

Степенной закон

Материал из Википедии — свободной энциклопедии

В статистике **степенной закон** (англ. *power law*) — это такая функциональная зависимость между двумя величинами, при которой относительное изменение одной величины приводит к пропорциональному относительному изменению другой величины, независимо от исходных значений этих величин: зависимость одной величины от другой представляет собой степенную функцию. Например, рассмотрим зависимость площади квадрата от длины его стороны. Если длина будет увеличена вдвое, то площадь увеличится вчетверо.^[1]



Пример графика степенной функции, используемого для демонстрации ранжирования по популярности. Справа длинный хвост, а слева те немногие, что доминируют (см. принцип 80-20).

Содержание

Примеры из практики
Свойства
Масштабная инвариантность
Отсутствие строго определённого среднего значения
Проверка на соответствие степенному закону
См. также
Ссылки
Ссылки

Примеры из практики

Во многих физических, биологических и искусственных явлениях наблюдаются распределения, приблизительно соответствующие степенному закону в различных масштабах: например, размеры лунных кратеров и солнечных вспышек,^[2] закономерности питания разных видов,^[3] активность популяций нейронов,^[4] частота употребления слов в большинстве языков, распространённость фамилий, число видов в кладах организмов,^[5] масштабы аварий в энергосистемах, число уголовных обвинений на одного преступника, количество извержений вулканов,^[6] человеческие оценки интенсивности стимулов^{[7][8]} и многие другие величины.^[9] Эмпирические распределения могут соответствовать степенному закону во всём диапазоне своих значений, либо, например, в хвосте. Затухание звуковых колебаний следует степенному закону в широких полосах частот во многих сложных средах. Аллометрические закономерности для отношений между биологическими переменными являются одними из самых известных примеров степенных законов в природе.

Свойства

Масштабная инвариантность

Для степенного закона характерна масштабная инвариантность. Если выполняется $f(x) = ax^{-k}$, то масштабирование аргумента x на постоянный коэффициент c приведёт к пропорциональному масштабированию самой функции. То есть:

$$f(cx) = a(cx)^{-k} = c^{-k}f(x) \propto f(x),$$

где \propto обозначает прямую пропорциональность. Иными словами, умножение аргумента на постоянную величину c приводит просто к умножению значения функции на постоянную величину c^{-k} . Таким образом, все степенные законы с заданным показателем степени эквивалентны с точностью до умножения на константу, поскольку все они представляют собой лишь масштабированные версии друг друга. Это порождает линейную зависимость между логарифмами величин $f(x)$ и x , и прямую линию на графике в двойном логарифмическом масштабе (log-log), которую часто считают характерным признаком степенного закона. В реальных данных это признак является необходимым, но не достаточным, чтобы сделать вывод о наличии степенного закона. Существует много способов генерировать конечные объёмы данных, имитирующих соответствие степенному закону, но отклоняющихся от него в асимптотическом пределе (например, если процесс генерации данных следует логнормальному распределению). Проверка моделей на соответствие степенному закону является актуальной областью исследований в статистике, см. ниже.

Отсутствие строго определённого среднего значения

Степенной закон x^{-k} имеет строго определённое среднее значение при $x \in [1, \infty)$, только если $k > 2$, и имеет конечную дисперсию, только если $k > 3$. Для большинства известных степенных законов в природе значения показателя степени таковы, что среднее значение является строго определённым, а дисперсия нет, поэтому для них существует возможность возникновения событий типа «чёрный лебедь».^[10] Это можно показать на примере следующего мысленного эксперимента:^[11] представьте себя в комнате с друзьями и оцените среднемесячный доход в этой комнате. Теперь представьте, что в эту комнату вошёл самый богатый человек в мире с месячным доходом около 1 миллиарда US\$. Как изменится значение среднемесячного дохода в комнате? Распределение доходов следует степенному закону, известному как распределение Парето (например, капиталы американцев распределены по степенному закону с показателем степени 2).

С одной стороны, это не позволяет корректно применять традиционную статистику, основанную на дисперсии и среднеквадратическом отклонении (например, регрессионный анализ). С другой стороны, это позволяет осуществлять эффективное по затратам вмешательство.^[11] К примеру, пусть выхлопные газы автомобилей распределены по степенному закону среди автомобилей (то есть большинство загрязнений осуществляется очень небольшим числом автомобилей). Тогда будет достаточно убрать с дорог это небольшое число автомобилей, чтобы существенно снизить общее количество выбросов.^[12]

Медиана существует: для степенного закона x^{-k} с показателем степени $k > 1$ она принимает значение $2^{1/(k-1)}x_{\min}$, где x_{\min} — это минимальное значение, для которого выполняется степенной закон^[13]

Проверка на соответствие степенному закону

Хотя степенной закон привлекателен по многим теоретическим причинам, доказательство того, что данные и в самом деле следуют степенному закону, требует больше, чем простого подбора параметров модели.^[14] Важно понимать механизм возникновения распределения: внешне похожие распределения могут возникать по существенно различным причинам, а разные модели дают разные прогнозы, например при экстраполяции.^{[15][16]}

См. также

- [Затухание звука](#)
- [Аллометрия](#)
- [Распределение с «толстым» хвостом](#)
- [Сингулярность за конечное время](#)
- [Дробное исчисление](#)
- [Дробная динамика](#)
- [Распределение с «тяжёлым» хвостом](#)
- [Гиперболический рост](#)
- [Полёт Леви](#)
- [Длинный хвост](#)
- [Степенной закон вязкости жидкостей](#)
- [Модель Саймона](#)
- [Устойчивое распределение](#)
- [Закон Стивенса](#)
- [Концентрация богатства](#)
- [Веб-граф](#)

Ссылки

Сноски

↑ Показывать компактно

1. *Yaneer Bar-Yam*. Concepts: Power Law (<http://www.necsi.edu/guide/concepts/powerlaw.html>). New England Complex Systems Institute. Дата обращения 18 августа 2015.
2. *Newman, M. E. J.* Power laws, Pareto distributions and Zipf's law (англ.) // *Contemporary Physics : journal*. — 2005. — Vol. 46, no. 5. — P. 323—351. — DOI:10.1080/00107510500052444 (<https://dx.doi.org/10.1080%2F00107510500052444>). — . — arXiv:cond-mat/0412004.
3. *Humphries N. E., Queiroz N., Dyer J. R., Pade N. G., Musyl M. K., Schaefer K. M., Fuller D. W., Brunnenschweiler J. M., Doyle T. K., Houghton J. D., Hays G. C., Jones C. S., Noble L. R., Wearmouth V. J., Southall E. J., Sims D. W.* Environmental context explains Lévy and Brownian movement patterns of marine predators (англ.) // *Nature : journal*. — 2010. — Vol. 465, no. 7301. — P. 1066—1069. — DOI:10.1038/nature09116 (<https://dx.doi.org/10.1038%2Fnature09116>). — . — PMID 20531470.
4. *Klaus A., Yu S., Plenz D.* Statistical Analyses Support Power Law Distributions Found in Neuronal Avalanches (англ.) // *PLoS ONE : journal / Zochowski, Michal*. — 2011. — Vol. 6, no. 5. — P. e19779. — DOI:10.1371/journal.pone.0019779 (<https://dx.doi.org/10.1371%2Fjournal.pone.0019779>). — . — PMID 21720544.
5. *Historical Biogeography of Neotropical Freshwater Fishes* (<http://www.ucpress.edu/book.php?isbn=9780520268685>). — Berkeley : University of California Press, 2011.
6. *Cannavò, Flavio; Nunnari, Giuseppe*. On a Possible Unified Scaling Law for Volcanic Eruption Durations (<http://www.nature.com/articles/srep22289>) (англ.) // *Scientific Reports : journal*. — 2016. — 1 March (vol. 6). — P. 22289. — ISSN 2045-2322 (<https://www.worldcat.org/search?fq=x0:jrn&q=n2:2045-2322>). — DOI:10.1038/srep22289 (<https://dx.doi.org/10.1038%2Fsrep22289>). — . — PMID 26926425.
7. Stevens, S. S. (1957). On the psychophysical law. *Psychological Review*, 64, 153—181
8. Staddon, J. E. R. (1978). Theory of behavioral power functions. *Psychological Review*, 85, 305—320.
9. Clauset, Shalizi.
10. *Newman, M. E. J.; Reggiani, Aura; Nijkamp, Peter*. Power laws, Pareto distributions and Zipf's law (англ.) // *Cities*. — Elsevier, 2005. — Vol. 30, no. 2005. — P. 323—351. — DOI:10.1016/j.cities.2012.03.001 (<https://dx.doi.org/10.1016%2Fj.cities.2012.03.001>). — arXiv:cond-mat/0412004.
11. 9na CEPAL Charlas Sobre Sistemas Complejos Sociales (CCSSCS): Leyes de potencias, <https://www.youtube.com/watch?v=4uDSEs86xCI>
12. Malcolm Gladwell (2006), Million-Dollar Murray; Archived copy (<http://gladwell.com/million-dollar-murray/>). Дата обращения 14 июня 2015. Архивировано (<https://web.archive.org/web/20150318142026/http://gladwell.com/million-dollar-murray/>) 18 марта 2015 года.
13. Newman, Mark EJ. «Power laws, Pareto distributions and Zipf's law.» *Contemporary physics* 46.5 (2005): 323—351. (<https://arxiv.org/pdf/cond-mat/0412004.pdf>) 
14. *Hilbert, Martin*. Scale-free power-laws as interaction between progress and diffusion (<http://www.escholarship.org/uc/item/1nb8n94b>) (англ.) // *Complexity : journal*. — 2013. — Vol. 19, no. 4. — P. 56—65. — DOI:10.1002/cplx.21485 (<https://dx.doi.org/10.1002%2Fcplx.21485>). — .
15. *Hall, P.* On Some Simple Estimates of an Exponent of Regular Variation (англ.) // *Journal of the Royal Statistical Society, Series B : journal*. — 1982. — Vol. 44, no. 1. — P. 37—42.
16. *Stumpf, M.P.H.* Critical Truths about Power Laws (англ.) // *Science : journal*. — 2012. — Vol. 335, no. 6069. — P. 665—666. — DOI:10.1126/science.1216142 (<https://dx.doi.org/10.1126%2Fscience.1216142>). — . — PMID 22323807.

Библиография

- Bak, Per (1997) *How nature works*, Oxford University Press

- *Clauset, A.; Shalizi, C. R.; Newman, M. E. J.* Power-Law Distributions in Empirical Data (неопр.) // SIAM Review. — 2009. — Т. 51, № 4. — С. 661—703. — DOI:10.1137/070710111 (<https://dx.doi.org/10.1137%2F070710111>). — . — arXiv:0706.1062.
- *Laherrère, J.; Sornette, D.* Stretched exponential distributions in nature and economy: "fat tails" with characteristic scales (англ.) // The European Physical Journal B : journal. — 1998. — Vol. 2, no. 4. — P. 525—539. — DOI:10.1007/s100510050276 (<https://dx.doi.org/10.1007%2Fs100510050276>). — . — arXiv:cond-mat/9801293.
- *Mitzenmacher, M.* A Brief History of Generative Models for Power Law and Lognormal Distributions (<http://www.ee.cs.harvard.edu/~michaelm/postscripts/im2004a.pdf>) (англ.) // Internet Mathematics : journal. — 2004. — Vol. 1, no. 2. — P. 226—251. — DOI:10.1080/15427951.2004.10129088 (<https://dx.doi.org/10.1080%2F15427951.2004.10129088>).
- Alexander Saichev, Yannick Malevergne and Didier Sornette (2009) *Theory of Zipf's law and beyond*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Volume 632, Springer (November 2009),
- *Simon, H. A.* On a Class of Skew Distribution Functions (неопр.) // Biometrika. — 1955. — Т. 42, № 3/4. — С. 425—440. — DOI:10.2307/2333389 (<https://dx.doi.org/10.2307%2F2333389>).
- *Sornette, Didier.* Critical Phenomena in Natural Sciences: Chaos, Fractals, Self-organization and Disorder: Concepts and Tools. — 2nd. — Heidelberg : Springer, 2006. — ISBN 978-3-540-30882-9.
- Mark Buchanan (2000) *Ubiquity*, Weidenfeld & Nicolson
- *Stumpf, M.P.H.; Porter, M.A.* Critical Truths about Power Laws (англ.) // Science. — 2012. — Vol. 335, no. 6069. — P. 665—666. — DOI:10.1126/science.1216142 (<https://dx.doi.org/10.1126%2Fscience.1216142>). — . — PMID 22323807.

Ссылки

- Zipf's law (<http://www.nslj-genetics.org/wli/zipf/>)
- Zipf, Power-laws, and Pareto — a ranking tutorial (<http://www.hpl.hp.com/research/idl/papers/ranking/ranking.html>)
- Stream Morphometry and Horton's Laws (<http://www.physicalgeography.net/fundamentals/10ab.html>)
- Clay Shirky on Institutions & Collaboration: Power law in relation to the internet-based social networks (<https://www.youtube.com/watch?v=sPQViNNOAkW>)
- Clay Shirky on Power Laws, Weblogs, and Inequality (http://www.shirky.com/writings/herecomeseverybody/powerlaw_weblog.html)
- «How the Finance Gurus Get Risk All Wrong» (http://archive.fortune.com/magazines/fortune/fortune_archive/2005/07/11/8265256/index.htm) by Benoit Mandelbrot & Nassim Nicholas Taleb. *Fortune*, July 11, 2005.
- «Million-dollar Murray»: (<http://www.newyorker.com/magazine/2006/02/13/million-dollar-murray>) power-law distributions in homelessness and other social problems; by Malcolm Gladwell. *The New Yorker*, February 13, 2006.
- Benoit Mandelbrot & Richard Hudson: The Misbehaviour of Markets (2004)
- Philip Ball: Critical Mass: How one thing leads to another (<http://www.agrfoto.com/philipball/criticalmass.php>) (2005)
- *Tyranny of the Power Law* (<http://econophysics.blogspot.com/2006/07/tyranny-of-power-law-and-why-we-should.html>) from The Econophysics Blog (<http://econophysics.blogspot.com>)
- *So You Think You Have a Power Law — Well Isn't That Special?* (<http://www.stat.cmu.edu/~cshalizi/2010-10-18-Meetup.pdf>) (англ.) from Three-Toed Sloth (<http://www.cscs.umich.edu/~crshalizi/weblog/>), the blog of Cosma Shalizi, Professor of Statistics at Carnegie-Mellon University.
- Simple MATLAB script (<http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/27176-log-binning-of-data>) — простой скрипт на языке MATLAB, который строит гистограмму данных в логарифмической шкале.
- The Erdős Webgraph Server (<http://web-graph.org>) — визуализация распределения степеней веб-графа на странице загрузки (<http://web-graph.org/index.php/download>).

Источник — https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=Степенной_закон&oldid=101121309

Эта страница в последний раз была отредактирована 19 июля 2019 в 05:31.

Текст доступен по лицензии [Creative Commons Attribution-ShareAlike](#); в отдельных случаях могут действовать дополнительные условия.

Wikipedia® — зарегистрированный товарный знак некоммерческой организации [Wikimedia Foundation, Inc.](#)