

Fisica 3
Corso del prof. Sozzi Marco

Francesco Sorce

Università di Pisa
Dipartimento di Matematica
A.A. 2023/24

Indice

I	Termodinamica	2
1	Introduzione	3
1.1	Prime definizioni	3
1.2	Definizione di temperatura	5
1.2.1	Definizione di temperatura tramite gas	6
1.3	Trasferimento di calore	6
1.3.1	Conduzione	6
1.3.2	Convezione	7
1.3.3	Irraggiamento	7
1.4	Relazione tra parametri indipendenti ed espressioni per l'energia	8
2	Gas ideale	9

Parte I

Termodinamica

Capitolo 1

Introduzione

La termodinamica è lo studio di sistemi dal punto di vista macroscopico. Le massime fondamentali della termodinamica sono

- L'energia dell'universo è costante
- L'entropia dell'universo tende ad aumentare.

1.1 Prime definizioni

Definizione 1.1 (Sistema termodinamico).

Un **sistema termodinamico** è un sistema omogeneo composto da “molti” elementi. Lo **stato** di un sistema termodinamico è univocamente determinato da un numero contenuto di parametri¹ detti **funzioni di stato**.

Il numero di funzioni di stato necessarie per specificare lo stato è detto **numero di gradi di libertà**.

Osservazione 1.2.

Le funzioni di stato di un sistema non dipendono da come esso è venuto ad esistere; se due procedimenti portano da un particolare stato ad un altro, le differenze nelle funzioni di stato dipendono univocamente dallo stato iniziale e quello finale.

Osservazione 1.3 (Sistema ambiente).

Spesso torna comodo considerare una coppia di sistemi, uno detto semplicemente sistema e l'altro **ambiente**.

Definizione 1.4 (Variabili estensive e intensive).

Dato un sistema termodinamico, delle variabili ad esso inerenti si dicono **estensive** se sono proporzionali alla quantità di materia contenuta nel sistema e **intensive** altrimenti.

Esempio 1.5.

Il volume e l'energia sono grandezze estensive mentre la pressione e la temperatura sono intensive.

Definizione 1.6 (Sistemi isolati, chiusi e aperti).

Un sistema termodinamico si dice

- **isolato** se non ammette scambio con l'ambiente,

¹Per esempio temperatura, pressione o volume.

- **chiuso** se non ammette scambio di materia con l'ambiente,
- **aperto** se ammette scambi con l'ambiente.

Per considerare più sistemi termodinamici dobbiamo considerarli come separati da una *parete*.

Definizione 1.7 (Tipi di parete).

Una parete tra due sistemi è

- **adiabatica** se non permette scambi,
- **diatermica** se non ammette scambi di materia,
- **semipermeabile** se fa passare alcuni tipi di materia.
- **permeabile**² se permette ogni tipo di scambio.

Definizione 1.8 (Equilibrio).

Un sistema è in **equilibrio** se le sue funzioni di stato restano “costanti” (per molto tempo rispetto alla scala temporale rilevante).

Un sistema è in **equilibrio termico** se non ci sono differenze di temperatura³.

Un sistema è in **equilibrio termodinamico** se è in equilibrio meccanico, termico e chimico.

Osservazione 1.9.

I sistemi tendono spontaneamente ed irreversibilmente all'equilibrio termodinamico.

Definizione 1.10 (Equazione di stato).

Se quando un sistema è in equilibrio vale una equazione tra le funzioni di stato, queste si dicono **equazioni di stato**.

Definizione 1.11 (Tipi di trasferimenti di energia).

Considerato un sistema termodinamico e l'ambiente definiamo le seguenti tipologie di scambi di energia:

- uno scambio di energia meccanica è detto **lavoro**,
- uno scambio di energia termica è detto **calore**,
- uno scambio di energia chimica è definito da

$$\Delta E = \int \mu dn,$$

dove n è il numero di particelle coinvolte e μ è il **potenziale chimico**.⁴

Affermiamo per convenzione che uno scambio di energia ha segno *positivo* se il sistema acquista energia dall'ambiente.

Osservazione 1.12.

Il lavoro meccanico è dato da $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$. È un fatto generale che il lavoro ha la forma

$$\int (\text{intensiva}) d(\text{estensiva}).$$

²una parete permeabile è come se non ci fosse

³definiremo la temperatura in seguito.

⁴questa quantità ha senso solo per sistemi aperti.

Definizione 1.13 (Processi quasistatici).

Un sistema è **quasi in equilibrio** se è così vicino all'equilibrio che le equazioni di stato si possono considerare valide. Un **processo quasistatico** è descrivibile da una successione di variazioni infinitesime tra stati vicini all'equilibrio.

Se non sono presenti "attriti", un processo quasistatico è detto **reversibile**.

Un processo è detto **totalmente reversibile** se è reversibile e la sua interazione con l'ambiente è reversibile.

Definizione 1.14 (Termostato).

Un **termostato** è un sistema grande a sufficienza in modo che anche se vi si aggiunge calore esso non cambia di temperatura. È dunque una sorgente ideale di calore.

Definizione 1.15 (Termometro).

Un **termometro** è un sistema piccolo a sufficienza in modo che ogni scambio di calore è trascurabile.

1.2 Definizione di temperatura

Principio 0: Due sistemi in equilibrio termico con un terzo sono in equilibrio tra loro.

Proposizione 1.16 (Temperatura empirica).

*Ogni sistema termodinamico ammette una funzione che è costante in stato di equilibrio. La costante è detta **temperatura empirica**.*

Dimostrazione.

Consideriamo tre sistemi, con funzioni di stato (x_1, y_1) , (x_2, y_2) e (x_3, y_3) in equilibrio tra loro. Esistono dunque equazioni di stato della forma

$$\begin{cases} x_3 = f(x_1, y_1, y_3) \\ x_3 = g(x_2, y_2, y_3) \end{cases}$$

poiché i sistemi 1 e 2 sono in equilibrio, se eguagliamo le due equazioni sappiamo che ciò che otteniamo non dipende da y_3 , quindi

$$\begin{cases} f(x_1, y_1, y_3) = \phi_1(x_1, y_1)\zeta(y_3) + \eta(y_3) \\ g(x_2, y_2, y_3) = \phi_2(x_2, y_2)\zeta(y_3) + \eta(y_3) \end{cases}$$

dunque se 1 e 2 sono in equilibrio si ha che

$$\phi_1(x_1, y_1) = \phi_2(x_2, y_2),$$

ma i due membri dipendono da insiemi di variabili disgiunti, quindi esiste θ_0 tale che entrambe queste espressioni eguagliano θ_0 se sono in equilibrio. Il valore θ_0 è detto la temperatura empirica dei sistemi, i quali sono in equilibrio solo se hanno la stessa temperatura empirica. \square

Definizione 1.17 (Isoterme).

Dato un sistema termodinamico e un valore θ_0 di temperatura empirica, chiamiamo **isoterma a livello** θ_0 l'insieme degli stati del sistema la cui temperatura è θ_0 .

Fatto 1.18 (Punto triplo).

Considerando come sistema termodinamico dell'acqua esiste una precisa combinazione di temperatura e pressione tale per cui essa risulta in transizione tra gli stati solido liquido e gassoso simultaneamente.

Questo stato si chiama **punto triplo** e i valori in questione sono una temperatura di 0.01°C e una pressione di 0.006 atm .

1.2.1 Definizione di temperatura tramite gas

A bassa pressione i gas si comportano tutti allo stesso modo⁵.

Se fissiamo il volume e la quantità di materia del gas possiamo definire θ in modo tale che $p = p_0(1 + \alpha\theta)$, cioè poniamo

$$\theta = \frac{1}{\alpha} \frac{p - p_0}{p_0}.$$

Se imponiamo che l'acqua congeli per $\theta = 0$ e bolli per $\theta = 100$ allora si ricaviamo $1/\alpha = 273.15$. Notiamo inoltre⁶

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\alpha^{-1} + \theta_2}{\alpha^{-1} + \theta_1} = \frac{\theta'_2}{\theta'_1}.$$

Possiamo dunque definire la temperatura (in Kelvin) come

$$T = \lim_{p^{(PT)} \rightarrow 0} 273.16 \frac{p}{p^{(PT)}}$$

dove $p^{(PT)}$ è la pressione del gas nel termometro quando questo sistema è in equilibrio con il sistema di punto triplo con l'acqua. Il limite corrisponde a prendere gas sempre più rarefatti, cioè a lavorare nel limite dei gas perfetti dove vale la proporzionalità sopra.

Sfruttando questa definizione possiamo costruire un termometro a gas come in figura
[FIGURA TERMOMETRO A GAS]

Quando il gas è alla temperatura che vogliamo misurare misuriamo la differenza di altezza tra il livello a contatto con il gas e il livello di controllo posto a pressione atmosferica. Questa differenza è proporzionale alla differenza di pressione e questo ci permette di ricavare la temperatura se la fissiamo per quando è nel punto critico.

1.3 Trasferimento di calore

Il trasferimento di calore, cioè di energia derivante da una differenza di temperatura, avviene in tre modi: conduzione, convezione ed irraggiamento.

1.3.1 Conduzione

Parliamo di **conduzione** quando il trasferimento di calore avviene per contatto ma senza scambio di materia (attraverso una parete diatermica).

Empiricamente riscontriamo

Fatto 1.19 (Legge di Fourier).

Vale la relazione

$$\frac{1}{A} \frac{\delta Q}{\Delta t} = -\kappa \frac{\Delta T}{\Delta X},$$

dove T è la temperatura, X è la distanza tra i punti tra cui stiamo calcolando la differenza di temperatura, A è l'area ortogonale alla direzione lungo la quale si propaga il calore e κ è una costante detta **conducibilità termica**.

⁵rispettano l'equazione di stato $pV = f(\theta)$

⁶l'aggiunta di α^{-1} corrisponde alla traslazione che trasforma gradi Celsius in gradi Kelvin.

L'unità di misura della conducibilità termica è

$$[\kappa] = \frac{W}{mK} \approx \begin{cases} 10^2 & \text{metalli} \\ 0.1 & \text{gas} \end{cases}.$$

Possiamo precisare la legge di Fourier introducendo la **corrente di calore** \vec{J}_Q . La legge assume la forma

$$\vec{J}_Q = -k\vec{\nabla}T.$$

Concentrandosi su uno dei sistemi possiamo scrivere

$$\boxed{\delta Q = cm\delta T}$$

dove m è la massa e c è il **calore specifico**.

Possiamo calcolare il calore totale che entra dentro una superficie per unità di tempo come

$$\int_V c \frac{\partial T}{\partial t} \rho dV = \frac{1}{\Delta t} \int_{\partial V} \delta Q = - \int_{\partial V} \vec{J}_Q \cdot d\vec{\Sigma} = - \int_V \nabla \cdot \vec{J}_Q dV = \int_V k \nabla^2 T dV.$$

Ricaviamo dunque

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho c} \nabla^2 T}$$

Questa è la famosa *equazione del calore*.

1.3.2 Convezione

Parliamo di **convezione** quando il trasferimento di calore avviene tramite lo spostamento di materia.

La formula rilevante in questo caso è

$$\frac{1}{A} \frac{\delta Q}{\Delta t} = h \Delta T,$$

dove h è il **coefficiente convettivo**.

1.3.3 Irraggiamento

Parliamo di **irraggiamento** quando un corpo semplicemente emette energia come radiazione.

La formula rilevante in questo caso è

$$\frac{1}{A} \frac{\delta Q}{\Delta t} = \varepsilon \sigma (T^4 - T_0^4),$$

dove T_0 è la temperatura dell'ambiente, σ è una costante uguale per tutti i materiali e ε dipende dai materiali.

1.4 Relazione tra parametri indipendenti ed espressioni per l'energia

Fatto 1.20 (Relazione tra parametri indipendenti e espressioni per l'energia).

Il numero di parametri di un sistema indipendenti è pari al numero di coppie di variabili che compaiono nelle espressioni per l'energia.

Esempio 1.21 (Filo).

Un filo ha come funzioni di stato la lunghezza, la tensione e la temperatura, che indichiamo L , τ e T rispettivamente.

Le formule per l'energia contengono τ ed L per il lavoro ($\delta W = \tau dL$) e L e T per il calore⁷. Segue che il sistema filo ha due parametri indipendenti, dunque deve esistere una equazione che lega i parametri citati. In questo caso è la legge di Hooke ($\tau = -k(L - L_0)$).

Esempio 1.22 (Fluidi).

Ragioniamo in modo simile a prima, stavolta i parametri sono volume, pressione e temperatura.

⁷ L appare implicitamente in quanto unica grandezza estensiva.

Capitolo 2

Gas ideale

Definizione 2.1 (Mole).

Una **mole di una sostanza** corrisponde a $6.02 \cdot 10^{23}$ particelle di quella sostanza. La costante è detta **numero di Avogadro** e la indichiamo con $N_a \text{mol}^{-1}$.

Definizione 2.2 (Condizioni standard).

Un gas è in **condizioni standard (STP)** se è alla temperatura di 0°C e alla pressione di $1 \text{ atm} = 101.3245 \text{ kPa}$.

Per i gas ideali valgono le seguenti leggi:

Fatto 2.3 (Legge di Boyle).

Se T è costante

$$V \propto \frac{1}{p}$$

Fatto 2.4 (Legge di Charles).

Se p è costante

$$V \propto (1 + \alpha T)$$

Fatto 2.5 (Legge di Gay-Lussac).

Se V è costante

$$p \propto T$$

Fatto 2.6 (Legge di Avogadro).

Se p e T sono fissate, tutti i gas occupano lo stesso volume se consistono della stessa quantità di materia, in particolare

$$V \propto n.$$

Una mole di gas in condizioni standard occupa un volume di 22.4ℓ (litri).

Combinando le leggi appena citate arriviamo alla **legge dei Gas perfetti**

$$\boxed{pV = nRT}$$

dove p è la pressione, V è il volume, n è il numero di moli, T è la temperatura e R è la **costante fondamentale dei gas** e vale $8.314 \frac{\text{J}}{\text{K mol}}$.

Definizione 2.7 (Costante di Boltzmann).

Definiamo la **costante di Boltzmann** k_b in modo tale che

$$R = N_a k_b.$$

Formulario