

Formelsammlung DSVB

Mario Felder
Michi Fallegger

25. Januar 2015

Inhaltsverzeichnis

1	Digitale Signale im Zeitbereich	5
1.1	Signal Analyse	5
1.1.1	Sampling	5
1.1.2	Standard digital Signale	5
1.1.3	Statistische Signalparameter	7
1.1.4	Messverhältnisse und dB	7
1.2	Signal Operationen	8
1.2.1	Korrelation	8
1.2.2	Faltung	9
2	Analog-Digital & Digital-Analog Wandlung	11
2.1	Schritte der A/D- und D/A-Wandlung	11
2.2	Abtasten und Aliasing	12
2.2.1	Abtasten von Tiefpass Signalen	12
2.2.2	Aliasing	13
2.2.3	Abtasten von Bandpass Signalen	14
2.3	Quantisierung von Signalen	15
2.3.1	Uniforme Quantisierung	15
2.3.2	Quantisierungsrauschen	15
3	Digitale Signale im Frequenzbereich	17
3.1	Von Fourier Transformation zur DFT	17
3.1.1	Übergang zu diskreter Zeit	17
3.1.2	Übergang zu endlichem Messintervall	17
3.1.3	Intuitiv	18
3.2	Eigenschaften der DFT	19

INHALTSVERZEICHNIS

3.2.1	Gültigkeitsbereich der DFT	20
3.3	Anwendungs Aspekte	21
3.3.1	Zero-Padding	21
3.3.2	Fensterfunktion	21
3.4	Short-Time DFT	22
3.5	Fast Fourier Transformation (FFT)	23
3.5.1	Twiddle Faktoren	23
3.5.2	Radix-2 FFT	24
3.6	Goertzel-Algorithmus	25
4	Digtiales Filterdesign	27
4.1	FIR Filter	29
4.1.1	Symetrische FIR-Filter	29
4.2	IIR Filter	31
5	Multirate und Filterbänke	33
5.1	Decimation	33
5.2	Interpolation	34
5.3	Polyphasen Filter	36
5.4	Abtastrate Realisierung	37
5.5	Quadratur Spiegel Filter	37
5.6	DFT Filterbank	39
6	Zufallssignale	41
6.1	Autokorrelation und Spektrum	41
6.2	Spectral Shaping in LTI Systems	42
6.3	Lineare Modelle für Stochastische Prozesse	43
6.3.1	Moving average model	43
6.3.2	Autoregressive model	44
6.3.3	ARMA model	44
7	Optimale Lineare Filter	45
7.1	Wiener Filter	45
8	Adaptive Filter	47
8.1	Linear Predictive Coding	47
8.2	LMS Algorithmus	49

Kapitel 1

Digitale Signale im Zeitbereich

1.1 Signal Analyse

1.1.1 Sampling

Die Sample-Frequenz f_S ist durch die Sample-Periode T_S gegeben:

$$f_S = \frac{1}{T_S}$$

Aus dem Signal $x(t)$ wird durch die Abtastung:

$$x(n \cdot T_S) = x[n]$$

Das Signal $x[n]$ ist kausal wenn:

$$x[n] = 0 \quad \text{für alle } n < 0$$

1.1.2 Standard digital Signale

Einheitsimpuls oder Diracimpuls:

$$\delta = \begin{cases} 0 & : n \neq 0 \\ 1 & : n = 0 \end{cases}$$

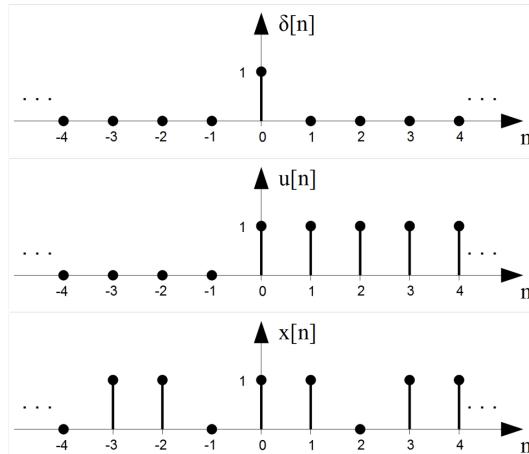
Einheitsschritt:

$$\delta = \begin{cases} 0 & : n < 0 \\ 1 & : n \geq 0 \end{cases}$$

Ein periodisches Signal ist beschrieben durch:

$$x[n] = x[n + T_0/T_S] \quad \text{mit } T_0/T_S = k$$

Ein periodisches Signal muss eine Periodendauer T_0 haben, welche ein ganzzahliges Vielfaches der Sample-Periode T_S ist.



Komplexe harmonische Sequenz:

$$x[n] = \hat{X} \cdot e^{j2\pi f_0 n T_S}$$

Real- und Imaginäranteil der komplexen Harmonischen:

$$Re\{\} = \hat{X} \cdot \cos 2\pi f_0 n T_S$$

$$Im\{\} = \hat{X} \cdot \sin 2\pi f_0 n T_S$$

1.1.3 Statistische Signalparameter

Observations Intervall T :

$$T = N \cdot T_S$$

Der Mittelwert (**mean value**) μ_x repräsentiert den DC-Anteil des Signals $x[n]$:

$$\mu_x = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x[i]$$

Der quadratische Mittelwert (**quadratic mean value**) ρ_x^2 korrespondiert zur durchschnittlichen Leistung des Signal $x[n]$ mit DC-Anteil:

$$\rho_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x[i]^2$$

Die **Varianz** σ_x^2 repräsentiert die durchschnittliche AC-Leistung des Signals $x[n]$:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (x[i] - \mu_x)^2$$

1.1.4 Messverhältnisse und dB

Leistungsverhältnis (**power ratio**):

$$A_{dB} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_1}{P_2} \right)$$

Signal-to-noise ratio (**SNR**):

$$SNR_{dB} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_{signal}}{P_{noise}} \right)$$

Linear a/b	Power Power	ratio [dB] Voltage
1/1000	-30	-60
1/100	-20	-40
1/10	-10	-20
1/2	≈ -3	≈ -6
1	0	0
2/1	≈ -3	≈ 6
10/1	10	20
100/1	20	40

1.2 Signal Operationen

1.2.1 Korrelation

Die statische Korrelation (**static correlation**) drückt die Ähnlichkeit zweier Signale $x[n]$ und $y[n]$ der selben Länge N aus:

$$R = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x[i]y[i]$$

Je ähnlicher sich die Signale sind, desto grösser der Wert R .

Die lineare Korrelationsfunktion (**linear correlation function**):

$$r_{xy}[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]y[i+n]$$

Die Korrelation ist nicht kommutativ, $r_{xy}[n] \neq r_{yx}[n]$.

Resultierende Länge von r_{xy} :

$$N_{xy} = N_x + N_y - 1$$

Matlabbefehl für Kreuz- und Autokorrelation: **xcorr**

1.2.2 Faltung

Die Faltung (**convolution**) ist definiert als:

$$z[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]y[-i+n]$$

Die Faltung ist kommutativ:

$$z[n] = x[n] * y[n] = y[n] * x[n]$$

Resultierende Länge für $z[n]$:

$$N_z = N_x + N_y - 1$$

Bei der zyklischen Faltung (**circular convolution**) müssen die beiden Signale die selbe Länge N haben, oder mit Zero-Padding auf die selbe Länge gebracht werden:

$$z[n] = x[n] \circledast_N y[n] = y[n] \circledast_N x[n]$$

Lösung durch Matrix:

$$\begin{bmatrix} y[N] & y[N-1] & \dots & y[0] \\ y[0] & y[N] & \ddots & y[1] \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ y[N-1] & y[N-2] & \dots & y[N] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z[0] \\ z[1] \\ \vdots \\ z[N] \end{bmatrix}$$

Matlabbefehl für Faltung: **conv**

Matlabbefehl für zyklische Faltung: **convmtx**

Kapitel 2

Analog-Digital & Digital-Analog Wandlung

2.1 Schritte der A/D- und D/A-Wandlung

Sample: Kontinuierliche Signalwerte werden mit der Samplefrequenz f_S aufgezeichnet. Dies erzeugt eine Sequenz von diskreten Signalwerten.

Quantize: Die diskreten Signalwerte werden einer bestimmten Anzahl Quantisierungsleveln zugeordnet.

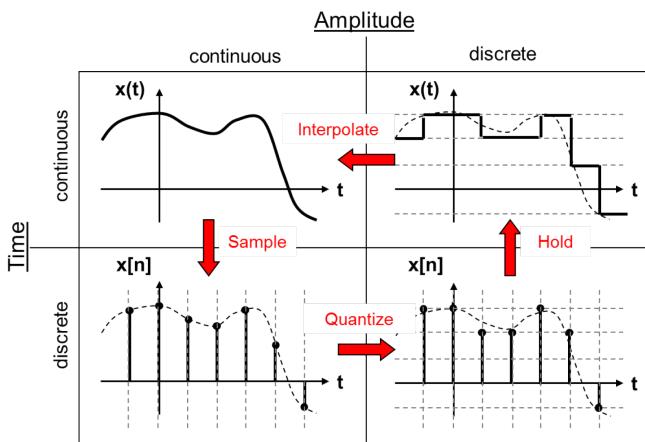
Code: Die quantisierten Abtastwerte können verwendet werden, um die erhaltene Pulsfolge zu modulieren (Pulse Code Modulation PCM). Meistens wird die Signalverarbeitung direkt mit den quantisierten Abtastwerten vorgenommen, so dass diese ohne Modulation gespeichert werden. Dazu wird die Repräsentierung der Quantisierungsleveln benötigt.

Die Digital-Analog Wandlung enthält folgende Schritte:

Decode: Die digitalen Werte werden in einer für die Digital-Analog Wandlung repräsentativer Form benötigt.

Hold: Das diskrete Signal muss über die Sampleperiode T_S konstant gehalten werden, ein Treppen ähnlicher Output entsteht.

Interpolate: Das kontinuierliche Treppensignal wird durch Mittelwerte von Tiefpass-Filtersn geglättet.



2.2 Abtasten und Aliasing

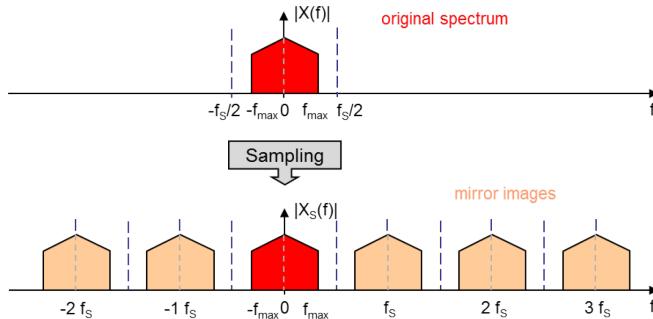
2.2.1 Abtasten von Tiefpass Signalen

Mathematisch wird die Abtastung des Signals $x(t)$ durch eine Multiplikation mit Dirac-Impulsen der Periode T_S dargestellt:

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - nT_S)$$

Das Frequenzspektrum des abgetasteten Singals ist:

$$X_S(f) = \frac{1}{T_S} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - kf_S)$$



Um das Signal rekonstruieren zu können, müssen die Spiegelfrequenzen von $X(f)$ mit einem Tiefpassfilter unterdrückt werden. Das geht nur, wenn die grösste Frequenz f_{max} des Signals kleiner als die halbe Abtastfrequenz $f_S/2$ ist.

$$f_S > 2 \cdot f_{max}$$

2.2.2 Aliasing

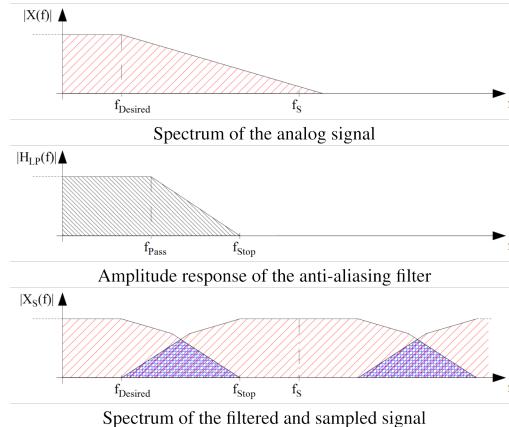
Aliasing entsteht, wenn das Abtasttheorem verletzt wird. Die Frequenzanteile über $f_S/2$ werden in das Basisband gespiegelt und überlagern mit den gewünschten Frequenzen. Das analoge Signal kann nicht rekonstruiert werden.

Dem kann mit einer Tiefpassfilterung entgegengewirkt werden. Der Filter hat folgende Spezifikationen:

$$f_{pass} \geq f_{desired}$$

$$f_{stop} \leq f_S - f_{desired}$$

KAPITEL 2. ANALOG-DIGITAL & DIGITAL-ANALOG WANDLUNG



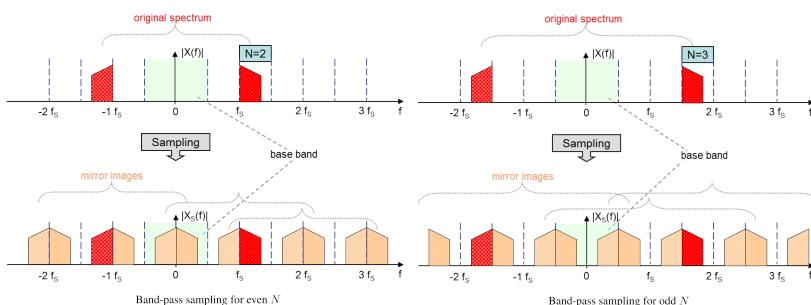
2.2.3 Abtasten von Bandpass Signalen

Das Abtasttheorem wird folgendermassen angepasst (für $N \geq 1$):

$$\frac{2 \cdot f_{min}}{N} \geq f_S \geq \frac{2 \cdot f_{max}}{N + 1}$$

Für ungerade N erscheint das originale Spektrum invertiert im Basisband. Die originale Struktur des Spektrum wird zurückgewonnen durch invertierung jedes zweiten Samples im Zeitbereich:

$$\tilde{x}[n] = (-1)^n \cdot x[n]$$



2.3 Quantisierung von Signalen

2.3.1 Uniforme Quantisierung

Der Quantisierungsschritt (**quantization step**) Δ ist gegeben durch die Auflösung mit W bits und der dynamischen Reichweite R des abgetasteten Signals $x[n]$:

$$\Delta = \frac{R}{2^W}$$

Durch das Abbilden eines amplitudenkontinuierlichen Signals auf eine endliche Anzahl von Rekonstruktionsleveln können zweier Fehler entstehen:

Clipping: Werte von $x[n]$ ausserhalb des Bereichs R werden mit dem maximum bzw. minimum Rekonstruktionslevel dargestellt.

Quantization error ϵ : Dieser Fehler tritt immer auf und kann nicht verhindert werden. Die Grösse des Fehlers ist gegeben durch die Quantisierungsgrösse Δ .

Für den mid-tread quantizer (runden zum nächsten Wert):

$$-\Delta/2 < \epsilon \leq \Delta/2$$

Für den mid-rise quantizer:

$$-\Delta < \epsilon \leq 0$$

2.3.2 Quantisierungsrauschen

Der Quantisierungsfehler zeigt sich als Rauschen überlagert zum quantisierten Signal:

$$\epsilon[n] = x_q[n] - x[n]$$

Die Leistung P_ϵ des Quantisierungsrauschens (**quantization noise**) ist:

$$P_\epsilon = \sigma_\epsilon^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\epsilon - \sigma_\epsilon)^2 \cdot p(\epsilon) d\epsilon = \frac{\Delta^2}{12}$$

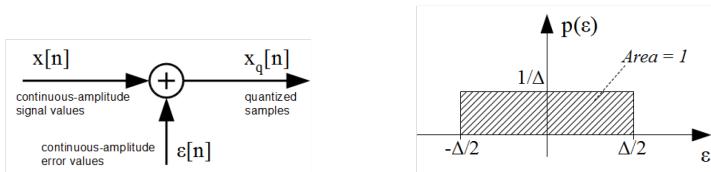
KAPITEL 2. ANALOG-DIGITAL & DIGITAL-ANALOG WANDLUNG

wobei $p(\epsilon)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte ist. Angenommen die Werte von $\epsilon[n]$ sind statistisch unkorreliert und uniform verteilt über den Intervall $(-\Delta/2, \Delta/2]$ ist die Wahrscheinlichkeitsdichte für einen mid-tread quantizer:

$$p(\epsilon) = 1/\Delta$$

Der Erwartungswert des Quantisierungsfehlers ist somit:

$$\mu(\epsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon \cdot p(\epsilon) d\epsilon = \frac{1}{2\Delta} \epsilon^2 \Big|_{-\Delta/2}^{\Delta/2} = 0$$



Das SNR ist:

$$SNR = \frac{P_x}{P_\epsilon} = 2^{2W} \cdot \frac{12P_x}{R^2}$$

$$\begin{aligned} SNR_{dB} &= 10 \cdot \left(\log_{10} 2^{2W} + \log_{10} \frac{12P_x}{R^2} \right) \\ &\approx 6W + 10 \cdot \log_{10} \frac{12P_x}{R^2} \end{aligned}$$

Bei einem harmonischen Inputsignal $x[n]$ ergibt sich folgendes SNR für eine uniforme Quantisierung:

$$SNR_{db} = 6W + 1.76 \approx 6W$$

Kapitel 3

Digitale Signale im Frequenzbereich

3.1 Von Fourier Transformation zur DFT

3.1.1 Übergang zu diskreter Zeit

Die zeitdiskrete Fourier Transformation (DTFT) kann berechnet werden mit:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

mit der normalisierten Winkelfrequenz:

$$\Omega = 2\pi f T_S = 2\pi \frac{f}{f_S}$$

Die DTFT produziert ein 2π -periodisches, kontinuierliches Spektrum.

3.1.2 Übergang zu endlichem Messintervall

Wenn nur über N Abtastpunkte eine Fourier Analyse gemacht werden soll, ist die kleinste Frequenz, welche aufgenommen werden kann:

$$f_1 = \frac{1}{T} = \frac{1}{N \cdot T_S} = \frac{f_S}{N}$$

Die Diskrete Fourier Transformation (DFT) kann geschrieben werden als:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi n \frac{k}{N}} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Die DFT ist beschränkt zu einer maximalen Frequenz von:

$$(N-1) \frac{f_S}{N}$$

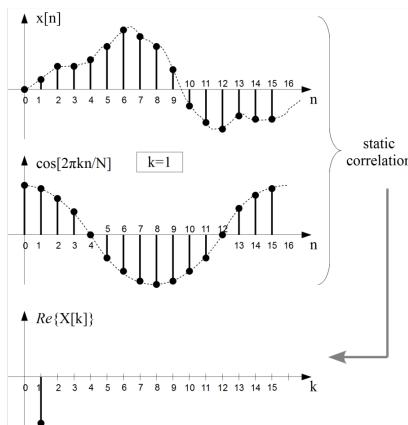
Die inverse diskrete Fourier Transformation (IDFT) ist gegeben durch:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi n \frac{k}{N}} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

		Signal	
		periodic	aperiodic
Time	continuous	Fourier Series Discrete Line Spectrum c_n	Fourier Transform Continuous Frequency Spectrum $X(f)$
	discrete	Discrete Fourier Transform (DFT) Discrete periodic Line spectrum $X[k]$	Discrete-Time Fourier Transform (DTFT) Continuous periodic Frequency Spectrum $X[\Omega]$

3.1.3 Intuitiv

$$X[k] = \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos(2\pi n \frac{k}{N})}_{\Re\{X[k]\}} + j \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} x[n] (-1) \sin(2\pi n \frac{k}{N})}_{\Im\{X[k]\}}$$



3.2 Eingenschaften der DFT

Periodizität

Das Spektrum der DFT ist f_S -periodisch

$$X[k] = X[k + N]$$

Dementsprechend ist IDFT periodisch mit $T = NT_S$

$$x[n] = x[n + N]$$

Symmetrie

Die DFT eines realwertigen Signals ist symmetrisch um den Punkt $k = N/2$

$$X[N/2 + m] = X^*[N/2 - m]$$

Zeit/Frequenz Verschiebung

Verschiebung einer periodischen Zeitsequenz um n_0 hat einen linearen Phasen Offset bei allen Spektralwerten zur Folge

$$x[n + n_0] \quad \circ \bullet \quad e^{j2\pi n_0 \frac{k}{N}} \cdot X[k]$$

Die Multiplikation mit einem komplexen Exponent hat eine konstante Frequenzverschiebung zur Folge

$$e^{j2\pi k_0 \frac{n}{N}} \cdot x[n] \quad \circ \text{---} \bullet \quad X[k - k_0]$$

Modulation

Konsequenz der Frequenzverschiebung ist die Modulation

$$\cos\left(2\pi k_0 \frac{n}{N}\right) \cdot x[n] \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{2} (X[k + k_0] + X[k - k_0])$$

Parseval Theorem

Zwischen Signalwerten $x[k]$ und Fourier Koeffizienten $X[k]$ besteht folgende Beziehung:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \left| \frac{X[k]}{N} \right|^2$$

Zusammenhang von Faltung und Multiplikation

Punktweise Multiplikation zweier DFT Spektren $X[k]$ und $Y[k]$ im Frequenzbereich entspricht der zyklischen Faltung von $x[n]$ und $y[n]$ im Zeitbereich

$$x[n] \circledast_N y[n] \quad \circ \text{---} \bullet \quad X[k] \cdot Y[k]$$

3.2.1 Gültigkeitsbereich der DFT

$$X[k] = X[\Omega]|_{\Omega=2\pi \frac{k}{N}}$$

$x[n]$ periodisch:

Der Messintervall NT_S ist ein ganzzahliger Vielfache der Periodendauer von $x[n]$.

$x[n]$ aperiodisch:

Alle Werte von $x[n]$ ausserhalb dem Bereich $0 \leq n < N$ sind Null.

3.3 Anwendungs Aspekte

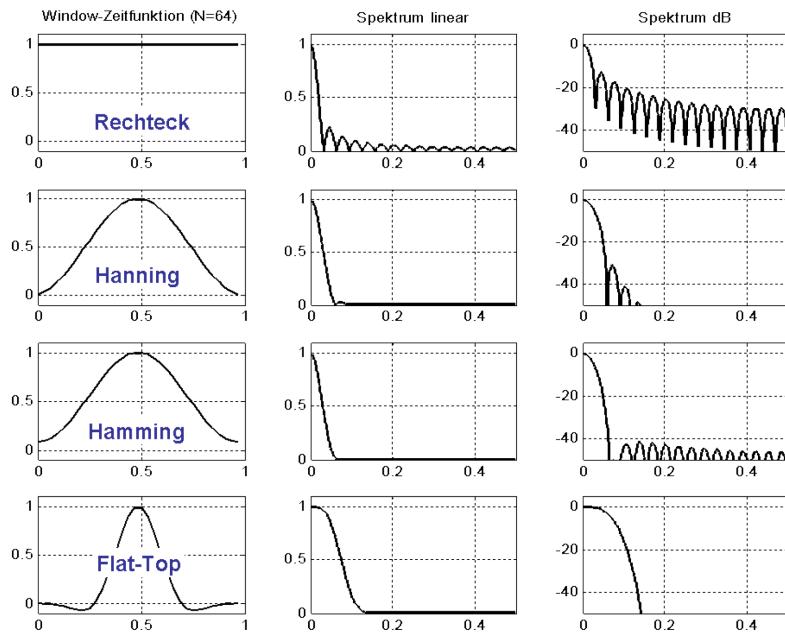
3.3.1 Zero-Padding

Um eine bessere Interpolation zwischen den N Frequenzpunkten in der DFT zu bekommen, kann das Signal im Zeitbereich mit Nullen aufgefüllt werden. Das Spektrum $X(\Omega)$ wird nicht verändert, allerdings stehen zusätzliche Abtastpunkte auf der Achse der normalisierten Winkelgeschwindigkeit Ω zur Verfügung.

3.3.2 Fensterfunktion

Die DFT wendet per Definition ein Rechteckfenster an, um die N Samples auszuschneiden. Es können andere Fensterfunktionen auf das Signal $x[n]$ angewendet werden, allerdings gelten folgende Punkte:

- Je schmäler die Hauptkeule im Spektrum des Fensters, desto höher ist die spektrale Auflösung für $X[k]$
- Je stärker die Dämpfung der Nebenkeulen im Spektrum des Fensters, desto besser die Unterdrückung der Leackage in $X[k]$



3.4 Short-Time DFT

Wenn die Entwicklung des Frequenzspektrums über die Zeit interessiert, werden kontinuierliche Berechnungen des Spektrums von kurzen Signalsektoren durchgeführt. Da diese kurzen Sektoren meistens nicht ein ganzzahliges Vielfache der Periode ist, werden Fensterfunktionen angewendet.

Bei der Länge N des Fensters ergibt sich der Kompromiss von:

- grosse spektrale Auflösung (N gross)
- grosse zeitliche Auflösung (N klein)

Um beides zu erreichen, können die DFT-Fenster überlappt werden um maximal $N - 1$.

3.5 Fast Fourier Transformation (FFT)

Geschwindigkeitsvergleich FFT-DFT:

$$\text{speedup_factor}_{\text{FFT}} = \frac{8N - 2}{5 \cdot \log_2 N} \approx 1.5 \frac{N}{\log_2 N}$$

Dabei ist $N = 2^L$ mit einem ganzzahligen Wert für L .

DFT

$$[N^2]_{\text{cpl.Mul.}} + [N^2 - N]_{\text{cpl.Add.}}$$

FFT

$$\left[\frac{N}{2} \cdot \log_2 N \right]_{\text{cpl.Mul.}} + [N \cdot \log_2 N]_{\text{cpl.Add.}}$$

3.5.1 Twiddle Faktoren

Definition:

$$W_N = e^{-j \frac{2\pi}{N}}$$

Periodizität

W_N kann nur für N verschiedene Zahlen ausgewertet werden. Der Twiddle Faktor ist somit N -periodisch

$$W_N^{k+N} = W_N^k$$

Symmetrie

Abgesehen vom Vorzeichen nimmt W_N nur $N/2$ verschiedene Werte an.

$$W_N^{k+N/2} = -W_N^k$$

3.5.2 Radix-2 FFT

Die DFT wird mit dem Twiddle Faktor umgeschrieben:

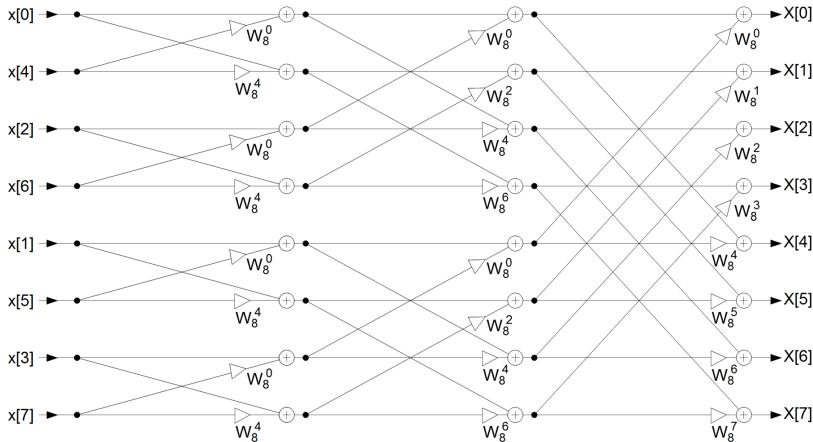
$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk} \\ &= \underbrace{\sum_{n \text{ even}} x[n] W_N^{nk}} + \underbrace{\sum_{n \text{ odd}} x[n] W_N^{nk}} \end{aligned}$$

Es können zwei neue Sequenzen $x_1[n]$ und $x_2[n]$ mit geraden und ungeraden n von der Länge $N/2$ erzeugt werden.

$$X[k] = \underbrace{\sum_{n=0}^{N/2-1} x_1[n] W_{N/2}^{nk} + W_N^k}_{x_1[\tilde{k}]} \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{N/2-1} x_2[n] W_{N/2}^{nk}}_{x_2[\tilde{k}]}$$

wobei

$$\tilde{k} = k \mod N/2$$



Benötigter Speicher der FFT bei in-place: $2N$ (+ $N/2$ für Twiddle Faktoren)
Index bit-reversed in Matlab: `bitrevorder`

3.6 Goertzel-Algorithmus

Definition:

$$X[k] = y_k[n]|_{n=N} = \sum_{i=0}^{N-1} x[i] W_N^{-k(N-i)}$$

Differenzengleichung:

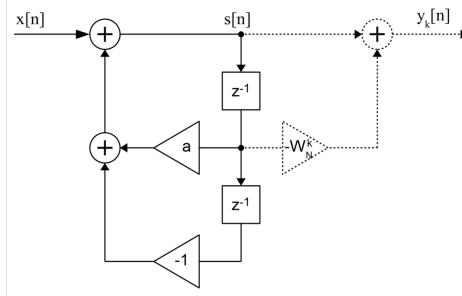
$$s[n] = x[n] + a \cdot s[n-1] - s[n-2]$$

$$y_k[n] = s[n] - W_N^k \cdot s[n-1]$$

mit

$$a = 2 \cos 2\pi \frac{k}{N}$$

$s[n]$ muss für alle Zeitpunkte $n = 0, 1, \dots, N$ berechnet werden, $y_k[n]$ nur für $n = N$.



Der Goertzel-Algorithmus gibt die DFT spectral component bei der Frequenz

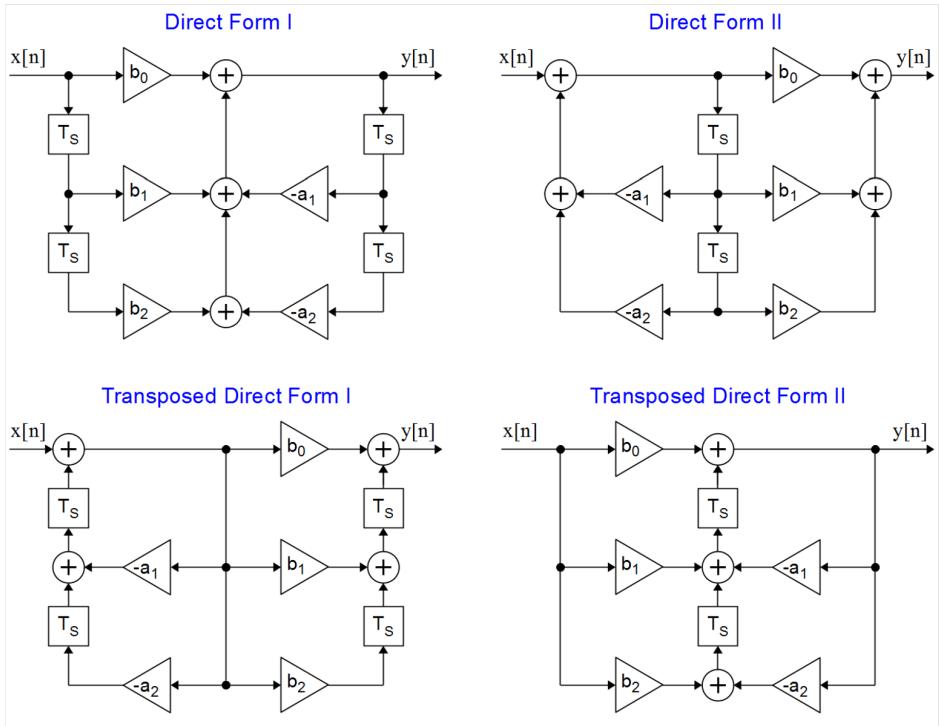
$$f_k = k \frac{f_s}{N}$$

Mit dem Parseval Theorem kann der Leistungsgehalt P_k eines realwertigen Signals $x[n]$ bei einer Frequenz von f_k ermittelt werden:

$$P_k = 2 \left| \frac{X[k]}{N} \right|^2 = \frac{2}{N^2} (\Re\{X[k]\}^2 + \Im\{X[k]\}^2)$$

Kapitel 4

Digtiales Filterdesign



4.1 FIR Filter

FIR (finite impulse response) Filter der Ordnung N hat folgende Übertragungsfunktion:

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}$$

Die Impulsantwort ist $N + 1$ Zeitschritte lang und entspricht den Koeffizienten von $H(z)$:

$$h[n] = \{b_0, b_1, \dots, b_N, 0, 0, \dots\}$$

Stabilität:

Da alle Pole bei $z = 0$ liegen, sind FIR-Filter per Definition stabil.

Lineare Phase:

Mit einem FIR-Filter ist es einfach möglich, eine lineare Phasenübertragung zu realisieren.

Implementation

Die Realisierung von FIR-Filter in HW oder SW ist straightforward und unkritisch.

4.1.1 Symmetrische FIR-Filter

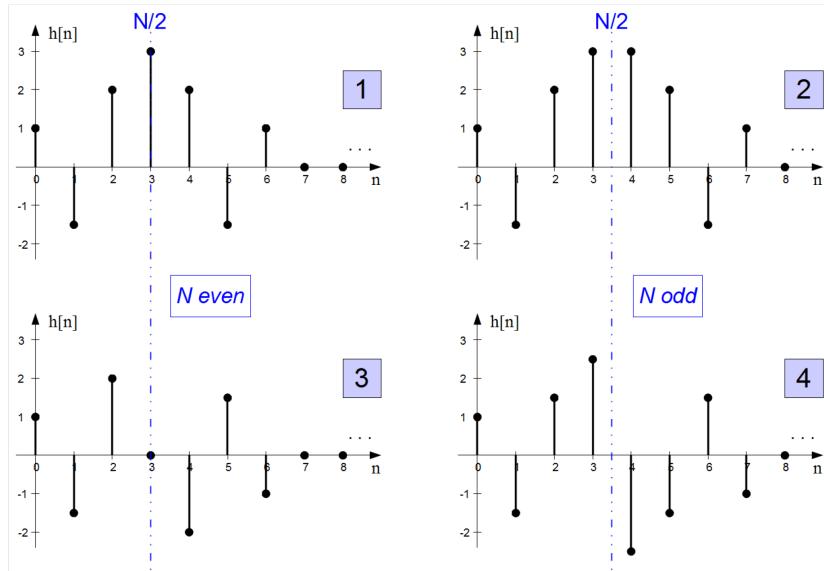
Ein FIR-Filter ist symmetrisch wenn

$$b_i = \pm b_{N-i} \quad i = 0, 1, \dots, N$$

Wenn die Gleichung mit "+erfüllt ist, spricht man von einem symmetrischen FIR-Filter, wenn sie mit "erfüllt ist, spricht man von einem asymmetrischen.

Alle symmetrischen Filter haben eine lineare Phasenantwort im Pass-Band. Das heißt, sie haben ein konstantes Gruppen-Delay:

$$\tau_g = \frac{N}{2} \cdot T_S$$



Type	Symmetry	Order N	$ H(f=0) $	$ H(f=f_S/2) $	$H(\Omega)$
1 $h[n] = h[N-n]$ (symmetric)	even	any	any		$e^{-j\Omega \frac{N}{2}} \cdot H_{zp}(\Omega)$
2	odd	any	0		
3 $h[n] = -h[N-n]$	even	0	0		$e^{-j(\Omega \frac{N}{2} - \frac{\pi}{2})} \cdot H_{zp}(\Omega)$
4 (anti-symmetric)	odd	0	any		

4.2 IIR Filter

criteria	FIR	IIR
stability	always stable	not guaranteed, must be verified for actual implementation
filter performance / filter order	higher order for same amplitude response	lower filter order for same amplitude response
phase response	exactly linear possible	linear phase not possible, introduces phase distortion
Arbitrary frequency response	easy to realize	more difficult to realize
design process	optimum design only with CAD, manual design possible	basic filter characteristics can be designed manually
design with analog filter model	no direct conversion possible	standard design method
finite word width effects	relatively low	sensitive to quantization and scaling
implementation	non-critical in HW and SW, direct support in DSPs	more complicated, requires detailed analysis of word widths

Umformung vom p-Plan zum z-Plan

$$z = e^{pT_S}$$

Der IIR Filter kann als biquads implementiert werden. Dabei wird die Übertragungsfunktion in mehrere aufgeteilt, welche jeweils einen Konjunktions- Komplexen Pol haben:

$$H(z) = K \cdot \frac{(z - z_1)(z - z_1^*)}{(z - p_1)(z - p_1^*)} \cdot \dots \cdot \frac{(z - z_L)(z - z_L^*)}{(z - p_L)(z - p_L^*)}$$

Bei einer Fix-Point Implementierung mit W bits (b_k) und F Nachkommastellen ist der dezimale Wert:

$$D_{ufix} = \sum_{k=0}^{W-1} b_k \cdot 2^{k-F}$$

Für Zahlen im Zweierkomplement:

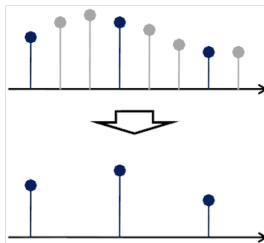
$$D_{fix} = -b_{W-1} \cdot 2^{W-F-1} + \sum_{k=0}^{W-2} b_k \cdot 2^{k-F}$$

Kapitel 5

Multirate und Filterbänke

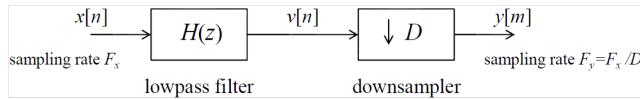
5.1 Decimation

Um ein Signal donwzusampeln, wird einfach nur jedes D te Sampel verwendet.



Dabei muss beachtet werden, dass das Abtasttheorem noch eingehalten wird. Das Signal muss zuerst Tiefpass gefiltert werden. Die Frequenzantwort des TP ist idealerweise:

$$H(\Omega) = \begin{cases} 1 & \text{if } \Omega \in [-\pi/D, \pi/D] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



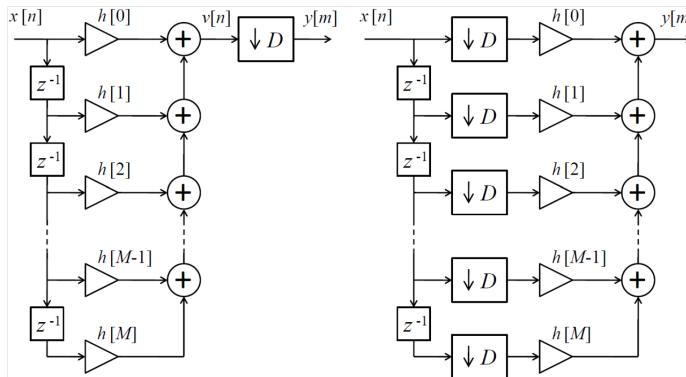
Das Resultat kann beschrieben werden als $y[m] = v[mD]$. Das Frequenzspektrum wird um den Faktor D gespreizt. Für einen idealen TP-Filter gilt:

$$Y(\Omega) = \frac{1}{D} V(\Omega/D)$$

Allgemein:

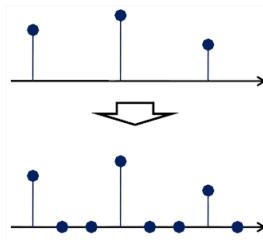
$$Y(\Omega) = \frac{1}{D} \sum_{d=0}^{D-1} V(\Omega/D - 2\pi d/D)$$

Als TP-Filter kann ein FIR Filter verwendet werden. Eine direkte Implementierung ist nicht effektiv, da $D - 1$ vom Filter berechnete Werte vom Downsampler weggeworfen werden. Mit dem Downsampler vor dem Filter müssen weniger Berechnungen durchgeführt werden.



5.2 Interpolation

Bei einem Upsampler mit dem Faktor I werden zwischen zwei Samples jeweils $I - 1$ Nullen eingefügt.



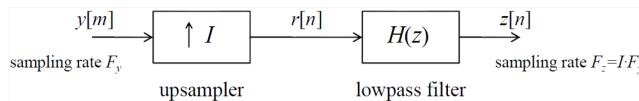
$$r[n] = \begin{cases} y[n/I] & \text{if } n \in [0, \pm I, \pm 2I, \dots] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Die Abtastfrequenz F_z ist I -mal höher als die Abtastfrequenz F_y von $y[m]$. Das Spektrum des upgesampelten Signal ist:

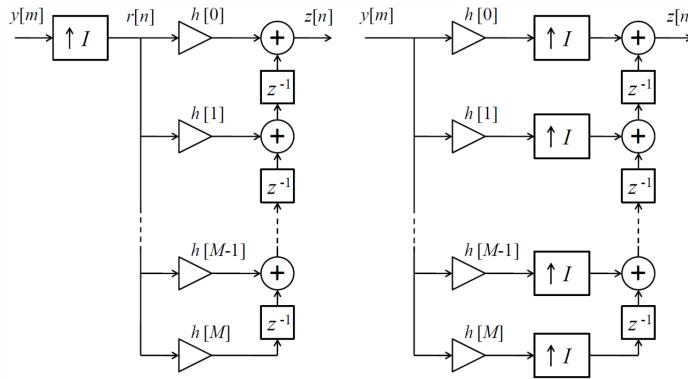
$$\begin{aligned} R(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r[n] e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} r[m] e^{-j\Omega m} \\ &= Y(I\Omega) \end{aligned}$$

Damit das Frequenzspektrum von $y[m]$ nicht periodisch mit der Periode von $2\pi/I$ ist, ist eine Tiefpassfilterung nach dem Upsampling notwendig. Der ideale TP-Filter hat die Frequenzantwort:

$$H(\Omega) = \begin{cases} I & \text{if } \Omega \in [-\pi/I, \pi/I] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



Ein FIR oder IIR Filter kann als TP-Filter verwendet werden. Eine direkte Implementierung ist ineffektiv, da der Filter auch auf die Nullwerte angewandt wird.



5.3 Polyphasen Filter

Die um M downgesampelte Impulsantwort $h[k]$ ist definiert als:

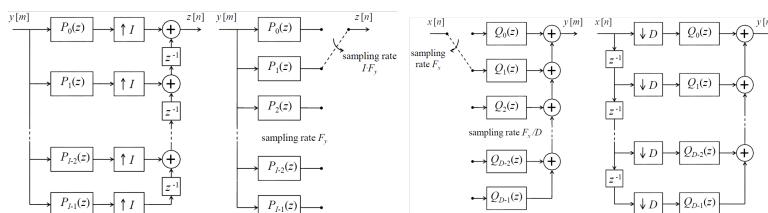
$$p_i[k] = h[kM + i] \quad i = 0, 1, \dots, M - 1$$

Dazugehörende z-Transformation:

$$P_i(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_i[k]z^{-k} \quad i = 0, 1, \dots, M - 1$$

Somit

$$H(z) = \sum_{i=0}^{M-1} z^{-1} P_i(z^M)$$



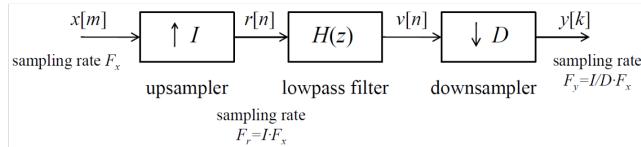
5.4 Abtastrate Realisierung

Wenn ein up- bzw. downsample Faktor gefordert ist, welcher nicht ganzzahlig ist, kann dieser mit

$$\frac{I}{D}$$

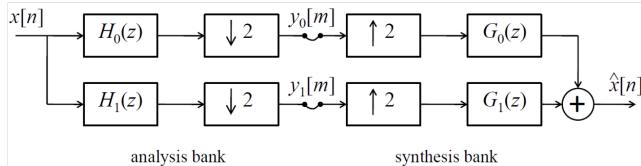
dargestellt werden.

Wenn zuerst der Downampler kommt, gehen Informationen verloren. Andersrum entsteht eine hohe Abtastfrequenz dazwischen. Es ist jedoch vorzuziehen, zuerst Upsemplen, danach Downsamplen. So kann der Tiefpass der Interpolation mit dem Tiefpass der Decimation kombiniert werden.



5.5 Quadratur Spiegel Filter

Um den Datenverlust beim Downsamplen zu kompensieren, kann das Signal über zwei Kanäle übertragen werden. Der eine Kanal filtert das Signal mit einem TP H_0 , der Andere mit einem HP H_1 .



Die DTFT der zwei generierten Signale $y_0[m]$ und $y_1[m]$ sind:

$$Y_{0/1} = \frac{1}{2} \left(H_{0/1} \left(\frac{\Omega}{2} \right) X \left(\frac{\Omega}{2} \right) + H_{0/1} \left(\frac{\Omega}{2} - \pi \right) X \left(\frac{\Omega}{2} - \pi \right) \right)$$

Das Spektrum des synthetisierten Signals $\hat{x}[n]$ ist

$$\begin{aligned}\hat{X}(\Omega) = & \frac{1}{2} (H_0(\Omega)G_0(\Omega) + H_1(\Omega)G_1(\Omega)) \cdot X(\Omega) \\ & + \underbrace{\frac{1}{2} (H_0(\Omega - \pi)G_0(\Omega) + H_1(\Omega - \pi)G_1(\Omega)) \cdot X(\Omega - \pi)}_{\text{alias term}}\end{aligned}$$

Um keinen Aliasterm zu haben müssen die Bedingungen $G_0(\Omega) = H_1(\Omega - \pi)$ und $G_1(\Omega) = -H_0(\Omega - \pi)$ erfüllt sein:

$$\begin{aligned}H_0(\Omega) &= H(\Omega) \\ H_1(\Omega) &= H(\Omega - \pi) \\ G_0(\Omega) &= H(\Omega) \\ G_1(\Omega) &= -H(\Omega - \pi)\end{aligned}$$

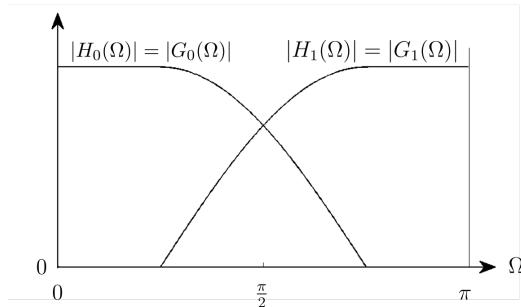
Weiter gilt

$$\hat{X}(\Omega) = T(\Omega)X(\Omega)$$

mit

$$T(\Omega) = \frac{1}{2}(H^2(\Omega) - H^2(\Omega - \pi))$$

Um perfekte Rekonstruktion zu haben, muss $T(\Omega)$ eine Allpass Charakteristik mit linearer Phasenverschiebung aufzeigen. Dies kann am besten mit einem symmetrischen FIR Filter erreicht werden.

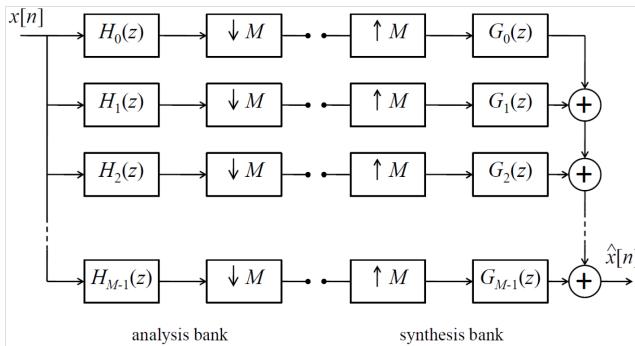


5.6 DFT Filterbank

critical sampling: Die Anzahl der Filter $H_0(z), H_1(z), \dots, H_{M-1}(z)$ entspricht dem Downsampling M .

oversampling: Anzahl Kanäle ist grösser als der Downsampling Faktor.

undersampling: Anzahl Kanäle ist kleiner als der Downsampling Faktor.



Prototype Filter $H(z)$:

$$H_l(z) = H(z \cdot e^{-j2\pi l/M}) \quad l = 0, 1, \dots, M-1$$

$$G_l(z) = G(z \cdot e^{-j2\pi l/M}) \quad l = 0, 1, \dots, M-1$$

Frequenzgang:

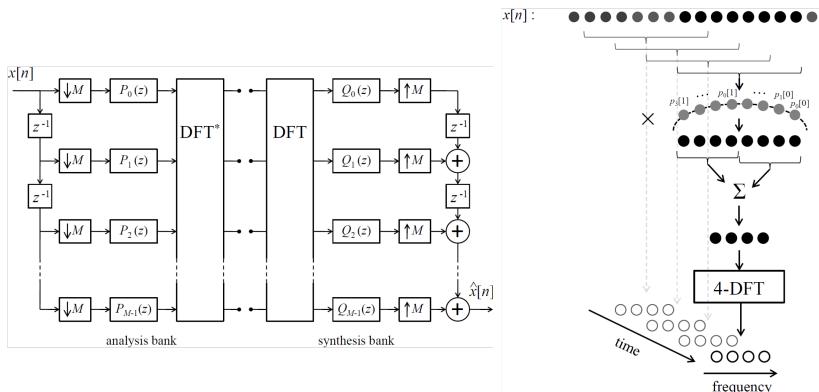
$$H_l(\Omega) = H(\Omega - 2\pi l/M)$$

Impulsantwort:

$$h[k] = \begin{cases} 1 & \text{if } k \in \{0, 1, \dots, M-1\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad g[k] = \begin{cases} \frac{1}{M} & \text{if } k \in \{0, 1, \dots, M-1\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Mit polyphase

$$H_l(z) = \sum_{i=0}^{M-1} e^{j2\pi l i / M} \cdot z^{-i} P_i(z^M) \quad l = 0, 1, \dots, M-1$$



Kapitel 6

Zufallssignale

6.1 Autokorrelation und Spektrum

Mittelwert eines Zufallssignals $x[n]$ ist

$$m_x = E\{x[n]\}$$

Autokorrelation

$$\gamma_{xx}[m] = E\{x^*[n] \cdot x[n+m]\}$$

Wobei $\gamma_{xx}[0]$ die Leistung P_x repräsentiert.

Für echte Zufallssignale gilt

$$\gamma_{xx}[m] = \gamma_{xx}^*[-m]$$

Signale, welche den Mittelwert nicht bei Null haben, werden mit der Autokovarianz charakterisiert

$$c_{xx} = E\{(x[n] - m_x)^* \cdot (x[n+m] - m_x)\}$$

$$y_{xx} = c_{xx}[m] + m_x^2$$

Die Autokovarianz bei $m = 0$ repräsentiert die Varianz

$$E\{|x[n] - m_x|^2\}$$

Spektrum durch die DTFT im Intervall $[n_1, n_2]$

$$X_{[n_1, n_2]}(\Omega) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n] \cdot e^{j\Omega n}$$

Leistungsdichte Spektrum (power density spectrum)

$$\Gamma_{xx}(\Omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}[m] \cdot e^{-j\Omega m}$$

Weisses Rauschen hat die Autokorrelation

$$\gamma_{ww}[m] = \begin{cases} \sigma_w^2 & \text{if } m = 0 \\ 0 & \text{if } m \neq 0 \end{cases}$$

Das Leistungsdichte Spektrum beim seissen Rauschen ist über Ω konstant.

6.2 Spectral Shaping in LTI Systems

Mittelwert des Ausgangssignals $y[n]$:

$$m_y = H(0) \cdot m_x$$

mit

$$H(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot e^{j\Omega k}$$

Autokorrelation von $y[n]$

$$\gamma_{yy}[m] = h^*[-i] * \gamma_{xx}[m] * h[k]$$

Frequenzbereich

$$\Gamma_{yy}(\Omega) = H^*(\Omega) \cdot \Gamma_{xx}(\Omega) \cdot H(\Omega) = |H(\Omega)|^2 \cdot \Gamma_{xx}(\Omega)$$

6.3 Lineare Modelle für Stochastische Prozesse

Weisses Rauschen

$$\Gamma_{ww}(z) = \sigma_w^2$$

Ausgang des LTI

$$\Gamma_{yy}(z) = \sigma_w^2 \cdot H(z) \cdot H(z^{-1})$$

Weisses Rauschen kann erzeugt werden, indem ein bekanntes Zufallsignal mit

$$\frac{1}{H(z)}$$

multipliziert wird. Ergibt für die Differenzengleichung

$$w[n] = \frac{1}{b_0} \left(y[n] + \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] - \sum_{k=1}^M b_k w[n-k] \right)$$

6.3.1 Moving average model

$H(z)$ ist ein FIR Filter mit Ordnung M welcher ein weisses Rauschen $w[n]$ in ein Zufallsignal transformiert:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k w[n-k]$$

Im spezial Fall $b_0 = b_1 = \dots = b_M = (M+1)^{-1}$ repräsentiert jedes Sample des Filterausgangs der Durchschnitt des Eingangssignals in einem verschiebbaren Fenster der Länge $M+1$.

Berechnung der Koeffizienten bei gegebener Autokorrelation γ_{yy} :

$$\gamma_{yy}[m] = \begin{cases} \sigma_w^2 \sum_{k=m}^M b_k \cdot b_{k-m}^* & \text{if } 0 \leq m \leq M \\ 0 & \text{if } m > M \\ \gamma_{yy}^*[-m] & \text{if } m < 0 \end{cases}$$

6.3.2 Autoregressive model

Zufallssequenz ist durch einen All-pole Filter generiert:

$$y[n] = w[n] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k]$$

Hat keine Pole und ist immer stabil.

Berechnung der Koeffizienten bei gegebener Autokorrelation γ_{yy} :

$$\gamma_{yy}[m] = \begin{cases} -\sum_{k=1}^N a_k \cdot \gamma_{yy}[m-k] & \text{if } m > 0 \\ \sigma_w^2 - \sum_{k=1}^N a_k \cdot \gamma_{yy}[m-k] & \text{if } m = 0 \\ \gamma_{yy}^*[-m] & \text{if } m < 0 \end{cases}$$

Das Lösungssystem in Matrizenform:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{yy}[0] & \gamma_{yy}[-1] & \dots & \gamma_{yy}[-N] \\ \gamma_{yy}[1] & \gamma_{yy}[0] & \dots & \gamma_{yy}[-N+1] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{yy}[N] & \gamma_{yy}[N-1] & \dots & \gamma_{yy}[0] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_w^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

6.3.3 ARMA model

Ist die Zusammensetzung des MA und AR Models. Dabei sind die Ordnungen der Polynomen $B(z)$ und $A(z)$ 1 oder höher. Somit hat der Pol-Nullstellenplan Nullen und Pole. Dieser ist allerdings geeigneter als die Spezialfälle MA und AR, da weniger Koeffizienten für ein gutes Model benötigt werden.

Kapitel 7

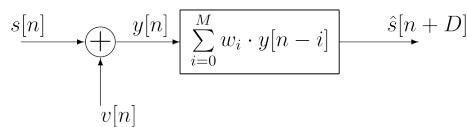
Optimale Lineare Filter

7.1 Wiener Filter

Ist optimal im mittleren quadratischen Fehler.

Zurückgewonnenes Signal $\hat{s}[n + D]$.

- *Smoothing:* Bei $D < 0$ ist der Sinn Rauschen vom Signal zu eliminieren und eine Verzögerung von $-D$ in Kauf zu nehmen. Für jedes Sample erzeugt der Filter eine Schätzung auf der Basis von $M + 1$ Sampels von $y[n]$
- *Filtering:* Bei $D = 0$ ist die Absicht das Signal $s[n]$ zu regenerieren. Es werden keine Verzögerungen erzeugt, da die Abschätzung aufgrund des aktuellen und vergangenen Werten gemacht wird.
- *Prediction:* Bei $D > 0$ will das Signal vorhergesagt werden.



Filterausgang:

$$\hat{s}[n + D] = \sum_{i=0}^M w_i \cdot y[n - i]$$

Fehler:

$$\hat{s}[n + D] - s[n + D]$$

Um die optimalen Parameter w_i zu finden muss der Gradient auf Null gesetzt werden

$$\sum_{i=0}^M \tilde{w}_i \cdot \gamma_{yy}[m - i] = \gamma_{sy}[m + D] \quad m = 0, 1, \dots, M$$

mit der Autokorrelation des Filter Eingangs:

$$\gamma_{yy} = E\{y[n] \cdot y^*[n - m]\}$$

und der Kreuzkorrelation

$$\gamma_{sy} = E\{s[n] \cdot y^*[n - m]\}$$

Winer-Hopf Gleichung

$$\mathbf{R}_{yy} = \begin{bmatrix} \gamma_{yy}[0] & \gamma_{yy}[-1] & \dots & \gamma_{yy}[-M] \\ \gamma_{yy}[1] & \gamma_{yy}[0] & \dots & \gamma_{yy}[1 - M] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{yy}[M] & \gamma_{yy}[M - 1] & \dots & \gamma_{yy}[0] \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_{sy} = \begin{bmatrix} \gamma_{sy}[D] \\ \gamma_{sy}[D + 1] \\ \vdots \\ \gamma_{sy}[D + M] \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} \tilde{w}_0 \\ \tilde{w}_1 \\ \vdots \\ \tilde{w}_M \end{bmatrix}$$

Die optimalen Filterkoeffizienten sind gegeben Durch:

$$\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{R}_{yy}^{-1} \mathbf{r}_{sy}$$

Kapitel 8

Adaptive Filter

8.1 Linear Predictive Coding

Sprachsignal mit Ordnung P (all-pole filter):

$$H(z) = \frac{g}{1 - \sum_{k=1}^P a_k z^{-k}}$$

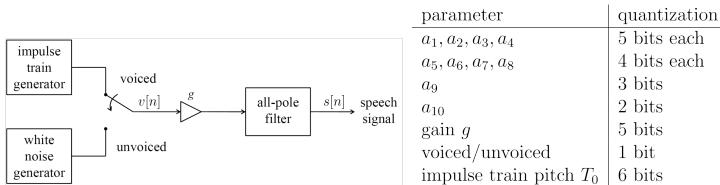
LPC-10e Algrithmus:

- 8000 Samples/s
- 180 Samples/Segment
- $P = 10$
- 54 bits pro Segment für Encoding
- Bitrate von 2400 bit/s

Entscheidet für jedes Segment, ob es voiced oder unvoiced ist. Konsonanten zählen als unvoiced, da das Signal einem Rauschen gleicht. Vokale erzeugen eine periodische Schwingung mit T_0 .

Differenzengleichung

$$s[n] = \sum_{k=1}^P a_k s[n-1] + g \cdot v[n]$$



LPC-10e vocoder: parameters and quantization.

Parameter a_n müssen so gefunden werden, dass

$$\hat{s}[n] = \sum_{k=1}^P a_k s_{in}[n-k]$$

möglichst nahe an $s_{in}[n]$ kommt. So ergibt sich:

$$\mathbf{R}_{ss} = \begin{bmatrix} \gamma_{ss}[0] & \gamma_{ss}[1] & \dots & \gamma_{ss}[P-1] \\ \gamma_{ss}[1] & \gamma_{ss}[0] & \dots & \gamma_{ss}[P-2] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{ss}[P-1] & \gamma_{ss}[P-2] & \dots & \gamma_{ss}[0] \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_{ss} = \begin{bmatrix} \gamma_{ss}[1] \\ \gamma_{ss}[2] \\ \vdots \\ \gamma_{ss}[P] \end{bmatrix}$$

und

$$\mathbf{a} = \mathbf{R}_{ss}^{-1} \mathbf{r}_{ss}$$

Die Werte der Autokorrelation können angenähert werden durch

$$\hat{\gamma}_{ss}[m] = \frac{1}{N-m} \sum_{n=1}^{N-m} s_{in}[n] s_{in}[n+m]$$

mit N für die Anzahl Werte im Segment.

Der Fehler ist

$$d[n] = s_{in}[n] - \hat{s}[n]$$

Die Verstärkung

$$g = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N d^2[n]}$$

Durchschnittliche Amplituden Differenz Funktion (average magnitude difference function):

$$\bar{\gamma}_d[m] = \frac{1}{N-m} \sum_{n=1}^{N-m} \left| \frac{d[n]}{g} - \frac{d[n+m]}{g} \right|$$

Wenn das minimum von $\bar{\gamma}_d[m]$ unter einen Schwellwert fällt, wird das Segment als voice deklariert

$$T_0 = \arg \min_{m \in [20, 160]} \bar{\gamma}_d[m]$$

8.2 LMS Algorithmus

Passt seine Parameter stetig an.

Es wird der Eingangvektor und die Filterkoeffizienten benötigt

$$\mathbf{y}_n = \begin{bmatrix} y[n] \\ y[n-1] \\ \vdots \\ y[n-M] \end{bmatrix} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_M \end{bmatrix}$$

Der Ausgang wird berechnet mit

$$\hat{s}[n] = \mathbf{w}^T \mathbf{y}_n$$

Der mittlere quadratische Fehler ist

$$\varepsilon_{MSE}(\mathbf{w}) = E\{(\hat{s}[n] - s[n])^2\}$$

Der Vektor \mathbf{w} wird mit Nullen initialisiert und berechnet sich aus

$$\mathbf{w}^{(n+1)} = \mathbf{w}^{(n)} + \underbrace{\mu \left(s[n] - (\mathbf{w}^{(n)})^T \mathbf{y}_n \right) \cdot \mathbf{y}_n}_{=\mathbf{w}_\Delta^{(n)}}$$

μ ist die Schrittweite und gibt an, wie oft der Algorithmus angepasst wird.

