, X_2\}$일 때, 확률 $\mathrm{P}\left(Y<\dfrac{5}{2}\right)$를 구하시오. (단, $\min\{a, b\}$는 a와 b 중 크지 않은 수이다.) [2점, 기입형A-7] [2017]

15. 두 연속확률변수 X, Y는 서로 독립이고 각각 구간 $(0, 2)$에서 균등분포(uniform distribution)를 따른다.

확률변수 $Z=X+Y$의 확률밀도함수(probability density function) $f_Z(z)$와 평균 $\mathrm{E}[Z]$를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형A-14] [2017]

16. 두 연속확률변수 X, Y가 서로 독립이고, 확률밀도함수(probability density function)가 각각

$$f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}(x>0),$$

$$f_Y(y) = e^{-y}(y>0)$$

이다. 확률변수 $Z=X+2Y$의 확률밀도함수 $g(z)$를 구하시오. [2점, 기입형A-8] [2016]

17. 모집단 A는 어떤 지역의 20세 남자들로 이루어져 있다. 모집단 A에 속하는 남자의 키는 평균 175cm, 표준편차 5cm인 정규분포를 따른다고 한다. 모집단 A에서 임의로 뽑은 남자의 키(cm)와 몸무게(kg)를 각각 확률변수 X, Y라 할 때 $Y=\frac{2}{5}X+\alpha$가 성립한다고 하자. 여기서, α는 평균 0, 표준편차 $2\sqrt{3}$인 정규분포를 따르는 확률변수이고, X와 α는 독립이다. 확률 $\mathrm{P}(Y>72)=\mathrm{P}(Z>k)$일 때, k의 값을 구하시오. (단 Z는 표준정규분포를 따르는 확률변수이다.) [2점, 기입형A-5] [2015]

18. 두 연속확률변수 X와 Y는 독립이고, X와 Y의 확률밀도함수(probability density function)를 각각 $f_X(x)=2x(0<x<1)$, $f_Y(y)=1(0<y<1)$이라고 하자. $M=\left[\frac{X}{Y}\right]$라 할 때, 확률 $\mathrm{P}(M=2)$를 구하시오. (단 $[a]$는 a보다 크지 않은 최대정수이다.) [2점, 기입형A-6] [2015]

19. 어느 도시의 성인 중 20%가 A 통신사를 이용한다고 한다. 이 도시의 성인 400명을 임의로 조사할 때, A 통신사를 이용하는 성인이 80명 이상 92명 이하가 될 확률을 이항분포의 정규근사를 이용하여 구하면 $P(0\le Z\le k)$이다. k의 값을 구하시오. (단, Z는 표준정규분포를 따르는 확률변수이고 연속성 보정은 하지 않는다.) [2점, 기입형A-15] [2014]

20. 두 연속확률변수 X와 Y의 결합확률밀도함수(joint probability density function) $f(x,\,y)$를

$$f(x,\,y)=\begin{cases}\frac{1}{5}xy(1-x+y) & ,\ 0<x<1,\ 1<y<3\\ 0 & ,\ \text{그 외의 경우}\end{cases}$$

라 하자.

Y의 주변확률밀도함수(marginal probability density function) $f_Y(y)$를 구하고, 이를 이용하여 $Y=2$가 주어졌다는 가정 하에 X의 조건부확률밀도함수(conditional probability density function) $f_{X|Y}(x|2)$와 X의 조건부기댓값(conditional expectation) $\mathrm{E}[X|Y=2]$를 구하시오. [3점, 서술형A-5] [2014]

21. 연속확률변수 X의 확률밀도함수(probability density function) $f(x)$가 $f(x)=\frac{2}{3}x \quad (1<x<2)$이다. 확률변수 $Y=\frac{2}{X}$에 대하여 Y의 기댓값 $\mathrm{E}[Y]$의 값은? [2점] [2013-36]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1

④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

22. 어느 지역의 성인 300명을 대상으로 조사한 결과, 영양제를 주 2회 이상 복용하는 사람이 180명이었다. 이 지역의 성인 중 영양제를 주 2회 이상 복용하는 사람의 비율에 대한 99% 신뢰구간은? (단, $\sqrt{2}$는 1.41로 계산하고, $Z\sim N(0,\,1)$일 때 $\mathrm{P}(|Z|\le 2.58)=0.99$이다. 소수점 아래 다섯째 자리에서 반올림한다.) [2점] [2013-37]

① (0.5472, 0.6528) ② (0.5372, 0.6628)
③ (0.5272, 0.6728) ④ (0.5172, 0.6828)
⑤ (0.5072, 0.6928)

23. 정규분포 $N(\mu_1, 36)$과 $N(\mu_2, 64)$를 각각 따르는 두 모집단 X, Y가 서로 독립이라 하자. 모집단 X에서 추출된 크기가 n인 확률표본의 표본평균을 $\overline{X}$, 모집단 Y에서 추출된 크기가 n인 확률표본의 표본평균을 $\overline{Y}$라 하자. 모평균의 차 $\mu_1-\mu_2$에 대한 95% 신뢰구간의 길이가 4.9일 때, n의 값은? (단, $Z\sim N(0,1)$일 때, $\mathrm{P}(|Z|\le 1.96)=0.95$이다.) [2점] [2012-38]

① 36 ② 49 ③ 64
④ 81 ⑤ 100

24. 확률밀도함수(probability density function)가 두 상수 a, b에 대하여

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ a, & 0\le x<1\\ be^{1-x}, & 1\le x<\infty\end{cases}$$

인 분포를 따르는 모집단이 있다. 이 모집단에서 크기가 2인 표본을 임의로 추출하였을 때, 표본평균 $\overline{X}$의 평균이 $\frac{3}{2}$이다. a^2+b^2의 값은? [1.5점] [2011-37]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{5}{9}$

④ $\frac{7}{9}$ ⑤ 1

25. 과거 조사에 의하면 어느 지역의 초등학교 5학년 학생들의 신장은 평균 141.0cm이었다. 줄넘기 운동이 또래 아이들의 신장 발육에 도움이 되는지를 알아보고자 체육 활동에서 이 운동을 적극 권장하여 실시하여 왔다.

이 운동을 꾸준하게 실시한 또래 아이들 중 임의로 추출한 81명의 신장을 조사한 결과 평균 142.2cm, 표준편차 6.0cm이었다. 줄넘기 운동이 아이들의 신장 발육에 도움이 된다고 할 수 있는지를 유의수준 $\alpha = 0.05$로 다음 단계와 같이 검정할 때, (가), (나), (다)에 알맞은 것은? (단, 이 지역 아이들의 과거와 현재의 생활환경과 영양 섭취 등은 같고, 아이들의 신장은 정규분포를 따른다고 가정한다.) [2점] [2010-40]

〈1단계〉 가설설정

귀무가설 H_0에 대한 대립가설 H_1 : $\boxed{\text{(가)}}$

〈2단계〉 검정통계량과 분포

표본의 크기가 $n=81$로 충분히 크므로 귀무가설 H_0가 참이라는 가정 하에서 검정통계량 $Z = \dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$는 표준정규분포 $N(0,1)$에 근사한다. (단, $\overline{X}$는 표본평균, μ는 모평균, S는 표본 표준편차이다.)

〈3단계〉 유의수준 $\alpha = 0.05$에 대한 기각역은 $\boxed{\text{(나)}}$

〈4단계〉 검정통계량의 관측값을 구한다.

〈5단계〉 결론

검정통계량의 관측값을 기각역과 비교한 결과 줄넘기 운동이 신장 발육에 $\boxed{\text{(다)}}$

※ 참고 : $Z \sim N(0,1)$일 때, $P(|Z| \le 1.645) = 0.90$, $P(|Z| \le 1.96) = 0.95$ 이다.

	(가)	(나)	(다)
①	$\mu > 141.0$	$Z \ge 1.645$	도움이 된다고 할 수 있다.
②	$\mu > 141.0$	$Z \ge 1.96$	도움이 된다고 할 수 있다.
③	$\mu > 141.0$	$\lvert Z\rvert \ge 1.96$	도움이 된다는 충분한 증거가 없다.
④	$\mu > 142.2$	$Z \ge 1.96$	도움이 된다는 충분한 증거가 없다.
⑤	$\mu > 142.2$	$Z \ge 1.645$	도움이 된다는 충분한 증거가 없다.

26. 두 확률변수 X와 Y는 독립이고, 각각 다음과 같은 확률밀도함수 (probability density function)를 동일하게 갖는다.

$$f(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & \text{그 외의 } t \end{cases}$$

이 때, Y가 X와 X^2사이의 값이 될 확률은? [2점] [2009-31]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{5}$

④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{7}$

27. 어떤 TV 프로그램의 시청률을 조사하기 위하여 임의표본으로 n가구를 선택하려고 한다. 과거의 경험으로 볼 때 이와 비슷한 프로그램의 시청률은 20%를 넘지 않는다는 것을 알고 있다. 95% 신뢰도로 표본조사에서 얻은 표본비율과 실제 시청률의 차이가 5% 이하가 되도록 하는 최소 표본크기 n이 속하는 구간은? (단, $33^2 = 1089$이고, 39.2^2은 1537로 계산한다. 또 $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$일 때, $\Phi(1.65) = 0.95$, $\Phi(1.96) = 0.975$이다.) [2점] [2009모의-38]

① $[100, 200)$ ② $[200, 300)$ ③ $[300, 400)$

④ $[400, 500)$ ⑤ $[500, 600)$

28. 확률변수 X가 구간 $[1, 5]$에서 균등분포(uniform distribution)를 이룰 때, X의 확률밀도함수, 평균, 분산을 각각 구하시오. [3점] [2005-9]

29. 2003년도 전국학력평가에 응시한 수험생 중에서 자연계 수험생 64명, 인문계 수험생 9명을 임의로 선택하여 수리 영역의 점수를 조사하였다. 그 결과 자연계 수험생은 평균이 48점, 표준편차가 5.6점이었고, 인문계 수험생은 평균이 42점, 표준편차가 7.5점이었다. 자연계와 인문계에 응시한 수험생 전체의 수리 영역 점수가 각각 정규분포를 이룬다고 가정하고 두 집단의 평균점수를 추정하려 한다. 다음 물음에 답하시오. [총 5점] [2004-14]

(1) 아래의 표준정규분포표를 이용하여 자연계 수험생 전체의 수리영역 평균점수를 신뢰도 95%의 신뢰구간으로 추정하시오. [2점]

표준정규분포표($\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$)

z	.05	.06
1.6	.4505	.4515
1.7	.4599	.4608
1.8	.4678	.4686
1.9	.4744	.4750

(2) 아래의 $t-$ 분포표를 이용하여 인문계 수험생 전체의 수리 영역 평균점수를 신뢰도 95%의 신뢰구간으로 추정하시오. [3점]

t - 분포표($\mathrm{P}(t \ge t_{\alpha}) = \alpha$)

α / 자유도	0.05	0.025
7	1.895	2.365
8	1.860	2.306
9	1.833	2.262
10	1.1812	2.228

30. 400명이 모집 정원인 공무원 임용 시험에 5,000명이 응시하였다. 응시자 전체의 성적 분포는 100점 만점에 평균이 55점, 표준편차가 8점인 정규분포를 이루었다. 이 시험에서 모집정원의 120%를 1차 합격자로 선발하고자 할 때, 1차 합격자의 최저 점수를 구하시오.

(단, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.3) = 0.4040$) [4점] [2001-14]

31. 인구가 10만인 도시에서 시정(市政)에 대한 여론을 조사하였더니 남자 성인의 80%와 여자 성인의 90%가 시정(市政)을 지지하였다. 이 도시에서 남자 성인 400명과 여자 성인 400명을 임의로 뽑았을 때, 다음의 확률을 구하시오. [총 5점] [1999 추시-11]

(1) 적어도 700명이 시정(市政)에 대하여 지지할 확률. [3점]

(2) 시정(市政)에 대한 지지자 중 여자가 남자보다 25명 더 많을 확률. [2점]

※참고

$P(Y-X \geq 25) = P(Z \geq -1.5) = 0.5 + P(0 \geq Z \geq 1.5)$

$= 0.5 + 0.4332$

$= 0.9332$

〈표준정규분포표〉

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.5	.4332	.4354	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4528	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4941	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	34738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857

32. 평균이 m, 분산이 4인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기 n인 임의표본을 추출하여 그 표본에서 얻은 평균을 $\overline{X}$라고 할 때, 다음 물음에 답하시오. (총 5점) [1998-13]

(1) $n=100$, $\overline{X}=10$일 때, 신뢰도 95%로 m의 신뢰구간을 구하시오. [2점]

(2) $|\overline{X}-m| \leq \frac{1}{2}$인 확률이 95% 이상이 되게 하려면 n의 크기를 얼마로 하면 되는지 구하시오. [3점]

33. 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} ke^{-3x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x<0) \end{cases}$$

일 때 k의 값을 결정하고, X의 기댓값 $E(X)$를 구하시오. [5점] [1997-15]

34. 독립적인 확률변수 X_1, X_2, $\cdots$, X_n 각각이 모수(parameter) λ를 갖는 포아송(poisson)분포를 이루고 $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$일 때, 중심극한정리(central limit theorem)를 이용하여

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(\frac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leq x\right), \quad -\infty < x < \infty$$

의 값을 구하시오. [3점] [1997 모의-15]

35. X_1, X_2는 확률식 독립변수(stochastically independent variables)이고,

$$\Pr(a < X_1 < b) = \frac{2}{3}, \ \Pr(c < X_2 < d) = \frac{5}{8}$$

이다. 이 때, 사건 $a < X_1 < b$, $-\infty < X_2 < \infty$와 사건 $-\infty < X_1 < \infty$, $c < X_2 < d$의 합사건의 확률은? [1996-4]

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{7}{8}$

③ $\frac{11}{12}$ ④ $\frac{19}{24}$

36. 확률변수 X와 Y의 결합밀도함수(joint density function)가 $f(x,y) = 2e^{-(x+2y)}$ $(x > 0,\ y > 0)$일 때, 확률 $\Pr[X<Y]$은? [1995-35]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$

37. 확률변수 (X, Y)는 $X \ge 0$, $Y \ge 0$이고, $f(x,y)=e^{-(x+y)}(X \ge 0,\ Y \ge 0)$을 확률밀도함수로 한다. $Z=X+Y$일 때, 확률 $\Pr(Z \le 1)$는? [1994-26]

① $1-\dfrac{2}{e}$　② $1-\sqrt{\dfrac{2}{e}}$

③ $\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{2}{e})$　④ $\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{\dfrac{2}{e}})$

38. 정규분포를 따르고, 분산이 16인 모집단에서 크기가 64인 표본을 임의 추출하여 조사한 결과, 표본평균이 6.085이었다. 이 때, 가설: 「모평균은 5이다.」를 기각하기 위한 최소의 유의수준은? [1994-31]

〈표준정규분포표〉

z	$P(0 \le Z \le z)$
1.88	0.4700
1.96	0.4750
2.17	0.4850
2.24	0.4875
2.58	0.4950

① 1%　② 2.5%

③ 3%　④ 5%

39. 구간 $[0, 1]$에서 독립적으로 세 수 x_1, x_2, x_3를 취하여 이들의 최댓값을 확률변수 X로 할 때, X의 확률밀도함수 $f(x)$는? [1993-5]

① $f(x)=1$　② $f(x)=2x$

③ $f(x)=3x^2$　④ $f(x)=4x^3$

[복소해석학]

<해석함수>

1. 복소함수

$$f(z)=\frac{(z-i+1)^5(z+1+i)^4}{z^6(z-1+4i)^3(z-9+2i)^5}e^z$$

과 복소평면에 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 원을 시계반대방향으로 한 바퀴 도는 곡선 $C(r)$이 있다.

선적분 $\int_{C(2)}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$의 값을 구하시오.

또한 $\int_{C(r)}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=0$을 만족시키는 양의 정수 r의 개수를 구하시오. [2점, 기입형A-3] [2026]

2. 확장 복소평면(extended complex plane) $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$에서 정의된 일차분수변환(선형분수변환, linear fractional transformation, bilinear transformation) T가

$$T(0)=-1,\ T(i)=-i,\ T(2)=3$$

을 만족시킬 때, $T(z)$를 풀이 과정과 함께 쓰시오.

또한 $W=\{T(z)\,|\,|z|=1,\ z\in\mathbb{C}\}$라고 할 때, W의 원소와 복소수 $1+i$ 사이의 거리의 최솟값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형A-7] [2025]

3. 복소수 $z=x+iy$ (x, y는 실수)에 대한 함수

$$f(z)=e^{-x}\cos y+iv(x,y)\quad (\text{단, } v(x,y)\text{는 실숫값 함수})$$

가 정함수(전해석함수, entire function)이고 $f(0)=1$을 만족시킬 때, $f(z)$를 풀이 과정과 함께 쓰시오.

또한 복소평면에서 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원을 시계반대방향으로 한 바퀴 도는 곡선 C에 대하여 선적분 $\int_C f\left(\frac{1}{z}\right)dz$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B-9] [2025]

4. 실숫값을 갖는 두 함수 $u(x,y)$, $v(x,y)$와 복소수 $z=x+iy$ (x, y는 실수)에 대하여 복소함수 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$는 정함수(전해석함수, entire function)이다.

$\overline{f(\overline{z})}$가 정함수임을 보이시오. 또한, $f'(i)=\pi$, $f(-i)=1$이고 모든 실수 x, y에 대하여

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)-\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)>(u(x,-y))^2+(v(x,-y))^2$$

일 때, $\frac{f'(1-i)}{\overline{f(1+i)}}$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.

(단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.) [4점, 서술형B-11] [2024]

5. 실수 a에 대하여 함수 $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$를

$$u(x,y)=x^2-2xy+ay^2+4x-6y$$

라 하자. $a=-1$일 때 적분 $\int_0^{2\pi}u(1+2\cos\theta,2\sin\theta)d\theta$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.

또한 $a=2$일 때 $u(x,y)$의 최솟값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형A-7] [2023]

6. 복소수 $z=x+iy$ (x, y는 실수)에 대한 함수

$$f(z)=e^{-3y}\cos(ax)+bx^2-4y^2+iv(x,y)$$

가 정함수(entire function)가 되도록 하는 양의 실수 a, b의 값과, 이 때의 $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)$의 값을 각각 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $v(x,y)$는 실숫값 함수이다.) [4점, 서술형B-11] [2022]

7. 다음 조건을 만족시키는 정함수(entire function) $f(z)$에 대하여 $|f(i)|$의 최솟값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B-10] [2020]

(가) 모든 복소수 z에 대하여 $|f(z)+z^2|\ge 3$이다.
(나) $|f(2)|=3$

8. 실숫값을 갖는 두 함수

$$u(x,y),\ v(x,y)=e^{-y}(x\cos x-y\sin x)$$

와 복소수 $z=x+iy$ (x, y는 실수)에 대하여, $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$가 정함수(entire function)이다.
곡선 C가 $x=\cos t$, $y=\sin t$ $(0\le t\le 2\pi)$로 정의된 원일 때,

$$\int_C -yu(x,y)dx+xu(x,y)dy=6\pi$$

이다. $f(0)$의 값과 함수 $u(x,y)$를 각각 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B-4] [2019]

※ 다음 정리는 필요하면 증명 없이 사용할 수 있다.

〈정리〉

복소평면의 열린 집합 D에서 해석적인 함수 $f:D\to\mathbb{C}$에 대하여, $r>0$이고 $\{z\in\mathbb{C}\mid |z-z_0|\le r\}\subset D$이면

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{it})\,dt$$

이다.

9. 확장 복소평면(extended complex plane) $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$에서 정의된 일차분수변환(선형분수변환, linear fractional transformation, bilinear transformation) T가

$$T(0)=2,\ T(1)=2i,\ T(\infty)=-2$$

를 만족시킬 때, $T(2i)$의 값을 구하시오. [2점, 기입형A-5] [2018]

10. 정함수(entire function) $f(z)$가 모든 복소수 z에 대하여 부등식

$$|f(z)|\le|e^z-1|$$

을 만족시킨다. $f(1)=1$일 때, $f'(0)$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B-4] [2018]

※ 다음 정리는 필요하면 증명 없이 사용할 수 있다.

〈정리〉

양수 r에 대하여 영역 $\{z\in\mathbb{C}\mid 0<|z-a|<r\}$에서 함수 $g(z)$가 해석적이고 유계이면 $\lim_{z\to a} g(z)$가 존재하고 함수

$$h(z)=\begin{cases} g(z), & 0<|z-a|<r \\ \lim_{w\to a} g(w), & z=a \end{cases}$$

는 $z=a$에서 해석적이다.

11. 복소수 $z=x+iy$ (x, y는 실수)에 대한 함수

$$f(z)=(x^n y+xy^n+x+y)+iv(x,\ y)$$

가 $z=1$에서 해석적(analytic)이 되도록 하는 자연수 n의 값과 이때의 $f'(1)$의 값을 각각 구하시오. (단, $v(x,\ y)$는 실숫값 함수이다.) [2점, 기입형A-6] [2017]

12. 복소평면 $\mathbb{C}$의 영역 $D=\{z\in\mathbb{C}\mid 0<|z|<1\}$에 대하여 함수 $f:D\rightarrow\mathbb{C}$는 해석적(analytic)이다.

임의의 $z\in D$에 대하여 함수 $f(z)$가 부등식

$$|f(z)|\le 1+\ln\left(\frac{1+|z|}{2|z|}\right)$$

를 만족시킨다. $z=0$은 함수 $f(z)$의 제거 가능 특이점(없앨 수 있는 특이점, removable singular point)임을 보이고, $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$일 때 $f\left(\frac{1+i}{3}\right)$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형A-11] [2017]

13. 두 실수 a와 b에 대하여 복소함수

$$f(x+iy)=(x^3-2axy-bxy^2)+i(2x^2-ay^2+bx^2y-y^3)\ (x,\ y\text{는 실수})$$

가 정함수(entire function)일 때, a^2+b^2의 값은? [1.5점] [2013-27]

① 10 ② 13 ③ 17
④ 18 ⑤ 20

14. 복소평면에서 영역 $D=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}$에 대하여 연속함수 $f:D\rightarrow\mathbb{C}$가 해석적(analytic, holomorphic)이기 위한 필요충분조건을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2012-29]

<보기>

ㄱ. D에서 $f(z)$로 수렴하는 멱급수 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$이 존재한다.

ㄴ. D에 포함되는 모든 단순닫힌경로(단순폐곡선, simple closed contour) C에 대하여 $\int_C f(z)dz=0$이다.

ㄷ. D에서 $\frac{dF}{dz}=f$를 만족하는 해석함수 F가 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 복소수 $z=x+iy$ (x,y는 실수)에 대한 정함수(entire function) $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(-1+i)$의 값은?(단, u와 v는 실숫값 함수이다.) [2점] [2011-30]

(가) 임의의 복소수 $z=x+iy$에 대하여 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$이다.

(나) $f(1)=0$, $\quad f(i)=1+i$

① $1-i$ ② $1+i$ ③ $1-2i$
④ $1+2i$ ⑤ $2-i$

16. 실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$, 복소수 전체의 집합을 $\mathbb{C}$라 하자. 집합 X가 $\mathbb{R}$ 또는 $\mathbb{C}$일 때, 미분가능한 함수

$$f_i : X \to X \ (i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

가 상수함수가 될 충분조건으로 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2점] [2010-31]

<보기>

ㄱ. $X=\mathbb{R}$일 때 $f_1^{(n)}(0)=0\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$

ㄴ. $X=\mathbb{C}$일 때 $f_2^{(n)}(0)=0\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$

ㄷ. $X=\mathbb{R}$일 때 $f_3\left(\dfrac{1}{n}\right)=0\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

ㄹ. $X=\mathbb{C}$일 때 $f_4\left(\dfrac{1}{n}\right)=0\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(단, $f_i^{(0)}=f_i$이고 $f_i^{(n)}$은 f_i의 n계 도함수이다.)

① ㄱ, ㄷ　② ㄱ, ㄹ　③ ㄴ, ㄷ
④ ㄴ, ㄹ　⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

17. 다음은 주어진 문제의 풀이를 단계별로 제시한 것이다. (가), (나), (다), (라)에 알맞은 것은? [2.5점] [2010-35]

<문제>

복소수 전체 집합을 $\mathbb{C}$라 하자. $D=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<2\}$이고, 함수 $f:D\to\mathbb{C}$가 D에서 해석적(analytic)이라 하자. $f(0)=f'(0)=0$, $f''(0)\neq 0$이고 $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{i}{12}$이며 모든 $z\in D$에 대해서 $|f(z)|\le 3$일 때, $f\left(\dfrac{2i}{3}\right)$의 값은?

<풀 이>

<1단계> 함수 f가 D에서 해석적이므로 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$이 되고, 따라서 $f(z)=\boxed{(가)}\cdot g(z)$의 꼴이다. (단, $g(z)$는 D에서 해석적이며 $g(0)\neq 0$ 이다.)

<2단계> $0<r<2$인 r에 대하여 $|z|=r$일 때, $|g(z)|\le\boxed{(나)}$ 이 성립한다. 여기서 최대 절댓값 정리(maximum modulus theorem)를 적용하면 $|z|\le r$일 때, $|g(z)|\le\boxed{(나)}$ 이다. 이 명제는 임의의 $r<2$에 대하여 성립하므로 모든 $z\in D$에 대하여 $|g(z)|\le\boxed{(다)}$ 이다.

<3단계> 위의 결과와 $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{i}{12}$를 사용하여 $g(z)$를 구할 수 있고, 이를 이용하면 $f\left(\dfrac{2i}{3}\right)=\boxed{(라)}$ 임을 알 수 있다.

	(가)	(나)	(다)	(라)
①	z	$\dfrac{3}{r}$	$\dfrac{3}{2}$	$\dfrac{i}{12}$
②	z	$\dfrac{3}{r}$	$\dfrac{3}{2}$	$-\dfrac{1}{3}$
③	z^2	$\dfrac{3}{r}$	$\dfrac{3}{2}$	$\dfrac{i}{12}$
④	z^2	$\dfrac{3}{r^2}$	$\dfrac{3}{4}$	$-\dfrac{1}{3}$
⑤	z^2	$\dfrac{3}{r^2}$	$\dfrac{3}{4}$	$-\dfrac{i}{3}$

18. 복소수 전체의 집합 $\mathbb{C}$에서 $\mathbb{C}$로의 정함수(entire function) f가 모든 $z\in\mathbb{C}$에 대하여 두 조건

$$|f(z)|\le 2|ze^z|,\ f'(1)=1$$

을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [2점] [2009-29]

① $\dfrac{1}{3}$　② $\dfrac{1}{2}$　③ 1
④ e　⑤ $2e$

19. 다음 (가), (나), (다)를 아래의 〈조건〉에 따라 각각 증명하고, (가)와 (나)의 의미를 비교하여 설명하시오. 그리고 (다)와 관련된 다음 명제

'실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$에서 정의된 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가 C^{∞}급 함수이고 유계(bounded)이면 상수함수이다'

가 성립하면 그 이유를 설명하고, 성립하지 않으면 반례를 제시하시오. [20점] [2009 2차, 2교시-4]

(가) 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$의 두 원소 a, b(단, $a<b$)에 대하여, 닫힌 구간 $I=[a,b]$에서 $\mathbb{R}$로의 두 함수 f, g가 연속이고, 모든 $x\in I$에 대하여 $g(x)>0$이라고 하자. 그러면

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

를 만족하는 $c\in I$가 존재한다.

(가) 복소평면 $\mathbb{C}$에 있는 중심이 z_0이고 반지름이 $r(>0)$인 닫힌 원판 $B=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-z_0|\le r\}$에서 정의된 함수 $f:B\to\mathbb{C}$가 해석적(analytic)이면

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})\,d\theta$$

이다.

(나) 복소평면 $\mathbb{C}$에서 정의된 함수 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$가 $\mathbb{C}$에서 해석적이고 유계이면 상수함수이다.

〈조 건〉

- (가), (나), (다)를 증명할 때, 각 증명에 다음 중 한 가지 이상을 사용하시오.
  - 최대・최소의 정리
  - 중간값의 정리
  - 코시(Cauchy)의 적분 공식

〈참 고〉

- 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가 C^{∞}급 함수라는 것은 모든 자연수 n에 대하여 $\mathbb{R}$에서 n계도함수 $f^{(n)}$이 존재하고 $f^{(n)}$이 연속임을 뜻한다.

20. 복소함수에 대한 설명으로 옳은 것을 〈보기〉에서 모두 고른 것은? [2점] [2009 모의평가-29]

〈보기〉

ㄱ. 함수 $f(z)=\mathrm{Log}(z+3)$은 영역 $D=\{z\mid z=x+iy,\ x>-2,\ y>-1\}$에서 해석적(analytic)이다. (단, $\mathrm{Log}(z+3)$은 $z+3=re^{i\theta}$라 할 때, $r>0$, $-\pi<\theta<\pi$인 범위에서 정의된 함수이다.)

ㄴ. 모든 복소수 $z=x+iy$(x, y는 실수)에 대하여 $f'(z)=xy^3$인 정함수(entire function) f는 존재하지 않는다.

ㄷ. 복소평면에 어떤 단일폐곡선 C가 있다. 함수 $f(z)$가 곡선 C와 그 내부에서 연속이고 $\int_C f(z)\,dz=0$이라 하면, $f(z)$는 C의 내부에서 해석적이다.

① ㄴ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 복소방정식 $z+e^{-z}=2$는 $|z-2|<2$에서 오직 한 개의 복소수 근을 가짐을 보이고, 그 근이 실근임을 보이시오. [4점] [2008-14]

22. 복소평면 $\mathbb{C}$ 안의 영역(domain) $D=\{z\mid |z|<2\}$에서 정의된 함수 $f:D\to\mathbb{C}$가 해석적(analytic)이고, 모든 $z\in D$에 대하여 $|f(z)|\le\sqrt{5}$이다. $f(0)=2+i$일 때, $f(1)+f'(i)$의 값을 구하시오. [4점] [2006-15]

23. 복소평면 $\mathbb{C}$ 안의 영역(domain) D에서 정의된 함수 $f:D\to\mathbb{C}$가 해석적(analytic)이고, 모든 $z\in D$에 대해 $\mathrm{Im}\,f(z)=2\mathrm{Re}\,f(z)$가 성립한다. $f(z)$는 D에서 상수임을 보이시오. [5점] [2005-15]

24. 복소평면 $\mathbb{C}$에서 해석적인 함수(entire function) f 가 다음 두 조건을 모두 만족시키면 $f(z)=z$임을 보이시오. [5점] [2004-10]

(ⅰ) $f(1)=1$
(ⅱ) 임의의 $z\in\mathbb{C}$에 대하여 $\lvert f(z)\rvert \le \lvert z\rvert$

25. 실수의 집합 $\mathbb{R}$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오. [총 5점] [2003-11]

(1) 모든 n에 대하여 n계도함수 $f^{(n)}(x)$가 존재함을 보이고, 함수 f 의 $x=0$에서의 테일러급수를 구하시오. [3점]

(2) (1)의 결과를 이용하여 실함수(function of a real variable)와 복소함수(function of a complex variable)의 미분가능성이 갖는 특징의 차이를 서술하시오. [2점]

26. 복소평면 $\mathbb{C}$에서 해석적인 정함수(entire function) f 가 임의의 $z\in\mathbb{C}$에 대하여 $\mathrm{Re}f(z)>1$을 만족시킨다. 이 때 상수함수임을 보여라. [5점] [2002-6]

27. 복소평면 $\mathbb{C}$에서 미분가능한 정함수 (entire function)가 임의의 $z\in C$에 대하여 조건 $f(z)=f(z+2)=f(z+i)$를 만족하고, $f(0)=i$ 라고 한다. 이 때, $f(1+i)$의 값을 구하시오. (단, i는 허수단위) [6점] [1999-10]

28. 다음 조화함수(Harmonic function)의 조화공액(Harmonic conjugate)을 구하시오. [7점] [1998-6

$$u=\mathrm{Arg}\,z\ \ (-\pi<\mathrm{Arg}\,z<\pi)$$

29. $\lvert z-10i\rvert=6$을 만족하는 복소수 z의 편각을 θ라고 할 때, $8\sin\theta+6\cos\theta$의 최댓값과 최솟값의 곱은? [1996-31]

① 7　② 14

③ 21　④ 28

30. $w=\cos20^\circ+i\sin20^\circ(i=\sqrt{-1})$일 때, $\dfrac{1}{\lvert w+2w^2+3w^3+\cdots\cdots+18w^{18}\rvert}$ 의 값은? [1995-30]

① $\dfrac{1}{9}\sin10^\circ$　② $\dfrac{1}{8}\sin20^\circ$

③ $\dfrac{2}{9}\sin10^\circ$　④ $\dfrac{1}{9}\sin20^\circ$

31. 복소수 z가 $0<\lvert z\rvert<1$ 을 만족할 때, 복소평면 위의 무한개의 점 z, z^2, z^3, z^4, $\cdots$ 를 차례로 연결해서 만들어 지는 선분들의 길이의 합은? [1994-12]

① $\dfrac{\lvert z\rvert}{1-\lvert z\rvert}$　② $\left\lvert\dfrac{z}{1-z}\right\rvert$

③ $\dfrac{\lvert 1-z^2\rvert}{1}-\lvert z\rvert$　④ $\dfrac{\lvert z-z^2\rvert}{1-\lvert z\rvert}$

32. 방정식 $z^n=1$의 모든 해를 극형식으로 나타낼 때 편각 θ들의 합을 S_n이라 하자. 이 때 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n}$의 값은? [1993-17] (단, $0\le\theta<2\pi$)

① $\dfrac{\pi}{2}$　② π

③ $\dfrac{3}{2}\pi$　④ 2π

<비해석함수>

1. 복소수 $z=x+iy$ (x, y는 실수)에 대한 함수

$$f(z)=\frac{x+ay}{x^2+y^2}+x^2+by^2+i\left(\frac{cy}{x^2+y^2}+dxy\right)$$

가 영역 $\mathbb{C}-\{0\}$에서 해석적(analytic)이 되도록 하는 실수 a, b, c, d의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.

또한 $e^{\frac{1}{z}}f(z)$의 $z=0$을 중심으로 하는 로랑 급수(Laurent series)를 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nz^n$이라 할 때, a_{-1}의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B-8] [2026]

2. 복소평면에서 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원을 시계반대방향으로 한 바퀴 도는 곡선 C에 대하여 적분

$$\int_C \bar{z}\,dz-\frac{1}{z}\,d\bar{z}$$

의 값을 구하시오. (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.) [2점, 기입형A-2] [2024]

3. 복소방정식 $z^3-z-4=0$이 영역 $\{z\in\mathbb{Z}\mid |z|<2\}$에서 갖는 근의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원을 시계반대방향으로 한 바퀴 도는 곡선을 C라 할 때, 선적분 $\int_C\frac{1}{(z-3)(z^3-z-4)}dz$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.
(단, 다중근의 경우 중복되는 수만큼 근의 개수로 인정한다.) [4점, 서술형B-11] [2023]

※ 다음 정리는 필요하면 증명 없이 사용할 수 있다.

함수 $f(z)$와 $g(z)$가 단순닫힌곡선(simple closed curve) γ와 그 내부에서 해석적이라 하자. 곡선 γ 위의 모든 점 z에 대하여 부등식 $\lvert g(z)\rvert<\lvert f(z)\rvert$이 성립하면 두 함수 $f(z)$와 $f(z)+g(z)$는 γ 내부에서 같은 개수의 영점(zero)를 갖는다.

4. 복소평면에서 중심이 i이고 반지름의 길이가 2인 원을 시계반대방향으로 한 바퀴 도는 곡선 C에 대하여 선적분

$$\int_C\left\{\frac{4e^{-iz}}{(z+6i)(z-2i)}+\bar{z}\right\}dz$$

의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)
[4점, 서술형A-10] [2022]

5. 복소함수 $f(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$에 대하여, 집합 $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=2\}$에서 $|f(z)|$의 최댓값과 최솟값을 구하시오. [2점, 기입형A-2] [2021]

6. 복소함수 $f(z)=z^6-1$에 대하여

$$\int_C\frac{z^3f'(z)}{f(z)}dz$$

의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.

여기서 C는 복소평면에서 점 $\left(\frac{1}{2},0\right)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원을 시계반대방향으로 한 바퀴 도는 곡선이다. [4점, 서술형B-8] [2021]

7. 정의역이 $\{x\in\mathbb{R} \mid -1<x<1\}$인 함수 $f(x)=\dfrac{e^x-1}{1-x}$의 $x=0$에서의 3차 테일러 다항식을 구하시오. 또한 복소평면에서 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\dfrac{1}{2}$인 원을 시계반대방향으로 한 바퀴 도는 곡선 C에 대하여 선적분 $\displaystyle\int_C \frac{e^z-1}{z^4(1-z)}dz$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형A-9] [2020]

8. 복소평면에서 곡선 C가

$$C: z(t)=\begin{cases} e^{i\pi t}, & 0\le t\le 1 \\ t-2, & 1<t\le 3 \end{cases}$$

일 때, 복소적분

$$\int_C (x^2-y^2-y)+i(2xy-x)\,dz$$

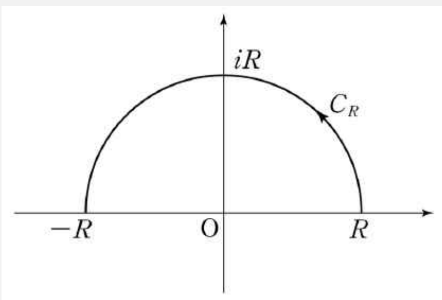
의 값을 구하시오. (단, x, y는 실수이고 $z=x+iy$는 복소수이다.) [2점, 기입형A-5] [2019]

9. 복소함수 $f(z)=\dfrac{e^z}{e^{2z}+1}$ $(|z|<\dfrac{\pi}{2})$의 점 $z_0=0$에 관한 테일러(Taylor) 급수 전개를 $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$이라 하자.

음이 아닌 모든 정수 n에 대하여 $a_{2n+1}=0$임을 보이시오.

또한 복소평면에서 시계반대방향의 단위원 $C: |z|=1$에 대하여 $\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{z^3}dz$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [5점, 서술형B-7] [2016]

10. 복소평면 $\mathbb{C}$에서 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 R인 반원을 $C_R=\{Re^{it}\in\mathbb{C} \mid 0\le t\le\pi\}$라고 할 때, $a>0$과 $b>0$에 대하여 $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{ze^{ibz}}{z^2+a^2}dz=0$임을 보이고 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ibx}}{x^2+a^2}dx$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [5점, 서술형A-3] [2015]



11. <조건>을 만족시키는 고립특이점(isolated singularity) $z=0$을 갖는 복소함수만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2.5점] [2013-28]

<조건>

임의의 $w\in\mathbb{C}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} z_n=0$이고 $\lim_{n\to\infty} f(z_n)=w$인 수열 $\{z_n\}$이 존재한다.

<보기>

ㄱ. $f(z)=z\sin\frac{1}{z}$

ㄴ. $f(z)=\frac{\sin z}{e^z-1}$

ㄷ. $f(z)=\frac{1}{\sin z}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

12. 복소평면에서 $C=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|=5\}$가 반시계방향으로 한 바퀴 도는 곡선일 때,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\cos z}{\sin z}dz$$

의 값은? [2점] [2012-28]

① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

13. 복소평면에서 곡선 C는 $C: z(t)=e^{it}(0\le t\le 2\pi)$로 나타내어지는 단위원이다. 자연수 n에 대하여 복소적분

$$\int_C z^n(e^z+e^{\frac{1}{z}})dz$$

의 값을 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$의 값은? [1.5점] [2011-29]

① 0 ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{3}{4}$ ⑤ 1

14. 복소평면에서 곡선 C가 $C:\ z(t)=e^{it}\ (0\le t\le 2\pi)$로 나타내지는 단위원일 때, 다음 복소적분값 A, B에 대하여 $\frac{A}{B}$의 값은? [2점] [2010-36]

$$A=\int_C (e^{z^2}+z^2e^{\frac{1}{z}})dz$$

$$B=\int_C \frac{1-z}{\sin z}dz$$

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

15. 집합 X에서 X로의 함수 f를 $f(t)=\begin{cases} t\cos\frac{1}{t}, & t\neq 0 \\ 0, & t=0\end{cases}$ 으로 정의할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\mathbb{R}$는 실수 전체의 집합이고 $\mathbb{C}$는 복소수 전체의 집합이다.) [2점] [2009-30]

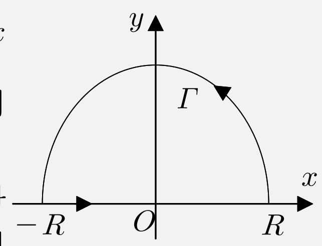
<보기>

ㄱ. $X=\mathbb{R}$일 때 f는 $t=0$에서 연속이다.
ㄴ. $X=\mathbb{C}$일 때 f는 $t=0$에서 연속이다.
ㄷ. $X=\mathbb{C}$일 때 $f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{1-2n}}{(2n)!}$은 모든 $t\in\mathbb{C}-\{0\}$에 대하여 성립한다.
ㄹ. $X=\mathbb{C}$일 때 $\int_{|t|=1} f(t)dt=2\pi i$이다.

① ㄱ, ㄷ ② ㄱ, ㄹ
③ ㄴ, ㄹ ④ ㄱ, ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄷ, ㄹ

16. 다음은 복소적분을 이용하여 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx$를 구하는 과정이다. (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [2점] [2009모의-30]

함수 $f(z)=\frac{z^2}{(z^2+1)^2}$이라 하면 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx$는 복소평면에서 실축(real axis)을 따른 $f(z)$의 적분을 나타낸다.



$R>1$이라고 하자. 그림과 같이 $-R$에서 R까지의 선분과 상반평면(upper half plane)에서 반지름이 R인 반원 Γ로 구성된 폐곡선을 C라 하면

$$\int_C f(z)dz=\int_{-R}^{R}f(x)dx+\int_\Gamma f(z)dz$$

이다. 이때 $\int_C f(z)dz=$ (가) 이다.

또한 $\left|\int_\Gamma f(z)dz\right|\le\varphi(R)$이고 $\lim_{R\to\infty}\varphi(R)=0$을 만족시키는 함수 $\varphi(R)=$ (나) 가 존재한다.

그러므로 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}f(x)dx=$ (다) 이다.

	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi R^2}{(R^2-1)^2}$	$\frac{\pi}{3}$
②	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi R^3}{(R^2-1)^2}$	$\frac{\pi}{3}$
③	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi R^4}{(R^2-1)^2}$	$\frac{\pi}{2}$
④	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi R^3}{(R^2-1)^2}$	$\frac{\pi}{2}$
⑤	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi R^2}{(R^2-1)^2}$	$\frac{\pi}{2}$

17. 복소평면에서 C는 꼭짓점이 -1, $1-i$, $1+i$인 삼각형이고 방향이 반시계방향으로 주어졌을 때, $\int_C\frac{dz}{z(z-2)}$의 값을 구하시오. [4점] [2007-14]

18. n이 임의의 정수일 때, 복소적분 $\int_{|z|=1}z^n dz$의 값을 구하시오. [5점] [2001-7]

19. $\int_{|z|=2}\frac{(z^2+7)e^{2z}}{(z-3)(z+1)^2}dz$의 값을 구하시오. [5점] [1999 추시-14]

20. 복소적분 $\oint_{\mathrm{U}}z^3\cos\frac{1}{z}dz$의 값을 구하시오. 단, U는 복소평면에서 원점 O을 품는 단위원이다. [4점] [1997-12]

21. $\int_{|z|=3}\frac{e^z-1}{z(z-1)(z-i)}dz$을 계산하시오. [1997 모의-7]

22. $\int_{|z|=3}\frac{z^3+3z-1}{(z-1)(z+2)}dz$의 값은? [1996-10]
(단, z는 복소수)

① $8\pi i$　② $12\pi i$
③ $16\pi i$　④ $20\pi i$

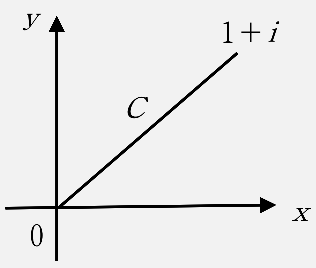
23. 복소적분 $\oint_{|z|=1} e^{\frac{1}{z^2}} dz$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$) [1995-22]

① $2\pi i$ ② πi

③ $\frac{\pi}{2} i$ ④ 0

24. 복소평면에서 $z=0$으로부터 $z=1+i$에 이르는 선분을 C라 하자. $f(z)=y-x-i\,3x^2$일 때, $\int_C f(z)dz$의 값은? [1994-28]

① $1-i$
② $1+i$
③ $2-i$
④ $2+i$



[미분기하학]

<곡선>

1. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 단위속력곡선(unit speed curve) $\alpha:(0,2)\to\mathbb{R}^3$이 모든 $s\in(0,2)$에 대하여

$$\alpha(s)\cdot\alpha'(s)=0,\ \alpha(s)\cdot N(s)=-2s^2$$

을 만족시킨다. $\alpha(1)\cdot B(1)=12$일 때, 곡선 $\alpha(s)$의 $s=1$에서의 곡률(curvature) $\kappa(1)$과 비틀림률(열률, 꼬임률, torsion)의 절댓값 $|\tau(1)|$을 순서대로 구하시오. (단, $N(s)$는 점 $\alpha(s)$에서의 법선벡터(normal vector)이고, $B(s)$는 점 $\alpha(s)$에서의 종법선벡터(binormal vector)이다.) [2점, 기입형A-4] [2026]

2. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡선 C를

$$C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid y=e^{ax},\ yz=b\}\ (\text{단, } a,\ b\text{는 상수})$$

라 하자. 곡선 C와 $yz-$평면의 교점 P에서 곡선 C의 접선(tangent line)이 점 $(2\sqrt{2},3,-1)$을 지날 때, a^2+b^2의 값과 점 P에서의 곡률(curvature)을 순서대로 구하시오. [2점, 기입형A-4] [2024]

3. 2차원 유클리드 평면에 곡선

$$\alpha(t)=(2\sin t-\sin 2t,\ 2\cos t-\cos 2t)\ \ (0<t<\pi)$$

가 있다. 곡선 α의 $t=\frac{\pi}{2}$에서의 접촉원(osculating circle)의 중심(곡률중심, center of curvature)과 반지름(곡률반경, radius of curvature)을 구하시오. [2점, 기입형A-3] [2023]

4. 단위속력곡선(unit speed curve) $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$에 대하여 점 $\alpha(t)$에서의 곡률(curvature)과 비틀림률(열률, 꼬임률, torsion)을 각각 $\kappa_\alpha(t)$, $\tau_\alpha(t)$라 할 때, $\kappa_\alpha(t)\neq 0$ $(t\in\mathbb{R})$이고 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$는

$$\tau_\alpha(t)=f(t)\kappa_\alpha(t),\ f(1)=\sqrt{3},\ f'(1)=-2$$

을 만족한다. 점 $\alpha(t)$에서 곡선 α의 단위접벡터장(unit tangent vector field) $T(t)$와 단위종법벡터장(unit binormal vector field) $B(t)$에 대하여 곡선 $\beta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$을

$$\beta(t)=\int_0^t\{\tau_\alpha(s)T(s)+\kappa_\alpha(s)B(s)\}ds$$

로 정의하고, 이 곡선 위의 점 $\beta(t)$에서의 곡률을 $\kappa_\beta(t)$라 하자. 이 때, 곡선 β가 정칙곡선(정규곡선, regular curve)임을 보이고, $\tau_\alpha(1)\kappa_\beta(1)$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형A-9] [2022]

5. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 구

$$M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2+z^2=1\}$$

위에 단위속력곡선(arc-length parametrized curve) $\gamma:[0,1]\to M$이 있다. 각 $s\in[0,1]$에 대하여 점 $\gamma(s)$에서의 γ의 종법선벡터(binormal vector)를 $B(s)$, 점 $\gamma(s)$에서의 M의 법선벡터(normal vector) $n(s)$라 하자.

모든 $s\in[0,1]$에 대하여 $B(s)\cdot n(s)=\frac{1}{2}$을 만족할 때, $\gamma(s)$의 비틀림률(열률, 꼬임률, torsion) $a(s)$와 곡률(curvature) $b(s)$를 구하시오. [2점, 기입형A-4] [2021]

6. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡선

$$\gamma(t) = (2t - \cos t, t + \sin t, 2t + 1) \ (0 < t < 2\pi)$$

위의 점 $\gamma(t_0)$에서의 접벡터(tangent vector)가 벡터 $(6,2,4)$와 평행하다. t_0의 값과 $t = t_0$일 때 곡선 γ의 비틀림률(열률, 꼬임률, torsion)을 각각 구하시오. [2점, 기입형A-3] [2020]

7. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡선 C가

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x^3 - ax + a, \ z = x - 1\}$$

일 때, 이 곡선의 비틀림률(열률, 꼬임률, torsion) τ를 구하시오. 또한 점 $(1, 1, 0)$에서 곡선 C의 곡률(curvature)이 3이 되도록 하는 a의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [2점, 기입형A-6] [2019]

8. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 $\alpha(2) = (0, 0, 0)$인 단위 속력곡선(unit speed curve) $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$에 대하여 곡선 $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$을

$$\beta(t) = \int_2^t \left(\alpha(s) + s^2 \boldsymbol{N}(s)\right) ds$$

라 하자. 두 벡터 $\alpha'(2)$, $\beta''(2)$가 서로 수직일 때, $t = 2$에서 α의 곡률(curvature) κ의 값을 구하시오.
(단, $\boldsymbol{N}(s)$는 곡선 α의 주법벡터장(principal normal vector field)이다.) [2점, 기입형A-6] [2018]

9. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$의 한 평면에 있고 곡률(curvature)이 양인 단위 속력곡선(unit speed curve) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$에 대하여, 점 $\gamma(s)$에서의 접선벡터(tangent vector)를 $\boldsymbol{T}(s)$, 주법선벡터(principal normal vector)를 $\boldsymbol{N}(s)$라 하자. 곡선 $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ 을 $\beta(s) = \dfrac{1}{2}\boldsymbol{T}(s) + \boldsymbol{N}(s)$로 정의할 때, 모든 양수 t에 대하여 $s = 0$에서 $s = t$까지 곡선 β의 길이는 $3t$이다. $s = 1$일 때, 곡선 γ의 곡률을 구하시오. [2점, 기입형A-8] [2017]

10. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 단위속력곡선(unit speed curve) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$의 점 $\gamma(s)$에서의 곡률(curvature) $\kappa(s)$는 $\kappa(s) = \sqrt{s^4 + 4s^2 + 3}$ 이다. 곡선 $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$을 $\alpha(t) = \gamma(t) + \gamma'(t)$로 정의할 때, $t = 0$에서 $t = 1$까지 곡선 α의 길이를 구하시오. [2점, 기입형A-6] [2016]

11. 좌표공간 $\mathbb{R}^3$에서 두 곡선 $\alpha(t)=(2t, t^2, at^3)$, $\beta(t)=(t, bt, t^2)$이 합동이 되도록 하는 두 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하시오. [2점, 기입형A-7] [2015]

12. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 비틀림률(열률, 꼬임률, torsion)과 곡률(curvature)이 각각 상수 τ, 1인 단위속력 곡선 α에 대하여, 곡선 β를 다음과 같이 정의하자.

$$\beta(s)=\int_0^s \boldsymbol{N}(t)dt$$

여기서 $\boldsymbol{N}(t)$는 곡선 α의 주법벡터장(단위주법벡터장, principal normal vector field, unit principal normal vector field)이다. 곡선 β의 곡률과 비틀림률을 각각 $\kappa_\beta(>0)$, τ_β라 할 때 $\kappa_\beta+\tau_\beta$의 값을 구하시오. [2점, 기입형A-11] [2014]

13. 좌표공간에서 두 단위속력 곡선

$$\alpha(t)=\left(3\cos\frac{t}{5},\ 3\sin\frac{t}{5},\ \frac{4}{5}t\right),\ \beta(t)=\left(3\cos\frac{t}{5},\ 3\sin\frac{t}{5},\ -\frac{4}{5}t\right)$$

에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2013-33]

<보기>

ㄱ. 곡선 α의 곡률(curvature) κ_α와 곡선 β의 곡률 κ_β에 대하여 $\kappa_\alpha=\kappa_\beta$이다.

ㄴ. 곡선 α의 열률(꼬임률, 비틀림률, torsion) τ_α와 곡선 β의 열률 τ_β에 대하여 $\tau_\alpha=-\tau_\beta$이다.

ㄷ. $\beta(t)=L(\alpha(t))$이고 L을 나타내는 행렬의 행렬식이 1인 직교변환(orthogonal transformation) L이 존재한다.

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 3차원 공간 $\mathbb{R}^3$에 놓여 있는 정규곡선(정칙곡선, regular curve) C에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2012-34]

<보기>

ㄱ. C 위의 모든 점에서 곡률(curvature)이 0이면 C는 직선이거나 직선의 일부이다.

ㄴ. C 위의 모든 점에서 열률(비틀림률, 꼬임률, torsion)이 정의되고 그 값이 0이면 C는 적당한 평면에 놓여 있다.

ㄷ. C 위의 모든 점에서 곡률이 양의 상수로 일정하면 C는 원이거나 원의 일부이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 좌표공간에서 곡선 $\gamma(t)=(a\cos t,\, a\sin t,\, bt)$ 는 두 점 $\mathrm{P}(2, 0, 4\pi)$, $\mathrm{Q}(2, 0, 8\pi)$를 지난다. 점 P에서 Q까지 곡선 $\gamma(t)$의 길이가 $4\sqrt{10}\pi$ 일 때, $a+b$의 값은? (단, $a>0$이고, $b>0$이다.) [2점] [2011-35]

① $\dfrac{8}{3}$　② 3　③ $\dfrac{10}{3}$

④ $\dfrac{11}{3}$　⑤ 4

16. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡선 γ를 두 곡면

$$S_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2-y^2=1,\ x>0\},$$

$$S_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=xy\}$$

의 교선이라 하자. 이때 γ 위의 점 $q=(1,0,0)$에서의 γ의 접선벡터와 수직이고 점 q를 포함하는 평면에 속하는 점은? [2점] [2010-19]

① $(0,1,1)$　② $(1,0,1)$

③ $(1,1,1)$　④ $(1,-1,-1)$

⑤ $(-1,1,-1)$

17. 실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$라 하자. 3차원 유클리드 공간에 놓인 정칙 곡선 $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$에 대하여 곡선 $\beta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$을 $\beta(t)=2\alpha(-2t)$로 정의하자. $t=0$일 때 α의 비틀림(열률, torsion)을 $\tau(0)$이라 하면 $t=0$일 때 β의 비틀림은? (단, 모든 점에서 α의 곡률과 비틀림은 모두 양수이다.) [2점] [2009-35]

① $\dfrac{1}{2}\tau(0)$　② $-\dfrac{1}{2}\tau(0)$　③ $-2\tau(0)$

④ $\tau(0)$　⑤ $-\tau(0)$

18. 다음 곡선 $\alpha(t)=(\cosh t, \sinh t, t)$에 대하여 단위속력을 갖는 재매개곡선(unit-speed reparametrization)을 구하는 과정이다. (가), (나)에 알맞은 것은? (단, $\cosh t=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$, $\sinh t=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$이다.) [2점] [2009 모의-35]

> 주어진 곡선 α의 속력 $\|\alpha'(t)\|$를 구하면
>
> $$\|\alpha'(t)\|=\boxed{\quad(가)\quad}$$
>
> 이므로
>
> 곡선 α의 호길이 함수(arc-length function) $s(t)$는
>
> $$s(t)=\int_0^t\|\alpha'(u)\|\,du=\sqrt{2}\sinh t$$
>
> 따라서 호길이 함수의 역함수는
>
> $$t=t(s)=\sinh^{-1}\frac{s}{\sqrt{2}}$$
>
> 이므로
>
> 곡선 α에 대하여 단위속력을 갖는 재매개곡선 $\beta(s)$는
>
> $$\beta(s)=\alpha(t(s))=\left(\sqrt{1+\frac{s^2}{2}},\ \boxed{\quad(나)\quad},\ \sinh^{-1}\frac{s}{\sqrt{2}}\right).$$

	(가)	(나)
①	$\sqrt{2}\cosh t$	$\sqrt{2}s$
②	$\sqrt{2}\cosh t$	$\dfrac{s}{\sqrt{2}}$
③	$\sqrt{2}\lvert\sinh t\rvert$	$\sqrt{2}s$
④	$\sqrt{2}\lvert\sinh t\rvert$	$\dfrac{s}{\sqrt{2}}$
⑤	$\sinh\dfrac{\lvert t\rvert}{\sqrt{2}}$	$\cosh\dfrac{s}{\sqrt{2}}$

19. 곡선 $\alpha:(0,\infty)\to\mathbb{R}^3$, $\alpha(t)=(t^3+t,\ t^2+1,\ t)$가 있다. 이 곡선의 접촉평면($\alpha'(t)$와 $\alpha''(t)$를 포함하는 평면)과 xy-평면이 이루는 각이 45°가 되는 t의 값을 구하시오. (단, $\mathbb{R}^3$은 3차원 유클리드공간이다.) [4점] [2007-9]

20. 호의 길이 s로 나타낸 매개변수 곡선 $\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}^3$가 $\alpha''(s)\neq 0$이고 $\alpha(s)+\dfrac{1}{\kappa(s)}N(s)$가 고정된 점이면, α는 원의 일부임을 보이시오. [3점] [2005-17]

(단, $\kappa(s)$는 $\alpha(s)$의 곡률(curvature)이고, $N(s)$는 주법선벡터 (principal normal vector)이다.)

21. 곡선 $\mathbf{x}(\mathrm{t})=(3t,\ 3t^2,\ 2t^3)$위의 모든 점에서 단위접선벡터(unit tangent vector)와 평면 $x+z=0$이 이루는 각을 구하시오. [5점] [2004-11]

22. 다음 곡선의 곡률(curvature)과 열률(torsion, 비꼬임률)을 구하고, 두 값을 모두 이용하여 곡선의 종류가 무엇인지 쓰시오. [5점] [2003-13]

$$\mathbf{x}(\theta)=\left(\cos\theta-2,\ \cos\theta+2,\ \sqrt{2}\sin\theta\right)$$
(단, $0\le\theta<2\pi$)

23. 곡선 $\alpha:[-1,1]\to\mathbb{R}^3$을 $\alpha(t)=\left(2t,\ t^2,\ \dfrac{1}{3}t^3\right)$으로 정의할 때, 다음 물음에 답하시오. [총 5점] [2002-12]

(1) $t=0$에서 곡선 α의 비꼬임(torsion)을 구하시오. [3점]

(2) $\phi=ydx+zdy+xydz$일 때, $\displaystyle\int_\alpha \phi$를 계산하시오. [2점]

24. 곡선 $X=(4\cos t)e_1+(4\sin t)e_2+3te_3$에 대하여 다음 물음에 답하시오. [총 5점] [2001-11]

(단, e_1, e_2, e_3 는 $\mathbb{R}^3$의 표준기저이다.)

(1) 단위 접선 벡터를 구하시오. [2점]

(2) 곡률을 구하시오. [2점]

(3) 곡률반경을 구하시오. [1점]

25. 반지름의 길이가 r인 원 $\alpha(s)$가 어떤 곡면 위에서 측지선(geodesic)일 때, 이 원의 법곡률(normal curvature) k_n을 구하시오. (여기에서 s 는 호의 길이이고, 법곡률 k_n은 $\alpha''(s)$의 법성분(normal component)이다.) [5점] [2000-11]

26. $a>0$일 때, 단위속력곡선(unit-speed curve)

$$X(t)=\left(a\cos\frac{t}{\sqrt{a^2+1}},\ a\sin\frac{t}{\sqrt{a^2+1}},\ \frac{t}{\sqrt{a^2+1}}\right)$$

의 곡률(curvature)은? [1994-20]

① $\dfrac{a}{a^2+1}$ ② $\dfrac{\sqrt{a}}{a^2+1}$

③ $\dfrac{\sqrt{2}\,a}{a^2+1}$ ④ $\dfrac{2a}{a^2+1}$

<곡면>

1. 최고차항의 계수가 2인 삼차함수 $f(x)$가 $-1<x<2$에서 $f(x)>0$이다. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡선 $y=f(x)$, $z=0$ $(-1<x<2)$를 x축 둘레로 360° 회전시켜 얻은 회전면(surface of revolution)을 M이라 하고, 곡면 M이 평면 $x=0$과 만나서 생기는 원을 α, 평면 $x=\frac{2}{3}$와 만나서 생기는 원을 β, 평면 $x=1$과 만나서 생기는 원을 γ라 하자.
곡면 M에 놓인 곡선으로서 α, β, γ의 측지곡률(geodesic curvature)이 각각 0, 0, $\frac{2}{5}$이다. $f(0)$의 값과 곡선 α 위의 점에서 M의 가우스 곡률(Gaussian curvature)을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B-11] [2026]

2. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡면
$$X(u,v)=(1+2u, 2\cosh u\cos v, 2\cosh u\sin v)$$
위의 $u=0$, $v=\frac{\pi}{4}$인 점 P에서 접평면(tangent plane)의 방정식을 풀이 과정과 함께 쓰시오.
또한 점 P에서 곡면 X의 가우스곡률(Gaussian curvature) K와 평균 곡률(mean curvature) H의 값을 각각 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형A-9] [2025]

3. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡면
$$M: x^2+4y^2+4z^2=4,\ 0<x<\frac{4\sqrt{5}}{5},\ 0<z<\sqrt{3}y$$
위의 점 $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$에서의 가우스곡률(Gaussian curvature) K를 구하시오. 또한, 곡면 M에서의 가우스 곡률합(가우스 전곡률, total Gaussian curvature) $\iint_M K\,dA$를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, dA는 곡면 M의 면적소(area element)이다.) [4점, 서술형B-7] [2024]

4. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 두 곡면 M, N을
$$M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2-y^2-z=0\},$$
$$N=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=1\}$$
이라 하고, 곡선 γ를 M과 N의 교선이라 하자. 곡면 M에 놓인 곡선으로서 γ의 점 $p=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$에서의 측지곡률(geodesic curvature)과 법곡률(normal curvature)을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B-9] [2023]

5. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에 놓인 곡면 M 위의 점 p에서 모든 접벡터(tangent vector)의 집합을 $T_{\mathrm{p}}(M)$, p에서의 주벡터(principal vector) 중 하나를 e라 하자. $T_{\mathrm{p}}(M)$에 속하는 단위접벡터(unit tangent vector) v와 e의 사잇각을 θ라 할 때, p에서 v 방향으로의 법곡률(normal curvature) $\kappa_n(\theta)$가
$$\int_0^{\pi}\kappa_n(\theta)\,d\theta=\frac{11\pi}{8}$$
를 만족한다고 하자. 점 p에서 곡면 M의 가우스곡률(Gaussian curvature)이 $\frac{3}{2}$일 때, p에서 M의 주곡률(principal curvature)의 값을 모두 쓰시오. (단, 주벡터는 주곡률방향(주방향, principal direction)의 단위접벡터이다.) [2점, 기입형B-2] [2022]

6. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡선

$$\gamma(u) = (0, u^4 - 2u^2 + 5, u) \ (u \in \mathbb{R})$$

를 z축을 중심으로 360° 회전시켜 얻은 회전체를 M이라 하고, M의 가우스 곡률(Gaussian curvature)을 K라 하자. 영역

$$S = \{(x, y, z) \in M \mid -1 \le z \le 1\}$$

에 대하여 $\iint_S K dA$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B-10] [2021]

7. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡면 $\mathrm{x}(u, v) = (u^2 + v, u - v^2, uv)$ 위의 $u = 1$, $v = 2$인 점 P에서 접평면(tangent plane)의 방정식을 구하시오. 또한 점 P에서 곡면 x의 평균곡률(mean curvature) H의 값을 풀이 과정과 함께 구하시오. [4점, 서술형B-8] [2020]

8. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡면 $M: z = \frac{1}{4}(x^4 + y^4)$과 평면 $H: x + y - z = d$가 한 점 p에서 접할 때, 상수 d의 값을 구하시오. 또한 접점 p에서 곡면 M의 가우스곡률(Gaussian curvature) K의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B-5] [2019]

9. 곡면

$$X(u, v) = \left(u \cos v, u \sin v, \frac{1}{u}\right) \ (u > 0, \ -\pi < v < \pi)$$

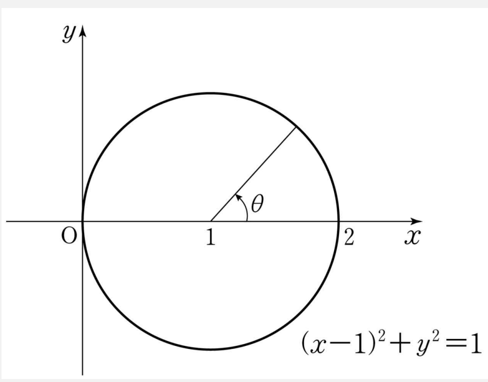
위의 점 $p = (1, 0, 1)$에서 주곡률(principal curvature) k_1, $k_2 (k_1 > k_2)$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.

또한 점 p에서 단위접벡터(unit tangent vector) $\boldsymbol{w} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)$ 방향으로의 법곡률(normal curvature)을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B-5] [2018]

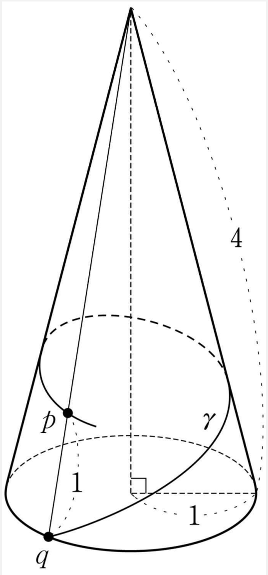
10. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡선 γ를 두 곡면

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4, \ z > 0\},$$
$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1, \ z > 0\}$$

의 교선이라 하자. 아래 그림에서의 각 $\theta (0 < \theta < 2\pi)$를 매개변수로 하는 곡선 $\gamma : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$의 매개변수표현(parametrized representation) $\gamma(\theta)$를 하나 구하시오. 또한 곡면 S_1 위에 놓인 곡선으로서 γ의 점 $(0, 0, 2)$에서의 측지곡률(geodesic curvature)의 절댓값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B-5] [2017]



11. 그림과 같이 3차원 유클리드 공간에 밑면이 반지름의 길이가 1인 원이고 모선의 길이가 4인 원뿔이 있다. 이 원뿔의 옆면에 있는 점 p와 밑면에 있는 점 q는 같은 모선 위에 있고, 선분 pq의 길이는 1이다. 점 q에서 출발하여 원뿔의 옆면을 돌아 점 p를 지나는 측지선(geodesic) γ에 대하여 점 p에서 원뿔의 옆면의 주곡률(principal curvature)을 각각 κ_1, κ_2라 하고, 점 p에서 측지선 γ의 곡률(curvature)을 κ라 하자. κ_1, κ_2의 값을 구하고, 이를 이용하여 κ의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B-5] [2016]



12. 곡면

$$M=\{(x,\, y,\, z)\in\mathbb{R}^3 \mid 4x=(y^2+z^2)^2\}$$

위의 점 $p=\left(\frac{1}{4}u^4,\, u,\, 0\right)(u>0)$에서 접평면(tangent plane)을 $T_p(M)=\left\{v_p\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, v_p\text{는 } p\text{에서의 곡면 } M\text{의 접벡터}\right\}$라 하고 이 점에서의 주곡률(principal curvature)을 각각 $\kappa_1(u)$, $\kappa_2(u)$라 하자. 또 $T_p(M)$에 속하는 두 개의 단위접벡터(unit tangent vector) w_p와 $(0,0,1)_p$가 이루는 각이 $\frac{\pi}{6}$라고 하자. 점 p에서 곡면 M의 가우스 곡률 $K(u)$를 풀이 과정과 함께 쓰고, w_p방향으로의 법곡률(normal curvature) $\kappa_n(w_p)$를 $a\kappa_1(u)+b\kappa_2(u)$ (a, b는 상수)로 나타낼 때 ab의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [5점, 서술형B-3] [2015]

13. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에 놓인 곡면

$$M:\ X(u,\, v)=\left(u\cos v,\, u\sin v,\, \frac{1}{2}u^2\right)\ (u\geq 0,\ 0\leq v\leq 2\pi)$$

에 포함되는 영역 $S=\{X(u,\, v)\mid 0\leq u\leq 1,\, 0\leq v\leq \pi\}$가 있다.
S의 경계(boundary) ∂S의 측지곡률을 κ_g라 할 때, ∂S의 측지곡률합(전측지곡률, total geodesic curvature) $\int_{\partial S}\kappa_g ds$의 절댓값을 구하시오. (단, s는 호의 길이를 나타내는 매개변수이다.) [2점, 기입형A-12] [2014]

∘ 도움말
정칙곡선(정규곡선, regular curve) α_1, α_2, $\cdots$, α_n들로 이루어진 조각별 정칙곡선(piecewise regular curve) α의 측지곡률합은

$$\int_{\alpha}\kappa_g ds=\sum_{i=1}^{n}\int_{\alpha_i}\kappa_g ds$$

로 정의된다.

14. 좌표공간에 원환면(torus)

$$T = \left\{(x,\ y,\ z) \mid (\sqrt{x^2+y^2}-2)^2 + z^2 = 1\right\}$$

과 평면

$$P = \{(x,\ y,\ z) \mid y+z=0\}$$

이 있다. 원환면 T와 평면 P의 교집합에 놓여있는 단위속력곡선

$$\alpha : (-1,1) \to T \cap P$$

가 $\alpha(0) = (1,0,0)$을 만족시킬 때, 점 $(1,0,0)$에서 곡선 α의 원환면 T에 대한 법곡률(normal curvature)의 절댓값은? [2점] [2013-34]

① 0 ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{2}{3}$

④ 1 ⑤ $\frac{4}{3}$

15. 2차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^2$에서 3차원 공간 $\mathbb{R}^3$ 상의 매끄러운 곡면(smooth surface) S 위로의 등장사상(등거리사상, isometry)

$$f : \mathbb{R}^2 \to S$$

가 존재할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2012-35]

<보기>

ㄱ. f의 역사상 f^{-1}도 등장사상이다.
ㄴ. S의 모든 점에서 가우스 곡률(Gaussian curvature)이 0이다.
ㄷ. S의 모든 점에서 평균곡률(mean curvature)이 0이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 현수선(catenary) $y = 2\cosh\left(\frac{x}{2}\right)$를 x축을 중심으로 회전시켜 생기는 회전면 M의 가우스곡률(Gaussian curvature)을 K라고 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 모두 고른 것은? (단, $\cosh t = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$이다.) [2점] [2011-36]

<보기>

ㄱ. $K(p)>0$인 점 p가 존재한다.
ㄴ. K의 최솟값은 $-\frac{1}{4}$이다.
ㄷ. M은 평면과 거리동형(isometric)이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

17. $\mathbb{R}^3$ 안의 두 곡면 X와 Y가 구간 I에서 정의된 단위속력곡선 $\alpha : I \to X \cap Y$를 따라 수직으로 만난다.

집합 $A = \{\alpha(t) \mid t \in I\}$ 위의 위상 $\mathfrak{I}_A$가 $\mathbb{R}^3$ 위의 보통위상(usual topology)에 대한 상대위상(relative topology)일 때, 곡선 α와 집합 A는 다음 조건을 만족한다.

〈조 건〉

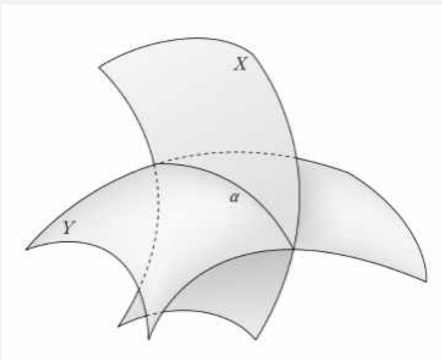
(가) 곡선 α는 X의 주요곡선이다.
(나) 모든 $t \in I$에 대하여 $\alpha''(t)$는 X와 수직이다.
(다) 위상공간 $(A,\ \mathfrak{I}_A)$는 콤팩트(compact)가 아니다.

위상 $\mathfrak{I}_A$를 이용하여 집합 X위의 위상 $\mathfrak{I}$를 다음과 같이 정의하자.

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_A \cup \{X - F \mid F\text{는 } (A,\ \mathfrak{I}_A)\text{에서 콤팩트 부분집합}\}$$

아래의 명제는 조건 (가), (나)로부터 얻을 수 있는 기하적 성질 (Ⅰ)과 조건 (다)로부터 얻을 수 있는 위상적 성질 (Ⅱ), (Ⅲ)을 나타낸 것이다. 명제 (Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ)이 참임을 각각 증명하시오. [20점] [2012 2차, 2교시-4]

(Ⅰ) 곡선 α 위의 모든 점에서 Y의 가우스 곡률(Gaussian curvature)은 0이다.
(Ⅱ) A는 $(X,\ \mathfrak{I})$에서 조밀한 부분집합(dense subset)이다.
(Ⅲ) 연속함수 $f : (X,\ \mathfrak{I}) \to Y$에 대하여 $f|_A : A \to Y$가 상수함수이면 f는 상수함수이다. (단, Y 위의 위상은 $\mathbb{R}^3$ 위의 보통위상에 대한 상대위상이다.)



※ 아래의 정리는 증명 없이 사용한다.

[정리 1]
곡면 X위의 정칙곡선 $\alpha : I \to X$위에서 정의된 X의 미분가능한 단위법벡터장(unit normal vector field)을 $\mathrm{N}_X(t)$라 하자(단, $t \in I$). $\alpha'(t)$가 점 $\alpha(t)$에서 X의 주요방향이면, 실수 k가 존재하여 $\mathrm{N}_X'(t) = k\alpha'(t)$를 만족한다. 또한 그 역도 성립한다.

[정리 2]
X가 위상공간이고 Y가 T_2 공간(Hausdorff 공간)일 때, 두 연속함수 $f,\ g : X \to Y$에 대하여 집합 $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$는 X의 닫힌 부분집합(closed subset)이다.

〈참 고〉

◦ 단위속력곡선(unit speed curve) : 곡선 위의 각 점에서 속력이 1인 정칙곡선(regular curve)
◦ 주요곡선(principal curve) : 곡선 위의 각 점에서 접선방향이 주요방향(principal direction)인, 곡면 위의 정칙곡선

18. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 두 곡면

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z^2-x^2-y^2=2\},$$
$$P=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=2\}$$

의 교선을 α라 하자. 이때 곡면 S 위에 놓인 곡선으로서 α의 측지곡률(geodesic curvature)의 절댓값은? [2010-20]

① 0　　② $\frac{1}{\sqrt{5}}$　　③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{1}{\sqrt{3}}$　　⑤ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

19. 곡면 X, Y가 다음과 같이 각각 주어져 있을 때, 물음에 답하시오. [2010 2차, 1교시-2]

① 사각형

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$$

상의 동치관계 $\sim$가 다음과 같이 주어졌다고 하자.

$(x,0)\sim(x,1),\ 0\le x\le 1$

$(0,y)\sim(1,y),\ 0\le y\le 1$

$X=D/\sim$는 D상의 동치관계 $\sim$에 의해 유도된 상공간(quotient space)이다. 단, D상의 위상은 $\mathbb{R}^2$상의 보통위상(usual topology)에 대한 상대위상(relative topology, subspace topology)이다.

② Y는 아래 좌표조각 $\mathbf{x}$와 같이 보통 매개화(usual parametrization)에 의해 표현된 원환면(torus of revolution)이다.

$$\mathbf{x}(u,v)=((2+\cos u)\cos v,\ (2+\cos u)\sin v,\ \sin u)$$

곡면 X가 T_2공간(Hausdorff space)이 됨을 보이시오. 또한 곡면 X와 Y상의 가우스곡률(Gaussian curvature)을 구체적으로 비교해 봄으로써 가우스곡률이 서로 다르게 주어질 수 있음을 보이고, 이와 같은 현상에 비추어 가우스-보네(Gauss-Bonnet) 정리의 의미를 설명하시오. [20점]

20. 다음은 3차원 유클리드 공간에 놓인 곡면

$$M:\ X(u,v)=(u,v,u^3+2v),$$
$$(-\infty<u<\infty,\ -\infty<v<\infty)$$

위의 측지삼각형(geodesic triangle)의 내각의 합을 구하는 과정이다. (가), (나), (다), (라)에 알맞은 것은? [2점] [2009-36]

곡면 M은 yz평면 위의 직선 $l_0: x=0,\ z=2y$를 xz평면 위의 곡선 $C: y=0,$ $\boxed{\text{(가)}}$을 따라 평행이동시킴으로써 얻어진다. 곡면 M의 각 점 p에 대하여 p을 지나면서 l_0와 평행인 직선을 단위속력을 갖도록 매개화한 곡선을 $l_p=l_p(t)$라 하면 l_p는 M의 점근곡선이고, 동시에 $\boxed{\text{(나)}}$이 된다. 따라서 모든 점에서 M의 가우스곡률(Gaussian-curvature) K는 $\boxed{\text{(다)}}$를 만족한다. 곡면 M의 임의의 측지삼각형 $\triangle$에 대하여 가우스-보네(Gauss-Bonnet)의 공식을 적용하면 $\iint_{\triangle} K\,dA=(\triangle\text{의 내각의 합})-\pi$ 이므로, 곡면 M의 모든 측지삼각형의 내각의 합은 $\boxed{\text{(라)}}$.

<도움말>

- 점근곡선(asymptotic curve): 곡선 위의 각 점에서 접선방향의 법곡률(normal curvature)이 0이 되는 곡면 위의 정칙곡선.
- 주요곡선(principal curve): 곡선 위의 각 점에서 접선 방향의 법곡률이 주요곡률(principal curvature)이 되는 곡면위의 정칙곡선
- 측지선(geodesic) : 곡선 위의 각 점에서 측지곡률 (geodesic curvature)이 0이고, 일정한 속력을 갖는 곡면위의 정칙곡선.

	(가)	(나)	(다)	(라)
①	$z=x^3$	측지선	$K\ge 0$	π보다 크다.
②	$z=x^{\frac{1}{3}}$	주요곡선	$K=0$	π이다.
③	$z=x^{\frac{1}{3}}$	측지선	$K\le 0$	π보다 작다.
④	$z=x^3$	주요곡선	$K\le 0$	π보다 작다.
⑤	$z=x^3$	주요곡선	$K=0$	π이다.

21. 정칙곡면(regular surface) M의 점 p에서의 주곡률방향(principal direction)이 u_1, u_2이고 이에 대응하는 주곡률(principal curvature)이 각각 1과 $\frac{1}{3}$이다. 점 p에서의 단위접벡터(unit tangent vector) v가 u_1과 이루는 각이 $\frac{\pi}{3}$일 때, v방향의 법곡률(normal curvature)은? [2점] [2009 모의-36]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

22. $\mathbb{R}$을 실수 집합이라 할 때, 곡면 $\mathbf{x}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{x}(u,v)=\left(u-\frac{u^3}{3}+uv^2,\ v-\frac{v^3}{3}+u^2v,\ u^2-v^2\right)$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오. [4점] [2008-17]

(1) 곡면 위의 점 $\mathbf{x}(1,1)$에서의 법벡터(normal vector) $\vec{n}$을 구하시오.

(2) 위 (1)에서 구한 법벡터 $\vec{n}$과 $\vec{n}$을 xy-평면에 정사영(projection)한 벡터가 이루는 각을 α라 할 때, $\cos\alpha$를 구하시오.

23. 3차원 유클리드공간 $\mathbb{R}^3$에 있는 곡면 $\mathbf{x}(\theta,\phi)$를 다음과 같이 정의하자.

$$\mathbf{x}(\theta,\phi)=((2+\sin\phi)\cos\theta,\ (2+\sin\phi)\sin\theta,\ \cos\phi)$$

이 때, 곡면 위의 점 $\mathbf{x}(0,0)$에서의 접평면(tangent plane)의 방정식을 구하고, 그 접평면과 곡면 $\mathbf{x}(\theta,\phi)$의 교선의 방정식을 구하시오. (단, $-\infty<\theta<\infty$, $-\infty<\phi<\infty$) [5점] [2006-16]

24. 개집합(open set) $D\subseteq\mathbb{R}^2$에 대하여 미분가능한 함수 $z=f(x,y):D\to\mathbb{R}$의 그래프로 이루어지는 곡면 G의 법선과 z축과의 사잇각을 θ라 할 때 다음을 보이시오.

$$\iint_G \cos^2\frac{\theta}{2}\,dS=\frac{1}{2}S(G)+\frac{1}{2}A(D)$$

(단, $S(G)$는 곡면의 겉넓이, $A(D)$는 영역 D의 넓이로 둘 다 유한이고, $dS=\sec\theta\,dA$이다.) [3점] [2005-16]

25. 곡면 $z=1-x^2-y^2$에서 $z\geq 0$인 부분을 S라 할 때, S 위에서의 면적분(surface integral) $\iint_S \frac{1}{\sqrt{5-4z}}dS$를 계산하시오. [5점] [2000-6]

26. 3차원 유클리드 공간 E^3의 폐곡면 S에는 가우스 곡률 K의 값이 양수가 되는 점이 항상 존재함을 증명하시오. [5점] [1999 추시-10]

27. 토러스(Torus) $S^1\times S^1$에서의 가우스곡률(Gaussian curvature) K에 대하여 $K(p)=0$이 되는 점 $p\in S^1\times S^1$가 적어도 하나 존재함을 증명하시오. [4점] [1997-11]

28. 타원면(ellipsoid) E : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 의 가우스곡률(Gaussian curvature)을 K라 할 때 $\int_E KdE$를 계산하시오. [4점] [1997 모의-13]

[위상수학]

〈집합 · 위상의기초 · 사상 · 거리공간〉

1. $\mathbb{R}$의 위상 $\mathfrak{I}=\{\varnothing, (-1,1), (-1,3), (-1,5), \mathbb{R}\}$에 대하여 위상공간 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$의 부분집합 $\mathbb{Z}$의 상대위상(부분위상, relative topology) $\mathfrak{I}_{\mathbb{Z}}$를 구하시오. 또한 위상공간 $(\mathbb{Z}, \mathfrak{I}_{\mathbb{Z}})$에서 집합 $A=\{0,1,2,3\}$의 내부(interior) A°를 구하시오. (단, $(a,b)=\{x\in\mathbb{R} \mid a<x<b\}$이다.) [2점, 기입형B-2] [2026]

2. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 위의 여가산위상(cocountable topology, countable complement topology) $\mathfrak{I}_1$을

$$\mathfrak{I}_1=\{U\subseteq\mathbb{R} \mid \mathbb{R}-U\text{는 가산집합(countable set)}\}\cup\{\varnothing\}$$

이라 하고, 좌표평면 $\mathbb{R}^2$ 위의 보통위상(usual topology)을 $\mathfrak{I}_2$라고 하자. 적공간(곱공간, product space) $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_1)\times(\mathbb{R}^2, \mathfrak{I}_2)$에서 집합

$$S=\{x\in\mathbb{R} \mid 0<x<1\}\times\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0,\ y=\sin\frac{1}{x}\right\}$$

의 내부(interior) S°와 폐포(closure) $\overline{S}$를 각각 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B-7] [2025]

3. 좌표평면 $\mathbb{R}^2$에서 거리함수 $d:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$를 다음과 같이 정의하자.

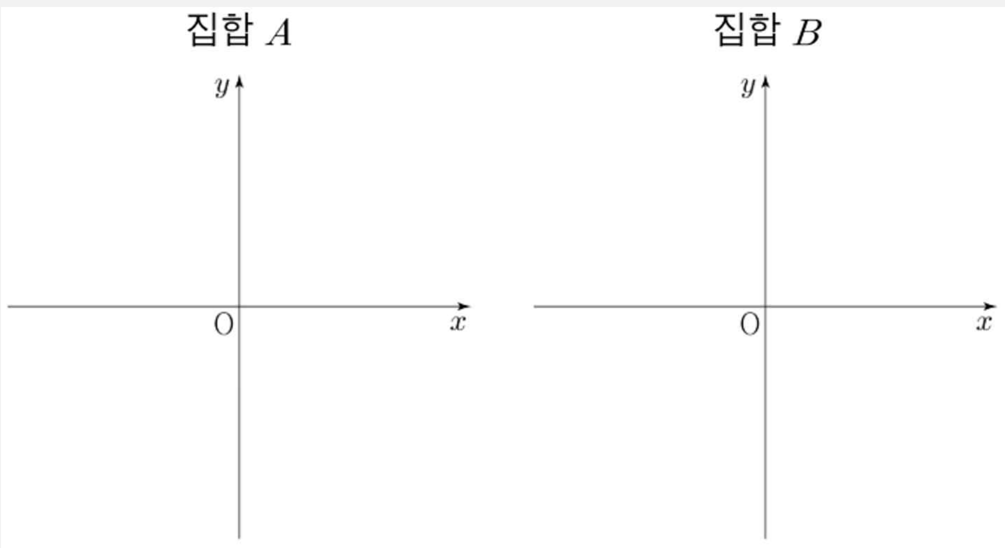
$$d(P,Q)=\begin{cases}\|P\|+\|Q\|, & \|P\|\neq\|Q\| \\ \|P-Q\|, & \|P\|=\|Q\|\end{cases}$$

거리공간 $(\mathbb{R}^2, d)$에서 열린집합(open set)

$$A=\{P\in\mathbb{R}^2 \mid d(P,(2,0))<4\},$$
$$B=\{P\in\mathbb{R}^2 \mid d(P,(2,0))<1\}$$

을 좌표평면에 그림으로 순서대로 나타내시오.

(단, $\|(x,y)\|=\sqrt{x^2+y^2}$이다.) [2점, 기입형B-2] [2023]



4. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$의 보통 위상을 $\mathfrak{I}_u$라 하고, 함수 $f_i:\mathbb{R}\to(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_u)$ $(i=1,2)$를

$$f_1(x)=\lfloor x\rfloor,\ f_2(x)=\lfloor -x\rfloor$$

로 정의하자. 집합

$$\{f_1^{-1}(U) \mid U\in\mathfrak{I}_u\}\cup\{f_2^{-1}(U) \mid U\in\mathfrak{I}_u\}$$

을 부분기저(subbase, subbasis)로 하여 생성된 $\mathbb{R}$의 위상을 $\mathfrak{I}$라 정의하자. 위상공간 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$에서 $\sqrt{2}$를 포함하는 성분(연결성분, component, connected component)을 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$에서 집합 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$의 내부(interior)와 폐포(closure)를 구하시오. (단, $\left[\frac{1}{2}, 2\right]=\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, \frac{1}{2}\leq x\leq 2\right\}$이고, $\lfloor x\rfloor$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.) [4점, 서술형A-11] [2020]

5. 좌표평면 $\mathbb{R}^2$의 거리함수 $d((x,y),(a,b))=|x-a|+|y-b|$와 원점 O에 대하여, $\mathbb{R}^2$에서 거리함수 e를 다음과 같이 정의하자.

$$e(\mathrm{P},\mathrm{Q})=\begin{cases} d(\mathrm{O},\mathrm{P})+d(\mathrm{O},\mathrm{Q}), & \mathrm{P}\neq\mathrm{Q} \\ 0, & \mathrm{P}=\mathrm{Q} \end{cases}$$

거리공간 $(\mathbb{R}^2,e)$에서 두 점 $(1,3)$과 $\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$ 사이의 거리를 구하시오. 또한 열린 집합

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid e((x,y),(1,3))<9\}$$

에 속하고 각 좌표가 모두 정수인 원소의 개수를 구하시오. [2점, 기입형B-2] [2020]

6. 위상공간 $(\mathbb{R}^2,\mathfrak{I}_u)$의 부분공간(subspace)

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<4\}$$

와 집합

$$X=\{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$$

에 대하여 함수 $f:A\to X$를

$$f(x,y)=[x^2+y^2]$$

으로 정의하자. 집합 X 위의 위상 $\mathfrak{I}$를

$$\mathfrak{I}=\{U\subseteq X \mid f^{-1}(U)\in\mathfrak{I}_u\}$$

로 정의할 때, 3을 원소로 갖는 X의 모든 열린집합(open set)의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오.

또 위상공간 $(X,\mathfrak{I})$에서 집합 $B=\{1,2\}$의 도집합(derived set) B'을 구하시오. [4점, 서술형A-12] [2018]

(단, $\mathfrak{I}_u$는 $\mathbb{R}^2$ 위의 보통위상(usual topology)이고, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.)

7. 좌표평면 $\mathbb{R}^2$에서 거리함수(metric, distance function) $d:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$는

$$d(p,q)=\begin{cases} 0, & p=q \\ \max\{\|p\|,\|q\|\}, & p\neq q \end{cases}$$

이다. d에 의해 유도된 $\mathbb{R}^2$ 상의 거리위상(metric topology)을 $\mathfrak{I}_d$라 하자. 위상공간 $(\mathbb{R}^2,\ \mathfrak{I}_d)$의 부분집합

$$A=\{(x,\ 0)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x<1\}$$

의 폐포(closure) $\overline{A}$를 풀이 과정과 함께 쓰시오.

또한 $(\mathbb{R}^2,\ \mathfrak{I}_d)$에서 콤팩트(compact)인 무한 부분집합 B의 예를 하나 제시하시오. [4점, 서술형A-12] [2017]

(단, $p=(x,\ y)$에 대하여 $\|p\|=\sqrt{x^2+y^2}$이고 $\max\{a,\ b\}$는 a와 b 중 작지 않은 수이다.)

8. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$에서 $\{[a,\ b) \mid a,\ b\in\mathbb{R}\}$를 기저(base, basis)로 하는 위상을 $\mathfrak{I}_l$라 하고, $\{(a,\ b] \mid a,\ b\in\mathbb{R}\}$를 기저로 하는 위상을 $\mathfrak{I}_u$라 하자. 적공간(곱공간, product space) $(\mathbb{R},\ \mathfrak{I}_l)\times(\mathbb{R},\ \mathfrak{I}_u)$에서 집합

$$A=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x^2+y^2\le 1\}$$

의 내부(interior) A°를 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 A의 폐포(closure) $\overline{A}$와 A의 경계(boundary) $b(A)$를 구하시오.

(단, $[a,\ b)=\{x\in\mathbb{R} \mid a\le x<b\}$, $(a,\ b]=\{x\in\mathbb{R} \mid a<x\le b\}$이다.) [4점, 서술형A-12] [2016]

9. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$에 다음 조건 ①, ②에 의해 정의되는 부분집합족 (family of subsets) $\mathcal{B}$를 기저로 하는 위상 $\mathfrak{I}$가 주어졌다고 하자.

① 모든 정수 m에 대하여, $\{m\} \in \mathcal{B}$이다. ② 모든 정수 n과 음이 아닌 모든 정수 k에 대하여, $(n, n+2^{-k}) \in \mathcal{B}$이다.

위상공간 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$에서 집합 $A = \left\{\frac{1}{2}\right\}$의 도집합(derived set) A'을 구하시오. [2점, 기입형A-9] [2015]

10. 자연수 전체의 집합 $\mathbb{N}$에서 위상 $\mathfrak{I}$를

$$\mathfrak{I} = \{G \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} - G\text{는 유한집합}\} \cup \{\varnothing\}$$

으로, 함수 f : $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$을

$$f(n) = \begin{cases} 1, & 1 \leq n < 5 \\ 2, & 5 \leq n < 10 \\ 3, & 10 \leq n \end{cases}$$

으로 정의하자. $\mathfrak{I}_d$를 $\mathbb{N}$에서 이산위상(discrete topology)이라 하고, 집합 A를

$$A = \left\{n \in \mathbb{N} \,\middle|\, f : (\mathbb{N}, \mathfrak{I}) \rightarrow (\mathbb{N}, \mathfrak{I}_d)\text{는 } n\text{에서 불연속}\right\}$$

이라 할 때, 집합 A의 원소의 개수를 구하시오. [2점, 기입형A-14] [2014]

11. $\mathbb{R}$ 위의 보통위상(usual topology)을 $\mathfrak{I}$, 함수 f : $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$를 $f(n) = n^2$이라 하고, $\mathbb{Z}$ 위의 위상 $\mathfrak{I}_1 = \left\{f^{-1}(G) \mid G \in \mathfrak{I}\right\}$라 하자. $A = \{0\} \cup \mathbb{N}$, $B = \{-1, 1\}$이라 할 때, 적공간(product space) $(\mathbb{Z}, \mathfrak{I}_1) \times (\mathbb{Z}, \mathfrak{I}_1)$에서 $A \times B$의 폐포(closure) $\overline{A \times B}$와 $A \times B$의 내부(interior) $(A \times B)^\circ$를 구하시오. 이를 이용하여 $(\mathbb{Z}, \mathfrak{I}_1) \times (\mathbb{Z}, \mathfrak{I}_1)$에서 $A \times B$의 경계(boundary) $b(A \times B)$를 구하는 과정을 쓰시오.
(단, $\mathbb{N}$은 자연수 전체의 집합, $\mathbb{Z}$는 정수 전체의 집합, $\mathbb{R}$는 실수 전체의 집합이다.) [3점, 서술형A-10] [2014]

12. 실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$, 유리수 전체의 집합을 $\mathbb{Q}$라 할 때, 가산집합 (countable set)만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [1.5점] [2013-29]

<보기>

ㄱ. $\mathbb{Q} \times (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$
ㄴ. $\{F \mid F\text{는 } \mathbb{Q}\text{의 유한부분집합}\}$
ㄷ. 상집합(quotient set) $\mathbb{R}/\sim$
(단, $\sim$은 $\mathbb{R}$에서

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

로 정의된 동치관계(equivalence relation)이다.)

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

13. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$에 대하여 $\{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$를 기저(base)로 하는 $\mathbb{R}$ 위의 위상을 $\mathfrak{I}$라 하자. 함수 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$를 $f(x) = |x|$로 정의하고,

$$\mathfrak{I}_1 = \left\{f^{-1}(G) \mid G \in \mathfrak{I}\right\}$$

라 하자. 위상공간 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_1)$에서 집합 $(-2, 1)$의 내부(interior) A와 집합 $[1, 2)$의 내부 B를 옳게 나타낸 것은? (단, $|x|$는 x의 절댓값이고, $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$이다.)
[2점] [2013-30]

① $A = \varnothing$, $B = \varnothing$
② $A = \varnothing$, $B = (1, 2)$
③ $A = (-1, 1)$, $B = \varnothing$
④ $A = (-1, 1)$, $B = (1, 2)$
⑤ $A = (-1, 1)$, $B = [1, 2)$

14. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$의 멱집합(power set) $\wp(\mathbb{R})$에 대하여 $X=\wp(\mathbb{R})-\{\varnothing\}$이라 하자. 집합 X에서의 관계(relation) $\sim$을

$$A \sim B \Leftrightarrow A \cap B \neq \varnothing \ (A,\ B \in X)$$

로 정의할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [1.5점] [2012-30]

<보기>

ㄱ. 관계 $\sim$은 반사적(reflexive)이다.
ㄴ. 관계 $\sim$은 대칭적(symmetric)이다.
ㄷ. 관계 $\sim$은 추이적(transitive)이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 위상공간 X에서 부분집합 A의 내부(interior)와 폐포(closure)를 각각 $\text{int}(A)$, $\overline{A}$로 나타낼 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2012-31]

<보기>

ㄱ. $\text{int}(X-A)=X-\overline{A}$
ㄴ. $\overline{\text{int}(\overline{A})}=\overline{A}$
ㄷ. $X-\overline{A\cap B}=(X-\overline{A})\cup(X-\overline{B})$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

16. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$에서 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$를

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in\mathbb{Q} \\ 0, & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases}$$

로 정의하자. $\mathbb{R}$ 위의 보통위상(usual topology) $\mathfrak{J}$에 대하여

$$\{f^{-1}(G)\mid G\in\mathfrak{J}\}$$

로 정의된 $\mathbb{R}$ 위의 위상을 $\mathfrak{J}_0$이라 하자. 위상공간 $(\mathbb{R},\mathfrak{J}_0)$에 대하여 옳지 <u>않은</u> 것은? (단, $\mathbb{Q}$는 유리수 전체의 집합이다.) [2.5점] [2012-32]

① $(\mathbb{R},\mathfrak{J}_0)$에서 $\sqrt{2}$는 $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$의 내점(interior point)이다.
② $(\mathbb{R},\mathfrak{J}_0)$에서 $\mathbb{Q}$의 경계(boundary)는 $(\mathbb{R}-\mathbb{Q})\cup\{0\}$이다.
③ 구간 $(-1,1)$에 대하여 $(-1,1)\cup(\mathbb{R}-\mathbb{Q})$는 $(\mathbb{R},\mathfrak{J}_0)$에서 열린집합(open set)이다.
④ 구간 $[-1,1]$에 대하여 $[-1,1]\cup(\mathbb{R}-\mathbb{Q})$는 $(\mathbb{R},\mathfrak{J}_0)$에서 닫힌집합(closed set)이다.
⑤ $(\mathbb{R},\mathfrak{J}_0)$에서 0은 $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$의 집적점(극한점, accumulation point, cluster point, limit point)이다.

17. 함수 $f:X\to Y$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 모두 고른 것은? [1.5점] [2011-31]

<보기>

ㄱ. 임의의 $B\subseteq Y$에 대하여 $f(f^{-1}(B))\subseteq B$이다.
ㄴ. 임의의 $A\subseteq X$와 $B\subseteq Y$에 대하여 $f^{-1}(f(A)\cap B)=A\cap f^{-1}(B)$이다.
ㄷ. 임의의 $A\subseteq X$와 $B\subseteq Y$에 대하여 $f(A\cap f^{-1}(B))=f(A)\cap B$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$의 부분집합 A에 대하여

$$c(A)=\begin{cases} A, & A\text{는 가산(countable)집합} \\ \mathbb{R}, & A\text{는 비가산(uncountable)집합} \end{cases}$$

로 정의할 때, 다음 조건을 만족시키는 $\mathbb{R}$ 위의 위상(topology)을 $\mathfrak{I}$라 하자.

임의의 $A\subseteq B$에 대하여 위상공간 $(\mathbb{R},\mathfrak{I})$에서 A의 폐포(closure)는 $c(A)$이다.

$\text{int}(\mathbb{Z})$, $\text{int}([0,1])$, $\text{int}(\mathbb{R}-\mathbb{Z})$를 옳게 나타낸 것은? [2점] [2011-32]
(단, int(A)는 $(\mathbb{R},\mathfrak{I})$에서 A의 내부(interior), $\mathbb{Z}$는 정수 전체의 집합, $[0,1]=\{x\in\mathbb{R}\mid 0\le x\le 1\}$이다.)

	$\text{int}(\mathbb{Z})$	$\text{int}([0,1])$	$\text{int}(\mathbb{R}-\mathbb{Z})$
①	$\varnothing$	$\varnothing$	$\mathbb{R}-\mathbb{Z}$
②	$\varnothing$	$[0,1]$	$\varnothing$
③	$\varnothing$	$[0,1]$	$\mathbb{R}-\mathbb{Z}$
④	$\mathbb{Z}$	$\varnothing$	$\varnothing$
⑤	$\mathbb{Z}$	$[0,1]$	$\varnothing$

19. 정수 전체의 집합을 $\mathbb{Z}$라 하고 모든 자연수 n에 대하여 집합 A_n과 B_n을 다음과 같이 정의하자.

$$A_n=\{x\in\mathbb{Z}\mid x\le n\},\ B_n=\{x\in\mathbb{Z}\mid x\ge -n\}$$

<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [1.5점] [2010-15]

<보기>

ㄱ. $\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n\cap B_n)=\{-1,0,1\}$

ㄴ. $\mathbb{Z}\cap\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n^c\cap B_n^c)\right)=\varnothing$

ㄷ. $\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n-B_n)=\{x\in\mathbb{Z}\mid x\le -1\}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 위에서 $\{[a,b)\mid a,b\in\mathbb{R}\}$를 기저(base)로 하는 위상을 $\mathfrak{I}_1$이라 하자.

집합 $A=\{1,2,3,4\}$에 대하여 다음과 같이 정의된 함수 $f:(\mathbb{R},\mathfrak{I}_1)\to A$를 생각하자.

$$f(x)=\begin{cases} 1, & x<0 \\ 2, & x=0 \\ 3, & 0<x\le 1 \\ 4, & x>1 \end{cases}$$

함수 f에 의해서 만들어진 A 위에서의 상위상(quotient topology)을 $\mathfrak{I}$라 할 때, 위상공간 $(A,\mathfrak{I})$에서 열린 집합(open set)의 총 개수는? (단, $[a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x<b\}$이다.) [2점] [2010-17]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

21. 자연수 전체의 집합을 $\mathbb{N}$이라 하자. 집합 $X=\{n\in\mathbb{N}\mid n\ge 2\}$의 각 원소 n에 대하여

$$B_n=\{k\in X\mid k\text{는 } n\text{의 약수}\}$$

라 하고, $\{B_n\mid n\in X\}$를 기저로 하는 X 위에서의 위상을 $\mathfrak{I}$라 하자. 다음 중 옳지 않은 것은? [2.5점] [2010-18]

① 집합 $\{2,4,6,8,10\}$은 열린 집합이다.
② 소수 전체의 집합은 열린 집합이다.
③ 소수 전체의 집합은 X에서 조밀(dense)하다.
④ 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $\{x\}$의 폐포(closure)는 $\{nx\mid n\in\mathbb{N}\}$이다.
⑤ 함수 $f:(X,\mathfrak{I})\to(X,\mathfrak{I}')$을 $f(x)=x$로 정의할 때, f는 $x=2$에서 연속이다. 여기서 $\mathfrak{I}'$은 X 위에서의 이산위상(discrete topology)이다.

22. 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$와 $A=\{2, 4, 6\}$에 대하여 $R=\{(a, b) \mid a, b \in A\} \cup \{(x, x) \mid x \in X\}$라 하자. 임의의 $x \in X$에 대하여 $[x]=\{y \in X \mid (x, y) \in R\}$라 할 때, 집합 $X/R=\{[x] \mid x \in X\}$의 원소의 개수는? [1.5점] [2009-37]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

23. 집합 $X=\{a, b, c, d\}$에 대하여 $(X, \mathfrak{I})$를 위상공간이라 하고, 임의의 $x \in X$에 대하여

$$N(x)=\{V \subseteq X \mid V\text{는 } (X, \mathfrak{I})\text{에서 } x\text{의 근방}\}$$

이라 할 때, 다음이 성립한다고 하자.

$$N(a)=\{V \subseteq X \mid \{a, c\} \subseteq V\}$$
$$N(b)=\{V \subseteq X \mid \{b, c\} \subseteq V\}$$
$$N(c)=\{V \subseteq X \mid \{c\} \subseteq V\}$$
$$N(d)=\{X\}$$

단, 'V는 $(X, \mathfrak{I})$에서 x의 근방' 이란 $x \in U \subseteq V$를 만족시키는 $U \in \mathfrak{I}$가 존재함을 의미한다. <보기>에서 $\mathfrak{I}$의 원소를 모두 고른 것은? [2점] [2009-38]

<보기>

ㄱ. $\{a, b\}$ ㄴ. $\{a, c\}$
ㄷ. $\{a, b, c\}$ ㄹ. $\{a, c, d\}$

① ㄱ ② ㄴ, ㄷ ③ ㄴ, ㄹ
④ ㄱ, ㄷ, ㄹ ⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

24. 자연수 n에 대하여 집합

$$A_n=\left(-\infty, -\frac{1}{n}\right] \cup \left[\frac{1}{n}, \infty\right)$$

일 때, 집합 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$의 여집합 $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c$은? [1.5점] [2009 모의-31]

① $\varnothing$ ② $\{0\}$ ③ $(-1, 1)$
④ $[-1, 1]$ ⑤ $\mathbb{R}$

25. 정수 전체의 집합 $\mathbb{Z}$에서 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$로의 함수 $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$가 다음과 같이 정의되어 있다.

$$f(x)=\begin{cases} 1, & x=2k,\ k \in \mathbb{Z}-\{0\} \\ 0, & x=0 \\ -1, & x=2k-1,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\mathbb{R}$에 보통위상(usual topology)이 주어져 있을 때, 함수 f가 연속이 되도록 하는 $\mathbb{Z}$의 최소의 위상을 $\mathfrak{I}$라고 하자. 위상 $\mathfrak{I}$의 원소가 <u>아닌</u> 것은? (단, 최소의 위상은 원소의 개수가 가장 작은 위상을 뜻한다.) [2점] [2009 모의-32]

① $\varnothing$
② $\{0\}$
③ $\mathbb{Z}-\{0\}$
④ $\{2k \mid k\text{는 자연수}\}$
⑤ $\{2k-1 \mid k\text{는 정수}\} \cup \{0\}$

26. 위상공간 X의 부분집합 A의 내부(interior)와 경계(boundary)를 각각 $\mathrm{Int}(A)$, $\mathrm{Bd}(A)$라고 할 때, 다음은 희수가 $\mathrm{Int}(A)=A-\mathrm{Bd}(A)$임을 증명한 답안이다.

> **(경우 1)** A가 열린 집합(open set)일 때 : 집합 A의 외부(exterior)를 $\mathrm{Ext(A)}$라 하면 $\mathrm{Int}(A)=A$이므로 $\mathrm{Bd}(A)\subset \mathrm{Ext}(A)$이다. 따라서 $A-\mathrm{Bd(A)}=A=\mathrm{Int(A)}$이다.
>
> **(경우 2)** A가 닫힌 집합(closed set)일 때 : 이 경우 A의 폐포(closure) $\overline{A}$는 A와 같으므로 $A=\overline{A}=\mathrm{Int}(A)\cup \mathrm{Bd}(A)$이다. 그런데 일반적으로 집합 B, C에 대하여 $D=B\cup C$이면 $B=D-C$이므로 $\mathrm{Int}(A)=A-\mathrm{Bd}(A)$이다.

희수의 답안을 보고 옳게 말한 학생을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2.5점] [2009 모의-34]

<보기>

(현정) 희수가 맞게 풀었네.
(기태) 위와 같이 (경우 1)과 (경우 2)로 나누어 증명하는 것은 옳지 않아.
(수연) '$D=B\cup C$이면 $B=D-C$'는 일반적으로 성립하지 않아.
(영호) $\mathrm{Int}(A)=A$인 경우는 $\mathrm{Bd}(A)\subset \mathrm{Ext}(A)$이 아니라 $\mathrm{Bd}(A)=\varnothing$이야.

① 현정 ② 기태, 수연 ③ 기태, 영호
④ 수연, 영호 ⑤ 기태, 수연, 영호

27. $\mathbb{R}$을 실수 집합이라 하고, $\mathfrak{I}$를 $\mathbb{R}$위에서의 여가산 위상(cocountable topology)이라 하자. 즉,

$$\mathfrak{I}=\{U\subset \mathbb{R}\mid \mathbb{R}-U\text{는 가산집합(countable set)}\}\cup\{\varnothing\}$$

이다. $\mathbb{Q}$를 유리수 집합이라 하고 $A=\mathbb{R}-\mathbb{Q}$를 무리수 집합이라 할 때, A의 내부(interior), 유도집합(derived set), 폐포(closure), 경계(boundary)를 증명 없이 각각 구하시오. [4점] [2008-15]

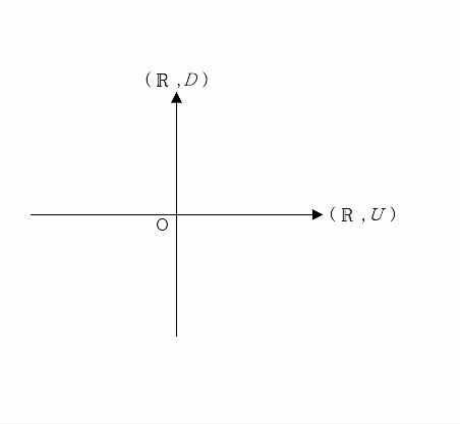
28. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$에 대하여

$$X_1=(\mathbb{R},\ U),\ X_2=(\mathbb{R},\ D)$$

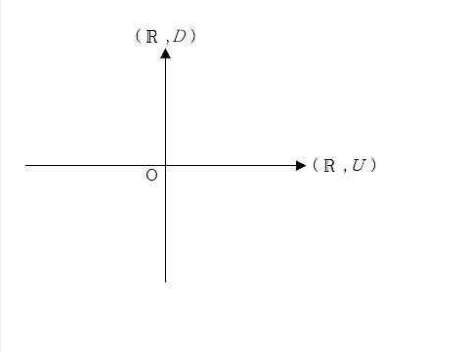
라고 하자. 여기서 U는 보통위상(usual topology)이고 D는 이산위상(discrete topology)이다.

$X=X_1\times X_2$를 X_1과 X_2의 곱공간이라 하자. X의 부분집합 $A=(-1,\ 1)\times(-1,\ 1)$에 대하여 A의 폐포(closure)와 경계(boundary)를 (증명 없이) 각각 그림으로 나타내시오. [4점] [2007-16]

- 폐포



- 경계



29. 위상공간 X, Y에 대하여 사상 $f:X\to Y$가 다음 조건을 만족할 때, f를 폐사상(closed map)이라 한다.

> 임의의 폐집합(closed set) $A\,(\subset X)$에 대하여, $f(A)$는 폐집합이다.

보통위상(usual topology) 공간 $\mathbb{R}$에 대하여 사상 $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$를 $f(x,y)=x$로 정의할 때, f는 연속사상임을 보이고 폐사상은 아님을 보이시오. [4점] [2006-17]

30. 위상공간 X와 전사함수 $g\ :\ X\ \rightarrow\ Y$에 의한 집합 Y 위의 상위상 (quotient topology)은 $g^{-1}(O)$가 X에서 개집합(open set)이 되는 Y의 부분집합 O로 이루어지는 Y 위의 위상이다. 실위상공간 $X=\mathbb{R}$과 정수 집합 $Y=Z$ 에 대하여 전사함수 $f\ :\ X\ \rightarrow\ Y,\ f(x)=[x]$에 의한 Y 위의 상위상을 구하시오. (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수이다.) [4점] [2005-20]

31. 실수 전체 집합 $\mathbb{R}$의 멱집합(power set)의 부분집합

$$\mathscr{F}=\{\mathbb{R}-\{p\}\,|\,p\in\mathbb{R}\}$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오. [총 5점] [2004-12]

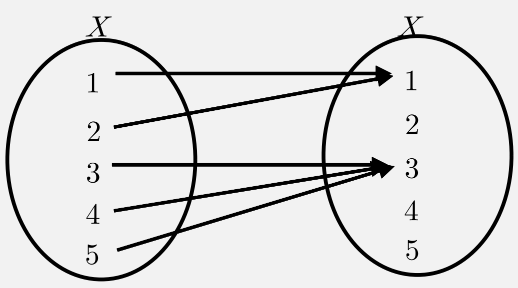
(1) $\mathscr{F}$를 부분기저(subbase)로 갖는 위상(topology) $\mathfrak{I}$를 구하시오. [2점]

(1) 위상공간$(\mathbb{R},\mathfrak{I})$에서 자연수 전체 집합 $\mathbb{N}$의 도집합(derived set)을 구하시오. [3점]

32. $X=\{1,\,2,\,3,\,4,\,5\}$이고

$\mathfrak{I}=\{X,\varnothing,\{1,2\},\{2\},\{3,4,5\},\{2,3,4,5\},\{4\},\{1,2,4\},\{2,4\}\}$이라 하자.

함수 $f:X\rightarrow X$를 아래와 같이 정의할 때 다음 물음에 답하시오. [총 5점] [2002-11]



(1) $f:(X,\mathfrak{I})\rightarrow(X,2^X)$가 연속임을 보이시오. [2점]

(2) $(X,\mathfrak{I})$에서 $\{2\}$와 $\{4\}$의 폐포(closure)를 각각 구하시오. [1점]

(3) 집합 $\{h\,|\,h:(X,\mathfrak{I})\rightarrow(X,2^X)$는 연속, $h(2)=1,\ h(4)=3\}$의 원소의 개수를 구하고, 그 이유를 설명하시오. [2점]

33. 다음 각 물음에 답하시오. [총 5점] [2001-10]

(1) 주어진 두 위상공간 $X,\,Y$에 대하여 X에서 Y로의 위상동형사상 (homeomorphism)의 정의를 쓰시오. [2점]

(2) $X=\{a,\,b,\,c,\,d\,\}$위에 위상(topology)

$$\tau=\{X,\,\{a,b\},\,\{c,\,d\,\},\phi\,\}$$

이 주어져 있을 때, X에서 X로의 위상동형사상의 개수를 구하시오. [3점]

34. 집합 $X=\{a,\,b,\,c,\,d,\,e\}$위에 위상(topology) $\mathfrak{I}$가 다음과 같이 주어졌다.

$$\mathfrak{I}=\{\phi,X,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{a,c,d\},\{a,b,e\},\{a,b,c,d\}\}$$

이 때, 집합 $A=\{b,\,c\}$의 도집합(derived set) A'을 구하시오. [5점] [1999 추시-9]

35. 거리공간 $(X,\,d)$에서 임의의 $x,\,y\in X$에 대하여, 다음과 같이 d_1이 정의되어 있다. 이 때, $(X,\,d_1)$은 유계(bounded)인 거리공간(metric space)이 됨을 증명하시오. [6점] [1999-12]

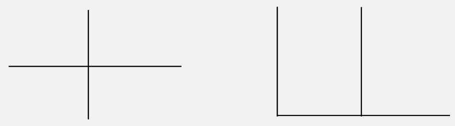
$$d_1(x,\,y):\ \frac{d(x,\,y)}{1+d(x,\,y)},\ x,\,y\in X$$

36. 집합 $X=\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5\}$상에 다음과 같은 위상이 주어졌다.

$$T=\{\phi,\ X,\ \{x_1\},\ \{x_1,\ x_2\},\{x_1,\ x_3,\ x_4\},\ \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\}\}$$

이 때, 집합 $\{x_2\}$의 폐포(The closure)를 구하시오. [4점] [1998-10]

37. 다음 두 평면도형이 위상적으로 동형이 아님을 보이시오. [4점] [1997 모의-14]



38. 임의의 위상공간의 부분집합 S에 대하여, S를 부분집합으로 갖는 모든 폐집합들의 교집합을 $\overline{S}$로 나타낸다. X와 Y가 위상공간이고 f가 X에서 Y로의 함수일 때, f의 연속성과 동치가 아닌 것은? [1995-29]

① Y의 각 부분집합 B에 대하여 $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$이다.
② X의 각 부분집합 A에 대하여 $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$이다.
③ Y의 각 폐집합 B에 대하여 $f^{-1}(B)$는 X에서 폐집합이다.
④ X의 각 개집합 A에 대하여 $f(A)$는 개집합이다.

39. 위상공간 X의 부분집합 S에 대하여, S를 부분집합으로 갖는 모든 폐집합(Closed set)들의 교집합을 $\overline{S}$로 나타낸다. A와 B가 위상공간 X의 부분집합일 때, 옳지 않은 것은? [1994-29]

① $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$　　② $\overline{A \cap B}=\overline{A} \cap \overline{B}$
③ $A-\overline{B} \subset \overline{A-B}$　　④ $\overline{\varnothing}=\varnothing$

<수렴과분리공리 · 컴팩트 · 연결>

1. 집합 $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1\le x<1\}$ 위에서 거리함수 d를

$$d((x,y),(x',y'))=\min\left\{\sqrt{(x-(x'+k))^2+(y-y')^2} \;\middle|\; k=-2,0,2\right\}$$

라 하자. 집합 $\left\{(x,0)\in A \;\middle|\; d((-1,0),(x,0))\le\dfrac{1}{2}\right\}$에 속하는 점의 x좌표 중 가장 작은 양의 실수를 풀이 과정과 함께 쓰시오.
또한 $\mathbb{R}_*^2=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$에 대하여 함수 $f:A\to\mathbb{R}_*^2$을 $f(x,y)=e^y(\cos\pi x,\sin\pi x)$라 하고, $\mathbb{R}_*^2$ 위에서 거리함수 d_*을 $d_*((u,v),(u',v'))=d(f^{-1}(u,v),f^{-1}(u',v'))$이라 하자. 거리공간 $(\mathbb{R}_*^2,d_*)$의 수열(sequence) $\left\{\left(0,\dfrac{1}{n}\right)\right\}$이 코시수열(Cauchy sequence)이 아님을 보이시오. [4점, 서술형A-12] [2026]

2. 보통 위상(usual topology)이 주어진 4차원 좌표공간 $\mathbb{R}^4$에서

$$A=\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 \mid a^2+b^2=1,\ c^2+d^2=1,\ ac+bd=0\}$$

이 컴팩트(긴밀, 옹골, compact) 집합임을 보이시오. 또한, 집합 A에서 정의된 함수 $f(a,b,c,d)=ad-bc$의 치역을 구하고, 이를 이용하여 집합 A가 연결집합(connected set)인지 판별하고 그 이유를 쓰시오. [4점, 서술형A-9] [2024]

3. 집합 $K=\left\{\dfrac{1}{n} \;\middle|\; n\text{은 자연수}\right\}$에 대하여 집합 Ω를

$$\Omega=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbb{R},\ a<b\}\cup\{(a,b)-K\mid a,b\in\mathbb{R},\ a<b\}$$

라 하고, Ω를 기저로 하는 $\mathbb{R}$ 위의 위상을 $\mathfrak{I}$라 하자. 위상 공간 $(\mathbb{R},\mathfrak{I})$에서 K의 도집합(derived set, set of accumulation points) K'을 풀이 과정과 함께 쓰시오,
또한 $[0,1]$이 $(\mathbb{R},\mathfrak{I})$의 컴팩트(comapact, 옹골) 부분집합인지 판별하고 그 이유를 쓰시오,
(단, $(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$이고 $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x\le b\}$이다.) [4점, 서술형A-10] [2023]

4. 집합 $X=\{a,b,c\}$ 위에 $\mathcal{B}=\{\{a\},\{a,b\},\{c\}\}$를 기저(base, basis)로 갖는 위상 $\mathfrak{I}_{\mathcal{B}}$가 있다. 위상공간 $(X,\mathfrak{I}_{\mathcal{B}})$ 위에서 정의된 점렬(점열, sequence of points)

$$x_n=\begin{cases} a & (n\text{은 홀수}) \\ b & (n\text{은 짝수}) \end{cases}$$

의 극한(limit)을 쓰시오.
또한, 위상공간 $(X,\mathfrak{I}_{\mathcal{B}})$에서 공집합이 아닌 임의의 서로소인 두 닫힌집합(closed set) F_1, F_2에 대하여

$$F_1\subset G_1,\ F_2\subset G_2,\ G_1\cap G_2=\varnothing$$

을 만족하는 열린집합(open set) G_1, G_2가 존재함을 보이시오. [4점, 서술형B-6] [2022]

5. $\mathbb{R}^2$ 위에 동치관계(equivalence relation) $\sim$을 다음과 같이 정의하자.

$$(x,y) \sim (x',y') \Leftrightarrow (x,y)=(tx',ty')\text{인 실수 } t\neq 0\text{가 존재한다.}$$

원소 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$에 대하여 $\sim$에 관한 동치류(equivalence class)를 $[x,y]$라 하고, $\sim$에 관한 상집합(quotient set)을 $Y=\mathbb{R}^2/\sim$, 상사상(quotient map)을 $\pi:\mathbb{R}^2\to Y$ $(\pi(x,y)=[x,y])$라 하자..

$\mathbb{R}^2$ 위에 보통위상(usual topology)이 주어진 위상공간을 X라 하고, 상집합 Y 위의 $\pi:X\to Y$에 대한 상위상(quotient topology)을 $\mathfrak{I}$라 하자. 즉, $\mathfrak{I}$는 Y 위의 $X/\sim$의 상위상이다.

이때 $[0,0]$을 포함하는 $\mathfrak{I}$의 원소가 유일함을 증명하고, $(Y,\mathfrak{I})$가 T_1-공간이 <u>아닌</u> 이유를 서술하시오. (단, 보통위상은 거리함수 $d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$로부터 유도되는 위상이다.) [4점, 서술형A-6] [2021]

6. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 위의 위상

$$\mathfrak{I}=\{U\subseteq\mathbb{R}\mid\mathbb{R}-U\text{는 유한집합}\}\cup\{\varnothing\}$$

에 대하여, $(\mathbb{R},\ \mathfrak{I})$의 두 부분공간(subspace) $A=[0,1]\cup[2,3)$과 $B=\{3,4,5\}$의 위상을 각각 $\mathfrak{I}_A$, $\mathfrak{I}_B$라 하자. 집합 $X=A\cup B$에서 $\mathfrak{I}_A\cup\mathfrak{I}_B$를 기저(base, basis)로 하는 위상을 $\mathfrak{I}'$이라 할 때, 위상공간 $(X,\ \mathfrak{I}')$에서 집합 $C=\left\{3-\frac{1}{n}\,\middle|\,n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{3\}$의 경계(boundary) $\mathrm{b}(C)$를 구하시오. 또한 $(X,\ \mathfrak{I}')$이 컴팩트 공간(compact space)임을 보이시오. (단, $[0,1]=\{x\in\mathbb{R}\mid 0\le x\le 1\}$, $[2,3)=\{x\in\mathbb{R}\mid 2\le x<3\}$이고 $\mathbb{N}$은 자연수 전체의 집합이다.) [4점, 서술형A-12] [2019]

7. 자연수 전체의 집합 $\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots\}$에 대하여, 집합 $X=\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\mid m\ge 12\text{ 혹은 } n\ge 6\}$에 다음과 같이 위상 $\mathfrak{I}$가 주어졌다고 하자.

$$\mathfrak{I}=\{G\subset X\mid X-G\text{는 유한집합}\}\cup\{\phi\}$$

함수 $f:X\to\mathbb{N}$을 $f(m,n)=m+n$으로 정의하고, $\mathbb{N}$의 위상을 $\mathfrak{I}_{\mathbb{N}}=\{U\subset\mathbb{N}\mid f^{-1}(U)\in\mathfrak{I}\}$라 하자. 위상공간 $(\mathbb{N},\mathfrak{I}_{\mathbb{N}})$의 연결성분(connected component)의 개수를 구하시오. [2점, 기입형A-10] [2015]

8. 자연수 전체의 집합 $\mathbb{N}$에 대하여, 집합 $X=\mathbb{N}\cup\{-1,\ -2,\ -3\}$ 위에 $\wp(\mathbb{N})\cup\{\mathbb{N}\cup\{-1\}-F\mid F\text{는 }\mathbb{N}\text{의 유한부분집합}\}\cup\{\{-2,\ -3\}\}$을 기저(base)로 하는 위상을 $\mathfrak{I}$라 하자.

① $\mathbb{N}\subsetneq A\subsetneq X$, $A\neq\mathbb{N}\cup\{-1\}$이고 $(A,\ \mathfrak{I}_A)$가 콤팩트(compact)이다.
② $\mathbb{N}\subsetneq B\subsetneq X$이고 $(B,\ \mathfrak{I}_B)$가 콤팩트가 아니다.

①을 만족하는 A를 모두 구하고, ②를 만족하는 B의 예를 하나 제시하고 예가 되는 이유를 설명하시오. (단, $\wp(\mathbb{N})=\{G\mid G\subseteq\mathbb{N}\}$이고, $Y\subset X$일 때, $\mathfrak{I}_Y=\{G\cap Y\mid G\in\mathfrak{I}\}$이다.) [3점, 서술형B-3] [2014]

9. 자연수 전체의 집합 $\mathbb{N}$과 자연수 n에 대하여 $A_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n\}$이라 하고, $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$을 기저(base)로 하는 $\mathbb{N}$ 위의 위상을 $\mathfrak{J}$라 하자. $X = (\mathbb{N}, \mathfrak{J})$라 하고, $Y = [0, 1]$을 $(\mathbb{R}, \mathfrak{J}_u)$의 부분공간(subspace)이라 할 때, 적공간(product space) $X \times Y$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2013-31]
(단, $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$이고, $\mathfrak{J}_u$는 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 위의 보통위상(usual topology)이다.)

<보기>

ㄱ. 집합 $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\} \times (Y \cap \mathbb{Q})$는 $X \times Y$에서 조밀(dense)하다.
(단, $\mathbb{Q}$는 유리수 전체의 집합이다.)

ㄴ. 함수 $f : X \to X \times Y$를 $f(n) = \left(2n, \dfrac{1}{n}\right)$로 정의하면 f는 연속함수이다.

ㄷ. $X \times Y$는 콤팩트공간이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

10. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 위의 보통위상(usual topology) $\mathfrak{J}_u$에 대하여 $X = (\mathbb{R}, \mathfrak{J}_u)$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$이다.) [2.5점] [2013-32]

<보기>

ㄱ. X의 부분공간(subspace) $\mathbb{Q}$는 연결(connected)공간이다. (단, $\mathbb{Q}$는 유리수 전체의 집합이다.)

ㄴ. X의 부분공간 $(-2, -1) \cup (0, 1) \cup \{\sqrt{2}\}$의 성분(component)의 개수는 3이다.

ㄷ. $Y = \{1, 2, 3, 4\}$가 X의 부분공간일 때, $f(5) \neq f(6)$인 연속함수 $f : X \to Y$가 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

11. 0 이상의 정수 n에 대하여 $n+1$차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^{n+1}$에서 원점 O로부터 거리가 1인 위치에 있는 점들의 모임을 n차원 구라고 하고

$$S^n = \left\{\zeta = (x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \|\zeta\|^2 = 1\right\}$$

로 나타낸다. 예를 들어, S^1은 원, S^2는 구면이다.

(단, $\|\zeta\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2}$이고, S^n의 위상은 $\mathbb{R}^{n+1}$ 위의 보통위상(usual topology)의 상대위상(relative topology)이다.) [30점] [2013 2차, 2교시-3-2]

학생 갑과 을이 제시된 n차원 구의 정의를 보고 다음과 같은 대화를 나누었다.

갑: S^1, S^2는 모두 연결 공간(connected space)이네. 아마도 '모든 S^n이 연결 공간이다.' 라는 명제는 참인 것 같아. 그래서 다음과 같이 증명해 보았어.

- 1단계: 사상 $g : (\mathbb{R}^{n+1} - \{O\}) \to S^n$을 $g(\zeta) = \dfrac{\zeta}{\|\zeta\|}$로 정의하면 이 사상은 연속(continuous)이고 전사(surjective)이다.
- 2단계: 연결 공간의 연속사상에 대한 상(image)은 연결 공간이다.
- 3단계: $\mathbb{R}^{n+1} - \{O\}$은 연결 공간이다.
- 4단계: 2단계와 3단계로부터 S^n도 연결 공간이다.

을: 음, 의심스러운데? $S^0 = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\} = \{-1, 1\}$이잖아.
즉, S^0은 연결 공간이 아니지.

갑: 아, 그럼 그 반례에 대해 이렇게 대응해야겠구나!

개선된 추측(명제)

3차원 구

$$S^3 = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\right\}$$

에 대한 질문 (Ⅰ), (Ⅱ)에 답하시오. [20점]

(I) S^3에 대해서 다음과 같은 동치관계로 정의된 상공간(quotient space)을 $S^3/\sim$라 하자.

$$(x_1, y_1, z_1, w_1) \sim (x_2, y_2, z_2, w_2) \iff w_1 > 0,\ w_2 > 0$$

이때 다음 (가), (나)의 참, 거짓을 판단하고 그 이유를 설명하시오.

(가) $S^3/\sim$은 컴팩트(compact)이다.
(나) $S^3/\sim$과 S^3은 위상동형(homeomorphic)이다.

(II) 사영사상

$$p : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ p(x, y, z, w) = (x, y, z)$$

에 대하여

$$H = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; y + z + w = 0\right\}$$

와 S^3의 교집합 $H \cap S^3$을 생각하면, $M = p(H \cap S^3)$는 $\mathbb{R}^3$에서 점 $(1, 0, 0)$을 포함하는 정규곡면(정칙곡면, regular surface)이 된다. 이때 M의 점 $(1, 0, 0)$에서의 가우스곡률(Gaussian curvature)을 구하시오.

12. $\mathbb{R}^2$ 위의 점 $q=(0, 1)$과 집합 $A=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=0\}$에 대하여 $X=A\cup\{q\}$라 하자. X 위의 위상 $\mathfrak{I}$를

$$\mathfrak{I}=\wp(A)\cup\{U\subseteq X \mid q\in U,\ A-U\text{가 유한집합}\}$$

으로 정의할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $\wp(A)=\{U \mid U\subseteq A\}$이다.) [2점] [2012-33]

<보기>

ㄱ. $(X, \mathfrak{I})$는 콤팩트공간(compact space)이다.
ㄴ. $(X, \mathfrak{I})$는 정규공간(normal space)이다.
ㄷ. $(X, \mathfrak{I})$는 분리가능공간(가분공간, separable space)이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 위의 두 위상 $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_2$를

$$\mathfrak{I}_1=\{\mathbb{R},\ \varnothing,\ \mathbb{Q},\ \mathbb{R}-\mathbb{Q}\},\quad \mathfrak{I}_2=\{\mathbb{R},\ \varnothing,\ \mathbb{N},\ \mathbb{R}-\mathbb{N}\}$$

으로 정의하자. $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_1)$과 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_2)$의 적공간(곱공간, product space) $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_1)\times(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_2)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 모두 고른 것은? (단, $\mathbb{Q}$는 유리수 전체의 집합, $\mathbb{N}$은 자연수 전체의 집합이다.) [2점] [2011-33]

<보기>

ㄱ. $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_1)\times(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_2)$는 연결(connected)공간이다.
ㄴ. $[0, 1]\times[0, 1]$는 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_1)\times(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_2)$에서 조밀(dense)하다.
ㄷ. 함수 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$를

$$F(x)=\begin{cases}(x, 1), & x\text{는 유리수}\\(x, -1), & x\text{는 무리수}\end{cases}$$

로 정의하면 $F:(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_1)\to(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_1)\times(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_2)$는 연속함수이다.

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

14. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 위의 보통위상(usual topology)을 $\mathfrak{I}$라 하고, 함수 $f:\mathbb{R}\to[0, 1)$을 $f(x)=x-[x]$로 정의하자. 집합 $[0, 1)$ 위의 위상 $\mathfrak{I}_0$을

$$\mathfrak{I}_0=\{G\subseteq[0, 1) \mid f^{-1}(G)\in\mathfrak{I}\}$$

로 정의하자. <보기>에서 옳은 것만을 모두 고른 것은? [2.5점] [2011-34] (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이고, $[a, b)=\{x\in\mathbb{R} \mid a\le x\le b\}$이다.)

<보기>

ㄱ. $[0, \frac{1}{2})\in\mathfrak{I}_0$
ㄴ. $([0, 1), \mathfrak{I}_0)$은 콤팩트(compact)공간이다.
ㄷ. 함수 $h:[0, 1)\to\mathbb{R}$를 $h(x)=1-x$로 정의하면 $h:([0, 1), \mathfrak{I}_0)\to(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$는 연속이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

15. 함수 $f : \mathbb{R}^3 \to [0, \infty)$는 다음 <조건>을 만족시킨다.

<조 건>

(가) f는 연속인 전사(surjective) 함수이다.

(나) $f^{-1}([0,\ 2011])$은 콤팩트 공간(compact space)이다.

(다) $S = f^{-1}(\{1\})$이라 하면, S는 매끄러운 곡면(smooth surface)이다.

단, $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\}$이고 $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$이다.

$\mathbb{R}$와 $\mathbb{R}^3$에는 보통위상(usual topology)을 사용하고, 이들의 부분집합에는 상대위상(부분공간위상, relative topology, subspace topology)을 사용한다.

함수 $\phi : S \to \mathbb{R}$를

$$\phi(x, y, z) = x + y + z$$

로 정의할 때, 다음 세 명제가 참임을 증명하시오. [20점] [2011 2차, 2교시-4]

<조 건>

(Ⅰ) 위상공간 $\mathbb{R}^3 - S$는 연결되지 않은 공간(비연결공간, disconnected space)이다.

(Ⅱ) ϕ는 최솟값을 가진다.

(Ⅲ) ϕ가 최솟값을 갖는 점에서 S의 가우스 곡률(Gaussian curvature)은 음이 아닌 실수이다.

16. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 위에서 여가산위상(countable complement topology) $\mathfrak{I}$를 다음과 같이 정의하자.

$$\mathfrak{I} = \{U \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} - U \text{는 가산집합}\} \cup \{\varnothing\}$$

<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [2점] [2010-16]

<보기>

ㄱ. 위상공간 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$는 T_1-공간이다.

ㄴ. 위상공간 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$는 분리(분해)가능공간(separable space)이다.

ㄷ. 위상공간 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$의 부분집합 A가 콤팩트(compact)이기 위한 필요충분조건은 A가 유한집합인 것이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

17. 실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$, 유리수 전체의 집합을 $\mathbb{Q}$라 하자. $\mathfrak{I}$를 $\mathbb{R}$ 위의 보통위상(usual topology)이라 하고, $(\mathbb{Q}, \mathfrak{I}_{\mathbb{Q}})$를 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$의 부분공간이라 하자. 함수 $j : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$를 임의의 $r \in \mathbb{Q}$에 대하여 $j(r) = r$로 정의할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [2.5점] [2009-39]

<보기>

ㄱ. 함수 $j : (\mathbb{Q}, \mathfrak{I}_{\mathbb{Q}}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{I})$는 연속이다.

ㄴ. A가 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$의 콤팩트(compact) 부분공간이면 $j^{-1}(A)$는 $(\mathbb{Q}, \mathfrak{I}_{\mathbb{Q}})$의 콤팩트 부분공간이다.

ㄷ. 임의의 위상공간 X와 함수 $f : X \to (\mathbb{Q}, \mathfrak{I}_{\mathbb{Q}})$에 대하여 $j \circ f : X \to (\mathbb{R}, \mathfrak{I})$가 연속이면 $f : X \to (\mathbb{Q}, \mathfrak{I}_{\mathbb{Q}})$가 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 위에서 위상 $\mathfrak{I}_1$과 $\mathfrak{I}_2$를 다음과 같이 정의하자.

$\mathfrak{I}_1$은 $\{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$를 기저(base)로 하는 위상

$\mathfrak{I}_2 = \{\mathbb{R}, \varnothing, \{0, 1\}\}$

위상공간 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_i)$ $(i = 1, 2)$에서 원소 0을 포함하는 성분(component)을 A_i $(i = 1, 2)$라고 할 때, 옳은 것은? (단, $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$이고, 위상공간 X에서 '성분'은 X의 극대 연결 부분공간을 의미한다.) [2점] [2009-40]

① $A_1 = \{0\}$, $A_2 = \mathbb{R}$ ② $A_1 = \{0\}$, $A_2 = \{0, 1\}$

③ $A_1 = \mathbb{R}$, $A_2 = \mathbb{R}$ ④ $A_1 = \mathbb{R}$, $A_2 = \{0, 1\}$

⑤ $A_1 = \mathbb{R}$, $A_2 = \{0\}$

19. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$에 대하여 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$에 다음과 같은 위상이 각각 주어져 있다.

(1) $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$의 임의의 두 점 $p=(p_1,\ p_2),\ q=(q_1,\ q_2)$에 대하여 거리함수(metric) d가

$$d(p,\ q)=\sqrt{(p_1-q_1)^2+(p_2-q_2)^2}$$

으로 주어질 때, d에 의하여 유도된 위상 $\mathfrak{I}_1$

(2) (1)의 위상 $\mathfrak{I}_1$을 이용하여 다음과 같이 정의된 위상 $\mathfrak{I}_2$

$\mathfrak{I}_2=\{(\mathbb{R}\times\mathbb{R})-F\mid F$는 $(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\ \mathfrak{I}_1)$에서 콤팩트 부분집합$\}\cup\{\varnothing\}$

$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$의 부분집합 $Y=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mid x+y=1\}$을 위상공간 $(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\ \mathfrak{I}_1)$의 부분공간으로 생각할 때는 Y_1로 나타내고, 위상공간 $(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\ \mathfrak{I}_2)$의 부분공간으로 생각할 때는 Y_2로 나타내자.

부분공간 $Y_1,\ Y_2$가 각각 T_2공간(또는 Hausdorff 공간), 콤팩트(compact) 공간, 연결공간이 되는지 설명하시오. [20점] [2009 2차, 1교시-2]

20. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$에

$$\{V\subset\mathbb{R}\mid V\text{의 여집합은 유한집합}\}\cup\{\varnothing\}$$

을 기저(basis, base)로 하는 위상이 주어져 있을 때, 연결집합을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2점] [2009 모의-33]

<보기>

ㄱ. $\{0,\ 1\}$
ㄴ. $(0,\ 1)\cup\{3\}$
ㄷ. $(-1,\ 0)\cup(0,\ 1)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

21. 구 또는 원환면(torus) 등의 회전체는 여러 가지 대칭성을 지녀서 아름답게 보인다. 그러나 평면으로 둘러싸인 다면체와 달리 회전체의 속성을 파악하기는 쉽지 않다. 회전체는 얼마나 굽어져 있을까? 회전체의 위상적 성질은 어떻게 결정될까? 가능한 모양은 무엇일까? 우리는 이런 의문을 다음과 같이 수학적으로 다룰 수 있다.

열린구간 (a,b)에서 정칙곡선(regular curve)인 $\alpha(u)=(g(u),\ h(u),\ 0)$을 회전시킨 회전면 M에 대하여 다음을 읽고 물음에 답하시오.
(단, $a\le u\le b$이고, $g(u)$와 $h(u)$는 도함수가 연속인 함수이며 $h(u)\ge 0$이다.) [2009 모의 2차, 2교시-5]

회전면 M의 좌표조각(coordinate patch)이
$\mathbf{x}(u,\ v)=(g(u),\ h(u)\cos v,\ h(u)\sin v)$라 할 때,

(공식 1) $E,\ F,\ G$는 다음 제1 기본형식의 계수이다.

$$Edu^2+2Fdudv+Gdv^2=(\mathbf{x}_u\,du+\mathbf{x}_v\,dv)\cdot(\mathbf{x}_u\,du+\mathbf{x}_v\,dv)$$

(공식 2) 정칙곡면(regular surface)인 회전면의 가우스 곡률 K는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$K=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u+\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v\right\}$$

(공식 3) $\displaystyle\int\int_M KdA=\int_0^{2\pi}\int_a^b K\|\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v\|\,du\,dv$

21-1. 위에 주어진 공식을 이용하여 다음 전곡률(total curvature)을 계산하시오. [6점]

$$\int\int_M KdA$$

21-2. 회전면 M의 회전축을 구하고, M이 긴밀(compact) 정칙곡면이 되기 위한 h 및 도함수 $h',\ g'$의 조건을 찾으시오. 이때, h의 조건에 따라 회전면 M이 어떤 곡면과 위상동형인지 결정하고, 문항 (1)의 결과로 구한 전곡률로부터 오일러 표수(Euler characteristic)를 구하시오. [9점]

22. 공집합이 아닌 위상공간 X의 두 부분집합 A와 B가 각각 X에서 조밀(dense)하다고 하자. 이때, B가 X에서 열린 집합이면 $A\cap B$가 X에서 조밀함을 증명하시오. [4점] [2008-16]

23. X를 $\mathscr{B}=\{V\subset X \mid V$와 V^c는 모두 열린집합(open set)$\}$을 기저(basis)로 갖는 위상공간이라 하자. 그리고 F를 닫힌집합(closed set), p를 F에 속하지 않는 X의 점이라고 할 때, $f(p)=0$이고 $f(F)=\{1\}$인 연속함수 $f: X\to\mathbb{R}$가 존재함을 보이시오. (단, $\mathbb{R}$은 실수 전체의 집합이다.) [4점] [2007-15]

24. 집합 $X=[-1,1]=\{x\in\mathbb{R} \mid -1\le x\le 1\}$에 다음과 같이 위상 $\mathfrak{I}$를 정의할 때, 위상공간$(X,\mathfrak{I})$는 컴팩트(compact, 긴밀)공간임을 보이시오. [4점] [2006-18]

$$\mathfrak{I}=\{U\subset X \mid 0\not\in U\}\cup\{U\subset X \mid (-1,1)\subset U\}$$

25. 다음 조건을 만족시키는 실위상공간 $\mathbb{R}$의 부분집합 W, X, Y, Z의 예를 (증명 없이) 하나씩 구하시오.
(1) Y, Z는 연결집합(connected set)이다.
(2) $Y\subset W\subset Z$, $Y\subset X\subset Z$
(3) W는 연결집합이다.
(4) X는 연결집합이 아니다.
여기에서 기호 $A\subset B$는 A가 B의 진부분집합임을 나타낸다. [2점] [2005-18]

26. 위상공간 X가 T_2공간(hausdorff space)일 때, 임의의 컴팩트 집합(compact set) $A\subset X$와 임의의 $x\in X-A$에 대하여 다음 조건을 만족하는 개집합(open set) U, $V\subset X$가 존재함을 증명하시오. [5점] [2003-14]

조건 : $x\in U$, $A\subset V$, $U\cap V=\varnothing$

27. 정수 전체의 집합 $\mathbb{Z}$ 위에 위상(Topology) τ를 다음과 같이 정의한다.

$$\tau=\{U\subset\mathbb{Z} \mid =\varnothing \text{ 또는 } U^c\text{는 유한집합}\}$$

이 때, 서로 다른 정수 a_n들로 이루어진 수열 $\{a_n\}$은 위상공간$(\mathbb{Z},\tau)$에서 각각의 정수 m에 수렴함을 증명하시오. [5점] [1997-12]

28. 위상공간 (X,τ)와 집합 X위의 동치 관계 R이 주어져 있다. X/R을 X의 관계 R에 의한 동치류 전체의 집합이라 하고, 다음과 같은 함수를 정의한다.

$$f : X\to X/R,\ x\to\bar{x}$$
($\bar{x}$는 x를 포함하는 동치류)

이 때, 집합 X/R의 상위상(quotient topology) τ'과 f에 대한 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? [1996-33]

㉠ $U\in\tau'$이면 $f^{-1}(U)\in\tau$이다. ㉡ C가 X의 컴팩트(compact) 부분집합이면, $f(C)$는 X/R의 컴팩트(compact) 부분집합이다. ㉢ $V\in\tau$이면 $f(V)\in\tau'$이다.

① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉢
③ ㉡, ㉢　④ ㉠, ㉡, ㉢

29. 다음 중 공간 $\mathbb{R}^5$상에 컴팩트(compact)집합이 <u>아닌</u> 것은? [1995-31]
① 유계인 폐집합(bounded closed set)
② 폐집합과 컴팩트 집합의 교집합
③ 컴팩트 집합의 폐부분 집합
④ 공간$\mathbb{R}^5$

[현대대수학]

<군>

1. 덧셈군 $\mathbb{Z}_{20}$, $\mathbb{Z}_{26}$, $\mathbb{Z}_{200}$에 대하여 군 준동형사상(group homomorphism) $\phi: \mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{26} \to \mathbb{Z}_{200}$의 상(치역, image) $\mathrm{Im}(\phi)$가 6개의 부분군을 가질 때, $\mathrm{Im}(\phi)$의 위수(order)를 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 ϕ의 핵(kernel) $\mathrm{Ker}(\phi)$의 위수를 구하시오. (단, $\mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{26}$은 $\mathbb{Z}_{20}$과 $\mathbb{Z}_{26}$의 직접곱(직적, direct product)이다.) [4점, 서술형A-11] [2026]

2. 표수(characteristic)가 a인 체 F에 대하여 군 G는 직접곱(직적, direct product) $\mathbb{Z}_4 \times F^*$이다. 군 G가 160 이하의 위수(order)를 갖는 순환군(cyclic group)이 되도록 하는 체 F 중에서 서로 동형(isomorphic)이 아닌 것의 개수를 b라고 하자.
이때, a와 b의 값을 순서대로 구하시오. (단, $\mathbb{Z}_4$는 덧셈 순환군이고, F^*는 체 F의 영(zero)이 아닌 모든 원소로 구성된 곱셈군이다.) [2점, 기입형A-3] [2025]

3. 순환군(cyclic group) G의 한 부분군(subgroup) H에 대하여 G에서의 H의 지수(index) $|G:H|$는 520이다. 잉여군(상군, factor group, quotient group) G/H의 생성원(generator)의 개수를 구하시오. 또한, G/H의 한 생성원 aH와 G의 한 부분군 K에 대하여 $K/H = \langle (aH)^{35} \rangle$일 때, $G/H = (K/H)(L/H)$를 만족시키는 G의 부분군 L의 개수를 구하시오. [2점, 기입형A-3] [2024]

4. 군 G는 직접곱(직적, direct product) $\mathbb{Z}_{13}^* \times \mathbb{C}^*$이다.
위수(order)가 18인 G의 원소의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰고, 덧셈군 $\mathbb{Z}_{18}$과 군동형(group isomorphic)이 되는 G의 부분군의 개수를 구하시오. (단, $\mathbb{Z}_{13}^*$과 $\mathbb{C}^*$은 각각 유한체 $\mathbb{Z}_{13}$과 복소수체 $\mathbb{C}$의 영이 아닌 원소들의 곱셈군이다.) [4점, 서술형A-10] [2021]

5. 대칭군(symmetric group) S_5와 덧셈 순환군(additive cyclic group) $\mathbb{Z}_{12}$의 직접곱(직적, direct product) $S_5 \times \mathbb{Z}_{12}$에 대하여, S_5의 원소 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$의 위수(order)와 $S_5 \times \mathbb{Z}_{12}$의 원소 $(\sigma, 9)$의 위수를 각각 구하시오. [2점, 기입형A-4] [2020]

6. G는 위수(order)가 150인 군(group)이다. 위수가 6인 G의 부분군(subgroup)이 유일하게 존재할 때, 위수가 30인 G의 부분군이 존재함을 보이시오. [4점, 서술형A-14] [2019]

7. 위수(order)가 각각 10과 n인 두 순환군(cyclic group) $\mathbb{Z}_{10}$과 $\mathbb{Z}_n$의 직접곱(직적, direct product) $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_n$이 순환군이 되도록 하는 10 이상이고 100 이하인 자연수 n의 개수를 구하시오. [2점, 기입형A-2] [2018]

8. 위수(order)가 200인 군 G가 부분군 H와 정규 부분군(normal subgroup) N을 가진다. H와 N의 위수가 각각 8과 40일 때, H가 N의 부분군임을 보이시오. [4점, 서술형B-2] [2017]

9. 군 준동형사상(group homomorphism) $f: \mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_{12}$를 $f(x,\ y)=9x$로 정의하자. f의 핵(kernel)을 K라 할 때, 잉여군(상군, factor group, quotient group) $(\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_6)/K$의 위수(order)를 구하시오. (단, 양의 정수 n에 대하여 $\mathbb{Z}_n$은 위수가 n인 덧셈 순환군(additive cyclic group)이다.) [2점, 기입형A-2] [2016]

10. 덧셈군 $G=\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_6$에서 $(5,5)\in G$로 생성된 부분군을 H라 하자. 잉여군(quotient group, factor group) G/H에서 원소 $(3,3)+H$의 위수(order)를 구하시오. [2점, 기입형A-8] [2015]

11. 위수(order)가 $2014=2\times19\times53$인 순환군(cyclic group) G에 대하여 G의 부분군의 개수를 m, G에서 위수가 38인 원소의 개수를 n이라 하자. $m+n$의 값을 구하시오. [2점, 기입형A-6] [2014]

12. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2013-17]

<보기>

ㄱ. 함수 $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$을 $f(k)=([k]_2,\ [k]_3)$으로 정의할 때, $\ker(f)=6\mathbb{Z}$이다. (단, $[k]_n$은 $\mathbb{Z}$에서 법 n에 대한 k의 합동류(congruence class)이고, $\ker(f)$는 f의 핵(kernel)이다.)

ㄴ. 군 G의 잉여군(quotient group, factor group) $G/Z(G)$가 순환군(cyclic group)이면 G는 아벨군(가환군)이다. (단, $Z(G)$는 G의 중심(center)이다.)

ㄷ. 위수(order)가 400인 아벨군 중에서 서로 동형이 아닌 것의 종류는 8가지이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

13. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [1.5점] [2012-18]

<보기>

ㄱ. 무한순환군(infinite cyclic group) G는 덧셈군 $\mathbb{Z}$와 서로 동형(isomorphic)이다.
ㄴ. 두 덧셈군 $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_{15}$와 $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{36}$은 서로 동형이다.
ㄷ. 위수(order)가 360인 순환군의 생성원(generator)은 모두 96개이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 체 $\mathbb{Z}_3$위의 행렬에 대하여 연산이 행렬의 곱셈인 군

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{Z}_3, ac \neq 0 \right\}$$

이 있다. 군 G에서 곱셈군 $\mathbb{Z}_3^* = \mathbb{Z}_3 - \{0\}$으로의 군준동형사상(group homomorphism)

$$\phi : G \to \mathbb{Z}_3^*, \ \phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = ac$$

의 핵(kernel) $\ker(\phi)$와 동형인 군은? [2.5점] [2012-19] (단, S_3은 3차의 대칭군(symmetric group)이고, A_4는 4차의 교대군(alternating group)이다.)

① $\mathbb{Z}_3$ ② S_3 ③ $\mathbb{Z}_6$
④ $\mathbb{Z}_9$ ⑤ A_4

15. 덧셈군 $G = \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_7$에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 모두 고른 것은? [1.5점] [2011-19]

<보기>

ㄱ. G의 모든 부분군(subgroup)은 정규부분군(normal subgroup)이다.
ㄴ. G의 원소 $(3, 1)$의 위수(order)는 28이다.
ㄷ. G는 순환군(cyclic group)이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 군 G가 유한군(finite group)이고 H와 K가 G의 부분군일 때, 다음 명제 중 옳지 않은 것은? [1.5점] [2010-25]

① G와 H의 부분군의 개수가 같으면 $G = H$이다.
② G가 아벨군(가환군)이면 HK는 G의 정규부분군(normal subgroup)이다.
③ G의 위수(order)가 12이면 G는 단순군(simple group)이다.
④ G가 순환군(cyclic group)이면 H와 K는 모두 아벨군이다.
⑤ $H^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in H\}$는 G의 부분군이다. (단, a^{-1}는 a의 역원이다.)

17. 잉여군(quotient group, factor group)에 관련된 <보기>의 명제 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [2.5점] [2010-26]

<보기>

ㄱ. 군 G의 위수가 40이면, 위수가 5인 정규부분군 H와 위수가 8인 잉여군 G/H가 존재한다.
ㄴ. 군 $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$의 잉여군의 집합

$$X = \{G/N \mid N\text{은 } G\text{의 정규부분군}\}$$

에 속하며 서로 동형이 아닌 잉여군은 모두 4개이다.
ㄷ. 정수의 집합에서 정의된 덧셈군 $\mathbb{Z}$의 부분군 $6\mathbb{Z}$에 의한 잉여군 $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$는 모두 3개의 부분군을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 군에 대한 <보기>의 명제 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [2점] [2009-19]

<보기>

ㄱ. 위수가 8인 군은 아벨군(가환군)이다.
ㄴ. 부분군의 개수가 유한인 군은 유한군이다.
ㄷ. 위수가 27인 아벨군 중에서 동형이 아닌 것의 종류는 3가지이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 유한군에 대한 다음 설명 중 옳지 <u>않은</u> 것은? [2점] [2009 모의-19]

① 치환군 S_3은 위수(order)가 2인 세 개의 부분군을 갖는다.
② 위수가 6인 순환하지 않는 모든 유한군은 비가환군이다.
③ 위수가 소수 p인 군 G는 $p-1$개의 생성원(generator)을 갖는다.
④ 유한군 G가 자명하지 않은 진부분군(nontrivial proper subgroup)을 갖지 않으면 G는 가환군이다.
⑤ a를 항등원으로 갖는 군 $G=\{a, b, c, d\}$에 대하여 $b^2=c$이면 G는 순환군이 아니다.

20. 정이면체군 $D_3=\langle a, b \mid a^2=b^3=1, a^{-1}ba=b^{-1}\rangle$과 대칭군 $S_3=\langle(1\,2), (1\,2\,3)\rangle$이 동형(isomorphic)임을 보이시오. [4점] [2007-12]

21. 복소수의 집합을 $\mathbb{C}$라 하고, 2차 정사각행렬의 일반선형군을 $GL(2, \mathbb{C})$라고 하자. 행렬의 사원수군(quaternion group) Q는 $GL(2, \mathbb{C})$의 부분집합

$$\{I, A, A^2, A^3, B, BA, BA^2, BA^3=AB\}$$

으로, 위수 8인 부분군이다. 이 때, Q의 모든 부분군이 정규부분군임을 보이시오. [4점] [2006-10]

(단, $GL(2, \mathbb{C})=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix} \,\middle|\, ad-bc\neq 0,\ a, b, c, d\in\mathbb{C}\right\}$, $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$,
$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0\end{bmatrix}$이다.)

22. 무한 순환군(infinite cyclic group) G에 대하여 $\sigma : G\to G$를 아래와 같이 정의할 때, 다음 물음에 답하시오. [총 5점] [2004-7]

$$\boxed{\sigma(g)=g^{-1} \quad (\text{단, } g^{-1}\text{는 } g\text{의 역원})}$$

(1) σ가 동형사상(isomorphism)임을 보이시오. [2점]
(2) G에서 G로의 동형사상은 항등사상(identity map)과 σ 뿐임을 보이시오. [3점]

23. $G=\mathbb{Z}_{11}-\{0\}$는 곱셈에 대하여 순환군(cyclic group)이 된다. 이 사실을 이용하여 단위원시 10-제곱근(법 11에 관한 원시근, primitive 10^{th}-root of unity)을 모두 구하여라. [5점] [2002-5]

24. 군 G의 임의의 원소 g에 대하여 $g^{-1}=g$ 이면, G는 가환군(commutative group)임을 보이시오. [5점] [2000-7]

25. 군 G의 원소 a, b가 다음 두 조건을 만족하고 있다. $a^3=e$, $aba^{-1}=b^2$ (e는 G의 항등원) b가 항등원이 아닐 때, b의 위수(Order)를 구하시오. [4점] [1997-6]

26. ϕ가 군준동형사상일 때 $\phi : H\to G$의 kernel이 H의 정규부분군임을 보이시오. [1997 모의-12]

27. 〈보기〉에서 옳은 것만 모두 고른 것은? [1995-10]

〈보기〉

㉠ 실수체 $\mathbb{R}$과 복소수체 $\mathbb{C}$는 동형(isomorphic)이다.
㉡ 5는 군(group) $\mathbb{Z}_{12}$의 생성원(generator)이다.
㉢ m과 n이 서로소이면 군 $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$과 군 $\mathbb{Z}_{mn}$은 동형이다. (m, n은 양의 정수)
㉣ 모든 군에서 교환법칙이 성립한다.

① ㉠
② ㉡, ㉢
③ ㉢, ㉣
④ ㉠, ㉡, ㉣

28. 집합 $G=\{i, a, b, c\}$가 곱셈에 관하여 군(group)을 이룰 때, 다음 설명 중 옳지 않은 것은? [1993-27]

① $a^2+b^2+c^2=1$
② G는 곱셈에 관하여 아벨군을 이룬다.
③ G의 적당한 부분집합H에 대하여 H가 덧셈군을 이룬다.
④ G의 적당한 진부분집합H에 대하여 H가 곱셈군을 이룬다.

<환>

1. 환 R을 두 가환환(commutative ring) $\mathbb{Z}_{10}$과 $\mathbb{Z}_{12}$의 직접곱(직적, direct product) $\mathbb{Z}_{10}\times\mathbb{Z}_{12}$라고 하자. 환 R의 아이디얼(이데알, ideal) 중에서 원소 $(3,8)$을 포함하는 가장 작은 것을 $\mathbb{Z}_{10}$의 아이디얼 I와 $\mathbb{Z}_{12}$의 아이디얼 J의 직접곱 $I\times J$의 형태로 풀이 과정과 함께 쓰시오.
또한 다음 <조건>을 만족시키는 환 S 중에서 서로 동형(isomorphic)이 아닌 것을 풀이 과정과 함께 모두 쓰시오. [4점, 서술형B-11] [2025]

<조 건>

환 R의 원소 $(3,8)$을 영(zero)으로 대응시키는 전사(onto, surjective)인 환 준동형사상(ring homomorphism) $\phi: R\to S$가 존재한다.

※ 다음 정리는 필요하면 증명 없이 사용할 수 있다.

단위원(곱셈항등원, identity, unity)을 가지는 두 가환환 R_1과 R_2에 대하여 직접곱 $R_1\times R_2$의 아이디얼은 $I_1\times I_2$의 형태로 나타낼 수 있다. (단, I_1은 R_1의 아이디얼이고 I_2는 R_2의 아이디얼이다.)

2. 다항식환(polynomial ring) $\mathbb{Z}_n[x]$의 주 아이디얼(principal ideal) $I=\langle x^2+ax+1-a\rangle$에 대하여 잉여환(상환, factor ring, quotient ring) $\mathbb{Z}_n[x]/I$가 홀수인 표수(특성, characteristic)를 갖고 위수(order)가 40 이하인 정역(integral domain)이 되도록 하는 정수의 순서쌍 (n,a)를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $0\le a<n$이다.) [4점, 서술형B-6] [2024]

3. 가우스 정수환(ring of Gaussian integers) $\mathbb{Z}[i]=\{a+bi\mid a,\ b\in\mathbb{Z}\}$는 유클리드 노름(Euclidean norm)이 $\nu(a+bi)=a^2+b^2$인 유클리드 정역(Euclidean domain)이다. $\alpha=1-3i$와 $\beta=3-4i$를 포함하는 $\mathbb{Z}[i]$의 가장 작은 아이디얼(이데알, ideal)을 I라 하자. $\eta\neq 0$인 $\eta\in I$에 대하여 $\nu(\eta)$의 최솟값과 잉여환(상환, factor ring, quotient ring) $\mathbb{Z}[i]/I$의 표수(characteristic)를 각각 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $i=\sqrt{-1}$이다.) [4점, 서술형B-6] [2023]

4. 환(ring) $\mathbb{Z}_{11}$에서 모든 단원(unit, unit element)들의 집합 $\mathbb{Z}_{11}^*$는 순환군(cyclic group)다. $\mathbb{Z}_{11}^*$의 생성원(generator)을 모두 쓰시오. [2점, 기입형A-3] [2022]

5. 정수 b를 자연수 m으로 나눈 나머지를 b_m이라고 할 때,
자연수 n에 대하여 환 준동형사상(ring homomorphism)
$\psi:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{2^n}\times\mathbb{Z}_5$를 $\psi(a,b)=(a,a,b_{2^n},b_5)$로 정의하자.
ψ의 상(치역, image) $\mathrm{Im}(\psi)$의 단원(unit, unit element)의 개수가 2^7인 자연수 n을 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $\mathbb{Z}$는 정수환이고 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$와 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{2^n}\times\mathbb{Z}_5$는 환의 직접곱(직적, 직합, direct product, external direct sum)이다.) [4점, 서술형B-9] [2022]

6. 실수체 $\mathbb{R}$의 원소 $\alpha=\sqrt{2-\sqrt{2}}$에 대하여 환준동형사상(ring homomorphism) $\varphi_\alpha:\mathbb{Q}[x]\to\mathbb{R}$를 $\varphi_\alpha(f(x))=f(\alpha)$로 정의하자. 사상 φ_α의 핵(kernel)을 K라 할 때, $K=\langle p(x)\rangle$를 만족하는 최고차항의 계수가 1인 기약다항식(irreducible polynomial) $p(x)$를 풀이 과정과 함께 쓰시오.
또한 잉여환(상환, factor ring, quotient ring) $\mathbb{Q}[x]/K$의 원소 $(x-2)+K$의 곱셈에 대한 역원을 $g(x)+K$라 할 때, $\deg g(x)<\deg p(x)$인 다항식 $g(x)$를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $\mathbb{Q}[x]$는 유리수체 $\mathbb{Q}$위의 다항식환이고, $\deg h(x)$는 다항식 $h(x)$의 차수이다.) [4점, 서술형A-10] [2020]

7. $\mathbb{Z}_7[x]$는 유한체(finite field) $\mathbb{Z}_7$ 위의 다항식환(polynomial ring)이다. $\mathbb{Z}_7[x]$의 주 아이디얼(단항이데알, principal ideal) $I=\langle x^2-x\rangle$에 대하여 잉여환(상환, factor ring, quotient ring) $\mathbb{Z}_7[x]/I$의 단원(unit, unit element)의 개수를 구하시오. [2점, 기입형A-2] [2019]

8. 다음 두 조건을 만족시키는 유한체(finite field) $\mathbb{Z}_5$ 위의 다항식환(polynomial ring) $\mathbb{Z}_5[x]$의 아이디얼(ideal) I의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형A-14] [2018]

(가) 잉여환(factor ring, quotient ring) $\mathbb{Z}_5[x]/I$의 위수(order)는 25이다.
(나) $\mathbb{Z}_5[x]/I$의 극대 아이디얼(maximal ideal)의 개수는 2이다.

9. $\mathbb{Z}_{60}$의 잉여환(factor ring, quotient ring)으로 나타내어지는 모든 체(field)의 직접곱(직적, direct product)을 R라 하자. 환 R의 표수(characteristic)를 구하시오. [2점, 기입형A-3] [2017]

10. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2013-18]

<보기>

ㄱ. 환 $\mathbb{Z}_n$의 0이 아닌 원소 a가 영인자(zero divisor)이면 a는 단원(unit)이 아니다.
ㄴ. 정역(integral domain) R의 표수(characteristic) n이 양수이면 n은 소수이다.
ㄷ. 다항식 $x^7+9x^4+3x^2-15x+12$는 $\mathbb{Q}[x]$에서 기약(irreducible)이다.

① ㄴ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11. 실수 $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$일 때, 환 $\mathbb{Z}[\alpha]=\{a+b\alpha \mid a, b\in\mathbb{Z}\}$와 행렬환 $M_2(\mathbb{Z}_3)$에 대하여 환준동형사상(ring homomorhpism) $\varphi : \mathbb{Z}[\alpha] \to M_2(\mathbb{Z}_3)$을 다음과 같이 정의하자.

$$\varphi(a+b\alpha)=\begin{pmatrix} [a+b]_3 & [b]_3 \\ [b]_3 & [a]_3 \end{pmatrix}$$

(단, $[k]_3$은 $\mathbb{Z}$에서 법 3에 대한 k의 합동류이다.)

φ의 핵(kernel) $\ker(\varphi)$와 φ의 상(image) $\mathrm{im}(\varphi)$에 대하여 옳은 것은? (단, $\langle a\rangle$는 a로 생성되는 주아이디얼(principal ideal)이고, F_n은 위수가 n인 유한체이다.) [2점] [2013-19]

① $\ker(\varphi)=\langle 3\rangle$이고, $\mathrm{im}(\varphi)$는 F_9와 환동형이다.
② $\ker(\varphi)=\langle 3\rangle$이고, $\mathrm{im}(\varphi)$는 $\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$과 환동형이다.
③ $\ker(\varphi)=\langle 9\rangle$이고, $\mathrm{im}(\varphi)$는 F_{27}과 환동형이다.
④ $\ker(\varphi)=\langle 9\rangle$이고, $\mathrm{im}(\varphi)$는 $\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_3$과 환동형이다.
⑤ $\ker(\varphi)=\langle 9\rangle$이고, $\mathrm{im}(\varphi)$는 $\mathbb{Z}_{27}$과 환동형이다.

12. 사상 $\Phi:\mathbb{R}[x]\to S$는 실수체 $\mathbb{R}$위의 다항식환 $\mathbb{R}[x]$에서 단위원(identity, unity) $1(\neq 0)$을 포함하는 정역(integral domain) S로의 환준동형사상(ring homomorphism)이다. Φ에 대한 다음 명제의 참, 거짓을 판정한 후 참인 명제는 증명하고 거짓인 명제는 거짓인 이유를 설명하시오. [20점] [2013 2차, 1교시-2]

<명 제>

(I) $\Phi(\mathbb{R}[x])=S$이면 S는 주 아이디얼 정역(principal ideal domain)이다.
(II) $\Phi(\mathbb{R}[x])=S$이고 $I=\langle x^2+2x+2\rangle$이면 잉여환(factor ring, quotient ring) $S/\Phi(I)$의 아이디얼(ideal)은 3개 존재한다.
(단, $I=\langle x^2+2x+2\rangle$는 다항식 x^2+2x+2로 생성되는 주 아이디얼(principal ideal)이다.)
(III) $S=\mathbb{Z}$이면 잉여환 $\mathbb{R}[x]/\ker\Phi$의 아이디얼은 모두 1개 존재한다.
(단, $\mathbb{Z}$는 정수환이고 $\ker\Phi$는 Φ의 핵(kernel)이다.)

※ 아래 제시된 성질은 필요하면 증명 없이 사용할 수 있다.

<조 건>

(가) $\mathbb{R}[x]$는 주 아이디얼 정역이다.
(나) S의 아이디얼 J에 대하여 $\Phi^{-1}(J)$는 $\mathbb{R}[x]$의 아이디얼이다.
(다) $p(x)\in\mathbb{R}[x]$가 기약다항식(irreducible polynomial)이면 $\langle p(x)\rangle$는 $\mathbb{R}[x]$의 극대 아이디얼(maximal ideal)이다.
(라) $f(x), g(x)\in\mathbb{R}[x]$일 때, $\Phi(f(x))\Phi(g(x))=0$이면 $\Phi(f(x))=0$ 또는 $\Phi(g(x))=0$이다.

13. 복소수체의 부분환 $\mathbb{Z}[i]=\{a+bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2012-20]

<보기>

ㄱ. $\mathbb{Z}[i]$는 주아이디얼 정역(principal ideal domain)이다.
ㄴ. $\mathbb{Z}[i]$의 단원(unit)은 모두 6개이다.
ㄷ. $\mathbb{Z}[i]$의 주아이디얼(principal ideal) $\langle 2 \rangle$는 극대아이디얼(maximal ideal)이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

14. $\mathbb{Z}$는 정수환이고 $\mathbb{Q}$는 유리수환이다. 환준동형사상(ring homomorphism) $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$가 일대일(injective)사상일 때, <보기>에서 옳은 것만을 모두 고른 것은? [2점] [2011-20]

<보기>

ㄱ. 임의의 정수 n에 대하여 $g(n) = n$이다.
ㄴ. $\mathbb{Z}$의 임의의 아이디얼(ideal) I에 대하여 $g(I)$는 $\mathbb{Q}$의 아이디얼이다.
ㄷ. $\mathbb{Q}$의 임의의 아이디얼 J에 대하여 $g(I)=J$가 성립하는 $\mathbb{Z}$의 아이디얼 I가 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

15. 환 $\mathbb{Z}_{24}$ 위의 다항식환(polynomial ring) $R = \mathbb{Z}_{24}[x]$에 대하여 옳은 것은? [2.5점] [2011-21]

① R는 정역(integral domain)이다.
② R는 8개 이상의 단원(unit)을 갖는다.
③ R는 환 $\mathbb{Z}_4[x] \times \mathbb{Z}_6[x]$와 동형이다.
④ 다항식 $f(x)= x^3 - 6x^2 + 11x - 6$은 $\mathbb{Z}_{24}$에서 오직 3개의 근을 갖는다.
⑤ 주아이디얼(principal ideal) $I = \langle x^2 + 12 \rangle$에 대하여 잉여환(factor ring, quotient ring) R/I는 체이다.

16. 정수환 $\mathbb{Z}$에 관련된 다음 명제 중 옳지 <u>않은</u> 것은? [2점] [2010-27]

① $\mathbb{Z}$의 부분환은 무한히 많이 존재한다.
② $\mathbb{Z}$와 $\mathbb{Z}$의 부분환 $3\mathbb{Z}$는 환동형(ring isomorphic)이다.
③ $\mathbb{Z}$의 부분환 $17\mathbb{Z}$는 $\mathbb{Z}$의 극대아이디얼(maximal ideal)이다.
④ $\mathbb{Z}$의 주아이디얼(principal ideal)은 무한히 많이 존재한다.
⑤ $\mathbb{Z}$의 원소 a가 소원(prime element)이면, a는 기약원(irreducible element)이다.

17. $\mathbb{Z}$가 정수환이고, $\mathbb{Z}[x]$는 $\mathbb{Z}$ 위의 다항식환이며,

$$\mathbb{Z}[i]=\{a+bi|a, b \in \mathbb{Z}\} \text{ (단 } i^2=-1)$$

는 복소수체의 부분환이다. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은? [2점] [2009-20]

① $\mathbb{Z}$는 $\mathbb{Z}[x]$의 부분환이다.
② $\mathbb{Z}[x]$와 $\mathbb{Z}[i]$는 서로 환동형이다.
③ $\mathbb{Z}[x]$는 유일인수분해 정역(unique factorization domain)이다.
④ $\mathbb{Z}$의 분수체(field of quotients)는 유리수체 $\mathbb{Q}$와 동형이다.
⑤ $\mathbb{Z}[x]$의 원소 중 곱셈에 대한 역원을 갖는 것은 ± 1뿐이다.

18. E는 체 F의 확대체이고, $F[x]$는 F 위의 다항식환이다. $\alpha \in E$가 F 위에서 대수적(algebraic)일 때, 함수 $\phi_\alpha : F[x] \to E$는 $f(x) \in F[x]$에 대하여 $\phi_\alpha(f(x)) = f(\alpha)$로 정의된 환준동형사상이다. <보기>에서 항상 성립하는 것을 모두 고른 것은? [2점] [2009-21]

<보기>

ㄱ. $\mathrm{Ker}(\phi_\alpha) \neq \{0\}$

ㄴ. $F[x]/\mathrm{Ker}(\phi_\alpha)$와 E는 서로 환동형이다.

ㄷ. $\mathrm{Ker}(\phi_\alpha)$는 $F[x]$의 소아이디얼(prime ideal)이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 다음은 환과 그 환의 극대이데알(maximal ideal)을 순서쌍으로 나타낸 것이다. 잘못 짝지어진 것은? (단, $\langle a \rangle$는 a로 생성된 이데알을 나타낸다.) [2점] [2009모의-20]

① $(\mathbb{Z}_5[x], \langle x^3+3x+2 \rangle)$

② $(\mathbb{Z}_6, \langle 3 \rangle)$

③ $(\mathbb{Q}[x], \langle x^5-4x+22 \rangle)$

④ $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$

⑤ $(\mathbb{Z}[x], \langle 3x^3+x^2+x-2 \rangle)$

20. 체 F위의 다항식환 $F[x]$에서 I를 영이 아닌 진이데알(nontrivial proper ideal) 이라고 하자. 다음 명제 중 나머지 네 개의 명제와 동치가 아닌 것은? [2점] [2009모의-21]

① I의 영이 아닌 모든 원소는 기약다항식의 곱으로 표현할 수 있다.

② $I = \langle p(x) \rangle$인 기약다항식 $p(x) \in F[x]$가 존재한다.

③ $F[x]/I$의 영이 아닌 모든 원소는 곱셈에 대한 역원을 갖는다.

④ I를 포함하는 $F[x]$의 진이데알은 I 뿐이다.

⑤ $g(x)$, $h(x) \in F[x]$에 대하여 $g(x)h(x) \in I$이면 $g(x) \in I$ 이거나 $h(x) \in I$이다.

21. 정수 집합 $\mathbb{Z}$위의 다항식환(polynomial ring)을 $\mathbb{Z}[x]$라 하자. $\mathbb{Z}[x]$의 두 원소 a와 bx에 의해 생성되는 $\mathbb{Z}[x]$의 이데알(ideal) $I = (a, bx)$에 대하여 다음을 증명하시오. (단, a, $b \in \mathbb{Z}$) [5점] [2008-8]

I 가 단항이데알(principal ideal)이면, $a=0$ 또는 a는 b의 약수이다.

22. 정수환 $\mathbb{Z}$에서 가환환 $\mathbb{Z}_6$으로 가는 환준동형사상(ring homomorphism) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_6$를 다음과 같이 정의하자.

$$f(n) \equiv 4n \pmod 6$$

위의 f를 이용하여, 두 개의 환 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$와 $2\mathbb{Z}_6$이 동형(isomorphic)임을 보이시오. [4점] [2006-9]

(단, $\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$는 6을 법(modulo)으로 하는 덧셈과 곱셈 연산을 가지는 가환환이다.)

[23～24] 환 준동형사상(ring homomorphism)

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$$

는 다음과 같이 정의된다.

$$f(x) = (x+3\mathbb{Z},\ x+5\mathbb{Z},\ x+7\mathbb{Z})$$

23. f 의 핵(kernel)을 구하시오. [2점] [2005-21]

24. $f(x) = (2+3\mathbb{Z},\ 3+5\mathbb{Z},\ 4+7\mathbb{Z})$를 만족시키는 정수 x를 모두 구하시오. [3점] [2005-22]

25. F가 체일 때, $F[x]$의 모든 이데알(ideal)은 주 이데알(principal)임을 증명하시오. [5점] [1999 추시-12]

26. 유한인 정역(finite integral domain) D는 체(field)임을 증명하시오. [5점] [1999-8]

27. 환(Ring) R의 원소 a가 적당한 양의 정수 m에 대하여 $a^m=0$으로 될 때, a를 R의 멱영원(Nilpotent element)이라고 한다. 가환환(Commutative ring) R의 멱영원 전체의 집합을 J라고 할 때, J는 R의 이데알(Ideal)임을 보이시오. [6점] [1998-8]

28. 다항식 $f(x)=x^2+x+1\in\mathbb{Z}_2[x]$는 기약 다항식(irreducible polynomial)이므로 $f(x)$로 생성되는 이데알 $\langle f(x)\rangle$는 ㉠이며, $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2+x+1)$은 위수가 ㉡인 유한체이다. ㉠, ㉡에 모두 옳은 것은? [1996-7]

	㉠	㉡
①	극대이데알(maximal ideal),	2
②	극대이데알(maximal ideal),	4
③	소이데알(prime ideal),	8
④	소이데알(prime ideal),	16

29. 다항식환에 대한 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? [1994-34]

(가) 체 $\mathbb{Z}_2=\{0,1\}$위에서의 다항식환 $\mathbb{Z}_2[x]$에서 기약인 이차 다항식은 x^2+x+1뿐이다.
(나) $\mathbb{Z}_4=\{0,1,2,3\}$위에서의 다항식환 $\mathbb{Z}_4[x]$는 정역이다.
(다) R이 가환환이면 R위의 다항식환 $R[x]$도 가환환이다.
(라) R이 정역이면 R위의 다항식환 $R[x]$도 정역이다.

① (가), (나)　　② (다), (라)
③ (나), (다), (라)　　④ (가), (다), (라)

<체>

1. 다항식환 $\mathbb{Z}_7[x]$에서 다항식 $f(x)=x^4+3x^2-1$이 기약(irreducible)임을 보이시오. 또한 α를 $f(x)$의 해라 하고, 갈루아 군(Galois group) $G(\mathbb{Z}_7(\alpha)/\mathbb{Z}_7)$의 원소 σ의 위수(order)가 4라 하자. $G(\mathbb{Z}_7(\alpha)/\mathbb{Z}_7)$의 부분군 $\langle \sigma^2 \rangle$의 고정체(fixed field) E의 위수(order)를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $\mathbb{Z}_7(\alpha)$는 유한체 $\mathbb{Z}_7$ 위의 단순 확대체(simple extension field)이다.) [4점, 서술형B-9] [2026]

2. K는 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위의 갈루아 확대체(정규 확대체, Galois extension field, normal extension field)이고, 갈루아군(Galois group) $G(K/\mathbb{Q})$는 덧셈 순환군(additive cyclic group) $\mathbb{Z}_2$와 대칭군(symmetric group) S_3의 직접곱(직적, direct product) $\mathbb{Z}_2 \times S_3$과 동형이다. $\mathbb{Q}$ 위의 차수(degree) $[E:\mathbb{Q}]=6$인 K의 부분체 E의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오.
또한 K의 부분체 F에 대하여, F가 $\mathbb{Q}$ 위의 갈루아 확대체이고 갈루아군 $G(F/\mathbb{Q})$가 S_3과 동형이 되도록 하는 체 F가 존재함을 보이시오. [4점, 서술형B-8] [2025]

3. 체(field) K를 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위에서 $x^{23}-88$의 분해체(splitting field)라 하자. K의 $\mathbb{Q}$ 위에서의 차수(degree) $[K:\mathbb{Q}]$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한, $[K:E]-[E:\mathbb{Q}]$가 1010의 양의 약수이고 $\mathbb{Q} \le E \le K$를 만족시키는 체 E의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형A-12] [2024]

4. K는 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위에서 다항식 $x^{13}-1$의 분해체(splitting field)이다. 갈루아군(Galois group) $G(K/\mathbb{Q})$에 대하여 집합 X를

$$X=\{\sigma \in G(K/\mathbb{Q}) \mid K_{\langle \sigma \rangle}=\mathbb{Q}\}$$

라 하자. X의 원소 개수를 구하고 X의 원소 각각에 대하여 $\zeta=e^{\frac{2\pi i}{13}}$의 상(image)을 ζ의 거듭제곱으로 나타내시오.
또한 K의 원소

$$\beta=\zeta+\zeta^3+\zeta^4+\zeta^9+\zeta^{10}+\zeta^{12}$$

의 $\mathbb{Q}$ 위에서의 기약다항식(최소다항식, irreducible polynomial) $\mathrm{irr}(\beta,\mathbb{Q})$를 풀이 과정과 함께 쓰시오.
(단, $K_{\langle \sigma \rangle}$는 σ로 생성되는 순환군(cyclic group) $\langle \sigma \rangle$의 고정체(fixed field)이고, $i=\sqrt{-1}$이다.) [4점, 서술형A-12] [2023]

5. $K=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, e^{\frac{2\pi}{75}i})$는 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위에서
다항식 $(x^3-2)(x^{25}-1)$의 분해체(splitting field)이다.
갈루아군(Galois group) $G(K/\mathbb{Q})$의 위수(order)를 쓰시오.
또한, 다음 <조건>을 모두 만족하는 $G(K/\mathbb{Q})$의 부분군(subgroup) H_1, H_2가 존재함을 보이시오. (단, $i=\sqrt{-1}$이다.) [4점, 서술형A-12] [2022]

<조건>

(가) H_1과 H_2는 $G(K/\mathbb{Q})$의 정규 부분군(normal subgroup)이다.
(나) H_1의 위수는 20이고 H_2의 위수는 6이다.
(다) $G(K/\mathbb{Q})=H_1H_2$이다.

6. 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위에서 다항식 x^5+5의 분해체(splitting field)를 K라 하자. 체 $\mathbb{Q}(\sqrt[10]{5})$가 K의 부분체임을 증명하고, K의 원소

$$\alpha=e^{\frac{2\pi}{5}i}+e^{\frac{3\pi}{5}i}$$

의 $\mathbb{Q}$ 위에서의 기약다항식(irreducible polynomial) $\mathrm{irr}(\alpha,\mathbb{Q})$를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $i=\sqrt{-1}$) [4점, 서술형B-11] [2021]

7. 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위에서 다항식 $x^{24}-1$의 분해체(splitting field)를 K라 하자. 갈루아군(Galois group) $G(K/\mathbb{Q})$의 위수(order)와 복소수 $\zeta=e^{\frac{\pi}{12}i}$의 $\mathbb{Q}$ 위에서의 기약다항식(irreducible polynomial) $\mathrm{irr}(\zeta,\mathbb{Q})$을 각각 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $i=\sqrt{-1}$) [4점, 서술형B-11] [2020]

8. 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위에서 대수적인 두 실수 a, b에 대하여 단순 확대체(simple extension) $K=\mathbb{Q}(a+bi)$가 $\mathbb{Q}$ 위의 갈루아 확대체(정규 확대체, Galois extension field, normal extension field)이고 갈루아군(Galois group) $G(K/\mathbb{Q})$가 아벨군(abelian group)이라 하자.

$a^2+b^2\in\mathbb{Q}$이고 $b\neq 0$일 때, $G(K/\mathbb{Q})$의 위수(order)는 짝수임을 보이시오. 또한 $G(K/\mathbb{Q})$의 위수를 $2m$이라 할 때, 자연수 m의 각각의 양의 약수 d에 대하여 $\mathbb{Q}[x]$에 속하고 모든 근이 실수이며 차수가 d인, $\mathbb{Q}$ 위의 기약다항식(irreducible polynomial)이 존재함을 보이시오. (단, $i=\sqrt{-1}$이고 $\mathbb{Q}[x]$는 $\mathbb{Q}$ 위의 다항식환(polynomial ring)이다.) [5점, 서술형B-6] [2019]

9. 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위의 기약다항식(irreducible polynomial) $f(x)$의 $\mathbb{Q}$ 위의 분해체(splitting field) K에 대하여 갈루아 군(Galois group) $G(K/\mathbb{Q})$가 아벨군(abelian group)이다.

이때 $G(K/\mathbb{Q})$의 위수(order)가 $f(x)$의 차수 $\deg(f(x))$와 같음을 보이시오. 또 $\deg(f(x))=2018$일 때 K의 모든 부분체(subfield)의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (참고: $2018=2\times1009$이고 1009는 소수이다.) [5점, 서술형B-6] [2018]

10. 유리수 체 $\mathbb{Q}$ 위에서 대수적인 원소 α에 대하여 단순 확대체(simple extension field) $K=\mathbb{Q}(\alpha)$는 $\mathbb{Q}$ 위의 갈루아 확대체(정규 확대체, Galois extension field, normal extension field)이고 차수(degree)는 $[K:\mathbb{Q}]=100$이다. 갈루아 군(Galois group) $\mathrm{G}(K/\mathbb{Q})$가 $\sigma(\alpha)=\alpha^{-1}$을 만족시키는 자기동형사상(automorphism) σ를 가질 때, K의 부분체 $F=\mathbb{Q}(\alpha+\alpha^{-1})$의 $\mathbb{Q}$ 위의 차수 $[F:\mathbb{Q}]$를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [5점, 서술형B-6] [2017]

11. 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위에서 대수적인 원소 α와 단순확대체(simple extension field) $K=\mathbb{Q}(\alpha)$가 있다. F가 K의 부분체이고

$$\mathrm{irr}(\alpha,\ F)=x^r+a_1x^{r-1}+a_2x^{r-2}+\cdots+a_r$$
$$(a_1,\ a_2,\cdots,a_r\in F)$$

일 때, $F=\mathbb{Q}(a_1,\ a_2,\ \cdots,a_r)$임을 보이시오.

또한 $\alpha=\sqrt{2}+i$이고 $F=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$일 때, $\mathrm{irr}(\alpha,\ F)$를 구하시오. [4점, 서술형A-14] [2016]

(단, $i=\sqrt{-1}$이고, $\mathrm{irr}(\alpha,\ F)$는 F위에서 α의 기약다항식(최소다항식, irreducible polynomial, minimal polynomial)이다.)

12. 체 K는 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위에서 차수(degree)가 $[K : \mathbb{Q}] = 270$인 갈루아 확대체(정규확대체, Galois extension field, normal extension field)이고, 갈루아 군(Galois group) $G(K/\mathbb{Q})$는 순환군(cyclic group)이다. $\sqrt{2}$가 K의 원소일 때, $\sqrt{2}$를 포함하는 K의 부분체의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [5점, 서술형B-6] [2016]

13. 실수 $\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}$을 근으로 가지는 다항식 $f(x) = x^9 + 3x^6 + 165x^3 + 1$은 13을 법으로 하여 $f_{13}(x) = x^9 + 3x^6 + 9x^3 + 1$과 합동이고 $f_{13}(x)$는 $\mathbb{Z}_{13}[x]$에서 기약다항식임이 알려져 있다.

이를 이용하여, $f(x)$가 $\mathbb{Q}[x]$에서 기약임을 보이시오. 그리고 $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3})$라 할 때 차수(degree) $[K : \mathbb{Q}]$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰고, 다항식 $g(x) = (x^3 - 2)(x^3 - 3) \in \mathbb{Q}[x]$의 분해체(splitting field) E에 대하여 갈루아 군 $G(E/\mathbb{Q})$의 위수(order)를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [10점, 논술형B-1] [2015]

14. 다항식 $x^6 + 3$의 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위에서의 분해체(splitting field)를 K라 하면 갈루아군 $G(K/\mathbb{Q})$의 위수(order)는 6임을 증명하시오. [4점, 서술형B-2] [2014]

15. F는 체 $\mathbb{Z}_2$의 유한확대체(finite extension field)이다. $[F : \mathbb{Z}_2] = 60$일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2013-20]

<보기>

ㄱ. K가 F의 부분체(subfield)이면 $\mathbb{Z}_2 \subseteq K$이다.

ㄴ. F의 두 부분체 K_1과 K_2가 $[F : K_1] = 5$, $[F : K_2] = 10$을 만족하면 $K_2 \subseteq K_1$이다.

ㄷ. F의 두 부분체 K_1과 K_2가 $[F : K_1] = 6$, $[F : K_2] = 10$을 만족하면 $K_1 \cap K_2 = \mathbb{Z}_2$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 체 $\mathbb{Z}_2$의 유한확대체(finite extension field) F가 $[F : \mathbb{Z}_2] = 6$을 만족시키고, $\alpha \in F$에 대하여 함수

$$\varphi_\alpha : \mathbb{Z}_2[x] \to F,\ \varphi_\alpha(f(x)) = f(\alpha)$$

는 대입준동형사상(evaluation homomorphism)이다. 옳지 않은 것은? [2점] [2012-21]

① 체 F는 위수(order)가 64인 유한체이다.
② φ_α의 핵 $\ker(\varphi_\alpha)$는 $\mathbb{Z}_2[x]$의 주아이디얼(principal ideal)이다.
③ α의 기약다항식 $\mathrm{irr}(\alpha, \mathbb{Z}_2)$는 $\mathbb{Z}_2[x]$에서 다항식 $x^{64} - x$를 나눈다.
④ 기약다항식 $\mathrm{irr}(\alpha, \mathbb{Z}_2)$의 차수(degree)가 4인 $\alpha \in F$가 존재한다.
⑤ φ_α의 상 $\mathrm{im}(\varphi_\alpha)$는 F의 부분체(subfield)이다.

17. 다음은 대수학 강의 시간에 박 교수와 학생이 나눈 대화의 일부분이다. 다음을 읽고 물음에 답하시오. [30점] [2012 2차, 2교시-3-2]

박 교수: 지금까지 다항식 환에 대한 다음 정리를 증명하였습니다.

< 정 리 >

F가 체이면 다항식 환 $F[x]$가 주 아이디얼 정역(principal ideal domain)이다.

학생 A: 네. 체 위에서의 다항식 환이 주 아이디얼 정역임을 이해하였습니다.

박 교수: 이 정리를 출발점으로 하여, ㉠브라운(S.Brown)과 월터(M. Walter)가 제시한 '만약 그렇지 않다면 어떻게 될까(What if not)' 전략에 따라 수업을 진행하고자 합니다. 그럼, 이 전략에 따라 새로운 문제를 만드는 단계까지 진행하고 그 결과를 발표해 봅시다.

학생 B: 앞의 정리를 바탕으로 다음과 같은 새로운 명제를 만들었습니다.

< 명 제 >

다항식 환 $R[x]$가 주 아이디얼 정역이면 R는 체이다.

박 교수: 참 잘 만든 명제입니다. 사실 이 명제는 참입니다. 이제 이 명제를 증명해 봅시다.

학생 B가 만든 <명제>가 참임을 증명하시오. [20점]

18. 유한체(finite field) $\mathbb{Z}_p$(p는 소수) 위의 다항식

$$f(x)=x^{p^4}-x\in\mathbb{Z}_p[x]$$

에 대하여 체 K가 $\mathbb{Z}_p$ 위에서의 $f(x)$의 분해체(splitting field)일 때, <보기>에서 옳은 것만을 모두 고른 것은? [2점] [2011-22]

<보기>

ㄱ. 임의의 원소 $\alpha\in K$에 대하여 $\alpha^{p^4}=\alpha$이다.

ㄴ. $\mathbb{Z}_p\subsetneq L\subsetneq K$를 만족시키는 중간체(intermediate field) L은 오직 한 개 존재한다.

ㄷ. 갈루아 군(Galois group) $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Z}_p)$는 위수(order)가 4인 순환군(cyclic group)이다.

① ㄱ　　② ㄴ　　③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 유한체 $\mathbb{Z}_p=\{0,1,\cdots,p-1\}$($p$는 소수) 위의 다항식환 $\mathbb{Z}_p[x]$에 속하는 다항식 $f(x)=x^p-x-a(a\neq0)$에 대하여 K는 $f(x)$의 $\mathbb{Z}_p$위에서의 분해체(splitting field), $G(K/\mathbb{Z}_p)$는 K의 $\mathbb{Z}_p$ 위에서의 갈루아 군(Galois group)이라 하자. $f(x)$의 한 근 α와 모든 $\sigma\in G(K/\mathbb{Z}_p)$에 대하여 $\psi_\alpha(\sigma)=\sigma(\alpha)-\alpha$일 때, 다음 세 명제가 참임을 증명하시오. [20점] [2011 2차, 1교시-2]

<명 제>

(Ⅰ) $\psi_\alpha(\sigma)\in\mathbb{Z}_p$이고 $K=\mathbb{Z}_p(\alpha)$이다.

(Ⅱ) 함수 $\psi_\alpha : G(K/\mathbb{Z}_p)\to(\mathbb{Z}_p,+)$는 군 동형사상이다. (단, $(\mathbb{Z}_p,+)$는 덧셈군이다.)

(Ⅲ) $f(x)$의 두 근 α, β에 대하여 $\psi_\alpha=\psi_\beta$이다.

20. 체 $\mathbb{Q}$는 유리수체이고 $\mathbb{Q}[x]$는 다항식환이다. 체 E를 다항식 $f(x) = (x^2-2)(x^2-11) \in \mathbb{Q}[x]$의 분해체(splitting field)라 하자. 체 E의 부분체와 관련된 <보기>의 명제 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [2.5점] [2010-28]

<보기>

ㄱ. 원소 $\alpha \in E$를 첨가한 단순확대체(simple extension field) $\mathbb{Q}(\alpha)$에 속하는 모든 원소는 $\mathbb{Q}$ 위에서 대수적(algebraic)이다.

ㄴ. 체 $\mathbb{Q}(\beta^2)$ 위에서 체 $\mathbb{Q}(\beta)$의 차수(degree) $[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}(\beta^2)]$가 1보다 큰 홀수가 되는 원소 $\beta \in E$가 존재한다.

ㄷ. 차수 $[E : \mathbb{Q}(\gamma)]$가 1인 원소 $\gamma \in E$가 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

21. 정수환 $\mathbb{Z}$위의 다항식환 $\mathbb{Z}[x]$에 속하는 다항식 $f(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x) = x^6 + 12x^4 - 3x^3 - 108x^2 + 24x - 120$$

환 R_n $(n = 1, 2, 3, 4)$을 다음과 같이 정의할 때, 잉여환(factor ring, quotient ring) $R_3 = \mathbb{Q}[x]/(f(x))$가 유리수체 $\mathbb{Q}$의 확대체의 구조를 갖는다는 것을 증명하고, 각각의 R_n $(n = 1, 2, 3, 4)$ 안에서 다항식 $f(x)$의 근의 존재성을 증명하시오. [20점] [2010 2차, 2교시-4]

① $R_1 = \mathbb{Q}$
② $R_2 = \mathbb{C}$ (단, $\mathbb{C}$는 복소수체)
③ $R_3 = \mathbb{Q}[x]/(f(x))$ (단, $(f(x))$는 $f(x)$에 의하여 생성된 주아이디얼(principal ideal))
④ $R_4 = F$ (단, F는 $\mathbb{Z}_2$위에서의 차수(degree)가 $[F : \mathbb{Z}_2] = 2^{10}$인 체)

22. 체 K가 체 F 위의 확대체이고 $\mathrm{Aut}(K)$를 K에서 K로의 자기동형사상(automorphism) 전체의 집합이라 할 때, $\mathrm{Aut}(K)$의 부분군 $\mathrm{G}(K/F)$를

$$\mathrm{G}(K/F) = \{\sigma \in \mathrm{Aut}(K) \mid \text{모든 } a \in F\text{에 대하여 } \sigma(a) = a\}$$

로 정의하자. 체 K가 체 $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ 위의 차수(degree) 6인 유한확대체일 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [2.5점] [2009-22]

<보기>

ㄱ. 체 K는 $\mathbb{Z}_3$ 위의 분해체(splitting field)이다.

ㄴ. 체 K는 $\mathbb{Z}_3$ 위의 분리확대체(separable extension field)이다.

ㄷ. $\mathbb{Z}_3$와 K 사이에는 $\mathrm{G}(K/E)$의 위수가 2가 되는 체 E가 3개 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

23. 다음은 곱셈순환군의 생성원(generator)과 소체(prime field) 위의 다항식의 근 사이의 관계에 대한 명제와 한 학생의 증명이다. 다음을 읽고 물음에 답하시오. [2009 2차, 2교시-3-1]

<명 제>

소수 p와 양의 정수 $n(\geq 2)$에 대하여, F를 소체 $\mathbb{Z}_p=\{0, 1, 2, \cdots, p-1\}$을 포함하고 위수가 p^n인 체라 하고, 곱셈순환군 $F^*=F-\{0\}$의 생성원을 α라고 하자. 소체 $\mathbb{Z}_p$ 위의 n차 다항식 $f(x)$가 α를 근으로 가지면, $f(x)$는 F^*의 생성원 중에서 서로 다른 n개를 근으로 갖는다.

<민주의 증명>

F^*는 α에 의하여 생성된 곱셈순환군이므로

$$F^*=\langle\alpha\rangle=\{1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \cdots,\ \alpha^{p^n-2}\},\ \alpha^{p^n-1}=1$$

로 나타낼 수 있다.

한편, $\underline{\sigma_p : F\rightarrow F,\ \sigma_p(x)=x^p \text{은 환동형사상이고}}$ ……………………… ㉠

$\underline{\text{모든 } x\in\mathbb{Z}_p \text{에 대하여 } \sigma_p(x)=x^p=x \text{이므로 모든 } x\in F \text{에 대하여}}$ $\underline{\sigma_p(x)=x\text{이다.}}$ ……………………………………………… ㉡

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ \cdots\ +a_1x+a_0\in\mathbb{Z}_p[x]$$

로 놓으면, $\underline{f(\alpha)=0\text{이므로 } f(\alpha^p)=0\text{이다.}}$ ……………………… ㉢

따라서 $\underline{F^*\text{의 생성원 중에서 서로 다른 } n\text{개의 생성원}}$ $\underline{\alpha,\ \alpha^p,\ \alpha^{p^2},\ \cdots,\ \alpha^{p^{n-1}}\text{이 } f(x)\text{의 근이 된다.}}$ ……………………… ㉣

<민주의 증명>의 밑줄 친 부분 ㉠~㉣에서 옳은 것은 증명하고, 옳지 않은 것은 증명의 흐름에 맞도록 옳게 고친 다음 증명하시오. [20점]

24. 다항식환 $\mathbb{Z}_2[x]$에서 기약인 다항식 x^3+x^2+1의 한 근 α를 포함한 단순확대체(simple extension field)를 E라고 하자. 확대체 E에서 다항식 x^3+x^2+1의 나머지 두 근을 β, γ라 할 때, 집합 $\{\alpha+\beta, \alpha+\gamma\}$와 같은 것은? [2.5점] [2009 모의-22]

① $\{0, 1+\alpha\}$　② $\{1+\alpha, \alpha^2\}$　③ $\{\alpha^2, \alpha+\alpha^2\}$
④ $\{1+\alpha^2, \alpha+\alpha^2\}$　⑤ $\{\alpha^2, 1+\alpha+\alpha^2\}$

25. 유리수체를 $\mathbb{Q}$라 할 때,

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2},\ \sqrt{3})=\{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}\mid a, b, c, d\in\mathbb{Q}\}$$

는 $\mathbb{Q}$의 유한확대체(finite extension field)이다. $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}$일 때, 물음에 답하시오. [2009 모의 2차, 2교시-3]

(가) $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\ \sqrt{3})$이 체 $\mathbb{Q}$위에서의 벡터공간이 되도록 벡터합과 스칼라곱을 정의할 수 있다.

(나) 임의의 $\beta\in\mathbb{Q}(\sqrt{2},\ \sqrt{3})$에 대하여 다음과 같이 정의된 함수 T는 선형변환(linear transformation)이다.

$$T:\ \mathbb{Q}(\sqrt{2},\ \sqrt{3})\rightarrow\mathbb{Q}(\sqrt{2},\ \sqrt{3}),\ T(\beta)=\alpha\beta$$

(가) $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\ \sqrt{3})$에 속하는 임의의 원소 $\beta=a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}$을 $[\beta]=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$
와 같이 나타내기로 하자.
4×4 행렬 A를 $A=([T(1)]\,[T(\sqrt{2})]\,[T(\sqrt{3})]\,[T(\sqrt{6})])$이라 하면, $[T(\beta)]=A[\beta]$로 나타낼 수 있다.

25-1. 위에 제시된 (가)와 (나)를 증명하고, (다)의 행렬 A를 구하시오. 또, 선형변환 T의 고윳값(eigenvalue)과 행렬 A의 고윳값이 같다는 사실을 이용하여 $f(\alpha)=0$을 만족시키는 영이 아닌 다항식 $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$를 구한 후, 이로부터 $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\ \sqrt{3})=\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$임을 보이시오. [14점]

25-2. $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}$을 $\alpha=1+\sqrt{2}$로 바꾸어, 문항 (1)과 같은 방법으로 $f(\alpha)=0$을 만족시키는 영이 아닌 다항식 $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$를 구하고, 이를 이용하여 $\mathbb{Q}(1+\sqrt{2})$가 $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\ \sqrt{3})$의 진부분체(proper subfield)임을 보이시오. 또, 지금까지의 결과를 종합하여 유한확대체는 대수적확대체(algebraic extension field)임을 설명하시오. [6점]

26. 유리수체 $\mathbb{Q}$위의 기약다항식(irreducible polynomial)

$$f(x)=x^3-2x+2$$

에 대하여 $f(x)$의 한 근(root) θ를 포함하는 $\mathbb{Q}$의 확대체(extension field)를 $\mathbb{Q}(\theta)$라 하자. 이 때, $\mathbb{Q}(\theta)$에서 $3+\theta$의 곱셈에 대한 역원을 구하시오. [4점] [2008-9]

27. 위수가 9인 체(field) F_9를 구성하고, F_9를 원소나열법으로 나타내시오. [5점] [2007-18]

28. 체 K는 체 F의 대수적 확대체(algebraic extension field)로서

$$[K:F]=10\ (\text{즉, } [K:F]=\dim_F K=10)$$

이다. F위의 기약다항식(irreducible polynomial) $f(x)$의 차수(degree)가 3일 때, $f(x)$의 어떤 근도 K에 포함되지 않음을 보이시오. [4점] [2005-19]

29. 체(field) F위의 다항식환 $F[x]$에서 $p(x)\in F[x]$가 기약다항식(irreducible polynomial)이면 $p(x)$로 생성된 이데알 $\langle p(x)\rangle$는 극대이데알(maximal ideal)임을 증명하시오. [5점] [2003-8]

30. 체(field) F위의 기약 다항식(irreducible polynomial)

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in F[x]$$
$$(\text{단, } a_n\neq 0)$$

에 대하여 $f(x)$의 한 개의 근(root)을 포함하는 F의 확대체(extension field)가 존재함을 보이시오. [5점] [2002-10]

31. E가 체 F 위에서 유한확대체(finite extension field)이면, E는 F 위에서 대수적 확대(algebraic extension)체임을 증명하시오. [5점] [1999 추시-13]

32. 두 실수 $\sqrt[4]{3}$와 $\sqrt[5]{3}$의 작도가능성에 다음 설명으로 옳은 것은? [1996-8]

① $\sqrt[4]{3}$: 작도 가능, $\sqrt[5]{3}$: 작도 가능
② $\sqrt[4]{3}$: 작도 불가능, $\sqrt[5]{3}$: 작도 가능
③ $\sqrt[4]{3}$: 작도 가능, $\sqrt[5]{3}$: 작도 불가능
④ $\sqrt[4]{3}$: 작도 불가능, $\sqrt[5]{3}$: 작도 불가능

33. 군, 환, 체, 벡터공간에 관한 다음 설명 중에서 옳은 것은? [1996-9]

㉠ 위수가 4인 모든 군은 동형이다.
㉡ 위수가 4인 모든 환은 동형이다.
㉢ 위수가 4인 모든 체는 동형이다.
㉣ 군 G의 임의의 부분군 H에 의한 상군(quotient group) G/H를 항상 만들 수 있다.
㉤ 환 R의 임의의 부분환 S에 의한 상환(quotient ring) R/S를 항상 만들 수 있다.
㉥ 벡터공간 V의 임의의 부분공간 W에 의한 상공간(quotient space) V/W를 항상 만들 수 있다.

① ㉠, ㉣　　② ㉡, ㉤
③ ㉢, ㉥　　④ ㉠, ㉡, ㉢

34. 실계수 삼차방정식 $x^3+px^2+qx+1=0$이 두 허근 α, α^2을 가질 때, 이 두 허근의 곱은? [1995-9]

① -1　　② $\frac{\sqrt{3}}{2}$

③ 1　　④ 2

35. 이차방정식 $x^2+2ax+a=0$(a는 실수)이 허근을 갖고, 그 허근의 3제곱이 실수가 되게 하는 a의 값은? [1994-17]

① $\frac{1}{4}$　　② $\frac{2}{3}$

③ $\frac{3}{5}$　　④ $\frac{5}{6}$

[실해석학]

〈미적분학(편도함수 · 다중적분)〉

1. 함수 $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$을 $f(x,y)=x^4+y^4-xy^2$이라 하자. $t\neq 0$인 상수 t에 대하여 직선 $y=tx$와 등위곡선(level curve) $f(x,y)=0$의 원점 이외의 교점을 구하시오.
   또한 영역 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f(x,y)\le 0,\ y\ge 0\}$의 넓이를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형A-8] [2026]

   ※ 다음은 필요하면 사용할 수 있다.

$$\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^4}=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$$

2. 좌표평면의 영역 D를
   $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1\le xy\le 1,\ a\le x\le a+1\}$ (단, a는 양수)
   이라 하고, 이 영역의 경계를 시계반대방향으로 한 바퀴 도는 곡선을 C라고 하자. 영역 D의 넓이가 $2\ln 2$일 때, a의 값과 선적분
$$\int_C (2x-y)dx+(2x-y)dy$$
   의 값을 순서대로 구하시오. [2점, 기입형A-2] [2025]

3. 극방정식(polar equation) $r=1-\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$ $(0\le\theta\le 2\pi)$로 주어진 평면곡선(plane curve)의 길이와 전곡률(total curvature)의 값을 순서대로 구하시오. (단, 곡선의 방향은 시계반대방향으로 주어져 있다.) [2점, 기입형B-2] [2025]

4. 좌표평면의 영역
   $D(t)=\{(x,y)\mid x\ge 0,\ y\ge 0,\ x^2+y^2\le 1,\ x+y\ge t\}$ $\quad(0\le t\le 1)$
   과 함수 $f(x,y)=\sqrt{|8x^2+8y^2-1|}$에 대하여
   $g(t)=\displaystyle\iint_{D(t)} f(x,y)\,dxdy$라 하자.
   $g(0)$과 $g'\left(\dfrac{1}{2}\right)$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형A-7] [2024]

5. 실수 a에 대하여 좌표평면의 영역 $D(a)$를
$$D(a)=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le(1+a)^2\}$$
   이라 할 때, 중적분 $\displaystyle\iint_{D(a)}(x^2+y^2)\,dA$를 구하시오.
   또한 좌표공간의 영역 Ω를
$$\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\le(1+z)^2,\ 0\le z\le 1\}$$
   이라 할 때, 삼중적분 $\displaystyle\iiint_{\Omega} z(x^2+y^2)\,dV$의 값을 구하시오. [2점, 기입형A-2] [2023]

6. 실수 t에 대하여

$$g(t)=\frac{1}{\pi}\iint_D (x^2+y^2+1)^t\,dxdy$$

라 할 때, $g(-2)$와 $\lim_{t\to 0} g(t)^{\frac{1}{t}}$의 값을 순서대로 쓰시오.

(단, $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\}$이다.) [2점, 기입형A-2] [2022]

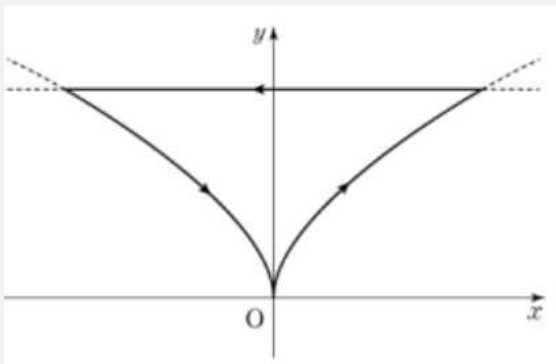
7. 함수 $f(x,y)=\dfrac{x^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}$에 대하여 다음 적분의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\int_{\sqrt{1-y^2}}^{y}(f(x,y)-\lfloor x+y\rfloor)dxdy$$

$$+\int_1^{\sqrt{2}}\int_0^y f(x,y)dxdy+\int_{\sqrt{2}}^{2}\int_0^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)dxdy$$

(단, $\lfloor x\rfloor$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.) [4점, 서술형A-5] [2021]

8. 좌표평면에서 곡선 $y^3=x^2$과 직선 $y=1$로 둘러싸인 부분을 D라 하고 영역 D의 경계(boundary)를 시계반대방향으로 한 바퀴 도는 곡선을 C라 하자. 영역 D의 넓이와 선적분 $\int_C -ydx+xdy$의 값을 각각 구하시오. [2점, 기입형A-2] [2020]



9. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 영역 D_n이

$$D_n=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-y)^2+x^2\le n\}$$

일 때, 다음 극한값을 구하시오. [2점, 기입형A-4] [2019]

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} e^{-\lfloor (x-y)^2+x^2\rfloor}\,dxdy$$

(단, $\lfloor x\rfloor$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

10. 좌표평면에서 영역 A가

$$A=\{(x,\,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\ge 0,\, y\ge 0,\, 1\le x+y\le 3\}$$

일 때, 변수변환 $2x=u+v,\ 2y=u-v$를 사용하여 중적분

$$\iint_A \frac{1}{x+y}e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dxdy$$

의 값을 구하시오. [2점, 기입형A-4] [2018]

11. 좌표평면에서 영역 D가

$$D=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x^2\}$$

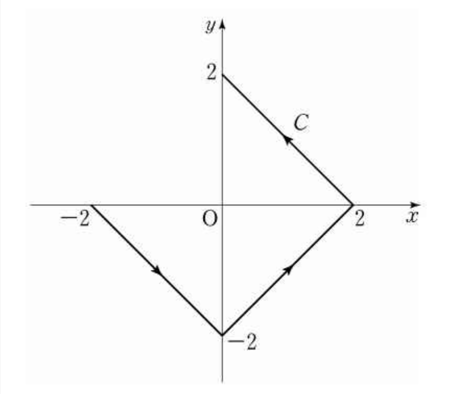
일 때, 중적분 $\iint_D 3\cos(x^3)dA$의 값을 구하시오. [2점, 기입형A-4] [2017]

12. 좌표평면의 영역

$$D=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\,|\,0\le x\le 4,\ 0\le y\le 4,\ x+y\le 4\}$$

에서 함수 $f(x,y)=4x-2xy+y^2$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. [2점, 기입형A-5] [2017]

13. 그림과 같이 좌표평면에서 곡선 C는 점 $(-2,0)$에서 시작하여 점 $(0,-2)$와 점 $(2,0)$을 지나 점 $(0,2)$까지 선분으로 연결한 경로이다. $\int_C (3+ye^x)dx+e^x dy$의 값을 구하시오. [2점, 기입형A-4] [2016]



14. 좌표평면에서 영역 D가

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|0\le x\le 2, 0\le y\le 9\}$$

일 때, 함수 $f:D\to\mathbb{R}$를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x,y)=\begin{cases} y & ,\ y\ge \sin\sqrt{x} \\ \sin\sqrt{x} & ,\ y<\sin\sqrt{x} \end{cases}$$

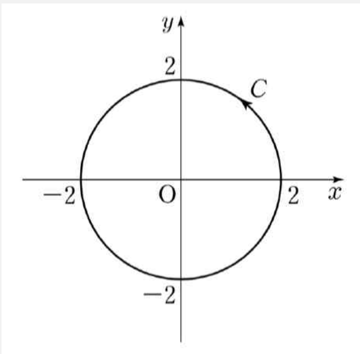
두 반복적분의 합

$$\int_0^2\int_0^9 f(x,y)dydx+\int_0^2\int_0^{\sin\sqrt{x}}(y-\sin\sqrt{x})dydx$$

의 값을 구하시오. [2점, 기입형A-5] [2016]

15. 다음 그림과 같이 반시계 방향의 단순닫힌곡선(simple closed curve) C : $x^2+y^2=4$가 주어졌을 때,

$\int_C (e^{\sin x}-4x^2y)dx+(e^{\cos y}+4xy^2)dy$의 값을 구하시오. [2점, 기입형A-2] [2015]



16. 매개변수방정식 $x=4t-t^2$, $y=t^2+1(0\le t\le 1)$로 주어진 곡선 $y=f(x)$가 있다. 이 곡선 위의 두 점 $(0,f(0))$, $(3,f(3))$을 연결하는 직선의 기울기와 곡선 위의 점 $(c,f(c))$에서의 접선의 기울기가 같게 되는 값 c를 구간 $(0,3)$에서 구하시오. [2점, 기입형A-3] [2015]

17. 반복적분 $\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1 7y^2\sin(x^7)dx\,dy$의 값을 구하시오. [2점, 기입형A-7] [2014]

18. 좌표평면에서 영역 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$일 때, 다음 이중적분의 값은? [2점] [2011-28]

$$\iint_D \frac{|y|}{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}\,dxdy$$

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

19. 3차원 공간 $\mathbb{R}^3$에서 영역

$$D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x^2+y^2+\frac{z^2}{4}\le 1\right\}$$

일 때, 다음 삼중적분의 값은? [1.5점] [2010-34]

$$\iiint_D z^2\,dx\,dy\,dz$$

① $\frac{64}{15}\pi$ ② $\frac{32}{15}\pi$ ③ $\frac{16}{15}\pi$

④ $\frac{8}{15}\pi$ ⑤ $\frac{4}{15}\pi$

20. 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=4$ 위를 반시계방향으로 한 바퀴 도는 곡선을 C라 할 때, 다음 선적분의 값은? [2점] [2009-28]

$$\int_C (3+yx^2)dx+(2-xy^2)dy$$

① 4π ② -4π ③ $-\frac{16\pi}{3}$

④ $\frac{16\pi}{3}$ ⑤ -8π

21. 좌표평면에서 세 점 $(0,0)$, $\left(-\frac{1}{2},0\right)$, $(0,1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형과 그 내부를 R라고 할 때, 다음 중적분의 값은? [2점] [2009 모의-23]

$$\iint_R \sin\{(y-2x)^2\}\,dA$$

① $\frac{1}{4}(1-\cos 2)$ ② $\frac{1}{2}(1-\cos 1)$ ③ $\frac{1}{4}(1-\cos 1)$

④ $\frac{1}{2}(1-\sin 2)$ ⑤ $-\frac{1}{4}(1-\cos 1)$

22. $R=\{(x,y)|1\le xy\le 2,\ 1\le xy^2\le 3\}$ 일 때, 중적분 $\iint_R y\,dA$를 구하시오. [5점] [1999 추시-7]

23. 반복적분

$$I=\int_0^1\int_{y^{\frac{1}{3}}}^1 6\sqrt{1+x^4}\,dxdy$$

의 값을 구하시오. [4점] [1999-6]

24. $\mathbb{R}^3$공간에서 $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1$로 둘러싸인 정육면체 V의 표면을 S라 두고, 벡터장

$$F=2xz\boldsymbol{i}-y^2\boldsymbol{j}+yz^2\boldsymbol{k}$$

일 때, 면적분 $\int\int_S F\cdot \boldsymbol{n}dS$의 값을 구하시오. (단, $\boldsymbol{i}=(1,0,0)$, $\boldsymbol{j}=(0,1,0)$, $\boldsymbol{k}=(0,0,1)$ 이고, $\boldsymbol{n}$은 V의 외부 쪽을 향하는 S의 단위 법선벡터) [5점] [1999-13]

25. 어떤 학생이 반지름이 r인 구의 겉넓이를 계산하였다. 구의 중심을 원점에 놓고 높이가 x일 때 단면의 둘레의 길이를 계산해 보니 $2\pi\sqrt{r^2-x^2}$ 이었다. 따라서 구의 겉넓이는 $2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx=2\pi r\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=\pi^2r^2$이다. 그러나 겉넓이는 $4\pi r^2$이다. 오류를 지적하고 올바른 계산 방법을 제시하시오. [1997 모의-8]

26. 영역 D가 $0\le y\le x^2$, $0\le x\le 1$일 때 $\int_D e^{\frac{y}{x}}dydx$의 값은? [1993-1]

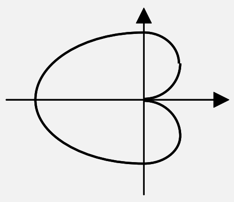
① $\frac{1}{4}$　　② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{2}$　　④ 1

27. [그림]과 같은 곡선 $r=1-\cos\theta$로 둘러싸인 도형의 면적은? [1993-9]

① $\frac{1}{4}\pi$　　② $\frac{1}{2}\pi$

③ π　　④ $\frac{3}{2}\pi$



28. $xy=\frac{1}{2}$과 $|x+y|=2\sqrt{2}$로 둘러싸인 도형을 $y=x$를 축으로 회전시킬 때 생기는 입체의 체적은? [1993-18]

① $\frac{2}{3}\pi$　　② $\frac{4}{3}\pi$

③ 2π　　④ $\frac{8}{3}\pi$

<실수체계 · 수열 · 연속 · 미분 · 적분>

1. 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$을

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

이라 하고, $S=\left\{\dfrac{f(x)}{x}\,\middle|\, x\text{는 양의 실수}\right\}$라 하자. 집합 S의 상한(supremum)과 하한(infimum)을 순서대로 구하시오.

또한 $\displaystyle\lim_{s\to 0+}\int_0^1 \frac{f(x)}{s}e^{-\frac{x^2}{s^2}}dx$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B-10] [2026]

2. 실수 p에 대하여 함수 $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$이

$$f(x)=\begin{cases} x^p\cos\dfrac{1}{x}, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

이라고 하자. $p=\dfrac{1}{3}$일 때, 함수 f가 $x=0$에서 연속인지를 판별하고 그 이유를 쓰시오.

또한 $p=-1$일 때, 임의의 양수 L에 대하여 $f(x_0)=L$을 만족시키는 x_0이 존재함을 증명하시오. [4점, 서술형A-12] [2025]

3. 구간 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수 $f(x)=\tan x$의 역함수를 $g:\mathbb{R}\to\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$라 하자. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\left\{g\left(1+\frac{3}{n}\right)-g(1)\right\}$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.

또한 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{g(x)}{1+x^2}\,dx$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B-7] [2023]

4. 연속함수 $f:[0,1]\to[0,1]$은 $(0,1)$에서 미분가능하다.
모든 $x\in(0,1)$에 대하여 $f'(x)\neq 1$일 때, $f(a)=a\ (0\le a\le 1)$을 만족하는 a가 유일하게 존재함을 증명하시오. [4점, 서술형B-7] [2021]

5. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 f에 대하여

$$S=\{x\mid f(x)=0,\ -1\le x\le 1\}$$

라 하자. 다음 명제 P의 대우명제를 쓰고, P를 증명하시오. [4점, 서술형A-12] [2020]

P: 모든 $x\in\mathbb{R}$에 대하여 $f(x)\neq 0$이거나 $f'(x)\neq 0$이면 S는 유한집합이다.

6. 다음과 같이 정의된 함수 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$가 $(0,0)$에서 연속이 되도록 하는 자연수 n의 최솟값을 구하시오. [2점, 기입형A-3] [2019]

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^n y^n}{x^{30}+y^{30}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

7. 실수열 $\{a_n\}$을

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = (2a_n^2 + 1)^{\frac{1}{5}}\ \ (n \geq 1)$$

로 정의하자. 모든 자연수 n에 대하여 $1 \leq a_n \leq 2$임을 보이고, 수열 $\{a_n\}$이 수렴함을 보이시오. [5점, 서술형B-7] [2019]

8. $f(0) = f'(0) = 0$인 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$에 대하여 함수 g를

$$g(x) = \begin{cases} f(x)\cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

이라 하자. 함수 g가 $x = 0$에서 미분가능함을 보이고, $g'(0)$의 값을 구하시오. [4점, 서술형A-11] [2018]

9. 이차함수 $f(x) = \dfrac{1}{2}(x-10)^2$과 양의 정수 n에 대하여 a_n을 특이적분(이상적분, improper integral) $\displaystyle\int_1^\infty (f(n))^t dt$의 수렴 또는 발산에 따라 다음과 같이 정의하자.

$$a_n = \begin{cases} \displaystyle\int_1^\infty (f(n))^t dt, & \displaystyle\int_1^\infty (f(n))^t dt\text{가 수렴} \\ 0, & \displaystyle\int_1^\infty (f(n))^t dt\text{가 발산} \end{cases}$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^\infty a_n$의 값을 구하시오. [2점, 기입형A-3] [2016]

10. 함수 $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$가 구간 $[0, \infty)$에서 미분가능하다. 모든 점 $x \in [0, \infty)$에 대하여 $|f'(x)| \leq M$이고 $f(0) > 0$일 때, $f(x) \leq f(0) + Mx$임을 보이시오. 또한 $0 \leq M < 1$이면 방정식 $f(x) = x$는 단 하나의 해를 가짐을 보이시오. (단, M은 상수이다.) [4점, 서술형A-11] [2016]

11. 다음을 읽고 물음에 답하시오.

> 유계인 닫힌구간 $[a, b]$에서 유계함수
> $f : [a, b] \to \mathbb{R}$와 $[a, b]$의 분할 P에 대한 하합(lower sum)과 상합(upper sum)을 각각 $L(f, P)$, $U(f, P)$로 나타내고,
>
> $$A = \sup\{L(f, P) \mid P\text{는 } [a, b]\text{의 분할}\}$$
> $$B = \inf\{U(f, P) \mid P\text{는 } [a, b]\text{의 분할}\}$$
>
> 이라 두자. 이때 $[a, b]$의 임의의 분할 P, Q에 대하여 $L(f, P) \leq U(f, Q)$이므로
>
> $$A \leq B \cdots(\text{가})$$
>
> 가 성립한다. 만약
>
> $$A \geq B \cdots(\text{나})$$
>
> 도 성립하면 f는 $[a, b]$에서 리만적분가능하다고 한다. 한편, 고등학교 교과서에서는 "함수 f가 $[a, b]$에서 연속이면 극한
>
> $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x\left(\Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_k = a + k\Delta x\right)\cdots(\text{다})$$
>
> 는 항상 존재함이 알려져 있다." 라고 설명하고 이 극한을 정적분의 정의로 사용하고 있다.

부등식 (가)를 증명하고, $[a, b]$에서 정의된 연속함수 f에 대하여 (나)가 성립함을 증명하시오. 그리고 이를 토대로 $[a, b]$에서 정의된 연속함수 f의 경우, (다)의 극한 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x$가 존재함을 보이시오. [10점, 논술형B-2] [2015]

12. 양수 $r>0$에 대하여 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x)=\begin{cases} x^6\sin\dfrac{1}{x^r}+x^r\sin\dfrac{1}{x^2}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

함수 f의 도함수 f'이 $x=0$에서 연속이기 위한 필요충분조건을 r에 대한 부등식으로 나타내시오. [2점, 기입형A-9] [2014]

13. 연속함수 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$에 대해 집합 $\{f(x)|x\in[0,1]\}$의 상한(최소상계, supremum, least upper bound) M이 존재한다. <정리 1>을 증명 없이 이용하여 $f(x^*)=M$을 만족하는 $x^*\in[0,1]$이 존재함을 증명하시오. [4점, 서술형A-4] [2014]

<정리 1>

유계인 실수열은 수렴하는 부분수열을 갖는다.

14. 수렴하는 이상적분(특이적분, improper integral)만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2013-22]

<보기>

ㄱ. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x+1}{x\sqrt{x^4+1}}dx$

ㄴ. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{\ln x}dx$

ㄷ. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x+\sqrt{1-\sin x}}dx$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

15. 정의역이 실수 전체의 집합인 함수

$$f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & (x\ne 0) \\ \dfrac{1}{2} & (x=0) \end{cases}$$

에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2013-23]

<보기>

ㄱ. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$이고 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(0)$인 순감소(strictly decreasing) 수열 $\{x_n\}$이 존재한다.

ㄴ. $f(a)<\gamma<f(b)$이면 $f(c)=\gamma$를 만족시키는 c가 a와 b사이에 존재한다.

ㄷ. 함수 $g(x)=xf(x)$는 구간 $(0,1)$에서 균등연속 (평등연속, 고른연속, uniformly continuous)이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 f에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2013-24]

<보기>

ㄱ. 모든 양수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$이면 $f'(0)=0$이다.

ㄴ. $f(1)-f(0)=\dfrac{f'(c)}{2c}$를 만족시키는 실수 c가 0과 1 사이에 존재한다.

ㄷ. $(f')^3$이 단조증가(monotone increasing)함수이면 f'은 연속함수이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 실수열 $\{a_n\}$에 대하여, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2013-26]

<보기>

ㄱ. $\{a_n\}$이 유계(bounded)이고 실수열 $\{b_n\}$이 코시수열(Cauchy sequence)이면 $\{a_n b_n\}$은 코시수열이다.

ㄴ. $\{a_n\}$이 유계이고 수렴하지 않으면, $\{a_n\}$의 수렴하는 부분수열(subsequence)중 $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} \neq \lim_{k\to\infty} a_{m_k}$인 부분수열 $\{a_{n_k}\}$, $\{a_{m_k}\}$가 존재한다.

ㄷ. $\{a_n\}$의 상극한(limit superior, $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$, $\lim_{n\to\infty}\sup a_n$)이 1이면, 임의의 $\varepsilon > 0$에 대하여 $a_n < 1-\varepsilon$을 만족시키는 n의 개수는 유한하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

18. 양의 실수 t에 대하여 함수 f를

$$f(t) = \int_0^{\sqrt{t}} \int_y^{\sqrt{t}} \frac{1}{2+\sin(x^2)} dx dy$$

로 정의할 때, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$의 값은? [2점] [2012-23]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

19. 열린구간 $(0, 1)$에서 미분가능한 함수 $f:(0,1)\to\mathbb{R}$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2012-25]

<보기>

ㄱ. f의 도함수 f'은 연속이다.

ㄴ. 모든 $x\in(0,1)$에 대하여 $f'(x)<0$이면 f의 역함수 $f^{-1}:D\to(0,1)$이 존재한다. (단, D는 f의 치역이다.)

ㄷ. f의 역함수 $f^{-1}:D\to(0,1)$이 존재하면 f^{-1}는 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2012-27]

<보기>

ㄱ. 특이적분(이상적분, improper integral) $\int_0^1 \ln x dx$가 수렴한다.

ㄴ. 닫힌구간 $[0,1]$에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x\in[0,1]\cap\mathbb{Q} \\ 0, & x\in[0,1]-\mathbb{Q} \end{cases}$$

는 $[0,1]$에서 리만(Riemann)적분가능하다.

ㄷ. $[0,1]$에서 적분가능한 함수 f에 대하여

$$F(x) = \int_0^x f(y)dy$$

로 정의된 함수 F는 열린구간 $(0,1)$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$를

$$f(x)=\int_{1+2x}^{1-2x}\left(1-t^3\sqrt{1+3t^2}\right)dt$$

로 정의할 때, $f'(0)$의 값은? (단, $\mathbb{R}$는 실수 전체의 집합이다.) [2점] [2011-23]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

22. 실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 모두 고른 것은? [2점] [2011-25]

<보기>

ㄱ. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가 연속함수이고 실수열 $\{x_n\}$이 코시수열(Cauchy sequence)이면 $\{f(x_n)\}$도 코시수열이다.
ㄴ. 함수 $g:[0,1]\to[0,1]$에 대하여 합성함수 $g\circ g$가 연속함수이면 g도 연속함수이다.
ㄷ. $h:[0.1]\to\mathbb{R}$가 연속인 단사함수이면 역함수 $h^{-1}:h([0,1])\to[0,1]$도 연속함수이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

23. 실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$라 하고 복소수 전체의 집합을 $\mathbb{C}$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 모두 고른 것은? [2점] [2011-26]

<보기>

ㄱ. 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$를

$$f(x)=\begin{cases} x+x^2, & x\text{는 유리수} \\ x\cos x, & x\text{는 무리수}\end{cases}$$

로 정의하면 f는 $x=0$에서 미분가능하다.
ㄴ. 해석함수(analytic function) $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$가 모든 $z\in\mathbb{C}$에 대하여 $g'(z)\neq 0$이면 g는 단사함수이다.
ㄷ. 벡터함수 $F:[0,1]\to\mathbb{R}^2$이 연속함수이고 구간 $(0,1)$에서 미분가능하면, $F(1)-F(0)=F'(c)$를 만족시키는 점 $c\in(0,1)$이 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

24. 상수수열이 아닌 실수열 $\{x_n\}$에 대한 <보기>의 명제 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [1.5점] [2010-29]

<보기>

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right|=\dfrac{1}{3}$ 이면 수열 $\{x_n\}$은 수렴한다.
ㄴ. 집합 $\{x_n\,|\,n\text{은 자연수}\}$가 단 하나의 극한점 (집적점, limit point, cluster point, accumulation point)을 가지면 수열 $\{x_n\}$은 수렴한다.
ㄷ. 수열 $\{\sin x_n\}$은 수렴하는 부분수열을 갖는다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

25. 실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$라 할 때, <보기>에서 균등연속함수(uniformly continuous function)를 모두 고른 것은? [1.5점] [2010-30]

<보기>

ㄱ. $f:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{2x^2+3}$

ㄴ. $g:[1,\infty)\to\mathbb{R},\ g(x)=\int_1^x e^{-t^2}\,dt$

ㄷ. $h:[0,3)\to\mathbb{R},\ h(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-3}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

26. 실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$라 하자. 미분가능한 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$와 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$에 대한 <보기>의 명제 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [2.5점] [2010-32]

<보기>

ㄱ. f'이 단조함수(monotone function)이면 f'은 연속함수이다.

ㄴ. $L\in\mathbb{R}$일 때, $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=L$ 이면 $\lim_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=L$이다.

ㄷ. 어떤 점 $c\in\mathbb{R}$에서 $g'(c)>0$이라 하자. 그러면 적당한 양수 δ 가 존재해서 임의의 $x,y\in(c-\delta,\,c+\delta)$에 대하여 $x<y$이면 $g(x)<g(y)$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

27. 다음은 실수 e에 관한 두 교사의 대화이다. 물음에 답하시오. [2010 2차, 2교시-3-1]

김 교사: 실수 e가 무리수임을 무한급수를 이용해 보일 수 있습니다. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$으로 정의되는 수 e가 무리수임을 증명하려면, 먼저 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$이 수렴함을 보여야 합니다. 한편 무한급수 $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$이 수렴하고 그 합이 e와 같음을 보일 수 있습니다. 이 사실에 귀류법을 적용하면 ①$\underline{e\text{가 무리수}}$임을 증명할 수 있습니다.

정 교사: 실수 e와 관련된 내용 중, 표준정규분포의 확률밀도함수에 대한 특이적분(improper integral) ②$\underline{\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx=1}$을 이중적분(double integral)의 성질을 사용하여 증명할 수 있습니다.

김 교사와 정 교사가 제시한 방법에 따라 밑줄 친 ①과 ②를 각각 증명하시오. [20점]

28. <보기>에 주어진 x_n을 일반항으로 하는 실수열 중 수렴하는 수열을 모두 고른 것은? [1.5점] [2009-23]

<보기>

ㄱ. $x_n = (n+1)^{\frac{1}{\log(n+1)}}$

ㄴ. $x_n = \frac{(n+1)^n}{n!}$

ㄷ. $x_n = \frac{1+na}{(1+a)^n}$ (단, a는 양의 실수)

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

29. 닫힌구간(폐구간) $[-1, 1]$에서 정의된 실함수 f, g, h에 대한 설명으로 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2점] [2009-24]

<보기>

유리수 전체의 집합을 $\mathbb{Q}$라 할 때,

ㄱ. 연속함수 f가 모든 $q \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}$에 대하여 $f(q) = 1$이면 f는 항등적으로 1이다.

ㄴ. 함수 g가 연속이고 $[-1, 1]$의 부분집합 S가 닫힌 집합(폐집합)이면 $g(S)$는 닫힌 집합이다.

ㄷ. $h(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q} \\ x \sin \frac{1}{x}, & x \in [-1, 1] - \mathbb{Q} \end{cases}$로 정의된 함수 h는 $x = 0$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

30. 실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$라 하자. 다음 정리의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [2점] [2009-25]

<정 리>

함수 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 미분가능하고 $f'(a) > f'(b)$이면, $f'(a) > k > f'(b)$인 실수 k에 대하여 $f'(c) = k$를 만족시키는 점 $c \in (a, b)$가 존재한다.

◇ 참고 : f가 열린구간 (a, b)에서 미분가능하고 a에서의 우미분계수와 b에서의 좌미분계수가 존재할 때 '$f : [a, b] \to \mathbb{R}$가 $[a, b]$에서 미분가능하다'라고 한다.

<증 명>

함수 $g : [a, b] \to \mathbb{R}$를 $g(x) = f(x) - kx$로 정의하면, g는 연속이므로 어떤 점 $c \in [a, b]$에서 $\boxed{\text{(가)}}$을 갖는다. 그런데 $\boxed{\text{(나)}}$이(하)므로 $g(x_1) > g(a)$와 $g(x_2) > g(b)$를 각각 만족시키는 점 x_1, $x_2 \in (a, b)$가 존재하게 되어 a와 b에서 g는 $\boxed{\text{(가)}}$을 가질 수 없다. 따라서 g는 점 $c \in (a, b)$에서 $\boxed{\text{(가)}}$를 갖고 $\boxed{\text{(다)}}$이(하)므로, $g'(c) = 0$이다. 그러므로 $f'(c) = k$를 만족시키는 점 $c \in (a, b)$가 존재한다.

	(가)	(나)	(다)
①	최솟값	g가 감소	g'이 연속
②	최댓값	$g'(a) > 0$이고 $g'(b) < 0$	g가 미분가능
③	최댓값	g가 증가	g가 미분가능
④	극댓값	$g'(a) > 0$이고 $g'(b) < 0$	g'이 연속
⑤	최솟값	$g'(a) > 0$이고 $g'(b) < 0$	g가 미분가능

31. 닫힌구간 $[a,b]$에서 정의된 실함수 f, g에 대한 설명으로 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2점] [2009-26]

<보기>

ㄱ. 임의의 x, $y\in[a,b]$에 대하여 $|f(x)-f(y)|\le|x-y|^{\frac{1}{2}}$ 을 만족하면, f는 $[a,b]$에서 리만적분가능하다.
ㄴ. $[a,b]$에서 리만적분가능한 함수의 불연속점은 기껏해야 유한개이다.
ㄷ. g^2이 $[a,b]$에서 리만적분가능하면 g도 $[a,b]$에서 리만적분가능하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

32. 실수열(sequence of real numbers)의 수렴성에 관한 설명으로 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? [1.5점] [2009 모의-24]

<보기>

ㄱ. 수열 $\{|a_n|\}$이 0이 아닌 실수로 수렴하면 $\{a_n\}$은 수렴한다.
ㄴ. 수열 $\{a_n\}$이 0이 아닌 실수로 수렴하면 $\{(-1)^n a_n\}$은 수렴하지 않는다.
ㄷ. 부분수열 $\{a_{2n}\}$과 $\{a_{2n-1}\}$이 같은 실수로 수렴하면 수열 $\{a_n\}$은 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

33. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$에서 $\mathbb{R}$로의 함수에 대한 설명으로 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2점] [2009 모의-25]

<보기>

ㄱ. 모든 점에서 불연속인 함수가 존재한다.
ㄴ. 함수 f가 점 a에서 연속이면 열린구간 $(a-\delta, a+\delta)$에 속하는 모든 점에서 f가 연속이 되는 양수 δ가 존재한다.
ㄷ. 함수 f가 점 a에서 연속이고 $f(a)>0$이면 열린구간 $(a-\delta, a+\delta)$에 속하는 모든 점에서 f의 함숫값이 양이 되는 양수 δ가 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

34. 다음 극한값 A, B, C 사이의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은? [2점] [2009 모의-27]

$$A=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$$
$$B=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_2^x e^{\sqrt{1+t^2}}\,dt$$
$$C=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots+e^{\frac{n}{n}}\right)$$

① $A<B<C$ ② $A<C<B$ ③ $B<C<A$
④ $C<A<B$ ⑤ $C<B<A$

35. 실수 집합을 $\mathbb{R}$이라 하고 폐구간 $I=[0,1]$에서 정의된 연속함수 $f:I\to\mathbb{R}$가 다음 조건을 만족한다고 하자. 임의의 $x\in I$에 대하여, 적당한 $y\in I$가 존재하여 다음이 성립한다.

$$|f(y)|\le\frac{1}{5}|f(x)|$$

이때, $f(c)=0$을 만족하는 $c\in I$가 존재함을 증명하시오. [5점] [2008-11]

36. 다음 관계식

$$\int_1^{x^2}(x^2-t)f(t)\,dt=\frac{1}{2}x^6+ax^4+x^2+a+1$$

을 만족하는 다항함수(polynomial function) $f(x)$와 상수 a를 구하시오. [4점] [2008-13]

37. 평균값 정리를 이용하여, 임의의 두 실수 x, y에 대하여 다음 식이 성립함을 보이시오. [4점] [2006-8]

$$|\sin x - \sin y| \le |x - y|$$

38. 실수 집합을 $\mathbb{R}$이라 하자. n차 다항식 x^n이 주어질 때, 함수 $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$가 연속이면 다음 식을 만족하는 $c \in [0, 1]$가 존재함을 보이시오. [5점] [2006-14]

$$(n+1)\int_0^1 f(x)x^n\,dx = f(c)$$

39. 실수 집합 $\mathbb{R}$에서 정의된 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$을 다음과 같이 정의하자.

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & , \ x\text{가 유리수} \\ 1 & , \ x\text{가 무리수} \end{cases}$$

$x=0$에서 f가 미분가능(differentiable)한지 판정하시오. [4점] [2005-13]

40. 아래와 같이 정의된 수열 $\{x_n\}$은 유계인 증가수열임을 보이고 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$의 값을 구하시오. (단 x_n은 실수이고 $x_n^k = (x_n)^k$이다.) [총 4점] [2004-8]

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_{n+1}^3 = 6x_n^2 - 8x_n \end{cases}$$

41. 폐구간 $[0, 2]$에서 정의된 함수 f가 아래와 같을 때, 다음 물음에 답하시오. [총 6점] [2004-9]

$$f(x) = \begin{cases} x, & x\text{는 유리수} \\ x^2, & x\text{는 무리수} \end{cases}$$

(1) 함수 f는 $x=1$에서 연속임을 보이시오. [3점]
(2) 함수 f의 리만(Riemann) 적분가능성을 판별하시오. [3점]

42. 함수 $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$가 연속일 때, 리만적분의 정의를 이용하여 극한

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

가 존재함을 보이시오. [5점] [2002-8]

43. 평면 $\mathbb{R}^2$상의 두 점 $x=(x_1, x_2)$와 $y=(y_1, y_2)$사이의 거리(metric)를 $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$으로 정의할 때, 행렬 $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$에 의하여 표현되는 변환 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$가 거리공간 $\mathbb{R}^2$에서 연속함수임을 밝히시오. [5점] [2001-8]

44. 정적분을 이용하여 극한값

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \cdots + \sqrt{2n}}{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}$$

의 값을 구하시오. [5점] [2001-9]

45. 연속함수 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$은 실수집합)에 대하여

$$L - \frac{1}{n} < f(x_n) < L + \frac{1}{n^2} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

을 만족하는 수열 $\{x_n\}$이 있다. 이 때, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$ 라고 하면 $f(c) = L$ 임을 보이시오. [5점] [2000-9]

46. 이상적분 $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+2\sin^2 x+x^2}}$가 수렴하는지 또는 발산하는지 판정하시오. [5점] [1999 추시-6]

47. 함수 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$에 대하여

$$\lim_{h\to 0}\frac{|f(a+h)-f(a)-L(h)|}{|h|}=0$$

이 성립한다. 단, $L:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$은 선형사상이다. 이때 $L(1)=f'(a)$이 성립함을 보이시오. [3점] [1997 모의-9]

48. 다음 문제를 해결해 보이시오. [총 7점] [1997 모의-16]

(1) $x>0$일 때, $\log(x+1)<\frac{1}{x}+\log x$ 임을 평균값의 정리를 이용하여 증명하시오.(단 log는 자연로그이다) [3점]

(2) $a>b>0$일 때 $\left(1+\frac{1}{a}\right)^{a+1}<\left(1+\frac{1}{b}\right)^{b+1}$ 을 증명하시오. [4점]

49. 폐구간 $[1,2]$에서 정의된 실함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 연속이고, $f(1)=f(2)=0$, $\int_1^2 f^2(x)dx=2$일 때, $\int_1^2 xf(x)f'(x)dx$의 값은? [1995-16]

① -2　② -1
③ 1　④ 2

50. 수열$\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=\sqrt[n]{n}$으로 주어질 때, a_n의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하면 $\frac{M}{m}$의 값은? [1995-19]

① $\sqrt[3]{3}$　② $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2}}$
③ $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[5]{5}}$　④ $\sqrt[5]{5}$

51. 정적분$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$의 값은? [1995-20]

① $\frac{\pi}{4}$　② $\frac{\pi}{3}$
③ $\frac{\pi}{2}$　④ π

52. $\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}$의 값을 구하면? [1994-11]

① $\frac{1}{\sqrt{e}}$　② $\frac{1}{2\sqrt{2}}$
③ $\frac{1}{e}$　④ $\frac{1}{2e}$

53. $x=0$의 근방에서 연속인 함수$f(x)$에 대하여 등식

$$\lim_{x\to 0}g(f(x))=g(\lim_{x\to 0}f(x))$$

를 만족시킬 수 없는 것은? [1993-10]

① $g(x)=x|x|$

② $g(x)=\begin{cases}0 & (x\ :\ \text{유리수})\\ 1 & (x\ :\ \text{무리수})\end{cases}$

③ $g(x)=e^x$

④ $g(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$

54. 함수 $f(x)=\sin^3 x+\cos^3 x$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때 $M-m$의 값은? [1993-20]

① $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\sqrt{2}$

③ 2 ④ $2\sqrt{2}$

55. 함수$f(x)=|\sin x+\cos x|$의 주기를 p라 할 때, $s=\int_0^{5p} f(x)dx$의 값은? [1993-31]

① $10\sqrt{2}$ ② $5\sqrt{2}$

③ 42 ④ $2\sqrt{2}$

56. $\tan_1 x=\tan x$, $\tan_k x=\tan(\tan_{k-1}x)(k=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$로 정의할 때 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan_{50}x}{x}=\alpha$, $\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}=\beta$라 하면 $\alpha\beta$의 값은? [1993-32]

① $-\dfrac{1}{e}$ ② $-e$

③ e ④ $\dfrac{1}{e}$

57. $\int_e^{\infty}\dfrac{1}{x(\log x)^4}dx$의 값은? [1993-33]

① 1 ② $\dfrac{1}{2}$

③ $\dfrac{1}{3}$ ④ $\dfrac{1}{4}$

58. 함수 $f(x)$는 $f(0)=0$, $\int_0^1 f(x)dx=1$을 만족하고 그 도함수 $f'(x)$는 연속이다. 이 때 구간 $[0,1]$에서의 도함수 $f'(x)$의 최댓값 M의 범위는? [1993-34]

① $M\geq 2$ ② $M\leq 2$

③ $M\geq\dfrac{1}{2}$ ④ $M\leq\dfrac{1}{2}$

59. 곡선 $y=\tan^{-1}2x$위의 x좌표가 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$인 점에서의 법선의 방정식은? (단, $|y|<\dfrac{\pi}{2}$) [1993-37]

① $y=-2x+\sqrt{3}+\dfrac{\pi}{3}$ ② $y=-2x+\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}$

③ $y=-2x-\sqrt{3}+\dfrac{\pi}{6}$ ④ $y=-2x-\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{6}$

60. n이 양의 정수이고,

$$f(n)=\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)}$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{n}$의 값은? [1993-39]

① $\dfrac{1}{e}$ ② $\dfrac{2}{e}$

③ $\dfrac{3}{e}$ ④ $\dfrac{4}{e}$

1. 자연수 n에 대하여 함수 $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 을

$$f_n(x) = \frac{x^4 + \sqrt{n}\,x^3}{n(x^2 + 2\sqrt{n}\,x + 2n)}$$

으로 정의하자. 모든 양의 실수 L에 대하여 함수항 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$가 닫힌구간 $[-L, L]$에서 고른수렴(평등수렴, 균등수렴, uniform convergence)하는지 판별하고 그 이유를 쓰시오. 또한 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$가 $\mathbb{R}$에서 연속인지 판별하고 그 이유를 쓰시오. [4점, 서술형A-10] [2026]

2. 자연수 n에 대하여 함수 $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ 이

$$f_n(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{\{n\ln(2n)\}^2} + \dfrac{1}{n^2\ln(2n)}, & 0 \le x \le \ln(2n) \\ \dfrac{1}{n^2}\sin\left(\dfrac{2\pi x}{\ln(2n)}\right), & \ln(2n) < x \le 2\ln(2n) \\ 0, & x > 2\ln(2n) \end{cases}$$

일 때, 함수항 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$가 $[0, \infty)$에서 고른수렴(평등수렴, 균등수렴, uniform convergence)함을 보이시오.

또한 $a_n = \int_0^{\infty} f_n(x)dx$라고 할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$이다.) [4점, 서술형B-10] [2025]

3. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$$

일 때, $a_{n+1} = f(n)a_n$을 만족시키는 $f(n)$을 구하고, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^{\alpha}$이 수렴하는 실수 α의 범위를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형A-10] [2024]

※ 다음 식은 필요하면 증명 없이 사용할 수 있다.

모든 자연수 n에 대하여

$$n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \le n! \le n^{n+\frac{1}{2}} e^{1-n}$$

이다.

4. 자연수 n에 대하여 함수 $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ 이

$$f_n(x) = \frac{x}{1+e^{nx}} + \sum_{k=0}^{n-1} x^k\left(e^{-kx} - e^{-(k+1)x}\right)$$

일 때, 함수열 $\{f_n\}$이 $[0, \infty)$에서 고른수렴(평등수렴, 균등수렴, uniform convergence)함을 보이시오. 또한, $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B-10] [2024]

5. 자연수 n에 대하여 함수 $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$를

$$f_n(x) = (nx)^n (1-x)^{n^2}$$

으로 정의하고, f_n의 최댓값을 M_n이라 하자. 거듭제곱 급수(멱급수, power series) $\sum_{n=1}^{\infty} M_n x^n$의 수렴반경(수렴반지름, radius of convergence)을 풀이 과정과 함께 쓰시오.

또한 함수항 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$가 $[0,1]$에서 고른수렴(평등수렴, 균등수렴, uniform convergence)하는지 판별하고 그 이유를 쓰시오. [4점, 서술형 A-11] [2023]

6. 자연수 n에 대하여 함수 $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$를

$$f_n(x) = \frac{8(\sin x)^{2n-1}\cos x}{1+(\sin x)^{2n}}$$

로 정의하자. $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+2}$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.

또한, 함수항 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$가 닫힌구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서 균등수렴(평등수렴, 고른수렴, uniform convergence)하는지를 판별하고 그 이유를 쓰시오. [4점, 서술형B-10] [2022]

7. 음이 아닌 정수 n에 대하여 함수 $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$를 다음과 같이 정의하자.

$$f_0(x) = e^x,\ f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)dt \ \ (n \geq 1)$$

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$는 $[0,1]$에서 고른수렴(평등수렴, 균등수렴, uniform convergence)함을 보이고, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$를 구하시오. [4점, 서술형A-12] [2021]

※ 다음 정리는 필요하면 증명 없이 사용할 수 있다.

함수 $g(x)$가 미분가능하면 $$\int_0^x g(t)e^{-t}dt = \left[-g(t)e^{-t}\right]_0^x + \int_0^x g'(t)e^{-t}dt$$ 이다.

8. 자연수 n에 대하여 함수 $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$을

$$g_n(x) = \int_0^x \{1+(x-y)^n \sin^n(xy)\}dy$$

로 정의하고, $a_n = \int_0^1 g_n(x)dx$라 하자. 함수열 $\{g_n\}$이 $[0,1]$에서 어떤 함수 g로 균등수렴(고른수렴, 평등수렴, uniform convergence)함을 보이고, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점, 서술형B-9] [2020]

9. 함수 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가

$$h(x) = \begin{cases} \int_0^1 \frac{x^2}{x^4+t^2}dt, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

일 때, 극한값 $\lim_{x\to 0} h(x)$를 풀이 과정과 함께 쓰시오.

또한 자연수 n에 대하여 함수 $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가

$$h_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{nx^2}{n^2x^4+k^2}$$

일 때, $\mathbb{R}$에서 함수열 $\{h_n\}$이 h로 평등수렴(균등수렴, 고른수렴, uniform convergence)하는지를 판별하고 그 이유를 쓰시오. [4점, 서술형A-11] [2019]

10. 자연수 n에 대하여 함수 $f_n : [0. \infty) \to \mathbb{R}$를

$$f_n(x) = \max\left\{0,\ \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}|x - 2n|\right)\right\}$$

으로 정의할 때,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty} f_n(x)\,dx + \int_0^{\infty}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx$$

의 값을 구하시오. (단, $\max\{a, b\}$는 a와 b 중 작지 않은 수이다.) [2점, 기입형A-3] [2018]

11. 함수항 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\tan^{-1}\frac{x}{n}$가 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$에서 점별수렴 (pointwise convergence)함을 보이시오. 또 함수 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\tan^{-1}\frac{x}{n}$는 균등연속(고른연속, 평등연속, uniformly continuous)임을 보이시오. (단, $\tan^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$는 탄젠트함수의 역함수이다.) [5점, 서술형B-7] [2018]

12. 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$는 미분가능하고 도함수 f'이 $\mathbb{R}$에서 연속이다. 자연수 n에 대하여 함수 g_n을

$$g_n(x) = 2^n\{f(x + 2^{-n}) - f(x)\}$$

라 하자. 함수열 $\{g_n\}$이 닫힌구간 $[0, 1]$에서 f'으로 평등수렴(균등수렴, 고른수렴, uniform convergence)함을 보이시오.

또한 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g_n(x)dx = f(1) - f(0)$임을 보이시오. [4점, 서술형B-4] [2017]

13. 상수함수가 아닌 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 무한 번 미분가능하고 모든 실수 x와 자연수 n에 대하여

$$|f^{(n)}(x)| \le n^2(|x| + 2)$$

를 만족시킬 때, 집합 $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0,\ |x| < 1\}$이 유한집합임을 보이시오. [5점, 서술형B-7] [2017]

※ 다음 정리들은 필요하면 증명 없이 사용할 수 있다.

(가) $c \in (a, b)$이고 함수 $f(x)$가 열린구간 (a, b)에서 $(n+1)$번 미분가능할 때,

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k,\quad R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

로 놓으면 $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$이 되는 t_x가 c와 x사이에 존재한다.

(나) 함수 $g(x)$가 $|x-c| < r$ ($r > 0$, c는 상수)인 모든 $x \in \mathbb{R}$에 대하여

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

일 때, 모든 자연수 n에 대하여 $x_n \ne c$, $g(x_n) = 0$이고 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = c$인 수열 $\{x_n\}$이 존재하면 $|x-c| < r$인 모든 $x \in \mathbb{R}$에 대하여 $g(x) = 0$이다.

14. 양의 정수 n에 대하여 함수 $f_n : [-1,\ 1] \to \mathbb{R}$를

$$f_n(x) = e^{\frac{x}{n^2}} - \cos\frac{x}{n^2}$$

로 정의 할 때, 함수급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$가 구간 $[-1,\ 1]$에서 미분가능한 함수로 평등수렴(균등수렴, 고른수렴, uniform convergence)함을 보이시오. [5점, 서술형B-4] [2016]

※ 다음 정리는 필요하면 증명 없이 사용할 수 있다.

〈정 리〉

구간 $[a,\ b]$에서 정의된 미분가능한 함수열 $\{f_n\}$에 대하여, 다음 두 조건 (가), (나)를 모두 만족하는 함수급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$는 $[a,\ b]$에서 미분가능한 함수로 평등수렴한다.

(가) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$가 수렴하는 점 $x_0 \in [a,\ b]$가 존재한다.

(나) 함수급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n{}'(x)$가 $[a,\ b]$에서 평등수렴한다.

15. 거듭제곱급수(멱급수, power series) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{5^n \sqrt{n}}$의 수렴구간을 구하시오. [2점, 기입형A-8] [2014]

16. $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 n^2 x e^{-2nx} dx$의 값을 구하시오. [2점, 기입형A-10] [2014]

17. 모든 항이 양수인 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴할 때, 수렴하는 급수만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2013-21]

<보기>

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{{a_n}^2+1}$

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}(e^{a_n}-1)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

18. 구간 $[0,1]$에서 미분가능한 함수열 $\{f_n\}$이 함수 f로 점별수렴(pointwise convergence)한다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2013-25]

<보기>

ㄱ. 함수열 $\{f_n\}$이 균등수렴(평등수렴, 고른수렴, uniform convergence)하면 f는 균등연속(평등연속, 고른연속, uniformly continuous)함수이다.

ㄴ. 함수 f가 $[0,1]$에서 리만적분가능(Riemann integrable)하면 $\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$이다.

ㄷ. 함수열 $\{f_n{}'\}$이 균등수렴하면 함수열 $\{f_n\}$도 균등수렴한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

19. 두 양수 a, b에 대하여

$$K(a,b)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}\,dt$$

를 구하시오. 그리고 실수 x에 대하여

$$s_n(x)=\sum_{m=1}^{n}K(m,2m)|x|\cos(mx),$$
$$s(x)=\lim_{n\to\infty}s_n(x)$$

라 할 때 $\int_{-\pi}^{\pi}s(x)dx$를 구하시오. [20점] [2013 2차, 2교시-4]

※ 아래 제시된 성질은 필요하면 증명 없이 사용할 수 있다.

<성 질>

(가) 복소평면에서 두 양수 a, b에 대하여
$C: z(t)=a\cos t+ib\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$일 때 $\int_C \frac{1}{z}dz=2\pi i$이다.

(나) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$

(다) 자연수 m에 대하여 $\int_0^{\pi}x\cos(mx)dx=\frac{(-1)^m-1}{m^2}$이다.

(라) 구간 I에서 정의된 함수열 $\{f_n\}$이 있다. 모든 자연수 n과 모든 $x\in I$에 대하여 $|f_n(x)|\le M_n$이고 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}M_n$이 수렴하면 함수급수 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$은 I에서 평등수렴(균등수렴, uniform convergence)한다.

(마) 닫힌구간 $[a,b]$에서 적분 가능한 함수열 $\{f_n\}$이 f로 평등수렴하면 f도 적분 가능하고 $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx$이다.

20. 멱급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(x-3)^n$을 수렴하도록 하는 정수 x의 개수는? [1.5점} [2012-22]

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

21. 연속함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$와 실수열 $\{x_n\}$에 대하여 옳지 않은 것은? [2.5점] [2012-24]

① 닫힌구간 $[0, 1]$에서 f는 균등연속(평등연속, 고른연속, uniformly continuous)이다.

② 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^3$이 수렴하면 수열 $\{f(x_n)\}$은 코시수열(Cauchy sequence)이다.

③ f가 단조증가이고 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$이 수렴하면 $\{x_n\}$은 수렴한다.

④ f가 미분가능하고 f의 도함수가 유계이면 f는 균등연속이다.

⑤ 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$이 수렴하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$도 수렴한다.

22. 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속함수열 $\{f_n\}$이 함수 f로 균등수렴(평등수렴, 고른수렴, uniform convergence)하고, 열린구간 $(0, 1)$에서 균등연속함수열 $\{g_n\}$은 함수 g로 균등수렴한다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2012-26]

<보기>

ㄱ. f는 $[0, 1]$에서 적분가능하다.
ㄴ. f와 g의 곱 fg는 $(0, 1)$에서 연속이다.
ㄷ. g는 $(0, 1)$에서 균등연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

23. 아래의 명제는 함수의 극소, 곡선의 볼록, 급수의 수렴에 대한 성질을 나타낸다. 테일러(Taylor) 정리를 이용하여 명제 (Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ)이 참임을 각각 증명하시오. [20점] [2012 2차, 1교시-2]

실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$라 하고, (a, b)를 $\mathbb{R}$의 열린 구간이라 하자.

(Ⅰ) 함수 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$가 (a, b)에서 C^4급 함수이고 $c \in (a, b)$에 대하여

$$f'(c) = f''(c) = f^{(3)}(c) = 0,\ f^{(4)}(c) > 0$$

이면, f는 $x = c$에서 극솟값(local minimum)을 갖는다.

(Ⅱ) 함수 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$가 (a, b)에서 2계도함수를 갖고 모든 $x \in (a, b)$에 대하여 $f''(x) \ge 0$이면, f는 (a, b)에서 볼록함수(convex function)이다.

(Ⅲ) 함수 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$가 (a, b)에서 C^∞급 함수이고 $c \in (a, b)$라 하자. 임의의 자연수 k에 대하여 모든 $t \in (a, b)$에서 $|f^{(k)}(t)| \le 2^k$이면, 임의의 $x \in (a, b)$에 대하여 다음 식이 성립한다.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

※ 아래의 정리는 증명 없이 사용한다.

[테일러 정리]

함수 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$가 (a, b)에서 $(n+1)$계도함수 $f^{(n+1)}$을 가질 때, $c \in (a, b)$에 대하여

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

이라 하자. 그러면 임의의 $x \in (a, b)$에 대하여 다음 식을 만족하는 점 t_x가 x와 c사이에 존재한다.

$$f(x) = p_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

<참 고>

- 함수 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$가 자연수 n에 대하여 (a, b)에서 C^n급 함수라는 것은 (a, b)에서 n계도함수 $f^{(n)}$이 존재하고 $f^{(n)}$이 연속임을 뜻한다.
- 함수 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$가 $0 \le t \le 1$을 만족하는 임의의 실수 t와 (a, b)의 임의의 두 점 x_1, x_2에 대하여 다음을 만족하면 f를 (a, b)에서 볼록함수라 한다.

  $$f((1-t)x_1 + tx_2) \le (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$
- 함수 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$가 (a, b)에서 C^∞급 함수라는 것은 모든 자연수 n에 대하여 (a, b)에서 n계도함수 $f^{(n)}$이 존재하고 $f^{(n)}$이 연속임을 뜻한다.

24. <보기>에서 옳은 것만을 모두 고른 것은? [2점] [2011-24]

<보기>

ㄱ. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^2+7}}$ 은 수렴한다.

ㄴ. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{\pi}{\sqrt{n}}$ 는 수렴한다.

ㄷ. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{4^n+12^n}x^{2n}$ 의 수렴반경은 2이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

25. 실수열 $\{r_k\}$ $(0<r_k<1,\ k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이 있다. 자연수 n에 대하여 함수 $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$를

$$f_n(x)=\begin{cases}0 & ,\ x\le r_n\\ \frac{1}{2^n} & ,\ x>r_n\end{cases}$$

로 정의하면 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$가 수렴한다. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 모두 고른 것은? (단, $\mathbb{R}$는 실수 전체의 집합이다.) [2.5점] [2011-27]

<보기>

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$은 $[0,1]$에서 균등수렴(고른수렴, 평등수렴, uniform convergence)한다.

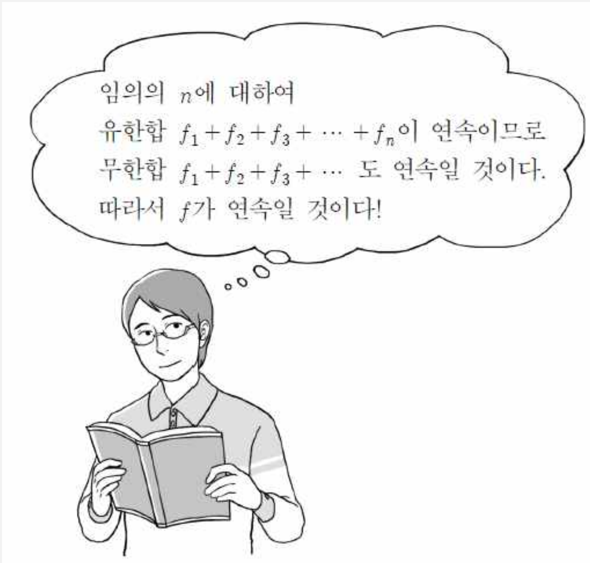
ㄴ. f는 $[0,1]-\{r_k\,|\,k$는 자연수$\}$에서 연속이다.

ㄷ. $\int_0^1 f(x)dx=f(1)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

26. 구간 $I=(-1,1)$에서 정의되고 함숫값이 실수인 연속함수열 $\{f_n\}$이 있다. 함수열 $\left\{\sum_{k=1}^{n} f_k\right\}$가 I에서 함수 f로 점별수렴(pointwise converge)할 때, 물음에 답하시오. [2011 2차, 2교시-3-2]

'함수 f는 연속함수인가' 에 대하여 경규는 다음과 같이 생각하였다.



$f_n(x)=a_n x^n$일 때, 다음 세 명제가 참임을 보이시오. [20점]

<정 리>

(Ⅰ) 모든 $x\in I$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$가 수렴한다.

(Ⅱ) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$은 구간 $[-a, a]\ (0<a<1)$에서 f로 평등수렴(균등수렴, 고른수렴, uniformly converge)한다.

(Ⅲ) f는 I에서 미분가능하고, 모든 $x\in I$에 대하여 $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n{}'(x)$이다.

※ 다음 6개의 정리는 필요하면 증명 없이 사용한다.

[정리 1] 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 수열 $\{a_n\}$은 유계이다.

[정리 2] 모든 n에 대하여 $|b_n|\le a_n$이고 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$도 수렴한다.

[정리 3] 두 거듭제곱급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$과 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$의 수렴반경은 서로 같다.

[정리 4] 연속함수 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$가 구간 (a,b)에서 미분가능하면

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$$

를 만족시키는 $c\in(a,b)$가 존재한다.

[정리 5] 연속함수 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$에 대하여 함수 $F:[a,b]\to\mathbb{R}$를 $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$로 정의하면 F는 구간 (a,b)에서 미분가능하고 $F'=f$이다.

[정리 6] 구간 I에서 정의된 함수열 $\{f_n\}$에 대하여 다음을 만족시키는 수열 $\{M_n\}$이 존재하면 함수급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$은 I에서 평등수렴한다.

> 모든 자연수 n과 모든 $x\in I$에 대하여 $|f_n(x)|\le M_n$이고 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$이 수렴한다.

27. 실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$라 하자. 자연수 n에 대하여 함수 $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$와 $g_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$를 각각

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{n^2}, & x \le n \\ 0, & x > n \end{cases}, \quad g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-kx}}{k^3}$$

로 정의할 때, 함수열 $\{f_n\}$과 $\{g_n\}$에 대한 <보기>의 명제 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [2.5점] [2010-33]

<보기>

ㄱ. $\{f_n\}$과 $\{g_n\}$은 모두 균등수렴(평등수렴, 고른수렴, uniform convergence)한다.

ㄴ. $\{f_n\}$의 극한함수를 f라 하면 수열 $\left\{\int_0^\infty f_n(x)\,dx\right\}$는 $\int_0^\infty f(x)\,dx$로 수렴한다.

ㄷ. $\{g_n\}$의 극한함수를 g라 하면 $\{g_n'\}$은 g'으로 점별수렴(pointwise convergence)한다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

28. 실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$라 하자. 자연수 n에 대하여 $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$와 $g_n : \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}$를 각각

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x^2+k^3}, \quad g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 x}$$

로 정의할 때, 함수열 $\{f_n\}$과 $\{g_n\}$에 대한 설명으로 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2.5점] [2009-27]

<보기>

ㄱ. $\{f_n\}$은 균등수렴(평등수렴, uniform convergence)한다.

ㄴ. $\{f_n\}$의 극한함수는 연속이다.

ㄷ. $\{g_n\}$은 균등수렴한다.

ㄹ. $\{g_n\}$의 극한함수는 연속이다.

① ㄱ, ㄴ ② ㄷ, ㄹ ③ ㄱ, ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄴ, ㄹ ⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

29. $|x|<1$일 때 $\dfrac{x}{(1+x)^2}$의 매클로린 급수(Maclaurin series)는? [2점] [2009 모의-26] [도움말 : $|x|<1$일 때 $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$이다.]

① $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ ② $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n!} x^n$ ④ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} nx^n$

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{n^2-n+2}{2} x^n$

30. 다음 함수열 $\{f_n\}$ 중에서

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

가 성립하지 않는 것은? [2.5점] [2009 모의-28]

① $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$ ② $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$

③ $f_n(x) = x^n$ ④ $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx^2)}{n}$

⑤ $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$

31. 매클로린(Maclaurin) 급수를 이용하여 다음 극한값을 구하시오. [4점] [2008-12]

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{(x^2\cos x\,)^{\frac{5}{2}}}$$

32. 교대급수판정법을 기술하고, 교대급수판정법을 이용하여 무한급수

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!}{(2^n\cdot n!)^2}$$

가 수렴함을 보이시오. [4점] [2007-8]

33. 다음은 테일러(Taylor) 정리와 관련된 내용이다.

> $0\in(a,b)$이고 함수 f가 (a,b)에서 무한 번 미분가능할 때, f의 n차 도함수를 $f^{(n)}$으로 나타내고
>
> $$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k,\ \ R_n(x)=f(x)-f_n(x)$$
>
> 로 놓으면
>
> $$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$
>
> 이 되는 t_x가 0과 x사이에 존재한다.

함수 $f(x)=\ln(1+x)$에 대하여 $f_n(x)$를 구하고, $R_n(x)$를 이용하여 구간 $[0,1]$에서 f_n이 f로 평등수렴(uniform convergence)함을 보이시오. [5점] [2007-19]

34. 실수 집합을 $\mathbb{R}$이라 할 때, 모든 자연수 n에 대하여 함수 f_n을 다음과 같이 정의하자.

$$f_n:[0,2]\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\frac{3x^n}{2x^n+1}$$

함수열 (f_n)의 극한함수 f를 구하고, (f_n)이 f로 평등수렴(uniform convergence)하는지 판정하시오. [4점] [2006-13]

35. 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+1)^n}$의 수렴·발산을 판정하시오. [4점] [2005-12]

36. 실수의 집합 $\mathbb{R}$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}\ , & x\neq 0 \\ 0\ \ \ \ , & x=0\end{cases}$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오. [총 5점] [2003-11]

(1) 모든 n에 대하여 n계도함수 $f^{(n)}(x)$가 존재함을 보이고, 함수 f의 $x=0$에서의 테일러급수를 구하시오. [3점]

(2) (1)의 결과를 이용하여 실함수(function of a real variable)와 복소함수(function of a complex variable)의 미분가능성이 갖는 특징의 차이를 서술하시오. [2점]

37. 함수항급수 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cos(3^n x)$ 대하여 다음 물음에 답하시오. [총 5점] [2003-12]

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cos(3^n x)$가 실수의 집합 $\mathbb{R}$에서 평등수렴(uniform convergence)함을 보이시오. [2점]

(2) $\displaystyle f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cos(3^n x)$ 라 할 때 f의 리만적분 가능성을 판별하고 $\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)dx$ 를 구하시오. [3점]

38. 자연수 n에 대하여 $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$을

$$f_n(x) = n(1-x)x^n$$

으로 정의할 때, 다음 물음에 답하여라. [총 5점] [2002-7]

(1) 함수열 $\{f_n\}$이 점별수렴(pointwise convergence)하는 함수 f를 구하시오. [3점]

(2) 함수열 $\{f_n\}$이 f로 평등수렴(uniform convergence)하는지를 판별하시오. [2점]

39. 함수 $f : [0, 1] \to R$ 가 정의역 $[0, 1]$에서 연속이고, 조건

$$\int_0^1 f(x)x^n dx = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

을 만족할 때, f는 상수함수임을 증명하시오. [5점] [1999-9]

40. 다음 급수의 수렴, 발산을 판정하시오. [5점] [1998-5]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$$

41. 실수집합 $\mathbb{R}$에서 정의된 〈보기〉의 함수열 $\{f_n\}$중에서 $f(x)$로 평등수렴(uniformly convergent)하는 것은? [1996-28]

㉠ $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$, $f(x) = 0$
㉡ $f_n(x) = \dfrac{x^2 + nx}{n}$, $f(x) = x$
㉢ $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\sin(nx + n)$, $f(x) = 0$

42. 실함수 $f(x)$가 폐구간 [-1, 1]에서 연속일 때, 다음 중 옳은 것은? (단, $n=0, 1, 2, \cdots$) [1995-14]

① $\int_{-1}^{1} f(x)dx=0$이면 $f(x)=0$이다.

② $\int_{-1}^{1} f(x)\cos x dx=0$이면 $f(x)=0$이다.

③ $\int_{-1}^{1} f(x)\sin x dx=0$이면 $f(x)=0$이다.

④ $\int_{-1}^{1} f(x)x^n dx=0$이면 $f(x)=0$이다.

43. 다음 함수 중 $f(ta+(1-t)b) \le tf(a)+(1-t)f(b)$를 만족시키지 않는 것은? (단, $0 \le t \le 1$) [1993-2]

① $f(x)=x^2$

② $f(x)=\sin x (0 \le x \le \frac{\pi}{2})$

③ $f(x)=\tan x (0 \le x \le \frac{\pi}{2})$

④ $f(x)=e^x$

44. 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$의 수렴반경은? [1993-8]

① 1

② $\frac{1}{2}$

③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{1}{4}$

45. 다음 중 수렴하지 <u>않는</u> 무한급수는? [1993-38]

① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$

④ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$

46. 테일러급수를 이용하여 무한급수

$$1+2+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+ \cdots +\frac{2^n}{n!}+ \cdots$$

의 합을 구하면? [1993-40]

① e^2

② $2e$

③ e^3

④ $3e$

[기타]

<미분방정식>

1. 미분방정식

$$X' = AX,\ \ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

의 일반해 $X = X(t)$를 구하시오. [5점] [1999 추시-8]

2. 미분방정식

$$y'' - 3y' - 4y = e^{-x}$$

의 일반해를 구하시오. [5점] [1999-11]

3. 미분방정식 $xy'' + y' = 0\,(x > 0)$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$의 해를 구하시오. [4점] [1997-10]

4. 미분방정식 $y'' - 2y' + 10y = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 1$을 만족시키는 $y = y(x)$에 대하여 $y(\pi)$는? [1996-32]

① $-e^{\pi}$ ② $-2e^{\pi}$

③ $-3e^{\pi}$ ④ $-4e^{\pi}$

5. 미분방정식 $\dfrac{d^2y}{dx^2} - xy = 0$의 일반해를 멱급수 $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ (c_n은 실수)로 나타낼 때, c_2와 c_3의 값은? [1995-21]

① $c_2 = 0,\ c_3 = \dfrac{c_0}{6}$ ② $c_2 = 0,\ c_3 = \dfrac{c_1}{6}$

③ $c_2 = 1,\ c_3 = \dfrac{c_0}{6}$ ④ $c_2 = 1,\ c_3 = \dfrac{c_1}{6}$

6. 미분방정식 $y''' - y'' - y' + y = 0$을 풀면? (아래의 c_1, c_2, c_3는 임의의 상수이다.) [1994-18]

① $y = c_1 e^{x} + (c_2 + c_3 x)e^{-x}$

② $y = c_1 e^{-x} + (c_2 + c_3 x)e^{x}$

③ $y = c_1 e^{-x} + (c_2^x + c_3 x^2)e^{x}$

④ $y = c_1 x e^{-x} + (c_2 + c_3 x)e^{x}$

7. 미분방정식 $y^2 \dfrac{dy}{dx} = xy + x$의 해는? [1993-3]

① $x^2 = (y-1)^2 + \log(y+1)^2 + c$

② $x^2 = (y-1)^2 + \log(y-1)^2 + c$

③ $x^2 = (y+1)^2 + \log(y+1)^2 + c$

④ $x^2 = (y+1)^2 + \log(y-1)^2 + c$