12 Funktorielle Eigenschaften von $\Gamma(X)$

Satz 29. *Für einen Morphismus $X \xrightarrow{f} Y$ affiner algebraischer Mengen definiert*

$$\begin{aligned}\Gamma(f) : \hom(Y = \Gamma(Y), \mathbb{A}^1(k)) &\to \hom(X = \Gamma(X), \mathbb{A}^1(k))\\ g &\mapsto g \circ f\end{aligned}$$

ein Homomorphismus von k-Algebren. Der so definierte kontravariante *Funktor*

$$\Gamma : \{\textit{affine algebraische Mengen}\} \to \{\textit{red. endl. erz. k-Alg.}\}$$

liefert eine Kategorienäquivalenz, der durch Einschränkung eine Äquivalenz

$$\Gamma : \{\textit{irred. aff. alg. Meng.}\} \to \{\textit{integere endl. erz. k-Alg.}\}$$

induziert.

Beweis. $Y \xrightarrow{g} \mathbb{A}^1(k) \in \Gamma(Y)$ ist Morphismus. Es folgt:

$$g \circ f : X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} \mathbb{A}^1(k)$$

ist ..., d.h. $\in \Gamma(X)$. $\Gamma(f) : \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$ ist ein k-Alg.-Hom. und Kompositions.... (nach Bemerkung 24) mit $\Gamma(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\Gamma(X)}$. Da ferner $\Gamma(f_1 \circ f_2) = \Gamma(f_2) \circ \Gamma(f_1)$ aus der Definition folgt, ist Γ ein kontravarianter Funktor.

Behauptung. Γ ist volltreu, d.h.

$$\begin{aligned}\Gamma : \hom(X, Y) &\to \hom(\Gamma(Y), \Gamma(X))\\ f &\mapsto \Gamma(f)\end{aligned}$$

ist *bijektiv* für alle affinen algebraischen Mengen X, Y.

Beweis. Wir konstruieren eine Umkehrabbildung wie folgt: Zu $\varphi : \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$ für $X \subseteq \mathbb{A}^n$, $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ existiert:

$$\begin{tikzcd} k[T_1', \ldots, T_k'] \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] \arrow[d] & k[T_1, \ldots, T_m] \arrow[d] \\ \Gamma(Y) \arrow[r] & \Gamma(X) \end{tikzcd}$$

kommutiert ($\tilde{\varphi}(T_1') :=$ liften $\varphi(\pi(T_i'))$ in $k[\underline{T}]$). Definiere:

$$\begin{aligned}f : X &\to Y\\ x = (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto (\tilde{\varphi}(T_1')(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \tilde{\varphi}(T_n')(x_1, \ldots, x_n))\end{aligned}$$

□

Behauptung. Γ ist essentiell surjektiv, d.h. zu jeder reduzierten endlich erzeugten k-Algebra A existiert eine affine algebraische Menge X mit $A \cong \Gamma(X)$.

Beweis. Da nach Voraussetzung $A \cong k[T]/\mathfrak{A}$ für Radikalideal $\mathfrak{A}$, können wir etwa $X := V(\mathfrak{A}) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ setzen. Der Rest folgt aus Satz 28. □

□

Satz 30. *Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus und $\Gamma(f) : \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$ der zugehörige Homomorphismus der Koordinatenringe. Dann gilt $\forall x \in X$: $\Gamma(f)^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{m}_f(x)$.*

Beweis. Setting:

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_{f(x)} &= \{g \mid g(f(x)) = 0\} \subset \hom(Y, \mathbb{A}^1) \\ &= \Gamma(Y) \xrightarrow{\Gamma(f)} \Gamma(X) \\ &= \hom(X, \mathbb{A}^1) \supset \{k \mid k(x)) = 0\} \\ g &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

Es ist:

$$\Gamma(f)^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \{g \in \Gamma(Y) \mid g \circ f(x) \neq 0\} = \mathfrak{m}_{f(x)},$$

da $\Gamma(f)(g)(x) = g(f(x))$. □