

Fisica 3
Corso del prof. Sozzi Marco

Francesco Sorce

Università di Pisa
Dipartimento di Matematica
A.A. 2023/24

Indice

I Termodinamica	5
1 Equilibrio e Calore	6
1.1 Prime definizioni	6
1.2 Princípio 0, Equilibrio e Temperatura empirica	7
1.2.1 Tipi di equilibrio	7
1.2.2 Processi quasistatici	8
1.2.3 Temperatura empirica	8
1.3 Primo principio e Definizione di calore	8
2 Secondo principio e cicli	10
2.1 Enunciati di Kelvin e Clausius	10
2.2 Cicli e temperatura assoluta	11
2.2.1 Processo ciclico	11
2.2.2 Ciclo di Carnot	12
2.2.3 Temperatura assoluta	13
2.3 Entropia	14
2.3.1 Teorema di Clausius e definizione	14
2.3.2 Entropia globale aumenta	16
2.3.3 Sistema, Ambiente ed Entropia	18
2.4 Terzo principio	19
3 Introduzione al Calore	20
3.1 Modalità di trasferimento di calore	20
3.1.1 Conduzione	20
3.1.2 Convezione	21
3.1.3 Irraggiamento	21
4 Sistemi idrostatici	22
4.1 Differenziale di volume	22
4.2 Lavoro per sistema idrostatico	24
4.3 Capacità termica	24
4.3.1 Processi politropici	26
4.4 Potenziali termodinamici	26
4.4.1 Energia interna ed entropia	26
4.4.2 Entalpia	28
4.4.3 Energia libera di Helmholtz e Gibbs	28
4.4.4 Riassunto	30
4.5 Sistemi aperti di gas	31

5 Gas e Gas ideali	32
5.1 Definizioni e legge dei gas perfetti	32
5.2 Coefficiente di espansione volumetrica e compressibilità isoterma	33
5.3 Capacità termica	33
5.4 Energia interna, lavoro e calore	35
5.4.1 Isobara	36
5.4.2 Isocora	36
5.4.3 Isoterma	36
5.4.4 Adiabatica	37
5.5 Ciclo di Carnot per Gas ideali	38
5.6 Potenziali termodinamici	39
5.7 Equazione di stato dei gas reali	40
6 Transizione di fase	41
6.1 Transizione tra due fasi	41
6.1.1 Contenitore chiuso	42
6.2 Caso generale	42
6.2.1 Grafici delle transizioni di fase	44
6.2.2 Definizione di temperatura tramite gas	44
6.3 Calore latente	45
7 Teoria cinetica dei gas	47
7.1 Modello dei gas ideali	47
7.2 Distribuzione di Maxwell-Boltzmann	50
7.3 Entropia nel modello statistico	52
7.3.1 Mescolamento dello stesso gas	53
7.3.2 Espansione isoterma	54
7.3.3 Isocora	54
7.4 Informazione	54
7.4.1 Princípio di massima entropia	56
II Relatività speciale	58
8 Trasformazioni di Lorenz	59
8.1 Relatività galileiana e parentesi storica	59
8.1.1 Il problema delle equazioni di Maxwell e l'etere	60
8.2 Trasformazioni di Lorenz	63
8.2.1 Dilatazione dei tempi e contrazione delle lunghezze	65
8.3 Trasformazioni di velocità	66
9 Cinematica relativistica	68
9.1 Introduzione ai quadrivettori	68
9.1.1 Derivazione delle trasformazioni di Lorenz	69
9.1.2 Rapidità	70
9.2 Quadrivelocità e Quadriaccelerazione	72
9.2.1 Tempo proprio e quadrivelocità	72
9.2.2 Quadriaccelerazione	73
9.3 Quadrigradiente	74

10 Dinamica relativistica	76
10.1 Leggi di Newton relativistiche	76
10.1.1 Secondo principio della dinamica	76
10.1.2 Terzo principio della dinamica	79
10.2 Effetto Doppler	79
10.2.1 Versione classica	80
10.2.2 Versione relativistica	80
10.3 Elettro-Magnetismo	81
 III Accenni di meccanica quantistica	 85
11 Problemi di inizio 900	86
11.1 Richiami su energia trasportata da onde	86
11.2 Pressione di radiazione	86
11.2.1 Gas di onde elettromagnetiche	87
11.3 Radiazione di Corpo nero	88
11.3.1 Definizione e corpo nero scatola	88
11.3.2 Legge di Kirchhoff	89
11.3.3 Legge di Stefan-Boltzmann	90
11.4 Problema del corpo nero	91
11.4.1 Legge di Wien	91
11.4.2 Formula di Rayleigh-Jeans	94
11.5 La soluzione di Planck	95
11.6 Altri fenomeni	97
11.6.1 Effetto fotoelettrico	97
11.6.2 Effetto Compton	97
11.6.3 Spettri atomici	97
 12 Onde ed Equazione di Schrödinger	 98
12.1 Richiami di onde	98
12.2 Esperimento della doppia fenditura	99
12.2.1 Interpretazione	101
12.3 Equazione di Schrödinger	101
12.4 Equazione a variabili separabili	102
12.4.1 Esempi di soluzioni al variare del potenziale	104
 13 Meccanica Quantistica	 109
13.1 Operatori autoaggiunti	109
13.2 Operatori principali	110
13.2.1 Operatore Hamiltoniano	110
13.2.2 Operatore Posizione	111
13.2.3 Operatore Quantità di moto	112
13.3 Operatori incompatibili e Principio di indeterminazione	113
 IV Appendice	 116
A Richiami matematici	117
A.1 Derivate parziali e Jacobiane	117
A.2 Differenziali esatti	118
A.3 Trasformazione di Legendre	119

A.4 Regole di Prostaferesi per funzioni trigonometriche iperboliche	119
A.5 Quantità che dipende “per unità” di un’altra	120
B Chiusura	121

Parte I

Termodinamica

Capitolo 1

Equilibrio e Calore

La termodinamica è lo studio di sistemi dal punto di vista macroscopico.
Le massime fondamentali della termodinamica sono

- L'energia dell'universo è costante
- L'entropia dell'universo tende ad aumentare.

1.1 Prime definizioni

Definizione 1.1 (Sistema termodinamico).

Un **sistema termodinamico** è un sistema omogeneo composto da “molti” elementi.
Lo **stato** di un sistema termodinamico è univocamente determinato da un numero contenuto di parametri¹ detti **funzioni di stato**.

Il numero di funzioni di stato necessarie per specificare lo stato è detto **numero di gradi di libertà**.

Osservazione 1.2.

Le funzioni di stato di un sistema non dipendono da come esso è venuto ad esistere;
se due procedimenti portano da un particolare stato ad un altro, le differenze nelle funzioni di stato dipendono univocamente dallo stato iniziale e quello finale.

Osservazione 1.3 (Sistema ambiente).

Spesso torna comodo considerare una coppia di sistemi, uno detto semplicemente sistema e l'altro **ambiente**.

Definizione 1.4 (Variabili estensive e intensive).

Dato un sistema termodinamico, delle variabili ad esso inerenti si dicono **estensive** se sono proporzionali alla quantità di materia contenuta nel sistema e **intensive** altrimenti.

Esempio 1.5.

Il volume e l'energia sono grandezze estensive mentre la pressione e la temperatura sono intensive.

Osservazione 1.6.

Il lavoro meccanico è dato da $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$. È un fatto generale che il lavoro ha la forma

$$\int (\text{intensiva})d(\text{estensiva}).$$

¹Per esempio temperatura, pressione o volume.

Definizione 1.7 (Sistemi isolati, chiusi e aperti).

Un sistema termodinamico si dice

- **isolato** se non ammette scambio con l'ambiente,
- **chiuso** se non ammette scambio di materia con l'ambiente,
- **aperto** se ammette scambi con l'ambiente.

Per considerare più sistemi termodinamici dobbiamo considerarli come separati da una *parete*.

Definizione 1.8 (Tipi di parete).

Una parete tra due sistemi è

- **adiabatica** se non permette scambi,
- **diatermica** se non ammette scambi di materia,
- **semipermeabile** se fa passare alcuni tipi di materia.
- **permeabile²** se permette ogni tipo di scambio.

1.2 Principio 0, Equilibrio e Temperatura empirica

1.2.1 Tipi di equilibrio

Definizione 1.9 (Equilibrio).

Un sistema è in **equilibrio** se le sue funzioni di stato restano “costanti” (per molto tempo rispetto alla scala temporale rilevante).

Un sistema è in **equilibrio termico** se non ci sono differenze di temperatura³.

Un sistema è in **equilibrio termodinamico** se è in equilibrio meccanico, termico e chimico.

Osservazione 1.10.

I sistemi tendono spontaneamente ed irreversibilmente all'equilibrio termodinamico.

Fatto 1.11 (0-esimo principio della termodinamica).

Due sistemi in equilibrio termico con un terzo sono in equilibrio tra loro.

Definizione 1.12 (Equazione di stato).

Se quando un sistema è in equilibrio vale una equazione tra le funzioni di stato, queste si dicono **equazioni di stato**.

Osservazione 1.13 (Segno degli scambi di energia).

NOTA BENE: Affermiamo per convenzione che uno scambio di energia ha segno *positivo* se il sistema **acquista energia dall'ambiente**.

²una parete permeabile è come se non ci fosse

³definiremo la temperatura in seguito.

1.2.2 Processi quasistatici

Definizione 1.14 (Processi quasistatici).

Un sistema è **quasi in equilibrio** se è così vicino all'equilibrio che le equazioni di stato si possono considerare valide.

Un **processo quasistatico** è un processo tale per cui il sistema è quasi in equilibrio in ogni istante.

Se non sono presenti “attriti”, un processo quasistatico è detto **reversibile**.

Un processo è detto **totalmente reversibile** se è reversibile e la sua interazione con l'ambiente è reversibile.

Osservazione 1.15.

Un processo quasi statico va pensato come un processo molto lento; così lento da poter pensare al sistema come “sempre in equilibrio”.

1.2.3 Temperatura empirica

Proposizione 1.16 (Temperatura empirica).

*Ogni sistema termodinamico ammette una funzione che è costante in stato di equilibrio. La costante è detta **temperatura empirica**.*

Dimostrazione.

Consideriamo tre sistemi, con funzioni di stato (x_1, y_1) , (x_2, y_2) e (x_3, y_3) in equilibrio tra loro. Esistono dunque equazioni di stato della forma

$$\begin{cases} x_3 = f(x_1, y_1, y_3) \\ x_3 = g(x_2, y_2, y_3) \end{cases}$$

poiché i sistemi 1 e 2 sono in equilibrio, se eguagliamo le due equazioni sappiamo che ciò che otteniamo non dipende da y_3 , quindi

$$\begin{cases} f(x_1, y_1, y_3) = \phi_1(x_1, y_1)\zeta(y_3) + \eta(y_3) \\ g(x_2, y_2, y_3) = \phi_2(x_2, y_2)\zeta(y_3) + \eta(y_3) \end{cases}$$

dunque se 1 e 2 sono in equilibrio si ha che

$$\phi_1(x_1, y_1) = \phi_2(x_2, y_2),$$

ma i due membri dipendono da insiemi di variabili disgiunti, quindi esiste θ_0 tale che entrambe queste espressioni egualiano θ_0 se sono in equilibrio. Il valore θ_0 è detto la temperatura empirica dei sistemi, i quali sono in equilibrio solo se hanno la stessa temperatura empirica. \square

Definizione 1.17 (Isoterme).

Dato un sistema termodinamico e un valore θ_0 di temperatura empirica, chiamiamo **isoterra a livello θ_0** l'insieme degli stati del sistema la cui temperatura è θ_0 .

1.3 Primo principio e Definizione di calore

Fatto 1.18 (Primo principio della termodinamica).

L'energia interna di un sistema isolato si conserva.

Definizione 1.19 (Calore).

Il **calore** è la differenza tra la variazione di energia interna e il lavoro compiuto su un sistema termodinamico, esplicitamente

$$\boxed{\Delta U = Q + W}$$

Osservazione 1.20.

Il calore e il lavoro non sono funzioni di stato, ma la loro somma sì.

Osservazione 1.21 (Primo principio in forma differenziale).

Scrivendo il primo principio in termini di infinitesimi troviamo

$$dU = \delta Q + \delta W,$$

in particolare per i gas ideali vale

$$dU = \delta Q - pdV.$$

Osservazione 1.22.

In una trasformazione adiabatica, il lavoro è dato dalla differenza di energia interna.

Esempio 1.23 (Coppia di sistemi dentro un contenitore adiabatico).

Consideriamo due sistemi A e B dentro un contenitore adiabatico. Per il primo principio

$$0 = \Delta U = \Delta U_A + \Delta U_B = Q_A + Q_B + \underbrace{W_A + W_B}_{=W}.$$

I trasferimenti di calore possono avvenire solo tra A e B , quindi $Q_A + Q_B = 0$ e $W = 0$. Quanto scritto è una “legge di conservazione del calore” in questo tipo di sistema.

Capitolo 2

Secondo principio e cicli

2.1 Enunciati di Kelvin e Clausius

Fatto 2.1 (Secondo principio della termodinamica, formulazione di Kelvin).
Non esiste un processo che trasformi interamente calore in lavoro.

Fatto 2.2 (Secondo principio della termodinamica, formulazione di Clausius).
Non esiste un processo il cui unico risultato sia trasferire calore da una sorgente più fredda ad una più calda.

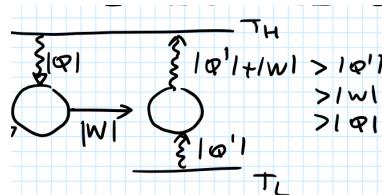
Proposizione 2.3.

Le due formulazioni del secondo principio sono equivalenti.

Dimostrazione.

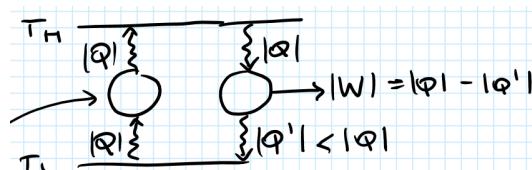
Mostriamo che le loro negazioni sono equivalenti:

$\neg K \implies \neg C$ Consideriamo il diagramma



Notiamo che $|Q'| + |W| > \max\{|Q'|, |W|\} = \max\{|Q'|, |Q|\}$. Considerando ora il sistema di due macchine come un insieme troviamo una macchina che trasferisce un calore $|Q'|$ dalla sorgente fredda alla sorgente calda, negando Clausius.

$\neg C \implies \neg K$ Procediamo analogamente a prima



e leggendo questo diagramma come un insieme la macchina avrebbe preso del calore $|Q| - |Q'|$ dalla sorgente θ_L e lo ha trasformato interamente in lavoro, negando Kelvin.

□

2.2 Cicli e temperatura assoluta

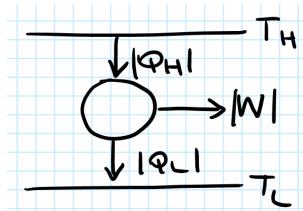
2.2.1 Processo ciclico

Definizione 2.4 (Processo ciclico).

Un processo è **ciclico** se lo stato iniziale e finale sono lo stesso. Se qualcosa realizza un processo ciclico è detto **motore**.

Osservazione 2.5 (Diagramma di una macchina a due sorgenti).

Spesso torna comodo fare diagrammi come in figura



Osservazione 2.6.

Per un processo ciclico, $\Delta U = 0$, dunque $Q = -W$.

$$-W = Q = Q_H + Q_L$$

dove Q_H è il calore che il sistema acquista da una sorgente calda e Q_L è il calore che acquista da una sorgente fredda¹. Notiamo che

$$|W| = |Q_H| - |Q_L|.$$

Definizione 2.7 (Efficienza).

L'**efficienza** di un processo ciclico è data da²

$$\eta = \frac{|W|}{|Q_H|} = 1 - \frac{|Q_L|}{|Q_H|}.$$

Definizione 2.8 (Frigorifero e coefficiente di prestazione).

Un **frigorifero** è un motore che trasferisce calore da una sorgente fredda ad una calda. Il suo **coefficiente di prestazione** è dato da

$$COP = \frac{|Q_L|}{|W|} = \frac{1 - \eta}{\eta}.$$

Definizione 2.9 (Pompa di calore).

Una **pompa di calore** è una macchina volta a trasformare lavoro in calore verso la sorgente calda. La sua efficienza è quindi l'inversa di quella di un motore standard:

$$\frac{|Q_H|}{|W|} = \frac{1}{\eta}.$$

¹ Q_H è positivo e Q_L è negativo.

²Intuitivamente l'efficienza è una misura di quanto lavoro riesco a realizzare in proporzione a quanto calore abbiamo dovuto inserire nel sistema. L'altra forma ci dice che l'efficienza è una conversione perfetta eccetto per il calore che viene disperso senza diventare lavoro (Q_L).

Teorema 2.10 (di Carnot).

Un ciclo reversibile è il più efficiente che lavori tra due sorgenti θ_H e θ_L .

Dimostrazione.

Consideriamo due cicli S ed S' di cui S reversibile. Per il primo principio $-W = |Q_H| - |Q_L|$ e $-W' = |Q'_H| - |Q'_L|$.

Con precisione arbitraria, siano N ed N' interi positivi tali che

$$\frac{|Q_H|}{|Q'_H|} \approx \frac{N'}{N}.$$

Facendo fare N' cicli a S' ed N cicli reversibili *al contrario*³ a S troviamo

$$-W_{tot} = N'(-W') - N(-W) = N'(|Q'_H| - |Q'_L|) - N(|Q_H| - |Q_L|)$$

$$\begin{aligned} Q_{H,tot} &= N' |Q'_H| - N |Q_H| \\ -Q_{L,tot} &= N' |Q'_L| - N |Q_L|. \end{aligned}$$

Per il primo principio, facendo lavorare in parallelo le due macchine

$$-W_{tot} = Q_{H,tot} + Q_{L,tot}.$$

Scegliendo N ed N' arbitrariamente grandi possiamo approssimare $Q_{H,tot} \approx 0$, e quindi

$$-W_{tot} \approx Q_{L,tot}.$$

Per la formulazione di Kelvin del secondo principio si ha che $-W_{tot} \leq 0^4$, quindi $Q_{L,tot} \leq 0$, cioè

$$N' |Q'_L| - N |Q_L| \geq 0 \iff \frac{N'}{N} \geq \frac{|Q_L|}{|Q'_L|}.$$

Passando al limite negli N e N' si ha che

$$\frac{|Q_L|}{|Q_H|} \leq \frac{|Q'_L|}{|Q'_H|} \implies \eta = 1 - \frac{|Q_L|}{|Q_H|} \geq 1 - \frac{|Q'_L|}{|Q'_H|} = \eta'.$$

□

Corollario 2.11 (I cicli reversibili hanno la stessa efficienza).

Tutti i cicli reversibili hanno la stessa efficienza.

Dimostrazione.

Applicando il teorema abbiamo le due diseguaglianze scambiando i ruoli tra i due cicli.

□

2.2.2 Ciclo di Carnot

Definiamo esplicitamente un ciclo reversibile:

Definizione 2.12 (Ciclo di Carnot).

Il **ciclo di Carnot** è composto dalle seguenti trasformazioni quasistatiche reversibili:

³qui usiamo la reversibilità. Se prima il sistema trasformava calore in lavoro con qualche perdita di calore ora il sistema riceve lavoro e un po' di calore per fornire calore alla sorgente calda

⁴se così non fosse la macchina composta starebbe convertendo il calore $|Q_{L,tot}|$ in lavoro sull'esterno $|W_{tot}|$, contraddicendo il secondo principio.

1. isoterma a temperatura θ_H ,
2. adiabatica da θ_H a θ_L ,
3. isoterma a temperatura θ_L ,
4. adiabatica da θ_L a θ_H .

Osservazione 2.13.

Gli unici scambi di calore avvengono lungo l'isoterma, che ha senso solo a regime quasistatico (dato che il calore è uno scambio derivante da una differenza di energia).

Fatto 2.14.

Il ciclo di Carnot è l'unico ciclo che effettua scambi in modo reversibile tra due sorgenti.

2.2.3 Temperatura assoluta

Il teorema di Carnot (2.10) ci suggerisce un modo per ridefinire la temperatura in termini della temperatura empirica senza bisogno di ricorrere ai gas:

Per il teorema di Carnot esiste f tale che dopo un ciclo reversibile

$$\frac{|Q_H|}{|Q_L|} = f(\theta_L, \theta_H).$$

Collegando due tali processi facendo sì che il calore rilasciato dal primo sia quello assorbito dal secondo ricaviamo le equazioni

$$\frac{|Q_3|}{|Q_2|} = f(\theta_2, \theta_3), \quad \frac{|Q_2|}{|Q_1|} = f(\theta_1, \theta_2), \quad \frac{|Q_3|}{|Q_1|} = f(\theta_1, \theta_3),$$

dove $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \theta_3$.

Segue dunque l'identità

$$f(\theta_1, \theta_2) = \frac{f(\theta_1, \theta_3)}{f(\theta_2, \theta_3)}.$$

Derivando rispetto a θ_3 ricaviamo

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{f(\theta_2, \theta_3)} \frac{\partial f}{\partial \theta_3}(\theta_1, \theta_3) - \frac{f(\theta_1, \theta_3)}{(f(\theta_2, \theta_3))^2} \frac{\partial f}{\partial \theta_3}(\theta_2, \theta_3) \\ &\frac{1}{f(\theta_1, \theta_3)} \frac{\partial f}{\partial \theta_3}(\theta_1, \theta_3) = \frac{1}{f(\theta_2, \theta_3)} \frac{\partial f}{\partial \theta_3}(\theta_2, \theta_3). \end{aligned}$$

Abbiamo dunque mostrato che $\frac{1}{f(\theta_1, \theta_3)} \frac{\partial f}{\partial \theta_3}(\theta_1, \theta_3)$ non dipende da θ_1 , cioè

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_3} (\log(f(\theta_1, \theta_3))) &= A(\theta_3) \\ \log(f(\theta_1, \theta_3)) &= B(\theta_3) + C(\theta_1), \end{aligned}$$

dove $B(\theta_3)$ è una primitiva di $A(\theta_3)$.

Notiamo ora che $f(\theta, \theta) = 1$ in quanto tanto calore viene rilasciato quanto viene assorbito se le sorgenti sono alla stessa temperatura.

Segue che $\log(f(\theta, \theta)) = 0$, cioè $B(\theta) = -C(\theta)$.

$$\log(f(\theta_1, \theta_3)) = B(\theta_3) - B(\theta_1) \implies f(\theta_1, \theta_3) \stackrel{g(\theta) = e^{B(\theta)}}{=} \frac{g(\theta_3)}{g(\theta_1)}.$$

Possiamo dunque definire la **temperatura assoluta** come

$$T = g(\theta).$$

Tutto ciò che abbiamo detto fin'ora in termini della temperatura definita tramite gas continua ad essere valido per la temperatura assoluta.

2.3 Entropia

2.3.1 Teorema di Clausius e definizione

Lemma 2.15 (Isoterme fibrano).

Due isoterme non si incrociano

Dimostrazione.

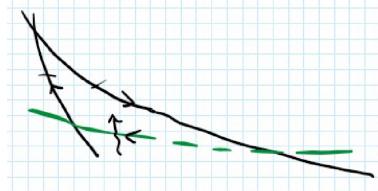
È un altro modo di esprimere lo 0-esimo principio. □

Lemma 2.16 (Adiabatiche fibrano).

Due curve adiabatiche non si incrociano.

Dimostrazione.

Per assurdo supponiamo che due adiabatiche si incrocino. Trasformandole in un ciclo tramite una isoterma avremmo costruito una macchina che trasforma calore in lavoro senza effetti secondari, contraddicendo il secondo principio.



□

Osservazione 2.17 (Clausius per cicli di Carnot).

In un ciclo di Carnot si ha che

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0.$$

Dimostrazione.

Dal teorema di Carnot (2.10) e dalla definizione di temperatura empirica sappiamo che

$$\frac{|Q_H|}{T_H} = \frac{|Q_L|}{T_L},$$

cioè

$$0 = \frac{Q_H}{T_H} + \frac{Q_L}{T_L} = \int_A^B \frac{\delta Q}{T} + \int_C^D \frac{\delta Q}{T} \stackrel{BC \text{ e } DA \text{ adiabatiche}}{=} \oint \frac{\delta Q}{T}.$$

□

Teorema 2.18 (Teorema di Clausius).

Per un qualsiasi ciclo reversibile si ha che

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0.$$

Dimostrazione.

Approssimiamo il ciclo con tanti cicli di Carnot: per i lemma (2.15) e (2.16) evitiamo problemi di double counting, per costruire l'approssimazione basta scegliere due punti sul ciclo e sostituire il tratto del ciclo che li collega con la giunzione di una adiabatica, una isoterma e poi nuovamente una adiabatica, dove le adiabatiche sono determinate dagli stati in esame e l'isoterma è scelta in modo che il lavoro compiuto non cambi⁵.

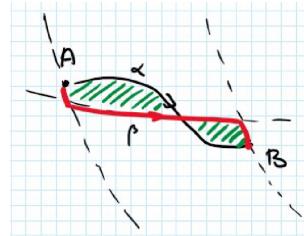


Figura 2.1: Come viene sostituito un singolo tratto in modo da non cambiare il lavoro

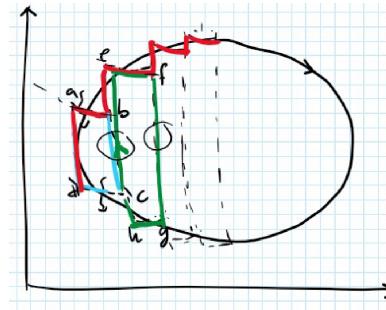


Figura 2.2: L'approssimazione del ciclo con tanti cicli di Carnot

□

Corollario 2.19.

La quantità $\int_A^B \frac{\delta Q}{T} \Big|_{rev}$ è una funzione di stato.

Dimostrazione.

Siano α e β sono due processi reversibili da A a B . In quanto reversibili, è ben definito $\gamma = \bar{\beta}$ processo inverso di β . Per il teorema di Clausius (2.18) si ha che

$$0 = \int_{\alpha} \frac{\delta Q}{T} + \int_{\gamma} \frac{\delta Q}{T} = \int_{\alpha} \frac{\delta Q}{T} - \int_{\beta} \frac{\delta Q}{T},$$

come volevasi dimostrare. □

In luce di questo corollario è ben posta la seguente definizione:

⁵ poiché l'energia interna è una funzione di stato, garantire lo stesso lavoro automaticamente fornisce anche uguaglianze tra i calori

Definizione 2.20 (Entropia).

Definiamo la **differenza di entropia** tra due stati A e B come⁶

$$\int_A^B \frac{\delta Q}{T} \Big|_{rev} = S_B - S_A.$$

In forma differenziale

$$dS = \frac{\delta Q}{T}_{rev}$$

Osservazione 2.21.

Se γ è un processo che porta il sistema dallo stato A allo stato B in modo **non reversibile** allora è possibile che

$$\int_A^B \frac{\delta Q}{T} \neq S_B - S_A.$$

La differenza di entropia tra i due stati è comunque ben definita, basta scegliere un secondo cammino reversibile da A a B e calcolare l'integrale lungo quel cammino.

Osservazione 2.22.

Se A e B sono stati sulla stessa adiabatica

$$\int_A^B \frac{\delta Q}{T} \Big|_{adiab.} = 0.$$

Se l'adiabatica in questione è reversibile allora $S_A = S_B$.

Se l'adiabatica non è reversibile l'entropia potrebbe cambiare.

Osservazione 2.23.

Per un qualsiasi ciclo (anche irreversibile), $\Delta S = 0$, in quanto è una funzione di stato.

2.3.2 Entropia globale aumenta

Proposizione 2.24 (Disuguaglianza di Clausius).

Sia Σ un ciclo che acquista una quantità di calore δQ da una sorgente a temperatura T_s e che produce una quantità di lavoro W , allora

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0,$$

dove T è la temperatura a cui lavora Σ .

Dimostrazione.

Studiamo gli effetti secondari di Σ ⁷. Consideriamo il sistema composto da Σ e una macchina di Carnot Σ' definito come segue:

Σ' assorbe un calore δQ_s dalla sorgente T_s , produce del lavoro W' e rilascia ad una temperatura T il calore δQ che riceve Σ .

Calcolando la variazione di entropia per Σ' ricaviamo che

$$0 = \Delta S = \oint \frac{\delta Q_s}{T_s} + \oint -\frac{\delta Q}{T} \iff \frac{1}{T_s} \oint \delta Q_s = \oint \frac{\delta Q}{T}.$$

⁶la notazione significa che per calcolare l'integrale sceglieremo un qualsiasi processo reversibile che porta A in B .

⁷che necessariamente ci sono per il secondo principio.

Consideriamo ora le due macchine insieme e calcoliamo l'energia:

$$Q_s = \oint \delta Q_s = -(W + W').$$

Per il secondo principio si ha che la quantità sopra non è positiva⁸, dunque, sfruttando il fatto che $T_s > 0$, si ha che

$$0 \geq \frac{1}{T_s} \oint \delta Q_s = \oint \frac{\delta Q}{T}.$$

□

Teorema 2.25 (Variazione di entropia supera integrale sul percorso).

Sia γ un processo che porta lo stato A nello stato B , potenzialmente in modo irreversibile, allora

$$\Delta S \geq \int_A^B \frac{\delta Q}{T}.$$

Dimostrazione.

Sia α un processo reversibile che porta da A a B e sia β il suo processo inverso.

Per la diseguaglianza di Clausius (2.24) si ha che

$$\underbrace{\int_{\beta} \frac{\delta Q}{T}}_{=-\Delta S} + \int_{\gamma} \frac{\delta Q}{T} \leq 0 \implies \Delta S \geq \int_A^B \frac{\delta Q}{T}.$$

□

Proposizione 2.26 (Secondo principio con entropia).

L'affermazione “ $\Delta S \geq 0$ per sistemi isolati” è equivalente al secondo principio della termodinamica.

Dimostrazione.

Mostriamo le due implicazioni:

← Assumendo il secondo principio abbiamo visto che vale il teorema (2.25). Se un sistema è isolato, $\delta Q = 0$, quindi

$$\Delta S \geq \int \frac{\delta Q}{T} = 0.$$

→ Consideriamo per assurdo un processo che trasforma calore in lavoro senza altri effetti⁹. La variazione di entropia del sistema sarebbe¹⁰

$$\Delta S = \oint \frac{\delta Q}{T} = -\frac{|Q|}{T} < 0,$$

assurdo per ipotesi.

□

⁸ non possiamo convertire calore in lavoro senza altri effetti, ma possiamo convertire lavoro in calore senza problemi.

⁹Neghiamo la formulazione di Kelvin.

¹⁰il sistema perde calore per trasformarlo in lavoro, quindi il segno è negativo

Differenziale dell'entropia

Osservazione 2.27 (Differenziale dell'entropia).

Poiché U è una funzione di stato

$$dU = \delta Q + \delta W = \delta Q_{rev} + \delta W_{rev},$$

dunque

$$\boxed{dS = \frac{\delta Q}{T} \Big|_{rev} = \frac{\delta Q}{T} + \frac{\delta W - \delta W_{rev}}{T}}$$

Per il teorema (2.25) si ha che $dS \geq \delta Q/T$, quindi per la forma sopra

$$\delta W \geq \delta W_{rev},$$

che è una riformulazione del teorema di Carnot (2.10) se stiamo attenti ai segni.

Osservazione 2.28.

Scriviamo le forme $\delta Q = \sum_i A_i dx_i$ e $\delta W = \sum_i X_i dx_i$.

Sappiamo che questi non sono differenziali esatti, ma possiamo moltiplicare δQ per $1/T$ e rendere quel differenziale esatto ($\delta Q/T = dS$). Questa è una manifestazione della proposizione (A.3).

Ricalcando l'osservazione (A.5) segue un'altra riformulazione del secondo principio:

Proposizione 2.29 (Secondo principio, formulazione di Caratheodory).

Vicino ad ogni punto di equilibrio esistono infiniti punti non raggiungibili con adiabatiche reversibili.

Dimostrazione.

NON DATA □

Osservazione 2.30.

Se consideriamo una adiabatica reversibile $\delta Q = 0$, gli stati vengono divisi in due regioni. In una regione troviamo punti raggiungibili tramite adiabatiche irreversibili, nell'altra troviamo punti irraggiungibili da qualsiasi adiabatica.

2.3.3 Sistema, Ambiente ed Entropia

Osservazione 2.31.

Un processo è reversibile se e solo se $\Delta S_{globale} = 0$.

L'entropia può variare per due motivi:

1. scambio di calore tra temperature diverse (causa *esterna*)
2. sono presenti attriti (causa *interna*)

Esempio 2.32 (Sistema e sorgente).

Consideriamo un universo formato unicamente da una sorgente a temperatura T_s e un sistema che assorbe un calore Q .

1. Supponiamo che il sistema non contenga attriti, cioè $\Delta S_{sist}^{(int)} = 0$.
Per definizione di sorgente $\Delta S_{sorg} = -Q/T_s$, mentre

$$\Delta S_{sist}^{(ext)} \geq \int \frac{\delta Q}{T} \stackrel{T_s \geq T}{\geq} \frac{Q}{T_s}.$$

2. Supponiamo che il sistema compia solo scambi di calore reversibili (cioè $\Delta S_{sorg} + \Delta S_{sist}^{(ext)} = 0$), allora

$$\Delta S_{sorg} = \frac{Q}{T_s}, \quad \Delta S_{sist}^{(ext)} = -\frac{Q}{T_s}, \quad \Delta S_{sist}^{(int)} \geq 0.$$

Osservazione 2.33 (Cicli irreversibili).

Se un sistema fa un ciclo in modo irreversibile allora l'ambiente NON PUÒ aver fatto un ciclo in quanto altrimenti l'entropia non sarebbe aumentata.

2.4 Terzo principio

Fatto 2.34 (Terzo principio della termodinamica).

In un processo reversibile isotermo $\lim_{T \rightarrow 0} \Delta S = 0$.

Osservazione 2.35.

Stiamo dicendo che le isoterme per T vicino a 0 si avvicinano ad essere adiabatiche.

Osservazione 2.36.

Moralmente il principio dice che è difficile raffreddare verso temperature vicine allo 0 assoluto.

Osservazione 2.37.

Possiamo riformulare il principio affermando che ogni sistema ha la stessa entropia allo zero assoluto.

Capitolo 3

Introduzione al Calore

3.1 Modalità di trasferimento di calore

Il trasferimento di calore, cioè di energia derivante da una differenza di temperatura, avviene in tre modi: conduzione, covezione ed irraggiamento.

3.1.1 Conduzione

Parliamo di **conduzione** quando il trasferimento di calore avviene per contatto ma senza scambio di materia (attraverso una parete diatermica).

Empiricamente riscontriamo

Fatto 3.1 (Legge di Fourier).

Vale la relazione

$$\frac{1}{A} \frac{\delta Q}{\Delta t} = -\kappa \frac{\Delta T}{\Delta X},$$

dove T è la temperatura, X è la distanza tra i punti tra cui stiamo calcolando la differenza di temperatura, A è l'area ortogonale alla direzione lungo la quale si propaga il calore e κ è una costante detta **conducibilità termica**.

L'unità di misura della conducibilità termica è

$$[\kappa] = \frac{W}{mK} \approx \begin{cases} 10^2 & \text{metalli} \\ 0.1 & \text{gas} \end{cases}.$$

Possiamo precisare la legge di Fourier introducendo la **corrente di calore** \vec{J}_Q . La legge assume la forma

$$\vec{J}_Q = -\kappa \vec{\nabla} T.$$

Concentrandosi su uno dei sistemi possiamo scrivere

$$\boxed{\delta Q = cm\delta T}$$

dove m è la massa e c è il **calore specifico**.

Possiamo calcolare il calore totale che entra dentro una superficie per unità di tempo come

$$\int_V c \frac{\partial T}{\partial t} \rho dV = \frac{1}{\Delta t} \int_{\partial V} \delta Q = - \int_{\partial V} \vec{J}_Q \cdot d\vec{\Sigma} \stackrel{\text{T.Div.}}{=} - \int_V \nabla \cdot \vec{J}_Q dV = \int_V \kappa \nabla^2 T dV.$$

Ricaviamo dunque

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho c} \nabla^2 T}$$

Questa è la famosa *equazione del calore*.

3.1.2 Convezione

Parliamo di **convezione** quando il trasferimento di calore avviene tramite lo spostamento di materia.

La formula rilevante in questo caso è

$$\frac{1}{A} \frac{\delta Q}{\Delta t} = h \Delta T,$$

dove h è il **coefficiente convettivo**.

3.1.3 Irraggiamento

Parliamo di **irraggiamento** quando un corpo semplicemente emette energia come radiazione.

La formula rilevante in questo caso è

$$\frac{1}{A} \frac{\delta Q}{\Delta t} = \varepsilon \sigma (T^4 - T_0^4),$$

dove T_0 è la temperatura dell'ambiente, σ è una costante uguale per tutti i materiali e ε dipende dai materiali.

Capitolo 4

Sistemi idrostatici

Definiamo informalmente un sistema idrostatico come un sistema termodinamico determinato da pressione, volume e temperatura.

Definizione 4.1 (Principali processi quasistatici per sistemi idrostatici).
Un processo si dice

- **isoterma** se T resta costante,
- **isobaro** se p resta costante,
- **isocore** se V resta costante o
- **adiabatico** se non avviene scambio di calore.

4.1 Differenziale di volume

Definizione 4.2 (Coefficiente di espansione volumetrica).
Definiamo il **coefficiente di espansione volumetrica** come

$$\alpha = \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial T} \Big|_p = -\frac{m}{V} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial T} \Big|_p = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} \Big|_p.$$

L'unità di misura è $[\alpha] = \text{K}^{-1}$.

Definizione 4.3 (Compressibilità isoterma).
Definiamo la **compressibilità isoterma** come

$$\beta_T = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} \Big|_T.$$

L'unità di misura è $[\beta_T] = \text{Pa}^{-1}$.

L'inversa $k_T = 1/\beta_T$ è detta **modulo di compressibilità isoterma**.

Riportiamo alcuni valori di α e β_T per dare una intuizione sui valori tipici¹

¹il Sitall è materiale fatto apposta per avere coefficiente di espansione volumetrica piccolo

Materiale	$\alpha \text{ [K}^{-1}\text{]}$	$\beta_T \text{ [Pa}^{-1}\text{]}$
Acqua	$0.2 \cdot 10^{-3}$	$4.6 \cdot 10^{-10}$
Diamante	$3 \cdot 10^{-6}$?
Sitall	$\leq 10^{-7}$?
Sabbia	?	$\sim 10^{-8}$
Mercurio	$1.8 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-11}$
Rame	?	$7.2 \cdot 10^{-12}$

Osservazione 4.4.

Non è necessario battezzare $\frac{\partial p}{\partial T} \Big|_V$ in quanto per la proprietà ciclica (A.1)

$$\frac{\partial p}{\partial T} \Big|_V = - \frac{\partial p}{\partial V} \Big|_T \frac{\partial V}{\partial T} \Big|_p = \frac{\alpha}{\beta_T}.$$

Osservazione 4.5 (Relazione differenziale tra α e β_T).

Per il teorema di Schwarz si ha che

$$\frac{\partial^2 V}{\partial p \partial T} = \frac{\partial \alpha}{\partial p} \Big|_T = - \frac{\partial \beta_T}{\partial T} \Big|_p.$$

Osservazione 4.6 (Differenziale del volume).

Dalle definizioni date segue che

$$dV = \alpha V dT - \beta_T V dp.$$

Proposizione 4.7 (Differenziale della pressione).

Si ha che

$$dp = \frac{\alpha}{\beta_T} dT - \frac{1}{\beta_T V} dV.$$

Dimostrazione.

Osserviamo che

$$\frac{\partial p}{\partial T} \Big|_V \stackrel{(A.1)}{=} - \frac{\partial p}{\partial V} \Big|_T \frac{\partial V}{\partial T} \Big|_p = \frac{\alpha}{\beta_T},$$

dunque ricaviamo

$$dp = \frac{\partial p}{\partial T} \Big|_V dT + \frac{\partial p}{\partial V} \Big|_T = \frac{\alpha}{\beta_T} dT - \frac{1}{\beta_T V} dV.$$

□

Corollario 4.8.

In una trasformazione isocora $\Delta p = \frac{\alpha}{\beta_T} \Delta T$.

Osservazione 4.9 (Differenziale logaritmico nel volume).

Spesso tornerà comodo ricordare il seguente sviluppo differenziale

$$d \log V = \frac{1}{V} dV = \alpha dT - \beta_T dp$$

Dimostrazione.

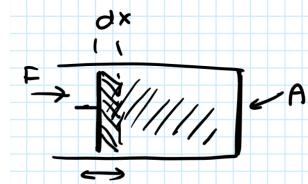
Segue calcolando:

$$\frac{1}{V} dV = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \Big|_p dT + \frac{\partial V}{\partial p} \Big|_T dp \right) = \alpha dT - \beta_T dp$$

□

4.2 Lavoro per sistema idrostatico

Immaginiamo di comprimere un sistema idrostatico come in figura



Se spingiamo molto lentamente possiamo con buona approssimazione supporre che il processo sia quasistatico, dunque $F = pA$. Segue che

$$\delta W = Fdx = pAdx$$

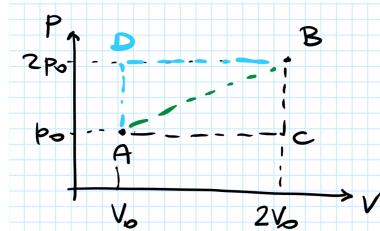
Se il sistema in questione è un gas ideale allora

$$\delta W = p(-dV) = -pdV$$

Il lavoro totale per passare da uno stato A ad uno stato B diventa

$$W = - \int_A^B p(V, T) dV,$$

ma p come cambia al variare di V ? Dipende dal tipo di processo.



Questo mostra in particolare che il lavoro non è una funzione di stato.

4.3 Capacità termica

Definizione 4.10 (Capacità termica).

Definiamo la **capacità termica** come²

$$C = \lim_{\delta T \rightarrow 0} \frac{\delta Q}{\delta T}.$$

L'unità di misura è $[C] = \text{J/K}$.

La **capacità termica molare** è data da $c = C/n$.

Il **calore specifico** è dato da C/m .

²Nota che NON è una derivata in quanto Q non è una funzione di stato, quindi in particolare non è una funzione di T

Definizione 4.11 (Caloria).

Una **caloria** è la quantità di calore necessaria per far variare la temperatura di un grammo di acqua da 14.5°C a 15.5°C .

In Joule si ha che

$$1 \text{ cal} = 4.186 \text{ J}$$

Osservazione 4.12.

Il calore specifico dell'acqua per temperature ragionevoli è

$$c_{\text{acqua}} = 4.186 \frac{\text{J}}{\text{C g}} = 4186 \frac{\text{J}}{\text{K kg}}$$

Definizione 4.13 (Termometro e Termostato).

Un **termostato** è un oggetto ideale con capacità termica infinita³.

Un **termometro** è un oggetto ideale con capacità termica nulla⁴.

Osservazione 4.14.

Possiamo scrivere la capacità termica in termini di U , V , p e T come segue:

$$C = \frac{\delta Q}{\delta T} = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V + \left(\left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_T + p \right) \frac{dV}{dT}$$

Dimostrazione.

Sviluppando dU troviamo

$$dU = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V dT + \left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_T dV,$$

da cui

$$\delta Q = dU + pdV = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V dT + \left(\left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_T + p \right) dV.$$

Ora possiamo “dividere” per dT e trovare la tesi. \square

Definizione 4.15 (Capacità termica a volume/pressione costante).

Definiamo la **capacità termica a volume** (risp. **pressione**) **costante** come le due seguenti quantità

$$\begin{aligned} C_V &= \left. \frac{\delta Q}{\delta T} \right|_V = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V \\ C_p &= \left. \frac{\delta Q}{\delta T} \right|_p = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V + \left(\left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_T + p \right) \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_p = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V + \left(\left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_T + p \right) V\alpha \end{aligned}$$

Osservazione 4.16 (Diseguaglianza tra capacità termiche).

Vale sempre $C_p > C_V$.

Osservazione 4.17.

In un gas generale

$$\left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_T = \frac{C_p - C_V}{V\alpha} - p$$

³: intuitivamente è un sistema grande a sufficienza in modo che anche se viene aggiunto calore, la temperatura non cambia.

⁴: intuitivamente è un sistema piccolo a sufficienza in modo da poter trascurare gli scambi di calore.

4.3.1 Processi politropici

Possiamo generalizzare i quattro tipi di processi principali come segue:

Definizione 4.18 (Processo politropico).

Un processo è **politropico** se la capacità termica è costante.

Proposizione 4.19 (Curve per processi politropici).

Considerando un processo politropico relativo ad un gas ideale e definiamo

$$\delta = \frac{C_p - C}{C_V - C},$$

allora seguendo questo processo si ha che $pV^\delta = \text{cost.}$

Dimostrazione.

Poiché $\delta Q = CdT = C_VdT + pdV = C_pdT - Vdp$ ricaviamo che

$$-\frac{V}{C - C_p}dp = dT = \frac{p}{C - C_V}dV,$$

da cui

$$-\frac{V}{p} \frac{dp}{dV} = \frac{C_p - C}{C_V - C} = \delta.$$

Questa espressione restituisce una equazione differenziale

$$-\frac{dp}{p} = \delta \frac{dV}{V},$$

la cui soluzioni hanno la forma voluta. □

Possiamo interpretare processi isocori, isobari, isotermi e adiabatici come processi politropici:

Processo	Isocoro	Isobaro	Isotermo	Adiabatico
δ	∞	0	1	$\gamma = \frac{C_p}{C_V}$

4.4 Potenziali termodinamici

4.4.1 Energia interna ed entropia

Osservazione 4.20 (Differenziali).

Osserviamo che

$$TdS = \delta Q|_{rev} = dU - \delta W|_{rev} = dU + pdV,$$

dunque

$$dU = TdS - pdV$$

Osservazione 4.21.

NOTA BENE: Questo sembra un altro modo di scrivere il primo principio $dU = \delta Q + \delta W$, ma se il processo non è reversibile allora non è detto che $pdV = \delta W$.

Proposizione 4.22 (Equazione di Helmholtz).

Vale la seguente identità

$$\boxed{\left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_T = T \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_V - p} = T^2 \left. \frac{\partial(p/T)}{\partial T} \right|_V$$

Dimostrazione.

Sviluppiamo il differenziale dell'entropia

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{pdV}{T} = \frac{1}{T} \left(\left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V dT + \left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_T dV \right) + \frac{p}{T} dV.$$

Poiché dS è un differenziale esatto, le derivate incrociate devono coincidere:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{1}{T} \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V \right) &= \left. \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{T} \left(\left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_T + p \right) \right) \right|_V \\ \cancel{\frac{1}{T} \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial T}} &= -\frac{1}{T^2} \left(\left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_T + p \right) + \cancel{\frac{1}{T} \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial T}} + \frac{1}{T} \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_V \\ \left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_T &= T \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_V - p. \end{aligned}$$

□

Osservazione 4.23.

Osserviamo che

$$dU = \underbrace{\left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V}_{=C_V} dT + \left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_T dV,$$

quindi la formula di Helmholtz misura “quanto un gas non è ideale” (ricordiamo (4.17))

Osservazione 4.24.

Se $dU = 0$ allora

$$dT = -\frac{\left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_T}{\left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V} dV = \left. \frac{\partial T}{\partial V} \right|_U dV \stackrel{(4.22)}{=} \frac{1}{C_V} \left(p - T \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_V \right) dV.$$

Questa identità può essere interpretata come test per Gas ideali, basta capire se $T \left. \frac{\partial T}{\partial p} \right|_V$ coincide con $\frac{nRT}{V}$.

Osservazione 4.25.

Valgono le seguenti identità

$$C_V = T \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_V, \quad C_p = T \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_p, \quad \gamma = \frac{\left. \frac{\partial p}{\partial V} \right|_S}{\left. \frac{\partial p}{\partial V} \right|_p} = \frac{\beta_T}{\beta_S}$$

Dimostrazione.

ESERCIZIO

□

4.4.2 Entalpia

Definizione 4.26 (Entalpia).

L'entalpia in un gas è definita da⁵

$$H = U + pV.$$

Osservazione 4.27.

L'entalpia è ottenuta da U come trasformazione di Legendre:

Consideriamo $U(S, V)$ e cambiamo la coordinata V in $-p = \frac{\partial U}{\partial V}|_S$, che possiamo fare ponendo $H(S, p) = U - (-pV) = U + pV$.

Osservazione 4.28 (Differenziale dell'entalpia).

Il differenziale di H è dato da

$$dH = dU + pdV + Vdp = TdS + Vdp \stackrel{\text{se reversibile}}{=} \delta Q + Vdp$$

oppure da

$$dH = dU + p(\alpha VdT - \beta_T Vdp) + Vdp = dU + p\alpha VdT + V(1 - \beta_T p)dp.$$

Corollario 4.29.

Valgono le seguenti identità

$$\left. \frac{\partial H}{\partial S} \right|_p = T, \quad \left. \frac{\partial H}{\partial p} \right|_S = V, \quad \left. \frac{\partial H}{\partial T} \right|_p = C_p.$$

Dimostrazione.

Le prime due seguono immediatamente da $dH = TdS + Vdp$, mentre l'ultima segue sviluppando la definizione di C_p :

$$C_p = \left. \frac{\delta Q}{\delta T} \right|_p = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_p + p \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_p = \left. \frac{\partial}{\partial T} (U + pV) \right|_p = \left. \frac{\partial H}{\partial T} \right|_p.$$

□

Definizione 4.30 (Coefficiente di Joule-Thomson).

Definiamo il **coefficiente di Joule-Thomson** come

$$\mu_{JT} = \left. \frac{\partial T}{\partial p} \right|_H.$$

Fatto 4.31.

Per ogni gas esiste una temperatura, detta **temperatura di inversione**, tale che sotto questa temperatura $\mu_{JT} > 0$

4.4.3 Energia libera di Helmholtz e Gibbs

Diamo un nome alle rimanenti trasformazioni di Legendre di U :

Definizione 4.32 (Energia libera di Helmholtz).

Dall'energia interna cambiamo S in $\left. \frac{\partial U}{\partial S} \right|_V = T$, definendo $F = U - TS$, detta **energia libera di Helmholtz**. Osserviamo che

$$dF = -SdT - pdV.$$

⁵cioè l'energia interna sommata al “lavoro necessario per portare il volume da 0 a V a pressione costante”.

Osservazione 4.33.

L'energia libera di Helmholtz ci permette di ricavare il “massimo lavoro estraibile tra due stati”.

Dimostrazione.

Per il secondo principio $Q/T \leq \Delta S$, dunque

$$W = \Delta U - Q \geq \Delta U - T\Delta S = \Delta F,$$

cioè il lavoro che può fare il sistema $(-W)$ è al massimo $-\Delta F$. \square

Osservazione 4.34.

Si ha che

$$\left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_V = -S, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial V} \right|_T = -p.$$

Definizione 4.35 (Energia libera di Gibbs).

Dall'entalpia cambiamo S in $\left. \frac{\partial H}{\partial S} \right|_p = T$, definendo $G = H - TS = U + pdV - TS = F + pV$, detta **energia libera di Gibbs**. Osserviamo che

$$dG = -SdT - Vdp.$$

Osservazione 4.36.

Si ha che

$$\left. \frac{\partial G}{\partial p} \right|_T = V, \quad \left. \frac{\partial G}{\partial T} \right|_p = -S.$$

Proposizione 4.37 (Secondo principio per energia libera di Gibbs).

Se T e p sono costanti l'energia libera di Gibbs tende a diminuire.

Dimostrazione.

Per il secondo principio $TdS - \delta Q \geq 0$. Sviluppando δQ troviamo

$$TdS - dU - pdV \geq 0.$$

Se p è costante allora $dH = dU + pdV$, quindi in tal caso

$$TdS - dH \geq 0$$

Se ora T resta costante si ha che $dG = dH - TdS$, cioè

$$dG \leq 0.$$

Segue dunque che se T e p sono costanti, G tende a diminuire. \square

Proposizione 4.38 (Relazioni di Maxwell).

Valgono anche le equazioni

$$\left. \frac{\partial T}{\partial V} \right|_S = -\left. \frac{\partial p}{\partial S} \right|_V, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial p} \right|_S = \left. \frac{\partial V}{\partial S} \right|_p, \quad \left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_T = \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_V, \quad \left. \frac{\partial S}{\partial p} \right|_T = -\left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_p.$$

Dimostrazione.

Derivano dall'eguagliare derivate seconde delle energie che abbiamo definito. In ordine le quattro equazioni sono uguali a

$$\frac{\partial^2 U}{\partial V \partial S}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial S}, \quad -\frac{\partial^2 F}{\partial V \partial T}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial p \partial T}.$$

\square

Osservazione 4.39 (Jacobiano $p, V - T, S$).

Possiamo derivare le relazioni di Maxwell anche constatando che

$$\frac{\partial(T, S)}{\partial(p, V)} = 1.$$

Dimostrazione.

Mostriamo che l'identità vale e poi ricaviamo le relazioni da essa.

$dPdV = dTdS$ Per il primo principio

$$dU = TdS - PdV \rightsquigarrow 0 = d^2U = dTdS - dPdV,$$

segue dunque per unicità della scrittura in base che lo Jacobiano in esame vale 1.

Relazioni Ricaviamo la prima, le altre seguono in modo analogo

$$\left. \frac{\partial T}{\partial V} \right|_S = \frac{\partial(T, S)}{\partial(V, S)} = \left(\frac{\partial(T, S)}{\partial(p, V)} \right)^{-1} \left. \frac{\partial(T, S)}{\partial(V, S)} \right|_S = \frac{\partial(p, V)}{\partial(V, S)} = - \frac{\partial(p, V)}{\partial(S, V)} = - \left. \frac{\partial p}{\partial S} \right|_V.$$

□

4.4.4 Riassunto

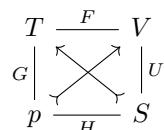
Riassumiamo il comportamento di queste quantità nella seguente tabella:

Energia	Definizione	Differenziale	Rel. Maxwell
Interna	$\Delta U = Q + W$	$+TdS - p dV$	$\left. \frac{\partial T}{\partial V} \right _S = - \left. \frac{\partial p}{\partial S} \right _V$
Entalpia	$H = U + pV$	$+TdS + Vdp$	$\left. \frac{\partial T}{\partial p} \right _S = \left. \frac{\partial V}{\partial S} \right _p$
Helmholtz	$F = U - TS$	$-SdT - p dV$	$\left. \frac{\partial S}{\partial V} \right _T = \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right _V$
Gibbs	$G = U + pV - TS$	$-SdT + Vdp$	$- \left. \frac{\partial S}{\partial p} \right _T = \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right _p$

Mettendo a confronto energia interna ed entalpia troviamo ulteriori similitudini:

Argomento	Energia interna	Entalpia
Espansione	libera di Joule	di Joule-Thompson
Quanto non ideale?	$\mu_J = \left. \frac{\partial T}{\partial V} \right _U$	$\mu_{JT} = \left. \frac{\partial T}{\partial p} \right _H$
Differenziale reversibile	$dU = \delta Q - pdV$	$dH = \delta Q + Vdp$
C. di Esp. Termica	$C_V = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right _V$	$C_p = \left. \frac{\partial H}{\partial T} \right _p$
Su isocora	$\Delta U = Q$	$\Delta H = Q$
Su adiabatica	$\Delta U = - \int pdV$	$\Delta H = \int Vdp$
In gas ideale	$\Delta U = \int c_V dT$	$\Delta H = \int c_p dT$

Per ricordare le varie derivate parziali può essere utile il **diagramma di Konis-Born**



I due vertici di uno stesso lato contengono le variabili che appaiono nei differenziali mentre le diagonali indicano il valore della derivata dell'energia di un dato lato per la variabile del vertice. Il verso delle diagonali indica il segno di queste derivata, quindi per esempio per il lato destro ricaviamo

$$\frac{\partial U}{\partial S} \Big|_V = T, \quad \frac{\partial U}{\partial V} \Big|_S = -p.$$

Le due coppie di lati opposti corrispondono ognuna a due relazioni di Maxwell. Per capire i segni basta considerare i due triangoli che si formano scegliendo uno degli altri lati e completando con le due diagonali, per esempio la relazione

$$\frac{\partial T}{\partial V} \Big|_S = -\frac{\partial p}{\partial S} \Big|_V$$

si può leggere associando al membro di sinistra il triangolo TVS e a quello di destra il triangolo pSV .

4.5 Sistemi aperti di gas

Per sistemi di gas aperto

$$\Delta U = Q + W + \Delta U_{materia},$$

o in forma differenziale

$$dU = TdS - pdV + \mu dn$$

dove μ è il **potenziale chimico**.

Osservazione 4.40.

Valgono le identità differenziali

$$\frac{\partial U}{\partial S} \Big|_{V,n} = T, \quad \frac{\partial U}{\partial V} \Big|_{S,n} = -p, \quad \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{S,V} = \mu.$$

Capitolo 5

Gas e Gas ideali

5.1 Definizioni e legge dei gas perfetti

Definizione 5.1 (Mole).

Una **mole di una sostanza** corrisponde a $6.02 \cdot 10^{23}$ particelle di quella sostanza. La costante è detta **numero di Avogadro** e la indichiamo con N_a .

Definizione 5.2 (Densità).

Definiamo la **densità** come

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

Osservazione 5.3.

Il differenziale della densità è

$$d\rho = -\frac{m}{V^2} dV.$$

Definizione 5.4 (Condizioni standard).

Un gas è in **condizioni standard (STP)** se è alla temperatura di 0°C e alla pressione di 1 atm = 101.3245 kPa.

Per i gas ideali valgono le seguenti leggi:

Fatto 5.5 (Legge di Boyle).

Se T è costante

$$V \propto \frac{1}{p}$$

Fatto 5.6 (Legge di Charles).

Se p è costante

$$V \propto (1 + \alpha T)$$

Fatto 5.7 (Legge di Gay-Lussac).

Se V è costante

$$p \propto T$$

Fatto 5.8 (Legge di Avogadro).

Se p e T sono fissate, tutti i gas occupano lo stesso volume se consistono della stessa quantità di materia, in particolare

$$V \propto n.$$

Una mole di gas in condizioni standard occupa un volume di 22.4ℓ (litri).

Combinando le leggi appena citate arriviamo alla **legge dei Gas perfetti**

$$pV = nRT$$

dove p è la pressione, V è il volume, n è il numero di moli, T è la temperatura e R è la **costante fondamentale dei gas** e vale $8.314 \frac{\text{J}}{\text{K mol}}$.

Definizione 5.9 (Costante di Boltzmann).

Definiamo la **costante di Boltzmann** k_b in modo tale che

$$R = N_a k_b.$$

5.2 Coefficiente di espansione volumetrica e compressibilità isoterma

Proposizione 5.10 (α e β_T per gas ideali).

Se il sistema in esame è un gas ideale valgono le seguenti identità:

$$\alpha = \frac{1}{T}, \quad \beta_T = \frac{1}{p}.$$

Dimostrazione.

Segue calcolando:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{V} \left. \frac{\partial(nRT/p)}{\partial T} \right|_p = \frac{nR}{pV} = \frac{1}{T}, \\ \beta_T &= -\frac{1}{V} \left. \frac{\partial(nRT/p)}{\partial p} \right|_T = \frac{1}{V} nRT \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

□

5.3 Capacità termica

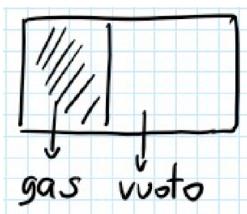
Definizione 5.11 (Coefficiente di Joule).

Definiamo il **coefficiente di Joule** come

$$\mu_J = \left. \frac{\partial T}{\partial V} \right|_U$$

Fatto 5.12 (In gas ideale l'energia interna dipende solo dalla temperatura).
In un gas ideale U dipende solo da T .

Eperimento: Espansione libera adiabatica di Joule.



Consideriamo un contenitore adiabatico separato internamente da una parete adiabatica. In uno dei due volumi si trova un gas ideale, il secondo è vuoto.

Improvvisamente eliminiamo la parete interna e lasciamo che il gas si espanda¹.

Chiaramente $Q = W = 0$ in quanto il vuoto non subisce/effettua lavoro e non scambia calore, dunque $\Delta U = 0$.

Segue che $\mu_J = \frac{\partial T}{\partial V} \Big|_U = \frac{dT}{dV}$ e Joule ha misurato che in queste circostanze la seconda è nulla, dunque

$$0 = \frac{\partial T}{\partial V} \Big|_U \stackrel{(A.1)}{=} - \left(\frac{\partial V}{\partial U} \Big|_T \right)^{-1} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \Big|_V \right)^{-1} = - \frac{\partial U}{\partial V} \Big|_T \frac{1}{C_V},$$

in particolare $\frac{\partial U}{\partial V} \Big|_T = 0$.

Poiché in un gas ideale p è determinata da V e T , $U = U(V, T)$. Per quanto appena detto U non dipende da V , quindi dipende solo da T . \square

Corollario 5.13.

In un gas ideale, a prescindere dal tipo di processo,

$$dU = C_V dT$$

Dimostrazione.

Ricordiamo che

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T} \Big|_V,$$

ma poiché U non dipende da V possiamo scrivere

$$C_V = \frac{dU}{dT},$$

che è la tesi. \square

Proposizione 5.14 (Relazione di Mayer).

Per gas ideali si ha che $c_p - c_V = R$, o equivalentemente $C_p - C_V = nR$.

Dimostrazione.

Ricordiamo (5.10) che per gas ideali $\alpha = T^{-1}$. Poiché U dipende solo da T si ha che

$$0 = \frac{\partial U}{\partial V} \Big|_T \stackrel{(4.17)}{=} \frac{C_p - C_V}{V\alpha} - p,$$

da cui

$$C_p - C_V = pV\alpha = \frac{nRT}{T} = nR.$$

\square

Notazione 5.15.

Denotiamo il rapporto $\frac{C_p}{C_V} = \frac{c_p}{c_V}$ con γ .

Fatto 5.16 (Calore specifico a volume costante in funzione dei gradi di libertà).

In un gas ideale

$$C_V = \frac{\nu}{2} nR$$

dove ν è il **numero di gradi di libertà**.

¹notiamo che questo NON è una processus quasistatico.

Osservazione 5.17.

Per un gas ideale monoatomico $\nu = 3$, mentre per un gas biatomico $\nu = 5$.
Segue che

$$c_V^{mono} = \frac{3}{2}R \approx 12.47 \frac{\text{J}}{\text{K mol}}, \quad c_V^{bi} = \frac{5}{2}R \approx 20.74 \frac{\text{J}}{\text{K mol}}.$$

Da queste scritture segue anche che

$$c_p^{mono} = \frac{5}{2}R, \quad \gamma^{mono} = \frac{5}{3}, \quad c_p^{bi} = \frac{7}{2}R, \quad \gamma^{bi} = \frac{7}{5}.$$

Osservazione 5.18 (L'aria è un gas ideale biatomico).

L'aria è composta principalmente da particelle biatomiche (O_2 e N_2).

Proposizione 5.19 (Calore infinitesimale con capacità).

Per gas ideali valgono le seguenti equazioni

$$1. \delta Q = C_V dT + pdV$$

$$2. \delta Q = C_p dT - V dp.$$

Dimostrazione.

Mostriamo i due punti:

[1] Ricordiamo la relazione

$$\delta Q = \underbrace{\left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V}_{=C_V} dT + \left(\left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_T + p \right) dV,$$

da cui, usando il fatto che $\left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_T = 0$, troviamo che $\delta Q = C_V dT + pdV$.

[2] Osserviamo che il differenziale di $pV = nRT$ è

$$nRdT = pdV + V dp,$$

da cui sfruttando la relazione precedente

$$\delta Q = C_V dT + pdV = (C_V + nR)dT - V dp \stackrel{(5.14)}{=} C_p dT - V dp.$$

□

Osservazione 5.20.

Osservando la prima equazione ricaviamo nuovamente che δQ non è un differenziale, infatti se lo fosse avremmo il seguente assurdo:

$$0 = \left. \frac{\partial C_V}{\partial V} \right|_T = \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_V = \frac{nR}{V} \neq 0.$$

5.4 Energia interna, lavoro e calore

In questa sezione calcoliamo lavoro, calore e variazione di energia interna per i tipi principali di processi quasistatici.

Notiamo che $\Delta U = nc_V \Delta T$ in ogni circostanza in quanto U non dipende da V .

5.4.1 Isobara

Proposizione 5.21 (Energie per isobara).

Per una trasformazione isobara valgono le seguenti identità:

$$W = -nR\Delta T, \quad Q = nc_p\Delta T, \quad \Delta U = nc_V\Delta T.$$

Dimostrazione.

Calcoliamo:

$$\begin{aligned} W &= - \int_{V_i}^{V_f} pdV \stackrel{\text{isobara}}{=} -p\Delta V \stackrel{\text{gas ideale}}{=} -nR\Delta T \\ Q &\stackrel{\text{isobara}}{=} \int_{T_i}^{T_f} nc_p dT = nc_p\Delta T \\ \Delta U &= Q + W = n(c_p - R)\Delta T = nc_V\Delta T. \end{aligned}$$

□

5.4.2 Isocora

Proposizione 5.22 (Energie per isocora).

Per una trasformazione isocora valgono le seguenti identità:

$$W = 0, \quad Q = nc_v\Delta T, \quad \Delta U = nc_V\Delta T.$$

Dimostrazione.

Calcoliamo:

$$\begin{aligned} W &= - \int_{V_i}^{V_f} pdV \stackrel{V_i = V_f}{=} 0 \\ Q &\stackrel{\text{isocora}}{=} \int_{T_i}^{T_f} nc_V dT = nc_V\Delta T \\ \Delta U &= Q + W = nc_V\Delta T. \end{aligned}$$

□

5.4.3 Isoterma

Proposizione 5.23 (Energie per isoterma).

Per una trasformazione isoterma valgono le seguenti identità:

$$W = -nRT \log \left(\frac{V_f}{V_i} \right), \quad Q = nRT \log \left(\frac{V_f}{V_i} \right), \quad \Delta U = 0.$$

Dimostrazione.

Poiché stiamo considerando un gas ideale

$$\Delta U = nc_V\Delta T \stackrel{\text{isoterma}}{=} 0.$$

Per il primo principio si ha $Q = -W$, quindi per concludere basta calcolare il lavoro.

$$W = - \int_{V_i}^{V_f} pdV \stackrel{\text{gas ideale}}{=} -nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{1}{V} dV = -nRT \log \left(\frac{V_f}{V_i} \right).$$

□

5.4.4 Adiabatica

Proposizione 5.24 (Equazione di stato per adiabatica).

Poniamo $\gamma = c_p/c_V$. Si ha che pV^γ è costante seguendo un processo adiabatico.

Dimostrazione.

Poiché il sistema in esame è un gas ideale valgono le seguenti uguaglianze

$$0 \stackrel{\text{adiabatica}}{=} \delta Q = dU - \delta W \stackrel{\text{gas ideale}}{=} nc_VdT + pdV = \frac{nc_V}{nR}d(pV) + pdV.$$

Segue che

$$-\frac{c_V V}{R} dp = \left(\frac{pc_V + pR}{R} \right) dV \stackrel{(5.14)}{=} \frac{pc_p}{R} dV,$$

da cui

$$-\frac{dp}{p} = \gamma \frac{dV}{V}.$$

Integrando troviamo

$$-\log p + \text{Const.} = \gamma \log V \iff \log pV^\gamma = \text{Const.} \iff pV^\gamma = e^{\text{Const.}}$$

che è quello che volevamo mostrare. \square

Osservazione 5.25.

Si ha che

$$c_v = \frac{R}{\gamma - 1}.$$

Dimostrazione.

Per definizione di γ

$$c_v = \frac{c_p}{\gamma} \stackrel{(5.14)}{=} \frac{R + c_v}{\gamma},$$

dunque

$$\gamma c_v = c_v + R$$

e la tesi segue. \square

Proposizione 5.26 (Energie per adiabatica).

Per una trasformazione adiabatica valgono le seguenti identità:

$$W = \frac{p_f V_f - p_i V_i}{\gamma - 1}, \quad Q = 0, \quad \Delta U = \frac{p_f V_f - p_i V_i}{\gamma - 1}.$$

Dimostrazione.

Poiché il processo è adiabatico, $Q = 0$. Segue per il primo principio che $\Delta U = W$. Dato che stiamo considerando un gas ideale

$$\Delta U = nc_V \Delta T = n \frac{R}{\gamma - 1} \Delta T = \frac{1}{\gamma - 1} \Delta(pV) = \frac{p_f V_f - p_i V_i}{\gamma - 1}.$$

\square

Osservazione 5.27.

Potevamo ricavare energia e lavoro anche sfruttando la relazione

$$pV^\gamma = p_i V_i^\gamma = p_f V_f^\gamma,$$

ma avendola ricavata come sopra sappiamo che l'espressione è **valida anche per processi adiabatici NON quasistatici**.

5.5 Ciclo di Carnot per Gas ideali

Proposizione 5.28 (Efficienza del ciclo di Carnot).

L'efficienza di un ciclo di Carnot per gas ideali tra le temperature T_H e T_L è data da

$$\eta = 1 - \frac{T_L}{T_H}.$$

Dimostrazione.

Calcoliamo che quantità coinvolte:

$$|Q_H| = Q_{AB} \stackrel{\text{isoterma}}{=} -W_{AB} = \int_A^B pdV = nRT_H \log\left(\frac{V_B}{V_A}\right) > 0$$

$$|Q_L| = -Q_{CD} \stackrel{\text{isoterma}}{=} W_{CD} = - \int_C^D pdV = nRT_L \log\left(\frac{V_C}{V_D}\right),$$

$$\eta = 1 - \frac{|Q_L|}{|Q_H|} = 1 - \frac{T_L \log(V_C/V_D)}{T_H \log(V_B/V_A)} = 1 - \frac{T_L}{T_H},$$

dove nell'ultimo conto abbiamo usato le equazioni per le adiabatiche:

$$\left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_L}{T_H}, \quad \left(\frac{V_D}{V_A}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_H}{T_L} \implies \frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}.$$

□

Osservazione 5.29 (Efficienza massima).

Poiché il ciclo di Carnot è reversibile, per il teorema di Carnot (2.10) il valore

$$1 - \frac{T_L}{T_H}$$

è la massima efficienza possibile per un qualsiasi ciclo reversibile che agisce tra due sorgenti alle temperature indicate.

Osservazione 5.30 (Coefficiente di prestazione massimo per gas ideale).

Per quanto detto il coefficiente di prestazione massimo è

$$\frac{1 - \eta_{Carnot}}{\eta_{Carnot}} = \frac{T_L}{T_H - T_L}.$$

Se $T_L = 4^\circ\text{C}$ e $T_H = 20^\circ\text{C}$ (caso tipico del frigorifero casalingo) allora $COP_{max} \approx 17.3$. Tipicamente $COP \approx 4$.

Osservazione 5.31 (Massima efficienza di una pompa di calore realizzata con gas ideale).

Per una pompa di calore, la massima efficienza è data da

$$\frac{T_H}{T_H - T_L}.$$

5.6 Potenziali termodinamici

Il calore scambiato per trasformazioni reversibili nei gas ideali si può sviluppare in

$$\delta Q|_{rev} = dU + pdV = C_VdT + \frac{nRT}{V}dV,$$

da cui

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{C_V}{T}dT + \frac{nR}{V}dV.$$

Proposizione 5.32 (Entropia per gas ideali).

Valgono le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} S_B - S_A &= C_V \log\left(\frac{T_B}{T_A}\right) + nR \log\left(\frac{V_B}{V_A}\right) \\ &= C_V \log\left(\frac{p_B V_B^\gamma}{p_A V_A^\gamma}\right) \\ &= nc_p \log\left(\frac{T_B}{T_A}\right) - nR \log\left(\frac{p_B}{p_A}\right) \end{aligned}$$

Dimostrazione.

Ricaviamo le tre formulazioni:

- Integrando $dS = \frac{C_V}{T}dT + \frac{nR}{V}dV$ troviamo la prima espressione.
- Sfruttando la proporzionalità $\frac{T_B}{T_A} = \frac{p_B V_B}{p_A V_A}$ possiamo rielaborare la prima forma come segue

$$\begin{aligned} S_B - S_A &= C_V \log\left(\frac{p_B}{p_A}\right) + (C_V + nR) \log\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = \\ &= C_V \log\left(\frac{p_B}{p_A}\right) + C_p \log\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = \\ &= C_V \left(\log\left(\frac{p_B}{p_A}\right) + \log\left(\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^\gamma\right) \right) = \\ &= C_V \log\left(\frac{p_B V_B^\gamma}{p_A V_A^\gamma}\right), \end{aligned}$$

ricavando la seconda espressione.

- Ricordiamo che $\delta Q = nc_p dT - V dp$. Dividendo per T e poi integrando² ricaviamo

$$S_B - S_A = nc_p \log\left(\frac{T_B}{T_A}\right) - nR \log\left(\frac{p_B}{p_A}\right).$$

□

Osservazione 5.33.

Se ci spostiamo lungo una adiabatica reversibile, dalla seconda formula ricaviamo $\Delta S = 0$ come ci aspettiamo.

Proposizione 5.34 (Entropia in gas ideali per processi standard).

Valgono le seguenti espressioni:

²stiamo usando che $-V/T = -nR/p$.

Isocora $\Delta S = nc_V \log\left(\frac{T_B}{T_A}\right) \rightsquigarrow dS = nc_V \frac{dT}{T},$

Isobara $\Delta S = nc_p \log\left(\frac{T_B}{T_A}\right) \rightsquigarrow dS = nc_p \frac{dT}{T}.$

Isoterma $\Delta S = nR \log\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = -nR \log\left(\frac{p_B}{p_A}\right).$

Dimostrazione.

Basta applicare le espressioni trovate (5.32). \square

Osservazione 5.35.

Si ha che

$$dH = dU + pdV + Vdp = C_VdT + d(pV) = n(c_V + R)dT = nc_pdT.$$

Osservazione 5.36.

Poiché nei gas ideali U dipende solo da T e $pV = nRT$, si ha che anche H dipende solo da T per gas ideali. Segue che possiamo testare se un gas è ideale verificando se $\mu_{JT} = 0$ o meno.

5.7 Equazione di stato dei gas reali

Cosa può contribuire a negare l'approssimazione di gas ideale?

- **Interazione attrattiva tra particelle:** Una particella vicino al bordo è attratta dalle particelle più interne, dunque la pressione interna al gas è più grande di quella misurata

$$p_{real} = p + a \frac{n^2}{V^2}.$$

- **Volume occupato dalle particelle:** Le particelle in genere occupano un volume

$$V_{real} = V - bn$$

Fatto 5.37 (Legge di Van der Waals).

In prima approssimazione l'equazione di **Van del Waals**

$$\left(p + a \frac{n^2}{V^2}\right)(V - bn) = nRT.$$

Osservazione 5.38.

Di solito a si aggira tra 10^{-2} e $10 \frac{\ell^2 \text{atm}}{\text{mol}^2}$, mentre b si aggira tra 10^{-2} e $10^{-1} \ell/\text{mol}$.

Sotto una temperatura critica, le isoterme secondo l'equazione di Van der Waals diventano cubiche con un picco e una valle, in realtà quello che succederebbe nella realtà è che raggiungiamo le condizioni per *transizioni di fase*.

Capitolo 6

Transizione di fase

Generalmente transizioni di stato avvengono per p e T costanti, quindi la forma di energia più utile da considerare è l'energia libera di Gibbs

$$\Delta G = \Delta H - T\Delta S.$$

Poiché $dG = -SdT - Vdp$, si ha che se p e T restano costanti allora $\Delta G = 0$, cioè

$$T\Delta S = \Delta H.$$

6.1 Transizione tra due fasi

Chiamiamo le due fasi “liquido” e “vapore”.

Notazione 6.1.

Siano n_L le moli di liquido e n_V le moli di vapore.

Osservazione 6.2 (Energia libera di Gibbs molare).

Si ha che¹

$$G = G_L(p_L, T_L, n_L) + G_V(p_V, T_V, n_V) = n_L g_L(p_L, T_L) + n_V g_V(p_V, T_V)$$

dove g è l'**energia libera di Gibbs molare**.

Osservazione 6.3 (Proporzione tra le fasi).

Per conservazione della materia $n_L + n_V = n$ è costante. Chiamiamo α la proporzione di liquido, cioè $n_L = \alpha n$ e $n_V = (1 - \alpha)n$.

Possiamo riscrivere l'energia libera di Gibbs in termini di n ed α :

$$G = n\alpha g_L(p_L, T_L) + n(1 - \alpha)g_V(p_V, T_V).$$

Poiché consideriamo tutto in regime di quasi-equilibrio, $T_L = T_V$ e $p_L = p_V$ ². Abbiamo dunque ricavato che G dipende solo da p , T e α .

Proposizione 6.4 (Condizione di equilibrio tra due fasi).

All'equilibrio si ha che

$$g_L = g_V.$$

¹nell'ultima uguaglianza abbiamo usato il fatto che l'energia è una grandezza estensiva.

²le pressioni sono le stesse perché c'è equilibrio meccanico.

Dimostrazione.

Per p e T costanti sappiamo (4.37) che $\Delta G \leq 0$, quindi siamo all'equilibrio solo se $G(\alpha)$ è minima, cioè³

$$0 = \frac{\partial G}{\partial \alpha} = n g_L + 0 - n g_V \implies g_L = g_V.$$

□

6.1.1 Contenitore chiuso

Modelliamo una contenitore chiuso ($U = \text{cost}$, $V = \text{cost}$).

Notazione 6.5 (Volume, energia interna ed entropia molari).

Scriviamo

$$\begin{aligned} V &= n\alpha v_L + n(1-\alpha)v_V \\ U &= n\alpha u_L + n(1-\alpha)u_V \\ S &= n\alpha s_L + n(1-\alpha)s_V \end{aligned}$$

Proposizione 6.6 (Condizione di equilibrio tra due fasi).

All'equilibrio si ha che

$$g_L = g_V.$$

Dimostrazione.

All'equilibrio $0 = dV = dU = dS = dn$, quindi (ricordando che p e T sono costanti)

$$\begin{aligned} 0 &= dU + pdV - TdS = \\ &= d(n\alpha u_L + n(1-\alpha)u_V) + pd(n\alpha v_L + n(1-\alpha)v_V) - Td(n\alpha s_L + n(1-\alpha)s_V) = \\ &= n\alpha(du_L + pdv_L - Tds_L) + n(1-\alpha)(du_V + pdv_V - Tds_V) + \\ &\quad + nd\alpha(u_L + pv_L - Ts_L) - nd\alpha(u_V + pv_V - Ts_V). \end{aligned}$$

All'equilibrio si ha che $du_L + pdv_L - Tds_L = 0$ e similmente per il vapore, dunque

$$u_L + pv_L - Ts_L = u_V + pv_V - Ts_V.$$

Evidenziando le moli in questa equazione si ha

$$\underbrace{\frac{U_L}{n_L} + p \frac{V_L}{n_L} - T \frac{S_L}{n_L}}_{= \frac{G_L}{n_L}} = \underbrace{\frac{U_V}{n_V} + p \frac{V_V}{n_V} - T \frac{S_V}{n_V}}_{= \frac{G_V}{n_V}},$$

ovvero $g_L = g_V$ come volevasi dimostrare. □

6.2 Caso generale

Consideriamo N componenti⁴ e F fasi. Sia $n_k^{(i)}$ il numero di moli della componente i nella fase k .

Osserviamo che

$$G = \sum_{k \in \{1, \dots, F\}} G_k(T, p, (n_k^{(i)})_{i \in \{1, \dots, N\}}),$$

cioè a priori G dipende da $NF + 2$ variabili.

³Per p e T costanti G dipende solo da α .

⁴moralmente N è il numero di sostanze diverse

Proposizione 6.7 (Regola delle fasi di Gibbs).

Il numero di gradi di libertà è

$$\nu = 2 + N - F$$

Questa è la regola delle fasi (di Gibbs).

Dimostrazione.

Consideriamo due fasi (a e b) e la transizione dalla fase a alla fase b :

$$\begin{cases} n_a^{(i)} \rightarrow n_a^{(i)} - \delta n^{(i)} \\ n_b^{(i)} \rightarrow n_b^{(i)} + \delta n^{(i)} \end{cases} .$$

Si ha che all'equilibrio

$$0 = dG = dG_a + dG_b = \frac{\partial G_a}{\partial n_a^{(i)}}(-\delta n^{(i)}) + \frac{\partial G_b}{\partial n_b^{(i)}}(\delta n^{(i)}),$$

ma l'energia libera di Gibbs è una grandezza estensiva, quindi vale la dipendenza lineare

$$\frac{\partial G_k}{\partial n_k^{(i)}} = \frac{G_k}{n_k^{(i)}},$$

segue dunque che

$$g_a^{(i)} = \frac{G_a}{n_a^{(i)}} = \frac{G_b}{n_b^{(i)}} = g_b^{(i)}.$$

Queste sono $F - 1$ condizioni indipendenti per ogni componente.

Osserviamo inoltre che per ogni fase possiamo eliminare un grado di libertà considerando i rapporti tra le moli di componenti in quella fase.

Tirando le somme si ha che i gradi di libertà sono

$$NF + 2 - (N(F - 1) + F) = 2 + N - F.$$

□

Esempio 6.8.

Studiamo i valori di N , F e ν per alcuni sistemi

- Fluido omogeneo: $N = 1$, $F = 1$, $\nu = 2$
- Fluido omogeneo dato da due gas: $N = 2$, $F = 1$, $\nu = 3$
- Acqua e vapore: $N = 1$, $F = 2$, $\nu = 1$
- Acqua, vapore e ghiaccio: $N = 1$, $F = 3$, $\nu = 0$.

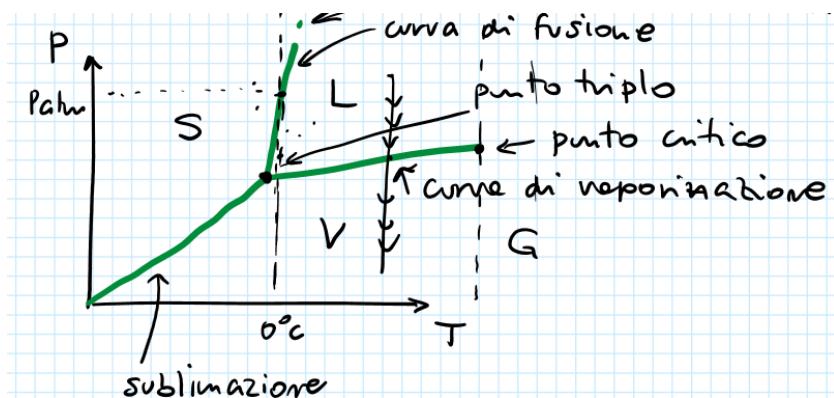
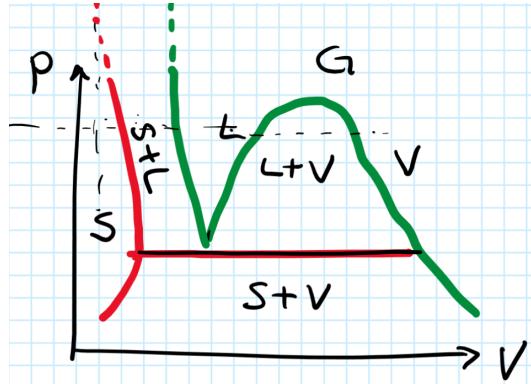
Definizione 6.9 (Punto triplo).

Considerando come sistema termodinamico l'acqua, esiste una precisa combinazione di temperatura e pressione tale per cui essa risulta in trasizione tra gli stati solido liquido e gassoso simultaneamente.

Questo stato si chiama **punto triplo** e i valori in questione sono una temperatura di 0.01°C e una pressione di 0.006 atm.

6.2.1 Grafici delle transizioni di fase

Inseriamo qualche grafico che mostra come e quando le transizioni di stato avvengono:



6.2.2 Definizione di temperatura tramite gas

L'esistenza del punto triplo ci permette di definire la temperatura in termini di una grandezza che possiamo misurare direttamente.

A bassa pressione i gas tendono al regime di Gas ideale.

Se fissiamo il volume e le moli di gas possiamo definire θ in modo tale che $p = p_0(1 + \alpha\theta)$, cioè poniamo

$$\theta = \frac{1}{\alpha} \frac{p - p_0}{p_0}.$$

Se imponiamo che l'acqua congeli per $\theta = 0$ e evapori per $\theta = 100$ allora ricaviamo $1/\alpha = 273.15$. Notiamo inoltre⁵

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\alpha^{-1} + \theta_2}{\alpha^{-1} + \theta_1} = \frac{\theta'_2}{\theta'_1}.$$

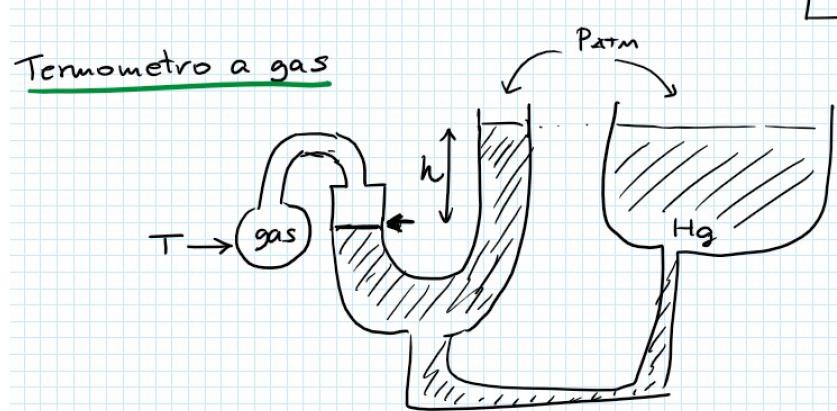
Possiamo dunque definire la temperatura (in Kelvin) come

$$T = \lim_{p^{(PT)} \rightarrow 0} 273.16 \frac{p}{p^{(PT)}}$$

⁵l'addizione di α^{-1} corrisponde alla traslazione che trasforma gradi Celsius in gradi Kelvin.

dove $p^{(PT)}$ è la pressione del gas nel termometro quando questo sistema è in equilibrio con il sistema di punto triplo con l'acqua. Il limite corrisponde a prendere gas sempre più rarefatti, cioè a lavorare nel limite dei gas perfetti dove vale la proporzionalità sopra.

Sfruttando questa definizione possiamo costruire un termometro a gas come in figura



Quando il gas è alla temperatura che vogliamo misurare, misuriamo la differenza di altezza tra il livello a contatto con il gas e il livello di controllo posto a pressione atmosferica. Questa differenza è proporzionale alla differenza di pressione e questo ci permette di ricavare la temperatura se la fissiamo per quando è nel punto critico.

6.3 Calore latente

Consideriamo nuovamente il caso di due fasi (liquido e vapore). Osserviamo che fissata una temperatura, la pressione alla quale avviene la transizione di fase ne è una funzione. Segue che anche V è una funzione di T .

Osservazione 6.10.

Osserviamo che $dn_L = -dn_V$, quindi

$$\left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_T = \frac{u_V - u_L}{v_V - v_L}.$$

Dimostrazione.

Segue ricordando che $V = n_L v_L(T) + n_V v_V(T)$ (e similmente per U) e che per le transizioni di fase T è costante. \square

Per il primo principio

$$\delta Q = dU + pdV = dn_V(u_L - u_L + p(v_V - v_L)),$$

questo motiva la seguente

Definizione 6.11 (Calore latente).

Definiamo il **calore latente (molare) di vaporizzazione** come

$$\lambda = \frac{\delta Q}{dn_V} = u_V - u_L + p(v_V - v_L).$$

Proposizione 6.12 (Equazione di Clapeyron).

Sulla transizione di fase

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\lambda}{T(v_V - v_L)}$$

Dimostrazione.

Sviluppiamo TdS :

$$TdS = T \underbrace{\left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_V}_{=nc_V} dT + T \left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_T dV.$$

Applicando la relazione di Maxwell (4.38) data da $\left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_T = \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_V$ troviamo

$$TdS = nc_V dT + T \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_V dV.$$

Combinando questo con $dU = TdS - pdV$ ricaviamo

$$dU = nc_V dT + \left(T \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_V - p \right) dV,$$

cioè

$$\left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_T = T \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_V - p.$$

Ricordiamo ora che $\left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_T = \frac{u_V - u_L}{v_V - v_L}$, da cui

$$\frac{\lambda}{v_V - v_L} = T \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_V,$$

che è la tesi se osserviamo che $\left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_V = \frac{dp}{dT}$. □

Osservazione 6.13 (Equazione di Clausius-Clapeyron).

Se $v_V \gg v_L$ allora per gas ideali

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\lambda}{RT^2} p \rightsquigarrow p \propto e^{-\lambda/RT}.$$

Capitolo 7

Teoria cinetica dei gas

7.1 Modello dei gas ideali

Nella realtà i gas sono composti da tante particelle. Imponiamo alcune condizioni che ci aspettiamo dai gas:

Isotropo Le velocità delle particelle sono equamente distribuite in ogni direzione.

Omogeneo Le particelle sono equamente distribuite.

Sia $dn(v)$ il numero di particelle con una data velocità.

Osservazione 7.1.

Se N è il numero totale di particelle

$$N = \int dn(v) = \int_0^\infty \frac{dn}{dv} dv$$

dove $\frac{dn}{dv}$ è in un qualche modo la “densità delle particelle di una data velocità”.

Definizione 7.2 (Angolo solido).

Definiamo l'**angolo solido** relativo ad un insieme di vettori $\{\vec{u}\}$ come l'area di S^2 occupata da $\left\{ \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \right\}$.

Il differenziale dell'angolo solido è

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$$

Definizione 7.3 (Velocità quadratica media).

Definiamo la **velocità quadratica media delle particelle** come

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^\infty v^2 dn(v)$$

Definizione 7.4 (Energia cinetica media).

Definiamo l'**energia cinetica media** di una particella come

$$\langle E_K \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle.$$

L'energia cinetica media di tutto il gas è $\frac{1}{2} m N \langle v^2 \rangle$.

Proposizione 7.5 (Calcolo della pressione).

Sia m la massa di una particella, N il numero di particelle e V il volume che occupano.

La pressione collettiva che queste particelle esercitano è

$$p = \frac{1}{3}m\frac{N}{V}\langle v^2 \rangle.$$

Dimostrazione.

Calcoliamo qualche differenziale utile

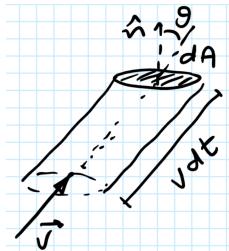
dn(\vec{v}) Sia \vec{v} una qualche velocità.

$$dn(\vec{v}) \stackrel{\text{isotropia}}{=} dn(v) \frac{d\Omega}{4\pi},$$

dove $d\Omega$ è il differenziale dell'angolo solido occupato dalle possibili velocità.

dn Per omogeneità il numero di particelle in un volumetto è

$$dn = \frac{N}{V}dV = \frac{N}{V}dAvdt \cos \theta.$$



Assumendo impatti elatici, l'impulso trasferito alla parete dall'impatto di una particella è $|\Delta \vec{p}| = 2mv \cos \theta$.

Appurate queste equazioni possiamo scrivere il differenziale della pressione come segue:

$$\begin{aligned} d^2p &= \frac{dF}{dA} = \frac{|d\vec{p}|/dt}{dA} = \frac{1}{dA} \frac{1}{dt} |d\vec{p}|_{\text{singola}} dndn(\vec{v}) \\ &= \frac{1}{dA} \frac{1}{dt} 2mv \cos \theta \frac{N}{V} dAvdt \cos \theta \quad dn(v) \frac{d\Omega}{4\pi} = \\ &= N \frac{2mv^2 \cos^2 \theta}{V} dn(v) \frac{d\Omega}{4\pi}. \end{aligned}$$

Facendo la media su tutte le direzioni troviamo il vero differenziale della pressione:

$$\begin{aligned} dp &= \int_{\Omega} d^2p = \frac{mv^2}{2\pi} \frac{N}{V} dn(v) \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{1}{3} mv^2 \frac{N}{V} dn(v). \end{aligned}$$

Integrando ora sui possibili moduli delle velocità troviamo la pressione:

$$p = \frac{1}{3}m\frac{N}{V}\langle v^2 \rangle \int_0^{\infty} v^2 dn(v) = \frac{1}{3}m\frac{N}{V}\langle v^2 \rangle.$$

□

Proposizione 7.6.

Per gas ideali vale la relazione

$$\langle E_K \rangle = \frac{3}{2} k_b T$$

Dimostrazione.

Osserviamo che

$$pV = \frac{1}{3} mN \langle v^2 \rangle,$$

dunque

$$nRT = pV = \frac{1}{3} mN \langle v^2 \rangle = \frac{2}{3} N \langle E_K \rangle,$$

cioè

$$T = \frac{2}{3} \frac{N \langle E_K \rangle}{nR} = \frac{2}{3} N_a \frac{N \langle E_K \rangle}{NR} = \frac{2}{3} \frac{\langle E_K \rangle}{k_b}.$$

In conclusione

$$\langle E_K \rangle = \frac{3}{2} k_b T.$$

□

Consideriamo ora l'energia interna di questo sistema¹:

$$U = N \langle E_K \rangle = \frac{3}{2} nRT = C_V T.$$

In generale $U = E_K + E_P$ per una qualche energia potenziale E_P . Per piccoli spostamenti $E_P = (E_P)_0 + \frac{1}{2} kx^2$ ². Nel caso biatomico per esempio $E_P = \frac{1}{2} I\omega^2$.

Solido 6 gradi di libertà: 3 potenziali (forze elastiche) e 3 cinematiche.

Gas perf. mono. 3 gradi di libertà, tutti cinematici.

Gas perf. bi. 5 gradi di libertà: 3 cinematici e 2 dalla rotazione ³.

Fatto 7.7 (Principio di equipartizione).

Ogni grado di libertà contribuisce un addendo $\frac{1}{2} RT$ al calore specifico a volume costante.

Osservazione 7.8.

Abbiamo ricavato nuovamente l'espressione per c_V che avevamo assunto per gas ideali:
Se le particelle hanno ν gradi di libertà allora

$$c_V = \frac{\nu}{2} RT.$$

¹affermare che $U = \langle E_K \rangle$ corrisponde ad assumere che il gas sia monoatomico.

²regime ragionevole per il tipo di forze che agiscono all'interno di materiali.

³la rotazione lungo l'asse che congiunge le particelle è irrilevante

7.2 Distribuzione di Maxwell-Boltzmann

Consideriamo ora un sistema isolato con temperatura costante. Cerchiamo di capire come è fatta la distribuzione delle velocità.

Decomponiamo le velocità \vec{v} in (v_x, v_y, v_z) . Notiamo che

$$dn(v_x) = Nf(v_x)dv_x,$$

dove f è la densità di probabilità che la componente x sia v_x .

Per isotropia si ha che

$$dn(v_y) = Nf(v_y)dv_y, \quad dn(v_z) = Nf(v_z)dv_z,$$

dunque

$$dn(\vec{v}) = Nf(v_x)f(v_y)f(v_z)dv_xdv_ydv_z.$$

Sempre per isotropia, in realtà $f(v_x)f(v_y)f(v_z)$ è una funzione $\phi(v)$ del modulo $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$, non delle singole componenti.

Segue dunque che

$$\phi(v) = f(v_x)f(v_y)f(v_z) = f(v)f(0)f(0).$$

Dividendo per $f(0)^3$ troviamo

$$\frac{f(v)}{f(0)} = \frac{f(v_x)}{f(0)} \frac{f(v_y)}{f(0)} \frac{f(v_z)}{f(0)},$$

da cui passando ai logaritmi

$$\log \frac{f(v)}{f(0)} = \log \frac{f(v_x)}{f(0)} + \log \frac{f(v_y)}{f(0)} + \log \frac{f(v_z)}{f(0)}.$$

Per semplicità notazionale sia $G(v) = \log \frac{f(v)}{f(0)}$, da cui

$$G(v) = G(v_x) + G(v_y) + G(v_z).$$

Derivando ora per v_i con $i \in \{x, y, z\}$ troviamo

$$\frac{G'(v)v_i}{v} = G'(v_i),$$

da cui

$$\frac{G'(v)}{v} = \frac{G'(v_x)}{v_x} = \frac{G'(v_y)}{v_y} = \frac{G'(v_z)}{v_z} \doteq -2\alpha$$

Poiché α non dipende da v_i possiamo integrare l'equazione sopra per trovare

$$G(v_i) = -\alpha v_i^2 + C$$

che ricordando la definizione di G significa che esiste $a > 0$ tale che

$$f(v_i) = ae^{-\alpha v_i^2}.$$

Sostituendo questo nella definizione di ϕ si ha

$$\phi(v) = Ae^{-\alpha(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} = Ae^{-\alpha v^2}.$$

Poiché ϕ è una densità di probabilità⁴ si ha che $A = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}$, cioè

$$dn(\vec{v}) = N \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\alpha v^2} dv_x dv_y dv_z.$$

Se ora integriamo sull'angolo solido troviamo il numero di particelle con una data velocità:

$$\begin{aligned} dn(v) &= \int_{\Omega} dn(\vec{v}) = N \int_{\Omega} \phi(v) dv_x dv_y dv_z = \\ &= N \int_{\Omega} \phi(v) v^2 dv d\Omega = \\ &= 4\pi N \phi(v) v^2 dv = \\ &= 4N \sqrt{\frac{\alpha^3}{\pi}} v^2 e^{-\alpha v^2} dv. \end{aligned}$$

Cerchiamo ora di capire chi è α . Ricordiamo che

$$\frac{3k_b T}{m} = \langle v^2 \rangle = \frac{\int_0^\infty v^2 dn(v)}{\int_0^\infty dn(v)}.$$

Sviluppando il termine di destra tramite identità note sulla funzione Gamma⁵ ricaviamo

$$\int_0^\infty 4N \sqrt{\frac{\alpha^3}{\pi}} v^4 e^{-\alpha v^2} dv = 4N \sqrt{\frac{\alpha^3}{\pi}} \frac{\Gamma(5/2)}{2\alpha^{5/2}} = \frac{1}{2} \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \alpha^{\frac{3}{2}-\frac{5}{2}} = N \frac{3}{2} \frac{1}{\alpha},$$

che insieme all'equazione di prima restituisc

$$\frac{3k_b T}{m} = \frac{3}{2} \frac{1}{\alpha} \iff \alpha = \frac{m}{2k_b T}.$$

Abbiamo dunque ricavato che

$$dn(v) = N 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_b T}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{m}{2k_b T} v^2\right) dv$$

Definizione 7.9 (Distribuzione di Maxwell-Boltzmann).

Definiamo **Distribuzione di Maxwell-Boltzmann** quella data da

$$\frac{dn}{dv} = N 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_b T}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{m}{2k_b T} v^2\right)$$

È possibile misurare se effettivamente la distribuzione è questa: si fa girare una ruota velocemente con un buchino e poi si mettono a contatto la ruota con un tubo da cui esce il gas. Vedendo quante particelle sono arrivate sulle varie parti interne della ruota uno può capire la distribuzione.

⁴abbiamo usato il fatto che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

⁵ $\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x^2} = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{2a^{(n+1)/2}}$

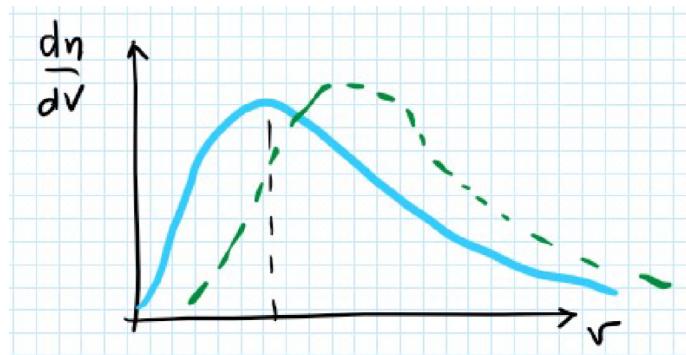
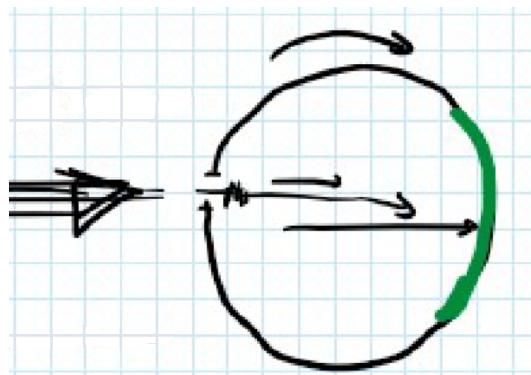


Figura 7.1: Distribuzione di Maxwell-Boltzmann. La curva verde corrisponde alla distribuzione per una temperatura maggiore rispetto a quella per la curva azzurra.



7.3 Entropia nel modello statistico

Definizione 7.10 (Macro- e Microstati).

Dato un sistema statistico come quello trattato in questo capitolo, un **microstato** è il dato di ogni singola posizione e velocità, un **macrostato** è la classe di microstati con le stesse proprietà globali (per esempio volume, temperatura, pressione).

Fatto 7.11.

Tutti i microstati compatibili con un dato macrostato sono equiprobabili.

Osservazione 7.12.

Consideriamo due sistemi. Uno in un macrostato con probabilità P_1 di verificarsi ed entropia S_1 , il secondo con dati analoghi P_2 e S_2 . Notiamo che l'insieme dei due sistemi ha entropia $S_1 + S_2$ e la probabilità del macrostato di questo insieme è $P_1 P_2$. Intuitivamente abbiamo notato che

$$S \propto \log P \propto \log \Omega,$$

dove Ω è il numero di microstati con lo stesso macrostato.

Definizione 7.13 (Entropia di Boltzmann).

Per una qualche costante⁶ C definiamo l'**entropia di Boltzmann** di un sistema come

$$S = C \log \Omega$$

⁶che troveremo in seguito

Proviamo a confrontare l'entropia di Boltzmann con quella che abbiamo già definito per alcune trasformazioni di gas ideali.

7.3.1 Mescolamento dello stesso gas

Consideriamo una scatola adiabatica con due compartimenti di volume $V/2$. Dentro il primo compartimento si trovano r moli di gas e nel secondo $1-r$ moli, entrambi alla stessa temperatura. Rimuoviamo successivamente la parete e attendiamo l'equilibrio termodinamico.

La variazione di entropia termodinamica è

$$\begin{aligned}\Delta S &= (S_{f_1} - S_{i_1}) + (S_{f_2} - S_{i_2}) = \\ &= rR \log\left(\frac{rV}{V/2}\right) + (1-r)R \log\left(\frac{(1-r)V}{V/2}\right) = \\ &= R(r \log r + (1-r) \log(1-r) + \log 2).\end{aligned}$$

Consideriamo ora l'entropia di Boltzmann:

Nel primo compartimento abbiamo $N/2 - x$ particelle e nel secondo $N/2 + x$.

$$\Omega(N, x) = \binom{N}{x + N/2},$$

da cui

$$S_i = C(\log(N!) - \log((N/2 - x)!) - \log((N/2 + x)!)).$$

Applicando l'approssimazione di Stirling $\log(N!) \simeq N \log N$ si ha

$$S_i \simeq -NC \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{N} \right) \log \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{N} \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{N} \right) \log \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{N} \right) \right).$$

Riscrivendo questo risultato in termini di moli $r = \frac{1}{N_a} (\frac{N_a}{2} - x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{N_a}$, si ha

$$S_i \simeq -N_a C (r \log r + (1-r) \log(1-r))$$

Per quanto riguarda lo stato finale il numero di microstati possibili ora è ogni combinazione di particelle nei due contenitori, 2^{N_a} possibilità in totale, dunque

$$S_f = CN_a \log 2,$$

dunque

$$\Delta S = S_f - S_i = N_a C (r \log r + (1-r) \log(1-r) + \log 2).$$

Notiamo che le due espressioni sono la stessa se $C = k_b$, dunque troviamo la definizione di entropia di Boltzmann più conosciuta

$S = k \log \Omega$

7.3.2 Espansione isoterna

Fissiamo la temperatura e consideriamo una espansione da V a $V+dV$. Ci aspettiamo che Ω cambi come segue

$$\frac{\Omega_f}{\Omega_i} = \frac{(V+dV)^N}{V^N} = \left(1 + \frac{dV}{V}\right)^N$$

Poiché stiamo considerando il modello di gas perfetto si ha che $dT = 0 \implies dU = 0$, dunque

$$dV = \frac{\delta Q}{p},$$

da cui

$$\frac{dV}{V} = \frac{\delta Q}{pV} = \frac{\delta Q}{nRT} = \frac{\delta Q}{Nk_bT}$$

Quindi l'entropia di Boltzmann verifica la definizione di entropia che avevamo dato per trasformazioni reversibili:

$$\Delta S = k_b \log \left(\frac{\Omega_f}{\Omega_i} \right) = k_b N \log \left(1 + \frac{\delta Q}{Nk_bT} \right) \approx k_b N \frac{\delta Q}{Nk_bT} = \frac{\delta Q}{T}.$$

7.3.3 Isocora

Consideriamo ora una isocora e cambiamo la temperatura. Poiché

$$\langle E_K \rangle = \frac{3}{2} k_b T$$

si ha che in ogni direzione

$$\frac{1}{2} m \langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{2} k_b T \implies \langle v_x^2 \rangle = \frac{k_b T}{m},$$

inoltre per isotropia $\langle v_x \rangle = 0$, quindi $\sqrt{\frac{k_b T}{m}}$ è la deviazione standard di v_x . Quindi v per una particella ha una deviazione standard nell'ordine di $(\frac{k_b T}{m})^{3/2}$ quindi nell'insieme si ha che $\langle v \rangle \propto T^{3N/2}$.

Tornando alla trasformazione isocora abbiamo trovato che

$$\frac{\Omega_f}{\Omega_i} = \left(1 + \frac{dT}{T}\right)^{3N/2},$$

da cui nuovamente

$$\Delta S = \frac{3N}{2} k_b \log \left(1 + \frac{dT}{T} \right) \approx \frac{3Nk_b}{2} \frac{dT}{T} = \frac{C_V dT}{T} = \frac{dU}{T} \stackrel{\text{isocora}}{=} \frac{\delta Q}{T}.$$

7.4 Informazione

Definizione 7.14 (Informazione).

Sia X una variabile aleatoria discreta che può assumere N valori x_1, \dots, x_N con densità di probabilità P_i . Definiamo l'**informazione** derivante dal fatto che l'evento x_i sia accaduto come

$$I_i = -\log P_i$$

Vogliamo definire una funzione $\mathcal{H}(\{P_i\})$ che rappresenta “l’informazione che manca per capire l’esito data una distribuzione di probabilità”. Imponiamo alcune proprietà:

- \mathcal{H} deve essere continua nelle P_i
- Se per ogni $P_i = \frac{1}{N}$, \mathcal{H} deve essere monotona e crescente⁷ in N .

(Consistenza) • Sia π una partizione di N e per ogni elemento $g \in \pi$ sia $P_g = \sum_{i \in g} P_i$, allora⁸

$$\mathcal{H}(\{P_i\}) = \mathcal{H}(\{P_g\}_{g \in \pi}) + \sum_{g \in \pi} P_g \mathcal{H}(\{P(x_i | g)\})$$

Teorema 7.15 (Entropia di Shannon).

La funzione \mathcal{H} deve assumere la forma

$$\mathcal{H}(\{P_i\}) = -C \sum_i P_i \log(P_i).$$

Questa funzione di dice **entropia di Shannon/Gibbs**.

Dimostrazione.

Consideriamo due casi possibili per la distribuzione di probabilità:

uniforme Sia $\mathcal{H}(\{N^{-1}, \dots, N^{-1}\}) = F(N)$. Consideriamo ora n collezioni di eventi equiprobabili. Ogni collezione g contiene N/n eventi, quindi $P_g = \frac{1}{n}$ e $P(x_i | g) = \frac{n}{N}$. Osserviamo dunque che $\mathcal{H}(\{P(x_i | g)\}) = F(N/n)$. Per consistenza

$$F(N) = F(n) + \sum_n \frac{1}{n} F(N/n) = F(n) + F(N/n).$$

Siano ora $s, t > 1$ interi positivi e notiamo che esistono α, β interi con β arbitrariamente grande tali che

$$\frac{\alpha}{\beta} \leq \frac{\log s}{\log t} < \frac{\alpha+1}{\beta} \implies t^\alpha \leq s^\beta < t^{\alpha+1}.$$

Per monotonia di F

$$F(t^\alpha) \leq F(s^\beta) < F(t^{\alpha+1}).$$

Per la proprietà di F mostrata sopra si ha che

$$F(t^\alpha) = F(t) + F(t^{\alpha-1}) = \dots = \alpha F(t)$$

e similmente per gli altri termini, dunque

$$\frac{\alpha}{\beta} \leq \frac{F(s)}{F(t)} < \frac{\alpha+1}{\beta}.$$

Questo mostra che

$$\left| \frac{F(s)}{F(t)} - \frac{\log s}{\log t} \right| \leq \frac{1}{\beta},$$

e poiché β può essere scelto grande a piacere questo mostra che $F(s) = C \log s$ per una qualche costante C .

⁷Più esiti possibili corrisponde a più informazione necessaria per identificare l’evento accaduto

⁸ $P(a | b)$ indica la probabilità che accada a dato che accade b , equivalentemente

$$P(a | b) = P(a \wedge b) / P(b)$$

generale Sia $N_g = \#g$. Notiamo che $P_g = \frac{N_g}{N}$ e che $P(x_i | g) = \frac{1}{N_g}$. Osserviamo che

$$\mathcal{H}(\{P_i\}) = F(N) = \mathcal{H}(\{P_g\}) + \sum_g P_g F(N_g),$$

da cui

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\{P_g\}) &= F(N) - \sum_g P_g F(N_g) = \sum_g P_g (F(N) - F(N_g)) = \\ &= C \sum_g P_g \log(N/N_g) = \\ &= -C \sum_g P_g \log(P_g).\end{aligned}$$

□

Osservazione 7.16.

L'entropia è la media pesata del logaritmo delle probabilità nella distribuzione a meno di costante.

Osservazione 7.17.

Se $P_i = 1/N$ allora

$$\mathcal{H}(\{P_i\}) = -C \sum_i \frac{1}{N} \log \frac{1}{N} = -C \log N,$$

che a meno della notazione è l'equivalente di $S = k_b \log \Omega$.

7.4.1 Principio di massima entropia

Fatto 7.18 (Principio di massima entropia).

I sistemi tendono alla distribuzione che massimizza l'entropia compatibile con i vincoli.

Nessun vincolo

Consideriamo un sistema con N stati e nessun vincolo. Sia P_i la probabilità dello stato i . Vogliamo trovare i P_i che massimizzano S sapendo che $\sum_i P_i = 1$: Cerchiamo le soluzioni del sistema di moltiplicatori di Lagrange

$$\begin{cases} \sum_i P_i = 1 \\ \frac{\partial}{\partial P_i} (-k_b \sum_j P_j \log P_j) = \lambda \frac{\partial}{\partial P_i} (-1 + \sum_j P_j) \end{cases} \iff \begin{cases} \sum_i P_i = 1 \\ -k_b (\log P_i + 1) = \lambda \end{cases}$$

Poiché $e^{-\left(\frac{\lambda}{k_b} + 1\right)}$ non dipende da i , il sistema ha come soluzione $P_i = N^{-1}$ per ogni i , dunque in assenza di vincoli

$$S = -k_b \sum_i \frac{1}{N} \log \left(\frac{1}{N} \right) = k_b \log N.$$

Un vincolo

Consideriamo un vincolo della forma

$$\langle f(x_i) \rangle \doteqdot \sum_i P_i f(x_i) = c.$$

Applicando nuovamente il sistema dei moltiplicatori di Lagrange ricaviamo⁹

$$\begin{cases} \sum_j P_j = 1 \\ \sum_j P_j f(x_j) = c \\ -k_b(\log P_i + 1) = \alpha + \beta f(x_i) \end{cases} \iff \begin{cases} \sum_j P_j = 1 \\ \sum_j P_j f(x_j) = c \\ P_i = e^{-1-\alpha/k_b} e^{-(\beta/k_b)f(x_i)} \end{cases}$$

Applicando la prima equazione troviamo

$$e^{-1-\alpha/k_b} \underbrace{\left(\sum_j e^{-(\beta/k_b)f(x_j)} \right)}_{\doteq Z} = 1,$$

da cui

$$P_i = \frac{1}{Z} e^{-\frac{\beta}{k_b} f(x_i)}.$$

Inserendo questa scrittura nella formula per l'entropia di Shannon troviamo

$$\begin{aligned} S &= -k_b \sum_i \frac{1}{Z} e^{-\frac{\beta}{k_b} f(x_i)} \log \left(\frac{1}{Z} e^{-\frac{\beta}{k_b} f(x_i)} \right) = \\ &= k_b \log Z - k_b \sum_i P_i \log \left(e^{-\frac{\beta}{k_b} f(x_i)} \right) = \\ &= k_b \log Z + \beta \langle f(x_i) \rangle \end{aligned}$$

Esempio 7.19 (Energia interna costante).

Sia $f(x_i) = E(x_i)$ e supponiamo che $U = \langle E \rangle$ sia costante. L'entropia è della forma

$$S = k_b \log Z + \beta U$$

Poiché Z è costante, $\beta = \frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T}$, dunque

$$S = k_b \log Z + \frac{U}{T}.$$

Osserviamo inoltre che per quanto detto

$$P_i = \frac{1}{Z} \exp \left(-\frac{E(x_i)}{k_b T} \right),$$

che a meno della costante di normalizzazione Z corrisponde ad un termine che appare nella distribuzione di Maxwell-Boltzmann.

⁹ f non dipende dalle probabilità, quindi $\frac{\partial f}{\partial P_i}(x_i) = 0$

Parte II

Relatività speciale

Capitolo 8

Trasformazioni di Lorenz

In questa parte considereremo sempre sistemi di riferimento S e S' in moto relativo a velocità uniforme lungo l'asse x tali che per $t = 0$ si abbia $O = O'$.

Notazione 8.1.

Le quantità misurate nel sistema S' sono indicate con degli apici, assenti da quelle misurate in S . Per esempio, se P è un punto allora le sue coordinate in S sono (x, y, z) , mentre quelle in S' sono (x', y', z') .

Ricordiamo che la velocità della luce vale circa

$$c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Definizione 8.2 (Elettron-Volt).

Definiamo l'**elettron-volt** come

$$\text{eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J.}$$

Quando lavoriamo in questo sistema possiamo misurare la quantità di moto in eV/c e la massa in eV/c^2 .

Definizione 8.3 (Unità naturali).

Può essere comodo porre $c = 1$ per semplificare le formule. In queste unità di misura

$$[\text{Energia}] = [\text{Quantità di moto}] = [\text{Massa}].$$

8.1 Relatività galileiana e parentesi storica

Definizione 8.4 (Sistema di riferimento inerziale).

Un sistema di riferimento è **inerziale** se valgono le leggi di Newton.

Fatto 8.5 (Principio di Relatività).

Le leggi della fisica sono le stesse in qualsiasi sistema di riferimento in moto rettilineo uniforme.

Definizione 8.6 (Trasformazioni di Galileo).

Le **trasformazioni di Galileo** sono le trasformazioni tra coordinate spaziali e tempi tra i sistemi S ed S' ritenute valide classicamente, ovvero

$$\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

Osserviamo che

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial t'} - u \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial t'}{\partial y} \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial t'}{\partial z} \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z'} \end{cases}$$

Osservazione 8.7 (Trasformazioni di Galileo per velocità e accelerazioni).

Osserviamo che

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{d}{dt}(x - ut) \stackrel{\text{moto rett. unif.}}{=} \frac{dx}{dt} - u,$$

e derivando di nuovo troviamo $\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt}$, dunque

$$\begin{cases} v'_x = v_x - u & \begin{cases} a'_x = a_x \\ a'_y = a_y \\ a'_z = a_z \end{cases} \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z \end{cases}$$

Esempio 8.8 (Le leggi della fisica non cambiano).

Consideriamo la legge di Hooke

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k(x - x_0).$$

Cambiando sistema di riferimento $x = x' + ut$, $x_0 = x'_0 + ut$, dunque

$$m \frac{d^2 x'}{dt^2} = m \frac{d^2}{dt^2}(x' + ut) = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k(x - x_0) = -k(x' + ut - (x'_0 + ut)) = -k(x' - x'_0),$$

cioè la legge continua a valere sostituendo le grandezze di un sistema con le equivalenti nell'altro.

8.1.1 Il problema delle equazioni di Maxwell e l'etere

Ricordiamo le equazioni di Maxwell

Fatto 8.9 (Equazioni di Maxwell).

Valgono le seguenti equazioni

$$\begin{array}{ll} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \end{array}$$

Essendo leggi della fisica dovrebbero essere invarianti al variare di sistema di riferimento inerziale, eppure

Esempio 8.10.

Le equazioni di Maxwell e la relatività Galileiana non sono compatibili.

Dimostrazione.

Cambiando sistema di riferimento alla prima entrata di $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ troviamo

$$\frac{\partial E_{z'}}{\partial y'} - \frac{\partial E_{y'}}{\partial z'} = -\frac{\partial B_{x'}}{\partial t'} + u \frac{\partial B_{x'}}{\partial x'}$$

ovvero, applicando l'equazione con la divergenza

$$\frac{\partial E_z + uB_y}{\partial y'} - \frac{\partial E_y - uB_z}{\partial z'} = -\frac{\partial B_x}{\partial t'}$$

possiamo dunque ipotizzare

$$\begin{cases} E'_z = E_z + uBy \\ E'_y = E_y - uB_z \\ E'_x = E_x \\ \vec{B}' = \vec{B} \end{cases}$$

Problema, esiste un'altra equazione di Maxwell

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

che non vale con le sostituzioni sopra. \square

Michelson e Morley

Ricordiamo che dalle equazioni di Maxwell segue la legge

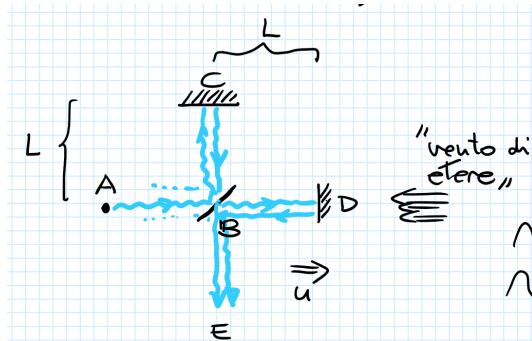
$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \vec{E}.$$

Questa equazione sembra quella di un'onda, ma allora la relatività magari funziona se teniamo conto degli stessi effetti che subiscono le onde sotto queste trasformazioni. In particolare ipotizziamo l'esistenza di un mezzo attraverso il quale la luce si propaga: l'etere.

Fatto 8.11 (Esperimento di Michelson-Morley).
L'etere e la terra non sono indipendenti.

Descrizione dell'esperimento.

Esempio con interferometro e specchi. Supponiamo che il vento d'etere sia diretto



lungo BD , cioè la terra si muove in quella direzione rispetto al riferimento dell'etere:

$$\begin{aligned} t(BD) &= t_1 \\ t(DB) &= t_2 \\ t(BC) &= t(CB) = t_3 \end{aligned}$$

Se L è la lunghezza di BD e di BC , se u è la velocità dell'aria terra rispetto all'etere allora

$$t_1 = \frac{L}{c-u} \quad t_2 = \frac{L}{c+u}.$$

Consideriamo ora il sistema di riferimento dove la velocità della luce è c , cioè nel sistema solidale all'etere:

Per quanto riguarda il tratto BD in questo sistema

$$ct_1 = L + ut_1, \quad ct_2 = L - ut_2 \quad \Rightarrow \quad t_1 + t_2 = \frac{2Lc}{c^2 - u^2},$$

mentre sul tratto BC si ha

$$(ct_3)^2 = L^2 + (ut_3)^2 \quad \Rightarrow \quad t_3 = \frac{L}{\sqrt{c^2 - u^2}}$$

e il tempo che ci interessa è $2t_3$. Si ha dunque

$$2t_3 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - u^2}} \neq \frac{2Lc}{c^2 - u^2} = t_1 + t_2.$$

Ammettiamo allora di aver sbagliato qualche misura in modo tale che le distanze BC e BD non siano identiche. Si può ricavare

$$t_1 + t_2 - 2t_3 \approx \frac{2L_{BD}}{c} \left(1 + \frac{u^2}{c^2}\right) - \frac{2L_{BC}}{c} \left(1 + \frac{u^2}{2c^2}\right).$$

Se ruotiamo l'esperimento, l'effetto è scambiare i valori di L_{BD} e L_{BC} ma in ogni caso non è stata misurata una differenza. \square

Cosa potrebbe star succedendo?

Fizeau Magari la terra trascina l'etere e la luce. Se n è l'indice di rifrazione tra due mezzi (in questo caso etere ed etere trascinato), la luce va a velocità c nell'etere e ci stiamo muovendo a velocità u rispetto a questo, si ha che la velocità della luce sarebbe

$$\frac{c}{n} + u \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Fitzgerald Magari le lunghezze parallele parallele alla direzione di moto si contraggono

$$L_{\parallel} = L_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}.$$

Con questo cambiamento la differenza tra i tempi riscontrata nell'esperimento di Michelson-Morley effettivamente si annulla.

Resta ancora una questione: se osserviamo l'esperimento di Michelson-Morley in movimento, il tempo che la luce sembra impiegare per percorrere il tratto perpendicolare alla direzione del moto aumenta

$$\frac{2L}{c} \quad \text{contro} \quad \frac{2L}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

Questo sembra indicare che anche la coordinata temporale cambia cambiando sistema di riferimento.

8.2 Trasformazioni di Lorenz

Definizione 8.12 (Frazione della velocità della luce).

Data una velocità u , essa corrisponde alla **frazione della velocità della luce** data da

$$\beta(u) = \frac{u}{c}.$$

Se u è chiara da contesto scriviamo solo β .

Definizione 8.13 (Fattore di Lorenz).

Definiamo il **fattore di Lorenz** relativo alla velocità u come

$$\gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta(u)^2}}.$$

Quando u è chiara dal contesto scriviamo solo γ .

Osservazione 8.14.

$\gamma(u)$ è sempre maggiore o uguale a 1 in quanto $0 \leq u \leq c$.

Osservazione 8.15.

La correzione di Fitzgerald corrisponde a dire $\gamma L_{\parallel} = L_0$.

Dato che la correzione di Fitzgerald sulle lunghezze funziona, deduciamo per il principio di relatività che

$$x = \frac{x'}{\gamma} + ut, \quad x' = \frac{x}{\gamma} - ut',$$

da cui ricaviamo le **trasformazioni di Lorenz**

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - \frac{ux}{c^2}) \\ x' = \gamma(x - ut) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Osservazione 8.16.

Se $\beta \rightarrow 0$ allora $\gamma \rightarrow 1$ e quindi ritroviamo le trasformazioni di Galileo.

Possiamo scrivere le trasformazioni di Lorenz in modo equivalente nella forma

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \iff \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & & \\ -\beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Osserviamo che

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z'} = \gamma \frac{\partial}{\partial t'} - \gamma u \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z'} = -\gamma \frac{u}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} + \gamma \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial t'}{\partial y} \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial t'}{\partial z} \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z'} \end{cases}$$

Proposizione 8.17 (Trasformazioni di Lorenz per direzioni arbitrarie).

Per un moto rettilineo uniforme a velocità \vec{u} si ha

$$\begin{cases} \vec{x}' = \vec{x} + (\gamma - 1) \frac{\vec{x} \cdot \vec{u}}{c^2} \vec{u} - \gamma t \vec{u} \\ t' = \gamma \left(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{x}}{c^2} \right) \end{cases}$$

Dimostrazione.

Basta notare che la componente parallela al moto è

$$\vec{x}_{\parallel} = \frac{\vec{x} \cdot \vec{u}}{u} \frac{\vec{u}}{u}$$

mentre quella perpendicolare è $\vec{x}_{\perp} = \vec{x} - \vec{x}_{\parallel}$. \square

Definizione 8.18 (Intervallo invariante).

L'intervallo invariante è

$$(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Proposizione 8.19.

L'intervallo invariante è invariante per trasformazioni di Lorenz.

Dimostrazione.

A meno di ruotare gli assi supponiamo che il moto avvenga lungo l'asse del moto relativo tra i sistemi (che supponiamo essere l'asse x). La tesi segue dal seguente calcolo

$$\begin{aligned} (ct')^2 - (x')^2 - (y')^2 - (z')^2 &= \gamma^2(ct)^2 + \gamma^2\beta^2x^2 - 2\gamma^2utx + \\ &\quad - \gamma^2x^2 - \gamma^2\beta^2(ct)^2 + 2\gamma^2utx - y^2 - z^2 = \\ &= \gamma^2(1 - \beta^2)(ct)^2 + \gamma^2(\beta^2 - 1)x^2 - y^2 - z^2 = \\ &= (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2. \end{aligned}$$

\square

Osservazione 8.20.

Se stiamo misurando della luce allora l'intervallo invariante vale 0.

Esempio 8.21 (Equazione delle onde).

Consideriamo l'equazione

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}.$$

Si ha che questa equazione è invariante per le trasformazioni di Lorenz.

Dimostrazione.

Segue sfruttando quanto sappiamo sui differenziali per le trasformazioni di Lorenz:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} &= -\frac{1}{c^2} \left(\gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2\gamma^2 u \frac{\partial^2}{\partial t' \partial x'} + \gamma^2 u^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \right) \phi + \\ &\quad + \left(\gamma^2 \frac{u^2}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2\gamma^2 \frac{u}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t' \partial x'} + \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \right) \phi + \\ &\quad + \frac{\partial^2\phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z'^2} = \\ &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t'^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z'^2}. \end{aligned}$$

\square

8.2.1 Dilatazione dei tempi e contrazione delle lunghezze

Definizione 8.22 (Intervallo di tempo proprio).

Consideriamo due eventi che nel sistema di riferimento S' hanno la stessa posizione. L'intervallo di tempo misurato da un orologio fermo rispetto a S' tra questi è detto **intervallo di tempo proprio** tra i due

$$\Delta t' = \Delta t_0$$

Sia $\Delta t' = t'_1 - t'_2$ l'intervallo di tempo proprio tra due eventi. Cambiando sistema di riferimento troviamo

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{\Delta t' + \cancel{\Delta t}^0 \frac{u}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma \Delta t'$$

dunque l'intervallo di tempo misurato da un sistema in movimento rispetto alla posizione dei due eventi è maggiore rispetto a quello misurato da un sistema che li vede alla stessa posizione.

Questo fenomeno è detto **dilatazione dei tempi**.

Definizione 8.23 (Lunghezza propria).

Fissiamo un sistema di riferimento S' e consideriamo una distanza $\Delta x'$ tra due punti fermi in questo sistema. Questa è detta la **lunghezza propria**.

Sia $\Delta x'$ la distanza misurata tra due punti fermi rispetto a S' in S' . Cambiando sistema di riferimento troviamo

$$\Delta x = x_1 - x_2 = \frac{\Delta x' + u\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Affinché la misura di questa lunghezza abbia senso in S dovremo avere $\Delta t = 0$ (mentre $\Delta t'$ a priori può essere qualsiasi valore, tanto la distanza in S' non dipende dal tempo). Consideriamo dunque la trasformazione inversa

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - u\cancel{\Delta t}^0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma \Delta x$$

dunque $\Delta x = \gamma^{-1} \Delta x'$, cioè la lunghezza misurata in S è più piccola rispetto a quella in S' .

Questo fenomeno è detto **contrazione delle lunghezze**.

Esempio 8.24 (Relatività della simultaneità).

Se due osservatori sono in moto l'uno rispetto all'altro e uno dei due misura due eventi con posizioni diverse ma allo stesso istante allora il secondo osservatore vede i due eventi come non simultanei. Questo segue immediatamente da

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{u\Delta x}{c^2} \right) = -\frac{\gamma u}{c^2} \Delta x \neq 0.$$

8.3 Trasformazioni di velocità

Proposizione 8.25 (Formula di Boost).

Se un oggetto si muove parallelo al moto tra due sistemi di riferimento inerziali allora

$$v' = \frac{v - u}{1 - \frac{uv}{c^2}} = \left(\frac{\beta(v) - \beta(u)}{1 - \beta(v)\beta(u)} \right) c.$$

Dimostrazione.

Consideriamo $x(t) = vt$ e portiamo nel sistema S'

$$x' = \gamma(x - ut) = \gamma(v - u)t = \gamma^2(v - u) \left(t' + \frac{ux'}{c^2} \right)$$

dunque

$$x' \left(1 - \frac{u}{c^2} \gamma^2(v - u) \right) = \gamma^2(v - u)t',$$

da cui

$$x' = \frac{v - u}{1 - \frac{u^2}{c^2} - \frac{u}{c^2}(v - u)} t' = \frac{v - u}{1 - \frac{uv}{c^2}} t'.$$

□

Osservazione 8.26.

Considerando i limiti $\beta(u) \rightarrow 0$ e $\beta(v') \rightarrow 0$ allora ritroviamo il Boost Galileiano.

Osservazione 8.27.

Se $v = c$ oppure $u = c$ troviamo $v' = c$, che è l'assioma sulla costanza della velocità della luce.

Osservazione 8.28.

Se il moto non è allineato con quello dei sistemi troviamo

$$\begin{cases} v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{v_x u}{c^2}} = \frac{v_x - u}{1 - \beta(v_x)\beta(u)} \\ v'_y = \frac{v_y}{\gamma(u) \left(1 - \frac{v_x u}{c^2} \right)} = \frac{v_y}{\gamma(u) \left(1 - \beta(v_x)\beta(u) \right)} \\ v'_z = \frac{v_z}{\gamma(u) \left(1 - \frac{v_x u}{c^2} \right)} = \frac{v_z}{\gamma(u) \left(1 - \beta(v_x)\beta(u) \right)} \end{cases}$$

La formula vettoriale per il boost di Lorenz è

$$\vec{v}' = \frac{1}{1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{c^2}} \left(\frac{1}{\gamma} \vec{v} - \vec{u} + \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{u^2} \vec{u} \right)$$

o equivalentemente

$$\vec{v}' = \frac{1}{1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{c^2}} \left(\vec{v} - \vec{u} + \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{v})}{u^2} \right)$$

Esempio 8.29 (Formula di Fizeau).

Consideriamo come cambia la velocità della luce entro un mezzo con indice di rifrazione n tra due sistemi in moto relativo a velocità u :

$$v = \frac{c/n + u}{1 + \frac{cu}{nc^2}},$$

da cui la differenza tra le velocità è

$$\Delta v = v - \frac{c}{n} = \frac{u(1 - n^{-2})}{1 + \frac{uc}{nc^2}},$$

che per $u \ll c$ si approssima a $u(1 - \frac{1}{n^2})$.

Capitolo 9

Cinematica relativistica

9.1 Introduzione ai quadrivettori

Definizione 9.1 (Quadrivettore).

Consideriamo lo spazio vettoriale \mathbb{R}^4 con prodotto scalare indotto dal **tensore metrico di Minkovsky**

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Un elemento di questo spazio è detto **quadrivettore**.

Definizione 9.2 (Quadrivettore posizione).

Defniamo il **quadrivettore posizione** come

$$x^\mu = (ct, x, y, z).$$

In particolare $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$ e $x^3 = z$.

Come notazione scriviamo anche $\vec{x} = (x, y, z)$ e $\tilde{x} = (ct, \vec{x})$.

Notazione 9.3.

Come notazione, se \tilde{x} è un quadrivettore posizione definiamo

$$s^2 = \tilde{x} \cdot \tilde{x} = x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Definizione 9.4 (Quadrivettore di tipo tempo/spazio luce).

Affermiamo che un quadrivettore è di tipo

- **tempo** se $s^2 > 0$
- **spazio** se $s^2 < 0$
- **luce** se $s^2 = 0$

Se il quadrivettore è di tipo tempo allora esso appartiene al **futuro** se $t > 0$ o al **passato** se $t < 0$.

Osservazione 9.5.

Un quadrivettore ortogonale ad uno di tipo tempo è di tipo spazio, ma un quadrivettore ortogonale ad uno di tipo spazio non necessariamente è di tipo tempo.

Causalità

Proposizione 9.6 (La causalità viene rispettata).

Consideriamo due eventi A e B . Se $\Delta t > 0$ e $\Delta t' < 0$ allora i due eventi non possono essere l'uno la causa dell'altro, cioè il quadrirettore dato dalla loro differenza è di tipo spazio.

Dimostrazione.

Applicando la trasformazione di Lorenz

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{u}{c^2} \Delta x \right)$$

dunque se $\Delta t' < 0$ e $\Delta t > 0$ allora

$$-\gamma \Delta t > -\gamma \frac{u}{c^2} \Delta x \implies \Delta x > \frac{c^2}{u} \Delta t > c \Delta t$$

cioè la distanza tra gli eventi è maggiore rispetto alla distanza che la luce potrebbe percorrere in quell'intervallo di tempo, quindi i due eventi non possono essere l'uno la causa dell'altro. \square

9.1.1 Derivazione delle trasformazioni di Lorenz

Poiché le trasformazioni di Lorenz rappresentano un cambio di sistema di riferimento esse devono rispettare combinazioni lineari, cioè cerchiamo una trasformazione lineare. Osserviamo che la norma di un quadrirettore posizione è esattamente l'intervallo invariante, quindi vogliamo che le trasformazioni siano isometrie per la metrica di Minkowski, cioè

$$\eta = L^\top \eta L.$$

Osservazione 9.7.

Passando ai determinanti segue subito che $\det L = \pm 1$.

Consideriamo l'equazione sopra in coordinate:

$$\sum_\nu \sum_\mu (L^\top)_{\alpha\mu} \eta_{\mu\nu} L_{\nu\beta} = \eta_{\alpha\beta}$$

nella convezione di Einstein possiamo evitare di scrivere i simboli di somma, dunque

$$L_{\mu\alpha} \eta_{\mu\nu} L_{\nu\beta} = \eta_{\alpha\beta}$$

Osserviamo che queste equazioni non cambiano scambiando α e β .

Come convenzione indici con lettere greche possono assumere valori tra 1 e 4, mentre indici latini solo tra 1 e 3.

Supponiamo che il moto avvenga lungo l'asse x ($y' = y$, $z' = z$ e x' non dipende da y o z), cioè

$$L_{ij} = 0 \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j$$

Consideriamo ora vari casi:

- Se $\alpha = i$ e $\beta = j$ per $i \neq j$ allora

$$L_{\mu i} \eta_{\mu\nu} L_{\nu j} = \eta_{ij} = 0 \implies L_{02} = L_{03} = 0$$

- Se $\alpha = 0$ e $\beta = j$ allora

$$L_{\mu 0} \eta_{\mu\nu} L_{\nu j} = \eta_{0j} = 0 \implies L_{00} L_{0j} - L_{j0} L_{jj}.$$

Intuitivamente L_{00} e L_{jj} non sono nulli perché altrimenti x' non dipenderebbe da x e similmente per le altre componenti, quindi abbiamo trovato

$$L_{j0} = L_{0j} \frac{L_{00}}{L_{jj}}$$

In particolare $L_{20} = L_{30} = 0$ e $L_{10} = L_{01} \frac{L_{00}}{L_{11}}$.

- Se $\alpha = \beta = 0$ allora abbiamo

$$L_{00}^2 - L_{10}^2 = \eta_{00} = 1$$

- Se $\alpha = \beta = i$ allora

$$L_{0i}^2 - L_{ii}^2 = \eta_{ii} = -1,$$

dunque $L_{01}^2 = L_{11}^2 - 1$ e $L_{22}^2 = L_{33}^2 = 1$.

Battezziamo $L_{11} = \gamma > 0$ e notiamo che

$$\begin{cases} L_{10} = L_{01} \frac{L_{00}}{\gamma} \\ L_{01} = \pm \sqrt{\gamma^2 - 1} \\ L_{00}^2 = L_{10}^2 + 1 \end{cases}$$

da cui

$$L_{00}^2 = L_{00}^2 \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) + 1 \implies L_{00} = \pm \gamma$$

e $L_{10} = \pm L_{01} = \pm \sqrt{\gamma^2 - 1}$.

Mettendo tutto insieme (quindi anche $\det L = 1$) troviamo la seguente forma per L ¹:

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & \pm \sqrt{\gamma^2 - 1} & & \\ \pm \sqrt{\gamma^2 - 1} & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Queste sono esattamente le trasformazioni di Lorenz, infatti se $\gamma = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ allora $\sqrt{\gamma^2 - 1} = \frac{u}{c} \gamma$.

9.1.2 Rapidità

Definizione 9.8 (Rapidità).

Definiamo la **rapidità** di un boost a velocità u come

$$\xi = \operatorname{arctanh}(-\beta(u)).$$

Segue che

$$\gamma(u) = \cosh \xi, \quad -\gamma(u)\beta(u) = \sinh \xi, \quad -\beta(u) = \tanh \xi.$$

¹abbiamo supposto $L_{00} > 0$ perché altrimenti futuro e passato si scambierebbero

Osservazione 9.9.

Si ha che

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \xi & \sinh \xi \\ \sinh \xi & \cosh \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix},$$

cioè il boost corrisponde ad una rotazione iperbolica.

Osservazione 9.10.

L'identità trigonometrica iperbolica

$$\cosh^2 \xi - \sinh^2 \xi = 1$$

corrisponde a $\gamma^2(1 - \beta^2) = 1$, che è la definizione di γ .

Osservazione 9.11.

Considerando una composizione di velocità

$$u = \frac{u_1 + u_2}{1 + \frac{u_1 u_2}{c^2}}$$

notiamo che le corrispondenti rapidità si sommano², cioè

$$\xi = \xi_1 + \xi_2.$$

Diagramma di Minkowski

Per semplicità ignoriamo le componenti y e z . Definiamo una base ortonormale dello spazio di Minkowski:

$$\tilde{e}_0 = \begin{pmatrix} \cosh \xi \\ \sinh \xi \end{pmatrix}, \quad \tilde{e}_1 = \pm \begin{pmatrix} \sinh \xi \\ \cosh \xi \end{pmatrix}.$$

Poiché $\cosh^2 \xi - \sinh^2 \xi = 1$, per ogni ξ questi sono vettori di norma di Minkowski 1, inoltre sono evidentemente ortogonali.

Se \tilde{e}'_0 e \tilde{e}'_1 sono definiti come sopra ma a partire da una rapidità ξ' allora

$$\begin{aligned} \tilde{e}_0 \cdot \tilde{e}'_0 &= + \cosh(\xi - \xi') \\ \tilde{e}_1 \cdot \tilde{e}'_0 &= \pm \sinh(\xi - \xi') \\ \tilde{e}_0 \cdot \tilde{e}'_1 &= \mp \sinh(\xi - \xi') \\ \tilde{e}_1 \cdot \tilde{e}'_1 &= - \cosh(\xi - \xi') \end{aligned}$$

Consideriamo ora un cambio di base

$$\tilde{a} = x_0 \tilde{e}_0 + x_1 \tilde{e}_1 = x'_0 \tilde{e}'_0 + x'_1 \tilde{e}'_1$$

Si può verificare che

$$\begin{cases} \tilde{e}_0 = \cosh(\xi - \xi') \tilde{e}'_0 + \sinh(\xi - \xi') \tilde{e}'_1 \\ \tilde{e}_1 = \sinh(\xi - \xi') \tilde{e}'_0 + \cosh(\xi - \xi') \tilde{e}'_1 \end{cases}$$

da cui ricaviamo

$$\begin{cases} x'_0 = x_0 \cosh(\xi - \xi') + x_1 \sinh(\xi - \xi') \\ x'_1 = x_0 \sinh(\xi - \xi') + x_1 \cosh(\xi - \xi') \end{cases}$$

²vedi le formule di prostaferesi per la tangente iperbolica (A.4)

9.2 Quadrivelocità e Quadriaccelerazione

9.2.1 Tempo proprio e quadrivelocità

Poiché il tempo non è invariante per trasformazioni di Lorenz, non avrebbe senso definire una velocità relativistica in termini solo del tempo. La generalizzazione giusta è la seguente

Definizione 9.12 (Tempo proprio).

Definiamo il **tempo proprio** come

$$\tau = \frac{\sqrt{s^2}}{c}.$$

Equivalentemente chiediamo che

$$d\tau^2 = \frac{ds^2}{c^2} = dt^2 - \frac{1}{c^2} (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

Proposizione 9.13 (Derivata del tempo rispetto al tempo proprio).

Si ha che

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma(v),$$

$$\text{dove } v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

Dimostrazione.

Sapendo che $d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2} (dx^2 + dy^2 + dz^2)$, ricaviamo che

$$d\tau^2 = dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{dt^2}{\gamma(v)^2},$$

cioè

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma(v).$$

□

Grazie al tempo proprio possiamo definire l'analogo relativistico della velocità

Definizione 9.14 (Quadrivelocità).

Definiamo la **quadrivelocità** come

$$\tilde{v} = \frac{d\tilde{x}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d\tilde{x}}{dt} = \gamma(v) \left(c \frac{dt}{dt}, \frac{d\tilde{x}}{dt}\right) = (c\gamma(v), \gamma(v)\vec{v}) = \gamma(v)(c, \vec{v}),$$

dove τ è il tempo proprio e \vec{v} è la velocità in senso non relativistico, cioè $\vec{v} = \frac{d\tilde{x}}{dt}$.

La quantità $\frac{d\tilde{x}}{d\tau} = \gamma(v)\vec{v}$ è detta **velocità propria, celerità o velocità relativistica**.

Osservazione 9.15.

La 4-upla (c, \vec{v}) NON è un quadrivettore perché non è invariante cambiando sistema di riferimento, il fattore $\gamma(v)$ è dunque necessario per questo.

Osservazione 9.16.

Il modulo di Minkovski di una quadrivelocità è

$$\tilde{v} \cdot \tilde{v} = c^2 \gamma(v)^2 - \vec{v}^2 \gamma(v)^2 = \gamma(v)^2 (c^2 - \vec{v} \cdot \vec{v}) = c^2 \gamma(v)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = c^2.$$

Segue in particolare che ogni quadrivelocità è di tipo tempo.

Se consideriamo un boost di velocità u parallela all'asse x allora³

$$\begin{cases} \tilde{v}'_0 = \gamma(u)(\tilde{v}_0 - \beta(u)\tilde{v}_1) \\ \tilde{v}'_1 = \gamma(u)(\tilde{v}_1 - \beta(u)\tilde{v}_0) \\ \tilde{v}'_2 = \tilde{v}_2 \\ \tilde{v}'_3 = \tilde{v}_3 \end{cases}$$

Proposizione 9.17 (Identità tra i fattori γ).

Vale la seguente identità

$$\gamma(v') = \gamma(u)\gamma(v) \left(1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{c^2} \right)$$

Dimostrazione.

Osserviamo che

$$c\gamma(v') = \tilde{v}'_0 = \gamma(u)(\tilde{v}_0 - \beta(u)\tilde{v}_1) = \gamma(u)(c\gamma(v) - \beta(u)\gamma(v)v_1),$$

dunque

$$\gamma(v') = \gamma(u)\gamma(v) \left(1 - \frac{v_1 u}{c^2} \right),$$

che è la tesi perché supponiamo che \vec{u} abbia la stessa direzione dell'asse x . \square

9.2.2 Quadriaccelerazione

Definizione 9.18 (Quadriaccelerazione).

Definiamo la **quadriaccelerazione** come

$$\tilde{a} = \frac{d\tilde{v}}{d\tau} = \frac{d\tilde{v}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma(v) \frac{d}{dt}(c\gamma(v), \vec{v}\gamma(v))$$

Lemma 9.19.

Vale la seguente identità

$$\boxed{\frac{d\gamma(v)}{dt} = \gamma(v)^3 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2}}$$

Dimostrazione.

Calcoliamo:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \left(-\frac{1}{c^2} 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = \gamma(v)^3 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2},$$

in definitiva

$$\frac{d\gamma(v)}{dt} = \gamma(v)^3 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2}.$$

\square

Corollario 9.20.

Segue dal lemma che

$$\frac{d}{dt}(\gamma(v)\vec{v}) = \gamma(v)^3 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \vec{v} + \gamma(v)\vec{a}.$$

³ $\gamma(u)$ e $\beta(u)$ non dipendono da τ .

Osservazione 9.21.

Per quanto appena detto

$$\tilde{a} = \left(\gamma(v)^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c}, \gamma(v)^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \vec{v} + \gamma(v)^2 \vec{a} \right) = \gamma(v)^4 \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c}, \vec{a} + \frac{\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{a})}{c^2} \right)$$

Osservazione 9.22.

Se $\vec{a} = 0$ allora $\tilde{a} = 0$.

Osservazione 9.23 (Accelerazione propria).

Se ci troviamo un un sistema di riferimento a riposo ($\vec{v} = 0$) allora $\gamma(v) = 1$ e

$$\tilde{a} = (0, \vec{a}).$$

In analogia a quanto detto possiamo definire $(0, \vec{a})$ come l'**accelerazione propria**.

Osservazione 9.24.

Se l'accelerazione avviene lungo la direzione della velocità allora

$$\tilde{a} = \gamma(v)^4 |\vec{a}| (\beta(v), \hat{v})$$

Osservazione 9.25.

Calcoliamo il seguente scalare, invariante per trasformazioni di Lorenz

$$\tilde{a} \cdot \tilde{v} = \frac{d^2 \tilde{x}}{d\tau^2} \cdot \frac{d\tilde{x}}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\tilde{x}}{d\tau} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (\tilde{v}^2) = \frac{1}{2} \frac{dc}{d\tau} = 0,$$

cioè la quadriaccelerazione e la quadrivelocità sono sempre ortogonali per la metrica di Minkowski.

Osservazione 9.26.

Calcoliamo il modulo della quadrivelocità

$$\tilde{a}^2 = \dots = -\gamma(v)^4 \vec{a} \cdot \vec{a} - \gamma(v)^6 \frac{(\vec{v} \cdot \vec{a})^2}{c^2}$$

in particolare \tilde{a} è un quadrvettore di tipo spazio.

Osservazione 9.27.

Supponiamo che $\vec{v} \perp \vec{a}$, allora

$$\tilde{a}^2 = -\gamma(v)^4 \vec{a} \cdot \vec{a},$$

che possiamo trovare dall'osservazione precedente o sfruttando l'equazione

$$\tilde{a} = \left(\gamma(v)^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c}, \gamma(v)^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \vec{v} + \gamma(v)^2 \vec{a} \right) = (0, \gamma(v)^2 \vec{a})$$

9.3 Quadrigradiente

Ricordiamo che

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} = \gamma \frac{\partial}{\partial t'} - \gamma u \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial x} = -\gamma \frac{u}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} + \gamma \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'} \end{cases}$$

Definizione 9.28 (Quadrigradiente).

Definiamo la **quadridivergenza** come

$$\tilde{\nabla} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Osservazione 9.29.

Consideriamo l'equivalente del laplaciano

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\nabla} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - (-\vec{\nabla})(-\vec{\nabla}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \square$$

questo è l'operatore **d'alembertiano**.

Capitolo 10

Dinamica relativistica

10.1 Leggi di Newton relativistiche

Cerchiamo di capire come leggere le leggi di Newton in chiave relativistica.

La prima legge è il primo postulato della relatività ma con la seconda legge ($F = ma$) cominciamo ad avere qualche problema.

10.1.1 Secondo principio della dinamica

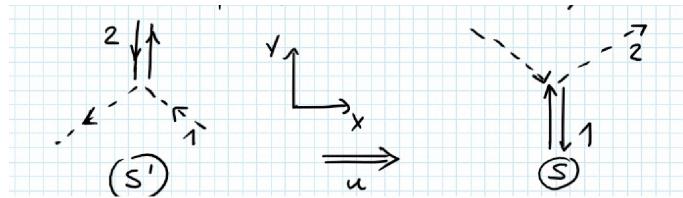
Per capire come procedere consideriamo il seguente esperimento

Esempio 10.1 (Urto elastico di due palline identiche).

Fissiamo un sistema S e consideriamo un sistema S' in moto relativo lungo l'asse x a velocità u . Due osservatori laciano delle palline (1 e 2) lungo la direzione y con la stessa velocità in modo che queste si scontrino.

Formalmente imponiamo

$$\begin{cases} (v_1)_y = v_0 \\ (v_1)_x = 0 \\ (v_2)'_y = -v_0 \\ (v_2)'_x = 0 \end{cases}$$



Considerando le formule di boost troviamo

$$\begin{cases} (v_2)_x = \frac{0+u}{1+0} = u \\ (v_2)_y = \frac{-v_0}{\gamma(u)(1+0)} = -\frac{v_0}{\gamma(u)}. \end{cases}$$

Imponiamo la conservazione degli impulsi (potenzialmente ammettendo che la massa dipenda dalla velocità) lungo l'asse y :

$$2M(v_1)v_0 = 2M(v_2)\frac{v_0}{\gamma(u)},$$

da cui $\gamma(u)M(v_1) = M(v_2)$.

Ricordando¹ che $\gamma(v_2) = \gamma(v_1)\gamma(u)$ osserviamo che

$$\frac{M(v_2)}{\gamma(v_2)} = \frac{M(v_1)}{\gamma(v_1)} = \frac{M(0)}{\gamma(0)} = M(0) = m.$$

Definizione 10.2 (Massa a riposo).

Definiamo la **massa a riposo** m come la massa misurata in un sistema dove il corpo è a riposo.

Definizione 10.3 (Impulso relativistico).

Definiamo l'**impulso relativistico** come

$$\vec{p} = M(v)\vec{v} = m\gamma(v)\vec{v}.$$

Osservazione 10.4.

Con l'aumentare della velocità, la "massa effettiva" cresce molto fino a diventare "infinita" per una velocità che tende verso la velocità della luce.

Definizione 10.5 (Quadriimpulso).

Definiamo il **quadriimpulso** come

$$\tilde{p} = m\tilde{v} = (M(v)c, \vec{p}) = m\gamma(v)(c, \vec{v}).$$

L'impulso relativistico è la componente spaziale del quadriimpulso.

Osservazione 10.6.

Il modulo del quadriimpulso è

$$\tilde{p}^2 = m^2\tilde{v}^2 = m^2c^2.$$

In particolare il quadriimpulso è di tipo tempo (o di tipo luce se $m = 0$).

Abbiamo capito chi è la componente spaziale del quadriimpulso, ma la componente temporale?

$$\tilde{p}_0c = m\gamma(v)c^2 = m\gamma(v)c^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

per $v \rightarrow 0$ possiamo approssimare questa quantità al primo ordine in v^2 come

$$mc^2 + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{energia cinetica}}$$

Definizione 10.7 (Energia).

Definiamo l'**energia** come $E = \tilde{p}_0c$. In particolare se $v = 0$ allora l'energia vale mc^2 , che chiamiamo **energia di riposo**.

Osservazione 10.8.

L'esistenza dell'energia di riposo significa che se esiste un processo che fa diminuire la massa di un oggetto allora per conservazione dell'energia viene liberata dell'energia. Questi processi esistono e vengono impiegati per l'estrazione di energia atomica.

Esistono processi che distruggono interamente la massa, per esempio lo scontro tra una particella e la sua antiparticella.

¹ nota che \vec{u} e \vec{v}_1 sono ortogonali

Osservazione 10.9.

Una volta definita l'energia possiamo riscrivere il quadriimpulso come

$$\tilde{p} = m\tilde{v} = (E/c, \vec{p}).$$

Osservazione 10.10.

Se cambiamo sistema di riferimento, l'energia cambia come segue:

$$E' = m\gamma(v')c^2 = m\gamma(v)\gamma(u)(c^2 - uv) = \gamma(u)(E - up_x).$$

Osserviamo che questo è compatibile col fatto che \tilde{p} è un quadrivettore, cioè rispetta le trasformazioni di Lorenz:

$$\begin{aligned} p'_x &= \frac{E'v'}{c^2} = \frac{(m\gamma(v)\gamma(u)(c^2 - uv)) \left(\frac{v-u}{c^2 - uv} c^2 \right)}{c^2} = \\ &= m\gamma(v)\gamma(u)(v-u) = \\ &= \gamma(u) \left(p_x - u \frac{E}{c^2} \right). \end{aligned}$$

Osservazione 10.11.

Calcoliamo il modulo del quadriimpulso

$$m^2c^2 = \tilde{p}^2 = \left(\frac{E}{c} \right)^2 - (\vec{p})^2,$$

cioè

$$E^2 = (\vec{p})^2c^2 + m^2c^4$$

Osservazione 10.12.

Poiché $v = \frac{|\vec{p}|c^2}{E}$ si ha che $\beta(v) = \frac{|\vec{p}|c}{E}$ e quindi

$$\gamma = \frac{E}{mc^2}$$

ovvero $E = \gamma(v)mc^2$.

Definizione 10.13 (Energia cinetica).

Definiamo l'**energia cinetica relativistica** come

$$T = E - mc^2 = mc^2(\gamma(v) - 1).$$

Osservazione 10.14.

Se v è piccolo $\gamma v \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$, da cui $T \approx mc^2 \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{2} mv^2$.

Consideriamo ora questa domanda: è possibile che la luce sia composta da particelle?

In questo caso $\gamma(v) = \gamma(c) = \infty$, quindi affinché l'energia di questa ipotetica particella abbia senso, $m = 0$. In questo caso avremmo

$$E = |\vec{p}|c.$$

Queste particelle sono dette **foton**i.

10.1.2 Terzo principio della dinamica

Consideriamo adesso la questione delle forze uguali e contrarie. Se queste forze opposte vengono applicate allo stesso punto e allo stesso istante non abbiamo problemi.

Se le forze uguali e contrarie agiscono su punti diversi, la relatività della simultaneità comincia a creare problemi su *quando* le due forze sono uguali e contrarie.

La soluzione è osservare che quello che vogliamo è che la variazione totale dell'impulso sia nulla. La forza deriva da variazioni di impulsi

$$\vec{F}_A = \frac{d\vec{p}_A}{dt}, \quad \vec{F}_B = \frac{d\vec{p}_B}{dt}, \quad \frac{d}{dt}(\vec{p}_A + \vec{p}_B) = 0.$$

Un altro modo di interpretare la questione della simultaneità è pensare a campi di forze piuttosto che forze generate direttamente da oggetti.

Definizione 10.15 (Quadriforza).

Definiamo la **quadriforza** come

$$\tilde{F} = \frac{d\tilde{p}}{d\tau} = m \frac{d\tilde{v}}{d\tau} = m\tilde{a}.$$

Una forma equivalente è

$$\tilde{F} = \frac{d\tilde{p}}{d\tau} = \gamma(v) \left(\frac{1}{c} \frac{dE}{dt}, \vec{F} \right),$$

dove $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$.

Osservazione 10.16.

Poiché $\tilde{v} \cdot \tilde{a} = 0$ si ha che $\tilde{v} \cdot \tilde{F} = 0$. Scrivendo esplicitamente la seconda equazione

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{dE}{dt} = mc^2 \frac{d\gamma}{dt} = m\gamma^3 \vec{v} \cdot \vec{a}.$$

Osservazione 10.17.

Troviamo le seguenti identità

$$\tilde{F} = \gamma(v) \left(\frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c}, \vec{F} \right)$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}\gamma) = m\gamma\vec{a} + \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c^2}\vec{v},$$

in particolare \vec{F} non è allineata con \vec{a} in generale.

Osservazione 10.18.

Osserviamo che

$$\tilde{F} \cdot \tilde{v} = \frac{d}{d\tau}(m\tilde{v}) \cdot \tilde{v} = \frac{dm}{d\tau}\tilde{v}^2 + m \underbrace{\tilde{a} \cdot \tilde{v}}_{=0} = c^2 \frac{dm}{d\tau}.$$

10.2 Effetto Doppler

Supponiamo che un sistema S' emetta delle onde con frequenza ν' e lunghezza d'onda λ' costanti (quindi i fronti d'onda hanno velocità $v' = \lambda'\nu'$ rispetto a S').

10.2.1 Versione classica

Se S' si muove con velocità u osserviamo che

$$\lambda = v\Delta t' - u\Delta t' = (v-u)\Delta t' = \frac{v-u}{v'},$$

da cui

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{1}{1-u/v}\nu',$$

quindi la frequenza dell'onda misurata da S è cambiata di un fattore che dipende dalla velocità relativa tra i sistemi.

Supponendo ora che sia S ad emettere l'onda notiamo con calcoli analoghi che

$$\nu' = \left(1 - \frac{u}{v}\right)\nu,$$

che come notazione è la stessa di prima ma la frequenza ricevuta e quella emessa hanno scambiato i ruoli.

10.2.2 Versione relativistica

Consideriamo il caso di una sorgente in movimento S' che emette l'onda (a velocità v in S') e che si muove verso S .

Fissiamo degli eventi:

1. Emissione di un fronte d'onda: In S' questo evento ha coordinate $(t'_e, 0)$.
2. Ricezione del fronte d'onda: In S' questo evento ha coordinate (t'_r, x'_r) dove $t'_r = t'_e + \delta t'$ e $x'_r = v\delta t'$. Osserviamo però che x'_r è anche l'origine di S vista in S' . Se x'_0 è la coordinata dell'origine di S al tempo $t' = 0$ si ha che $x'_r = x'_0 - ut'_r$.

Mettendo tutto insieme

$$\delta t' = \frac{x'_0 - ut'_e}{u+v}.$$

Consideriamo adesso due emissioni (1 e 2), una a $t'_e = 0$ e $t'_e = T$. Chiaramente $\Delta t'_e = T$, mentre

$$\begin{aligned} \Delta t'_r &= (T + \delta t'(T)) - (0 + \delta t'(0)) = \\ &= T + \frac{x'_0 - uT}{u+v} - \frac{x'_0}{u+v} = \\ &= T \left(1 - \frac{u}{u+v}\right) = \\ &= T \frac{v}{u+v}. \end{aligned}$$

Applichiamo adesso una trasformazione di Lorenz per passare al sistema S :

$$\Delta t'_r = \gamma(\Delta t_r - u\underbrace{\Delta x_r}_{=0}) = \gamma\Delta t_r,$$

quindi

$$\Delta t_r = \frac{T}{\gamma} \frac{v}{u+v}.$$

Consideriamo ora il caso di onde luminose ($v = c$)

$$\frac{1}{\Delta t_r} = \nu = \nu' \gamma \frac{u + c}{c} = \sqrt{\frac{1 + \beta(u)}{1 - \beta(u)}} \nu'.$$

Per il principio di relatività, se S' si stesse allontanando e S fosse la sorgente troviamo

$$\nu' = \sqrt{\frac{1 - \beta(u)}{1 + \beta(u)}} \nu.$$

Possiamo riassumere entrambe le formule in

$$\boxed{\nu_{\text{ricevuta}} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \nu_{\text{emessa}}}$$

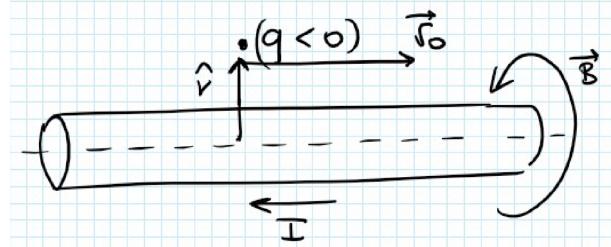
10.3 Elettro-Magnetismo

Ricordiamo la **Forza di Lorentz**

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Esempio 10.19 (Campo elettrico e campo magnetico sono la stessa cosa?).

Consideriamo un filo entro il quale scorre una corrente I . Vicino al filo abbiamo una carica $q < 0$ che si muove a velocità v_0 parallela al filo e in direzione opposta a I



Il campo magnetico vale

$$\vec{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2\vec{I} \times \hat{r}}{r},$$

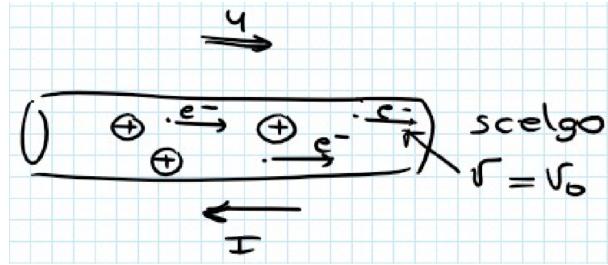
da cui, se il filo è complessivamente neutro,

$$|\vec{F}| = |q\vec{v}_0 \times \vec{B}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2qIv_0}{r}.$$

Mettiamoci ora in un sistema dove q ha velocità nulla. Abbiamo una forza di Lorentz?

Si verifica sperimentalmente che q è invariante per trasformazioni di Lorentz. Quindi se $\vec{v}' = 0$ l'unica speranza è \vec{E} .

Poiché le distanze cambiano sotto una trasformazione di Lorentz, è ragionevole pensare che la densità di carica cambi:



Se L è la lunghezza di un pezzo del filo e A è l'area di una sezione del filo,

$$\rho = \frac{q_{\text{filo}}}{LA} \rightsquigarrow \rho' = \frac{q_{\text{filo}}}{L'A} = \gamma\rho.$$

Nel sistema S' la densità delle cariche positive è $\rho'_+ = \rho_+\gamma$. Considerando ora le cariche negative (che si spostano per trasportare la corrente a velocità v in verso opposto a I), per semplicità scegliamo I tale che $v = v_0$ è la velocità della particella, vediamo che con questa scelta in S' queste cariche sono ferme, quindi $\rho_- = \gamma\rho'_-$. Poiché avevamo supposto che il filo fosse neutro in S si ha che $\rho_+ = -\rho_-$, quindi

$$\rho'_+ = \rho_+\gamma = -\rho_-\gamma = -\gamma^2\rho'_-,$$

in particolare $\rho'_+ \neq \rho'_-$ quindi il filo non è più neutro! Più precisamente

$$\rho' = \rho'_+ + \rho'_- = \rho_+ \left(\gamma - \frac{1}{\gamma} \right) > 0$$

Il campo elettrico generato ha modulo

$$E' = \frac{\rho' A}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho_+ A \frac{v^2}{c^2}}{2\pi\varepsilon_0 r \sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

dunque c'è una forza di Lorentz pari a

$$F' = q \frac{\rho_+ A \frac{v^2}{c^2}}{2\pi\varepsilon_0 r \sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Confrontiamo questa forza con quella trovata prima:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{2qIv_0}{r} I = \rho_- A v \quad q \frac{-\rho_- A v \frac{v_0}{c^2}}{2\pi\varepsilon_0 r} v = v_0 \quad q \frac{\rho_+ A \frac{v^2}{c^2}}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

che è esattamente F'/γ come speravamo.

Definizione 10.20 (Quadrivettore densità di corrente).

Definiamo la **densità di carica propria** come la densità di carica misurata in un sistema dove l'oggetto è fermo.

Se ρ_0 è la densità di carica propria allora in un sistema dove l'oggetto si muove a velocità v la densità di carica è

$$\rho = \rho_0\gamma(v).$$

Definiamo la **densità di corrente relativistica** come

$$\vec{J} = \rho \vec{v} = \rho_0\gamma(v)\vec{v}.$$

Definiamo la **quadricorrente** come

$$\tilde{J} = (\rho c, \vec{J}) = \rho_0\gamma(v)(c, \vec{v}) = \rho_0\tilde{v}.$$

Osservazione 10.21 (Teorema di Gauss relativistico).

Calcoliamo

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{J} = \frac{1}{c} \frac{\partial(\rho c)}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

dove l'ultima uguaglianza è la legge di continuità². Quindi possiamo effettivamente riscrivere la conservazione della carica come

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{J} = 0$$

e questa formulazione è evidentemente compatibile con la relatività.

Ricordiamo che ϕ e \vec{A} sono definiti in modo tale che

$$\begin{cases} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{cases}$$

Definizione 10.22 (Quadripotenziale).

Definiamo il **quadripotenziale** come

$$\tilde{A} = (\phi/c, \vec{A}).$$

Osservazione 10.23.

Le equazioni di Maxwell si possono riscrivere come

$$\begin{cases} \square \phi = \rho/\varepsilon_0 \\ \square \vec{A} = \mu_0 \vec{J} \end{cases}$$

quindi una forma compatta per le equazioni di Maxwell è

$$\square \tilde{A} = \mu_0 \tilde{J},$$

che mostra immediatamente che sono compatibili con la relatività.

Dimostrazione.

Le equazioni di Maxwell sono

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \end{cases}$$

Sostituendo le espressioni per \vec{E} e \vec{B} in termini di ϕ e \vec{A} troviamo

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \left(\vec{J} - \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \phi \right) = \mu_0 \vec{J} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla}(\phi/c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\nabla^2 \phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}, \\ -\nabla^2 \vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla}(\phi/c) \end{cases}$$

² cioè la conservazione della carica.

$$\begin{cases} \square\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} + \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{\nabla} \cdot \tilde{A}), \\ \square\tilde{A} + \tilde{\nabla}(\tilde{\nabla} \cdot \tilde{A}) = \mu_0 \tilde{J} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\nabla}(\phi/c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \square\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} + \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{\nabla} \cdot \tilde{A}), \\ \square\tilde{A} = \mu_0 \tilde{J} - \tilde{\nabla}(\tilde{\nabla} \cdot \tilde{A}) \end{cases}$$

Uniamo ora le due equazioni dividendo la prima per c e poi sommando

$$\square\tilde{A} = \mu_0 \tilde{J} + \tilde{\nabla}(\tilde{\nabla} \cdot \tilde{A}),$$

per concludere possiamo scegliere il Gauge $\tilde{\nabla} \cdot \tilde{A} = 0$. \square

Se definiamo $A^0 = \phi/c$, notiamo che

$$\frac{\partial A^0}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial ct} = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} \right),$$

che sembra la componente z di \vec{E} divisa per c , ma non tornano i segni. Osserviamo però che

$$\frac{E_z}{c} = -\frac{\partial \phi/c}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} = \left(-\frac{\partial}{\partial z} \right) A^0 - \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) A_z.$$

Ispirandoci a questo tipo di equazioni definiamo

Definizione 10.24 (Tensore elettromagnetico).

Definiamo il **tensore elettromagnetico** come

$$F_{\mu\nu} = \tilde{\nabla}_\mu \tilde{A}_\nu - \tilde{\nabla}_\nu \tilde{A}_\mu,$$

o in forma matriciale

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Cerchiamo di capire come si trasforma: Se \vec{u} è parallelo all'asse x ,

$$\begin{cases} E'_x = E_x \\ E'_y = \gamma(E_y - uB_z) \\ E'_z = \gamma(E_z - uB_y) \\ \\ B'_x = B_x \\ B'_y = \gamma(B_y - u/c^2 E_z) \\ B'_z = \gamma(B_z + u/c^2 E_y) \end{cases}$$

Le equazioni di Maxwell diventano

$$\sum_\mu \tilde{\nabla}_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 \tilde{J}^\nu.$$

Parte III

Accenni di meccanica quantistica

Capitolo 11

Problemi di inizio 900

11.1 Richiami su energia trasportata da onde

Definizione 11.1 (Intensità).

L'intensità di un'onda è data da

$$I = \frac{dE}{dA_{\perp} dt} \quad [I] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

La radianza è l'intensità per angolo solido

$$I_{\Omega} = \frac{dE}{dA_{\perp} dt d\Omega} = \frac{dI}{d\Omega}.$$

Definizione 11.2 (Emittanza e Irradianza).

L'emittanza come la potenza emessa da una superficie per unità di superficie. Si indica con M .

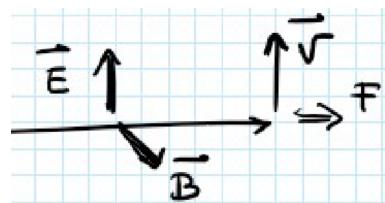
L'irradianza è la potenza ricevuta su una superficie per unità di superficie. Anche questa si indica con I .

11.2 Pressione di radiazione

Consideriamo un'onda elettromagnetica che incide su una superficie conduttrice in modo ortogonale. Sia σ la densità di carica superficiale. Se la superficie ha area A allora possiamo scrivere la forza di Lorentz come

$$\frac{\vec{F}}{A} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

L'onda induce un movimento delle cariche interno alla superficie e $\vec{v} \times \vec{B}$ ha verso sempre diretto verso la superficie



Calcoliamo l'intensità assorbita¹ e la pressione esercitata sulla superficie

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{\text{assorbita}} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{A} = \sigma \vec{E} \cdot \vec{v} + \underline{\sigma \vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{B})}^0 = \sigma \vec{E} \cdot \vec{v} \\ p \stackrel{\vec{E} \text{ parallelo}}{=} \sigma |\vec{v} \times \vec{B}| = \sigma v B = \sigma v \frac{E}{c} = \frac{I_{\text{assorbita}}}{c} \end{array} \right.$$

Se la superficie assorbe tutta l'energia che riceve

$$\Delta E = I_{\text{assorbita}} \Delta t A$$

$$|\vec{p}| = \frac{1}{c} I_{\text{assorbita}} \Delta t A$$

Se la superficie riflette tutta l'energia che riceve

$$\Delta E = 0$$

$$|\vec{p}| = 2 \frac{1}{c} I_{\text{assorbita}} \Delta t A$$

11.2.1 Gas di onde elettromagnetiche

Consideriamo una semisfera dentro la quale ci sono onde elettromagnetiche distribuite in modo omogeneo e isotropo. Sia w la densità di energia nella semisfera (ben definita per omogeneità).

Consideriamo poi una superficie A come in figura perfettamente assorbente e cerchiamo di capire quanta energia e quantità di moto riceve per unità di tempo.



Consideriamo un ragionamento analogo a quello fatto per il modello dei gas perfetti: fissata una direzione consideriamo il cilindro di particelle che si scontrano contro la nostra area in una unità di tempo dt

Il volume del cilindretto è $Ac dt \cos \theta$, dunque l'energia che colpisce A è

$$w A c dt \cos \theta.$$

Segue che tutta l'energia che raggiunge A in un intervallo di tempo dt è l'integrale sull'angolo solido diviso per due² della quantità trovata, cioè

$$dE = \frac{1}{2} \int_{\Omega} w A c dt \cos \theta \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{1}{2} \frac{w A c dt}{4\pi} \int_{\Omega} \cos \theta 2\pi \underbrace{\sin \theta d\theta}_{=d(\cos \theta)} = \frac{wcAdt}{4},$$

¹potenza per area

²stiamo considerando solo metà sfera



dunque $I_{\text{assorbita}} = \frac{wc}{4}$.

Consideriamo ora l'impulso assorbito

$$d|\vec{p}_\perp| \stackrel{\text{m_luce}=0}{=} \frac{dE}{c} \cos \theta = \frac{1}{2} \int_\Omega \frac{w}{c} Acdt (\cos \theta)^2 \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{wAdt}{6},$$

dunque la pressione è

$$p = \frac{w}{6}.$$

Se la superficie è riflettente allora $I_{\text{assorbita}} = 0$ per definizione, quindi

$$d|\vec{p}_\perp| = 2 \frac{wAdt}{6} \implies p = \frac{w}{3}.$$

11.3 Radiazione di Corpo nero

11.3.1 Definizione e corpo nero scatola

Definizione 11.3 (Assorbanza).

Un corpo irraggiato assorbe una frazione $a(\nu)$ della radiazione a frequenza ν che riceve. Questa quantità è detta **assorbanza** (relativa alla frequenza ν).

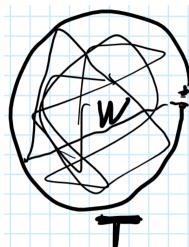
Definizione 11.4 (Corpo bianco e corpo nero).

Se $a(\nu) = 0$ per ogni ν allora il corpo è detto **bianco o perfettamente riflettente**. Se $a(\nu) = 1$ per ogni ν allora il corpo è detto **nero o perfettamente assorbente**.

Osservazione 11.5.

Poiché ogni oggetto contiene qualche particella carica, ogni corpo irraggia delle onde elettromagnetiche.

Una possibile realizzazione di un corpo nero è una scatola con pareti opache e un forellino minuscolo come in figura

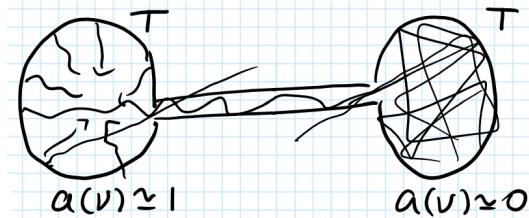


Proposizione 11.6.

La densità di energia di un corpo nero dipende solo da T . Inoltre la densità di energia per ogni frequenza dipende solo da T .

Dimostrazione.

Supponiamo di avere due corpi neri scatola, una con pareti interne perfettamente riflettenti e piene di energia e l'altra con pareti interne perfettamente assorbenti e poca energia.



Mettendo a contatto i forellini come in figura notiamo che le onde passerebbero dalla scatola riflettente a quella assorbente. Questo significa che anche se le sorgenti hanno la stessa temperatura, una tenderebbe a scaldarsi, negando il secondo principio.

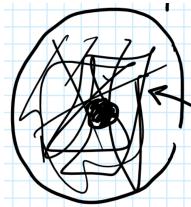
Se ora immaginiamo di mettere nel corridoio tra le scatole una parete che fa passare solo luce di una certa frequenza negheremmo di nuovo i principi della termodinamica se le densità di energia fossero diverse per frequenze diverse. \square

11.3.2 Legge di Kirchhoff

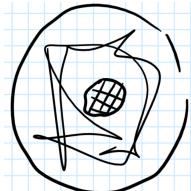
In questa sezione I è la potenza dell'onda, non l'irradianza. L'irradianza è $a(\nu)I_\nu$ per una ogni frequenza.

Immaginiamo ora di inserire un secondo corpo nero dentro la scatola. Per mantenere la sola dipendenza da T si ha che per il corpo nero interno $I = M$, cioè assorbe tanta energia quanta ne emette.

Definiamo questa quantità **radiazione di corpo nero**.



Consideriamo ora lo stesso scenario ma con un corpo non nero. Con un argomento analogo $aI = M$ in generale e per ogni frequenza $a(\nu)I_\nu = M_\nu$.



Osservazione 11.7 (Legge di Kirchhoff).

Il rapporto tra quanta radiazione un corpo emette rispetto ad un corpo nero alla stessa temperatura è esattamente la frazione di energia che assorbe

$$\frac{M}{M_{\text{corpo nero}}} = a.$$

Questa è la **legge di Kirchhoff**.

Il ragionamento fatto funziona anche per frequenze fissate, quindi

$$\frac{M_\nu}{a(\nu)} = (M_\nu)_{\text{corpo nero}}.$$

Questo dimostra che la radiazione di corpo nero $(M_\nu)_{\text{corpo nero}}$ è una legge universale.

11.3.3 Legge di Stefan-Boltzmann

In questa sezione I_ν indica l'irradianza, quindi ciò che avevamo denotato con $a(\nu)I_\nu$ nella sezione precedente.

Osserviamo che

$$M = \int_0^\infty I_\nu d\nu = \frac{E_{\text{totale emessa}}}{\Delta t A}.$$

Sperimentalmente Stefan scopre che

$$M \propto T^4.$$

Boltzmann deduce questo risultato per via teorica:

Teorema 11.8 (Legge di Stefan-Boltzmann).

Vale la **legge di Stefan-Boltzmann**

$$M = \sigma T^4.$$

Dimostrazione.

Modelliamo il corpo nero come una scatola con pareti interne perfettamente riflettenti. Per definizione $w = \frac{U}{V}$, inoltre questo rapporto dipende solo da T .

Abbiamo calcolato prima che per pareti perfettamente riflettenti $p = \frac{w}{3}$, che dipende solo da T . Ricordando che per sistemi idrostatici $dU = TdS - pdV$, si ha che

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{p}{T}dV = \frac{V}{T}dw + \left(\frac{w}{T} + \frac{p}{T}\right)dV.$$

Poiché w dipende solo da T , se T è costante allora w è costante, quindi dalla relazione sopra segue che

$$s \doteq \frac{\partial S}{\partial V} \Big|_T = \frac{\partial S}{\partial V} \Big|_w = \left(\frac{w}{T} + \frac{p}{T}\right) = \frac{4}{3} \frac{w}{T},$$

dunque $S = sV$ e s dipende solo da T .

Sviluppando di nuovo il primo principio si ha

$$wdV + Vdw = dU = TdS - pdV = TdS - \frac{w}{3}dV = T(sdv + Vds) - \frac{w}{3}dV.$$

Dividendo per V troviamo

$$dw = Tds + \left(Ts - \frac{4}{3}w\right) \frac{dV}{V}.$$

Portando Tds al primo membro osserviamo che, poiché w e s dipendono solo da T (e in particolare non da V) entrambi i membri sono nulli,

$$dw = Tds \quad \text{e} \quad Ts = \frac{4}{3}w.$$

Questo mostra che

$$\frac{dw}{ds} = T = \frac{4}{3} \frac{w}{s} \quad \xrightarrow{\text{risolvi eq. diff.}} \quad w \propto s^{4/3} \propto (w/T)^{4/3},$$

quindi $w \propto T^4$. Segue che $M = I = \frac{wc}{4} \propto T^4$. Sia σ la costante di proporzionalità. \square

Fatto 11.9.

*La costante che appare nella legge di Stefan-Boltzmann, detta **costante di Stefan-Boltzmann** ha il valore*

$$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}.$$

11.4 Problema del corpo nero

11.4.1 Legge di Wien

Cerchiamo di capire come la densità di energia dipende dalla frequenza.

Proposizione 11.10 (Legge dello spostamento di Wien).

Vale la legge dello spostamento di Wien, ovvero

$$\nu \propto T.$$

Dimostrazione.

Consideriamo una espansione adiabatica reversibile di una sfera di raggio r con pareti interne riflettenti.

In quanto adiabatica reversibile

$$0 = \delta Q = dU + pdV = d(wV) + \frac{w}{3}dV = Vdw + \frac{4}{3}wdV,$$

quindi

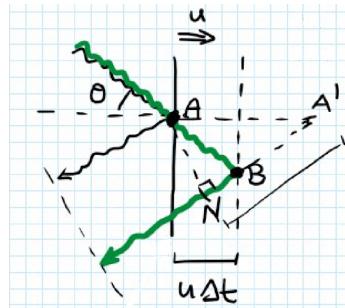
$$\frac{dw}{w} = -\frac{4}{3} \frac{dV}{V},$$

cioè $w \propto V^{-4/3}$. Per la legge di Stefan-Boltzmann $w \propto T^4$, dunque

$$TV^{1/3} = \text{cost.}$$

Poiché il volume V è direttamente proporzionale a r^3 , abbiamo ricavato $T \propto 1/r$.

Consideriamo momentaneamente uno specchio piano in movimento a velocità u e raggio di luce che lo colpisce ad un angolo θ



Il tratto che il secondo raggio compie in più è

$$AB + BN = A'B + BN = A'N = AA' \cos \theta = 2u\Delta t \cos \theta.$$

Scegliamo ora $\Delta t = T = \lambda/c$ periodo dell'onda elettromagnetica. Per definizione la distanza $AB + BN$ in questo caso è la variazione di lunghezza d'onda

$$\Delta\lambda = 2\frac{u\lambda}{c} \cos \theta.$$

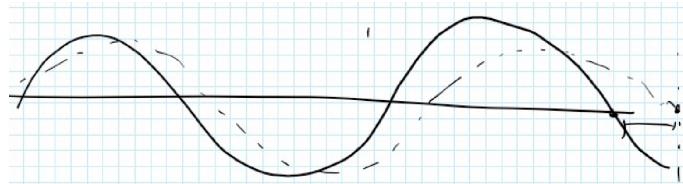
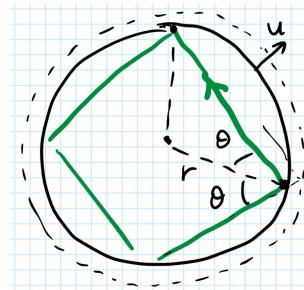


Figura 11.1: La lunghezza d'onda cambia in modo tale che \vec{E} sia nullo al bordo, come accade per ogni conduttore.

Tornando alla sfera, poiché stiamo considerando trasformazioni adiabatiche, $u/c \ll 1$ e quindi possiamo ipotizzare che nella differenza di tempo appena considerata θ resti costante e che vicino all'urto valga l'approssimazione piana vista sopra.



Tra una riflessione e l'altra passa un tempo

$$\frac{2r \cos \theta}{c},$$

quindi in un tempo Δt avvengono

$$\frac{c\Delta t}{2r \cos \theta}$$

riflessioni.

Questo mostra che la variazione di lunghezza d'onda dentro la sfera è $2\lambda \frac{u}{c} \cos \theta$ ad ogni riflessione, cioè

$$\Delta\lambda = 2\lambda \frac{u}{c} \cos \theta \frac{c\Delta t}{2r \cos \theta} = \frac{\lambda u \Delta t}{r},$$

dunque $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{u\Delta t}{t} = \frac{\Delta r}{r}$, cioè $\lambda \propto r$.

Concludiamo con la seguente catena di proporzionalità

$$\nu \propto \frac{1}{\lambda} \propto \frac{1}{r} \propto T.$$

□

Osservazione 11.11.

In particolare anche la frequenza a cui abbiamo emissione massima si sposta come $\nu \propto T$. Sperimentalmente

$$\lambda_{max} = \frac{2.9\text{mm}}{T},$$

dove la temperatura è considerata in gradi Kelvin.

Osservazione 11.12.

Per il sole $\lambda_{max}(\text{Sole}) \sim 502\text{nm}$, cioè $T \sim 5800\text{K}$. Potrebbe sembrare una temperatura bassa ma la radiazione di corpo nero viene dalla superficie del sole, quindi la parte più fredda.

Proposizione 11.13 (Vincolo di Wien).

*La dipendenza tra densità di energia e frequenza ha la seguente forma, detta **vincolo di Wien***

$$\frac{dw}{d\nu} = \nu^3 g(\nu/T).$$

Dimostrazione.

Consideriamo una certa energia infinitesima a temperatura T_1

$$\frac{dw}{d\lambda}(\lambda_1) d\lambda_1.$$

Se ora ci spostiamo alla temperatura T_2 , questa energia si sposta ad un'altra frequenza λ_2 . Osserviamo però che, sapendo come si comporta tutto l'integrale ($M \propto T^4$) si ha

$$\frac{\frac{dw}{d\lambda}(\lambda_1) d\lambda_1}{\frac{dw}{d\lambda}(\lambda_2) d\lambda_2} = \frac{T_1^4}{T_2^4}.$$

Poiché λT è costante, $\lambda_1 T_1 = \lambda_2 T_2$, cioè $\frac{d\lambda_1}{d\lambda_2} = \frac{T_2}{T_1}$. Sostituendo³

$$\frac{1}{T_1^5} \frac{dw}{d\lambda}(\lambda_1) = \frac{1}{T_2^5} \frac{dw}{d\lambda}(\lambda_2),$$

da cui per lo stesso motivo

$$\lambda^5 \frac{dw}{d\lambda} = \text{cost.} = f(\lambda T)$$

per una qualche funzione f . Cambiando variabile

$$\frac{dw}{d\nu} d\nu = \nu^3 d\nu g(\nu/T) \iff \frac{dw}{d\nu} = \nu^3 g(\nu/T).$$

□

³Slogan: l'integrale va come T^4 ma l'integrando va come T^5 .

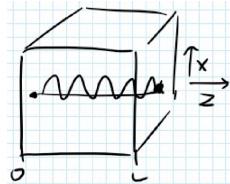
Guardando i dati sperimentali sembrerebbe $g(x) \sim e^{-Bx}$, quindi Wien congettura una legge della forma

$$\frac{dw}{d\nu} = A\nu^3 e^{-B\nu/T}$$

detta **legge di Wien**.

11.4.2 Formula di Rayleigh-Jeans

Scegliamo una scatola cubica con onde di luce dentro e con pareti interne perfettamente riflettenti. Sia L la lunghezza dello spigolo.



Ricordiamo che

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

e che E_x vale 0 per $x = 0$ e $x = L$ (condizioni analoghe valgono per le altre direzioni).

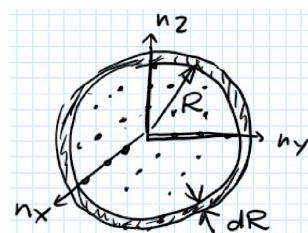
Dunque

$$|\vec{E}| = E_0 \sin\left(n_x \frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(n_y \frac{\pi y}{L}\right) \sin\left(n_z \frac{\pi z}{L}\right)$$

con n_x, n_y e n_z numeri naturali. Osserviamo che per soddisfare l'equazione dell'onda

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \frac{4L^2}{\lambda^4}.$$

Cerchiamo di calcolare il numero possibile di terne. Questo numero intuitivamente corrisponde al numero possibile di onde luminose nella scatola e quindi alla densità di energia.



Consideriamo una sfera di raggio $2L/\lambda$ e cerchiamo i punti del lattice $\mathbb{Z}^3 \subseteq \mathbb{R}^3$ vicini alla sfera. Ci aspettiamo un numero di soluzioni N che si comporta come

$$dN = 2\frac{1}{8}4\pi \left(\frac{2L}{\lambda}\right)^2 d\left(\frac{2L}{\lambda}\right) = \frac{8\pi L^3}{\lambda^4} d\lambda,$$

dove il fattore $1/8$ deriva dal fatto che non vogliamo contare come distinte soluzioni che differiscono solo per dei segni e il fattore 2 serve per tenere conto delle polarizzazioni (in una stessa direzione abbiamo due polarizzazioni indipendenti).

Ricordando che $V = L^3$ si ha

$$\frac{1}{V} \frac{dN}{d\lambda} = \frac{8\pi}{\lambda^4}.$$

Cambiando variabile e sfruttando la definizione di w troviamo

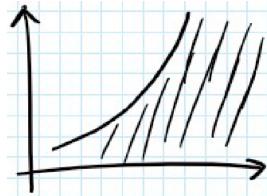
$$\boxed{\frac{dw}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} E_{\text{una soluzione}}}$$

Lavorando in approssimazione classica $E_{\text{una soluzione}} = k_b T$, cioè

$$\frac{dw}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_b T.$$

Questa è la **formula di Rayleigh-Jeans**

Osserviamo però che questa formula non può funzionare perché per temperature fissate troviamo qualcosa che va come ν^2 , che quindi ha integrale infinito in ν , assurdo.



Questo risultato continua a presentarsi facendo conti classici. Questo è detto il **problema del corpo nero**.

Osservazione 11.14.

La formula di Rayleigh è una buona approssimazione per frequenze basse.

11.5 La soluzione di Planck

Proviamo a rifare questo conto e cerchiamo cosa può essere andato storto rispetto ai dati sperimentali.

La termodinamica è intoccabile, quindi

$$\frac{dw}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} E_{\text{una soluzione}}$$

continua a valere.

- Per alte frequenze sappiamo che

$$\frac{dw}{d\nu} \sim A\nu^3 e^{-B\nu/T},$$

quindi l'energia di una soluzione in questo regime deve avere la forma

$$E = A\nu \frac{c^3}{8\pi} e^{-B\nu/T} \implies \frac{-B\nu}{T} = \log \left(\frac{8\pi E}{A\nu c^3} \right).$$

Per la termodinamica

$$\left. \frac{\partial S}{\partial U} \right|_V = \frac{1}{T},$$

quindi

$$\frac{dS}{dE} \Big|_V = -\frac{1}{B\nu} \log \left(\frac{8\pi E}{A\nu c^3} \right) \implies \frac{d^2S}{dE^2} \Big|_V \propto -\frac{1}{E}.$$

- Per basse frequenze invece notiamo sperimentalmente che la formula di Rayleigh sembra funzionare, cioè $E \sim k_b T$, cioè per basse frequenze

$$\frac{dS}{dE} = \frac{1}{T} \propto \frac{1}{E} \implies \frac{d^2S}{dE^2} \Big|_V \propto -\frac{1}{E^2}.$$

Poniamo allora

$$\frac{d^2S}{dE^2} = \frac{-a}{E(b+E)}.$$

Se $E \ll b$ allora questa espressione va come $-1/E$, mentre per alte frequenze va come $-1/E^2$. Integrando segue che

$$E = \frac{b}{e^{b/(aT)} - 1},$$

quindi Planck suppone

$$\frac{dw}{d\nu} = \left(\frac{8\pi\nu^2}{c^3} \right) \frac{b}{e^{b/(aT)} - 1}.$$

La formula rispetta il vincolo di Wien se $b \propto \nu$.

Classicamente⁴

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^\infty E e^{-E/kT} dE}{\int_0^\infty e^{-E/kT} dE} = k_b T,$$

ma noi non vogliamo $k_b T$, vogliamo ritrovare la formula che abbiamo ipotizzato. Supponiamo allora

$$E_{\text{una soluzione}} = n\varepsilon$$

dove n è un numero naturale.

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{n \in \mathbb{N}} n\varepsilon e^{-n\varepsilon/(k_b T)}}{\sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-n\varepsilon/(k_b T)}} = \frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon/(k_b T)} - 1}$$

quindi se $\varepsilon \propto \nu$ ritroviamo una funzione della forma voluta

Definizione 11.15 (Costante di Planck).

La **costante di Planck** h è la costante di proporzionalità

$$\varepsilon = h\nu, \quad h = 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ Js.}$$

Sostituendo troviamo la **distribuzione di Planck**.

$$\frac{dw}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^3 h}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_b T}} - 1}$$

⁴la densità di probabilità è quella ricavata in 7.19

11.6 Altri fenomeni

11.6.1 Effetto photoelettrico

Consideriamo un pezzo di metallo. Se esso viene colpito da delle onde elettromagnetiche, vengono strappati degli elettroni.

Se la luce diventa più intensa vengono strappati più elettroni ma non aumenta mai la loro energia. Invece se viene aumentata la frequenza gli elettroni aumentano di energia.

La spiegazione (Einstein) è che la luce viene in pacchetti di energia, detti fotoni. Ogni singolo fotone può liberare un elettrone, ma l'energia che l'elettrone acquista dipende solo dall'energia del singolo fotone che l'ha colpito.

11.6.2 Effetto Compton

La luce riflessa cambia di frequenza a seconda dell'angolo

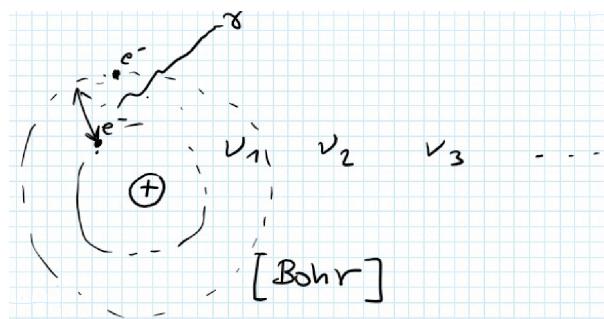
$$\nu' = \frac{\nu}{1 + \frac{h\nu}{mc^2}(1 - \cos \theta)}$$

Se uno fa il conto (Compton), la formula è esattamente quella che si ricava considerando un urto dato da una particella di massa nulla secondo la relatività.

11.6.3 Spettri atomici

Diversi atomi emmettono alcune frequenze di radiazione e non altri.

Dopo molto tempo Bohr ipotizza che per certi atomi, gli elettroni possono girare attorno al nucleo solo ad alcune frequenze. La differenza tra l'energia alle varie frequenze corrisponde all'energia della luce emessa, che quindi noi misuriamo nelle strisce degli spettri atomici.



Capitolo 12

Onde ed Equazione di Schrödinger

Definizione 12.1.

Definiamo **acca tagliato** come

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}.$$

Per semplicità faremo quantistica in una sola dimensione.

12.1 Richiami di onde

Definizione 12.2 (Onda).

Un'onda è una funzione di posizione e tempo della forma

$$f(x, y) = f(kx - \omega t).$$

La **lunghezza d'onda** è $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ e la sua **frequenza** è $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$.
La velocità di un'onda o **velocità di fase** è $\frac{\omega}{k} = \nu\lambda$.

Se l'onda si comporta anche come una particella, la velocità di questa particella è la velocità di fase?

- Caso non relativistico:

$$\begin{cases} p = mv \\ E = \frac{1}{2}mv^2 \end{cases} \implies v_{\text{particella}} = \frac{2E}{p} = \frac{2h\nu}{h/\lambda} = 2\nu\lambda \neq \nu\lambda.$$

- Caso relativistico:

$$\begin{cases} p = mv\gamma \\ E = mc^2\gamma \end{cases} \implies v_{\text{particella}} = \frac{pc^2}{E} = \frac{hc^2}{h\lambda\nu} = \frac{c^2}{\lambda\nu}$$

e questa quantità vale $\lambda\nu$ solo se $\lambda\nu = c$, ma non tutte le particelle che vogliamo trattare vanno alla velocità della luce.

La giusta definizione di $v_{\text{particella}}$ è

Definizione 12.3 (Velocità di gruppo).

La **velocità di gruppo** di un'onda è

$$v_{\text{particella}} = \frac{d\omega}{dk}.$$

Se l'onda in esame è una semplice sinusoide allora le due velocità coincidono, ma se consideriamo somme di diverse sinusoidi¹ allora le due quantità sono distinte e $v_{\text{particella}}$ è la misura di velocità giusta per l'insieme delle onde.

Osservazione 12.4.

Dato che $E = h\nu$ e $\lambda = h/p \iff p = \frac{h}{2\pi}k$ si ha che $E = \hbar\omega$ e $\vec{p} = \hbar\vec{k}$. In effetti

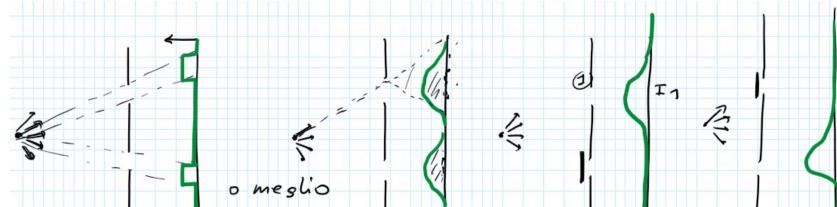
$$(2\pi\nu/c, \vec{k})$$

è un quadrivettore.

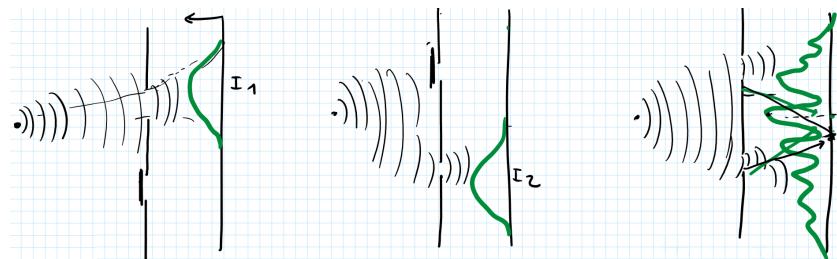
12.2 Esperimento della doppia fenditura

Consideriamo due pareti parallele, di cui la più vicina con due fessure. Due versioni standard di questo esperimento sono

- Se lanciamo delle palline al primo muro, quelle che passano vengono rilevate dal secondo muro e viene tenuto conto di dove le palline colpiscono la parete.

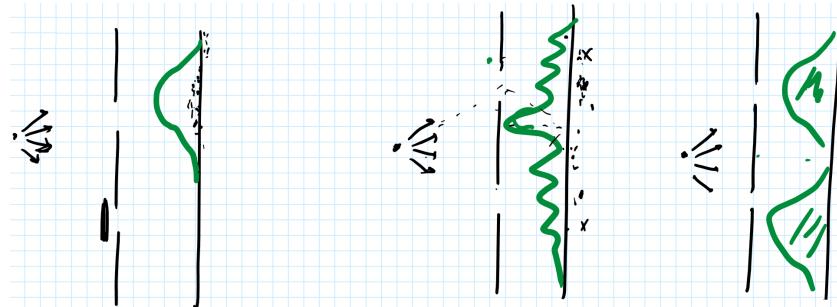


- Consideriamo ora una sorgente puntiforme prima del primo muro. Se chiudiamo una fenditura non succede niente di inaspettato, ma aprendole entrambe troviamo un pattern di interferenza.



¹per esempio in una serie di Fourier

Come si comporta un elettrone se facciamo questo esperimento? Se lanciamo tanti elettroni uno alla volta troviamo lo stesso pattern di interferenza delle onde.

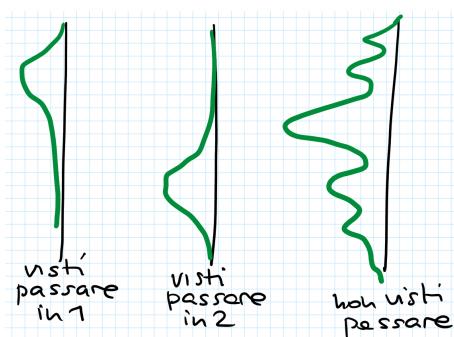


Supponiamo ora di inserire dei rilevatori sulle fenditure che ci informano su quale fessura riceve qualche elettrone. Scopriamo che se mandiamo un elettrone alla volta i rilevatori non si attivano mai contemporaneamente e il pattern in arrivo cambia e torna simile al caso delle palline.

Possiamo ipotizzare che il rilevatore sia troppo pesante, fino al punto da modificare l'elettrone a sufficienza da cambiare l'esito.

Proviamo a usare una luce molto fioca. Quando rileviamo un elettrone ci segniamo da quale fenditura è passato o se non lo abbiamo rilevato (magari la luce è così fioca che a volte non rileva l'elettrone).

Il risultato è che se l'elettrone è stato rilevato si comporta come una pallina, altrimenti segue il pattern di interferenza.



Anche diminuendo la frequenza riscontriamo lo stesso fenomeno finché la lunghezza d'onda non supera la distanza tra le fessure, da quel punto l'elettrone segue sempre il pattern di interferenza.

In qualche modo c'è una "interazione minima" che l'elettrone può subire. Se avviene una interazione che ci permette di rilevare quale fessura è stata attraversata allora l'energia necessaria è stata tale da modificare l'elettrone, se invece usiamo frequenze abbastanza basse, in modo da scendere sotto la soglia di energia di interazione minima, allora l'elettrone può restare inalterato e comportarsi come un'onda, ma non riusciamo a capire attraverso quale fessura è passato.

12.2.1 Interpretazione

Fatto 12.5 (Interpretazione di Copenhagen).

Prima di una misura, la posizione di una particella non è ben definita.

Teorema 12.6 (Bell).

Esistono degli esperimenti che ci permetterebbero di verificare se la quantistica è completa o se potrebbero esistere “variabili nascoste”.

Fatto 12.7.

Facendo gli esperimenti descritti da Bell la meccanica quantistica è verificata.

Ma quindi la materia in generale di comporta come un’onda? Si ma a livelli macroscopici non si nota.

Osservazione 12.8.

Per un fotone abbiamo

$$h \frac{c}{\lambda} = h\nu = E \stackrel{\text{luce}}{=} pc \implies \lambda = \frac{h}{p}.$$

De Broglie usa la stessa formula per la lunghezza d’onda caratteristica di un oggetto:

$$\lambda = \frac{h}{p},$$

dove p è la quantità di moto.

Per un oggetto macroscopico λ è molto piccolo, in particolare molto più piccolo delle dimensioni dell’oggetto, rendendo effetti quantistici impercettibili.

Per esempio, effetti di diffrazione si verificano quando la fenditura ha una larghezza simile alla lunghezza d’onda.

12.3 Equazione di Schrödinger

Teorema 12.9 (Equazione di Schrödinger).

Per onde vale l’equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi$$

dove V è un termine di energia potenziale.

Derivazione intuitiva.

Trascuriamo momentaneamente la relatività.

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x) = \frac{p^2}{2m} + V(x).$$

Poiché $E = \hbar\omega$ e $p = \hbar k$ si ha che

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2}{2m}k^2 + V.$$

Sia $\psi(x, t)$ l’equazione dell’onda. In particolare consideriamo

$$\psi(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)}.$$

Notiamo che

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\omega\psi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = ik\psi, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k^2\psi,$$

dunque mettendo tutto insieme

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi.$$

□

“Ma i numeri complessi che ci fanno in fisica?”

L’interpretazione fisica di ψ è che $|\psi(x, t)|^2 \geq 0$ rappresenta la *densità di probabilità di trovare la particella nel punto x al tempo t* .

Abbiamo quindi rinunciato a trovare una posizione esatta. Sappiamo solo delle probabilità.

Osservazione 12.10.

$|\psi(x, t)|^2$ è la *densità di probabilità* di trovare la particella in x al tempo t , cioè $|\psi(x, y)|^2 dx$ è la probabilità di trovare la particella tra x e $x + dx$.

Affinché questo modulo rappresenti una densità di probabilità vogliamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = 1.$$

Poiché abbiamo integrato solo lungo x , a priori questo integrale dipende da t , ma²

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, t)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} |\psi(x, t)|^2 dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi + \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) dx = \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \psi \right) dx = \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \psi \right) dx = \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \left[\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \psi \right]_{-\infty}^{\infty} = 0. \end{aligned}$$

Stiamo assumendo che $|\psi(x, t)|^2$ sia dominata da una funzione integrabile, ma se vogliamo sperare in soluzioni fisicamente rilevanti questo è certamente ragionevole.

12.4 Equazione a variabili separabili

In questa sezione supponiamo $\psi(x, t) = g(t)f(x)$. Sostituendo nell’equazione di Schrödinger troviamo

$$i\hbar g' f = -\frac{\hbar^2}{2m} g f'' + V(x)g f,$$

²per questo conto supponiamo $V(x) = 0$. Abbiamo anche usato il fatto che ψ^* rispetta l’equazione coniugata $-i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} + V(x)\psi^*$

da cui

$$i\hbar \frac{g'}{g} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{f''}{f} + V(x).$$

Ricordando da dove è venuta fuori l'equazione di Schrödinger, questa ultima equazione corrisponde all'energia dell'onda E , dunque

$$\begin{cases} i\hbar \frac{dg}{dt} = Eg \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2f}{dx^2} + V(x)f = Ef \end{cases}$$

La prima equazione ha soluzioni del tipo $g(t) = Ce^{-Et/\hbar} = Ce^{-i\omega t}$.

Definizione 12.11 (Equazione di Schrödinger indipendente dal tempo).

L'**equazione di Schrödinger indipendente dal tempo** è

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2f}{dx^2} + V(x)f = Ef.$$

Osservazione 12.12.

L'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo è una equazione differenziale che non coinvolge numeri complessi, quindi le sue soluzioni sono reali a meno di un termine di fase.

Definizione 12.13 (Soluzioni stazionarie).

Una soluzione dell'equazione di Schrödinger è **stazionaria** se $|\psi(x, t)|^2$ non dipende dal tempo.

Osservazione 12.14.

Nell'ipotesi di variabili separabili, le soluzioni sono stazionarie, infatti

$$\psi(x, t) = Ce^{-i\omega t}f(x) \implies |\psi(x, t)|^2 = |C|^2 f^2(x).$$

Osservazione 12.15.

Se f_1, f_2 ecc sono soluzioni per l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo con energie E_1, E_2 ecc, allora funzioni della seguente forme sono soluzioni dell'equazione di Schrödinger

$$\psi(x, t) = a_1 e^{-iE_1 t/\hbar} f_1(x) + a_2 e^{-iE_2 t/\hbar} f_2(x) + \dots$$

In particolare per risultati di analisi possiamo scrivere ogni soluzione come combinazione lineare di soluzioni stazionarie.

Osservazione 12.16.

Se f è una soluzione dell'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo tale che $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$, allora

- f è non degenere (le altre soluzioni solo solo versioni riscalate)
- f è reale a meno di un termine di fase.

Dimostrazione.

Supponiamo che ci siano due soluzioni f e \tilde{f} , allora

$$\frac{\tilde{f}''}{\tilde{f}} = \frac{f''}{f} = -\frac{2m}{\hbar^2}(E - V),$$

quindi

$$0 = \tilde{f}''f - f''\tilde{f} = \frac{d}{dx}(\tilde{f}'f - f'\tilde{f}),$$

cioè $\tilde{f}'f - f'\tilde{f}$ è costante, ma dato che $f \rightarrow 0$ per $|x| \rightarrow \infty$ si ha che l'unica costante possibile è 0. Quindi

$$\tilde{f}'f = f'\tilde{f} \implies \log \tilde{f} = \log f + \text{cost.} \implies \tilde{f} = cf.$$

Inoltre, poiché l'equazione ha coefficienti reali, se f è soluzione anche f^* lo è, dunque $f^* = cf$.

$$f = c^*f^* \implies cf = f^* = \frac{f}{c^*} \implies |c|^2 = 1,$$

cioè $c = e^{i\theta}$ per qualche fase θ . Se $f = r(x)e^{i\alpha(x)}$ allora $f^* = r(x)e^{-i\alpha(x)}$, quindi questo risultato mostra $\alpha(x) + \theta = -\alpha(x)$,cioè $\alpha(x) = -\theta/2$ è costante in x ,cioè f è una funzione reale a meno di una fase. \square

12.4.1 Esempi di soluzioni al variare del potenziale

Potenziale costante

Consideriamo un potenziale del tipo

$$V(x) = V_0$$

e studiamo solo onde standard $\psi = Ae^{-i(\omega t-kx)} = e^{-i\omega t}f(x)$. Dall'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo troviamo

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V_0 \implies k = \pm \sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}.$$

Consideriamo il problema al variare del segno di $E - V_0$:

$E > V_0$ In questo caso

$$\psi(x, t) = Ae^{-i(\omega t-kx)} + Be^{-i(\omega t+kx)}$$

ma queste soluzioni non sono normalizzabili, per esempio se $B = 0$ allora $|\psi|^2 = A^2$ e quindi l'integrale diverge se $A \neq 0$.

$E < V_0$ (In questo caso non ci aspettiamo soluzioni.)

In questo caso i valori di k sono immaginari puri quindi poniamo $k = i\alpha$.

$$\psi(x, t) = e^{-i\omega t} (Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}).$$

Affinché ci sia convergenza sia a $+\infty$ che a $-\infty$, necessariamente $A = 0$ e $B = 0$ rispettivamente, cioè l'unica soluzione è quella banale.

$E = V_0$ In questo caso l'equazione di Schrödinger ridotta è

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2f}{dx^2} = 0 \implies f = A + Bx.$$

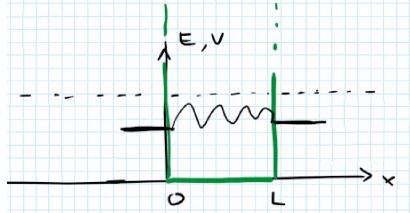
Affinché valga la normalizzazione $B = 0$, ma allora $|\psi|^2 = A^2$ e quindi di nuovo l'unica soluzione è quella banale.

Quindi un potenziale costante ovunque non ci permette di avere soluzioni.

Potenziale buca infinita

Consideriamo un potenziale del tipo

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq L \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Se siamo nella regione $x < 0$ o $x > L$ allora ogni valore di energia è sicuramente minore di ∞ , quindi non abbiamo soluzione. Se siamo nella regione $0 \leq x \leq L$ allora per E positive abbiamo soluzioni della forma

$$\psi(x, t) = \tilde{A} e^{-i(\omega t - kx)} + \tilde{B} e^{-i(\omega t + kx)}$$

come prima, o passando alla parte indipendente dal tempo

$$f(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx).$$

Per avere compatibilità tra le due regioni $\psi(0) = \psi(L) = 0$, cioè

$$A e^{-i\omega t} = \psi(0) = 0 \implies A = 0$$

e similmente

$$B \sin(kL) = 0 \implies k \in \frac{\pi}{L} \mathbb{Z}.$$

Quindi le soluzioni sono della forma

$$\psi_n(x, t) = B \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-i\omega t} = e^{-i\omega t} f_n(x)$$

al variare di $n \in \mathbb{Z}$. Possiamo ricavare B imponendo la normalizzazione

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^L |\psi(x, t)|^2 dx = B^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \\ &= B^2 \frac{L}{n\pi} \int_0^{n\pi} \sin^2(u) du = \\ &= B^2 \frac{L}{n\pi} \frac{n\pi}{2} = B^2 \frac{L}{2}, \end{aligned}$$

da cui $B = \sqrt{2/L}$.

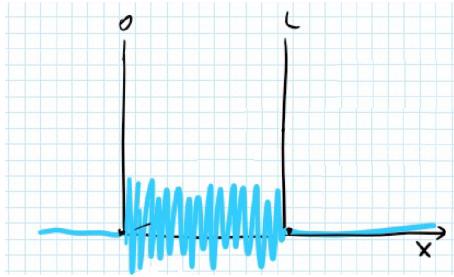
Osservazione 12.17 (Energie possibili).

Non tutti i valori di energia sono possibili, le uniche possibilità sono

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2m L^2}.$$

Questo è molto strano, perché nel caso classico ci aspetteremmo una distribuzione uniforme.

Se però consideriamo il limite $n \rightarrow \infty$ allora ritroviamo il caso classico. Poiché a n grande corrisponde E grande ha senso ritrovare il caso classico in questa circostanza.



Fatto 12.18 (Principio di corrispondenza).

Nel limite $n \rightarrow \infty$ ritroviamo le soluzioni classiche.

Fatto 12.19.

Ogni soluzione all'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo nella regione $0 < x < L$ si può scrivere come combinazione lineare (potenzialmente infinita) delle f_n

$$f(x) = \sum c_n f_n(x),$$

dove $c_n = \int_0^L f_n^*(x)f(x)dx$ e $\int_0^L f_n(x)f_m(x)dx = \delta_{nm}$.

Segue che le soluzioni all'equazione di Schrödinger in questa regione sono

$$\psi = \sum_n c_n e^{-iE_n t/\hbar} f_n$$

Esempio 12.20.

Consideriamo $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ dove la prima soluzione ha energia E_1 e la seconda E_2 . Allora

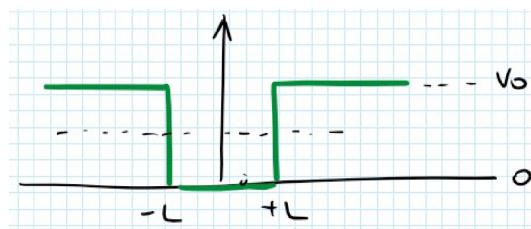
$$|\psi|^2 = |c_1|^2 f_1^2 + |c_2|^2 f_2^2 + 2c_1^* c_2 f_1 f_2 e^{-i(E_2 - E_1)t/\hbar}$$

dove il termine $2c_1^* c_2 f_1 f_2 e^{-i(E_2 - E_1)t/\hbar}$ NON è indipendente dal tempo, dunque questa ψ NON è una soluzione stazionaria, nonostante sia la somma di due stazionarie.

Potenziale buca finita

Consideriamo un potenziale del tipo

$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| \leq L \\ V_0 & |x| > L \end{cases}$$



Consideriamo tre casi

$E > V_0$ In questo caso k è reale ovunque, quindi eventuali soluzioni non sarebbero normalizzabili.

$E < 0$ Non esistono soluzioni non nulle.

$0 < E < V_0$ In questo caso le soluzioni assumono la forma

$$f(x) = \begin{cases} A_1 e^{\alpha x} + B_1 e^{-\alpha x} & x < -L \\ A_2 \sin(kx) + B_2 \cos(kx) & |x| \leq L \\ A_3 e^{\alpha x} + B_3 e^{-\alpha x} & x > L \end{cases}$$

dove $\alpha = \sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$ e $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$. Affinché una f così definita sia valida devono valere le seguenti condizioni:

- Normalizzazione, cioè $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = 1$,
- $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 0$,
- continuità in $\pm L$,
- continuità³ di f' in $\pm L$.

Queste sono $1 + 2 + 2 + 2 = 7$ condizioni su 7 parametri (anche E è un parametro per f perché appare nella definizione di α e k). La seconda condizione corrisponde semplicemente a $B_1 = A_3 = 0$. Le condizioni di continuità restituiscono la seguente equazione matriciale

$$\begin{pmatrix} e^{-\alpha L} & \sin(kL) & -\cos(kL) & 0 \\ 0 & -\sin(kL) & -\cos(kL) & e^{-\alpha L} \\ \alpha e^{-\alpha L} & k \cos(kL) & -k \sin(kL) & 0 \\ 0 & -k \cos(kL) & -k \sin(kL) & \alpha e^{-\alpha L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

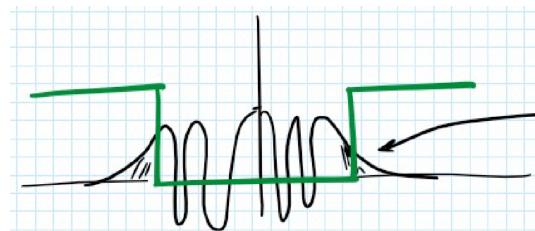
o equivalentemente, facendo diverse operazioni di riga che preservano il nucleo e riordinando le variabili,

$$\begin{pmatrix} e^{-\alpha L} & 0 & \sin(kL) & -\cos(kL) \\ 0 & e^{-\alpha L} & -\sin(kL) & -\cos(kL) \\ 0 & 0 & k \cos(kL) - \alpha \sin(kL) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k \sin(kL) + \alpha \cos(kL) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_3 \\ A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se $-k \sin(kL) + \alpha \cos(kL) \neq 0$ allora vediamo che questa matrice ha 4 pivot, quindi l'unico elemento del nucleo è il vettore nullo, che restituisce una soluzione banale, quindi abbiamo soluzioni non banali solo se i valori di E per i quali $\alpha = k \tan(kL)$, che sono finiti. In questo caso A_2 e B_2 risultano liberi e determinano A_1 e B_3 . Imporre la normalizzazione restituisce una condizione su A_2 e B_2 , che comunque ci lascia un grado di libertà.

³non avevamo chiesto la continuità della derivata nel caso di buca infinita perché quel problema non è realistico.

Una soluzione generica ha questa forma



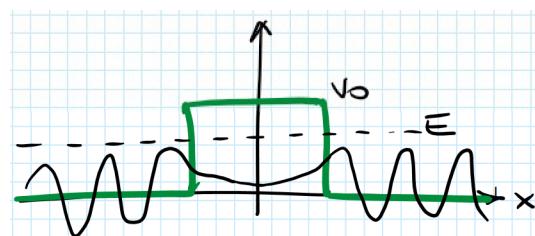
La densità di probabilità dentro i muri e vicino ai bordi non è nulla, quindi è possibile che la particella venga misurata DENTRO IL MURO.

Potenziale barriera finita

Consideriamo un potenziale del tipo

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & |x| \leq L \\ 0 & |x| > L \end{cases}$$

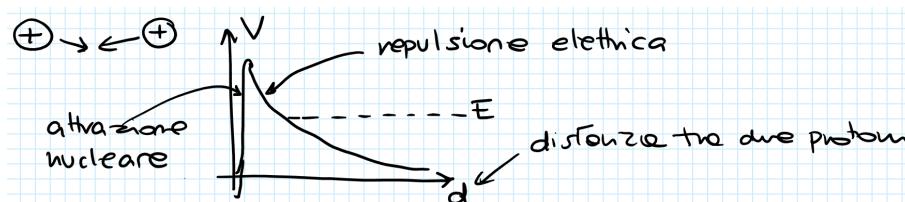
Risolvendo troviamo anche soluzioni come



in particolare se piazziamo una particella da un lato del muro e aspettiamo, la funzione d'onda evolve in modo tale che la probabilità di trovarla dall'altra parte del muro diventa non nulla. Questo è detto **effetto tunnel**.

Esempio 12.21 (Fusione nucleare).

In una stessa due nuclei, entrambi con carica positiva dunque, possono collidere e fondersi. Questo fenomeno classicamente non è concepibile dato che la forza elettrica diventerebbe abbastanza forte da non farli collidere



Considerando però l'effetto tunnel, è possibile che i protoni semplicemente superino la barriera del potenziale in quanto c'è una probabilità non nulla che lo facciano. In questo senso l'effetto tunnel spiega perché avviene la fusione nucleare, apparentemente impossibile data la differenza tra l'energia media delle particelle coinvolte e il potenziale che dovrebbero superare per realizzare la fusione.

Capitolo 13

Meccanica Quantistica

13.1 Operatori autoaggiunti

Definizione 13.1 (Stato).

Uno **stato** è una funzione d'onda che per ogni t è un vettore unitario nello spazio di Hilbert dato da funzioni L^2 con prodotto interno

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int \phi^*(x) \psi(x) dx.$$

Osservazione 13.2.

Il prodotto è hermitiano, cioè $\langle \phi, \psi \rangle = \langle \psi, \phi \rangle^*$.

Osservazione 13.3.

La condizione che uno stato abbia norma unitaria corrisponde al fatto che $|\psi|^2$ è una densità di probabilità, infatti

$$\langle \psi, \psi \rangle = \int |\psi|^2 dx.$$

Definizione 13.4 (Operatore autoaggiunto).

Un **operatore** è una funzione lineare nello spazio di Hilbert descritto sopra.

Se A è un operatore, il suo **aggiunto** è l'operatore A^\dagger definito da

$$\langle \phi, A\psi \rangle = \langle A^\dagger \phi, \psi \rangle.$$

Un operatore è **autoaggiunto** (o **hermitiano**) se $A = A^\dagger$.

In questo formalismo, gli operatori autoaggiunti corrispondono a **grandezze fisiche** e i loro autovalori ai possibili esiti di una misura della data grandezza.

Un'autofunzione corrisponde dunque ad uno stato per cui la misura della grandezza per cui è un autostato ha come esito certo l'autovalore relativo.

Proposizione 13.5 (Autovalori per autoaggiunti sono reali).

Se λ è un autovalore per A autoaggiunto allora $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione.

Sia $\phi_A^{(\lambda)}$ un'autofunzione per A relativa a λ . Osserviamo che

$$\begin{aligned} \lambda \langle \phi_A^{(\lambda)}, \phi_A^{(\lambda)} \rangle &= \langle \phi_A^{(\lambda)}, A\phi_A^{(\lambda)} \rangle = \langle A^\dagger \phi_A^{(\lambda)}, \phi_A^{(\lambda)} \rangle \stackrel{A=A^\dagger}{=} \\ &= \langle A\phi_A^{(\lambda)}, \phi_A^{(\lambda)} \rangle = \langle \phi_A^{(\lambda)}, A\phi_A^{(\lambda)} \rangle^* = \\ &= \lambda^* \langle \phi_A^{(\lambda)}, \phi_A^{(\lambda)} \rangle, \end{aligned}$$

cioè $\lambda = \lambda^*$ e quindi $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Proposizione 13.6.

Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ autovalori per A autoaggiunto allora $\langle \phi_A^{(\lambda_1)}, \phi_A^{(\lambda_2)} \rangle = 0$.

Dimostrazione.

Segue dalla seguente catena di uguaglianze

$$\begin{aligned} \lambda_1 \langle \phi_A^{(\lambda_2)}, \phi_A^{(\lambda_1)} \rangle &= \phi_A^{(\lambda_2)}, A\phi_A^{(\lambda_1)} = \langle A\phi_A^{(\lambda_2)}, \phi_A^{(\lambda_1)} \rangle = \\ &= \langle \phi_A^{(\lambda_1)}, A\phi_A^{(\lambda_2)} \rangle^* = \lambda_2^* \langle \phi_A^{(\lambda_1)}, \phi_A^{(\lambda_2)} \rangle^* \stackrel{\lambda_2 \text{ reale}}{=} \\ &= \lambda_2 \langle \phi_A^{(\lambda_2)}, \phi_A^{(\lambda_1)} \rangle. \end{aligned}$$

□

Se A autoaggiunto ammette una base di autofunzioni normalizzate $\phi_A^{(\lambda)}$ allora

$$\psi(x) = \int c(\lambda) \phi_A^{(\lambda)}(x) d\lambda, \quad \text{dove } c(\lambda) = \langle \phi_A^{(\lambda)}, \psi \rangle.$$

Definizione 13.7 (Media di un operatore).

Fissato uno stato ψ , definiamo il **valore medio** dell'operatore autoaggiunto A come

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \langle \psi, A\psi \rangle = \int \psi^* A\psi dx = \\ &= \iiint \lambda c(\mu)^* c(\lambda) (\phi_A^{(\mu)})^* \phi_A^{(\lambda)} d\mu d\lambda dx = \\ &= \iint \lambda c(\mu)^* c(\lambda) \langle \phi_A^{(\mu)}, \phi_A^{(\lambda)} \rangle d\mu d\lambda = \\ &= \int \lambda |c(\lambda)|^2 d\lambda. \end{aligned}$$

In particolare $|c(\lambda)|^2 = |\langle \phi_A^{(\lambda)}, \psi \rangle|^2$ è la **densità di probabilità di misurare λ** .

Definizione 13.8 (Varianza di un operatore).

Fissato uno stato ψ , definiamo la **varianza** dell'operatore autoaggiunto A come

$$\sigma_A^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle.$$

Ma quando effettivamente misuro cosa succede alla funzione d'onda?

Avviene il **collasso della funzione d'onda**, cioè dopo la misura, se abbiamo misurato il valore λ allora la funzione d'onda DIVENTA¹ $\phi_A^{(\lambda)}$.

13.2 Operatori principali

13.2.1 Operatore Hamiltoniano

Definizione 13.9 (Operatore Hamiltoniano).

Definiamo l'**operatore Hamiltoniano** come

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x).$$

¹ci sono alcuni problemi quando abbiamo un autospazio di dimensione maggiore ad 1 ma per il momento ignoriamo questi problemi.

Osservazione 13.10.

L'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo si scrive $H\psi = E\psi$.

Osservazione 13.11.

L'equazione di Schrödinger si scrive

$$i\hbar \frac{d\psi}{dt} = H\psi.$$

Per quanto detto nel capitolo precedente, le autofunzioni di H sono gli stati stazionari

$$\psi(x, t) = e^{-iEt/\hbar} f(x)$$

Sia $\psi^{(E)}$ un tale stato, allora

$$\langle \psi^{(E)}, H\psi^{(E)} \rangle = \langle \psi^{(E)}, E\psi^{(E)} \rangle = E \langle \psi^{(E)}, \psi^{(E)} \rangle = E.$$

Similmente

$$\langle \psi^{(E)}, H^2\psi^{(E)} \rangle = E^2,$$

quindi la varianza per l'autofunzione è

$$\sigma_H^2 = \langle (H - \langle H \rangle)^2 \rangle = \langle H^2 \rangle - 2\langle H \rangle^2 + \langle H \rangle^2 = E^2 - 2E^2 + E^2 = 0.$$

Osservazione 13.12 (Conservazione dell'energia).

Consideriamo $\psi = \sum_n c_n \psi_n$ con $\psi_n = \psi^{(E_n)} = f_n(x) e^{-iE_n t/\hbar}$. Osserviamo che

$$\langle H \rangle = \sum_m E_m e^{i(E_m - E_m)t/\hbar} |c_m|^2 = \sum_m E_m |c_m|^2,$$

in particolare questa media non dipende dal tempo. Questa è la versione quantistica della **conservazione dell'energia**.

13.2.2 Operatore Posizione

Definizione 13.13 (Operatore Posizione).

Definiamo l'**operatore posizione** X come

$$X\psi(x, t) = x\psi(x, t).$$

Osservazione 13.14.

La posizione media è data da

$$\langle X \rangle = \langle \psi, X\psi \rangle = \int x |\psi(x, t)|^2 dx.$$

Chi sono le autofunzioni?

$$X\phi_X^{(\lambda)}(x) = \begin{cases} \lambda\phi_X^{(\lambda)}(x) & \text{perché autofunzione} \\ x\phi_X^{(\lambda)}(x) & \text{per definizione} \end{cases}$$

Quindi serve una funzione che in un qualche modo è nulla ovunque eccetto in λ ma tale che integrando il modulo viene 1. Queste condizioni NON sono verificate da una funzione ma spesso in fisica torna comodo considerare un oggetto con proprietà simili

Definizione 13.15 (Delta di Dirac).

La **delta di Dirac** è la misura definita da

$$\begin{aligned} \delta(x - \lambda)dx : \quad & \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ E \quad & \longmapsto \chi_E(\lambda) , \end{aligned}$$

dove χ_E è la funzione caratteristica di E .

Osservazione 13.16.

È possibile verificare che

$$\int f(x)\delta(x - \lambda)dx = f(\lambda).$$

Intuitivamente può essere utile immaginarsi la delta di Dirac come una funzione

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}$$

13.2.3 Operatore Quantità di moto

Avendo una posizione media proviamo a trovare una velocità²:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle X \rangle &= \frac{d}{dt} \langle \psi, X\psi \rangle = \int x \frac{d}{dt} (\psi^* \psi) dx = \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \int x \left(-\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \psi^* \right) dx = \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \int x \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x} \psi^* \right) dx = \\ &= 0 - \frac{i\hbar}{2m} \int -\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x} \psi^* dx = \\ &= -\frac{i\hbar}{m} \int \frac{\partial \psi}{\partial x} \psi^* dx. \end{aligned}$$

Definizione 13.17 (Operatore quantità di moto).

Definiamo l'**operatore quantità di moto** come

$$P_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}.$$

Osservazione 13.18.

Se il potenziale è nullo allora

$$\langle P_x \rangle = -i\hbar \int \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = m \frac{d}{dt} \langle X \rangle .$$

Osservazione 13.19.

P_x è effettivamente un operatore autoaggiunto.

²assumiamo potenziale nullo

Dimostrazione.

Segue calcolando:

$$\begin{aligned}
 \left\langle \psi, -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\rangle &= \int -i\hbar \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = \int -i\hbar \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = \\
 &= \cancel{-i\hbar \psi^* \psi} \Big|_{-\infty}^0 - \int -i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \psi dx = \\
 &= - \int - \left(-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^* \psi dx = \\
 &= \left\langle -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x}, \psi \right\rangle.
 \end{aligned}$$

□

Osservazione 13.20.

Le autofunzioni dell'operatore impulso sono

$$\phi_{P_x}^{(k)} = A e^{ikx},$$

dove l'autovalore è $\hbar k$. Queste funzioni non sono normalizzabili ma si possono comunque usare come una base.

Se $\psi = \int c(k) e^{ikx} dx$ allora

$$P_x \psi = \int c(k) \hbar k e^{ikx} dx,$$

da cui

$$\begin{aligned}
 \langle P_x \rangle &= \int \left(\int c(k')^* e^{ik'x} dk' \right)^* \left(\int \hbar k c(k)^* e^{ikx} dk \right) dx = \\
 &= \iint \int c(k')^* c(k) \hbar k e^{i(k-k')x} dx dk' dk \stackrel{\text{intuitivamente}}{=} \\
 &= \iint c(k')^* c(k) \hbar k \delta(k' - k) dk' dk = \\
 &= \int \hbar k |c(k)|^2 dk.
 \end{aligned}$$

13.3 Operatori incompatibili e Principio di indeterminazione

Osservazione 13.21.

Osserviamo che X e P_x non commutano, infatti

$$P_x X \psi = P_x x \psi = -i\hbar \psi - i\hbar x \frac{\partial \psi}{\partial x} = -i\hbar \psi + x P_x \psi = -i\hbar \psi + X P_x \psi$$

In particolare il commutatore vale

$$[X, P_x] = X P_x - P_x X = i\hbar.$$

Definizione 13.22 (Operatori incompatibili).

Due operatori autoaggiunti sono **incompatibili** se non ammettono autofunzioni comuni.

Proposizione 13.23.

Se A e B sono operatori autoaggiunti allora

$$[A, B] \neq 0 \implies A, B \text{ incompatibili.}$$

Dimostrazione.

Se per assurdo ϕ è un'autofunzione che hanno in comune ($A\phi = \alpha\phi$ e $B\phi = \beta\phi$) allora

$$0 \neq [A, B]\phi = AB\phi - BA\phi = \beta A\phi - \alpha B\phi = (\alpha\beta - \alpha\beta)\phi = 0.$$

□

Osservazione 13.24.

Poiché $[X, P_x] = i\hbar \neq 0$, posizione e quantità di moto sono incompatibili.

Proposizione 13.25.

Sia A un operatore, allora $\frac{d}{dt} \langle A \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle \psi, [A, H]\psi \rangle$.

Dimostrazione.

È il seguente conto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \psi, A\psi \rangle &= \left\langle \frac{d\psi}{dt}, A\psi \right\rangle + \left\langle \psi, A \frac{d\psi}{dt} \right\rangle \stackrel{(12.9)}{=} \\ &= -\frac{1}{i\hbar} \langle H\psi, A\psi \rangle + \frac{1}{i\hbar} \langle \psi, AH\psi \rangle = \\ &= \frac{1}{i\hbar} \langle \psi, AH\psi \rangle + \frac{1}{i\hbar} \langle \psi, -HA\psi \rangle = \\ &= \frac{1}{i\hbar} \langle \psi, [A, H]\psi \rangle. \end{aligned}$$

□

Corollario 13.26.

Se la media del valore di A dipende dal tempo allora A è incompatibile con H .

Teorema 13.27 (Principio di indeterminazione di Heisenberg).

Se A e B sono operatori autoaggiunti allora

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left(\frac{\langle [A, B] \rangle}{2i} \right)^2.$$

Dimostrazione.

Siano $\alpha = (A - \langle A \rangle)\psi$ e $\beta = (B - \langle B \rangle)\psi$, in modo tale che

$$\sigma_A^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle = \langle (A - \langle A \rangle)\psi, (A - \langle A \rangle)\psi \rangle = \langle \alpha, \alpha \rangle$$

e similmente $\sigma_B^2 = \langle \beta, \beta \rangle$.

Per Cauchy-Schwarz

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 = \langle \alpha, \alpha \rangle \langle \beta, \beta \rangle \geq |\langle \alpha, \beta \rangle|^2,$$

inoltre, notando che

$$|z|^2 \geq (\Im(z))^2 = \left(\frac{z - z^*}{2i} \right)^2,$$

troviamo

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq |\langle \alpha, \beta \rangle|^2 = \left(\frac{1}{2i} (\langle \alpha, \beta \rangle - \langle \beta, \alpha \rangle) \right)^2.$$

Sviluppiamo i prodotti scalari coinvolti:

$$\begin{aligned}\langle \alpha, \beta \rangle &= \langle (A - \langle A \rangle) \psi, (B - \langle B \rangle) \psi \rangle = \\ &= \langle \psi, AB\psi \rangle - \langle A \rangle \langle \psi, B\psi \rangle - \langle B \rangle \langle \psi, A\psi \rangle + \langle A \rangle \langle B \rangle \cancel{\langle \psi, \psi \rangle}^1 = \\ &= \langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle.\end{aligned}$$

Segue che

$$\langle \alpha, \beta \rangle - \langle \beta, \alpha \rangle = \langle [A, B] \rangle$$

e quindi troviamo la tesi

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left(\frac{\langle [A, B] \rangle}{2i} \right)^2.$$

□

Corollario 13.28.

Nel caso $A = X$ e $B = P_x$ troviamo

$$\sigma_X \sigma_{P_x} \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Parte IV

Appendice

Appendice A

Richiami matematici

A.1 Derivate parziali e Jacobiane

Da una relazione $f(x, y, z) = 0$ possiamo ricavare $x = x(y, z)$ e $y = y(x, z)$. Possiamo dunque sviluppare i differenziali

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial y} \Big|_z dy + \frac{\partial x}{\partial z} \Big|_y dz \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_z dx + \frac{\partial y}{\partial z} \Big|_x dz. \end{aligned}$$

Proposizione A.1 (Proprietà delle derivate parziali).

Valgono le seguenti proprietà, dette **dell'inversa** e **ciclicità** rispettivamente:

$$\frac{\partial x}{\partial y} \Big|_z = \left(\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_z \right)^{-1}, \quad \frac{\partial x}{\partial y} \Big|_z \frac{\partial y}{\partial z} \Big|_x \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_y = -1.$$

Dimostrazione.

Considerando le espressioni date sopra e sostituendo dy dentro lo sviluppo di dx ricaviamo l'equazione

$$\left(1 - \frac{\partial x}{\partial y} \Big|_z \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_z \right) dx = \left(\frac{\partial x}{\partial y} \Big|_z \frac{\partial y}{\partial z} \Big|_x + \frac{\partial x}{\partial z} \Big|_y \right) dz.$$

Se fissiamo z il membro di sinistra non cambia, mentre quello di destra risulta nullo ($dz = 0$). Poiché questo è vero anche per $dx \neq 0$ necessariamente ricaviamo

$$1 = \frac{\partial x}{\partial y} \Big|_z \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_z$$

che è la proprietà dell'inversa.

Avendo mostrato questo ricaviamo che il membro di sinistra è sempre nullo, anche per $dz \neq 0$, quindi segue l'equazione

$$\frac{\partial x}{\partial y} \Big|_z \frac{\partial y}{\partial z} \Big|_x + \frac{\partial x}{\partial z} \Big|_y = 0,$$

la quale corrisponde alla proprietà di ciclicità. \square

Consideriamo le seguenti relazioni

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}.$$

Poniamo

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Osservazione A.2 (Jacobiane notevoli).

Si ha che

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(x, y)} = 1, \quad \frac{\partial(x, x)}{\partial(u, v)} = 0, \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = -\frac{\partial(y, x)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(-x, y)}{\partial(u, v)}.$$

Inoltre

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, y)} = \left. \frac{\partial x}{\partial u} \right|_y, \quad \frac{\partial(x, u)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(x, u)}{\partial(r, s)} \frac{\partial(r, s)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right)^{-1}.$$

A.2 Differenziali esatti

Ricordiamo che una forma $\sum A_i dx_i$ è chiusa quando per ogni coppia i, j

$$\frac{\partial A_j}{\partial x_i} = \frac{\partial A_i}{\partial x_j}.$$

Se il dominio è semplicemente connesso allora questa condizione caratterizza anche le forme esatte.

Proposizione A.3 (Esattezza tramite Pfaff).

Sia $\sum_i A_i dx_i$ una forma. Se l'equazione di Pfaff

$$\sum_i A_i dx_i = 0$$

è integrabile¹ allora la forma è chiusa ed esiste $u(x_1, \dots, x_n)$ tale che $\sum u A_i dx_i$ è esatta.

Dimostrazione.

Sia $\{F = 0\}$ l'equazione del luogo dove vale l'equazione Pfaff. Segue che

$$dF = \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i = 0 = \sum_i A_i dx_i,$$

esiste dunque u tale che

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = u(x_1, \dots, x_n) A_i,$$

da cui derivando

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (u A_j) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (u A_i),$$

cioè $\sum_i u A_i dx_i$ è chiusa. □

¹cioè i punti che la verificano sono descrivibili tramite una equazione $F(x_1, \dots, x_n) = cost.$

Fatto A.4 (Condizione di integrabilità).

Se per ogni terna i, j, k di indici distinti vale

$$A_k \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right) + A_j \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_i} \right) + A_i \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_k} \right) = 0$$

allora $\sum A_i dx_i = 0$ è integrabile.

Osservazione A.5.

Un sistema è integrabile se nell'intorno di un punto P esistono infiniti punti non raggiungibili tramite percorsi su cui vale $\sum_i A_i dx_i = 0$ (ipersuperficie ha dimensione minore dello spazio ambiente).

Segue che se posso raggiungere ogni punto rispettando l'equazione allora non avevamo integrabilità

Esempio A.6.

Consideriamo l'equazione $ydx + dy + dz = 0$ e passiamo da $(0, 0, 0)$ a (a, b, c) :

- Variamo solo la x ($dy = dz = 0$). Poiché $y = 0$ e non cambia l'equazione è rispettata e passiamo da $(0, 0, 0)$ a $(x_0, 0, 0)$ per un qualsiasi x_0 .
- Fissiamo $x = x_0$ ($dx = 0$) e muoviamoci in modo tale che $dy = dz$ (lungo una diagonale) e così passiamo da $(x_0, 0, 0)$ a $(x_0, b, -b)$.
- Fissiamo $y = b$ ($dy = 0$) e muoviamoci in modo che $dz = -bdx$. Passiamo da $(x_0 + (a - x_0), b, -b + (a - x_0)(-b))$. Se avevamo scelto x_0 in modo tale che $-b + (a - x_0)(-b) = c$ allora abbiamo finito.

A.3 Trasformazione di Legendre

Sia $F(x, y)$ con $dF = udx + vdy$ ² e supponiamo di voler riformulare l'espressione in termini di u e y . Definiamo

$$G(u, y) = F - ux$$

e notiamo che

$$dG = dF - udx - xdu = \cancel{udx} + vdy - \cancel{udx} - xdu = vdy - xdu,$$

cioè G effettivamente dipende esplicitamente solo da u e y .

A.4 Regole di Prostaferesi per funzioni trigonometriche iperboliche

Valgono le seguenti identità

$$\begin{aligned} \sinh(a \pm b) &= \sinh a \cosh b \pm \cosh a \sinh b \\ \cosh(a \pm b) &= \cosh a \cosh b \pm \sinh a \sinh b \\ \tanh(a \pm b) &= \frac{\tanh a \pm \tanh b}{1 \pm \tanh a \tanh b} \end{aligned}$$

²cioè $u = \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_y$ e $v = \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_x$.

A.5 Quantità che dipende “per unità” di un’altra

Osservazione A.7.

Se A dipende da x in modo estensivo, cioè A è dato integrando qualcosa su tutti i valori di x , A non si può scrivere come $A(x)$ perché altrimenti dovrebbe valere 0. Quello che è ben definito è $\frac{dA}{dx}$, cioè una densità di qualche tipo.

Appendice B

Chiusura

A questo link potete trovare un formulario per il corso redatto l'anno scorso (22/23) da Andrea Rocca e Alessio Sgubin:

<https://poisson.phc.dm.unipi.it/~rocca/materiali/Fisica3.pdf>

Errata al formulario¹:

1. La legge è di Kirchhoff, non Kirkov
2. La formula per la Delta di Dirac è opinabile

Ringrazio i seguenti per aver collaborato nella stesura di alcune parti, per aver offerto consigli su come migliorare le dispense in generale o per aver segnalato degli errori:

- Alessandro Borghesi
- Margherita Daniele

¹almeno per quanto ho notato