

Des EDP à leur résolution par la méthode des éléments finis

Projet 2019

David FRENKIEL

david.frenkiel@yahoo.com

15/02/2020

Table des matières

1	Énoncé	2
1.1	Le problème de Helmholtz	2
1.2	Le problème de Poisson à coefficients variables	2
2	Formulations Variationnelles	3
2.1	Équation de Poisson	3
2.2	Équation de Helmholtz	4
3	Éléments finis (complexes)	4
4	Expériences numériques	5
4.1	Constantes	5
4.2	Dimensions du four	5
4.3	Fréquence des ondes électromagnétiques	5
4.4	Conditions aux limites	6
5	Le maillage	7
6	Visualisations - Champ électromagnétique	7
6.1	Four vide	8
6.2	Four avec l'aliment dedans	9
7	Visualisations - Chaleur	10
8	Visualisations - Conditions aux limites réflectives	10
9	Le code	12
9.1	Prérequis	12
9.2	Compilation	12
9.2.1	Dépannage	12
9.3	Exécution	12
9.4	Scripts FreeFEM	13
9.5	Fichiers de données	13
9.6	Paramètres variables et pointeurs de fonction	13

1 Énoncé

Le but de ce projet est de simuler (de manière simplifiée) le chauffage d'un objet (un aliment) par un four à micro-ondes en trois dimensions avec la méthode des éléments finis.

Ce problème se résout en deux étapes. Tout d'abord, on résout l'équation de Helmholtz afin de déterminer la magnitude du champ électromagnétique dans l'enceinte du four. Ensuite, avec les données de cette magnitude, on résout l'équation de Poisson à coefficients variables afin de déterminer la température de l'objet, et la température de l'air qui entoure l'objet dans le four à micro-ondes.

1.1 Le problème de Helmholtz

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ le domaine à l'intérieur du four. Le problème de Helmholtz s'écrit alors comme suit :

Trouver u une fonction définie sur l'ouvert Ω à valeurs dans \mathbb{C} tel que

$$\begin{cases} \omega^2 \mu u + \nabla \cdot \frac{1}{\varepsilon} \nabla u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = g, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où, pour $x \in \Omega$ et $\tilde{x} \in \partial\Omega$,

- $u(x)$ est une fonction à valeurs complexes qui représente l'amplitude du champ électromagnétique.
- $\omega > 0$ est la vitesse angulaire des ondes électromagnétiques émises par l'antenne (magnétron) du four.
- $\mu > 0$ est la perméabilité magnétique relative, qui caractérise la résistance d'un milieu à la création d'un champ magnétique.
- $\varepsilon(x)$ est la (éventuellement complexe) permittivité relative, qui caractérise la polarisabilité d'un milieu sous l'effet d'un champ électrique.
- $g(\tilde{x})$ est une fonction qui représente l'antenne (magnétron), qui est la source du champ électromagnétique. Dans un four à micro-ondes l'antenne se trouve à l'extérieur de l'enceinte, et donc on peut modéliser l'antenne comme une condition aux limites restreint à la paroi de l'enceinte.

1.2 Le problème de Poisson à coefficients variables

L'équation de Poisson s'écrit comme suit :

Trouver v une fonction définie sur l'ouvert Ω à valeurs dans \mathbb{R} tel que

$$\begin{cases} -\nabla \cdot K \nabla v = f & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où, pour $x \in \Omega$,

- $v(x)$ est une fonction à valeurs réelles qui représente la température de l'air à l'intérieur de l'enceinte et la température de l'objet à cuire.
- $K(x) > 0$ est la conductivité thermique, qui caractérise le degré de transfert de chaleur dans un milieu.
- $f(x)$ est la source de chaleur. Pour modéliser le four à micro-onde on pose que la puissance de cette source est égale à la magnitude (au carré) du champ magnétique : $f = u\bar{u}$, où u est la solution de l'équation de Helmholtz.

2 Formulations Variationnelles

Avant de résoudre numériquement ces deux problèmes avec la méthode des éléments finis il faut tout d'abord montrer l'existence et l'unicité des solutions.

Pour l'équation de Poisson cette tache se fait plutôt facilement grâce au théorème de Lax-Milgram. L'équation de Helmholtz, par contre, nécessite un peu plus d'attention.

2.1 Équation de Poisson

Soit Ω un ouvert borné, $f \in L^2(\Omega)$, $v \in C_0^\infty(\Omega)$, et $w \in C_0^\infty(\Omega)$. On multiplie les 2 côtés de l'équation de Poisson par w et on les intègre. Cela nous donne

$$-\int_{\Omega} w \nabla \cdot K \nabla v = \int_{\Omega} f w$$

Comme $v \in C_0^\infty(\Omega)$ et $w \in C_0^\infty(\Omega)$ on peut donc se servir d'une formule de Green, ce qui nous amène à

$$\int_{\Omega} K \nabla v \cdot \nabla w - \int_{\partial\Omega} w K \nabla v \cdot n = \int_{\Omega} f w$$

Par définition w est nulle sur $\partial\Omega$. D'où on en tire

$$\int_{\Omega} K \nabla v \cdot \nabla w = \int_{\Omega} f w$$

Comme $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, on suppose maintenant que $u \in H_0^1(\Omega)$. Par passage à la limite on en tire la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } v \in H_0^1(\Omega) \text{ telle que} \\ a(v, w) = \ell(w) \quad \forall w \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} a(v, w) &= \int_{\Omega} K \nabla v \cdot \nabla w \\ \ell(w) &= \int_{\Omega} f w \end{aligned}$$

La continuité de la forme bilinéaire $a(v, w)$ et de la forme linéaire $\ell(w)$ est évidente.

Pour démontrer la coercivité de $a(v, w)$ on note tout d'abord que, par l'inégalité de Poincaré, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

En notant $K_{\min} > 0$ le minimum de K , il s'ensuit que

$$a(v, v) = \int_{\Omega} K \nabla v \cdot \nabla v \geq K_{\min} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \frac{K_{\min}}{C} \|v\|_{H^1(\Omega)}^2$$

On a ainsi montré la coercivité de $a(v, w)$. Donc, d'après le théorème de Lax-Milgram, il existe une unique solution du problème variationnel.

2.2 Équation de Helmholtz

Afin de montrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation de Helmholtz, il faut tout d'abord l'équation reformuler en problème de conditions aux limites homogènes.

Pour réaliser cet objectif on étend la fonction g de sorte qu'elle soit définie sur tout $\bar{\Omega}$. On introduit donc la fonction $\tilde{g} \in H^2(\bar{\Omega})$, où $\tilde{g}(x) = g(x)$ pour tout $x \in \partial\Omega$.

Soit maintenant $\tilde{u} = u - \tilde{g}$. On a donc $\tilde{u} = 0$ sur $\partial\Omega$, et notre problème s'écrit

$$\begin{cases} \omega^2 \mu \tilde{u} + \nabla \cdot \frac{1}{\varepsilon} \nabla \tilde{u} = -\omega^2 \mu \tilde{g} - \nabla \cdot \frac{1}{\varepsilon} \nabla \tilde{g} & \text{dans } \Omega \\ \tilde{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Avec $f = -\omega^2 \mu \tilde{g} - \nabla \cdot \frac{1}{\varepsilon} \nabla \tilde{g}$, on en tire un problème de conditions aux limites de Dirichlet homogène :

$$\begin{cases} \omega^2 \mu \tilde{u} + \nabla \cdot \frac{1}{\varepsilon} \nabla \tilde{u} = f & \text{dans } \Omega \\ \tilde{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

En suivant les mêmes étapes que pour l'équation de Poisson, on en tire la formulation variationnelle pour l'équation de Helmholtz :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \tilde{u} \in H_0^1(\Omega) \text{ telle que} \\ a(\tilde{u}, w) = \ell(w) \quad \forall w \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} a(\tilde{u}, w) &= \omega^2 \mu \int_{\Omega} \tilde{u} w - \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} \nabla \tilde{u} \cdot \nabla w \\ \ell(w) &= \int_{\Omega} f w \end{aligned}$$

La continuité de la forme bilinéaire $a(v, w)$ et de la forme linéaire $\ell(w)$ est, comme avant, évidente. Par contre, la coercivité de $a(\tilde{u}, w)$ s'avère plus compliquée.

En principe, avec une estimation précise de la constante de Poincaré, on pourrait imposer des contraintes aux constantes de sorte que $a(\tilde{u}, w)$ soit coercive. Mais de telles contraintes nous laisserait probablement avec un four à micro-ondes qui ne chauffe rien du tout !

Au lieu de s'attaquer à ce problème d'analyse on va raisonner "comme des ingénieurs". C'est-à-dire, si la solution numérique se comporte bien, alors tout va bien !

Pour un traitement sérieux des questions d'existence et d'unicité de l'équation de Helmholtz, et en particulier l'alternative de Fredholm, voir les références [8], [9], [10], [11], [12], [13], et [14].

3 Éléments finis (complexes)

Afin de résoudre numériquement les problèmes de Helmholtz et Poisson on se sert de la méthode des éléments finis et la méthode de Galerkine. On emploie l'espace des fonctions \mathbb{P}_1 -Lagrange comme fonctions de forme, et, les problèmes étant en 3D, des tétraèdres comme éléments. On cherche alors une solution approchée dans l'espace donné par

$$V_h = \{v \in C^0(\Omega), v|_{\tau} \in \mathbb{P}_1(\tau) \quad \forall \tau \in T_h\},$$

où T_h est l'ensemble de tétraèdres du maillage.

Soit maintenant \mathcal{S}_h l'ensemble des sommets du maillage et $\{\phi_s, s \in \mathcal{S}_h\}$ une base de V_h telle que

$$\phi_s(s') = \begin{cases} 1 & \text{si } s = s' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Étant à valeurs complexes, la solution de l'équation de Helmholtz s'écrit alors

$$u_h(x) = \sum_{s \in \mathcal{S}_h} u_s \phi_s(x) \quad u_s \in \mathbb{C}$$

Par contre, la solution de l'équation de Poisson est à valeurs réelles. Sa solution s'écrit donc

$$v_h(x) = \sum_{s \in \mathcal{S}_h} v_s \phi_s(x) \quad v_s \in \mathbb{R}$$

Remarque La solution de l'équation de Helmholtz est à valeurs complexes mais on n'a pas besoin des fonctions de forme complexes (cf. [3]). Pourtant, il faut introduire quelque part des paramètres complexes pour faire en sorte que la solution soit complexe. On va alors convertir la permittivité relative ε en valeur complexe.

4 Expériences numériques

Pour simuler notre four à micro-ondes efficace il faut préciser le domaine (dimensions du four) et les constantes qui apparaissent dans les équations de Helmholtz et Poisson.

4.1 Constantes

La perméabilité magnétique relative μ est très proche de 1.0 dans l'air et dans l'eau. Et comme le teneur de l'eau dans les aliments est environ 70% on peut supposer que

$$\mu = 1.0$$

La permittivité relative ε est égale à 1.0 dans l'air et 4.0 dans l'eau, et donc 4.0 dans l'aliment. Toutefois, pour avoir une solution complexe de l'équation de Helmholtz, on ajoute une partie imaginaire à la permittivité relative. Après quelques expériences numériques avec des parties complexes différentes, on a choisi les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} \varepsilon(x) = 1 - 0.05i & x \text{ dans l'air} \\ \varepsilon(x) = 4(1 - 0.05i) & x \text{ dans l'objet à cuire} \end{cases}$$

La conductivité thermique K est égale à 0.0262 dans l'air et 0.6 dans l'eau, et donc 0.6 dans l'aliment :

$$\begin{cases} K(x) = 0.0262 & x \text{ dans l'air} \\ K(x) = 0.6 & x \text{ dans l'objet à cuire} \end{cases}$$

4.2 Dimensions du four

La taille de notre four est 40cm × 30cm × 30cm. Ce sont des dimensions plus ou moins en lignes avec les dimensions des fours à micro-ondes standards. On utilise l'unité du centimètre car c'est une échelle convenable pour la génération des maillages et les figures.

4.3 Fréquence des ondes électromagnétiques

Pour qu'on ait une distribution efficace du champ électromagnétique dans l'enceinte du four, il faut calibrer la fréquence des ondes électromagnétiques émises par le magnétron. Par ailleurs, puisque le magnétron se trouve derrière un des côtés latérales de l'enceinte, les ondes électromagnétiques se déplacent horizontalement. Donc, l'intensité des ondes dépend seulement de la longueur (40cm) de l'enceinte.

Les fours à micro-ondes standards se servent des magnétrons qui émettent des ondes électromagnétiques à une fréquence de 2.45 GHz. Avec une telle fréquence le nombre de longueurs d'onde dans l'enceinte est environ 3.

Avec cette fréquence la vitesse angulaire est très élevée : $\omega = 2\pi \times 2.45 \times 10^9 = \pi \times 4.9 \times 10^9$. On aura donc dans l'équation de Helmholtz la quantité $\omega^2 \approx 10^{20}$. Malheureusement, une valeur aussi élevée complique les calculs numériques. En particulier, on utilise la valeur 10^{30} pour imposer des conditions aux limites (la méthode de pénalisation). Pour éviter ce souci on va manipuler les unités. Comme les constantes μ et ϵ sont sans unités il suffit juste de jouer avec la vitesse de la lumière. Comme les dimensions du four sont définies en centimètres, il est convenable de poser que la vitesse de la lumière $c = 1 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$. Cela implique que, dans notre système d'unités, 1 mètre vaut 3×10^{10} mètres du système métrique standard.

On est à présent en mesure de calculer une bonne fréquence pour notre four. Soit L la longueur de l'enceinte et n_λ le nombre désiré de longueurs d'ondes (en centimètres). La longueur d'onde est donc $\lambda = L/n_\lambda$, et on en tire la fréquence,

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} = \frac{n_\lambda}{L}$$

Avec $n_\lambda = 2$, par exemple, la vitesse angulaire est donc

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi n_\lambda}{L} = \frac{4\pi}{40} = \frac{\pi}{10} \approx 0.314$$

4.4 Conditions aux limites

Le magnétron se trouve derrière la paroi gauche de l'enceinte du four, et on applique alors des conditions aux limites au plan $x = -20$. Il reste à déterminer les conditions aux limites appliquées aux 5 autres parois. On a effectivement 2 options : soit on a $g = 0$ sur les autres parois, soit on ne précise pas la valeur de g sur les autres parois.

On va effectuer des expériences numériques pour ces 2 cas, mais on remarque que le deuxième cas est plus réaliste. En effet, dans un four à micro-ondes les ondes électromagnétiques réfléchissent contre les parois et la magnitude du champ électromagnétique varie beaucoup sur la paroi.

On choisit comme fonction g une espèce de pyramide tronquée d'une hauteur de 1. Pour le premier cas indiqué plus haut on a

$$\begin{cases} g(x, \tilde{y}, \tilde{z}) = \min(4\tilde{y}, 4(1 - \tilde{y}), 4\tilde{z}, 4(1 - \tilde{z}), 1) & \text{si } x = -20 \\ g(x, \tilde{y}, \tilde{z}) = 0 & \text{si } x \neq -20 \end{cases}$$

Et pour le deuxième cas :

$$g(x, \tilde{y}, \tilde{z}) = \min(4\tilde{y}, 4(1 - \tilde{y}), 4\tilde{z}, 4(1 - \tilde{z}), 1) \quad \text{si } x = -20$$

où \tilde{y} et \tilde{z} sont les coordonnées normalisées au carré $[0, 1] \times [0, 1]$:

$$\tilde{y} = \frac{y + 15}{30} \quad \tilde{z} = \frac{z + 15}{30}$$

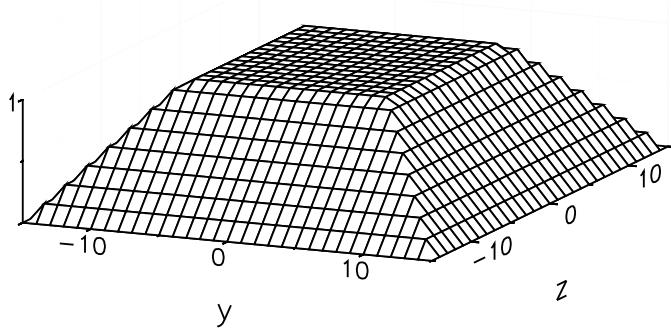


FIGURE 1 – Conditions aux limites sur le plan $x = -20$. L’axe vertical représente la magnitude de la fonction, non la coordonnée z .

5 Le maillage

On a utilisé 2 maillages pour mener les expériences numériques : un maillage pour le four vide, et un autre maillage avec un aliment sphérique dans le four (une boulette, peut-être).

Les 2 maillages ont été créés avec le script FreeFEM, `generate_oven_mesh_3d.edp`.

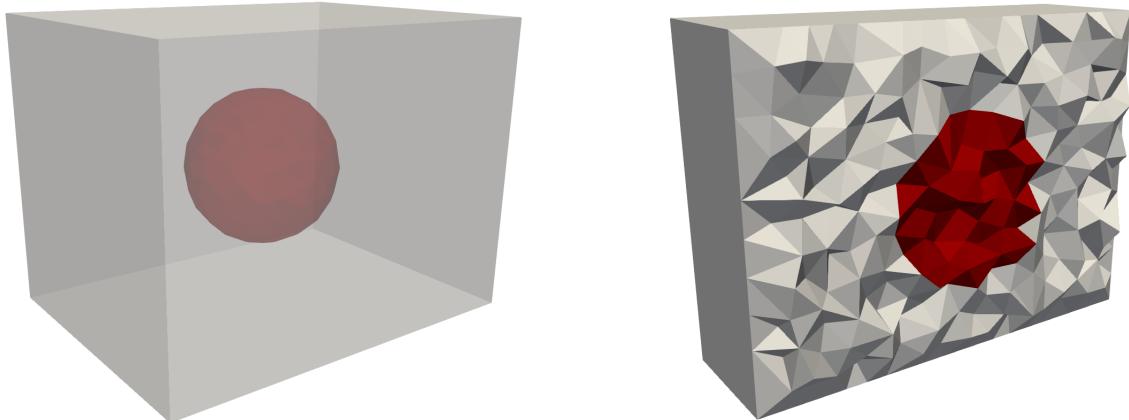


FIGURE 2 – Le maillage du four avec l’aliment dedans.

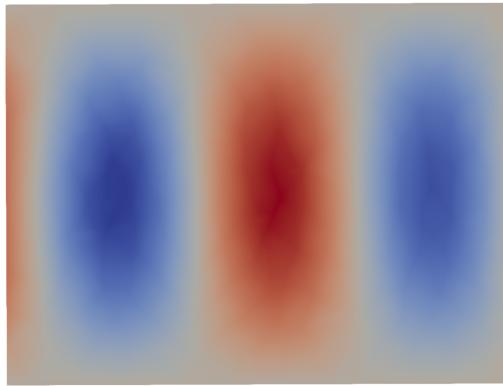
6 Visualisations - Champ électromagnétique

Les figures ci-dessous montrent les parties réelle et imaginaire du champ électromagnétique dans l’enceinte du four vide, et dans l’enceinte du four avec l’aliment dedans.

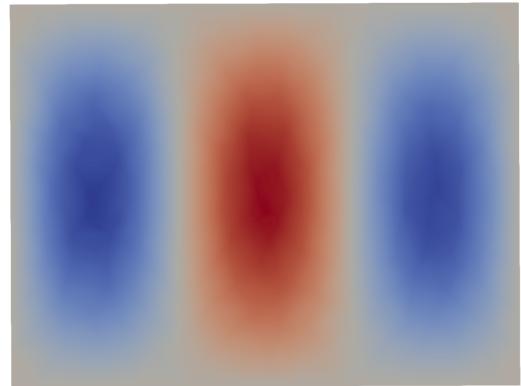
La source du champ magnétique se trouve à gauche dans toutes les figures, et on impose ici $g = 0$ sur toutes les autres parois du four.

Voir les sections 4.1 et 4.2 pour consulter les valeurs des paramètres physiques et les dimensions du four.

6.1 Four vide

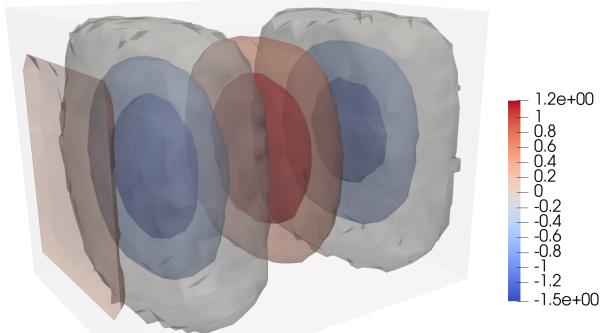


Partie réelle

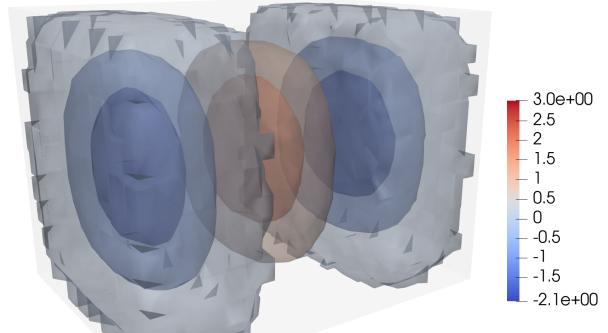


Partie imaginaire

FIGURE 3 – Une tranche de la magnitude du champ électromagnétique dans l’enceinte du four vide.
La tranche est orientée selon l’axe x .

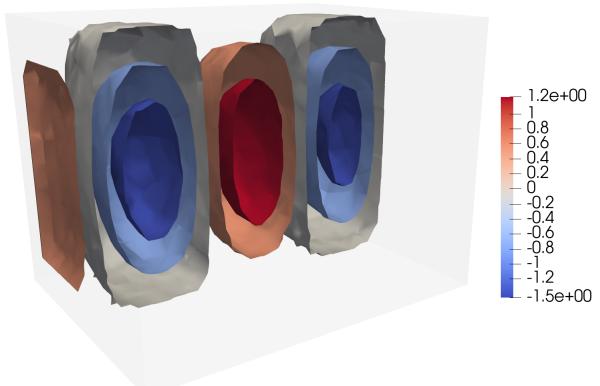


Partie réelle

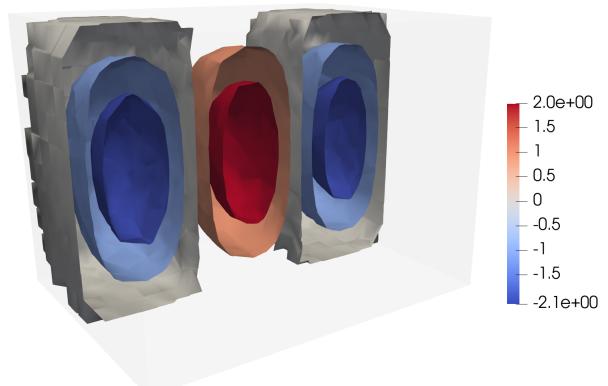


Partie imaginaire

FIGURE 4 – Des tracés de contours de la magnitude du champ électromagnétique dans l’enceinte du four vide.



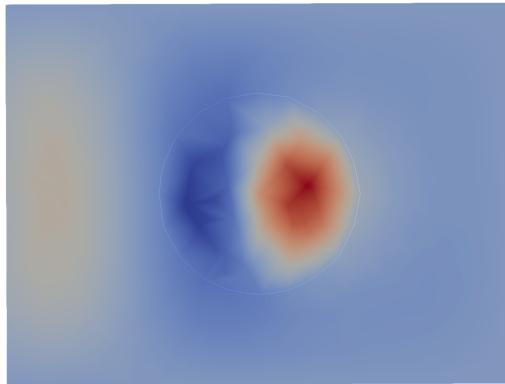
Partie réelle



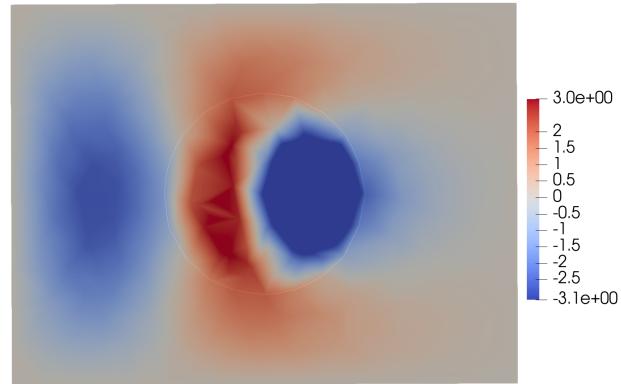
Partie imaginaire

FIGURE 5 – Des clips des tracés de contours de la magnitude du champ électromagnétique dans l’enceinte du four vide. Le clip est au milieu du four dans le plan $x-y$.

6.2 Four avec l'aliment dedans

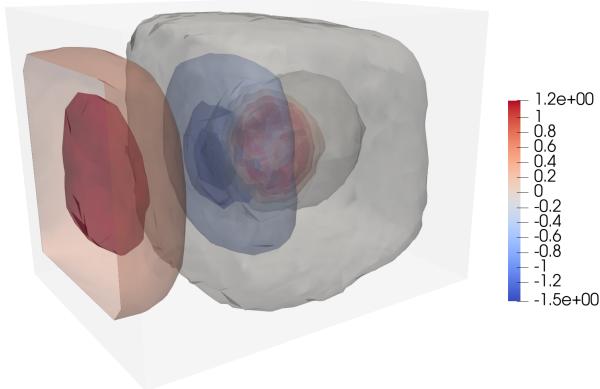


Partie réelle

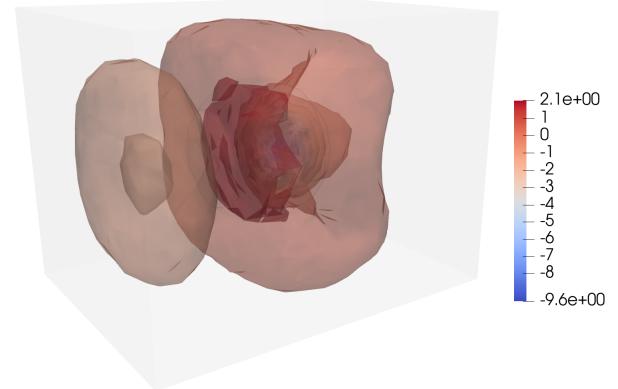


Partie imaginaire

FIGURE 6 – Une tranche de la magnitude du champ électromagnétique dans l'enceinte du four avec l'aliment dedans. La tranche est orientée selon l'axe x .

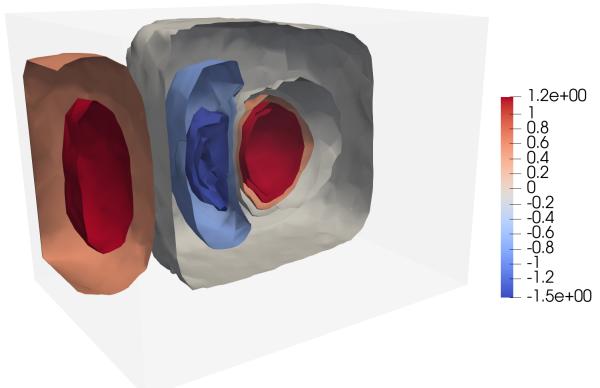


Partie réelle

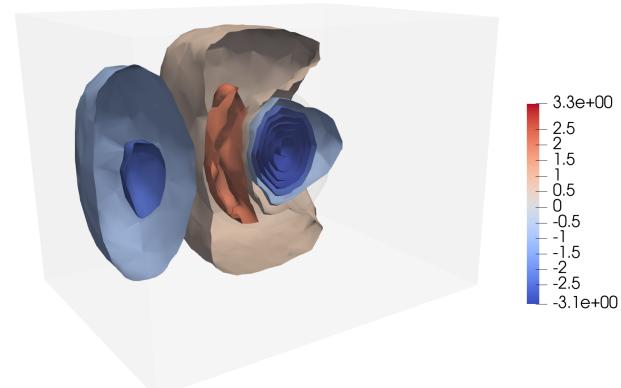


Partie imaginaire

FIGURE 7 – Des tracés de contours de la magnitude du champ électromagnétique dans l'enceinte du four avec l'aliment dedans.



Partie réelle



Partie imaginaire

FIGURE 8 – Des clips des tracés de contours de la magnitude du champ électromagnétique dans l'enceinte du four avec l'aliment dedans. Le clip est au milieu du four dans le plan $x-y$.

7 Visualisations - Chaleur

Les figures ci-dessous montrent la distribution de la chaleur dans l'enceinte du four vide, et dans l'enceinte du four avec l'aliment dedans.

La source du champ magnétique se trouve à gauche dans toutes les figures, et on impose ici $g = 0$ sur toutes les autres parois du four.

Voir les sections 4.1 et 4.2 pour consulter les valeurs des paramètres physiques et les dimensions du four.

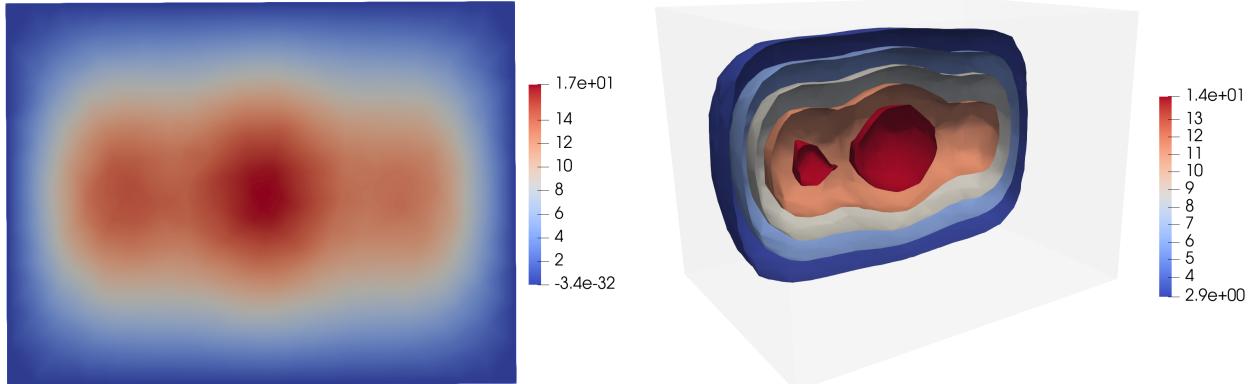


FIGURE 9 – La distribution de la chaleur dans l'enceinte du four vide. À gauche : une tranche prise au milieu de l'enceinte sur l'axe x . À droite : un clip des tracés de contours.

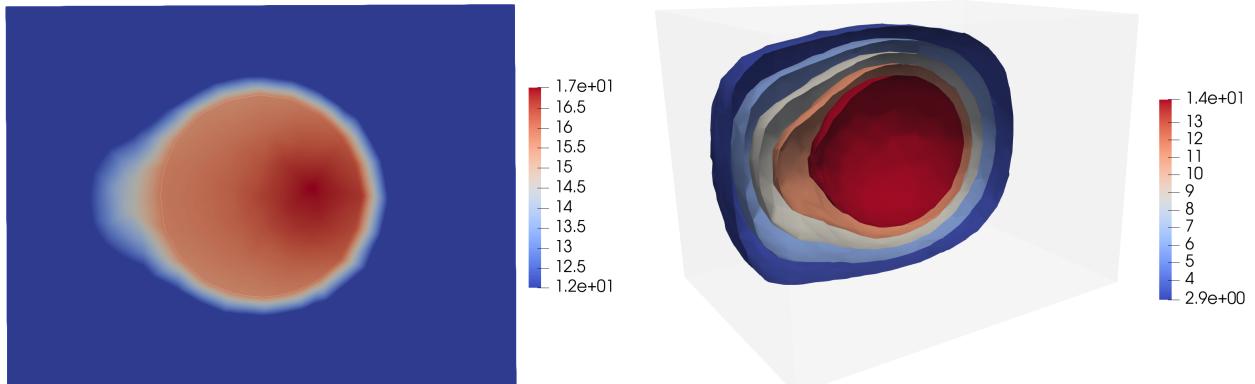


FIGURE 10 – La distribution de la chaleur dans l'enceinte du four avec l'aliment dedans. À gauche : une tranche prise au milieu de l'enceinte sur l'axe x . À droite : un clip des tracés de contours.

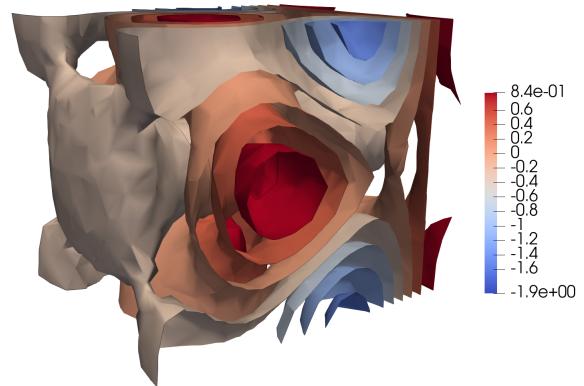
8 Visualisations - Conditions aux limites réflectives

Les figures ci-dessous montrent la magnitude du champ électromagnétique et la distribution de la chaleur dans l'enceinte du four avec l'aliment dedans.

La source du champ magnétique se trouve à gauche dans toutes les figures. Voir les sections 4.1 et 4.2 pour consulter les valeurs des paramètres physiques et les dimensions du four.

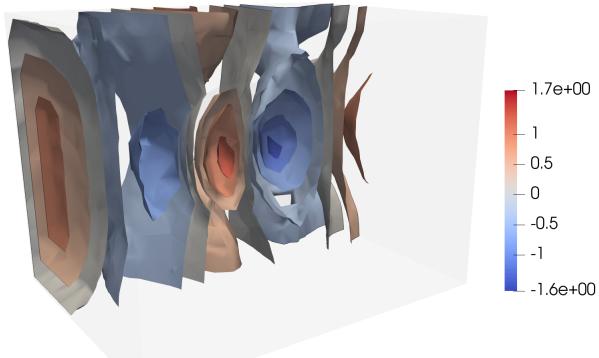


Partie réelle

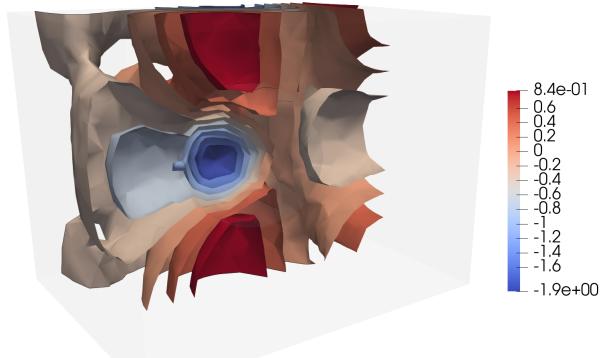


Partie imaginaire

FIGURE 11 – Des tracés de contours de la magnitude du champ électromagnétique dans l'enceinte du four avec l'aliment dedans.

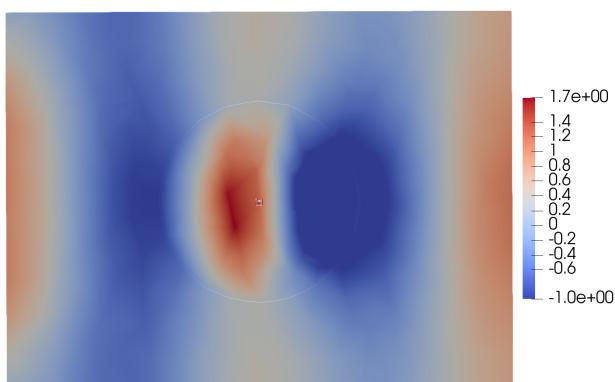


Partie réelle

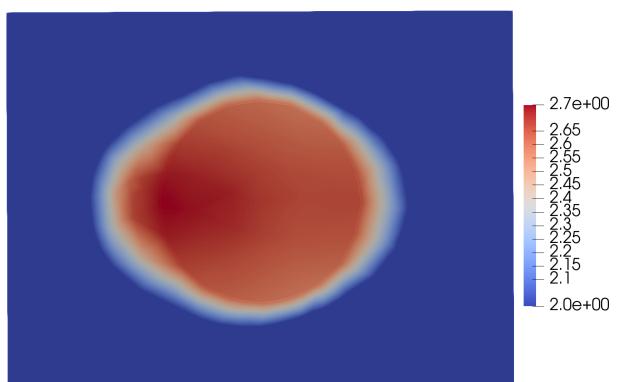


Partie imaginaire

FIGURE 12 – Des clips des tracés de contours de la magnitude du champ électromagnétique dans l'enceinte du four avec l'aliment dedans. Le clip est au milieu du four dans le plan $x-y$.



Champ réel



Chaleur

FIGURE 13 – Des tranches de la partie réelle de la magnitude du champ électromagnétique et la chaleur dans l'enceinte du four avec l'aliment dedans. La tranche est orientée selon l'axe x .

9 Le code

Le code C++ a été développé sous macOS version 10.15.2 avec les outils de développement de Xcode version 11.3.1, et l'environnement de développement CLion version 2019.3.

La plupart du code C++ a été fourni par Professeur Hecht et fait partie du cours 5MM30. Les améliorations principales sont liées à la résolution des éléments finis en 3D avec des coefficients complexes (non-constants).

9.1 Prérequis

Pour compiler et exécuter le code il faut les outils informatiques suivants :

- Compilateur (`g++`)
- `cmake`
- UMFPACK (via SuiteSparse)
- FreeFEM (pour visualiser les résultats)

Pour visualiser les résultats des calculs, le logiciel utilise FreeFEM. Si FreeFEM n'est pas disponible, le logiciel échouera à la fin de son exécution. Mais avant de se terminer, le logiciel écrit plusieurs fichiers contenant des données qui peuvent être utilisés pour générer des visualisations.

9.2 Compilation

Pour configurer et compiler le code, saisissez les commandes suivantes depuis le répertoire racine du projet :

```
cmake .  
cmake --build .
```

Si tout se passe bien le logiciel `SolveOven` devrait être présent dans le répertoire racine du projet.

9.2.1 Dépannage

Si la compilation échoue, il est probable que le compilateur n'arrive pas à trouver des fichiers en-tête liés à UMFPACK (`umfpack.h`).

Sous macOS avec SuiteSparse fournit par Homebrew, ces fichiers se trouvent normalement sous `/usr/local/include`. Si ces fichiers se trouvent ailleurs sur votre système il faut mettre à jour la ligne 8 du fichier `CMakeLists.txt` :

```
...  
include_directories(/usr/local/include)  
...
```

Après avoir changé `CMakeLists.txt` il faut lancer de nouveau les 2 commandes :

```
cmake .  
cmake --build .
```

9.3 Exécution

Afin de lancer le logiciel, saisissez la commande suivante depuis le répertoire racine du projet :

```
./SolveOven
```

`SolveOven` (`src/apps/SolveOven.cpp`) effectue les étapes suivantes :

1. Résolution du problème de Helmholtz
2. Résolution du problème de Poisson
3. Génération des fichiers contenant les données des résultats

4. Lancement de FreeFEM (le script `freefem/view_oven_solution.edp`)

Le script FreeFEM (`freefem/view_oven_solution.edp`) affiche 3 plots au total. Pour procéder au prochain plot appuyez sur la touche entrée.

9.4 Scripts FreeFEM

Dans le répertoire `freefem` se trouve 3 scripts FreeFEM :

1. `view_oven_solution.edp` : afficher des plots à partir des données générées par `SolveOven`
2. `generate_oven_mesh_3d.edp` : générer un maillage 3D qui consiste en le four (région rectangulaire) et, facultativement, l'aliment à cuire (un sphère)
3. `solve_oven_freefem.edp` : résoudre le problème du four avec FreeFEM (pour vérifier la solution C++)

De plus, le script `view_oven_solution.edp` génère des fichiers de données du format VTK pour l'utilisation avec ParaView. La plupart des figures dans ce rapport ont été créées avec ParaView à partir de ces fichiers VTK.

9.5 Fichiers de données

Durant l'exécution, le logiciel `SolveOven` et le script `view_oven_solution.edp` génèrent des fichiers de données qui sont sauvegardés dans le répertoire `visualisation`.

- `freefem_helmholtz.txt` contient les valeurs (complexes) de la solution de l'équation de Helmholtz au format convenable pour FreeFEM
- `freefem_heat.txt` contient les valeurs de la solution de l'équation de Poisson au format convenable pour FreeFEM
- `helmholtz_real.vtu` contient les valeurs réelles de la solution de l'équation de Helmholtz au format VTK (pour ParaView)
- `helmholtz_imag.vtu` contient les valeurs imaginaires de la solution de l'équation de Helmholtz au format VTK (pour ParaView)
- `heat.vtu` contient les valeurs de la solution de l'équation de Poisson au format VTK (pour ParaView)
- `helmholtz.csv` contient les valeurs de la solution de l'équation de Helmholtz au format CSV
- `heat.csv` contient les valeurs de la solution de l'équation de Poisson au format CSV

9.6 Paramètres variables et pointeurs de fonction

Afin de faciliter le calcul des paramètres variables (par exemple, $\varepsilon(x)$ et $K(x)$) le code C++ emploie des pointeurs de fonction.

Pendant l'assemblage des matrices on calcule la quadrature des équations sur chaque simplexe (élément). Cette quadrature requiert le calcul des opérations différentielles et aussi le calcul des paramètres variables qui apparaissent dans les équations. Chaque opération est contenue dans la structure des données `Operation`. Cette structure se trouve dans le fichier `include/solver/Solver3D.hpp` :

```
template<class TypeScalar>
struct Operation {
    function<TypeScalar(Simplex3&)> computeWeight;
    int operatorU, operatorV;
};
```

La fonction `computeWeight` est utilisée pendant le processus de l'assemblage pour calculer les paramètres variables. Dans le fichier `src/apps/SolveOven.cpp`, par exemple, on attribue à `computeWeight` la fonction suivante pour calculer la permittivité relative :

```

complex<double> computePermittivity(Simplex3& simplex) {
    if (inObject(simplex)) {
        return inversePermittivityObject;
    }
    return inversePermittivityAir;
}

```

En redéfinissant la fonction `inObject()` on peut alors utiliser cette méthode pour mettre toute sorte d'objet dans le four sans besoin de créer des maillages supplémentaires. On peut se servir uniquement du maillage du four vide pour effectuer toutes les expériences numériques. Ces objets auront bien sur des frontières plutôt irréguliers, mais pour vite tester la cuisson de divers objets, c'est une méthode super efficace.

En outre, on peut faire varier partout dans l'enceinte (et l'aliment) les valeurs de la permittivité et de la conductivité thermique.

Références

- [1] Frédéric Hecht, Sorbonne Université. *Les Projets - Des EDP à leur résolution par la méthode des éléments finis.*
<https://www.ljll.math.upmc.fr/hecht/ftp/5MM30/LesProjett5MM30.pdf>
- [2] Frédéric Hecht, Laboratoire Jacques-Louis Lions et Sorbonne Université. *Résolution des EDP par la méthode des éléments finis.*
<https://www.ljll.math.upmc.fr/hecht/ftp/5MM30/NotesdeCours5MM30.pdf>
- [3] Frédéric Hecht, Olivier Pironneau, INRIA et Sorbonne Université. *Vector Finite Elements and C++.*
<https://www.ljll.math.upmc.fr/pironneau/publi/publications/r60short.pdf>
- [4] Cindy Guichard, Xavier Claeys, Pierre Marchand, Sorbonne Université. *Note du cours, Mise en oeuvre de la méthode des éléments finis.*
<https://www.ljll.math.upmc.fr/~claeys/4M054.html>
- [5] Wikipédia. *Magnétron.*
<https://fr.wikipedia.org/wiki/Magnétron>
- [6] Wikipédia. *Conductivité thermique.*
https://fr.wikipedia.org/wiki/Conductivité_thermique
- [7] Wikipédia. *Four à micro-ondes.*
https://fr.wikipedia.org/wiki/Four_à_micro-ondes
- [8] Institutt for matematiske fag *Programming project in TMA4220.*
https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4220/2015h/project2b.pdf
- [9] Andrea Moiola et Euan A. Spence, SIAM Review, Vol. 56, No. 2, pp. 274–312 *Is the Helmholtz Equation Really Sign-Indefinite ?.*
https://people.bath.ac.uk/eas25/sirev_final.pdf
- [10] Stéphane Maingot et David Manceau. *Théorie spectrale.*
<http://d.p.manceau.free.fr/ThSpect/ThSpect.pdf>
- [11] Thomas Bäckdahl, University of Edinburgh. *Advanced Partial Differential Equations 1.*
<https://www.maths.ed.ac.uk/~aram/weak.pdf>
- [12] Patrick Joly et Olivier Vacus, INRIA. *Sur l'analyse des conditions aux limites absorbantes pour l'équation de Helmholtz.*
<https://hal.inria.fr/inria-00073841/document>
- [13] John K. Hunter, University of California at Davis. *Notes on Partial Differential Equations.*
<https://www.math.ucdavis.edu/~hunter/pdes/ch4.pdf>
- [14] Yuliya Gorb, University of Houston. *Adjoint operator. Fredholm alternative.*
<https://www.math.uh.edu/~gorb/files/2012fall6360/lecture23.pdf>