20 Funktionenkörper einer Prävarietät

Definition 46 (orig. 43)**.** Für eine Prävarietät X sind die rationalen Funktionenkörper aller nicht-leeren affinen offenen Teilmengen in natürlicher Weise zu einander isomorph. Dieser Körper nennen wir den **rationalen Funktionenkörper** von X: $K(X)$.

Proof. $\emptyset \neq U$, $V \subset X$ affine offene Untervarietät. Da X irreduzibel ist, gilt nach *Satz 40*:

$$\emptyset \neq U \cap V \subset U \text{ offen.}$$

Nach Definition von $\mathcal{O}_X$ ist

$$\mathcal{O}_X(U) \subseteq \mathcal{O}_X(U \cap V) \subset K(U) = \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_X(U)).$$

Das impliziert $\mathrm{Quot}(\mathcal{O}_X(U \cap V)) = K(U)$. Aus Symmetriegründen ist aber $K(V) = \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_X(U \cap V))$. □

Remark 47 (orig. 44). Das Bild $K(\ )$ des Funktionenkörpers ist **nicht** funktoriell! Für $X \xrightarrow{f} Y$ Morphismus affiner Varietäten ist die Abbildung auf den Koordinatenringen $\Gamma(Y) \to \Gamma(X)$ i.A. **nicht** injektiv, also gibt es kein $K(Y) \hookrightarrow K(X)$.

Jedoch: Eine Isomorphie $X \xrightarrow{\sim} Y$ induziert $K(Y) \xrightarrow{\sim} K(X)$. Allgemeiner sei $X \to Y$ Morphismus mit Bild $\subset Y$ offen ($\Rightarrow$ dicht. Später $X \to Y$ **dominant**, d.h. Bild $\subset Y$ dicht.) induziert in funktioreller Weise eine Abbildung $K(Y) \hookrightarrow K(X)$.

Proposition 48 (orig. 45)**.** *Sei X eine Prävarietät, $V \subseteq U \subseteq X$ offen. Es folgt:*

$\mathcal{O}_X(U) \subset K(X)$ k-Unteralgebra.

$\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$ ist Inklusion von Teilmengen des Funktionenkörpers $K(X)$.

Insbesondere gilt für $U, V \subset X$ offen:

$$\mathcal{O}_X(U \cup V) = \mathcal{O}_X(U) \cap \mathcal{O}_X(V).$$

Proof.

2. Sei $\mathcal{O}(X) \ni f : X \to k$. Dann ist $f^{-1}(0) \subseteq X$ abgeschlossen, da für $W \subseteq X$ offen affin beliebig gilt:

   $$f^{-1}(0) \cap W = V(f_{|W}).$$

   Dazu macht man sich klar: „abgeschlossen" ist eine lokale Eigenschaft, und die W bilden eine Basis der Topologie.

   $\Rightarrow \mathcal{O}(U) \hookrightarrow \mathcal{O}(V)$, $f \mapsto \sigma$ injektiv für $\emptyset \neq V \subseteq U \subset X$ offen.

   $\Rightarrow V \subset f^{-1}(0)$

$\Rightarrow f^{-1}(0) = U$

$\Rightarrow f \equiv 0.$

1. (i) $U \supset W$ offen affine Varietät. $\Rightarrow$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(W) \arrow[r, hook] & K(W) \ k\text{-Varietät} \\ \mathcal{O}(U) \arrow[u, hook] & \end{tikzcd}$$

(i) Verklebungsaxiom:

$\square$