

# Métodos computacionales y Materia Oscura

## Una aplicación del algoritmo de Metropolis-Hastings a la Astrofísica

Christian Poveda

Universidad de los Andes

2013 - 11 - 08

# MENU

# MENU

- ▶ Que es un ajuste (fit) a una curva?
  - ▶ Método de Mínimos cuadrados
  - ▶ Cantidades para medir el error

# MENU

- ▶ Que es un ajuste (fit) a una curva?
  - ▶ Método de Mínimos cuadrados
  - ▶ Cantidades para medir el error
- ▶ Que es MCMC?
  - ▶ Algoritmo de Metropolis-Hastings
  - ▶ MCMC en Física I

# MENU

- ▶ Que es un ajuste (fit) a una curva?
  - ▶ Método de Mínimos cuadrados
  - ▶ Cantidades para medir el error
- ▶ Que es MCMC?
  - ▶ Algoritmo de Metropolis-Hastings
  - ▶ MCMC en Física I
- ▶ Que es un halo de materia oscura?

# MENU

- ▶ Que es un ajuste (fit) a una curva?
  - ▶ Método de Mínimos cuadrados
  - ▶ Cantidades para medir el error
- ▶ Que es MCMC?
  - ▶ Algoritmo de Metropolis-Hastings
  - ▶ MCMC en Física I
- ▶ Que es un halo de materia oscura?
- ▶ Perfil de Navarro-Frenk-White

# MENU

- ▶ Que es un ajuste (fit) a una curva?
  - ▶ Método de Mínimos cuadrados
  - ▶ Cantidades para medir el error
- ▶ Que es MCMC?
  - ▶ Algoritmo de Metropolis-Hastings
  - ▶ MCMC en Física I
- ▶ Que es un halo de materia oscura?
- ▶ Perfil de Navarro-Frenk-White
- ▶ El proyecto
  - ▶ Calculando el centro de un halo
  - ▶ Masa o densidad?

# MENU

- ▶ Que es un ajuste (fit) a una curva?
  - ▶ Método de Mínimos cuadrados
  - ▶ Cantidades para medir el error
- ▶ Que es MCMC?
  - ▶ Algoritmo de Metropolis-Hastings
  - ▶ MCMC en Física I
- ▶ Que es un halo de materia oscura?
- ▶ Perfil de Navarro-Frenk-White
- ▶ El proyecto
  - ▶ Calculando el centro de un halo
  - ▶ Masa o densidad?
- ▶ Conclusiones y Detalles

# Que es un fit?

## Que es un fit?

- ▶ Consiste en construir una curva que se ajuste de la menor manera posible a una serie de datos.

## Que es un fit?

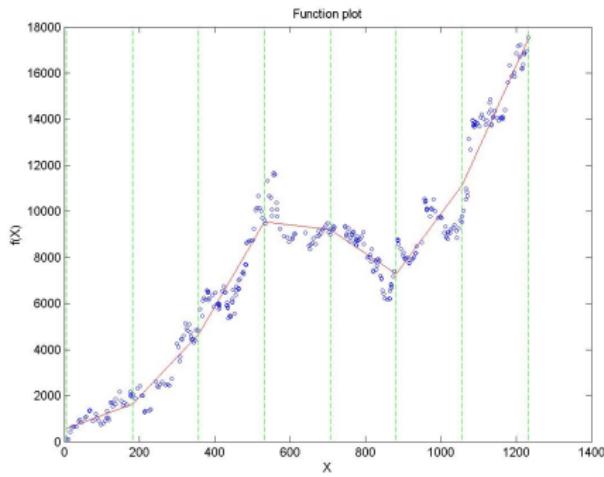
- ▶ Consiste en construir una curva que se ajuste de la menor manera posible a una serie de datos.
- ▶ Puede estar sujeto o no a ciertas restricciones (ser una curva suave, obedecer una fórmula explícita, ...).

## Que es un fit?

- ▶ Consiste en construir una curva que se ajuste de la menor manera posible a una serie de datos.
- ▶ Puede estar sujeto o no a ciertas restricciones (ser una curva suave, obedecer una fórmula explícita, ...).
- ▶ Existen varias maneras de hacer un ajuste: Interpolación, regresiones (lineales o no lineales).

# Que es un fit?

- ▶ Consiste en construir una curva que se ajuste de la menor manera posible a una serie de datos.
- ▶ Puede estar sujeto o no a ciertas restricciones (ser una curva suave, obedecer una fórmula explícita, ...).
- ▶ Existen varias maneras de hacer un ajuste: Interpolación, regresiones (lineales o no lineales).



# Método de Mínimos cuadrados

# Método de Mínimos cuadrados

- ▶ Fue inventado por Gauss.

# Método de Mínimos cuadrados

- ▶ Fue inventado por Gauss.
- ▶ Consiste en minimizar la suma de los errores al cuadrado (de ahí su nombre).

# Método de Mínimos cuadrados

- ▶ Fue inventado por Gauss.
- ▶ Consiste en minimizar la suma de los errores al cuadrado (de ahí su nombre).
- ▶ Lo "usamos" en los cursos de laboratorios de la universidad (Fisica I, Fisica II, Ondas?).

# Método de Mínimos cuadrados

- ▶ Fue inventado por Gauss.
- ▶ Consiste en minimizar la suma de los errores al cuadrado (de ahí su nombre).
- ▶ Lo "usamos" en los cursos de laboratorios de la universidad (Fisica I, Fisica II, Ondas?).



# Cantidades para medir el error

## Cantidades para medir el error

- ▶ El chi cuadrado ( $\chi^2$ ) es

## Cantidades para medir el error

- ▶ El chi cuadrado ( $\chi^2$ ) es

$$\chi^2 := \sum_i (x_i^{datos} - x_i^{modelo})^2$$

## Cantidades para medir el error

- ▶ El chi cuadrado ( $\chi^2$ ) es

$$\chi^2 := \sum_i (x_i^{datos} - x_i^{modelo})^2$$

- ▶ La verosimilitud ( $\mathcal{L}$ ) es

## Cantidades para medir el error

- ▶ El chi cuadrado ( $\chi^2$ ) es

$$\chi^2 := \sum_i (x_i^{datos} - x_i^{modelo})^2$$

- ▶ La verosimilitud ( $\mathcal{L}$ ) es

$$\mathcal{L} := \exp \left[ -\frac{1}{2} \chi^2 \right]$$

## Cantidades para medir el error

- ▶ El chi cuadrado ( $\chi^2$ ) es

$$\chi^2 := \sum_i (x_i^{datos} - x_i^{modelo})^2$$

- ▶ La verosimilitud ( $\mathcal{L}$ ) es

$$\mathcal{L} := \exp \left[ -\frac{1}{2} \chi^2 \right]$$

- ▶ Nos dice que tan desviado está un modelo de los datos originales.

## Cantidades para medir el error

- ▶ El chi cuadrado ( $\chi^2$ ) es

$$\chi^2 := \sum_i (x_i^{datos} - x_i^{modelo})^2$$

- ▶ La verosimilitud ( $\mathcal{L}$ ) es

$$\mathcal{L} := \exp \left[ -\frac{1}{2} \chi^2 \right]$$

- ▶ Nos dice que tan desviado está un modelo de los datos originales.
- ▶  $\mathcal{L} \leq 1$ , y si  $\mathcal{L} = 1$  entonces  $x_i^{datos} = x_i^{modelo}$  para todo  $i$ .

## Cantidades para medir el error

- ▶ El chi cuadrado ( $\chi^2$ ) es

$$\chi^2 := \sum_i (x_i^{datos} - x_i^{modelo})^2$$

- ▶ La verosimilitud ( $\mathcal{L}$ ) es

$$\mathcal{L} := \exp \left[ -\frac{1}{2} \chi^2 \right]$$

- ▶ Nos dice que tan desviado está un modelo de los datos originales.
- ▶  $\mathcal{L} \leq 1$ , y si  $\mathcal{L} = 1$  entonces  $x_i^{datos} = x_i^{modelo}$  para todo  $i$ .
- ▶ Maximizar verosimilitud  $\iff$  Mínimizar el error.

## Cantidades para medir el error

- ▶ El chi cuadrado ( $\chi^2$ ) es

$$\chi^2 := \sum_i (x_i^{datos} - x_i^{modelo})^2$$

- ▶ La verosimilitud ( $\mathcal{L}$ ) es

$$\mathcal{L} := \exp \left[ -\frac{1}{2} \chi^2 \right]$$

- ▶ Nos dice que tan desviado está un modelo de los datos originales.
- ▶  $\mathcal{L} \leq 1$ , y si  $\mathcal{L} = 1$  entonces  $x_i^{datos} = x_i^{modelo}$  para todo  $i$ .
- ▶ Maximizar verosimilitud  $\iff$  Minimizar el error.
- ▶  $\mathcal{L}$  es proporcional a la probabilidad de que dada una serie de datos, un modelo sea correcto.

# Que es MCMC?

# Que es MCMC?

- ▶ MCMC: Markov Chain Monte Carlo.

# Que es MCMC?

- ▶ MCMC: Markov Chain Monte Carlo.
- ▶ Cadena de Markov: Un proceso donde cada estado solo depende del estado justamente anterior.

# Que es MCMC?

- ▶ MCMC: Markov Chain Monte Carlo.
- ▶ Cadena de Markov: Un proceso donde cada estado solo depende del estado justamente anterior.
- ▶ Monte Carlo: Método computacional donde se obtienen resultados a partir de muestreros aleatorios.

# Que es MCMC?

- ▶ MCMC: Markov Chain Monte Carlo.
- ▶ Cadena de Markov: Un proceso donde cada estado solo depende del estado justamente anterior.
- ▶ Monte Carlo: Método computacional donde se obtienen resultados a partir de muestreros aleatorios.



# Algoritmo de Metropolis-Hastings

# Algoritmo de Metropolis-Hastings

- ▶ Es un método MCMC.

# Algoritmo de Metropolis-Hastings

- ▶ Es un método MCMC.
- ▶ Sirve para muestrear funciones de probabilidad a partir de la densidad de probabilidad.

# Algoritmo de Metropolis-Hastings

- ▶ Es un método MCMC.
- ▶ Sirve para muestrear funciones de probabilidad a partir de la densidad de probabilidad.
- ▶ Podemos muestrear la verosimilitud con este algoritmo.

# Algoritmo de Metropolis-Hastings

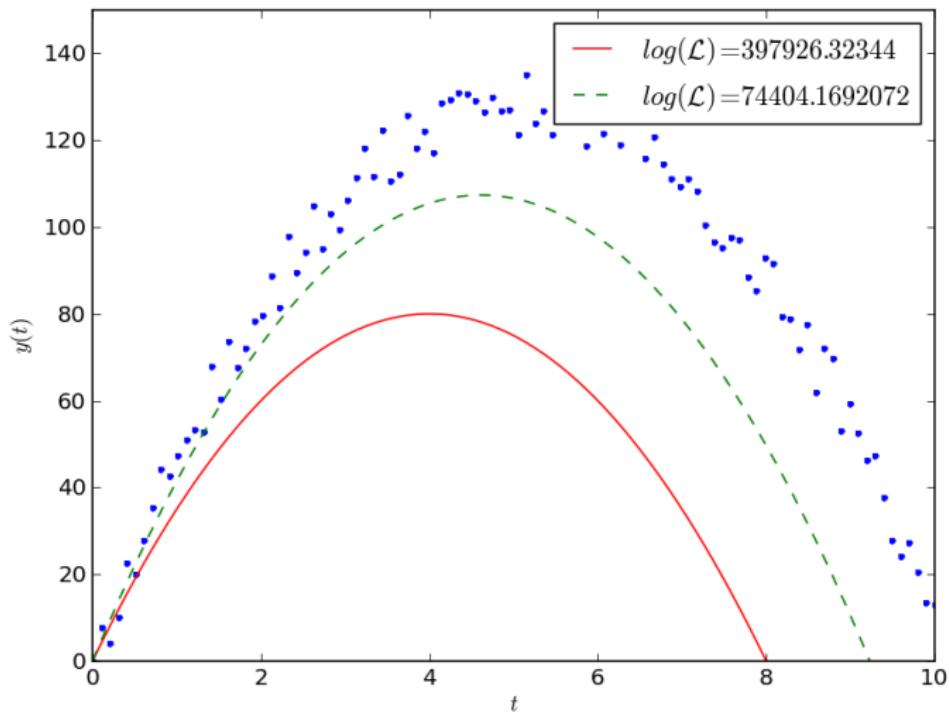
- ▶ Es un método MCMC.
- ▶ Sirve para muestrear funciones de probabilidad a partir de la densidad de probabilidad.
- ▶ Podemos muestrear la verosimilitud con este algoritmo.

Veamos un Ejemplo!

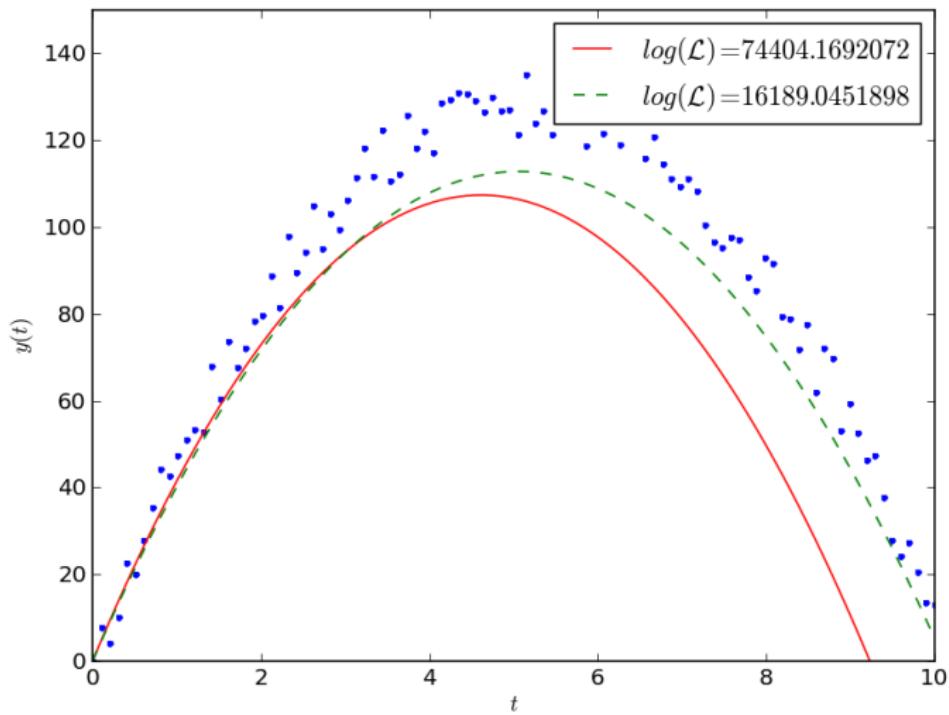
$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0$$

$$y_0 = 0$$

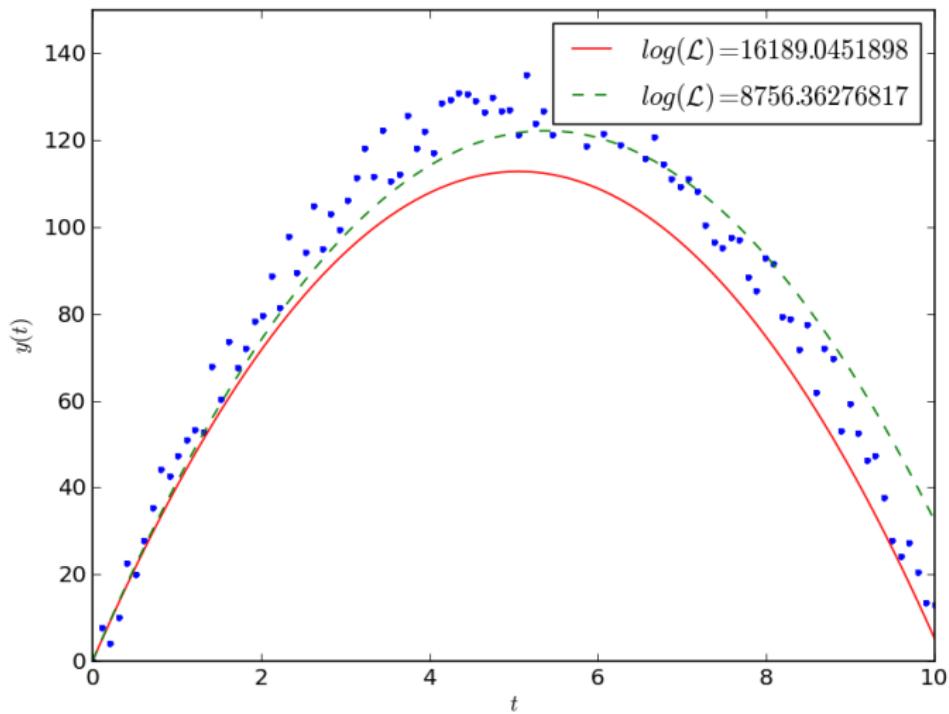
# MCMC en Física I



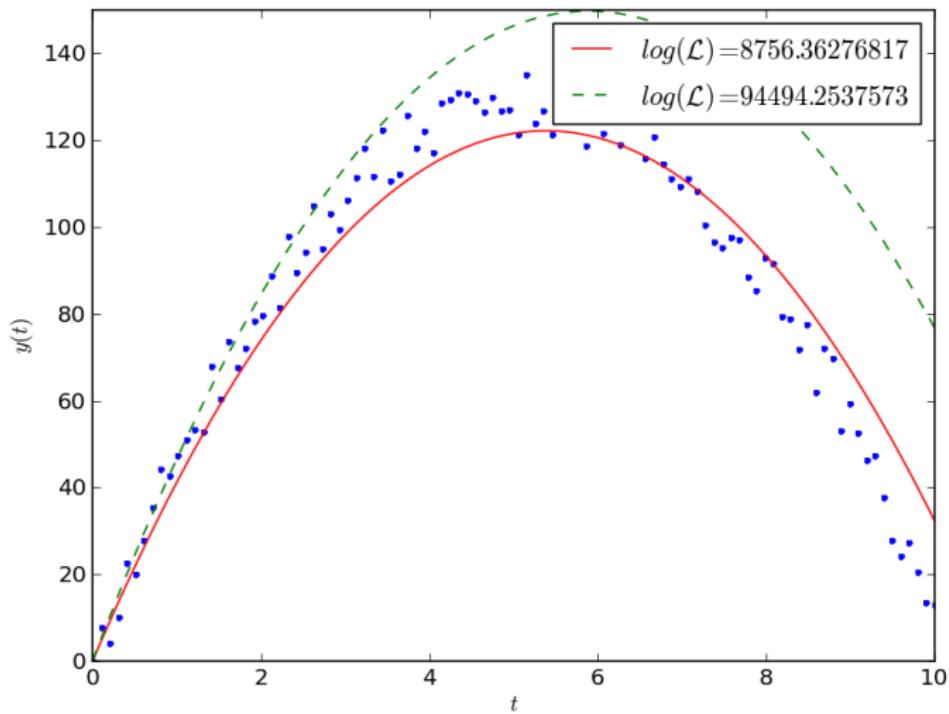
# MCMC en Física I



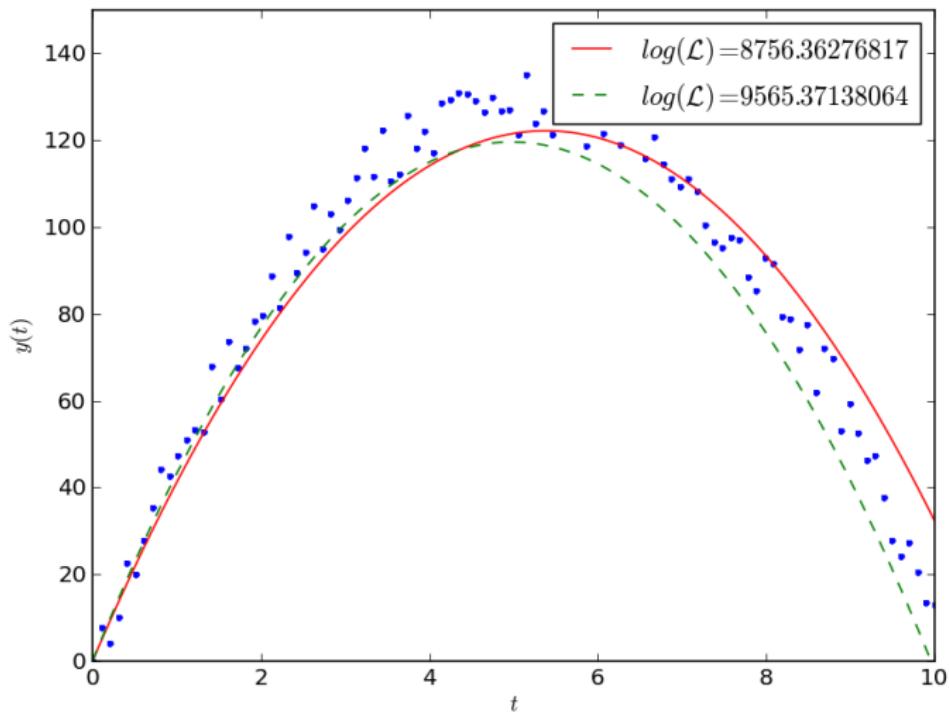
# MCMC en Física I



# MCMC en Física I



# MCMC en Física I

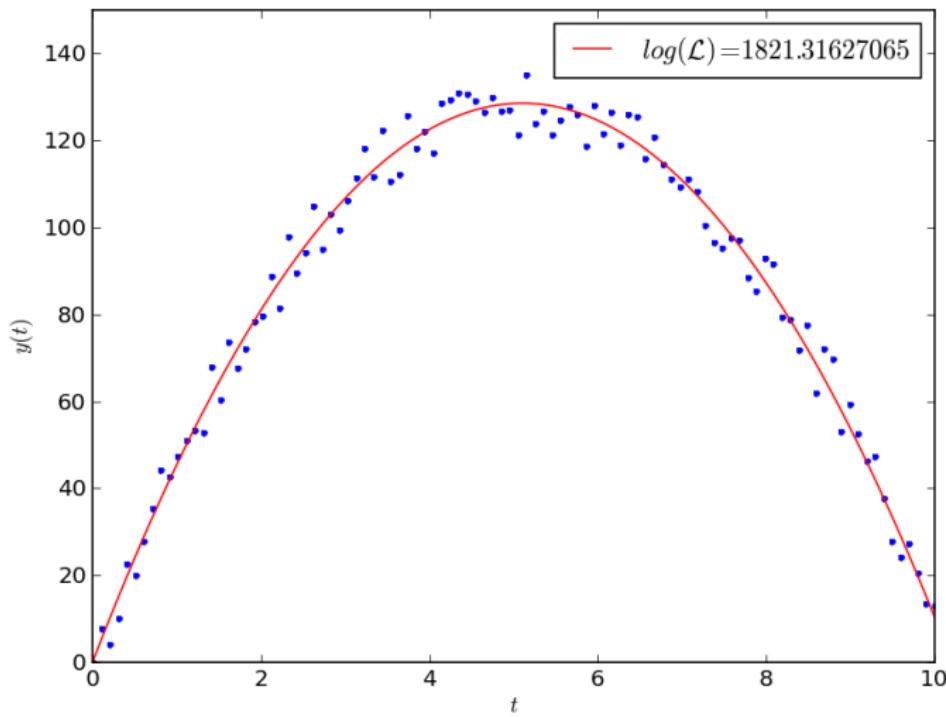


# MCMC en Física I

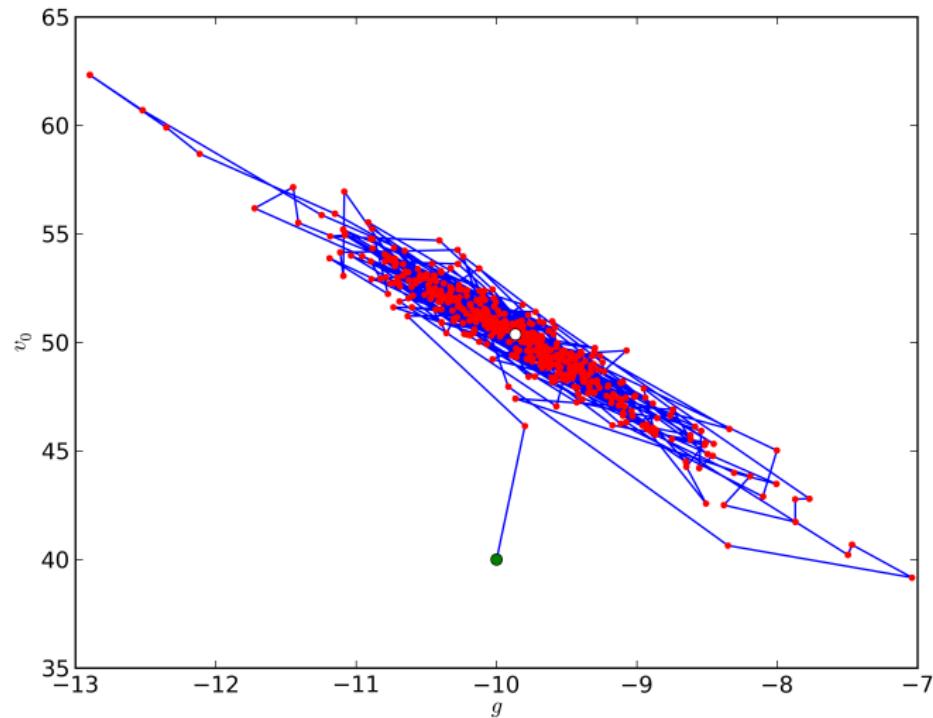
9995 iteraciones despues...

# MCMC en Física I

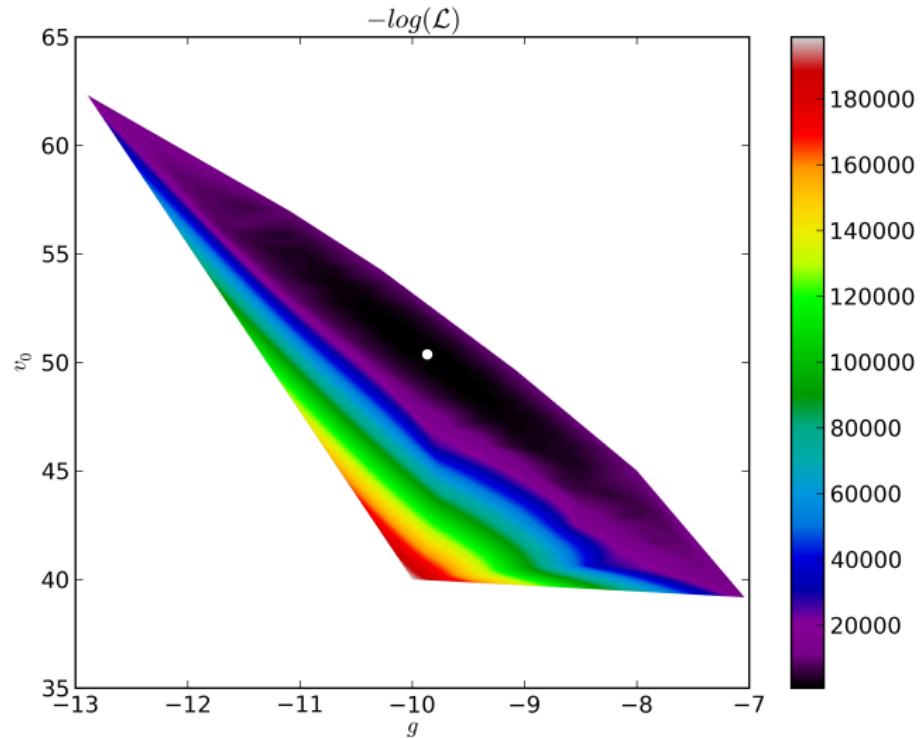
$$g = -9.8274228938949832 \quad v_0 = 150.25422509492887$$



# Que está pasando de fondo?



# Que está pasando de fondo?



# Que es un halo de materia oscura?

## Que es un halo de materia oscura?

- ▶ Simplemente, es una región cuya densidad media es igual a 200 veces la densidad promedio del universo.

$$\bar{\rho}_{halo} \sim 200 \bar{\rho}_{universo}$$

# Que es un halo de materia oscura?

- ▶ Simplemente, es una región cuya densidad media es igual a 200 veces la densidad promedio del universo.

$$\bar{\rho}_{halo} \sim 200\bar{\rho}_{universo}$$

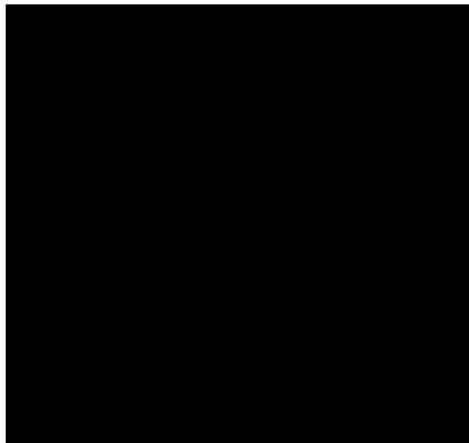
- ▶ Es un aglomerado de materia oscura (WIMPs?) en una región muy grande del espacio.

# Que es un halo de materia oscura?

- ▶ Simplemente, es una región cuya densidad media es igual a 200 veces la densidad promedio del universo.

$$\bar{\rho}_{halo} \sim 200\bar{\rho}_{universo}$$

- ▶ Es un aglomerado de materia oscura (WIMPs?) en una región muy grande del espacio.



# Perfil de Navarro-Frenk-White

# Perfil de Navarro-Frenk-White

- ▶ Fue propuesto por Julio Navarro, Carlos Frenk y Simon White.

# Perfil de Navarro-Frenk-White

- ▶ Fue propuesto por Julio Navarro, Carlos Frenk y Simon White.
- ▶ Modela el perfil de densidad de un halo de materia oscura.

# Perfil de Navarro-Frenk-White

- ▶ Fue propuesto por Julio Navarro, Carlos Frenk y Simon White.
- ▶ Modela el perfil de densidad de un halo de materia oscura.

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{\frac{r}{R_s} \left(1 + \frac{r}{R_s}\right)^2}$$

# Perfil de Navarro-Frenk-White

- ▶ Fue propuesto por Julio Navarro, Carlos Frenk y Simon White.
- ▶ Modela el perfil de densidad de un halo de materia oscura.

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{\frac{r}{R_s} \left(1 + \frac{r}{R_s}\right)^2}$$

$$M(r) = 4\pi\rho_0 R_s^3 \left[ \log \left(1 + \frac{r}{R_s}\right) - \left(1 + \frac{r}{R_s}\right)^{-1} \right]$$

# Perfil de Navarro-Frenk-White

- ▶ Fue propuesto por Julio Navarro, Carlos Frenk y Simon White.
- ▶ Modela el perfil de densidad de un halo de materia oscura.

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{\frac{r}{R_s} \left(1 + \frac{r}{R_s}\right)^2}$$

$$M(r) = 4\pi\rho_0 R_s^3 \left[ \log\left(1 + \frac{r}{R_s}\right) - \left(1 + \frac{r}{R_s}\right)^{-1} \right]$$

- ▶ La densidad diverge para  $r = 0$ .

# Perfil de Navarro-Frenk-White

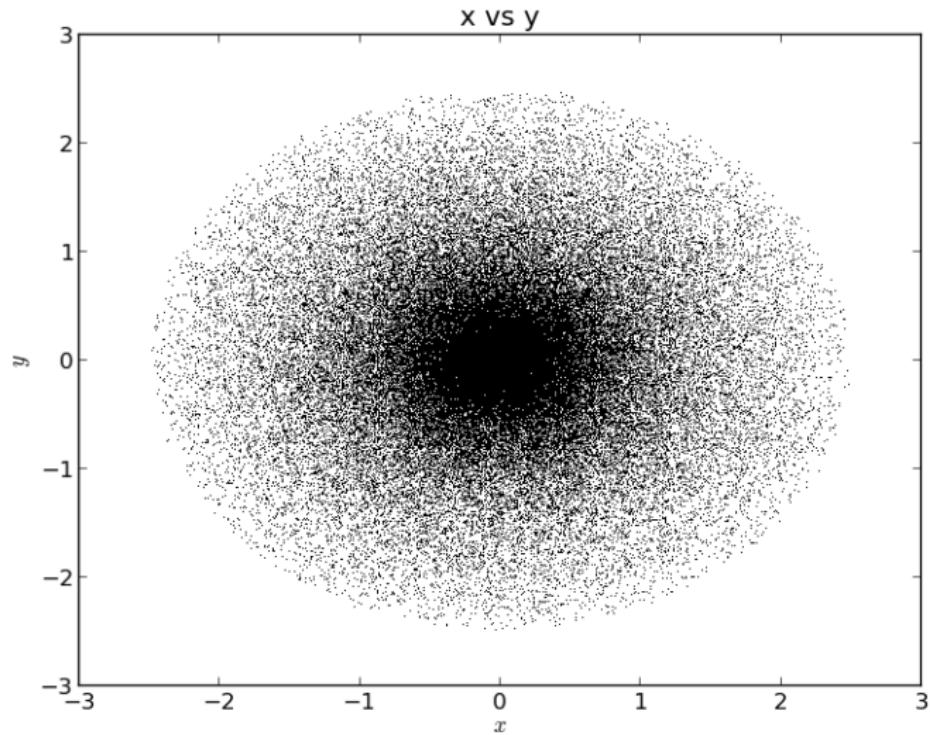
- ▶ Fue propuesto por Julio Navarro, Carlos Frenk y Simon White.
- ▶ Modela el perfil de densidad de un halo de materia oscura.

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{\frac{r}{R_s} \left(1 + \frac{r}{R_s}\right)^2}$$

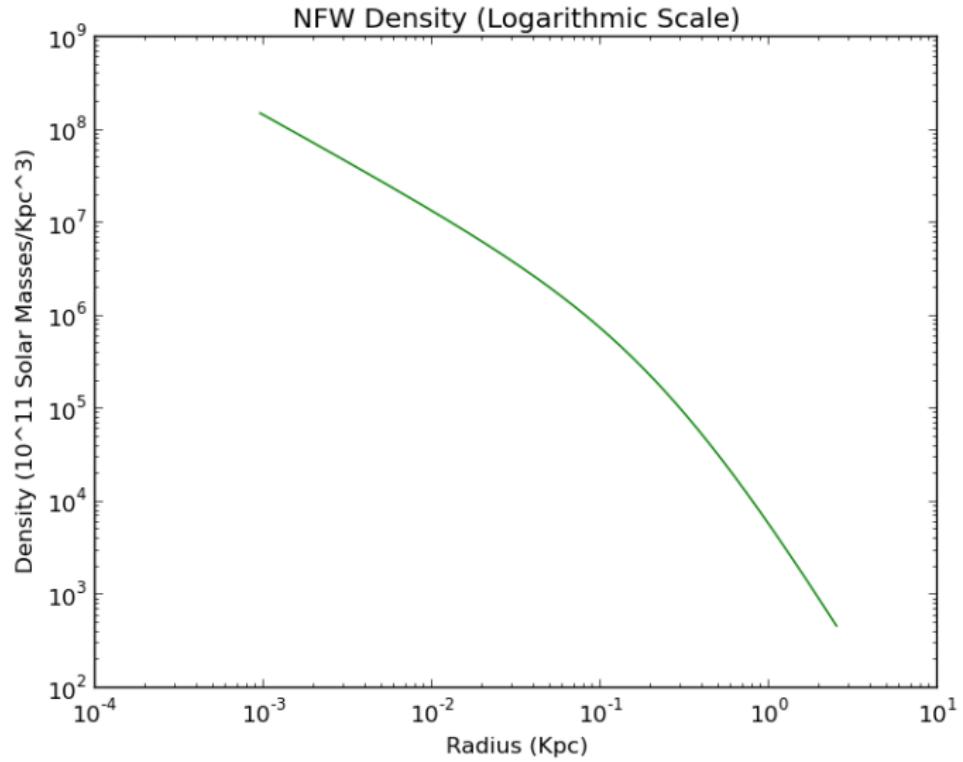
$$M(r) = 4\pi\rho_0 R_s^3 \left[ \log\left(1 + \frac{r}{R_s}\right) - \left(1 + \frac{r}{R_s}\right)^{-1} \right]$$

- ▶ La densidad diverge para  $r = 0$ .
- ▶ Asume simetría esférica.

# Perfil de Navarro-Frenk-White



# Perfil de Navarro-Frenk-White



# El proyecto

## El proyecto

La idea básica del proyecto es estimar  $\rho_0$  y  $R_s$  para muchos halos obtenidos de simulaciones de n-cuerpos.

# El proyecto

La idea básica del proyecto es estimar  $\rho_0$  y  $R_s$  para muchos halos obtenidos de simulaciones de n-cuerpos.

- ▶ El primer paso es buscar el centro de cada halo. (Centro de masa?).

## El proyecto

La idea básica del proyecto es estimar  $\rho_0$  y  $R_s$  para muchos halos obtenidos de simulaciones de n-cuerpos.

- ▶ El primer paso es buscar el centro de cada halo. (Centro de masa?).
- ▶ El segundo paso es suprimir los halos que no lo son realmente.

## El proyecto

La idea básica del proyecto es estimar  $\rho_0$  y  $R_s$  para muchos halos obtenidos de simulaciones de n-cuerpos.

- ▶ El primer paso es buscar el centro de cada halo. (Centro de masa?).
- ▶ El segundo paso es suprimir los halos que no lo son realmente.
- ▶ El tercer paso es hacer un fit para cada halo usando MCMC.

## El proyecto

La idea básica del proyecto es estimar  $\rho_0$  y  $R_s$  para muchos halos obtenidos de simulaciones de n-cuerpos.

- ▶ El primer paso es buscar el centro de cada halo. (Centro de masa?).
- ▶ El segundo paso es suprimir los halos que no lo son realmente.
- ▶ El tercer paso es hacer un fit para cada halo usando MCMC.
- ▶ El cuarto paso es comparar los resultados con lo obtenido por otros métodos.

## Obteniendo el centro de un halo

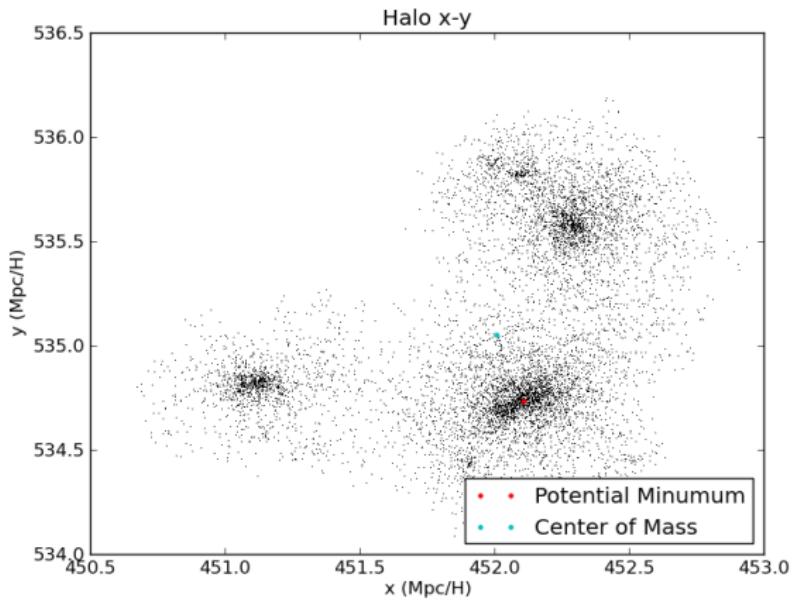
$$\vec{r}_{cm} = \sum_i \frac{m_i \vec{r}_i}{M} \quad \text{Centro de masa}$$
$$\min \left\{ \Phi(m_i) = - \sum_j \frac{G m_i}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \right\} \quad \text{Mínimo del potencial}$$

# Obteniendo el centro de un halo

$$\vec{r}_{cm} = \sum_i \frac{m_i \vec{r}_i}{M}$$

Centro de masa      vs      Mínimo del potencial

$$\min \left\{ \Phi(m_i) = - \sum_j \frac{G m_i}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \right\}$$



# Masa o Densidad?

# Masa o Densidad?

- ▶ En la simulación todos los elementos de masa son iguales.

## Masa o Densidad?

- ▶ En la simulación todos los elementos de masa son iguales.
- ▶ Hay que calcular  $m(r)$  o  $\rho(r)$  a partir de las posiciones nada mas.

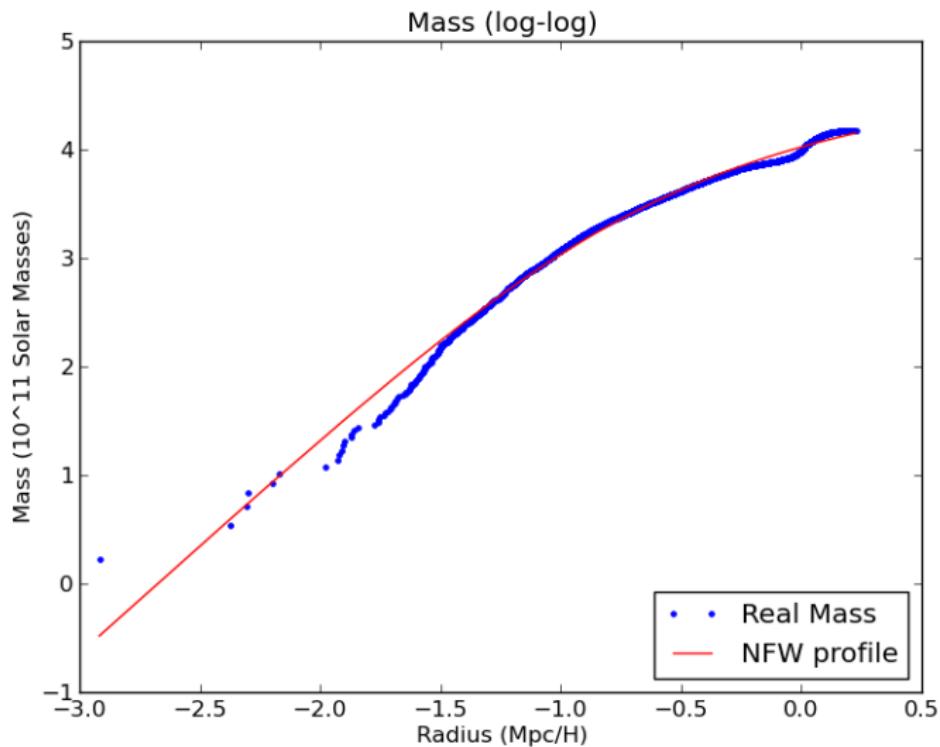
## Masa o Densidad?

- ▶ En la simulación todos los elementos de masa son iguales.
- ▶ Hay que calcular  $m(r)$  o  $\rho(r)$  a partir de las posiciones nada mas.
- ▶ Es mas fácil calcular  $m(r)$  ya que se reduce a solo contar puntos.

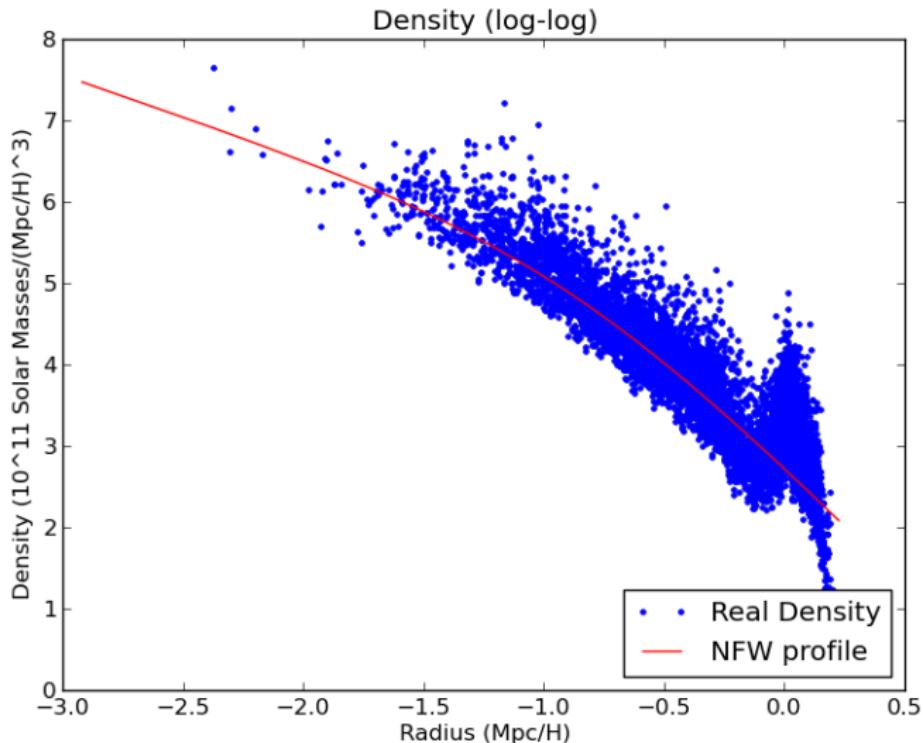
## Masa o Densidad?

- ▶ En la simulación todos los elementos de masa son iguales.
- ▶ Hay que calcular  $m(r)$  o  $\rho(r)$  a partir de las posiciones nada mas.
- ▶ Es mas fácil calcular  $m(r)$  ya que se reduce a solo contar puntos.
- ▶ Calcular  $\rho(r)$  requiere metodos mas sofisticados (derivar numéricamente, por ejemplo).

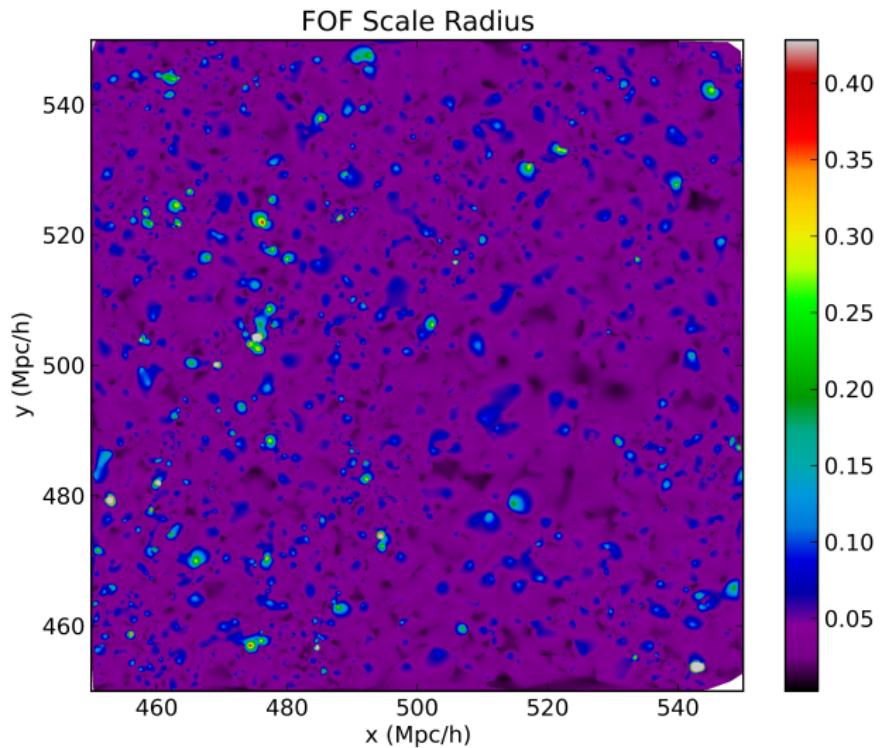
# Masa o Densidad?



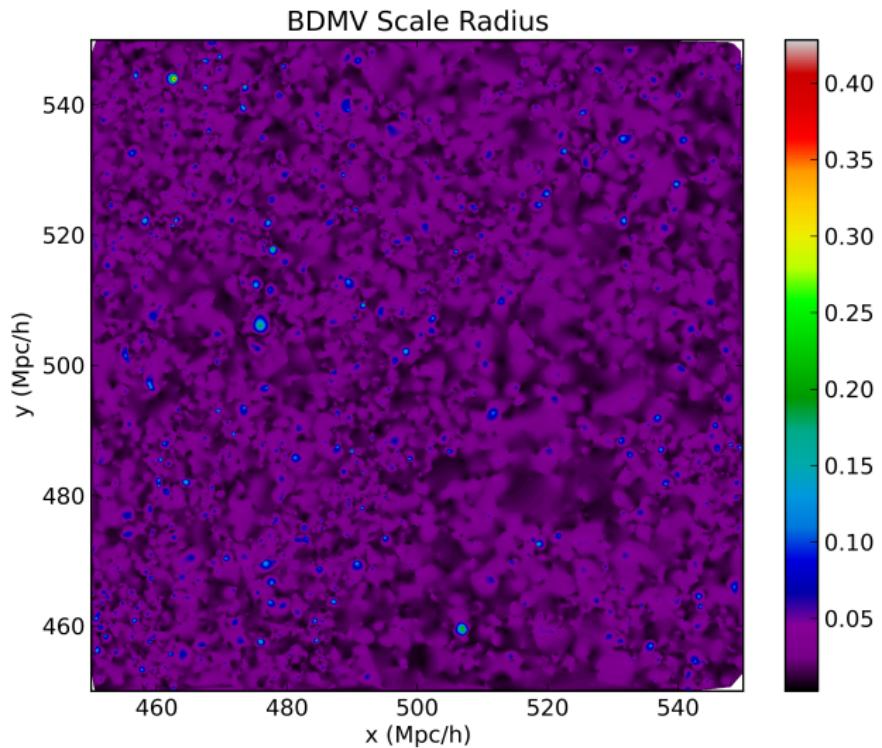
# Masa o Densidad?



# Resultados



# Resultados



# Conclusiones y Detalles

## Conclusiones y Detalles

- ▶ En general, los valores de  $R_s$  obtenidos por este método suelen ser mas grandes que los obtenidos por métodos indirectos.

## Conclusiones y Detalles

- ▶ En general, los valores de  $R_s$  obtenidos por este método suelen ser mas grandes que los obtenidos por métodos indirectos.
- ▶ Ambos no pueden ser correctos, sin embargo falta verificar si las barras de error permiten que coincidan.

## Conclusiones y Detalles

- ▶ En general, los valores de  $R_s$  obtenidos por este método suelen ser mas grandes que los obtenidos por métodos indirectos.
- ▶ Ambos no pueden ser correctos, sin embargo falta verificar si las barras de error permiten que coincidan.
- ▶ Hay que tener en cuenta que varios de los datos no tenemos un solo halo, sino varios que pudieron haber sido detectados como uno solo.

## Conclusiones y Detalles

- ▶ En general, los valores de  $R_s$  obtenidos por este método suelen ser mas grandes que los obtenidos por métodos indirectos.
- ▶ Ambos no pueden ser correctos, sin embargo falta verificar si las barras de error permiten que coincidan.
- ▶ Hay que tener en cuenta que varios de los datos no tenemos un solo halo, sino varios que pudieron haber sido detectados como uno solo.
- ▶ Hay varios halos con muy pocos puntos, culpables de valores catastroficos en los parametros.

# Conclusiones y Detalles

- ▶ En general, los valores de  $R_s$  obtenidos por este método suelen ser mas grandes que los obtenidos por métodos indirectos.
- ▶ Ambos no pueden ser correctos, sin embargo falta verificar si las barras de error permiten que coincidan.
- ▶ Hay que tener en cuenta que varios de los datos no tenemos un solo halo, sino varios que pudieron haber sido detectados como uno solo.
- ▶ Hay varios halos con muy pocos puntos, culpables de valores catastroficos en los parametros.
- ▶ La astrofísica es divertida.

# Preguntas

Preguntas?