Algebraische Geometrie I

Prof. Dr. Venjakob

23. Februar 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Prä-Varietäten **7**

1.1 Einführung . . . 8
1.2 Die Zariski-Topologie . . . 9
1.2.1 Eigenschaften . . . 9
1.3 Affine algebraische Mengen . . . 10
1.4 Der Hilbertsche Nullstellensatz . . . 11
1.5 Korrespondenz zwischen Radikalidealen und affinen algebraischen Mengen . . . 12
1.6 Irreduzible topologische Räume . . . 13
1.7 Irreduzible affine algebraische Mengen . . . 15
1.8 Quasikompakte und noethersche topologische Räume . . . 16
1.9 Morphismen von affinen algebraischen Mengen . . . 18
1.10 Unzulänglichkeiten des Begriffs der affinen algebraischen Mengen . . . 19
1.11 Der affine Koordinatenring . . . 20
1.12 Funktorielle Eigenschaften von $\Gamma(X)$ . . . 22
1.13 Räume mit Funktionen . . . 24
1.14 Der Raum mit Funktionen zu einer affin-algebraischen Menge . . . 26
1.15 Funktorialität der Konstruktion . . . 29
1.16 Definition von Prävarietäten . . . 31
1.17 Vergleich mit differenzierbaren/komplexen Mannigfaltigkeiten . . . 32
1.18 Topologische Eigenschaften von Prävarietäten . . . 33
1.19 Offene Untervarietäten . . . 34
1.20 Funktionenkörper einer Prävarietät . . . 36
1.21 Abgeschlossene Unterprävarietäten . . . 38
1.22 Homogene Polynome . . . 39
1.23 Definition des projektiven Raumes . . . 40
1.23.1 Reguläre Funktionen . . . 41
1.24 Projektive Varietäten . . . 44
1.25 Koordinatenwechsel in $\mathbb{P}^n$ . . . 46
1.26 Lineare Unterräume von $\mathbb{P}^n$ . . . 47
1.27 Kegel . . . 48
1.28 Quadriken . . . 49

2 Das Ringspektrum **53**

2.1 Definition von Spec(A) . . . 54
2.2 Topologische Eigenschaften von Spec(A) . . . 56
2.3 Der Funktor $A \mapsto \operatorname{Spec}(A)$ . . . 58
2.4 Beispiele . . . 60
2.5 Prägarben und Garben . . . 62
2.6 Halme von Garben . . . 66
2.7 Die zu einer Prägarbe assoziierte Garbe . . . 68
2.8 Direktes und inverses Bild von Garben . . . 69
2.9 Lokal geringte Räume . . . 71
2.10 Die Strukturgarbe auf Spec A . . . 73
2.10.1 Wohldefiniertheit . . . 73
2.10.2 Induzierte Abbildung . . . 73
2.11 Der Funktor $A \mapsto (\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$ . . . 76
2.12 Beispiele . . . 78

3 Schemata **81**

3.1 Schemata . . . 82
3.2 Offene Unterschemata . . . 83
3.3 Morphismen in affinen Schemata hinein . . . 84
3.4 Morphismen der Form $\operatorname{Spec}(K) \to X$ . . . 86
3.5 Verkleben von Schemata und disjunkte Vereinigung . . . 87
3.6 Der projektive Raum als Schema . . . 89
3.7 Nullstellenmenge im projektiven Raum . . . 90
3.8 Topologische Eigenschaften . . . 91
3.9 Noethersche Schemata . . . 92
3.10 Generische Punkte . . . 94
3.11 Reduzierte und ganze Schemata . . . 95
3.12 Schemata von endlichem Typ über k . . . 97
3.13 Sehr dichte Teilmengen . . . 99
3.14 Prävarietäten als Schemata . . . 100
3.15 Offene und abgeschlossene Einbettung . . . 103
3.16 Unterschemata und Einbettung . . . 106
3.17 Projektive und quasi-projektive Schemata über einen Körper . . . 108
3.18 Reduzierte Unterschemata . . . 109

4 Faserprodukte **113**

4.1 Der Punkte-Funktor . . . 114
4.2 Yoneda-Lemma . . . 115
4.3 Faserprodukte in beliebigen Kategorien . . . 116
4.4 Faserprodukte von Schemata . . . 119

4.5 Beispiele 122
4.6 Basiswechsel 123
4.7 Fasern von Morphismen 125
4.8 Eigenschaften von Schemata-Morphismen 127
4.9 Urbilder und Schema-theoretische Schnitte von Unterschemata 129
4.10 Affine und projektive Räume über beliebige Basen 130
4.11 Diagonal, Graph und Kern in beliebigen Kategorien 131
4.12 Diagonal für Schemata 133
4.13 Separierte Morphismen 134
4.14 Eigentliche Morphismen 138

5 Dimensionen **141**
5.1 Allgemeine Schemata 142

Literatur

- Görtz, Wedhorn. *Algebraic Geometry I*
- Hartshorne. *Algebraic Geometry*
- Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry 1 & 2*
- Grothendieck. *Eléments de géometrie algébrique, EGA I-IV*

Kommutative Algebra

- Brüske, Ischebeck, Vogel. *Kommutative Algebra*
- Kunz. *Einführung in die kommutative Algebra und algebraische Geometrie*

Kapitel 1

Prä-Varietäten

Abbildung 1.1: $T_2^2 = T_1^2(T_1 - 1) = T_1^3 - T_1^2$

1.1 Einführung

Algebraische Geometrie kann man verstehen, als das Studium von Systemen polynomialer Gleichungen (in mehreren Variabelen). Damit ist die algebraische Geometrie eine Verallgemeinerung der **linearen Algebra**, also statt X auch X^n, und auch der **Algebra**, durch Polynome in *mehreren* Variablen.

Frage. Seien k ein (algebraisch abgeschlossener) Körper, und $f_1, \dots, f_m \in k[T_1, \dots, T_n]$ gegeben. Was sind die "geometrischen Eigenschaften" der Nullstellenmenge

$$V(f_1, \dots, f_n) := \{(t_1, \dots, t_n) \in k^n \mid f_i(t_1, \dots, t_n) = 0 \ \forall i\}$$

Beispiel 1.1. Sei $f = T_2^2 - T_1^2(T_1 - 1) \in k[T_1, T_2]$. Die Nullstellenmenge für $k = \mathbb{R}$ (*aber: trügerisch, da* $\mathbb{R}$ nicht algebraisch abgeschlossen!) ist gegeben durch:

- Dimension 1
- $(0, 0)$ ist singulärer Punkt
- Alle anderen Punkte besitzen eine eindeutig bestimmte Tangente

Abbildung 1.2: **Spitze** und **Doppelpunkt**

Vergleiche mit dem **Satz über implizite Funktionen**: (Analysis, Differentialgeometrie)

$V(f)$ ist lokal diffeomorph zu $\mathbb{R}$ (= reelle Gerade) im Punkt (x_1, x_2) genau dann, wenn die Jacobi-Matrix

$$\left(\frac{\partial f}{\partial T_1}, \frac{\partial f}{\partial T_2}\right) = (T_1(3T_1 - 2),\ 2T_2)$$

Rang 1 in (x_1, x_2) hat. Das ist äquivalent dazu, dass $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$. Dies lässt sich rein formal über beliebigen Grundkörpern **algebraisch** formulieren.

Methoden. GAGA - Géometrie algébrique, géometrique analytique (Serre)

Komplexe Geometrie ($\mathbb{C}$), Differentialgeometrie ($\mathbb{R}$)	Algebraische Geometrie
Analytische Hilfsmittel	Kommutative Algebra

1.2 Die Zariski-Topologie

Definition 1.2. Sei $M \subseteq k[T_1, \ldots, T_n] =: k[\underline{T}]$ eine Teilmenge. Mit

$$V(M) := \{(t_1, \ldots, t_n) \in k^n \mid f(t_1, \ldots, t_n) = 0 \; \forall \boldsymbol{f} \in \boldsymbol{M}\}$$

bezeichnen wir die gemeinsame **Nullstellen-(Verschwindungs-)Menge** der Elemente aus M. (Manchmal auch $V(f_i, i \in I)$ statt $V(\{f_i, i \in I\})$.

Notation Wir schreiben auch $V(f_i, i \in I)$ statt $V(\{f_i \mid i \in I\})$

1.2.1 Eigenschaften

- $V(M) = V(\mathfrak{a})$, wenn $\mathfrak{a} = \langle M \rangle_{k[\underline{T}]}$ das *von M erzeugte Ideal* in $k[\underline{T}]$ bezeichnet.
- Da $k[\underline{T}]$ noethersch (Hilbertscher Basissatz) ist, reichen stets endlich viele $f_1, \ldots, f_n \in M$:

$$V(M) = V(f_1, \ldots, f_n) \qquad \text{falls } \mathfrak{a} = \langle f_1, \ldots, f_n \rangle_{k[\underline{T}]}.$$

- $V(-)$ ist **inklusionsumkehrend**, $M' \subseteq M \implies V(M) \subseteq V(M')$.

Satz 1.3. *Die Mengen $V(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{a} \trianglelefteq k[\underline{T}]$ ein Ideal, sind die **abgeschlossenen** Mengen einer Topologie auf k^n, der sogenannten **Zariski-Topologie**.*

(i) $\emptyset = V((1))$, $k^n = V(0)$.

(ii) $\bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i) = V\left(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right)$ *für beliebige Familien* $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ *von Idealen.*

(iii) $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ *für* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \trianglelefteq k[\underline{T}]$ *Ideale.*

Beweis. Übung / Algebra II.

$\square$

1.3 Affine algebraische Mengen

Definition 1.4.

- $\mathbb{A}^n(k)$, der **affine Raum der Dimension n** (über k), bezeichne k^n mit der Zariski-Topologie.
- Abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{A}^n(k)$ heißen affine abgeschlossene Mengen.

Beispiel 1.5. Da $k[T]$ ein Hauptidealring ist, sind die abgeschlossen Mengen in $\mathbb{A}^1(k)$: $\emptyset$, $\mathbb{A}^1$, Mengen der Form $V(f)$, $f \in k[T] \backslash \{k\}$ (endliche Teilmengen). Insbesondere sieht man, dass die Zariski-Topologie im Allgemeinen nicht Hausdorff ist.

Beispiel 1.6. $\mathbb{A}^2(k)$ hat zumindestens als abgeschlossene Mengen:

- $\emptyset$, $\mathbb{A}^2$;
- Einpunktige Mengen: $\{(x_1, x_2)\} = V(T_1 - x_1, T_2 - x_2)$;
- $V(f)$, $f \in k[T_1, T_2]$ irreduzibel.

Ferner alle endlichen Vereinigungen dieser Liste. (Dies sind in der Tat alle, denn später sehen wir: "irreduzible" abgeschlossene Mengen entsprechen den *Primidealen*, und $k[T_1, T_2]$ hat "Krull-Dimension 2".)

1.4 Der Hilbertsche Nullstellensatz

Theorem 1.7. *Sei K ein (nicht notwendigerweise algebraisch abgeschlossener) Körper, und A eine endlich erzeugte K-Algebra. Dann ist A Jacobson'sch, d.h. für jedes Primideal $\mathfrak{p} \trianglelefteq A$ gilt:*

$$\mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{p}} \mathfrak{m}, \quad \mathfrak{m} \text{ } maximales\ Ideal$$

Ist $\mathfrak{m} \trianglelefteq A$ ein maximales Ideal, so ist die Körpererweiterung $K \subseteq A/\mathfrak{m}$ endlich.

Beweis. Algebra II / kommutative Algebra. □

Korollar 1.8.

(i) Sei A eine e.e. (endlich erzeugte) k-Algebra (k sei algebraisch abgeschlossen), $\mathfrak{m} \trianglelefteq A$ ein maximales Ideal. Dann ist $A/\mathfrak{m} = k$.

(ii) Jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \trianglelefteq k[\underline{T}]$ ist von der Form $\mathfrak{m} = (T_1 - x_1, \ldots, T_n - x_n)$ mit $x_1, \ldots, x_n \in k$.

(iii) Für ein Ideal $\mathfrak{a} \trianglelefteq k[\underline{T}]$ gilt:

$$\operatorname{rad}(\mathfrak{a}) = \sqrt{\mathfrak{a}} \overset{(i)}{=} \bigcap_{\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} \trianglelefteq k[\underline{T}], \mathfrak{p}\, prim} \mathfrak{p} \overset{(ii)}{=} \bigcap_{\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m} \trianglelefteq k[\underline{T}], \mathfrak{m}\, maximal} \mathfrak{m}$$

Beweis.

(i) $k \to A \to A/\mathfrak{m}$ ist Isomorphismus, da k keine echte algebraische Körpererweiterung besitzt.

(ii) Es ist

$$k[T_1, \ldots, T_n] \twoheadrightarrow k[\underline{T}]/\mathfrak{m} = k$$
$$T_i \mapsto x_i$$

surjektiv. Es folgt: $\mathfrak{m} = (T_1 - x_1, \ldots, T_n - x_n)$, da letzteres bereits maximal ist. ($\supseteq$ klar.)

(iii) (i) Algebra II. (ii) Theorem 1.7.

□

1.5 Korrespondenz zwischen Radikalidealen und affinen algebraischen Mengen

Sei $V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affin algebraische Menge, $\mathfrak{a} \trianglelefteq k[\underline{T}]$ ein Ideal. **Es gilt:**

$$V(\mathfrak{a}) = V(\operatorname{rad} \mathfrak{a})$$

mit $\operatorname{rad} \mathfrak{a} = \{f \in k[\underline{T}] \mid f^n \in \mathfrak{a} \text{ für ein } n > 0\}$, da

$$f^n(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0,$$

d.h. verschiedene Ideale können dieselbe algebraische Menge beschreiben.

Definition 1.9. Für eine Teilmenge $Z \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ bezeichne

$$I(Z) := \{f \in k[\underline{T}] \mid f(x) = 0 \ \forall x \in Z\}$$

das **Verschwindungsideal von Z**, das Ideal aller auf Z verschwindenden Polynomfunktionen.

Satz 1.10.

(i) Sei $\mathfrak{a} \trianglelefteq k[\underline{T}]$ Ideal. Dann ist $I(V(\mathfrak{a})) = \operatorname{rad}(\mathfrak{a})$.

(ii) Sei $Z \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ Teilmenge. Dann ist $V(I(Z)) = \overline{Z}$, der Abschluss von Z in $\mathbb{A}^n(k)$.

Beweis. Übungsblatt 2. □

$\mathfrak{a}$ heißt **Radikalideal**, falls $\mathfrak{a} = \operatorname{rad}(\mathfrak{a})$, oder äquivalent falls $k[\underline{T}]/\mathfrak{a}$ *reduziert* ist, d.h. keine nilpotente Elemente ungleich 0 hat.

Korollar 1.11. *Wir erhalten eine 1-1 Korrespondenz*

$$\begin{aligned} \{\textit{abg. Mengen } \subseteq \mathbb{A}^n\} &\leftrightarrow \{\textit{Radikalideale } \mathfrak{a} \trianglelefteq k[\underline{T}]\} \\ Z &\mapsto I(Z) \\ V(\mathfrak{a}) &\leftarrow\!\shortmid \mathfrak{a} \end{aligned}$$

die sich zu einer 1-1 Korrespondenz

$$\begin{aligned} \{\textit{Punkte in } \mathbb{A}^n\} &\leftrightarrow \{\textit{max. Ideale in } k[\underline{T}]\} \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \mathfrak{m}_x \begin{array}{l} = I(\{x\}) \\ = \ker(k[\underline{T}] \to k,\ T_i \mapsto x_i) \end{array} \end{aligned}$$

einschränkt.

1.6 Irreduzible topologische Räume

Die folgenden topologischen Begriffe sind nur interessant, da $\mathbb{A}^n(k)$ $(n > 0)$ kein Hausdorff'scher Raum ist.

Definition 1.12. Ein topologischer Raum X heißt **irreduzibel**, falls $X \neq \emptyset$ und X sich *nicht* als Vereinigung zweier echter abgeschlossener Teilmengen darstellen lässt, d.h

$$X = A_1 \cup A_2,\ A_i \text{ abg.} \quad \Longrightarrow \quad A_1 = X \text{ oder } A_2 = X.$$

$Z \subseteq X$ heißt irreduzibel, falls Z mit der induzierten Topologie irreduzibel ist.

Satz 1.13. *Für einen topologischen Raum $X \neq \emptyset$ sind äquivalent:*

(i) X ist irreduzibel.

(ii) Je zwei nichtleere offene Teilmengen von X haben nicht-leeren Durchschnitt.

(iii) Jede nichtleere offene Teilmenge $U \subseteq X$ ist dicht in X.

(iv) Jede nichtleere offene Teilmenge $U \subseteq X$ ist zusammenhängend.

(v) Jede nichtleere offene Teilmenge $U \subseteq X$ ist irreduzibel.

Beweis.

- $(i) \Leftrightarrow (ii)$

  Komplementärmengen.

- $(ii) \Leftrightarrow (iii)$

  Es ist: $U \subseteq X$ dicht $\Leftrightarrow U \cap O \neq \emptyset$ für jedes offene $\emptyset \neq O \subseteq X$.

- $(iii) \Rightarrow (iv)$

  Klar.

- $(iv) \Rightarrow (iii)$

  Sei $\emptyset \neq U$ offen und zusammenhängend. Es folgt:

  $$U = U_1 \sqcup U_2, \qquad \emptyset \neq U_i \underset{\text{offen}}{\subseteq} U \underset{\text{offen}}{\subseteq} X$$

  Damit ist $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, ein Widerspruch zu (iii).

- $(v) \Rightarrow (i)$

  Klar. $(U = X)$

- $(iii) \Rightarrow (v)$

  Sei $\emptyset \neq U \underset{\text{offen}}{\subseteq} X$. Ist $\emptyset \neq V \underset{\text{offen}}{\subseteq} U$, so ist $V \underset{\text{offen}}{\subseteq} X$. Es folgt: V ist dicht in X und irreduzibel in U. Mit $(iii) \Rightarrow (i)$ folgt, dass U irreduzibel ist.

$\square$

Lemma 1.14. *Eine Teilmenge Y ist genau dann irreduzibel, wenn ihr Abschluss $\overline{Y}$ dies ist.*

Beweis. Y irreduzibel
$\Leftrightarrow \forall U, V \subseteq X$ offen mit $U \cap Y \neq \emptyset \neq V \cap Y$, gilt $Y \cap (U \cap V) \neq \emptyset$.
$\Leftrightarrow \overline{Y}$ irreduzibel $\square$

Definition 1.15. Eine maximale irreduzible Teilmenge eines topologischen Raumes X heißt **irreduzible Komponente** von X.

Bemerkung 1.16.

(i) Jede irreduzible Komponente ist abgeschlossen nach Lemma 1.14.

(ii) X ist Vereinigung seiner irreduziblen Komponenten, *denn*:

  die Menge der irreduziblen Teilmengen von X ist **induktiv geordnet**: für jede aufsteigende Kette irreduzibler Teilmengen ist die Vereinigung wieder irreduzibel (Satz 1.13.(ii)). Mit dem **Lemma von Zorn** folgt: Jede irreduzible Teilmenge ist in einer irreduziblen Komponente enthalten. Damit ist jeder Punkt in einer irreduziblen Komponente enthalten.

1.7 Irreduzible affine algebraische Mengen

Lemma 1.17. *Eine abgeschlossene Teilmenge* $Z \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ *ist genau dann irreduzibel, wenn* $I(Z) \trianglelefteq k[\underline{T}]$ *ein Primideal ist. Insbesondere ist* $\mathbb{A}^n(k)$ *irreduzibel.*

Beweis. Z irreduzibel ist äquivalent zu

$$
\begin{aligned}
&(Z = \underbrace{V(\mathfrak{a})}_{\bigcap_i V(f_i)} \cup \underbrace{V(\mathfrak{b})}_{\bigcap_j V(g_j)} \quad \Rightarrow \quad V(\mathfrak{a}) = Z \text{ oder } V(\mathfrak{b}) = Z).\\
&\Leftrightarrow \forall f, g \in k[\underline{T}] : \; V(fg) = V(f) \cup V(g) \supseteq Z : \; V(f) \supseteq Z \text{ oder } V(g) \supseteq Z.\\
(*) \; &\Leftrightarrow \forall f, g \in k[\underline{T}] : \; fg \in I(V(fg)) \subseteq I(Z) : \; f \in I(Z) \text{ oder } g \in I(Z).\\
&\Leftrightarrow I(Z) \text{ ist Primideal.}
\end{aligned}
$$

(*): $V(I(Z)) = Z$, $I(V(\mathfrak{a})) = \mathrm{rad}(\mathfrak{a})$. □

Bemerkung 1.18. Die Korrespondenz aus Korollar 1.11 schränkt sich ein zu

$$\{\text{irred. abg. Teilmengen } \subseteq \mathbb{A}^n\} \overset{1:1}{\leftrightarrow} \{\text{Primideale in } k[\underline{T}]\}$$

1.8 Quasikompakte und noethersche topologische Räume

Definition 1.19. Ein topologischer Raum X heißt **quasikompakt**, falls jede offene Überdeckung von X eine *endliche* Teilüberdeckung enthält. („quasi“ deutet an, dass X in der Regel nicht Hausdorff'sch ist!). Er heißt **noethersch**, wenn jede absteigende Kette

$$X \supseteq Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \cdots$$

abgeschlossener Teilmengen von X stationär wird ($\Leftrightarrow$ jede aufsteigende Kette offener Teilmengen wird stationär).

Lemma 1.20. *Sei X ein noetherscher topologischer Raum. Dann gilt:*

(i) Jede abgeschlossene Teilmenge $Z \subseteq X$ ist noethersch.

(ii) Jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ ist quasikompakt.

(iii) Jeder abgeschlossene Teilraum $Z \subseteq X$ besitzt nur endlich viele irreduzible Komponenten.

Beweis.

(i) Nach Definition, da abgeschlossene Mengen von Z auch solche von X sind.

(ii) $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ offen; Angenommen U wäre nicht quasikompakt. Dann gibt es eine Folge $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I$ von Teilmengen mit

$$V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \neq U \quad \text{für } V_j = \bigcup_{i \in I_j} U_i.$$

Widerspruch zu noethersch.

(iii) Es reicht zu zeigen: Jeder noethersche Raum ist Vereinigung endlich vieler irreduzibler Teilmengen. Da X noethersch ist, folgt mit dem *Lemma von Zorn* dass jede nichtleere Menge von algebraischen Teilmengen in X ein minimales Element besitzt.

Angenommen: $\mathcal{M} := \{Z \subseteq X \text{ abg.} \mid Z \text{ ist } \textbf{nicht} \text{ endl. Vereinigung irred. Mengen}\}$ wäre nichtleer.

$\Rightarrow \exists$ minimales Element, sagen wir Z, in $\mathcal{M}$.

$\Rightarrow Z$ ist nicht irreduzibel.

$\Rightarrow Z = Z_1 \cup Z_2$ mit $Z_1, Z_2 \subsetneq Z$ abgeschlossen.

$\Rightarrow$ (Z minimal) $Z_1, Z_2 \notin \mathcal{M}$

$\Rightarrow Z \notin \mathcal{M}$. Widerspruch.

□

Satz 1.21. *Jeder abgeschlossene Teilraum $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ ist noethersch.*

Beweis. Nach dem obigen Lemma ist nur zu zeigen, dass $\mathbb{A}^n(k)$ noethersch ist.

Absteigende Ketten abgeschlossener Teilmengen sind nach *Korollar 1.11* in 1-1 Korrespondenz mit aufsteigenden Ketten von (Radikal-)Idealen in $k[\underline{T}]$. Da $k[\underline{T}]$ nach dem Hilbertschen Basissatz noethersch ist, werden letzere Ketten stationär. □

Korollar 1.22 (Primärzerlegung)**.** *Sei* $\mathfrak{a} = \operatorname{rad}(\mathfrak{a}) \trianglelefteq k[\underline{T}]$ *ein Radikalideal. Dann gilt:* $\mathfrak{a}$ *ist Durchschnitt von endlich vielen Primidealen, die sich jeweils paarweise nicht enthalten; diese Darstellung ist eindeutig bis auf Reihenfolge.*

Beweis. $V(\mathfrak{a}) = \bigcup_{i=1}^n V(\mathfrak{b}_i)$, $\mathfrak{b}_i$ Primideal. [Anmerkung] Mit Satz 1.10 folgt:

$$\mathfrak{a} = \operatorname{rad}(\mathfrak{a}) = I(V(\mathfrak{a})) = \bigcap_{i=1}^{n} \underbrace{I(V(\mathfrak{b}_i))}_{\mathfrak{b}_i \text{ minimale Primideale (1.17)}}$$

□

1.9 Morphismen von affinen algebraischen Mengen

Definition 1.23. Seien $X \subseteq \mathbb{A}^m(k)$, $Y \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine algebraische Mengen. Ein **Morphismus** $X \to Y$ affiner algebraischer Mengen ist eine Abbildung $f : X \to Y$ der zugrundeliegenden Mengen, sodass $f_1, \dots, f_n \in k[T_1, \dots, T_m]$ existieren, derart dass $\forall x \in X$ gilt:

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in Y.$$

Es bezeichne $\hom(X, Y)$ die Menge der Morphismen $X \to Y$.

Bemerkung 1.24. $f : X \to Y$ lässt sich immer fortsetzen zu einem Morphismus

$$f : \mathbb{A}^m(k) \to \mathbb{A}^n(k),$$

aber nicht eindeutig, es sei denn $X = \mathbb{A}^m(k)$.

Komposition

$$X \xrightarrow[f_1,\dots,f_n \in k[T_1,\dots,T_m]]{f} Y \xrightarrow[g_1,\dots,g_r \in k[T'_1,\dots,T'_m]]{g} Z$$

mit $X \subseteq \mathbb{A}^m(k)$, $Y \subseteq \mathbb{A}^n(k)$, $Z \subseteq \mathbb{A}^r(k)$. Es folgt:

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= (g_1(f_1(x), \dots, f_n(x)), \dots, g_r(f_1(x), \dots, f_n(x)) \\ &=: (h_1(x), \dots, h_r(x)) \end{aligned}$$

d.h. $g \circ f$ ist durch Polynome $h_i \in k[T_1, \dots, T_m]$ gegeben, also ist $g \circ f$ wieder ein Morphismus affiner algebraischer Mengen. Wir erhalten die **Kategorie affiner algebraischer Mengen**.

Beispiel 1.25.

(i) Sei die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^1(k) &\to V(T_2 - T_1^2) \subseteq \mathbb{A}^2(k) \\ x &\mapsto (x, x^2). \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist sogar ein *Isomorphismus* affiner algebraischer Mengen, da die Umkehrabbildung

$$(x, y) \mapsto x$$

ebenfalls ein Morphismus ist.

(ii) Sei $\operatorname{char}(k) \neq 2$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^1(k) &\to V(T_2^2 - T_1^2(T_1 + 1)) \\ x &\mapsto (x^2 - 1, x(x^2 - 1)) \end{aligned}$$

ist ein Morphismus, aber *nicht* bijektiv, da $1, -1$ beide auf $(0, 0)$ abgebildet werden.

1.10 Unzulänglichkeiten des Begriffs der affinen algebraischen Mengen

(i) Offene Teilmengen affiner algebraischer Mengen tragen nicht in natürlicher Weise die Struktur einer affinen algebraischen Menge.

(ii) Insbesondere können wir affine algebraische Mengen nicht entlang offener Teilräume verkleben. (vgl. Mannigfaltigkeiten.)

(iii) Keine Unterscheidungsmöglichkeiten z.B. zwischen $\{(0,0)\}$, $V(T_1) \cap V(T_2)$ und $V(T_2) \cap V(T_1^2 - T_2) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$, obwohl die "geometrische Situation" offensichtlich verschieden ist.

Um die Punkte 1 und 2 zu verbessern, gehen wir im Folgenden zu "Räumen mit Funktionen" über, und verzichten darauf, dass sich diese in einen affinen Raum $\mathbb{A}^n(k)$ einbetten lassen.

Der Punkt 3 ist eine Motivation dafür, später Schemata einzuführen. (subtiler)

Affine algebraische Mengen als Räume von Funktionen

1.11 Der affine Koordinatenring

Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ abgeschlossen. Für den surjektiven (Def. von Morphismen) k-Algebren-Homomorphismus

$$\begin{aligned} k[\underline{T}] &\xrightarrow{\varphi} \hom(X, \mathbb{A}^1(k)) \\ f &\mapsto (x \mapsto f(x)), \end{aligned}$$

wobei die Morphismen in folgende Weise eine k-Algebra bilden:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &:= f(x) + g(x) \\ (fg)(x) &:= f(x)g(x) \\ (\alpha f)(x) &:= \alpha f(x) \end{aligned}$$

mit $f, g \in \hom(X, \mathbb{A}^1(k))$, $\alpha \in k$, gilt:

$$\ker \varphi = I(X).$$

Definition 1.26. $\Gamma(X) := k[\underline{T}]/I(X) \cong_{k-\mathrm{Alg}} \hom(X, \mathbb{A}^1(k))$ heißt der **affine Koordinatenring** von X.

Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_x &:= \ker(\Gamma(X) \twoheadrightarrow k,\ f \mapsto f(x)) \\ &= \{f \in \Gamma(X) \mid f(x) = 0\} \\ &= \pi((T_1 - x_1, \ldots, T_n - x_n)) \\ &= \ker(\Gamma(\mathbb{A}^n(k)) \twoheadrightarrow k) \end{aligned}$$

unter der Projektion $\pi : k[\underline{T}] = \Gamma(\mathbb{A}^n(k)) \twoheadrightarrow \Gamma(X)$. Es ist $\mathfrak{m}_x$ ein maximales Ideal von $\Gamma(X)$ mit $\Gamma(X)/\mathfrak{m}_x \cong k$. Für ein Ideal $\mathfrak{a} \trianglelefteq \Gamma(X)$ sei

$$V(\mathfrak{a}) := \{x \in X \mid f(x) = 0\ \forall f \in \mathfrak{a}\} = V(\pi^{-1}(\mathfrak{a})) \cap X.$$

Dies sind genau die abgeschlossenen Mengen von X als Teilraum von $\mathbb{A}^n(k)$ mit der induzierten Topologie, diese wird auch **Zariski-Topologie** genannt. Für $f \in \Gamma(X)$ setze:

$$D_X(f) := D(f) := \{x \in X \mid f(x) \neq 0\} = X \setminus V(f).$$

Lemma 1.27. *Die offenen Mengen $D(f)$, $f \in \Gamma(X)$, bilden eine Basis der Topologie von X, d.h.*

$$\forall U \subseteq X \text{ offen } \exists f_i \in \Gamma(X),\ i \in I \quad \text{mit } U = \bigcup_{i \in I} D(f_i)$$

Beweis. $U = X \backslash V(\mathfrak{a})$ für ein $\mathfrak{a} \trianglelefteq \Gamma(X)$, $\mathfrak{a} = \langle f_1, \ldots, f_n \rangle_{\Gamma(X)}$. Wegen

$$V(\mathfrak{a}) = \bigcap_{i=1}^{n} V(f_i) \quad \Rightarrow \quad U = \bigcup_{i=1}^{n} D(f_i)$$

Es reichen also sogar endlich viele $f_i \in \Gamma(X)$! □

Satz 1.28. *Der Koordinatenring* $\Gamma(X)$ *einer affinen algebraischen Menge* X *ist eine endlich erzeugte* k*-Algebra, die reduziert ist (d.h. keine nilpotenten Elemente* $\neq 0$ *enthält). Ferner ist* X *irreduzibel genau dann, wenn* $\Gamma(X)$ *integer ist.*

Beweis. $k[\underline{T}] \twoheadrightarrow \Gamma(X)$ impliziert, dass $\Gamma(X)$ als k-Algebra endlich erzeugte ist. Es gilt:

$$\Gamma(X) \text{ irreduzibel } \Leftrightarrow I(X) = \operatorname{rad} I(X).$$

Denn mit Satz 1.10.(ii) und Korollar 1.11 folgt:

$$X = V(\mathfrak{a}) : \ I(X) = \operatorname{rad} \mathfrak{a}$$
$$\Rightarrow \operatorname{rad} I(X) = \operatorname{rad} \operatorname{rad} \mathfrak{a} = \operatorname{rad} \mathfrak{a} = I(X).$$

Mit Lemma 1.17 folgt: X irreduzibel
$\Leftrightarrow I(X)$ prim
$\Leftrightarrow \Gamma(X) = k[\underline{T}]/I(X)$ integer. □

1.12 Funktorielle Eigenschaften von $\Gamma(X)$

Satz 1.29. *Für einen Morphismus $X \xrightarrow{f} Y$ affiner algebraischer Mengen definiert*

$$\begin{aligned} \Gamma(f): \quad \Gamma(Y) &\to \Gamma(X) \\ g &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

ein Homomorphismus von k-Algebren. Der so definierte kontravariante *Funktor*

$$\Gamma : \{\textit{affine algebraische Mengen}\} \to \{\textit{reduzierte endl. erz. } k\textit{-Algebren}\}$$

liefert eine Kategorienäquivalenz, welche durch Einschränkung eine Äquivalenz

$$\Gamma : \{\textit{irred. aff. alg. Mengem}\} \to \{\textit{integre endl. erz. } k\textit{-Algebren}\}$$

induziert.

Beweis. Sei $Y \xrightarrow{g} \mathbb{A}^1(k) \in \Gamma(Y)$ ein Morphismus. Es folgt:

$$g \circ f : X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} \mathbb{A}^1(k)$$

ist Morphismus, d.h. $g \circ f \in \Gamma(X)$. $\Gamma(f) : \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$ ist ein k-Algebren-Homomorphismus mit $\Gamma(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\Gamma(X)}$. Da ferner gilt, dass $\Gamma(f_1 \circ f_2) = \Gamma(f_2) \circ \Gamma(f_1)$ ist Γ ein kontravarianter Funktor.

Behauptung. Γ ist volltreu, d.h.

$$\begin{aligned} \Gamma : \hom(X,Y) &\to \hom_{k\text{-Alg}}(\Gamma(Y), \Gamma(X)) \\ f &\mapsto \Gamma(f) \end{aligned}$$

ist *bijektiv* für alle affinen algebraischen Mengen X, Y.

Beweis. Wir konstruieren eine Umkehrabbildung wie folgt: Zu $\varphi : \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$ für $X \subseteq \mathbb{A}^m(k)$, $Y \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ existiert ein Lift $\tilde{\varphi}$, s.d.

$$\begin{tikzcd} k[T_1', \dots, T_n'] \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] \arrow[d, two heads] & k[T_1, \dots, T_m] \arrow[d, two heads] \\ \Gamma(Y) \arrow[r, "\varphi"] & \Gamma(X) \end{tikzcd}$$

kommutiert; $\tilde{\varphi}(T_i') := f_i$ mit $f_i \in \pi^{-1}(\varphi(T_i')) \subseteq k[T_1, ..., T_n]$, wobei $\pi : k[\underline{T}] \to \Gamma(X)$ die kanonische Projektion bezeichne. Definiere:

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (\tilde{\varphi}(T_1')(x_1, \dots, x_n), \dots, \tilde{\varphi}(T_n')(x_1, \dots, x_n)) \end{aligned}$$

$\square$

Behauptung. Γ ist essentiell surjektiv, d.h. zu jeder reduzierten endlich erzeugten k-Algebra A existiert eine affine algebraische Menge X mit $A \cong \Gamma(X)$.

Beweis. Da nach Voraussetzung $A \cong k[T]/\mathfrak{a}$ für ein Radikalideal $\mathfrak{a}$, können wir etwa $X := V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ setzen. Der Rest folgt aus Satz 1.28. $\square$

$\square$

Satz 1.30. *Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus affiner algebraischer Mengen und $\Gamma(f) : \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$ der zugehörige Homomorphismus der Koordinatenringe. Dann gilt $\forall x \in X\colon \Gamma(f)^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{m}_{f(x)}$.*

Beweis.

$$\Gamma(f)^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \{g \in \Gamma(Y) \mid g \circ f \in \mathfrak{m}_x\} = \{g \in \Gamma(Y) \mid g(f(x)) = 0\} = \mathfrak{m}_{f(x)},$$

da $\Gamma(f)(g) = g \circ f$. $\square$

1.13 Räume mit Funktionen

(Prototyp eines geometrischen Objektes, Spezialfall eines "geringten Raumes" vgl. später.) Sei K ein nicht notwendigerweise algebraisch abgeschlossener Körper.

Definition 1.31.

(i) Ein **Raum mit Funktionen**$_{/K}$ besteht aus den folgenden Daten:

- ein topologischer Raum X;
- eine Familie von Unter-K-Algebren

$$\mathcal{O}_X(U) \leq \mathrm{Abb}(U, K), \quad \forall U \subseteq X \text{ offen } d.d$$

1. Sind $U' \subseteq U \subseteq X$ offen und $f \in \mathcal{O}_X(U)$ so ist $f|_{U'} \in \mathcal{O}_X(U')$.
2. (**Verklebungsaxiom**) Sind $U_i \subseteq X$ offen, $i \in I$, und $U = \bigcup_i U_i$, $f_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$, $i \in I$ gegeben mit
$$f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j} \quad \forall i, j \in I$$
dann ist die eindeutige Abbildung
$$f : U \to K \text{ mit } f|_{U_i} = f_i$$
in $\mathcal{O}_X(U)$, bzw. $\exists! f \in \mathcal{O}(U)$ mit $f|_{U_i} = f_i$ für alle $i \in I$.

Bezeichne $\mathcal{O}_X$ oder auch $\mathcal{O}$ die oben genannte Familie $\{\mathcal{O}_X(U) \mid U \subseteq X \text{offen}\}$. Das Tupel $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt **Raum mit Funktionen**.

(ii) Ein **Morphismus** $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ von Räumen von Funktionen ist eine stetige Abbildung $\varphi : X \to Y$, so dass für alle $V \subseteq Y$ offen und $f \in \mathcal{O}_Y(V)$ gilt:

$$f \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(V)} : \varphi^{-1}(V) \to K$$

liegt in $\mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(V))$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi"] & Y \\
\varphi^{-1}(V) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\varphi|"] \arrow[d, "f \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(V)}"'] & V \arrow[u, hook, "\text{offen}"'] \arrow[d, "f"] \\
K \arrow[r, equal] & K
\end{tikzcd}$$

Wir erhalten die Kategorie der *Räume mit Funktionen über K*.

Definition 1.32 (offene Unterräume von Räumen mit Funktionen)**.** Für $(X, \mathcal{O}_X)$ einen Raum mit Funktionen und $U \subseteq X$ offen bezeichne $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ den Raum mit Funktionen gegeben durch den topologischen Raum U mit Funktionen $\mathcal{O}_X|_U(V) := \mathcal{O}_X(V)$ für $V \underset{\text{offen}}{\subseteq} U \subseteq X$.

Ab jetzt betrachten wir Räume von Funktionen über einem fixierten, algebraisch abgeschlossenen Grundkörper k.

1.14 Der Raum mit Funktionen zu einer affin-algebraischen Menge

Ziel. Wir wollen jeder irreduziblen affin algebraischen Menge $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ einen Raum mit Funktionen $(X, \mathcal{O}_X)$ zuordnen. D.h. wir müssen Mengen von Funktionen $\mathcal{O}_X(U) \leq \mathrm{Abb}(U, k)$, $U \subseteq X$ offen, definieren. Diese werden als Teilmengen des Funktionenkörpers $K(X)$ definiert (dazu X irreduzibel, später bei Schemata fällt diese Bedingung weg!)

Definition 1.33. Für eine irreduzible, affin-algebraische Menge X heißt $K(X) := \mathrm{Quot}(\Gamma(X))$ **Funktionenkörper** von X.

Elemente $\frac{f}{g} \in K(X)$, $f, g \in \Gamma(X) = \hom(X, \mathbb{A}^1(k))$, $g \neq 0$ lassen sich zumindest als Funktion auf der offenen Menge $D(g) \subseteq X$ auffassen, wenn auch i.A. nicht auf ganz X.

Lemma 1.34. *Gilt für $\frac{f_1}{g_1}, \frac{f_2}{g_2} \in K(X)$, $f_i, g_i \in \Gamma(X)$, und einer offenen Teilmenge $\emptyset \neq U \subseteq D(g_1 g_2)$*

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \qquad \forall x \in U,$$

dann folgt $\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2}$ in $K(X)$.

Beweis. Sei ohne Einschränkung der Allgemeinheit $g_1 = g_2 = g$. (Sonst Erweitern!)

$\Rightarrow (f_1 - f_2)(x) = 0 \ \forall x \in U$.

$\Rightarrow \emptyset \neq U \subseteq V(f_1 - f_2) \subseteq X$ dicht, d.h. $V(f_1 - f_2) = X$.

$f_1 - f_2 \in I()V(f_1 - f_2)) = I(X) \equiv (0)$ in $\Gamma(X)$

$\Rightarrow f_1 - f_2 = 0$. $\square$

Definition 1.35. Sei X eine irreduzible affin-algebraische Menge, $U \subseteq X$ offen. Für $x \in X$ bezeichne $\Gamma(X)_{\mathfrak{m}_x}$ die Lokalisierung von $\Gamma(X)$ an der multiplikativ abgeschlossenen Menge $S := \Gamma(X) \setminus \mathfrak{m}_x$.

$$\mathcal{O}_X(U) := \bigcap_{x \in U} \Gamma(X)_{\mathfrak{m}_x} \subseteq K(X)$$

d.h. für jedes $x \in U$ lässt sich $f \in \mathcal{O}_X(U)$ schreiben als $\frac{h}{g} \in K(X)$ mit $g(x) \neq 0$.

Für $f \in \Gamma(X)$ bezeichne $\Gamma(X)_f$ die Lokalisierung von $\Gamma(X)$ an der multiplikativ abgeschlossenen Menge $\{1, f, f^2, \ldots, f^n \ldots\}$. Dann lässt sich

$$\Gamma(X)_{\mathfrak{m}_x} = \bigcup_{f \in \Gamma(X) \setminus \mathfrak{m}_x} \Gamma(X)_f \subseteq K(X)$$

schreiben. “$\supseteq$”: klar, “$\subseteq$”: $\frac{g}{f}$ mit $f(x) \neq 0$ d.h. $f \notin \mathfrak{m}_x \Rightarrow \frac{g}{f} \in \Gamma(X)_f$.

Es gilt:

(i) Für $V \subseteq U \subseteq X$ offen kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(V) \arrow[r, hook] & \mathrm{Abb}(V,k) \\
\mathcal{O}_X(U) \arrow[r, hook] \arrow[u, hook] & \mathrm{Abb}(U,k) \arrow[u, "\text{Einschränkungsabb.}"']
\end{tikzcd}$$

mit $\mathcal{O}_X(U) \hookrightarrow \mathcal{O}_X(V), f \mapsto f|_V$ nach Definition.

(ii) $\mathcal{O}_X(U) \to \mathrm{Abb}(U,k)$, $f \mapsto (x \mapsto f(x) := \frac{g(x)}{f(x)} \in k)$ ist injektiv (Lemma 1.34) und wohldefiniert (kürzen/erweitern), wobei $g, h \in \Gamma(X)$ mit $h \notin \mathfrak{m}_x$ mit $f = \frac{g}{h}$ nach Definition von $\mathcal{O}_X(U)$ existiert.

(iii) **Verklebungseigenschaft.** Sei $U = \bigcup_{i \in I} U_i$. Nach Definition ist

$$\mathcal{O}_X(U) = \bigcap_i \mathcal{O}_X(U_i) \subseteq K(X)$$
$$\ni f : U \to k \qquad \ni f_i : U_i \to k$$

[Diagramm fehlt]. $(X, \mathcal{O}_X)$ ist Raum mit Funktionen, **der zur irreduziblen affin algebraische Menge assoziierte Raum von Funktionen**.

Satz 1.36 (orig. 33)**.** *Für $(X, \mathcal{O}_X)$ zu X wie oben und $f \in \Gamma(X)$ gilt:*

$$\mathcal{O}_X(D(f)) = \Gamma(X)_f,$$

insbesondere $\mathcal{O}_X(X) = \Gamma(X)$.

Beweis. $\Gamma(X)_f \subseteq \mathcal{O}_X(D(f))$ klar, da $f(x) \neq 0 \ \forall x \in D(f)$ bzw. $f \in \Gamma(X) \setminus \mathfrak{m}_x$.

Sei nun g in $\mathcal{O}_X(D(f))$ gegeben, $(*)$ und $\mathfrak{a} := \{h \in \Gamma(X) \mid hg \in \Gamma(X)\} \trianglelefteq \Gamma(X)$.

Dann gilt: $g \in \Gamma(X)_f$

$\Leftrightarrow g = \frac{k}{f^n}$ für ein n und $k \in \Gamma(X)$

$\Leftrightarrow f^n \in \mathfrak{a}$ für ein n.

d.h. zu zeigen: $f \in \mathrm{rad}(\mathfrak{a}) = I(V(\mathfrak{a}))$ (Hilbertscher Nullstellensatz)

$\Leftrightarrow f(x) = 0 \ \forall x \in V(\mathfrak{a})$

Ist dazu $x \in X$ mit $f(x) \neq 0$, also $x \in D(f)$, so existieren wegen $g \in \mathcal{O}_X(D(f))$ Funktionen $f_1, f_2 \in \Gamma(X)$, $f_2 \notin \mathfrak{m}_x$ mit $g = \frac{f_1}{f_2}$, also gilt $f_2 \in \mathfrak{a}$.

Da $f_2(x) \neq 0$ folgt weiter $x \notin V(\mathfrak{a})$. □

Bemerkung 1.37 (orig. 34).

(i) Im Allgemeinen existieren für $f \in \mathcal{O}_x(U)$ **nicht notwendigerweise** $g, h \in \Gamma(X)$ mit $f = \frac{g}{h}$ und $h(x) \neq 0 \ \forall x \in U$.

(ii) **Alternative Definition von $\mathcal{O}_X$, I.**

$$\mathcal{O}_X(D(f)) := \Gamma(X)_f, \quad \forall f \in \Gamma(X).$$

Da $(D(f))_{f \in \Gamma(X)}$ Basis der Topologie bildet, kann es höchstens einen Raum mit Funktionen mit dieser Eigenschaft geben, es bleibt die Existenz zu zeigen.

(iii) **Alternative Definition von $\mathcal{O}_X$, II.**

Direkt von einer integeren endlich erzeugten k-Algebra A ausgehend (die X bis auf Isomorphie festlegt), aber ohne "Koordinaten" zu wählen.

$$X := \{\mathfrak{m} \trianglelefteq A \mid \ \mathfrak{m} \text{ ist max. Ideal}\}$$

Die **abgeschlossenen Mengen** sind gegeben durch:

$$V(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{m} \in X \mid \mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{a}\}, \quad \mathfrak{a} \trianglelefteq A \text{ Ideal.}$$

$\mathcal{O}_X(U) := \bigcap_{\mathfrak{m} \in U} A_{\mathfrak{m}} \subseteq \operatorname{Quot}(A)$ für $U \subseteq X$ offen (vgl. später Schemata).

1.15 Funktorialität der Konstruktion

Satz 1.38 (orig. 35). *Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen irreduziblen affin-algebraischen Mengen. Es sind äquivalent:*

(i) *f ist ein Morphismus affin-algebraischer Mengen.*

(ii) *$\forall g \in \Gamma(Y)$ gilt $g \circ f \in \Gamma(X)$.*

(iii) *f ist ein Morphismus von Räumen von Funktionen, d.h. für alle $U \subseteq Y$ offen und alle $g \in \mathcal{O}_Y(U)$ gilt $g \circ f \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$.*

Beweis.

- *(i)* $\Leftrightarrow$ *(ii)*

  Folgt aus Satz 1.29.

- *(iii)* $\Rightarrow$ *(ii)*

  $U := Y$ und Satz 1.36.

- *(ii)* $\Rightarrow$ *(iii)*

  Betrachte $\Gamma(f) : \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$, $h \mapsto h \circ f$. Aufgrund des Verklebungsaxioms reicht es, die Bedingung für U von der Form $D(g)$ zu zeigen; hier gilt:

  $$f^{-1}(D(g)) = \{x \in X \mid \underbrace{g(f(x))}_{=\Gamma(f)(g)(x)} \neq 0\} = D(g \circ f)$$

  Deswegen induziert $\Gamma(f)$:

  $$\begin{array}{ccc} h & \longmapsto & h \circ f \\ \mathcal{O}_Y(D(g)) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(D(g \circ f)) \\ \shortparallel & & \\ \Gamma(Y)_g & \longrightarrow & \Gamma(X)_{g \circ f} \\ \dfrac{h}{g^n} & \longmapsto & \dfrac{h \circ f}{(g \circ f)^n} \end{array}$$

  mit $h \circ f, g \circ f \in \Gamma(X)$ nach Voraussetzung.

$\square$

Insgesamt erhalten wir:

Theorem 1.39 (orig. 36). *Die obige Konstruktion definiert einen volltreuen Funktor*

$$\{\textit{irreduzible aff. alg. Mengen über } k\} \to \{\textit{Räume mit Funktionen über } k\}.$$

Prävarietäten

Ziel. Klasse der affin-algebraischen Mengen, aufgefasst als Räume mit Funktionen durch Verkleben vergrößern.

$(X, \mathcal{O}_X)$ heißt **zusammenhängend**, falls X als topologischer Raum zusammenhängend ist.

1.16 Definition von Prävarietäten

Definition 1.40 (orig. 37)**.** Eine **affine Varietät** ist ein Raum mit Funktionen, der isomorph zu dem Raum mit Funktionen assoziiert zu einer irreduziblen affin-algebraischen Menge ist.

Definition 1.41 (orig. 38)**.** Eine **Prävarietät** ist ein zusammenhängender Raum mit Funktionen $(X, \mathcal{O}_X)$, für den eine *endliche* Überdeckung $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$ durch offene Teilmengen $U_i \subseteq X$ existiert, d.d. $\forall i = 1, \ldots, n$ $(U_i, \mathcal{O}_{X|_{U_i}})$ eine affine Varietät ist. Insbesondere sind affine Varietäten Prävarietäten!

Ein **Morphismus von Prävarietäten** ist ein Morphismus der entsprechenden Räume mit Funktionen.

Später sehen wir: Varietät = „separierte Prävarietät“. Affine Varietäten sind stets „separiert“, daher braucht man nicht von „affinen Prävarietäten“ zu reden. Ist X eine affine Varietät, so schreiben wir oft $\Gamma(X)$ für $\mathcal{O}_X(X)$ (vgl. Satz 1.36).

Unter einer **offenen affinen Überdeckung** einer Prävarietät X verstehen wir eine Famile von offenen affinen Unterräumen mit Funktionen $U_i \subseteq X$, $i \in I$ die affine Varietäten sind, d.d. $X = \bigcup_i U_i$.

1.17 Vergleich mit differenzierbaren/komplexen Mannigfaltigkeiten

Differential/Komplexe Geometrie Mannigfaltigkeiten werden via Kartenabbildungen mit differenzierbaren/holomorphen Übergangsabbildungen definiert (hier problematisch, da offene Teile affiner algebraischer Mengen i.A. keine solche Struktur besitzen.) Jedoch:

$$\begin{aligned}\{\text{differenzierbare Mfgkt.}\} &\longrightarrow \{\text{Räume mit Fkt.}/\mathbb{R}\}\\ X &\longmapsto (X, \mathcal{O}_X)\\ &\qquad \mathcal{O}_X(U) := C^\infty(U, \mathbb{R}),\ U \subseteq X \text{ offen}\end{aligned}$$

ist ein volltreuer Funktor. Daher kann man differenzierbare Mannigfaltigkeiten auch als diejenigen Räume mit Funktionen über $\mathbb{R}$ definieren, für die X Hausdorff ist, und so dass eine offene Überdeckung durch solche Räume mit Funktionen über $\mathbb{R}$ existiert, die in obiger Weise offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ zugeordnet sind. (Analog bei komplexen Mannigfaltigkeiten.)

1.18 Topologische Eigenschaften von Prävarietäten

Lemma 1.42. *Für einen topologischen Raum X und $U \subseteq X$ offen haben wir eine Bijektion*

$$\begin{aligned}\{Y \subseteq U \text{ irred. abg.}\} &\longleftrightarrow \{Z \subseteq X \text{ irred. abg. mit } Z \cap U \neq \emptyset\}\\ Y &\longmapsto \overline{Y} \text{ (Abschluss in } X)\\ Z \cap U &\longleftarrow Z\end{aligned}$$

Beweis. Lemma 1.14: $Y \subseteq X$ irreduzibel $\Leftrightarrow \overline{Y} \subseteq X$ irreduzibel.

$Y \subseteq U$ abgeschlossen $\Leftrightarrow \exists A \subseteq X$ abgeschlossen: $Y = U \cap A$.

$\Rightarrow Y \subseteq \overline{Y} \subseteq A \Rightarrow Y = U \cap \overline{Y}$

Y irreduzibel in $U \Rightarrow Y$ irreduzibel in X

$\Rightarrow \overline{Y}$ irreduzibel nach 1.14

$\Rightarrow Y \mapsto \overline{Y} \mapsto \overline{Y} \cap U = Y$. ✓

$\emptyset \neq Z \cap U \subseteq Z$ damit dicht da Z irreduzibel (Satz 1.13 ii. und v.)

Also ist die Abbildung $\leftarrow$ wohldefiniert.

$\Rightarrow \overline{Z \cap U} = Z$ □

Satz 1.43. *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ eine Prävarietät.*
Dann ist X noethersch (insbesondere quasikompakt) und irreduzibel.

Beweis. Sei $X = \bigcup_{i=1}^n$ endliche offene aff. Überdeckung und $X \supseteq Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \cdots$ eine absteigende Kette abgeschlossener Teilmengen.

$\Rightarrow U_i \cap Z_1 \supseteq U_i \cap Z_2 \supseteq \cdots$, ist eine absteigende Kette abgeschlossener Teilmengen von U_i

$\Rightarrow \forall i\ \exists n_i \in \mathbb{N}$: $U_i \cap Z_{n_i} = U_i \cap Z_{i+m}$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Setzen wir $n := \max n_i$, so folgt:

$\forall i = 1, \dots, n\ \forall m \geq n$: $U_i \cap Z_m = U_i \cap Z_{m+1}$

$\Rightarrow (Z_i)_i$ wird stationär da $Z_m = \bigcup_i U_i \cap Z_m$.

X ist demnach noethersch.

X ist weiter irreduzibel:

Sei $X = X_1 \cup \cdots \cup X_n$ die Zerlegung in irreduzible Komponenten.

Angenommen es wäre $n \geq 2$.

$\Rightarrow \exists i_0 \in \{2, \dots, n\}$: $X_1 \cap X_{i_0} \neq \emptyset$. (Andernfalls gilt: $X = X_1 \sqcup \underbrace{X \setminus X_1}_{= X_2 \cup \cdots \cup X_n \text{ abg.}}$, im Widerspruch dazu, dass X zusammenhängend ist.)

Sei ohne Einschränkung $i_0 = 2$. Sei $x \in X_1 \cap X_2$, $x \in U \subseteq X$ offen, affin (d.h. affine Varietät).

U irreduzibel $\Rightarrow \overline{U}$ (Abschluss in X) $\subseteq X_j$ für ein $j \in \{1, \dots, n\}$

Jedoch: Da $x \in X_i \cap U \subseteq U$ irreduzibel ist, ist $\underbrace{\overline{X_i \cap U}}_{\subseteq \overline{U} \subseteq X_i} = X_i$, $i = 1, 2$

$\Rightarrow X_1, X_2 \subseteq X_j$. Widerspruch zu maximale Komponente. □

1.19 Offene Untervarietäten

Offene Teilmengen von affinen Varietäten (und allgemeiner beliebigen Prävarietäten) sind wieder Prävarietäten. (aber i.A. nicht affin!)

Lemma 1.44 (orig. 41)**.** *Sei X eine affine Varietät, $f \in \mathcal{O}_X(X)$, $D(f) \subseteq X$. Die Lokalisierung von $\Gamma(X) = \mathcal{O}_X(X)$ an f,*

$$\Gamma(X)_f = \Gamma(X)[T]/(Tf - 1)$$

ist eine integre, endlich erzeugte k-Algebra. $(Y, \mathcal{O}_Y)$ bezeichne die zugehörige affine Varietät. Dann gilt:

$$(D(f), \mathcal{O}_X|_{D(f)}) \cong (Y, \mathcal{O}_Y)$$

als Räume mit Funktionen, d.h. $(D(f), \mathcal{O}_{X|_{D(f)}})$ ist selbst affine Varietät.

Beweis. $\mathcal{O}_X(D(f)) = \mathcal{O}_X(X)_f$ muss affiner Koordinatenring von $(D(f), \mathcal{O}_{X|_{D(f)}})$ sein, wenn letzterer Raum von Funktionen affin ist. $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ korrespondiert zu dem Radikalideal:

$$\mathfrak{a} := I(X) \trianglelefteq k[T_1, \dots, T_n] \;\subseteq\; \mathfrak{a}' := (\mathfrak{a}, fT_{n+1} - 1) \subseteq k[T_1, \dots, T_{n+1}]$$

mit Koordinatenringen:

$$\begin{aligned}
\Gamma(X) &= k[T_1, \dots, T_n]/\mathfrak{a} \\
\Gamma(Y) &= \Gamma(X)_f = (k[T_1, \dots, T_n]/\mathfrak{a})[T_{n+1}]/(T_{n+1}f - 1) \\
&\cong k[T_1, \dots, T_{n+1}]/\mathfrak{a}'
\end{aligned}$$

Für $Y = V(\mathfrak{a}') \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(k)$ induziert die Abbildung

$$\begin{array}{ccc}
Y \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(k) & (x_1, \dots, x_{n+1}) & T_i \\
\downarrow & \downarrow & \uparrow \\
X \subseteq \mathbb{A}^n(k) & (x_1, \dots, x_n) & T_i
\end{array}$$

eine Bijektion $Y \xrightarrow{j} D_X(f)$ mit Umkehrabbildung $(x_0, \dots, x_n, \frac{1}{f(x_0,\dots,x_n)}) \leftarrow\!\shortmid (x_0, \dots, x_n)$

Behauptung. j ist Isomorphismus von Räumen mit Funktionen:

(i) j ist *stetig* (als Einschränkung einer stetigen Abbildung) ✓

(ii) j ist *offen*: Für $\frac{g}{f^n} \in \Gamma(X)_f = \Gamma(Y)$ mit $g \in \Gamma(X)$ gilt

$$\begin{aligned}
j\left(D_Y\left(\frac{g}{f^n}\right)\right) &= j\left(D_Y(gf)\right) && f \text{ Einheit} \\
&= D_X(gf) \text{ offen}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow j$ Homömorphismus.

(iii) j induziert $\forall g \in \Gamma(X)$ Isomorphismen:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X(D(fg)) &\longrightarrow \Gamma(Y)_g \\ s &\longmapsto s \circ j \end{aligned}$$

mit $\mathcal{O}_X(D(fg)) = \Gamma(X)_{fg} = \Gamma(X)_f)_g = \Gamma(Y)_g$. Mit dem Verklebungsaxiom folgt: j ist Morphismus von Räumen mit Funktionen.

$\square$

Satz 1.45 (orig. 42)**.** *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ Prävarietät, $\emptyset \neq U \subseteq X$ offen. Dann ist $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ eine Prävarietät und $U \hookrightarrow X$ ist Morphismus von Prävarietäten.*

Beweis. X ist irreduzibel, also folgt mit Satz 1.13, dass U zusammenhängend ist. Nach Voraussetzung besitzt $X = \bigcup_i X_i$ eine affine, offene Überdeckung. Es folgt:

$$U = \bigcup_i (\underbrace{X_i \cap U}_{\text{offen in } X_i}) = \bigcup_{i,j} D_{X_i}(f_{i,j})$$

und $D_{X_i}(f_{i,j})$ ist eine affine Varietät nach Lemma 1.44. Da X noethersch ist, folgt mit Lemma 1.20, dass U quasikompakt ist.

$\Rightarrow$ Es existiert eine endliche Teilüberdeckung, also ist U Prävarietät. ✓

Die kanonische Inklusion $i : U \hookrightarrow X$ ist sicher stetig. Für $f \in \mathcal{O}_X(V), V \subseteq X$ offen gilt mit dem Einschränkungsaxiom

$$\mathcal{O}_X|_U(U \cap V) = \mathcal{O}_X(U \cap V) \ni f \circ i = f|_{U \cap V}$$

Also ist i Morphismus von Prävarietäten. $\square$

Die offenen affinen Teilmengen einer Prävarietät X ($\hat{=} U \subseteq X$ offen mit $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ affine Varietät) bilden eine Basis der Topologie von X, da X durch offene affine Untervarietäten überdeckt wird und letzere diese Eigenschaft nach Lemma 1.44 haben.

1.20 Funktionenkörper einer Prävarietät

Definition 1.46 (orig. 43)**.** Für eine Prävarietät X sind die rationalen Funktionenkörper aller nicht-leeren affin-offenen Teilmengen in natürlicher Weise zu einander isomorph. Diesen Körper $K(X)$ nennen wir den **rationalen Funktionenkörper**von X.

Beweis. $\emptyset \neq U, V \subseteq X$ affine, offene Untervarietäten. Da X irreduzibel ist, gilt nach *Satz 1.13*:

$$\emptyset \neq U \cap V \subseteq U \text{ offen.}$$

Nach Definition von $\mathcal{O}_X$ ist

$$\mathcal{O}_X(U) \subseteq \mathcal{O}_X(U \cap V) \subseteq K(U) = \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_X(U)).$$

Das impliziert $\mathrm{Quot}(\mathcal{O}_X(U \cap V)) = K(U)$. Aus Symmetriegründen ist aber damit auch bereits $K(V) = \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_X(U \cap V))$. □

Bemerkung 1.47 (orig. 44)*.* Bildung des des Funktionenkörpers $K(\cdot)$ ist **nicht** funktoriell! Für $X \to Y$ Morphismus affiner Varietäten ist die Abbildung auf den Koordinatenringen $\Gamma(Y) \to \Gamma(X)$ i.A. **nicht** injektiv, induziert also keine Abbildung $K(Y) \hookrightarrow K(X)$.

Jedoch: Eine Isomorphie $X \xrightarrow{\sim} Y$ induziert $K(Y) \xrightarrow{\sim} K(X)$. Allgemeiner sei $X \xrightarrow{\varphi} Y$ Morphismus mit $\mathrm{im}(\varphi) \subseteq Y$ offen ($\Rightarrow$ dicht. Später: $X \xrightarrow{\varphi} Y$ **dominant**, gdw. $\mathrm{im}(\varphi) \subseteq Y$ dicht) induziert in funktioreller Weise eine Abbildung $K(Y) \hookrightarrow K(X)$.

Satz 1.48 (orig. 45)**.** *Sei X eine Prävarietät, $V \subseteq U \subseteq X$ offen. Dann gilt:*

(i) $\mathcal{O}_X(U) \subseteq K(X)$ ist k-Unteralgebra.

(ii) $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$ ist Inklusion von Teilmengen des Funktionenkörpers $K(X)$.

(iii) Insbesondere gilt für $U, V \subseteq X$ offen:

$$\mathcal{O}_X(U \cup V) = \mathcal{O}_X(U) \cap \mathcal{O}_X(V).$$

Beweis.

(ii) Sei $\mathcal{O}_X(X) \ni f : X \to k$. Dann ist $f^{-1}(0) \subseteq X$ abgeschlossen, da für $W \subseteq X$ affin-offen beliebig gilt, dass

$$f^{-1}(0) \cap W = V(f|_W).$$

Dazu macht man sich klar: „abgeschlossen“ ist eine lokale Eigenschaft, affin-offene W bilden eine Basis der Topologie.

$\Rightarrow \mathcal{O}_X(U) \hookrightarrow \mathcal{O}_X(V)$, $f \mapsto f|_V$ ist injektiv für $\emptyset \neq V \subseteq U \subseteq X$ offen.
$\Rightarrow V \subseteq f^{-1}(0)$
$\Rightarrow f^{-1}(0) = U$
$\Rightarrow f \equiv 0$.

(i) $U \supseteq W$ affin-offene Untervarietät.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(W) \arrow[r, hook] & K(W) \text{ k-Algebren} \\
\mathcal{O}_X(U) \arrow[u, hook] \arrow[ur, hook, dashed] &
\end{tikzcd}$$

(iii) Wir haben folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{O}_X(U) \arrow[dr, hook] & \\
\mathcal{O}_X(U \cup V) \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \mathcal{O}_X(U \cap V) \\
& \mathcal{O}_X(V) \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

Nach dem Verklebungsaxiom ist die Sequenz

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X(U \cup V) \arrow[r] & \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{O}_X(V) \arrow[r] & \mathcal{O}_X(U \cap V) \\
& f \arrow[r, mapsto] & (f|_U, f|_V) & \\
& & (g,h) \arrow[r, mapsto] & g|_{U \cap V} - h|_{U \cap V}
\end{tikzcd}$$

exakt.

$\square$

1.21 Abgeschlossene Unterprävarietäten

Sei X eine Prävarietät, $Z \subseteq X$ abgeschlossen und irreduzibel.

Ziel. $(Z, \mathcal{O}'_Z)$ Raum von Funktionen erklären. Definiere dazu für $U \subseteq Z$ offen:

$$\mathcal{O}'_Z(U) := \{f \in \mathrm{Abb}(U,k) \mid \forall x \in U\ \exists x \in V \subseteq X \text{ offen},\ g \in \mathcal{O}_X(V) \text{ mit } f|_{U\cap V} = g|_{U\cap V}\}$$

Damit ist $(Z, \mathcal{O}'_Z)$ Raum von Funktionen (klar!) mit $\mathcal{O}'_X = \mathcal{O}_X$.

Lemma 1.49 (orig. 46)**.** *Seien $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine irreduzible, affin-algebraische Menge und $Z \subseteq X$ ein irreduzibler abgeschlossener Teilraum. Dann ist $(Z, \mathcal{O}_Z) = (Z, \mathcal{O}'_Z)$.*

Bezeichne ab jetzt stets $\mathcal{O}_Z$ für $\mathcal{O}_{Z'}$.

Beweis. $Z \subseteq X$ ist in beiden Fällen mit der Teilraumtopologie ausgestattet! Ferner wissen wir, dass der Morphismus $Z \hookrightarrow X$ affin-algebraischer Mengen einen Morphismus $(Z, \mathcal{O}_Z) \to (X, \mathcal{O}_X)$ von Prävarietäten induziert. Nach Definition von $\mathcal{O}'$ folgt dann:

$$\mathcal{O}'_Z(U) \subseteq \mathcal{O}_Z(U) \quad \text{für } U \subseteq Z \text{ offen, denn:}$$

Ist $f \in \mathcal{O}'_Z(U)$ und $x \in U$ so existieren nach Definition eine offene Umgebung $x \in V_x \subseteq X$ und ein $g \in \mathcal{O}_X(V_x)$ d.d. $f|_{U\cap V_x} = g|_{U\cap V_x}$. Damit gilt $g|_{Z\cap V_x} \in \mathcal{O}_Z(Z \cap V_x)$. Mit dem Verklebungsaxiom erhalten wir also $f \in \mathcal{O}_Z(U)$.

Sei $f \in \mathcal{O}_Z(U)$ und $x \in U$ beliebig. Es folgt: $\exists h \in \Gamma(Z)$ mit $x \in D(h) \subseteq U$ und

$$f|_{D(h)} = \frac{g}{h^n} \in \Gamma(Z)_h = \mathcal{O}_Z(D(h))$$

für $n \geq 0$ und $g \in \Gamma(Z)$ geeignet. Lifte $g, h \in \Gamma(Z) \twoheadleftarrow \Gamma(X)$ zu $\overline{g}, \overline{h} \in \Gamma(X)$ und setze $V := D(\overline{h}) \subseteq X$.

$\Rightarrow x \in V$, $\frac{\overline{g}}{\overline{h}^n} \in \mathcal{O}_X(D(\overline{h}))$ und $f|_{U\cap V} = \frac{\overline{g}}{\overline{h}^n}|_{U\cap V}$.

$\Rightarrow f \in \mathcal{O}'_Z(U)$. □

Korollar 1.50 (orig. 47)**.** *Wenn X eine Prävarietät ist, und $Z \subseteq X$ irreduzibel und abgeschlossen, dann ist $(Z, \mathcal{O}_Z)$ ebenfalls eine Prävarietät.*

Beweis. Es ist $X = \bigcup_i X_i$ für eine endliche affin-offene Überdeckung $(X_i)_i$. Damit ist

$$Z = \bigcup_i (Z \cap X_i) := \bigcup_i Z_i$$

mit $(Z_i, \mathcal{O}_{Z_i})$ affine Varietät nach Lemma 1.49. □

Beispiele (Projektiver Raum und projektive Varietäten)

1.22 Homogene Polynome

Definition 1.51 (orig. 48)**.** Ein Polynom $f \in k[X_0, \ldots, X_n]$ heißt **homogen vom Grad** $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, falls f die Summe von Monomen von Grad d ist. (Insbesondere ist für jedes d das Nullpolynom homogen von Grad d.)

Es bezeichne $k[X_0, \ldots, X_n]_d$ den k-Untervektorraum der Polynome **homogen vom Grad** d, $k[X_0, \ldots, X_n]_{\leq n}$ den k-Untervektorraum **aller Polynome vom Grad** $\leq n$.

Bemerkung 1.52 (orig. 49). Da $\#k$ unendlich ist, ist f homogen vom Grad $d \Leftrightarrow f(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, \ldots, x_n)\ \forall x_0, \ldots, x_n \in k,\ \lambda \in k^\times$.

Es gilt: $k[X_0, \ldots X_n] = \bigoplus_{d \geq 0} k[X_0, \ldots, X_n]_d$.

Lemma 1.53 (orig. 50)**.** *Für $i \in \{0, \ldots, n\}$ und $d \geq 0$ haben wir bijektive k-lineare Abbildungen*

$$\begin{aligned} k[X_0, \ldots, X_n]_d &\longrightarrow k[T_0, \ldots, \hat{T}_i, \ldots, T_n]_{\leq d} \\ f &\overset{\Phi_i^d}{\longmapsto} f(T_0, \ldots, \underbrace{1}_{i}, \ldots, T_n) \\ X_i^d g\left(\frac{X_0}{X_i}, \ldots, \frac{\hat{X}_i}{X_i}, \ldots, \frac{X_n}{X_i}\right) &\overset{\Psi_i^d}{\longleftarrow\!\shortmid} g \end{aligned}$$

Dehomogenisierung *bzw.* ***Homogenisierung.***

Beweis. Es reicht, $\Psi_i^d \circ \Phi_i^d = \mathrm{id}$, $\Phi_i^d \circ \Psi_i^d = \mathrm{id}$ auf Monomen nachzurechnen, da alle Abbildungen k-linear sind. □

Oft ist es nützlich, $k[T_0, \ldots, \hat{T}_i, \ldots, T_n]$ mit $k\left[\frac{X_0}{X_i}, \ldots, \frac{\hat{X}_i}{X_i}, \ldots, \frac{X_n}{X_i}\right] \hookrightarrow k(X_0, \ldots, X_n)$ zu identifizieren.

1.23 Definition des projektiven Raumes

Seien $X_1 = X_2 = \mathbb{A}^1$, $\tilde{U}_1 \subseteq X_1, \tilde{U}_2 \subseteq X_2$ mit $\tilde{U}_1 = \tilde{U}_2 = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$.

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1 &\xrightarrow{\sim} \tilde{U}_2 \\ x &\longmapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Verkleben von X_1 und X_2 entlang $\tilde{U}_1 \xrightarrow{\sim} \tilde{U}_2$ liefert die **projektive Gerade**

$$\mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 \cup \{\infty\} = U_1 \cup U_2.$$

Allgemein:

$$\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i = \mathbb{A}^n \cup \mathbb{P}^{n-1} = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{A}^1 \sqcup \mathbb{A}^0$$

Idee: $\mathbb{P}^2 \supseteq \mathbb{A}^2$: Zwei verschiedene Geraden in $\mathbb{P}^2$ schneiden sich genau in einem Punkt.
Als Menge:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^n(k) :&= \{\text{Ursprungsgeraden in } k^{n+1}\} = \{\text{1-dim. } k\text{-Unterräume}\} \\ &= (k^{n+1} \backslash \{0\})/k^\times \end{aligned}$$

Man schreibt meist kurz $(x_0 : \ldots : x_n)$ für den Repräsentanten der Klasse von $\langle (x_0, \ldots x_n) \rangle_k$ und nennt $(x_0 : \ldots : x_n)$ **homogene Koordinaten** auf $\mathbb{P}^n$.
Äquivalenzrelation:

$$(x_0, \ldots, x_n) \sim (x_0', \ldots, x_n') \Leftrightarrow \exists \lambda \in k^\times \text{ mit } x_i = \lambda x_i' \; \forall i.$$

Die Mengen

$$U_i := \{(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^n(k), \; 0 \leq i \leq n$$

sind wohldefiniert und überdecken $\mathbb{P}^n(k)$:

$$\mathbb{P}^n(k) = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$$

Weiter hat man eine Bijektion

$$\begin{aligned} U_i &\xrightarrow{\kappa_i} \mathbb{A}^n(k) \\ (x_0 : \ldots : x_n) &\longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{\hat{x}_i}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i} \right) \\ (t_0 : \cdots t_{i-1} : 1 : t_{i+1} : \cdots t_n) &\longleftarrow (t_0, \ldots, \hat{t}_i, \ldots, t_n) \end{aligned}$$

Über die κ_i definiert man nun eine Topologie auf $\mathbb{P}^n(k)$ durch:
$U \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ ist genau dann offen, wenn $\kappa_i(U \cap U_i) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ offen ist für alle i.

Es gilt:

$$U_i \cap U_j = D(T_j) \subseteq U_i \text{ offen}, \; i \neq j$$

wenn auf $U_i \cong \mathbb{A}^n$ die Koordinaten $T_0, \dots, \hat{T}_i, \dots, T_n$ verwendet werden. Damit wird $\mathbb{P}^n(k)$ zu einem topologischen Raum, der durch die U_i, $0 \leq i \leq n$, offen überdeckt wird.

1.23.1 Reguläre Funktionen

Sei $U \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ eine beliebige offene Teilmenge. Die regularären Funktionen auf U sind definiert als

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U) := \{f \in \mathrm{Abb}(U, k) \mid f|_{U \cap U_i} \in \mathcal{O}_{U_i}(U \cap U_i)\} \qquad \forall i \in \{0, \dots, n\}$$

wobei wir die U_i via κ_i implizit als Raum mit Funktionen auffassen. Insgesamt erhalten wir:

$$\mathbb{P}^n(k) = (\mathbb{P}^n(k), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$$

als Raum mit Funktionen.

Satz 1.54 (orig 51). *Für $U \subseteq \mathbb{P}^n$ offen gilt: $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U) = \{f : U \to k \mid \forall x \in U \colon \exists x \in V \subseteq U$ offen, $d \geq 0$ und $g, h \in k[X_0, \dots, X_n]_d$ homogen vom selben Grad d, d.d. $\forall v \in V \colon h(v) \neq 0$ und $f(v) = \frac{g(v)}{h(v)}\}$*

Wohldefiniertheit: Sei $v = (x_0 : \ldots : x_n)$.

$$f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \frac{g(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n)}{h(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n)} = \frac{\lambda^d g(x_0, \dots, x_n)}{\lambda^d h(x_0, \dots, x_n)} = f(x_0, \dots, x_n)$$

Beweis.

„$\subseteq$“: Sei $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U)$. Dann ist $f|_{U \cap U_i} \in \mathcal{O}_{U_i}(U \cap U_i)$. Es folgt:

$$f = \frac{\tilde{g}}{\tilde{h}}, \; \tilde{g}, \tilde{h} \in k[T_0, \dots, \hat{T}_i, \dots, T_n]$$

Definiere $d := \max\{\deg(\tilde{g}), \deg(\tilde{h})\}$. Homogenisiere:

$$g := \psi_i^d(\tilde{g}), \; h := \psi_i^d(\tilde{h})$$

$\Rightarrow f = \frac{g}{h}$ lokal.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\tilde{g}}{\tilde{h}}(\kappa_i(x)) \\ f((x_0 : \dots : x_n)) &= \frac{\tilde{g}\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\hat{x_i}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)}{\tilde{h}\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\hat{x_i}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)} \\ &= \frac{x_i^d \tilde{g}(\dots)}{x_i^d \tilde{h}(\dots)} \\ &= \frac{\psi_i^d(\tilde{g})(\dots)}{\psi_i^d(\tilde{h})(\dots)} = \frac{g}{h}(x_0 : \dots : x_n) \end{aligned}$$

„$\supseteq$“: Sei f in der rechten Menge, fixiere $i \in \{0, \dots, n\}$. Nach Voraussetzung ist f lokal auf $U \cap U_i$ von der Form $f = \frac{g}{h}$, $g, h \in k[X_0, \dots, X_n]_d$, $d \geq 0$ geeignet. Definiere:

$$\tilde{g}_i := \frac{g}{X_i^d},\ \tilde{h} := \frac{h}{X_i^d} \in k\left[\frac{X_0}{X_i}, \dots \frac{\hat{X}_i}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}\right]$$

$\Rightarrow f$ ist lokal von der Form: $\frac{\tilde{g}}{\tilde{h}}$, $\tilde{g}, \tilde{h} \in k[T_0, \dots, \hat{T}_i, \dots T_n]$.

$\Rightarrow f|_{U \cap U_i} \in \mathcal{O}_{U_i}(U \cap U_i)$, also $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U)$.

□

Korollar 1.55 (orig. 52)**.** *Für $i \in \{0, \dots, n\}$ induziert*

$$U \underset{\cong}{\xrightarrow{\kappa_i}} \mathbb{A}^n(k)$$

einen Isomorphismus

$$(U_i, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n|_{U_i}}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{A}^n(k)$$

von Räumen mit Funktionen. Insbesondere ist $\mathbb{P}^n(k)$ eine Prävarietät.

Beweis. Zu zeigen: $\forall U \subseteq U_i$ offen gilt

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(U) = \mathcal{O}_{U_i}(U) = \{f : U \to k \mid f \in \mathcal{O}_{U_i}(U)\}$$

d.h. auf der rechten Seite muss die Bedingung nur für das fixierte i überprüft werden. Dies folgt aus dem Beweis von Satz 1.54. □

Damit identifizieren sich die Funktionenkörper

$$K(\mathbb{P}^n(k)) = K(U_i) = k\left(\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}\right)$$

Satz 1.56 (orig. 53)**.** *$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(\mathbb{P}^n(k)) = k$. Insbesondere ist $\mathbb{P}^n$ für $n \geq 1$ **keine** affine Varietät. (Da der k-Algebra $A = k$ ja $\mathbb{A}^0(k) = \{pt\}$ als affine Varietät entspricht.)*

Beweis. $k \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(\mathbb{P}^n(k))$ klar, da konstante Funktionen. Nach Satz 1.48 (iii) gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mathbb{P}^n) &= \bigcap_{i=0}^{n} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U_i) \subseteq K(\mathbb{P}^n(k)) \\ &= \bigcap_{i=0}^{n} k[t_0, \ldots, \hat{t}_i, \ldots, t_n] = k\end{aligned}$$

□

1.24 Projektive Varietäten

Definition 1.57 (orig. 54)**.** Abgeschlossene Unterprävarietäten eines projektiven Raumes $\mathbb{P}^n(k)$ heißen **projektive Varietäten**.

Vorsicht: für $x = (x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n$, $f \in k[X_0, \ldots, X_n]$ ist $f(x_1, \ldots, x_n)$ *nicht* wohldefiniert, da von Repräsentaten abhängig, d.h. f kann *nicht* als Funktion auf $\mathbb{P}^n$ aufgefasst werden. Für *homogene* Polynome $f_1, \ldots, f_n \in k[X_0, \ldots X_n]$ (nicht notwendig vom selben Grad) können wir dennoch Verschwindungsmengen definieren:

$$V_+(f_1, \ldots, f_n) = \{(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid f_j(x_0, \ldots, x_n) = 0 \; \forall j\}$$

Da $V_+(f_1, \ldots, f_n) \cap U_i = V(\Phi_i(f_1), \ldots, \Phi_i(f_m))$ ist $V_+(f_1, \ldots, f_m)$ abgeschlossen in $\mathbb{P}^n$. Ist $V_+(f_1, \ldots, f_n)$ irreduzibel, so erhalten wir eine projektive Varietät. In der Tat entstehen alle projektiven Varietäten auf diese Weise, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 1.58 (orig. 55)**.** *Sei $Z \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ eine projektive Varietät. Dann existieren homogene Polynome $f_1, \ldots, f_n \in k[X_0, \ldots, X_n]$, so dass*

$$Z = V_+(f_1, \ldots, f_n)$$

gilt.

Beweis. Betrachte:

$f| : f^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i$ ist Morphismus von Prävarietäten. Dann ist f selbst ein Morphismus von Prävarietäten: *lokal* ist die Aussage klar, *global* verklebt man.

$$\begin{aligned} \overline{Y} :=& Y \cup \{0\}, \text{ der Abschluss von } Y \text{ in } \mathbb{A}^{n+1}(k) \\ \mathfrak{a} :=& I(\overline{Y}) \subseteq k[X_0, \ldots, X_n] \end{aligned}$$

Behauptung: $\mathfrak{a}$ wird von homogenen Polynomen erzeugt. *Denn:* Sei für $g \in \mathfrak{a}$, $g = \sum_d g_d$ die Zerlegung in homogene Bestandteile vom Grad d. $\overline{Y}$ ist Vereinigung von Ursprungsgeraden im k^{n+1}, d.h. $\forall \lambda \in k^\times$ gilt:

$$g(x_0, \ldots, x_n) = 0 \;\Leftrightarrow\; g(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = 0$$

Beweis durch Widerspruch: *Angenommen* nicht alle g_d liegen in $\mathfrak{a}$.
$\Rightarrow \exists (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^{n+1}(k)$, so dass $g(x_0, \ldots, x_n) = 0$, aber $g_{d_0}(x_0, \ldots, x_n) \neq 0$.
$\Rightarrow 0 \neq \sum_d g_d(x_0, \ldots, x_n) T^d \in k[T]$
$\Rightarrow \exists \lambda \in k^\times$: $0 \neq \sum_d g_d(x_0, \ldots, x_n)\lambda^d = \sum_d g_d(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = g(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = 0$. Widerspruch.

$\Rightarrow \mathfrak{a} = (f_1, \dots, f_m)$, mit f_j homogen, also $Z = V_+(f_1, \dots, f_m)$.

$$Z \ni (x_0 : \dots : x_n) \Leftrightarrow (\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) \in \overline{Y} \; \forall \lambda \in k^\times \text{ und } \neq 0$$
$$\Leftrightarrow f_i(x_0, \dots, x_n) = 0 \; \forall 1 \leq i \leq n, \; (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{P}^n$$

□

Zu Bemerkung 1.52:

Nach Satz 1.54 und Definition von $\mathcal{O}'_Z$ folgt: Ist X eine projektive Varietät und $U \subseteq X$ offen, so erhalten wir

(†) $\mathcal{O}_X(U) = \{f : U \to k \mid \forall x \in U \; \exists x \in V \underset{\text{offen}}{\subseteq} U, \; g, h \in k[X_0, \dots, X_n]$ homogen vom gleichen Grad mit $h(v) \neq 0, \; f(v) = \frac{g(v)}{h(v)}, \; \forall v \in V\}$.

Insbesondere gilt:

Satz 1.59 (orig. 56)**.** *Seien $V \subseteq \mathbb{P}^m(k)$, $W \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ projektive Varietäten und*

$$\phi : V \longrightarrow W$$

eine Abbildung. Dann ist ϕ eine Morphismus genau dann, wenn zu jedem $x \in V$ eine offene Umgebung $x \in U_x \subseteq V$ und homogene Polynome $f_0, \dots, f_n \subseteq k[X_0, \dots, X_m]$ vom selben Grad existieren mit

$$\phi(y) = (f_0(y), \dots, f_n(y)) \quad \forall y \in U_x$$

Beweis.

- "$\Rightarrow$": Übung.
- "$\Leftarrow$":
  - (i) ϕ stetig: Sei $Z \subseteq W$ abgeschlossen. Ohne Einschränkung $Z = V_+(g) \cap W$ für ein homogenes Polynom g. Dann berechnet sich das Urbild

    $$\phi^{-1}(Z) = V_+(g \circ \phi) \cap V.$$

    Auf U_x, $x \in V$, ist $g \circ \phi$ als homogenes Polynom in $X_0, \dots, X_n$ gegeben.
    $\Rightarrow V(g \circ \phi) \cap U_x = \phi^{-1}(Z) \cap U_x$ abgeschlossen in U_x für alle x.
    $\Rightarrow \phi^{-1}(Z) \subseteq V$ abgeschlossen.
  - (ii) Zu zeigen: $\forall W' \subseteq W$ offen, $g \in \mathcal{O}_W(W')$ ist $g \circ \phi \in \mathcal{O}_V(\phi^{-1}(W'))$.
    (†) $\Rightarrow$ Es ex. eine offene Umgebung W_y in W' mit $g = \frac{h}{q}$ auf W_y, h, q homogen vom Grad d.
    $\Rightarrow \phi_{|U_x \cap \phi^{-1}(W_y) := \tilde{U}_x}$ ist auch von dieser Gestalt, also $\frac{h(f_0, \dots, f_n)}{q(f_0, \dots, f_n)} = g \circ \phi_{|\tilde{U}_x} \in \mathcal{O}_V(\tilde{U}_x)$.

  Verklebungsaxiom $\Rightarrow g \circ \phi \in \mathcal{O}_V(\phi^{-1}(V))$.

□

1.25 Koordinatenwechsel in $\mathbb{P}^n$

Sei $A = (a_{ij}) \in GL_{n+1}(k)$ eine invertierbare, lineare Abbildung $k^{n+1} \to k^{n+1}$. Dann überführt A Ursprungsgeraden in Ursprungsgeraden, respektiert also die Äquivalenzrelation des projektiven Raumes. Wir erhalten Abbildungen:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^n(k) &\xrightarrow{\phi_A} \mathbb{P}^n(k) \\ (x_0 : \ldots : x_n) &\longmapsto \left(\sum_{i=0}^{n} a_{0i}x_i : \ldots : \sum_{i=0}^{n} a_{ni}x_i \right), \end{aligned}$$

die nach Satz 1.59 ein Morphismus von Prävarietäten ist. Offensichtlich gilt für $A, B \in GL_{n+1}(k)$:

$$\varphi_{A \cdot B} = \varphi_A \circ \varphi_B$$

d.h. φ_A ist insbesondere wieder ein Isomorphismus, **der durch A bestimmte Koordinatenwechsel des** $\mathbb{P}^n(k)$. Es *bezeichne* $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n(k))$ die Gruppe der Automorphismen von $\mathbb{P}^n(k)$. Es folgt:

$$\varphi_- : GL_{n+1}(k) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n(k)), A \mapsto \varphi_A$$

ist ein Gruppenhomomorphismus mit

$$Z := \ker \varphi_- = \{\lambda E_{n+1}, \mid \lambda \in k^\times\}$$

der Untergruppe der Skalarmatrizen. *Später*:

$$PGL_{n+1}(k) := GL_{n+1}(k)/Z \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n(k)), \quad Z \cong k^\times$$

die **projektive lineare Gruppe**.

Beispiel. Sei $n = 1$. Es ist

$$\begin{aligned} PGL_2(\mathbb{C}) &= \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\ (z : w) & \mapsto (az + bw, cz + dw) \end{array} \right\} \\ &\leftrightarrow \text{Möbiustransformationen } z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \end{aligned}$$

1.26 Lineare Unterräume von $\mathbb{P}^n$

Sei $\varphi : k^{m+1} \to k^{n+1}$ ein *injektiver* Homomorphismus von k-Vektorräumen. φ induziert eine injektive Abbildung

$$\imath : \mathbb{P}^m(k) \to \mathbb{P}^n(k)$$

die nach Satz 1.59 ein Morphismus von Prävarietäten ist. Das Bild von $\imath$ ist eine abgeschlossene Untervarietät. Ist $A = (a_{ij}) \in M_{l\times(n+1)}$ mit $\operatorname{im}(\varphi) = \ker(k^{n+1} \xrightarrow{A} k^l)$ und

$$f_i := \sum_{j=0}^{n} a_{ij}X_j \in k[X_0, \dots, X_n], \text{ für } i = 1, \dots, l$$

so identifiziert $\imath$ den projektiven Raum $\mathbb{P}^m(k)$ mit $V_+(f_1, \dots, f_l) \subseteq \mathbb{P}^n(k)$. (Die Abbildung $\imath : \mathbb{P}^m(k) \to V_+(f_1, \dots, f_l)$ ist ein Isomorphismus von Prävarietäten, mit Umkehrabbildung induziert von $\varphi^{-1} : \varphi(k^{m+1}) \to k^{m+1}$)

Beispiel. $\mathbb{P}^m = V_+(X_{m+1}, \dots, X_n) \subseteq \mathbb{P}^n$. Solche Unterräume heißen **lineare Unterräume** (der Dimension m).

$m = 0$: Punkte
$m = 1$: Geraden
$m = 2$: Ebenen
$m = n - 1$: Hyperebenen in $\mathbb{P}^n(k)$.

- Zu zwei Punkten $p \neq q \in \mathbb{P}^n(k)$ existiert genau eine gerade $\overline{pq}$ in $\mathbb{P}^n(k)$, die p und q enthält, da zu zwei verschiedenen Ursprungsgeraden im k^{n+1} genau eine Ebene (in k^{n+1}) existiert, die beide Geraden enthält.

- Je zwei verschiedene Geraden in $\mathbb{P}^2(k)$ schneiden sich in genau einem Punkt, da Geraden in $\mathbb{P}^2$ Ebenen in k^3 entsprechen, und zwei Ebenen sich dort genau in einer Geraden, d.h. einem Punkt des $\mathbb{P}^2$, schneiden. Dimensionsformel (lineare Algebra):

$$\dim_k E_1 \cap E_2 = -\underbrace{\dim_k(E_1 + E_2)}_{3} + \underbrace{\dim_k E_1}_{2} + \underbrace{\dim_k E_2}_{2} = 1$$

Später: Verallgemeinerung durch den *Satz von Bézout* für allgemeine Unterprävarietäten $V_+(f)$.

1.27 Kegel

Sei $H \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ Hyperebene, $p \in \mathbb{P}^n(k) \setminus H$, $X \subseteq H$ abgeschlossene Unterprävarietät.

$$\overline{X, p} := \bigcup_{q \in X} \overline{qp}$$

heißt **Kegel von** X **über** p, es handelt sich um eine abgeschlossenen Untervarietät von $\mathbb{P}^n(k)$. Ohne Einschränkung: $H = V_+(X_n)$, $p = (0 : \ldots : 0 : 1)$ (geeigneter Koordinatenwechsel) Für

$$\begin{aligned} X = V_+(f_1, \ldots, f_m) \subseteq \mathbb{P}^{n-1}(k) = H, &\quad f_i \in k[X_0, \ldots, X_{n-1}] \\ \Rightarrow \overline{X, p} = V_+(\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_m) \subseteq \mathbb{P}^n(k), &\quad \tilde{f}_i \in k[X_0, \ldots, X_n] \end{aligned}$$

Verallgemeinerung. Sei $\mathbb{P}^m(k) \cong \Lambda \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ linearer Unterraum, $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ komplementärer linearer Unterraum, d.h. $\Lambda \cap V = \emptyset$ und $\mathbb{P}^n(k)$ ist der *kleinste* lineare Unterraum von $\mathbb{P}^n(k)$, der Λ und V enthält. Für $X \subseteq V$ eine abgeschlossene Unterprävarietät definiert man den

Kegel von X **über** Λ durch $\overline{X, \Lambda} := \bigcup_{q \in X} \overline{q, \Lambda}$, wobei der von q und Λ aufgespannte lineare Unterraum $\overline{q, \Lambda}$ der kleinste Unterraum sei, der q und Λ enthält.

1.28 Quadriken

Sei in diesem Abschnitt $\mathrm{char}(k) \neq 2$.

Definition 1.60 (orig. 57). Eine abgeschlossene Unterprävarietät $Q \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ von der Form $V_+(q)$, $0 \neq q \in k[X_0, \ldots, X_n]_2$ heißt **Quadrik**.

$$Q = V_+(q)$$

Zur quadratischen Form q gehört eine assoziierte Bilinearform β auf k^{n+1} (vgl. lineare Algebra),

$$\beta(v, w) := \frac{1}{2}(q(v + w) - q(v) - q(w)), \quad v, w \in k^{n+1}$$

Es gibt eine Basis von k^{n+1}, sodass die Strukturmatrix B von β die Gestalt

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

hat, d.h. Koordinatenwechsel zur Basiswechselmatrix liefert einen Isomorphismus

$$Q \xrightarrow{\sim} V_+(X_0^2 + \cdots + X_{r-1}^2), \quad r = \mathrm{rk}\ B$$

Lemma 1.61 (orig. 58). *(i)* $X_0^2 + \ldots + X_{r-1}^2$ *ist irreduzibel* $\iff r > 2$

(ii) $V_+(X_0^2 + \ldots + X_{r-1}^2)$ *ist irreduzibel* $\iff r \neq 2$

Beweis.

- $r = 0, 1 : X_0^2 = X_0 \cdot X_0 \Rightarrow V_+(X_0^2) = V_+(X_0)$ irreduzibel
- $r = 2 : X_0^2 + X_1^2 = (X_0 + i \cdot X_1) \cdot (X_0 - i \cdot X_1)$ für $i = \sqrt{-1}$
- $r > 2$: Angenommen $\sum_i a_i X_i \cdot \sum_j b_j X_j = X_0^2 + \ldots X_{r-1}^2$.
  Ausmultiplizieren + Koeffizientenvergleich $\Rightarrow$ Widerspruch.

□

Satz 1.62 (orig. 59). *Ist $r \neq s$, so sind $V_+(T_0^2 + \cdots + T_{r-1}^2)$ und $V_+(T_0^2 + \cdots + T_{s-1}^2)$ nicht isomorph.*

Beweis. Später: Es gibt keinen Koordinatenwechsel von $\mathbb{P}^n(k)$, der die beiden Mengen miteinander identifiziert, damit auch kein Automorphismus von $\mathbb{P}^n(k)$. □

Definition 1.63. Eine Quadrik $Q \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ mit $Q \cong V_+(T_0^2 + \cdots + T_{r-1}^2)$, $r \geq 1$, hat **Dimension** $n - 1$ und den **Rang** r. (nach Satz eindeutig!)

Korollar 1.64 (orig. 61)**.** *Zwei Quadriken Q_1 und Q_2 sind genau dann isomorph als Prävarietäten, wenn sie dieselbe Dimension und denselben Rang haben.*

Beweis.

„$\Leftarrow$“ $Q_1 \cong V_+(T_0^2 + \cdots + T_{n-1}^2) \cong Q_2$ in dem selben $\mathbb{P}^n$.

„$\Rightarrow$“ Für $Q \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ berechne $K(Q)$. Ohne Einschränkung $Q = V_+(X_0^2 + \cdots + X_{n-1}^2)$.

(i) $r = 1$: $V_+(X_0^2) = V_+(X_0) = \mathbb{P}^{n-1}(k)$: $K(Q) = k(T_1, \ldots, T_{n-1})$.

(ii) $r = 2$: reduzibel: Zerlegung in zwei Hyperebenen $Z \cong \mathbb{P}^{n-1}$
$\Rightarrow K(Z) \cong k(T_1, \ldots, T_{n-1})$.

(iii) $r > 2$: $U = V(1 + T_1^2 + \cdots + T_{n-1}^2) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ ist nichtleere offene affine Teilmenge von Q.
$\Rightarrow K(Q) = K(U) = \mathrm{Quot}(\Gamma(U)) = \mathrm{Quot}(k[T_1, \ldots, T_n]/(1 + T_1^2 + \cdots + T_{n-1}^2)$
$\Rightarrow \mathrm{trgrad}_k\, K(Q) = n - 1$.

□

Beispiel 1.65. Q Quadrik in $\mathbb{P}^n$ (vgl. Joe Harris, Seite 34).

(i) In $\mathbb{P}^1(k)$.

- *Rang 2:* 2 Punkte, reduzibel.
- *Rang 1:* 1 Punkt (Doppelpunkt).

(ii) In $\mathbb{P}^2(k)$.

- *Rang 3:* Glatter Kegel $\cong \mathbb{P}^1(k)$. $X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 = 0$
- *Rang 2:* 2 verschiedene Geraden, reduzibel.
- *Rang 1:* (Doppel)gerade.

(iii) In $\mathbb{P}^3(k)$.

- Rang 1: Doppelebene (2-dimensionaler linearer Unterraum)
- Rang 2: (insert image)
- Rang 3: (insert image)
- Rang 4: (insert image)

Die Quadrik $Q \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ heißt **glatt**, falls $r = n + 1$, d.h. falls die Matrix B zu q maximalen Rang hat. Für $\mathrm{rk}(Q) > 3$, $\dim(Q) = d$, ist $Q \cong \overline{\widetilde{Q}, \Lambda}$ Kegel über einer **glatten** Quadrik $\widetilde{Q}$, da Dimension $r - 2$ bzgl. einer $(d - r + 2)$-dimensionalen Unterraums 1.

- $r = 1, 2$ ausgeartet.

- $r = 1$. $Q = V_+(X_0^2) = V_+(X_0)$ Hyperebenen in $\mathbb{P}^n(k)$. Der Unterschied zwischen $V_+(X_0^2)$ und $V_+(X_0)$ ist für eine projektive Varietät Q nicht sichtbar, jedoch in der Theorie der Schemata unterscheidbar!

- $r = 2$. $Q = V_+(X_0^2 + X_1^2)$ reduzibel, d.h. keine Prävarietät in unserem Sinne! Auch hier werden uns Schemata später helfen.

$Q = V_+(X_0^2 + X_1^2 + \cdots + X_{n-1}^2) \subseteq \mathbb{P}^{d+1}$, $r \leq d + 2$
$\tilde{Q} = V_+(X_0^2 + \cdots + X_{n-1}^2) \subseteq \mathbb{P}^{r-1}$ glatt.
$A = \mathbb{P}^{d+1-v} = V_+(X_0, \ldots, X_{n-1}) \subseteq \mathbb{P}^{d+1}$
$Q = \overline{\widetilde{Q}, \Lambda}$

Kapitel 2

Das Ringspektrum

Bisher:
Prävarietäten$_{/k}$ sind Verklebungen von *affinen Varietäten*$_{/k}$ mit k algebraisch abgeschlossen.
Dabei sind affine Varietäten$_{/k}$ äquivalent zu *endlich erzeugten, integren k-Algebren*,
wobei die Punkte der Varietäten den maximalen Idealen der k-Algebren entsprechen.

Ziel: Schemata sind Verklebungen von *affinen Schemata*.
Dabei sollen affine Schemta äquivalent zu *beliebigen* (kommutativen) Ringen sein.
Die Punkte affiner Schemata werden den *Primidealen* der zugehörigen Ringe entsprechen.

Methodik: Wir wollen einen Funktor:

$$A \longmapsto (\underbrace{\mathrm{Spec}(A)}_{\text{top. Raum}}, \underbrace{\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}}_{\textit{Garbe}})$$

$\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$ ist dabei „Garbe von Funktionen“ und verallgemeinert „Systeme von Funktionen“ für Raume mit Funktionen.

Wir erhalten insbesondere affine Schemata für k-Algebren über beliebigen Körpern k!

Grund für den Übergang zu Primidealen:

Für einen Ringhomomorphismus $\varphi : A \to B$, und ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \subseteq B$ ist $\mathfrak{m}^c := \varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ im Allgemeinen **kein** maximales Ideal von A. Wir erhalten in dieser Allgemeinheit also keinen Funktor auf den Maximalsprektren, wie bisher.

Das Ringspektrum als topologischer Raum

2.1 Definition von Spec(A)

Sei A stets ein kommutativer Ring. $\mathrm{Spec}(A) := \{\mathfrak{p} \trianglelefteq A \mid \mathfrak{p} \text{ prim}\}$.

Für $M \subseteq A$ definiert man

$$V(M) := V_A(M) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid M \subseteq \mathfrak{p}\} = V(\langle M\rangle_A)$$
$$V(f) := V(\{f\}) \text{ für } f \in A$$

Lemma 2.1. *Es ist*

$$\{\textit{Ideale in } A\} \longrightarrow \{\textit{Teilmengen in } \mathrm{Spec}(A)\}$$
$$\mathfrak{a} \longmapsto V(\mathfrak{a})$$

eine inklusionsumkehrende Abbildung. Weiter gilt:

(i) $V(0) = \mathrm{Spec}(A)$, $V(1) = \emptyset$.

(ii) $V\left(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{a}_i\right) = V\left(\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i\right) = \bigcap_{i\in I} V(\mathfrak{a}_i)$

(iii) $V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}') = V(\mathfrak{a}\mathfrak{a}') = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{a}')$

Beweis.

- (1), (2) klar.
- (3). $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}' \supseteq \mathfrak{a}\mathfrak{a}' \Rightarrow \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}\mathfrak{a}'$.

  $\mathfrak{p}$ prim $\Rightarrow \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}'$.

  $\Rightarrow \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}'$

□

Definition 2.2. Spec(A) mit der Topologie, dessen abgeschlossene Mengen gerade die Mengen der Form $V(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{a} \trianglelefteq A$ ein Ideal sind, heißt das **(Prim)Spektrum von** A (mit der Zariski-Topologie).

$$x \in \operatorname{Spec}(A) \leftrightarrow \mathfrak{p}_x \trianglelefteq A \text{ prim}$$
$$Y \subseteq \operatorname{Spec}(A), \quad I(Y) := \bigcap_{y \in Y} \mathfrak{p}_y$$

$I(-)$ ist inklusionumkehrend, $I(\emptyset) = A$.

Satz 2.3. *Seien $\mathfrak{a} \trianglelefteq A$ ein Ideal und $Y \subseteq$ Spec(A) eine Teilmenge. Dann gilt:*

(i) $\operatorname{rad} I(Y) = I(Y)$, $V(\mathfrak{a}) = V(\operatorname{rad} \mathfrak{a})$

(ii) $I(V(\mathfrak{a})) = \operatorname{rad}(\mathfrak{a})$, $V(I(Y)) = \overline{Y}$ *(Abschluss in* Spec(A)*).*

(iii) Wir haben eine 1:1-Korrespondenz:

$$\{\mathfrak{a} \trianglelefteq A \mid \mathfrak{a} = \operatorname{rad} \mathfrak{a}\} \longrightarrow \{\textit{abg. Teilmengen } Y \textit{ in } \operatorname{Spec}(A)\}$$

Beweis.

(i) $V(\mathfrak{a}) = V(\operatorname{rad} \mathfrak{a})$.

- „$\supseteq$“. Klar, da $\operatorname{rad} \mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{a}$.
- „$\subseteq$“. Aus $f^r \in \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ folgt $f \in \mathfrak{p}$, da $\mathfrak{p}$ prim, also $\operatorname{rad} \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$.

(ii) $\operatorname{rad} \mathfrak{a} = \bigcap_{x \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}_x = IV(\mathfrak{a})$. Es ist:

$$V(\mathfrak{b}) \supseteq Y \Leftrightarrow \forall \mathfrak{p} \in Y : \ \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{b}$$
$$\Leftrightarrow I(Y) \supseteq \mathfrak{b}.$$

Damit ist $V(I(Y))$ die kleinste abgeschlossene Teilmenge, die Y umfasst, d.h. $V(I(Y)) = \overline{Y}$.

(iii) Klar.

□

2.2 Topologische Eigenschaften von Spec(A)

Definiere $D(f) := D_A(f) := \mathrm{Spec}(A) \setminus V(f) = \{x \in \mathrm{Spec}\, A \mid f \notin \mathfrak{p}_x\}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_x : A &\longrightarrow A/\mathfrak{p}_x \subseteq \kappa_x(A) := \mathrm{Quot}(A/\mathfrak{p}_x) \\ f &\longmapsto f(x) := f(\mathfrak{p}_x) := f \mod \mathfrak{p}_x \end{aligned}$$

Für $x \in D(f)$ gilt dann $f(x) = \mathrm{ev}_x(f) \neq 0$.

Mengen der Form $D(f), f \in A$ heißen **(standard) prinzipal offene Mengen**. Man hat:

$$\begin{aligned} D(0) = \emptyset,\ D(1) = \mathrm{Spec}(A) &= D(u),\ u \in A^\times \\ D(f) \cap D(g) &= D(fg) \end{aligned}$$

Lemma 2.4. *Für $f_i \in A, i \in I$, $g \in A$ gilt:*

$$\begin{aligned} D(g) \subseteq \bigcup_{i \in I} D(f_i) &\Leftrightarrow g^n \in \mathfrak{a} = (f_i, i \in I) \text{ für } n \in \mathbb{N} \text{ geeignet} \\ &\Leftrightarrow g \in \mathrm{rad}(\mathfrak{a}) \end{aligned}$$

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned} D(g) \subseteq \bigcup_i D(f) \Leftrightarrow V(g) \supseteq \bigcap_i V(f_i) &= V(\mathfrak{a}) \\ &\Leftrightarrow g \in \mathrm{rad}((g)) \subseteq \mathrm{rad}(\mathfrak{a}) \text{ nach 2.3} \end{aligned}$$

Für $g = 1$, folgt:

$$\mathrm{Spec}(A) = \bigcup_{i \in I} D(f_i) \Leftrightarrow \sum_{i \in I} A f_i = A$$

□

Satz 2.5. *Die prinzipal offenen Mengen $D(f)$, $f \in A$, bilden eine Basis der Topologie von* $\mathrm{Spec}(A)$*, und sind quasikompakt. Insbesondere ist* $\mathrm{Spec}(A)$ *quasikompakt.*

Beweis. Nach Lemma 2.1.(ii) gilt:

$$V(\mathfrak{a}) = \bigcap_{f \in \mathfrak{a}} V(f) \Longrightarrow \mathrm{Spec}\, A \setminus V(\mathfrak{a}) = \bigcup_{f \in \mathfrak{a}} D(f) \Rightarrow \text{Basis der Topologie}$$

Sei $D(g) \subseteq \bigcup_i D(f_i)$.

2.4 $\Rightarrow g^n = \sum_{i \in I} a_i f_i$, $a_i \in A$ fast alle 0.

$\Rightarrow D(g) \subseteq \bigcup_{i \in J} D(f_i)\ \forall i \in J \subseteq I$ endlich

$\Rightarrow D(g)$ quasikompakt. □

Satz 2.6. $Y \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ *ist irreduzibel, genau dann wenn $\mathfrak{p} := I(Y) \trianglelefteq A$ prim ist. In diesem Fall ist $\{\mathfrak{p}\} \subseteq \overline{Y}$ dicht!*

Beweis.

„$\Rightarrow$“: Seien Y irreduzibel und $f, g \in A$ mit $fg \in \mathfrak{p}$.

$\Rightarrow Y \subseteq \overline{Y} = VI(Y) \subseteq V(fg) = V(f) \cup V(g)$

Y irreduzibel $\Rightarrow$ Ohne Einschränkung: $Y \subseteq V(f)$.

$\Rightarrow f \in \bigcap_{y \in V(f)} \mathfrak{p}_y = IV(f) \subseteq I(Y) = \mathfrak{p}$, d.h. $\mathfrak{p}$ ist prim.

„$\Leftarrow$“: Sei umgekehrt $\mathfrak{p} = I(Y)$ ein Primideal.

Satz 2.3 $\Rightarrow \overline{Y} = V(\mathfrak{p}) = VI(\{\mathfrak{p}\}) = \overline{\{\mathfrak{p}\}}$, d.h. $\overline{Y}$ ist der Abschluss der irreduziblen Menge $\{\mathfrak{p}\}$ und daher selbst irreduzibel.

Lemma 1.14 $\Rightarrow Y$ ist auch irreduzibel, da dicht in $\overline{Y}$.

□

Warnung: im Allgemeinen ist $\mathfrak{p}$ kein Punkt in Y!

Korollar 2.7. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \operatorname{Spec}(A) &\longrightarrow \{\textit{abg. irred. Teilmengen von Spec } A\} \\ \mathfrak{p} &\longmapsto V(\mathfrak{p}) = \overline{\{\mathfrak{p}\}} \end{aligned}$$

ist eine Bijektion, unter der die minimalen *Primideale von A den irreduziblen Komponenten entsprechen.*

Beweis. Proposition 2.3 und 2.6. □

Definition 2.8. Für einen topologischen Raum X heißt $\eta \in X$ **generischer Punkt**, falls $\overline{\{\eta\}} = X$. Allgemeiner sagen wir für $x, x' \in X$, dass x eine **Verallgeimeinerung** (engl. **„generalization“**) von x' ist, bzw. x' eine **Spezialisierung** von x, falls $x' \in \overline{\{x\}}$.

Bemerkung 2.9.

(i) $\eta \in X$ generisch $\Leftrightarrow \eta$ ist Verallgemeinerung von jedem Punkt von X.

(ii) Existiert ein generischer Punkt in X, so ist X als Abschluss einer irreduziblen Menge selbst irreduzibel.

(iii) Für $X = \operatorname{Spec}(A)$ gilt: x' ist eine Spezialisierung von $x \Leftrightarrow \mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_{x'}$

$$\begin{array}{c} \Leftrightarrow V(\mathfrak{p}_{x'}) \subseteq V(\mathfrak{p}_x) \\ \quad \| \qquad \| \\ x' \in \overline{\{x'\}} \subseteq \overline{\{x\}} \end{array}$$

Ferner hat jede abgeschlossene irreduzible Teilmenge $Y \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ einen *eindeutigen* generischen Punkt (dies gilt nicht für beliebige irreduzible Teilmengen $Y \subseteq \operatorname{Spec}(A)$).

2.3 Der Funktor $A \mapsto \mathbf{Spec}(A)$

Ziel: Wir wollen einen kontravarianten Funktor

$$\begin{aligned} \underline{\text{CRing}} &\longrightarrow \underline{\text{Top}} \\ A &\longmapsto \operatorname{Spec} A \end{aligned}$$

definieren. Sei $\varphi : A \longrightarrow B$ ein Ringhomomorphismus, $\mathfrak{q}$ Primideal von B. Es folgt: $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \trianglelefteq A$ ist Primideal, denn $A/\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \hookrightarrow B/\mathfrak{q}$ ist integer als Unterring eines integren Rings. Wir erhalten also eine Abbildung

$$\begin{aligned} {}^a\varphi = \operatorname{Spec}\varphi : \ \operatorname{Spec} B &\longrightarrow \operatorname{Spec} A \\ \mathfrak{q} &\longmapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \end{aligned}$$

Satz 2.10.

(i) $({}^a\varphi)^{-1}(V(M)) = V(\varphi(M))$ *für* $M \subseteq \operatorname{Spec} A$ *Teilmenge, insbesondere gilt* $({}^a\varphi)^{-1}(D(f)) = D(\varphi(f))$, $f \in A$.

(ii) $V(\varphi^{-1}(\mathfrak{b})) = \overline{{}^a\varphi(V(\mathfrak{b}))}$ *für* $\mathfrak{b} \trianglelefteq B$ *Ideal.*

Beweis.

(i) Für $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$ gilt:

$$\mathfrak{q} \in V(\varphi(M)) \iff \mathfrak{q} \supseteq \varphi(M) \iff \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \supseteq M \iff \mathfrak{q} \in ({}^a\varphi)^{-1}(V(M)) \tag{2.1}$$

Weiter:

$$\begin{aligned} D(\varphi(f)) &= \operatorname{Spec}(B) \setminus V(\varphi(f)) && (2.2) \\ &= \operatorname{Spec}(B) \setminus ({}^a\varphi)^{-1}(V(f)) && (2.3) \\ &= ({}^a\varphi)^{-1}(D(f)) && (2.4) \end{aligned}$$

(ii) $\overline{{}^a\varphi(V(\mathfrak{b}))} = VI({}^a\varphi(V(\mathfrak{b})))$ nach Satz 2.3. Nach Definition gilt:

$$\begin{aligned} I({}^a\varphi(V(\mathfrak{b})) &= \bigcap_{\mathfrak{p} \in {}^a\varphi(V(\mathfrak{b}))} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{q} \in V(\mathfrak{b})} \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \\ \text{komm. Algebra } &= \varphi^{-1}(\operatorname{rad} \mathfrak{b}) \\ &\overset{!}{=} \operatorname{rad} \varphi^{-1}(\mathfrak{b}) \end{aligned}$$

Denn: Ohne Einschränkung gelte $\mathfrak{b} = 0$, $\varphi^{-1}(\mathfrak{b}) = \ker \varphi$ (betrachte $A/\varphi^{-1}(\mathfrak{b}) \hookrightarrow B/\mathfrak{b}$). Es ist:

$$a \in \varphi^{-1}(\sqrt{0}) \Leftrightarrow \varphi(a)^n = \varphi(a^n) = 0 \text{ für } n \text{ geeignet}$$

$V(\cdot)$ liefert die Behauptung: $V(\operatorname{rad}\varphi^{-1}(\mathfrak{b})) = V(\varphi^{-1}(\mathfrak{b}))$ nach Satz 2.3.

$\square$

Insbesondere ist ${}^a\varphi : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ *stetig*. Wegen

$$^a(\psi \circ \varphi) = {}^a\varphi \circ {}^a\psi \text{ und } {}^a\mathrm{id}_A = \mathrm{id}_{\operatorname{Spec} A}$$

für einen weiteren Ringhomomorphismus $\psi : B \to C$ ist $A \mapsto \operatorname{Spec} A$ der gesuchte kontravariante Funktor.

Korollar 2.11. *${}^a\varphi$ ist* ***dominant****, d.h.* im $({}^a\varphi) \subseteq \operatorname{Spec} A$ *dicht* $\iff$ *Jedes Element in* $\ker\varphi$ *ist nilpotent:* $\ker\varphi \subseteq rad(0)$.

Satz 2.12.

(i) Ist $\varphi : A \to B$ ein surjektiver Ringhomomorphismus mit $\ker\varphi =: \mathfrak{a}$, dann ist ${}^a\varphi$ ein Homöomorphismus von $\operatorname{Spec} B$ auf $V(\mathfrak{a}) \underset{abg.}{\subseteq} \operatorname{Spec} A$.

(ii) Ist S eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von A, und $\varphi : A \longrightarrow S^{-1}A =: B$ die kanonische Lokalisierungsabbildung, dann ist ${}^a\varphi$ ein Homöomorphismus, von $\operatorname{Spec} S^{-1}A$ auf $\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid S \cap \mathfrak{p} = \emptyset\}$.

Beweis. ${}^a\varphi$ injektiv + im ${}^a\varphi$ ist bekannt aus kommutative Algebra. *Ferner*: Für $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$, $\mathfrak{b} \trianglelefteq B$ Ideal gilt $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{b} \Leftrightarrow \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \supseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{b})$, also

$$^a\varphi(V(\mathfrak{b})) = V(\varphi^{-1}(\mathfrak{b})),$$

d.h. ${}^a\varphi$ ist abgeschlossen. $\square$

2.4 Beispiele

- $\operatorname{Spec} A = \emptyset \Leftrightarrow A = \{0\}$.
- A Körper oder Ring mit einem einzigem Primideal: $\operatorname{Spec} A = \{\mathfrak{p}\}$.
- A Artinsch: $\operatorname{Spec} A$ endlich und diskret (da maximale Primideale mit den minimalen Primidealen übereinstimmen)

  ($\operatorname{Spec} A = \operatorname{Spec}(A/\sqrt{0})$, $A/\sqrt{0}$ Produkt von Körpern. $\operatorname{Spec}(\prod_i A_i) = \coprod_i \operatorname{Spec}(A_i)$)

Beispiel 2.13. Sei A Hauptidealring (z.B. $\mathbb{Z}$ oder $K[X]$). Falls $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal ist, dann ist $\mathfrak{p} = (\pi)$, π Primelement in A.

Alle Primideale sind maximal oder 0.

Abg. Punkte von $\operatorname{Spec} A \leftrightarrow$ Primelemente modulo $A^\times$

$\overline{\{\eta\}} = \operatorname{Spec} A$ für $\eta \in \operatorname{Spec} A$ mit $\mathfrak{p}_\eta = (0)$.

Abgeschlossene Mengen $\operatorname{Spec} A \neq V(\mathfrak{a}) \overset{0 \neq \mathfrak{a} = (f)}{=} V(f) = \{(p_1), \dots, (p_n)\}$ falls $f = p_1^{e_1} \cdots p_n^{e_n}$, p_i paarweise verschieden, $e_i \geq 1$, sind genau *endliche Mengen abgeschlossener Punkte.*

$g \neq 0 \neq f$:

$$\begin{aligned} V(f) \cap V(g) &= V(f,g) = V(d), && d = \operatorname{ggT}(f,g) \\ V(f) \cup V(g) &= V((f) \cap (g)) = V(e), && e = \operatorname{kgV}(f,g) \end{aligned}$$

Falls A *lokaler* Hauptidealring ist (also diskreter Bewertungsring, der kein Körper ist), dann:

$$\operatorname{Spec} A = \{x, \eta\}, \ \mathfrak{p}_x \text{ max. Ideal}, \ \mathfrak{p}_\eta = (0)$$

$\{\eta\}$ einzige nicht-triviale offene Menge.

Beispiel 2.14. Sei k algebraisch abgeschlossener Körper. Affine Varietäten $V \leftrightarrow$ endlich erzeugte k-Algebren A.

$V =$\{max. Ideale in A\} $\subseteq \operatorname{Spec}(A)$

Topologie auf V ist die Unterraumtopologie von $\operatorname{Spec}(A)$.

Beispiel 2.15. Sei R Hauptidealring, $A = R[T]$, $X = \operatorname{Spec}(A)$. R faktoriell $\Rightarrow R[T]$ faktoriell, nach dem Satz von Gauß, mit Primidealen:

(i) $p \in R$ prim

Beweis. $p \in R$ prim $\Rightarrow R/pR$ Körper. Nach Proposition 2.12 gilt:

$$\overline{pR[T]} = V(pR[T]) \cong \operatorname{Spec}(R/pR[T])$$

ein Hauptidealring mit unendlich vielen Elementen. Damit ist $pR[T]$ *nicht* maximal, sondern

$$V(pR[T]) = \{pR[T], (f,p), f \in R[T] \text{ mit } \overline{f} \in R/p[T] \text{ irreduzibel}\}$$

□

(ii) $f \in R[T]$ primitives Polynom, irreduzibel in $\mathrm{Quot}(R)[T]$

Beweis. Sei f primitives, irreduzibles Polynom.

- $l(f) \in R^\times \Rightarrow$ (Division mit Rest) $R \subseteq R[T]/pR[T]$ ist eine ganze Ringerweiterung und ein endl.-erz. freier R-Modul vom Rang $\deg(f)$. Angenommen, $fR[T]$ ist maximal. Dann ist $R[T]/fR[T]$ ein Körper, also R ein Körper (da ganze Ringerweiterung). Widerspruch.
- Andernfalls kann $fR[T]$ ein maximales Ideal sein: R habe nur endlich viele Primelemente.

$$0 \neq a := \prod_p p \in R, \ f := aT - 1$$

Es folgt:

$$R[T]/fR[T] \cong R[a^{-1}] = \mathrm{Quot}(R)$$

also ist $fR[T]$ maximal.

□

Exkursion über Garben

Bisher:

$$X\text{affin alg. Menge} \longmapsto \Gamma(X) = \mathrm{Hom}(X, \mathbb{A}^1) \tag{2.5}$$

Jetzt:

$$\mathrm{Spec}\, A \longleftarrow\!\shortmid A \tag{2.6}$$

d.h. A soll den Funktionen auf $\mathrm{Spec}\, A$ entsprechen. Für $x \in \mathrm{Spec}\, A$ definiert man $ev_x : A \to \kappa_A(x) := A_{\mathfrak{p}_x}/\mathfrak{p}_x A_{\mathfrak{p}_x} \cong \mathrm{Quot}(A/\mathfrak{p}_x)$ durch $f \mapsto f(x) := ev_x(f) := f \mod \mathfrak{p}_x$. Mit dieser Definition folgt insbesondere $D(f) = \{x \in \mathrm{Spec}\, A \mid f(x) \neq 0\}$. Da $x \mapsto f(x)$ keine Funktion im engeren Sinne ist, können wir diese Konstruktion nicht als System von Funktionen auffassen. Wichtige Aussagen: Restriktion + Verklebung $\rightsquigarrow$ Garben.

2.5 Prägarben und Garben

Definition 2.16. Sei X ein topologischer Raum.
(i) Eine **Prägarbe** $\mathcal{F}$ auf X besteht aus den folgenden Daten:

- eine Menge $\mathcal{F}(U)$ für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$
- Eine **Restriktionsabbildung** $res_U^V : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ für jedes Paar $U \subseteq V$ offen in X, so dass:
  - $res_U^U = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)}$
  - $res_U^W = res_U^V \circ res_V^W$ für $U \subseteq V \subseteq W$ offen in X

(ii) Ein **Morphismus von Prägarben** $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ist eine Familie von Abbildungen $\{\phi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U) \mid U \subseteq X \text{ offen }\}$, so dass für alle Paare $U \subseteq V$ offen in X, das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\phi_V"] \arrow[d, "res_U^V"] & \mathcal{G}(V) \arrow[d, "res_U^V"] \\
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\phi_U"] & \mathcal{G}(U)
\end{tikzcd}$$

Notation: $U \subseteq V$, $s \in \mathcal{F}(V)$, dann: $s|_U := res_U^V(s)$.
Die Elemente in $\mathcal{F}(U)$ heißen **Schnitte von $\mathcal{F}$ über** U, $\Gamma(U, \mathcal{F}) := \mathcal{F}(U)$.

Alternative Beschreibung:

$\mathcal{O}\mathrm{uv}_X$: Kategorie offener Mengen von X mit $\mathrm{Hom}(U, V) := \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } U \not\subseteq V \\ \{U \to V\}, & \text{falls } U \subseteq V \end{cases}$. Eine **Prägarbe auf** X ist ein kontravarianter Funktor $\mathcal{F} : \mathcal{O}\mathrm{uv}_X \to \underline{\mathrm{Set}}$. Ersetzt man $\underline{\mathrm{Set}}$ durch eine Kategorie $\mathcal{C}$, so bekommt man Prägarben **mit Werten in** $\mathcal{C}$. Ein Morphismus von Prägarben

$\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ist eine natürliche Transformation $\mathcal{F} \implies \mathcal{G}$.

Für eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X, $U \subseteq X$ offen und $U = \bigcup_i U_i$ eine offene Überdeckung von U, definiere:

$$\rho : \mathcal{F}(U) \to \prod_i \mathcal{F}(U_i), s \mapsto (s|_{U_i})_i \tag{2.7}$$

$$b : \prod_i \mathcal{F}(U_i) \to \prod_{(i,j)} \mathcal{F}(U_i \cap U_j), (s_i)_i \mapsto (s_i|_{U_i \cap U_j})_{(i,j)} \tag{2.8}$$

$$b' : \prod_i \mathcal{F}(U_i) \to \prod_{(i,j)} \mathcal{F}(U_i \cap U_j), (s_i)_i \mapsto (s_j|_{U_i \cap U_j})_{(i,j)} \tag{2.9}$$

Definition 2.17. (i) Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X heißt **Garbe**, falls für alle offenen Teilmengen $U \subset X$ und alle offenen Überdeckungen $U = \bigcup_i U_i$ wie oben gilt:

$$(Sh)\quad \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\rho} \prod_i \mathcal{F}(U_i) \overset{b}{\underset{b'}{\rightrightarrows}} \prod_{(i,j)} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

d.h. ρ ist injektiv und $\operatorname{im} \rho = \{s \in \prod_i \mathcal{F}(U_i) \mid b(s) = b'(s)\}$, mit anderen Worten: $(\mathcal{F}(U), \rho)$ ist **Equalizer** von b und b'.
Dabei ist (Sh) äquivalent zu:

(Sh0) $\mathcal{F}(\emptyset)$ ist finales Objekt.

(Sh1) Gilt für $s, s' \in \mathcal{F}(U)$ $s|_{U_i} = s'|_{U_i}$ für alle i, so folgt $s = s'$.

(Sh2) Zu jeder Familie $(s_i)_i \in \prod_i \mathcal{F}(U_i)$ mit $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ existiert ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $s|_{U_i} = s_i$.

(ii) Ein **Morphismus von Garben** ist ein Morphismus der unterliegenden Prägarben.

Wir erhalten die Kategorie $\underline{\mathcal{PS}\mathrm{h}}_X(\underline{\mathrm{Set}})$ der Mengenwertigen Prägarben auf X und die volle Unterkategorie $\underline{\mathcal{S}\mathrm{h}}_X(\underline{\mathrm{Set}})$ der Mengenwertigen Garben auf X. Analog erhalten wir Garben von abelschen Gruppen, Ringen, R-Moduln und R-Algebren.

Bemerkung 2.18. (i) $\mathcal{F} \in \underline{\mathcal{S}\mathrm{h}} \implies \Gamma(\emptyset, \mathcal{F})$ ist einpunktig (wegen (Sh) für die leere Überdeckung)

(ii) $X = \{pt\} \implies \mathcal{F}$ auf X ist eindeutig durch $\mathcal{F}(X)$ bestimmt

Beispiel 2.19. (i) $\mathcal{F} \in \underline{\mathcal{PS}\mathrm{h}}_X, U \subseteq X$ offen $\implies \mathcal{F}|_U \in \underline{\mathcal{PS}\mathrm{h}}_U$ mit $\Gamma(V, \mathcal{F}|_U) := \Gamma(V, \mathcal{F})$. Ist $\mathcal{F} \in \underline{\mathcal{S}\mathrm{h}}_X$, so ist $\mathcal{F}|_U \in \underline{\mathcal{S}\mathrm{h}}_U$.

(ii) Für X, Y top. Räume definiert $\mathcal{F}$ gegeben durch $\Gamma(U, \mathcal{F}) := \mathcal{C}(U, Y) = \{f : U \to Y \mid f \text{ stetig}\}$ und $res^U_V : f \mapsto f|_V$ eine Garbe.

(iii) k ein Körper, $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Raum mit Funktionen$/_k \implies \mathcal{O}_X$ ist Garbe von k-Algebren auf X.

(iv) Für einen top. Raum X definiert $\mathcal{F}(U) := \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig und beschränkt}\}$ eine Prägarbe auf X, im Allgemeinen aber keine Garbe.

Sei $\mathcal{B}$ eine Basis der Topologie von X und $\mathcal{F} \in \underline{\mathcal{S}\mathrm{h}}_X$. Sei für $V \subseteq X$ offen $\mathcal{B}_V := \{U \in \mathcal{B} \mid U \subseteq V\}$. Dann folgt wegen (Sh):

$$\mathcal{F}(V) \cong_{(\dagger)} \{(s_U)_U \in \prod_{U \in \mathcal{B}_V} \mathcal{F}(U) \mid \forall U' \subseteq U \in \mathcal{B}_V : s_U|_{U'} = s_{U'}\} \cong \varprojlim_{U \in \mathcal{B}_V} \mathcal{F}(U)$$

d.h. $\mathcal{F}$ ist bereits eindeutig durch die Schnitte auf einer Basis von X bestimmt.
$(\dagger)$: einfache Folgerung aus $(Sh1)$.

Eine **Prägarbe auf** $\mathcal{B}$ ist ein kontravarianter Funktor $\mathcal{F} : \mathcal{B} \to \underline{\mathrm{Set}}$. Jedes solche $\mathcal{F}$ induziert eine Prägarbe $\overline{\mathcal{F}}^X$ auf X durch $\overline{\mathcal{F}}^X(V) := \varprojlim_{U \in \mathcal{B}_V} \mathcal{F}(U)$. Für $U \in \mathcal{B}$ gilt dann $\overline{\mathcal{F}}^X(U) = \varprojlim_{U' \in \mathcal{B}_U} \mathcal{F}(U') = \mathcal{F}(U)$, da U initial in $\mathcal{B}_U$.
Ein **Morphismus von Prägarben auf** $\mathcal{B}$ ist wieder ein Morphismus von Funktoren.

Satz 2.20. *$\overline{\mathcal{F}}^X$ ist eine Garbe $\iff$ $\mathcal{F}$ erfüllt (Sh) für alle $U \in \mathcal{B}$ und Überdeckungen $U = \bigcup_i U_i$ mit $U_i \in \mathcal{B}$.*
*In diesem Fall heißt $\mathcal{F}$ **Garbe auf** $\mathcal{B}$.*

Beweis. Im Folgenden schreiben wir $\overline{\mathcal{F}} := \overline{\mathcal{F}}^X$.

„$\Rightarrow$“: $\overline{\mathcal{F}}^X(U) = \mathcal{F}(U)$ für alle $U \in \mathcal{B}$.

„$\Leftarrow$“: Sei $U \subseteq X$ offen und $U = \bigcup_i U_i$ eine offene Überdeckung von U in X.
$\underline{(Sh1)}$:

$$\varprojlim_{B \in \mathcal{B}_U} \mathcal{F}(B) = \overline{\mathcal{F}}(U) \hookrightarrow \prod_i \overline{\mathcal{F}}(U_i) \hookrightarrow \prod_i \prod_{B \in \mathcal{B}_{U_i}} \mathcal{F}(B)$$

$$s = (s_B)_B, s' = (s'_B)_B \longmapsto s|_{U_i} = s'|_{U_i} \longmapsto ((s_B)_{B \in \mathcal{B}_{U_i}})_i = ((s'_B)_{B \in \mathcal{B}_{U_i}})_i \qquad (\dagger)$$

Behauptung: $\forall B \in \mathcal{B}_U : \ s_B = s'_B$, d.h. $s = s'$. <u>denn:</u>

$$\mathcal{F}(B) \hookrightarrow \prod_i \prod_{B' \in \mathcal{B}_{U_i \cap B}} \mathcal{F}(B')$$

ist injektiv nach $(Sh1)$ für $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{B}$.
s_B und s'_B haben gleiches Bild wegen $(\dagger)$.
$\underline{(Sh2)}$:

$$\overline{\mathcal{F}}(U) \xrightarrow{\rho} \prod_i \overline{\mathcal{F}}(U_i) \longrightarrow \prod_{(i,j)} \overline{\mathcal{F}}(U_i \cap U_j)$$

„$\overline{\mathcal{F}}(U) \subseteq \ker$“ : $\rho(s) = ((s_B)_{B \in \mathcal{B}_{U_i}})_i$. Sei $T \in \mathcal{B}_{U_i \cap U_j} \subseteq \mathcal{B}_{U_i}$, $V \in \mathcal{B}_{U_i}$ und $W \in \mathcal{B}_{U_j}$. Dann folgt:
$s_V|_T = s_T = s_W|_T \implies$ Behauptung.

„$\overline{\mathcal{F}}(U) \supseteq \ker$“ : Sei $(s_i)_i \in \prod_i \overline{\mathcal{F}}(U_i)$ mit $b((s_i)_i) = b'((s_i)_i)$.
<u>Gesucht:</u> $s = (s_B)_B \in \overline{\mathcal{F}}(U)$ mit $s|_{U_i} = s_i$.

Es gilt:

$$\mathcal{F}(B) \xrightarrow{\rho} \prod_i \prod_{B' \in \mathcal{B}_{U_i \cap B}} \mathcal{F}(B') \overset{b}{\underset{b'}{\rightrightarrows}} \prod_{(i,j)} \prod_{\mathcal{B}_{U_i \cap B} \times \mathcal{B}_{U_j \cap B}} \mathcal{F}(V \cap W)$$

ist exakt, d.h. ein Equalizer-Diagramm. Konstruiere damit $s_B \in \mathcal{F}(B)$, welche kompatibles System bilden. $s = (s_B)_B$ ist dann das gesuchte Element in $\overline{\mathcal{F}}(U)$.

□

2.6 Halme von Garben

Für $x \in X$ und $\mathcal{F} \in \underline{\mathcal{PS}\mathrm{h}}_X$ ist $(\mathcal{F}(V), res_U^V)_{x \in U \subseteq X \text{offen}}$ ein filtriertes induktives System.
filtriert:
$\forall U, V \subseteq X$ offen $\exists W \subseteq U, V$ offen. (z.B. $W = U \cap V$).

Definition 2.21. Der induktive Limes (oder auch Colimes) $\mathcal{F}_x := \varinjlim_{x \in U} \mathcal{F}(U)$ heißt **Halm** von $\mathcal{F}$ in x. Für $x \in U \subseteq X$ offen hat man einen kanonischen Morphismus $\pi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x$. Das Bild eines Schnittes $s \in \mathcal{F}(U)$ unter π_U heißt **Keim** von s in x und wird mit s_x bezeichnet.

Ein Morphismus von Prägarben $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ induziert eine Abbildung $\varphi_x = \varinjlim_{x \in U} \varphi_U : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ von Halmen in x.

Beispiel 2.22. $z_0 \in X := \mathbb{C}$, $\mathcal{O}_\mathbb{C}$: Garbe der holomorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$. Dann gilt: $(U, f) \sim (V, g) \iff f$ und g haben dieselbe Taylor-Entwicklung um z_0.
$\implies \mathcal{O}_{\mathbb{C}, z_0} = \mathbb{C}\{\{z_0\}\}$ ist der Ring der Potenzreihen um z_0 mit positivem Konvergenzradius.

Satz 2.23. *Seien X ein top. Raum, $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \underline{\mathcal{PS}\mathrm{h}}_X$ und $\mathcal{F} \overset{\varphi}{\underset{\psi}{\rightrightarrows}} \mathcal{G}$ zwei Morphismen.*

(1) Ist $\mathcal{F}$ eine Garbe, so gilt $\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ ist injektiv für alle $x \in X \iff \varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ ist injektiv für alle $U \subseteq X$ offen.

(2) Sind $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Garben, so gilt:

(a) φ_x ist bijektiv für alle $x \in X \iff \varphi_U$ ist bijektiv für alle $U \subseteq X$ offen.

(b) $\varphi = \psi \iff \varphi_x = \psi_x$ für alle $x \in X$.

Beweis. Für $U \subseteq X$ offen ist

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \hookrightarrow & \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \\ \\ s & \longmapsto & (s_x)_{x \in U} \end{array}$$

injektiv, denn:
Seien $s, t \in \mathcal{F}(U)$ mit $s_x = t_x$ für alle $x \in U$. Dann gibt es für jedes $x \in U$ eine offene Umgebung $x \in V_x \subseteq U$ s.d. $s|_{V_x} = t|_{V_x}$.
$(Sh1) \implies s = t$.
Wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varphi_U"] & \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \arrow[d, "\prod_x \varphi_x"] \\ \mathcal{G}(U) \arrow[r] & \prod_{x \in U} \mathcal{G}_x \end{tikzcd}$$

welches “(1) $\Rightarrow$ “ und (2)(b) impliziert.

Allgemein gilt:

(i) Filtrierte Colimiten injektiver Abbildungen sind injektiv, d.h. "(1) $\Leftarrow$ " gilt.

(ii) Colimiten surjektiver Abbildungen sind surjektiv, d.h. "(2)(a) $\Leftarrow$ " gilt

Zu "(2)(a) $\Rightarrow$ ": reicht z.z.: Bijektivität von φ_x impliziert Surjektivität von φ_U.
Sei dazu $t \in \mathcal{G}(U)$. Wähle für alle $x \in U$ eine offene Umgebung $x \in U^x \subseteq U$ und $s^x \in \mathcal{F}(U^x)$ so dass $(\varphi_{U^x}(s^x))_x = t_x$.
$\Longrightarrow \exists x \in V^x \subseteq U^x$ offen mit $\varphi_{V^x}(s^x|_{V^x}) = t|_{V^x}$.
Da $U = \bigcup_x V^x$ offene Überdeckung, gilt für alle $x, y \in U$:

$$\varphi_{V^y \cap V^x}(s^x|_{V^y \cap V^y}) = t|_{V^y \cap V^x} = \varphi_{V^y \cap V^x}(s^y|_{V^y \cap V^x})$$

φ_U injektiv nach (1) $\Longrightarrow$ $s^x|_{V^y \cap V^y} = s^y|_{V^y \cap V^y}$.
$(Sh2) \Longrightarrow \exists s \in \mathcal{F}(U)$ mit $s|_{V^x} = s^x$ für alle $x \in U$.
$\Longrightarrow \varphi_U(s)_x = [(V^x, \varphi_{V^x}(s|_{V^x}))] = [(V^x, t|_{V^x})] = t_x \Longrightarrow \varphi_U(s) = t.$ $\square$

Definition 2.24. Ein Morphismus $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ von Garben heißt **injektiv/ surjektiv/ bijektiv** $:\Longleftrightarrow \forall x \in X : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ ist injektiv/ surjektiv/ bijektiv.

Bemerkung 2.25. $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ist surjektiv gdw. für alle $t \in \mathcal{F}(U)$ eine offene Überdeckung $U = \bigcup_i U_i$ existiert und $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ s.d. $\varphi_{U_i}(s_i) = t|_{U_i}$, d.h. lokal findet man stets ein Urbild.
Warnung: Aus φ surjektiv folgt nicht φ_U surjektiv für alle $U \subseteq X$ offen.

2.7 Die zu einer Prägarbe assoziierte Garbe

Definition 2.26. Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf einem top. Raum X. Eine **Vergarbung** (auch Garbifizierung/ assoziierte Garbe) von $\mathcal{F}$ ist eine Garbe $\mathcal{F}^{sh}$ auf X zusammen mit einem Morphismus $\iota : \mathcal{F} \to V(\mathcal{F}^{sh})$ von Prägarben, so dass gilt:

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Mor}_{\underline{\mathcal{PS}\mathrm{h}}_X}(\mathcal{F}, V(\mathcal{G})) \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Mor}_{\underline{\mathcal{S}\mathrm{h}}_X}(\mathcal{F}^{sh}, \mathcal{G}) \\
\varphi \circ \iota & \varphi \arrow[l, mapsto]
\end{tikzcd}
$$

Hierbei bezeichne $V : \underline{\mathcal{S}\mathrm{h}}_X \to \underline{\mathcal{PS}\mathrm{h}}_X$ den Vergissfunktor.
Durch diese Eigenschaft ist $(\mathcal{F}^{sh}, \iota)$ eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus bestimmt.
Ferner gilt:

(0) Es existiert eine Vergarbung $\iota : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^{sh}$

(1) ι wie oben induziert einen Isomorphismus $\iota_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}^{sh}_x$ auf Halmen für alle $x \in X$.

(2) Für jede Prägarbe $\mathcal{G}$ auf X und jeden Morphismus $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ existiert genau ein Morphismus $\varphi^{sh} : \mathcal{F}^{sh} \to \mathcal{G}^{sh}$ s.d. folgendes Diagramm kommutiert:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\iota_{\mathcal{F}}"] \arrow[d, "\varphi"] & \mathcal{F}^{sh} \arrow[d, "\varphi^{sh}"] \\
\mathcal{G} \arrow[r, "\iota_{\mathcal{G}}"] & \mathcal{G}^{sh}
\end{tikzcd}
$$

d.h. $\underline{\mathcal{PS}\mathrm{h}}_X \to \underline{\mathcal{S}\mathrm{h}}_X, \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^{sh}$ ist ein Funktor, linksadjungiert zum Vergissfunktor V.

Beweis. <u>Existenz</u>:
$\mathcal{F}^{sh}(U) := \{(s_x)_x \in \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \mid \forall x \in U : \ \exists x \in U^x \subseteq U$ offen und $t \in \mathcal{F}(U^x) : \ \forall y \in U^x : t_x = s_x\}$
"Keime, die lokal Schnitte von $\mathcal{F}$ sind" - $(Sh2)$ erzwingt dies.
Für $U \subseteq V$ ist res^V_U induziert von:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}^{sh}(V) \arrow[r, dashed, "res^V_U"] \arrow[d, hook] & \mathcal{F}^{sh}(U) \arrow[d, hook] \\
\prod_{x \in V} \mathcal{F}_x \arrow[r, "proj."] & \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x
\end{tikzcd}
$$

□

2.8 Direktes und inverses Bild von Garben

Sei $f : X \to Y$ stetige Abbildung topologischer Räume, $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X. Ziel: $f_*\mathcal{F}$ Prägarbe auf Y, das direkte Bild von $\mathcal{F}$ unter f. Definiere $(f_*\mathcal{F})(V) := \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ mit Restriktionsabbildung von $\mathcal{F}$ ($V_1 \subseteq V_2 : s \in f_*\mathcal{F}(V_2) \to s|_{V_1} = \mathcal{F}res^{f^{-1}(V_2)}_{f^{-1}(V_1)}$).

$$\begin{aligned} f_* : PSh(X) &\longrightarrow PSh(Y) \\ \mathcal{F} &\longmapsto f_*\mathcal{F} \\ \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} &\longmapsto f_*(U) : f_*\mathcal{F} \to f_*\mathcal{G} \end{aligned}$$

ist Funktor via $(f_*\varphi)_V = \varphi_{f^{-1}(V)}$.

Bemerkung 2.27 (28).

(i) $\mathcal{F}$ Garbe auf $X \Longrightarrow f_*\mathcal{F}$ Garbe auf X, d.h. $f_* : Sh(X) \to Sh(Y)$.

(ii) Ist $g : Y \to Z$ eine weitere stetige Abbildung topologischer Räume, so existiert ein offensichtlicher Isomorphismus $g_* \circ (f_*\mathcal{F}) = (g \circ f)_*\mathcal{F}$, funktoriell in $\mathcal{F}$.

Nun sei $\mathcal{G}$ eine Prägarbe auf Y.

Ziel: Definiere $f^+\mathcal{G}$ Prägarbe auf X. $f^{-1}\mathcal{G} = \widetilde{f^+\mathcal{G}}$ Garbe auf X, **Inverses Bild zu $\mathcal{G}$ unter** f via

$$(f^+\mathcal{G})(U) := \varinjlim_{Y \supseteq V \supseteq f(U)} \mathcal{G}(V)$$

mit induzierte Restriktionsabbildung.

Warnung: $\mathcal{G}$ Garbe auf $Y \rightsquigarrow f^+\mathcal{G}$ im Allgemeinen keine Garbe auf X. Falls $f : X \hookrightarrow Y$ Inklusion, $\mathcal{G}|_X := f^{-1}\mathcal{G}$. Ist $X \subseteq Y$ offen stimmt $\mathcal{G}|_X$ mit der Einschränkung aus Beispiel 19 überein (cofinales Objekt). $\rightsquigarrow f^{-1} : PSh(Y) \to Sh(X)$ Funktor.

$g : Y \xrightarrow{\text{stetig}} Z$, $\mathcal{H}$ Prägarbe auf Z, $U \subseteq X$ offen.

$$Z \underset{\text{offen}}{\supseteq} W \supseteq g(f(U)) \Longleftrightarrow W \supseteq g(V)$$

für ein $f(U) \subseteq V \subseteq Y$ offen.

$$\begin{aligned} \varinjlim\varinjlim = \varinjlim &\Longrightarrow f^+(g^+\mathcal{H}) = (g \circ f)^+\mathcal{H} \quad (*) \\ &\Longrightarrow f^{-1}(g^{-1}\mathcal{H}) = (g \circ f)^{-1}\mathcal{H} \end{aligned}$$

Beispiel 2.28. $\imath : \{x\} \to X$ Inklusion, $\mathcal{F}$ Prägarbe auf X. $\Longrightarrow \imath^{-1}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_x$ per Definition. $(*) \Longrightarrow$

$$\begin{array}{ccc} (f^{-1}\mathcal{G})_x & = & \mathcal{G}_{f(x)} \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \imath^{-1} \circ (f^{-1}\mathcal{G}) & = & (f \circ \imath)^{-1}\mathcal{G} \end{array}$$

Satz 2.29 (29)**.** *Für $f : X \to Y$ stetig sind die Funktionen f_* und f^{-1} zueinander adjungiert, d.h. für $\mathcal{F}$ Garbe auf X, $\mathcal{G}$ Prägarbe auf Y existiert eine bijektion*

$$\begin{aligned} \hom_{Sh(x)}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) &\longleftrightarrow \hom_{Psh(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}) \\ \varphi &\longmapsto \varphi^\flat \\ \psi^\sharp &\longleftarrow\!\shortmid \psi \end{aligned}$$

funktoriell in $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$.

Beweis. $\varphi : f^{-1}\mathcal{G} \to \mathcal{F}$ Morphismus von Garben auf X. $t \in \mathcal{G}(V)$, $V \subseteq Y$ offen

$$\mathcal{G}(V) \to f^+\mathcal{G}(f^{-1}(V)) \xrightarrow{\imath_{f^+\mathcal{G}}} f^{-1}\mathcal{G}(f^{-1}(V)) \xrightarrow{\varphi_{f^{-1}(V)}} \mathcal{F}(f^{-1}(V)) = f_*\mathcal{F}(V)$$

$$\shortparallel \quad \varinjlim_{Y \supseteq W \supseteq f f^{-1}(V) \subseteq V}$$

$$t \mapsto \varphi^\flat_V(t)$$

Definition von $\psi^\#$. $\mathcal{G} \xrightarrow{\psi} f_*\mathcal{F}$ Morphismus von Prägarben auf . Wir definieren $\psi^\# : f^+\mathcal{G} \to \mathcal{F}$, welches dann $\psi^\# : f^{-1}\mathcal{G} \to \mathcal{F}$ induziert. $U \subseteq X$ offen, $S \subseteq f^+\mathcal{G}(U)$, $s = [(V, s_V)]$, $V \supseteq f(U)$, $s_V \in \mathcal{G}(V)$. $\implies f^{-1}(V) \supseteq U$.

$$\begin{tikzcd} \psi_V(s_V) \in f_*\mathcal{F}(V) \arrow[r, equal] \arrow[dr, mapsto] & \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \arrow[d] \\ & \psi^\#_U(s) \in \mathcal{F}(U) \end{tikzcd}$$

Überprüfe $\varphi^{\flat\#} = \varphi$, $\psi^{\#\flat} = \mathcal{H}$ und Funktoriell. □

Definition + Proposition 29 verallgemeinern sich zu (Prä)Garben von Ringen, R-Moduln, R-Algebren.

Beschreibung von:

$$\mathcal{G}_{f(x)} = (f^{-1}\mathcal{G})_x \overset{\varphi_x}{\longmapsto} \mathcal{F}_x, \ x \in X$$

$$f(x) \in U \underset{\text{offen}}{\subseteq} Y \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{G}(U) \arrow[r, "\varphi^\flat_U"] \arrow[d, dashed] & \mathcal{F}(f^{-1}(U)) \arrow[r] & \mathcal{F}_x \\ \mathcal{G}_{f(x)} \arrow[urr, dashed] & & \end{tikzcd}$$

$$\varinjlim_U$$

2.9 Lokal geringte Räume

Definition 2.30. Ein geringter Raum ist ein Paar $(X, \mathcal{O}_X)$ bestehend aus einem topologischen Raum X und einer Garbe $\mathcal{O}_X$ (kommutativer) Ringe. Ein Morphismus $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ geringter Räume ist wiederum ein Paar $(f, f^\flat)$ bestehend aus einer stetigen Abbildung $f : X \to Y$ und einem Homomorphismus $f^\flat : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ von Ringgarben auf Y. Dieses Datum ist gleichbedeutend (Proposition 29) mit $(f, f^\sharp)$, wobei nun $f^\sharp : f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ ein Garbenhomomorphismus auf X ist.

Bezeichne: f oder $(f, f^\flat)$ oder $(f, f^\sharp)$. Damit haben wir eine **Kategorie der geringten Räume**. $\mathcal{O}_X$ heißt Strukturgarbe von X, oft schreiben wir X für $\mathcal{O}_X$.

Idee: $\mathcal{O}_X$ beschreibt die zulässigen Funktionen auf $U \subset X$, d.h. etwa stetige, differenzierbare, holomorphe, rigid analytische usw. Funktionen. Solche Funktionen auf $V \subset Y$ sollen beim "Zurückziehen" unter f in dieselbe Klasse überführt werden. Dies wird formal durch das Datum $f^\flat$ sichergestellt.

Notation. Wenn A ein lokaler Ring ist, $\mathfrak{m}_A$ das maximale Ideal, und $\kappa(A) = A/\mathfrak{m}_A$ Restklassenkörper. Ein Homomorphismus $\varphi : A \to B$ lokaler Ringe heißt **lokal**, falls $\varphi(\mathfrak{m}_A) \subset \mathfrak{m}_B$. $(f, f^\flat) = (f, f^\sharp) = X \to Y$ Morphismus geringter Räume induziert:

$$\mathcal{O}_{Y,f(x)} = (f^{-1}\mathcal{O}_Y)_x \xrightarrow{f_x^\sharp} \mathcal{O}_{X,x}$$

oder

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_Y(U) \arrow[r, "f_U^\flat"] \arrow[d] & \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) \arrow[d] \\ \mathcal{O}_{Y,f(x)} = \lim \mathcal{O}_Y(U) \arrow[r, dashed] & \mathcal{O}_{X,x} \end{tikzcd} \qquad f(x) \in U \subset Y \text{ offen}$$

Definition 2.31 (orig. 31)**.** Ein lokal geringter Raum ist ein geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, für der $\mathcal{O}_{X,x}$ für alle $x \in X$ ein *lokaler Ring* ist. Ein Morphismus $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ lokal geringter Räume ist ein Morphismus geringter Räume $(f, f^\flat)$, so dass die induzierte Abbildung

$$f_x^\sharp : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$$

ein lokaler Ringhomomorphismus ist für alle $x \in X$. Dies führt zu einer Unterkategorie der Kategorie geringter Räume, die im Allgemeinen *nicht* voll ist, d.h. es gibt Morphismen f geringter Räume zwischen lokal geringten Räume, die nicht lokal sind!

Bezeichne:

- $\mathcal{O}_{X,x}$ der "lokale Ring von X in x";
- $\mathfrak{m}_x$ maximales Ideal;
- $\kappa(x) := \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ Restklassenkörper (bei x).

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}_X(U) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X,x} & \longrightarrow & \kappa(x) \\ f & & \longrightarrow & & f(x) \end{array}$$

Warum **lokal** geringte Räume? Heuristik:

$$\mathcal{O}_X(U) \leftrightarrow \text{Funktionen auf } U$$
$$\mathcal{O}_{X,x} \leftrightarrow \text{Funktionen auf Umgebung } U \text{ von } x$$

Wunsch: $f(x) \neq 0 \overset{!}{\Rightarrow} f$ ist invertierbar auf einer kleinen Umgebung V von x, d.h.

$$\mathcal{O}_{X,x} \setminus \underbrace{\{f \mid f(x) = 0\}}_{=\mathfrak{m}_x} \subset \mathcal{O}_{X,x}^\times,$$

also $\mathcal{O}_{X,x}$ lokal. *Ferner*: $g\mathcal{O}_{Y,f(x)}$ mit $g(f(x)) = 0$ sollte implizieren: $(g \circ f)(x) = 0$. Übersetzt:

$$f_x^\sharp(\mathfrak{m}_{f(x)}) \subset \mathfrak{m}_x, \quad f_x^\sharp(g) = \text{"}g \circ f\text{"}$$

Beispiel 2.32 (orig. 32)**.** φ_X Garbe der $\mathbb{R}$-wertiger stetiger Funktionen auf einem topologischen Raum X. $\varphi_{X,x}$ Ring der Keime $[s]$ stetiger Funktionen in einer Umgebung von X:

$$\mathfrak{m}_x = \{[s] \in \varphi_{X,x} \mid 0 = s(x)\}$$

ist einziges maximale Ideal, d.h. (X, φ_X) ist lokal geringter Raum.
Denn: Sei $[s] \in \varphi_{X,x} \setminus \mathfrak{m}_x$ gegeben.
$\Rightarrow s(x) \neq 0$ für alle $s \in [s]$.
$\Rightarrow$ (s stetig) $\exists x \in U \subset X$ offen mit $s(u) \neq 0$ für alle $u \in U$.
$\Rightarrow \frac{1}{s|_U} \in \varphi_X(U)$ existiert.
$\Rightarrow \varphi_{X,x} \setminus \mathfrak{m}_x = \varphi_{X,x}^\times$ Einheitengruppe. Es ist:

$$\varphi_{X,x} \to \mathbb{R}, \ [s] \mapsto s(x)$$

ein surjektiver Ringhomomorphismus mit $\ker = \mathfrak{m}_x$.
$\Rightarrow \kappa(x) \cong \mathbb{R}$. Sei $f : X \to Y$ stetig, $V \subset Y$ offen.

$$\begin{aligned} f_x^\flat : \varphi_Y(V) &\longrightarrow \varphi_X(f^{-1}(V)) = f_*\varphi_X(V) \\ t &\longmapsto t \circ f \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \varphi_{Y,f(x)} &\longrightarrow \varphi_{X,x} \\ [t] &\longmapsto [t \circ f] \end{aligned}$$

ist ein Morphismus lokal geringter Räume. Ebenso lassen sich Prävarietäten über lokal geringte Räume interpretieren!

Das Ringsprektrum als lokal geringter Raum

Ziel: volltreuer Funktor

$$\begin{aligned} \text{Ringe} &\longrightarrow \text{Kategorie lokal geringter Räume} \\ A &\longmapsto (\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}) \end{aligned}$$

2.10 Die Strukturgarbe auf Spec A

Sei $X := \operatorname{Spec}(A)$, $\mathcal{B} = \{D(f) \mid f \in A\}$ Basis der Topologie.

Vorgegeben: Definiere Prägarbe $\mathcal{O}_X$ auf $\mathcal{B}$, die Garbenaxiome bzgl. $\mathcal{B}$ erfüllt.

Wähle: $\mathcal{O}_X(X) = A$ (vgl. Prävarietäten) bzw. $\mathcal{O}_X(D(f)) = A_f$, da

$$\begin{aligned} \imath_j : A &\longrightarrow A_f \\ a &\longmapsto \frac{a}{1} \end{aligned}$$

einen Homöomorphismus $D(f) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spec}(A_f)$ induziert. (“Funktionen mit möglichen Polen in $V(f)$).

2.10.1 Wohldefiniertheit

$D(f) = D(g) \Rightarrow A_f = A_g$ kanonisch. Dazu:

$$D(f) \subset D(g) \Leftrightarrow \exists n \geq 1 \text{ d.d. } f^n \in A_g$$

2.10.2 Induzierte Abbildung

$$\mathcal{O}_X(D(g)) \to \mathcal{O}_X(D(f)),\ \rho_{f,g} =: \operatorname{res}^{D(g)}_{D(f)}$$

Dies definiert eine Prägarbe auf $\mathcal{B}$.

Theorem 2.33 (orig. 33)**.** *Die Prägarbe $\mathcal{O}_X$ ist eine Garbe auf $\mathcal{B}$. Die induzierte Garbe auf X*

(Proposition 20) werde auch mit $\mathcal{O}_X$ bezeichnet. Da

$$\mathcal{O}_{X,x} := \varinjlim_{D(f)\ni x} \mathcal{O}_X(D(f)) = \varinjlim_{f\in\mathfrak{p}_x} A_f = A_{\mathfrak{p}_x}$$

mit $(X, \mathcal{O}_X) = (\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$ (kurz $\operatorname{Spec} A$) ein lokal geringter Raum.

Beweis. Sei $D(f) = \bigcup_{i\in I} D(f_i)$ Überdeckung in $\mathcal{B}$. Zu zeigen:

(i) $s \in \mathcal{O}_X(D(f))$ mit $s|_{D(f_i)} = 0$, $i \in I$.
$\overset{!}{\Rightarrow} s = 0$.

(ii) $s_i \in \mathcal{O}_X(D(f_i))$, $i \in I$, mit $s_i|_{D(f_i)\cap D(f_j)} = s_j|_{D(f_i)\cap D(f_j)}$ $\forall i,j \in I$.
$\overset{!}{\Rightarrow} \exists s \in \mathcal{O}_X(D(f))$ mit $s|_{D(f_i)} = s_i$ $\forall i \in I$.

Ohne Einschränkung:

- I endlich, da $D(f)$ quasi-kompakt.
- $f = 1$, $D(f) = X$ (mit $(A_f, \mathcal{O}_X|_{D(f)})$ statt $(A, \mathcal{O}_X)$ betrachtet)

$$X = \bigcup_{i\in I} D(f_i) \Leftrightarrow (f_i \mid i \in I) = A$$

Es folgt: $b_i = b_i(n) \in A$ d.d. $\sum_{i\in I} b_i f_i^n = 1$ **Zerlegung der 1**. (z)

Zu 1. Sei $s = a \in A$ d.d. $0 = \frac{a}{1} \in A_f$, $\forall i \in I$. I endlich, also $\exists n \geq 1$ d.d. $f_i^n a = 0$ $\forall i \in I$. Mit (z) folgt

$$a = \left(\sum_{i\in I} b_i f_i^n\right) a = 0$$

Zu 2. $s_i = \frac{a_i}{f_i^n}$ für n geeignet, unabhängig von $i \in I$ (endlich). Nach Voraussetzung:

$$\frac{a_i}{f_i^n} = \frac{a_j}{f_j^n} \in A_{f_i f_j}, \quad D(f_i) \cap D(f_j) = D(f_i f_j)$$

Es folgt: $\exists m \geq 1$ d.d. $(f_i f_j)^m (f_j^n a_i - f_i^n a_j) = 0$ $\forall i, j$.

$$\frac{a_i}{f_i^n} = \frac{f_i^m a_i}{f_i^{n+m}} =: \frac{a_i'}{f_i^{n'}}, \quad n' = n + m$$

Ohne Einschränkung: $f_j^n a_i = f_i^n a_j$ $\forall i, j \in I$, (*) denn:

$$f_j^{m+n} f_i a_i = f_i^{m+n} f_j^m a_j$$
$$f_j^{n'} a_i' = f_i^{n'} a_j'$$

Setze $s := \sum_{j\in I} b_j a_j \in A$ $((z))$. Es folgt:

$$f_i^n s = f_i^n \sum b_i a_j = \sum b_j (f_i^n a_j) \overset{(*)}{=} \left(\sum b_i f_i^n\right) a_i \overset{(z)}{=} a_i$$

also $\frac{s}{1} = \frac{a_i}{f^n} = s_i$.

$\square$

2.11 Der Funktor $A \mapsto (\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$

Definition 2.34 (34)**.** Ein lokal geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt **affines Schema**, falls ein Ring A existiert d.d

$$(X, \mathcal{O}_X) \cong (\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$$

Ein **Morphismus affiner Schemata** ist ein Morphismus lokal geringter Räume. Bezeichne $\underline{\mathrm{Aff}}$ die Kategorie der affinen Schemata.

$$\begin{aligned} \varphi : A &\longrightarrow B && \text{Ringhom.} \\ f : X := \operatorname{Spec} A &\longrightarrow Y := \operatorname{Spec} A && \text{stetige Abb.} \end{aligned}$$

Ziel: Definiere $(f, f^\flat) : X \to Y$ mit $f :=^a \varphi$ Morphismus von lokal geringter Räume und

$$f^\flat_{\operatorname{Spec} A} = \varphi : A = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(\operatorname{Spec} A) \to f_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}(\operatorname{Spec} B) = B$$

Dazu: Für $s \in A$ gilt $f^{-1}(D(s)) = D(\varphi(s))$ nach Proposition 2.10. Definiere

$$f^\flat_{D(s)} : \mathcal{O}_Y(D(s)) = A_s \to B_{\varphi(s)} = f_*\mathcal{O}_X(D(s))$$

als die von φ induzierte Abbildung. $f^\flat$ ist kompatibel mit $\operatorname{res}^{D(s)}_{D(t)}$ für prinzipal offene Mengen $D(t) \subseteq D(s)$. B Basis $\Longrightarrow$ $f^\flat : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ Homomorphismus von Ringgarben. Für $s = 1$ erhalten wir $f^\flat_{\operatorname{Spec} A} = \varphi$!

Für $x \in X$ gilt:

$$\begin{tikzcd} f^\sharp : \mathcal{O}_{Y,f(x)} = A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p}_x) = \mathfrak{p}_{f(x)}} \arrow[r] & B_{\mathfrak{p}_x} = \mathcal{O}_{X,x} \\ A \arrow[u] \arrow[r, "\varphi"] & B \arrow[u] \end{tikzcd} \qquad (*)$$

ist der von φ induzierte Homomophismus. $f^\sharp_x$ is lokal:

$$\varphi(\varphi^{-1}(\mathfrak{p}_x)) \subseteq \mathfrak{p}_x$$

Bezeichne: ${}^a\varphi$ für $\operatorname{Spec}(\varphi) = (f, f^\flat)$, ${}^a(\psi \circ \varphi) =^a \varphi \circ^a \psi$. Wir erhalten einen kontravarianten Funktor

$$\operatorname{Spec} : \underline{Ring} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aff}}\,.$$

Für $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ Morphismus von geringten Räumen erhalten wir einen Ringhomomorphismus

$$\Gamma(f) := f^\flat_Y : \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_Y(Y) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X) = (f_*\mathcal{O}_X)(Y) = \mathcal{O}_X(X).$$

So erhalten wir einen kontravarianten Funktor

$$\Gamma : \underline{\mathrm{Aff}} \longrightarrow \underline{\mathit{Ring}}.$$

Theorem 2.35 (35)**.** *Die Funktoren* Spec *und* Γ *definieren eine Anti-Äquivalenz zwischen der Kategorie der Ringe und der Kategorie der affinen Schemata.*

Beweis. Spec ist essentiell surjektiv per Definition. $\Gamma \circ \operatorname{Spec}$ ist isomorph zu $\mathrm{id}_{\underline{\mathit{Ring}}}$ nach Konstruktion.Zu zeigen:

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Ring}}}(A, B) \overset{[}{\Gamma}]\mathrm{Spec}\rightleftharpoons \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Aff}}}(\operatorname{Spec} B, \operatorname{Spec} A)$$

sind zueinander invers. Es fehlt die Verkettung $\operatorname{Spec} \circ \Gamma = \mathrm{id}_{\underline{\mathrm{Aff}}}$. Sei $f \in \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Aff}}}(\operatorname{Spec} B, \operatorname{Spec} A)$, $\varphi := \Gamma(f)$, ${}^a\varphi = f$. Für $\mathfrak{p}_x \in \operatorname{Spec} B = X$ ist $f_x^\sharp$ der eindeutig bestimmte Ringhomomorphismus, welcher das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f^\flat_{\operatorname{Spec} A}=\Gamma(f)=\varphi"] \arrow[d, "\imath_A"'] & B \supset \imath_B^{-1}(\mathfrak{p}_x B_{\mathfrak{p}_x}) = \mathfrak{p}_x \arrow[d, "\imath_B"] \\ A_{\mathfrak{p}_{f(x)}} \arrow[r, "f_x^\# \text{ lokal}"'] & B_{\mathfrak{p}_x} \underset{\max}{\supset} \mathfrak{p}_x B_{\mathfrak{p}_x} \end{tikzcd} \qquad (**)$$

kommutieren lässt. Es gilt:

$$\mathfrak{p}_{f(x)} A_{\mathfrak{p}_{f(x)}} \supseteq (f_x^\sharp)^{-1}(\mathfrak{p}_x B \mathfrak{p}_x) = \mathfrak{p}_{f(x)} A_{\mathfrak{p}_{f(x)}}$$
$$\mathfrak{p}_{f(x)} = \imath_A^{-1}(\mathfrak{p}_{f(x)} A \mathfrak{p}_{f(x)}) \subset A$$

$f_x^\#$ lokal $\Longrightarrow f_x^\#(\mathfrak{p}_{f(x)} A_{\mathfrak{p}_{f(x)}}) \subset \mathfrak{p}_x B_{\mathfrak{p}_x} \Longrightarrow^a \varphi = f$ als stetige Abbildung. Wegen $(*)$ lässt auch $({}^a\varphi)_x^\#$ das Diagramm $(**)$ kommutieren. Proposition $\Longrightarrow ({}^a\varphi)^\# = f^\#$. $\square$

2.12 Beispiele

Beispiel 2.36 (36, Integritätsbereiche)**.** Sei A integer, $K = \mathrm{Quot}(A)$. Sei $X = \operatorname{Spec} A$, $\eta = (0)$. Dann ist$\overline{\{\eta\}} = \operatorname{Spec} X$, d.h. jede nicht-leere offene Menge $U \subset X$ enthält η. Es folgt: $\mathcal{O}_{X,y} = A_{(0)} = K$. Für alle $f \in A$ gilt nach Definition

$$\mathcal{O}_X(D(f)) = A_f \subset U.$$

Sei $U \subset X$ beliebig offen. Es folgt:

$$\mathcal{O}_X(U) = \varprojlim_{D(f) \subset U} \mathcal{O}_X(D(f) = \bigcap_{\substack{f \in A \\ D(f) \subset U}} A_f \subseteq K.$$

Wie im Beweis von Satz 1.37 ist $a_F = \bigcap_{\mathfrak{p} \in D(f)} A_{\mathfrak{p}}$, also $\mathcal{O}_X(U) = \bigcap_{x \in U} \mathcal{O}_{X,x}$.

Beispiel 2.37 (37, Prinzipal offene Unterschemata affiner Schemata)**.** Sei $X = \operatorname{Spec} A$, $f \in A$. Sei $j : \operatorname{Spec} A_f \to \operatorname{Spec} A$ induziert von $A \to A_f$. $\Longrightarrow j : \operatorname{Spec} A_j \to D(f)$ ist Homoömorphismus (Proposition 2.12). Für alle $x \in D(f)$ ist $j_x^{\#}$ der kanonische Isomorphismus $A_{\mathfrak{p}_x} \overset{\cong}{\to} (A_f)_{\mathfrak{p}_x}$. $\Longrightarrow (j, j^{\#})$ induziert einen Isomorphismus $\operatorname{Spec} A_f \cong (D(f), \mathcal{O}_{X|D(f)})$.

Beispiel 2.38 (38, Abgeschlossene Unterschemata affiner Schemata)**.** Sei $X = \operatorname{Spec} A$ und $\mathfrak{a}$ ein Ideal von A. Sei $\imath : \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a} \to \operatorname{Spec} A$ der von $A \to A/\mathfrak{a}$ induzierte Morphismus affiner Schemata. Nach Proposition 2.12 induziert $\imath$ einen Homöomorphismus $\operatorname{Spec} A/\mathfrak{a} \overset{\cong}{\to} V(\mathfrak{a}) \subseteq \operatorname{Spec} A$. Sei $\overline{\mathfrak{p}_x}$ das Bild von $\mathfrak{p}_x$ in $A/\mathfrak{a}$. Für alle $x \in V(\mathfrak{a})$ ist der Morphismus $i_x^{\flat}$ der kanonische Homomorphismus $A_{\mathfrak{p}_x} \to (A/\mathfrak{a})_{\overline{\mathfrak{p}_x}}$. ($= 0$, falls $x \in V(\mathfrak{a})$, also $\mathfrak{a} \notin f_x$.) Schreibe kurz $V(\mathfrak{a})$ für den lokal geringten Raum

$$\big(V(\mathfrak{a}), \imath_x(\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}})|_{V(\mathfrak{a})}\big) \overset{[}{i}]\cong\longleftarrow \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a})$$

Da $x \in V(\mathfrak{a})$, ist $\imath_x(\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}})|_{V(\mathfrak{a})} \overset{\cong}{\longrightarrow} i_x \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}}$.

Beispiel 2.39 (39)**.** Sei B ein Ring und $\mathfrak{b} \subset B$ Ideal. $V(\mathfrak{b}^n) = V(\mathfrak{b}) \subset \operatorname{Spec} B$ als abgeschlossene Teilmenge hängt *nicht* von $n \geq 1$ ab, aber $\operatorname{Spec}(B/\mathfrak{b}^n) = V(\mathfrak{b}^n)$ als offenes Schemata sehr wohl!

Etwa: $B = k[T]$, $b = (T)$ mit k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Für die abgeschlossenen Punkte von $\mathbb{A}_k^1 = \operatorname{Spec} k[T]$ gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{Spec}(k[T]) &\longleftrightarrow k \\ \mathfrak{b} &\longleftrightarrow 0 \end{aligned}$$

Sei $A = k[T]/(T^n)$, $X = \operatorname{Spec} A = \{x\}$. Es gilt:

$$\begin{gathered} \mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_{X,x} = A \\ \kappa(x) = k \\ n > 1 : \ 0 \neq \mathfrak{m}_x = T \mod T^n \end{gathered}$$

Betrachte $X \subset \mathbb{A}^1_k$ als abgeschlossenes „Unterschemata“ welches „konzentriert in einem Punkt“ ist. $B = k[T]$ ist k-Algebra von Funktionen auf $\mathbb{A}^1(k)$. (vgl. Beispiel 2.14.) Die Einschränkung einer solchen Funktion $f \in k[T]$ auf X ist gegeben durch $k[T] \to k[T]/(T^n)$. Wir unterscheiden:

$n = 1$. $k[T]/(T^n) = k$, $f \mapsto f(0)$.

$n > 1$. $k[T]/(T^n) \neq k$, $f \mapsto$ („Taylor-Entwicklung“ von A um 0 der Länge $n-1$). $\{x\} \subset \mathbb{A}^1_k$ hat „infinitesimale Ausdehnung der Länge $n-1$ in $\mathbb{A}^1_k$“

Sei nun $\mathbb{A}^2_k := \operatorname{Spec}(k[T,U])$ betrachtet als $\{(u,t) \mid u, f \in k\} = k^2$. Sei $\mathfrak{a}_1 = (U)$, $\mathfrak{a}_2 = (U - T^n)$. Diese definieren:

$$X_1 = \{u,t) \in \mathbb{A}^2(k) \mid u = 0\}, \quad X_2 = \{(u,t) \in \mathbb{A}^2(k) \mid u = t^n\}.$$

Es ist $X_1 \cap X_2 = \{(0,0)\}$ als Menge. Aber für $n > 1$ treffen sich beide Mengen *nicht* transversal! Als affine Schemata wird später der Schnitt als $\operatorname{Spec} k[T,U]/(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)$ definiert, also eine präzisere Beschreibung als Durchschnitt.

Kapitel 3

Schemata

= Verkleben affiner Schemata

3.1 Schemata

Definition 3.1. Ein Schemata ist ein lokal geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, der eine offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ besitzt, so dass alle lokal geringten Räume $(U_i, \mathcal{O}_{X|U_i})$ affine Schemata sind. Für ein Schemata S bezeichne $\underline{\mathrm{Sch/S}}$ die **Kategorie der Schemata über** S oder S-Schemata. Die Objekte dieser Kategorie sind Morphismen $X \to S$ von Schemata, und die Morphismen $\mathrm{Hom}(X \to S, Y \to S)$ sind Morphismen $X \to Y$ von Schemata so dass

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

kommutiert. $X \to S$ heißt **Strukturmorphismus** des S-Schematas X. Ist $S = \operatorname{Spec} R$ affin, spricht man auch von R-Schemata oder Schemata über R. Die Menge der Morphismen $X \to Y$ in $\underline{\mathrm{Sch/S}}$ bezeichnen wir mitt $\mathrm{Hom}_S(X, Y)$ bzw. $\mathrm{Hom}_R(X, Y)$ falls $S = \operatorname{Spec} R$ affin ist.

3.2 Offene Unterschemata

Erinnerung: $X = \operatorname{Spec} A$ affin $\Longrightarrow (D(f), \mathcal{O}_{X|D(f)})$ auch affin, und $D(f)$ Basis der Topologie.

Satz 3.2 (2)**.** *Sei X ein Schemata.*

*(i) Ist $U \subset X$ eine offene Teilmenge, dann ist der lokal geringte Raum $(U, \mathcal{O}_{X|U})$ wieder ein Schemata. U heißt ein **offenes Unterschemata**. Ist U affin, dann heißt U **affines offenes Schemata**.*

(ii) Die zugrundlegenden topologische Räume der affinen offene Unterschemata bilden eine Basis der Topologie.

Beweis. Es gibt eine Überdeckung (U_i) von X, d.d. $(U_i, \mathcal{O}_{X|U_i})$ affine Schemata, $\cong \operatorname{Spec} A$. Es gilt:

$$U = \bigcup_i (U \cap U_i) = \bigcup_{i, j \in I_i} D(f_{ij})$$

wobei die letzte Gleichheit gilt wegen $\operatorname{Spec}(A_i) \supset U \cap U_i = \bigcup_{j \in I_i} D(f_{ij})$, $f_{ij} \in A_i$. □

Zu $U \subset X$ offen gibt es einen kanonischen Morphismus von Schemata

$$(j, j^\flat) : (U, \mathcal{O}_{X|U)} \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$$

via der Inklusion $j : U \hookrightarrow X$ und $j^\flat : \mathcal{O}_X \to j_*(\mathcal{O}_{X|U})$. Für $V \subseteq X$ offen ergibt $\operatorname{res}^V_{V \cap U}$ einen Ringhomomorphismus:

$$\Gamma(V, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(V \cap U, \mathcal{O}_X) = \Gamma(j^{-1}(V), \mathcal{O}_{X|U}) = \Gamma(V, j_* \mathcal{O}_{X|U}).$$

Eine affine offene Überdeckung eines Schematas X ist eine Überdeckung $X = \bigcup U_i$, sodass alle U_i affine offene Unterschemata sind.

Lemma 3.3 (3)**.** *Sei X ein Schemata, und seien $U, V \subset X$ affin offene Unterschemata. Dann existiert für jedes $x \in U \cap V$ eine Umgebung $x \in W \subset U \cap V$ offenes Unterschema, welches gleichzeitig prinzipal offen in U* und *V ist.*

Beweis. Sei ohne Einschränkung $V \subset U$ (sonst ersetze V durch eine prinzipiale offene Teilmenge von V welche x enthält). Wähle:

$$\begin{array}{ccc} f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X) & & \text{d.d. } x \in D(f) \subset V \\ \big\downarrow{\scriptstyle \text{res}} & & \\ f|_V \in \Gamma(V, \mathcal{O}_X) & & D_U(f) = D_V(f|_V) \end{array}$$

denn $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)_f = \mathcal{O}_X(D_U(f)$, $\Gamma(V, \mathcal{O}_X)_{f|_V} = \mathcal{O}_X(D_V|f_{|_V})$. □

3.3 Morphismen in affinen Schemata hinein

Satz 3.4 (4)**.** *Sei X ein Schemata, $Y = \operatorname{Spec} B$ ein affines Schemata. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}(X,Y) &\xrightarrow{\cong} \operatorname{Hom}_{\underline{\text{Ring}}}(B, \Gamma(X, \mathcal{O}_X)), \\ (f, f^\flat) &\longmapsto f^\flat_Y \end{aligned}$$

eine Bijektion.

Satz 3.5 (5, Verkleben von Morphismen)**.** *Seien X, Y lokal geringte Räume. Für $U \subset X$ offen definiert*

$$\mathcal{F} : U \mapsto \operatorname{Hom}(U, Y) = \{(U, \mathcal{O}_{X|U}) \to (Y, \mathcal{O}_Y) \text{ Morph. lokal ger. Räume}\}$$

eine Garbe von Mengen auf X, d.h.

(i) für eine offene Überdeckung $X = \bigcup_i U$, eine Familie $f_i : U_i \to Y_i$ verkleben zu Morphismen

$$f : X \to Y \iff f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$$

(ii) f ist eindeutig bestimmt.

Bemerkung. $\mathcal{G} : U \mapsto \operatorname{Hom}_{\underline{\text{Ring}}}(B, \Gamma(U, \mathcal{O}_X))$ *ist Garbe von Mengen.*

Beweis von Proposition 5. Verkleben topologischer Räume + stetige Abbildung klar. ✓
$\mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X$ lässt sich ebenfalls verkleben. □

Beweis von Proposition 4. $X = \bigcup_i U_i$ sei eine affine offene Überdeckung. Nach Proposition 2.35 ist $\operatorname{Hom}(U, Y) \to \operatorname{Hom}(B, \Gamma(U, \mathcal{O}_X))$ eine Bijektion. Für $V \subset U_i \cap U_j$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Hom}(U,Y) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & \operatorname{Hom}(B, \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \arrow[d] \\ \operatorname{Hom}(V,Y) \arrow[r, "\cong"] & \operatorname{Hom}(B, \Gamma(V, \mathcal{O}_X)) \end{tikzcd}$$

da $\Gamma(-)$ funktoriell ist. Es folgt, dass $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von Garben ist mit φ_U : $\mathcal{F}(U) \stackrel{\cong}{\to} \mathcal{G}(U)$ für alle $U \in \mathcal{B}$, und $F \stackrel{\cong}{\to} \mathcal{G}$ als Garbe. Somit $\mathcal{F}(X) \cong \mathcal{G}(X)$. □

$V \subset X$ offen beliebig, $\varphi_V = \varprojlim_{U \in B_V} \varphi_U$.

Da $\mathbb{Z}$ kofinales Objekt in der Kategorie der Ringe ist ($\mathbb{Z} \stackrel{\exists_1}{\to} R$ für beliebige Ringe R), gilt:

Korollar 3.6 (6)**.** *Sei X ein Schemata. X besitzt einen eindeutig bestimmten Morphismus $X \to \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$, d.h. $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ ist ein terminales Objekt in der Kategorie der Schemata: Jedes Schemata ist ein $\mathbb{Z}$-Schemata.*

Weiterhin:

$$\operatorname{Hom}(X, \underbrace{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[T]}_{\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}}) = \operatorname{Hom}_{\underline{\mathrm{Ring}}}(\mathbb{Z}[T], \mathcal{O}_X(X)) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$$

$$\operatorname{Hom}_R(X, \underbrace{\operatorname{Spec}R[T]}_{\mathbb{A}^1_R}) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \text{ als } R\text{-Algebra für } R\text{-Schemata } X$$

3.4 Morphismen der Form $\operatorname{Spec}(K) \to X$

Sei X ein Schemata und sei $x \in U \subset X$ offene affine Umgebung von x, z.B. $U = \operatorname{Spec} A$. Sei $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_x \subset A$. Es folgt: $\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{U,x} = A_{\mathfrak{p}}$, und der Homomorphismus $A \to A_{\mathfrak{p}}$ induziert

$$j_x : \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} = \operatorname{Spec} A_{\mathfrak{p}} \longrightarrow \operatorname{Spec} A = U \subset X$$

Morphismus von Schemata, welcher nach Proposition 2 unabhängig von U ist. Nach Proposition 2.22 ist

$$\begin{aligned} j_x : \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \xrightarrow{\cong} Z &= \{x' \in X \mid x' \text{ Verallgemeinerung von } x\} \\ (x \in \{x'\} \Leftrightarrow \mathfrak{p}_{x'} \subset \mathfrak{p}_x) \ &= \bigcap_{x \in U \subseteq_{\text{off.}} X} U \end{aligned}$$

Sei $\kappa(x) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$. Die Abbildung $\mathcal{O}_{X,x} \to \kappa(x)$ induziert einen Morphismus von Schemata

$$\begin{aligned} i_x : \operatorname{Spec} \kappa(x) \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow X \\ \{\text{pt}\} \longmapsto x \end{aligned}$$

Nun sei K ein beliebiger Körper, und $f : \operatorname{Spec} K \to X$ ein beliebiger Morphismus mit $f(\{\text{pt}\}) = x \in X$. Dieser induziert einen lokalen Homomorphismus

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{X,x} \arrow[r] \arrow[d] & K = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(K),(0)} \\ \kappa(x) \arrow[ur, "\imath"'] & \end{tikzcd}$$

d.h. f faktorisiert als $f = i_x \circ (\operatorname{Spec} \imath) : \operatorname{Spec} K \to \operatorname{Spec} \kappa(x) \to X$. Damit haben wir:

Satz 3.7 (7). *Die Abbildung*

$$\operatorname{Hom}(\operatorname{Spec} K, X) \longrightarrow \{(x, \imath) : x \in X,\ \imath : \kappa(x) \to K\}$$

ist eine Bijektion.

Beweis. Umgekehrt bilden wir:

$$(x, \imath : \kappa(x) \to K) \longrightarrow (\operatorname{Spec} K \stackrel{\operatorname{Spec} \imath}{\to} \operatorname{Spec} \kappa(x) \stackrel{i_x}{\to} X).$$

□

3.5 Verkleben von Schemata und disjunkte Vereinigung

Definition 3.8. Ein **Verklebe-Datum** von Schemata besteht aus:

- einer Indexierung I;
- ein Schemata U_i für $i \in I$;
- ein affines Unterschemata $U_{ij} \subset U$ für alle $i, j \in I$;
- einen Isomorphismus $U_{ij} \overset{[}{\cong}]\varphi_{ji}\longrightarrow U_{ji}$ für alle $(i, j) \in I \times I$, sodass:
  (i) $U_{ii} = U_i$ für alle $i \in I$;
  (ii) (Kozykel-Bedingung): $\varphi_{kj} \circ \varphi_{ji} = \varphi_{ki}$ auf $U_{ij} \cap U_{ik}$, für alle $i, j, k \in I$.

Für die Kozykel-Bedingung soll implizit gelten:

$$\begin{aligned} \varphi_{ji}(U_{ij} \cap U_{ik}) &\subseteq U_{jk} \\ i = j = k \Rightarrow \varphi_{ii} &= \mathrm{id}_{U_i}, \\ \varphi_{ij}^{-1} &= \varphi_{ji}, \text{ und} \\ \varphi_{ji} : U_{ij} \cap U_{ik} &\xrightarrow{\cong} U_{ji} \cap U_{jk} \end{aligned}$$

Satz 3.9 (9)**.** *Zu einem Verklebe-Datum $((U_i)_{i\in I}, (U_{ij})_{i,j\in I}, (\varphi_{ij})_{i,j\in I})$ gibt es ein Schemata X zusammen mit Morphismen $\psi_i : U_i \to X$, sodass*

- *für alle $i \in I$ induziert ψ_i einen Isomorphismus von U_i auf offene Unterschemata von X;*
- *$\psi_j \circ \varphi_{ji} = \psi_i$ auf U_{ij} für alle $i, j \in I$;*
- *$X = \bigcup_i \psi_i(U)$;*
- *$\psi_i(U_i) \cap \psi_j = \psi_i(U_{ij}) = \psi_j(U_{ji})$ für alle $i, j \in I$.*

$(X, \psi_{i\in I})$ ist eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie bestimmt.

Zusammen mit Proposition 5 folgt die universelle Eigenschaft: Für $(T, \xi_i : U_i \to T)$ mit ξ_i welche Isomorphismen

$$U_i \xrightarrow{\cong} \{\text{offenes Unterschemata von } T\}$$

induzieren, sodass $\xi_j \circ \varphi_{ji} = \xi_i$ auf U_{ij} für alle $i, j \in I$, dann gibt es einen eindeutigen Morphismus $\xi : X \to T$ mit $\xi \circ \psi_i = \xi_i$ für alle $i \in I$. ($\Longrightarrow$ Eindeutigkeit von Proposition 9)

Beweis. Als topologischer Raum: $\coprod_{i\in I} U_i/\sim$ mit $x_i \in U_i \sim x_j \in U_j :\Leftrightarrow x_i \in U_{ij},\ x_j \in U_{ji}$ und $x_j = \varphi_{ji}(x_i)$. Nach Eigenschaft (b) ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation. Dann sind $\psi_i : U_i \to X$ injektiv. Ferner haben wir $\forall i, j \in I$ die Eigenschaft $\psi_i(U_i) = \psi_i(U_i) \cap \psi_j(U_j)$.

X hat also als topologischer Raum die Quotiententopologie, d.h. die feinste Topologie sodass alle Abbildungen ψ_i stetig sind. $U \subset X$ offen genau dann, wenn $\psi_i^{-1}(U) \subset U_i$ dort offen sind $\forall i \in I$. Insbesondere sind $\psi_i(U_i)$ und $\psi_i(U_j) = \psi_i(U_i) \cap \psi_j(U_j)$ offen in X.

Als lokal geringter Raum: "Verkleben der Strukturgarben auf U_i". $\mathcal{O}_X$ ist eindeutig auf einer Basis B der Topologie definiert. Ohne Einschränkung reicht es hier, die Schnitte nur auf $U \subset X$ offen mit $U \subset \psi_i(U_i)$ für ein $i \in I$. In dem Fall:

$$\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_{U_i}(\psi_i^{-1}(U))$$

Für $U \subset \psi_i(U_i) \cap \psi_j(U_j)$

$$\begin{tikzcd} U_{ij} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\cong"'] & U_i \\ U_{ji} \arrow[r, hook] & U_i & X \supset U \end{tikzcd}$$

Dann gilt:

$$\mathcal{O}_{U_i}(\psi_i^{-1}(U)) = \mathcal{O}_{U_{ij}}(\psi_i^{-1}(U)) \cong \mathcal{O}_{U_{ji}}(\psi_j^{-1}(U)) = \mathcal{O}_{U_j}(\psi_j^{-1}(U))$$

Es folgt: $\mathcal{O}_X(U)$ unabhängig von Wahlen von i! Wir halten damit $\mathcal{O}_X$ Ringgarbe auf X, sodass $(X, \mathcal{O}_X)$ lokal geringter Raum da $(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$ lokal geringter Raum $\forall i \in I$, $U_i \xrightarrow[\psi_i]{\cong} (\psi_i(U_i), \mathcal{O}_X|_{\psi_i(U_i)})$ als lokal geringter Raum. Damit ist X ein Schema und $X = \cup U_i$.

Spezialfall: $U_{ij} = \emptyset$ für alle $i \neq j \in I$, $\coprod U_i$ "disjunkte Vereinigung". $\square$

Beispiel 3.10 (10)**.** $X_1, \dots, X_n$ affine Schemata, $X_i = \operatorname{Spec} A_i$. Dann ist

$$\coprod X_i \cong \operatorname{Spec}\left(\prod_{i=1}^n A_i\right) \text{ offen.}$$

(nicht für unendlich viele affin!)

Beispiel 3.11 (11)**.** $I = \{1, 2\}$, $U_{12} \subset U_1 \overset{\varphi}{\to} U_{21} \subset U_2$.

$$X \underset{\text{offen}}{\subset} V = U_1 \cup_\varphi U_2,$$

$\Gamma(V, \mathcal{O}_X) = \{(s_1, s_2) \in \Gamma(V \cap U_1, \mathcal{O}_{U_1}) \times \Gamma(V \cap U_2, \mathcal{O}_{U_2})\}$, $\varphi^\flat(S_2|_{U_{21} \cap V}) = S_1|_{U_{12} \cap V}$.

Affine Gerade mit Doppelpunkt: k Körper.

$$\begin{aligned} U_1 = U_2 = \mathbb{A}_k^1 &= \operatorname{Spec}(k[T]) \cong x \text{ abg.} \\ U_{12} &:= U_1 \backslash \{x\} \\ U_{21} &:= U_2 \backslash \{x\}, \ \varphi = \mathrm{id} \end{aligned}$$

$X = U_1 \cup_\varphi U_2$. **Aufgabe.** X ist **nicht** affin!

3.6 Der projektive Raum als Schema

Sei R Ring. $\mathbb{P}^n_R$ Verklebung von $(n+1)$-Kopien des

$$\begin{array}{c} \mathbb{A}^n_R = \mathrm{Spec}(R[T_1,\ldots,T_n]) \\ \rotatebox{90}{$=$} \\ \mathrm{Spec}\left(R\left[\frac{X_0}{X_i},\ldots,\frac{\hat{X}_i}{X_i},\ldots,\frac{X_n}{X_i}\right]\right) = U_i, i = 0,\ldots,n \end{array}$$

Verklebungs Datum:

$$\begin{aligned} B :=& R[X_0,\ldots,X_n,X_0^{-1},\ldots,X_n^{-1}] \\ U_{ij} :=& D\left(\frac{X_j}{X_i}\right) \subset U_i,\ \text{OE } i \neq j \leq n, \\ U_{ii} =& U_i,\ \varphi_{ii} = \mathrm{id} \end{aligned}$$

$\varphi_{ji} : U_{ij} \to U_{ji}$ definiert durch

$$\begin{tikzcd} R\left[\frac{X_0}{X_i},\ldots,\frac{\hat{X}_i}{X_i},\ldots,\frac{X_n}{X_i}\right]_{\frac{x_j}{x_i}} \arrow[r, equal, "''\mathrm{id}''"] \arrow[dr, hook] & R\left[\frac{x_0}{x_j},\ldots,\frac{\hat{x}_j}{x_j},\ldots,\frac{x_n}{x_j}\right]_{\frac{x_i}{x_j}} \arrow[d, hook] \\ & B \end{tikzcd}$$

Mit "id" folgt: Kozykelbedingung automatisch, $U_i \to \mathrm{Spec}(R)$ verkleben von $\mathbb{P}^n_R \to \mathrm{Spec}(R)$ mit $\mathbb{P}^n_R := \coprod U_i/\sim$ Schema (über R). "Der projektive Raum relativer Dimension n über R".
Aufgabe. $R \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathbb{P}^n_R, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R})$ (Strukturgarbe) d.h. für $n > 0$ ist $\mathbb{P}^n_R$ nicht affin (mit $\mathbb{P}^n_R = \mathrm{Spec}(R)$).

3.7 Nullstellenmenge im projektiven Raum

Sei $I \subset R[X_0, \dots, X_n]$ homogenes Ideal, d.h. erzeugt von homogenen Elementen.

$$\Leftrightarrow I = \bigoplus_d I \cap R[X_1, \dots, X_n]_d)$$

Ziel: $V_+(I) \to \mathbb{P}^n_R$ Morphismus von Schemata

$$R[X_0, \dots, X_n] \longrightarrow R\left[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{\hat{X}_i}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}\right] = \Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$$

$$I \longmapsto \Phi_i(I) \text{ das vom Bild von } I \text{ erzeugte Ideal}$$

Verklebe $V_i := \operatorname{Spec}(\Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i})/\Phi_i) \subseteq U_i$ entlang

$$V_{ij} = D_{V_i}\left(\frac{X_j}{X_i}\right) \xrightarrow{\cong} V_{ji}$$

Beachte: $f \in I$, $\deg(f) = d$, $X_i^d \Phi_i(f) = X_j^d \Phi_j(f)$, d.h. $\Phi_i(f)$ und $\Phi_j(f)$ unterscheiden sich in einer Einheit auf $D\left(\frac{X_i}{X_j}\right)$.

$\Longrightarrow \Phi_i(I) = \Phi_j(I)$ in $\Gamma(U_{ij}, \mathcal{O}_{U_i})$. $\Longrightarrow V_{ij} = V_{ji}$ und Kozykelbedingungen überträgt sich von $U_{ij} \subset U_i$.

$\Longrightarrow$ Verkleben liefert Schema $V_+(I)$ +

D.h. jedes solche I definiert ein Schema $V_+(I) \to \mathbb{P}^n_R$.

Grundlegende Eigenschaften von Schemata und Morphismen

3.8 Topologische Eigenschaften

Definition 3.12 (12)**.** Ein Schema X heißt **zusammenhängend**, **quasi-kompakt** bzw. **irreduzibel**, falls der unterliegende topologische Raum diese Eigenschaft besitzt.

- Nach Proposition II.5 ist jedes affine Schema quasi-kompakt.
- $\coprod_{i=0} \operatorname{Spec}(R)$ ist *nicht* quasi-kompakt.

Definition 3.13 (13)**.** $f : X \to Y$ heißt **injektiv** (surjektiv, bijektiv), falls die zugrendlegende stetige Abbildung diese Eigenschaft hat. Ebenso für "offen", "abgeschlossen", "Homömorphismus".

Warnung: Homömorphismen von Schemata sind im Allgemeinen *keine* Isomorphismen!

3.9 Noethersche Schemata

Definition 3.14 (14)**.** Ein Schema heißt **lokal noethersch**, falls eine affine offene Überdeckung $X = \bigcup U_i$ existiert, d.d. alle $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$ (affine Koordinatenringe) **noethersch** sind. X heißt **noethersch**, falls zusätlich quasi-kompakt.

Faktum: Lokalisierung noetherscher Ringe bleiben noethersch.

$\Rightarrow$ *a*) Jedes lokal noethersche Schema besitzt eine Basis der Topologie aus noetherschen affin offenen Unterschemata.

b) X lokal noethersch. Dann ist $\mathcal{O}_{X,x}$ noethersch $\forall x \in X$.

Für offene Schemata gilt ferner: lokal noethersch $\Rightarrow$ noethersch.

Satz 3.15 (15)**.** *Für $X \subset \operatorname{Spec} A$ affin gilt:*

$$X \textit{ noethersch } \Leftrightarrow A \textit{ noethersch}$$

Beweis.

"$\Leftarrow$" X überdeckt sich selbst mit $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = A$ noethersch.

"$\Rightarrow$" Sei $I \subset A$ beliebiges Ideal. Zu zeigen: I ist endlich erzeugt. Nach Voraussetzung ist

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{Spec} A_i, \quad A_i \text{ noethersch.}$$

Ohne Einschränking: $A_i = A_{f_i}$ und noethersch. Daraus folgt: $J_i = IA_{f_i} = I_{f_i}$ sind endlich erzeugt, Behauptung folgt aus Lemma 16.

□

Lemma 3.16 (16)**.** $\operatorname{Spec}(A) = \cup_{i \in I} D(f_i)$*, $\#I < \infty$, M A-Modul. Dann:*

$$M \textit{ e.e. über } A \Leftrightarrow M_{f_i} \textit{ e.e. } A_{f_i}\textit{-Modul } \forall i \in I.$$

Beweis.

"$\Rightarrow$" Endlich erzeugt heißt $A^n \twoheadrightarrow M$, Lokalisierung exakt also $A^n_{f_i} \twoheadrightarrow M_{f_i}$ exakt.

"$\Leftarrow$" M_{f_i} werden von $\frac{m_{ij}}{f_i^{n_{ij}}}$, $j = 1, \ldots, r_i$, $m_{ij} \in M$, $n_{ij} \in \mathbb{N}_0$ als A_{f_i}-Modul erzeugt.

$\Rightarrow N := \langle m_{ij} \rangle_A \subset M$ ist endlich erzeugt und $N_{f_i} = M_{f_i}$.

$\Rightarrow (M/N)_{\mathfrak{p}} = (M_{f_i}/N_{f_i})_{\mathfrak{p}} = 0$ für alle Primideale $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$.

$\Rightarrow$ (Lokal-Global-Prinzip aus der kommutativen Algebra) $N = M$.

□

Bemerkung. *X noethersches Schema. Dann ist X als topologischer Raum noethersch.*

Beweis. Für X affin klar, sonst $X = \cup_{i=1}^{r} X_i$, $X_i = \mathrm{Spec}(A_i)$ noethersch. Sei

$$X \supseteq Z_1 \supseteq \cdots \supseteq Z_n \supseteq \cdots$$

absteigende Kette abgeschlossener Teilmengen. $(Z_j \cap X_i)_j$ absteigende Kette abgeschlossener Teilmengen in X_i.

$\Longrightarrow$ (endliche Überdeckung) $\exists N$ d.d. $Z_j \cap X_i = Z_N \cap X_i$ für alle $j \geq N$.

$\Longrightarrow Z_j = Z_N$. □

Korollar 3.17 (17)**.** *Sei X (lokal) noethersches Schema, $U \subset X$ offenes Unterschema. Dann ist U ein (lokal) noethersches Schema.*

Beweis. Lokal noethersch $X = \bigcup U_i$, $U_i \cap U = \bigcup D(f_i)$. Sei X noethersch. Dann ist der topologische Raum X noethersch. Nach Lemma $I.20$ ist dann jede offene Teilmenge quasi-kompakt. □

3.10 Generische Punkte

Satz 3.18 (18). *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow \{Z \subset X \mid \textit{abg., irred.}\} \\ x &\longmapsto \overline{\{x\}} \end{aligned}$$

ist eine Bijektion, d.h. jede irreduzible abgeschlossene Teilmenge enthält genau einen generischen Punkt.

Beweis. Gilt für affine Schemata nach Korollar II.7. Sei $Z \subset X$ irreduzibel, abgeschlossen sowie $U \subset X$ affin offen mit $Z \cap U \neq \emptyset$.

$\Longrightarrow \overline{Z \cap U}^X = Z$, da Z irreduzibel.

$\Longrightarrow Z \cap U$ irreduzibel mit generischen Punkt x, $\overline{\{x\}}^{Z\cap U} = Z \cap U$.

$\Longrightarrow \overline{\{x\}}^X = Z$.

Umgekehrt: Sei $z \in Z$ generischer Punkt.

$\Longrightarrow [U \subset X$ offen mit $U \cap Z \neq \emptyset \Rightarrow z \in U]$ d.h. Eindeutigkeit im affinen Fall impliziert allgemeiner Fall. □

"Generische Punkte reduzieren gewisse Aussagen auf das Studium von *einem* Punkt".

Satz 3.19 (19). *Sei $f : X \to Y$ offener Morphismus von Schemata. Sei $Y = \overline{\{\eta\}}^Y$ irreduzibel. Dann:*

$$f^{-1}(\eta) \textit{ irreduzibel} \Leftrightarrow X \textit{ irreduzibel}$$

Beweis. f offen $\Rightarrow \overline{\{f^{-1}(x)\}} = f^{-1}(\overline{\{\eta\}}) = f^{-1}(Y) = X$. Mit Lemma I.14: Z irreduzibel $\Leftrightarrow \overline{Z}$ irreduzibel. □

Topologische Räume von Schemata sind fast nie Hausdorffsch, aber:

Satz 3.20 (20). *Sei X Schema. Dann ist der unterliegende topologische Raum ein T_0-Raum, d.h.*

$$\forall x \neq y \in X \ \exists U \subset X \textit{ offen, mit } \textbf{\textit{entweder}} \ x \in U \textit{ oder } y \in U.$$

Beweis. Ohne Einschränkung: X affin, $x = \mathfrak{p}_x$, $y = \mathfrak{p}_y \in \operatorname{Spec}(\Gamma(X, \mathcal{O}_X))$. Falls $\mathfrak{p}_x \subsetneq \mathfrak{p}_y$ wähle

$$\mathfrak{p}_x \in U = X \setminus \underbrace{V(\mathfrak{p}_y)}_{\ni \mathfrak{p}_y}$$

andernfalls $\exists f \in \mathfrak{p}_x \setminus \mathfrak{p}_y$, d.h. $U = D(f)$ enthält y aber nicht x. □

Später: Separiertheit von Schemata als "Hausdorffsch"-Ersatz.

3.11 Reduzierte und ganze Schemata

Definition 3.21 (21)**.** Ein Schema X heißt

(i) **reduziert**, falls alle $\mathcal{O}_{X,x}$, $x \in X$, reduzierte Ringe sind.

(ii) **ganz**, falls X reduziert und irreduzibel ist.

Satz 3.22 (22)**.**

(i) X schema ist reduziert (ganz) $\Leftrightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ reduziert (integer) für alle $U \subseteq X$ offen.

(ii) Sei X ganz. Dann ist der Halm $\mathcal{O}_{X,x}$ integer $\forall x \in X$. (Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch!)

Beweis.

(i) **reduzibel,** "$\Rightarrow$". $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ mit $f^n = 0$. Angenommen, $f \neq 0$. Dann gibt es ein $x \in U$ mit $f_x \neq 0$ in $\mathcal{O}_{X,x}$, $f_x^n = 0$. Widerspruch

reduzibel, "$\Leftarrow$". Sei $\overline{f} \in \mathcal{O}_{X,x}$ nilpotent. Dann gibt es ein $x \in U \subset X$ offen und $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ mit $f_x = \overline{f}$. Ohne Einschränkng: f nilpotent (mit U verkleinern sodass $f^n|_U = 0$). Nach Voraussetzung ist dann $f = 0$, also $\overline{f} = 0$.

ganz, "$\Rightarrow$". Sei X ganz. Dann ist $U \subset X$ offen ganz nach den Definitionen. Daher reicht es zu zeigen, dass $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ integer ist. Seien $f, g \in \mathcal{O}_X(X)$ mit $fg = 0$. Dann ist $X = V(f) \cup V(g)$. X ist irreduzibel, also etwa $X = V(f)$. *Behauptung*: $f = 0$.

Da Verschwinden aufgrund des Garbenaxioms eine lokale Frage ist, setze ohne Einschränking $X = \operatorname{Spec} A$ affin. Es folgt: $f \in \bigcap_{\operatorname{Spec} A} \mathfrak{p} = \sqrt{(0)} = 0$.

ganz, "$\Leftarrow$". $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ integer, also reduziert. Nach (1, reduziert) ist X reduziert. Angenommen es gibt $\emptyset \neq U_1, U_2 \subset X$ offen mit $\emptyset = U_1 \cap U_2$. Nach den Garbenaxiomen enthält dann $\Gamma(U_1 \cup U_2, \mathcal{O}_X) = \Gamma(U_1, \mathcal{O}_X) \times \Gamma(U_2, \mathcal{O}_X)$ Nullteiler $(1, 0) \cdot (0, 1) = 0$. Widerspruch.

(ii) Folgt aus 1, da A integer, $0 \notin S$. Es folgt: A_S integer ($\subseteq \operatorname{Quot}(A)$).

$\square$

Bemerkung. *$X = \operatorname{Spec} A$ ganz $\Leftrightarrow$ A integer, $\eta \in X$ generischer Punkt $\Leftrightarrow$ $(0) \subset A$. Es ist $\mathcal{O}_{X,\eta} = A_{(0)} = \operatorname{Quot}(A)$, d.h. für jedes ganze Schema X gilt: $\mathcal{O}_{X,\eta}$ ist Körper (mit generischer Punkt η).*

Definition 3.23 (23)**.** X ganz, $\eta \in X$ generischer Punkt. Dann heißt $K(X) := \mathcal{O}_{X,\eta}$ der **Funktionenkörper** von X.

Satz 3.24 (24)**.** *Sei X noethersches irreduzibles Schema, $\eta \in X$ generischer Punkt. Dann sind äquivalent:*

(i) $\mathcal{O}_{X,\eta}$ ist reduziert.

(ii) $\exists \emptyset \neq U \subset X$ *reduziertes offenes Unterschema.*

Für (ii) sagt man auch: $\mathcal{O}_{X,x}$ *ist* ***generisch*** *reduziert.*

Beweis.

" $\Rightarrow$ " Sei ohne Einschränkung $X = \operatorname{Spec} A$ affin, A nach Voraussetzung noethersch, $\eta \leftrightarrow \mathfrak{p}$ eindeutiges minimales Primideal (A irreduzibel). $\Longrightarrow \mathfrak{p} = (f_1, \ldots, f_n)_A$ endlich erzeugt. $\Longrightarrow \frac{f_i}{1} \in \operatorname{nil}(A_\mathfrak{p}) = (0) \subset A_\mathfrak{p} = \mathcal{O}_{X,\eta}$, da $\mathcal{O}_{X,\eta}$ reduziert. $\exists g \in A \backslash \mathfrak{p} \Longrightarrow$ d.d. $\frac{f_1}{1} = 0 \sim A_g$. $\Longrightarrow 0 = \operatorname{nil}(A)_g = \operatorname{nil}(A_g)$, d.h. A_g ist reduziert, d.h. $U := D(g)$.

" $\Leftarrow$ " $\emptyset \neq U \subset X$ reduziert offen. $\Longrightarrow \eta \in U$ s.d. $\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{X,\eta}$ reduziert.

$\square$

Bemerkung. *Analog zeigt man:* X *noethersches Schema und* $\mathcal{O}_{X,x}$ *reduzibel für ein* $x \in X$ $\Longrightarrow \exists x \in U \subset X$ *offen, d.d.* U *reduziert ist.*

Prävarietäten als Schema

Ziel: "X affine Varietät $\mapsto \operatorname{Spec}\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$" (kein generischer Punkt, $\neq$ Schema). Verklebe zu: "X Prävarietät über $k \mapsto k$-Schema". Welches Bild hat dieser Funktor?

3.12 Schemata von endlichem Typ über k

Sei X affine Varietät über k, k algebraisch Abgeschlossen. Dann ist $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ eine endlich erzeugte k-Algebra.

Definition 3.25 (25)**.** Sei k Körper, $X \to \operatorname{Spec}(k)$ k-Schema. X heißt:

- **lokal von endlichem Typ**, (l.v.e.T./k), falls eine affine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ existiert, $U_i = \operatorname{Spec} A_i$, mit A_i endlich erzeugte k-Algebra für alle i.
- **von endlichem Typ** (v.e.T/k), falls X lokal von endlichem Typ und quasi-kompakt ist.

Bemerkung. *Jedes k-Schema welches (lokal) von endlichem Typ ist, ist (lokal) noethersch. (Da jede endlich erzeugte k-Algebra noethersch ist.)*

Satz 3.26 (26)**.** *Sei X l.v.e.T/k, $U \subset X$ offen affin. Dann ist $B := \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ eine endlich erzeugte k-Algebra.*

Beweis. $U = \bigcup_{i=1}^n D(f_i)$, $f_i \in B$ geeignet nach Lemma 3.3. B ist endlich erzeugte k-Algebra $\Longrightarrow B_{f_i} = B\left[\frac{1}{f_i}\right]$ ist endlich erzeugte k-Algebra. Mit dem folgenden Lemma für $A = k$ folgt die Behauptung. □

Lemma 3.27 (28)**.** *Sei A ein Ring und B eine A-Algebra, $\mathcal{L} : A \to B$ Ringhomomrphismus, $f_1, \ldots, f_n \in B$ mit $(f_1, \ldots, f_n) = (1)$, und so dass B_{f_i} eine endlich erzeugte A-Algebra ist $\forall i$. Dann ist B eine endlich erzeugte A-Algebra.*

Beweis. (Vergleiche Lemma 16.) Nach Voraussetzung gibt es ein $g_i \in B$ mit $\sum_i g_i f_i = 1$. Da B_{f_i} endlich erzeugt $\forall i$, gibt es b_{ij}, $j \in J$ endlich, welche B_{f_i} als A-Algebra erzeugen. Setze $b_{ij} = c_{ij}/f_i^m$ mit $c_{ij} \in B$ für $m \geq 0$ geeignet (unabhäng von i, j).

Sei $C :=$ A-Unteralgebra von B, erzeugt von g_i, f_i, c_{ij}, d.h. endlich erzeugt über A. *Behauptung*: $C = B$.

Sei $b \in B$. $\Longrightarrow \exists N \gg 0$ mit $f_i^N b \in C$ für alle i. Da $\sum_i g_i f_i = 1$, ist $(f_1, \ldots, f_n)_C = (1)$. Lemma 2.4 $\Longrightarrow (f_i^N, \ldots, f_n^N)_C = (1)$. $\Longrightarrow \exists u_1, \ldots, u_n \in C$ sodass $\sum_i u_i f_i^N = 1$. $\Longrightarrow b = \sum_i u_i \underbrace{f_i^N b}_{\in C} \in C$. □

Satz 3.28 (28)**.** *Sei k algebraisch abgeschlossen, X k-Schema l.v.e.T./k. Dann besteht die Menge der abgeschlossenen Punkte $|X|$ genau aus den Punkten mit $\kappa(x) = k$, d.h. nach Proposition 7 gilt*

$$|X| = X(k) = \operatorname{Hom}_k(\operatorname{Spec} k, X).$$

Beweis. Hilbert'scher Nullstellensatz $\Longrightarrow$ ($x \in X$ abgeschlossen $\Rightarrow \kappa(x) = k$). Daher reicht es zu zeigen: ($x \in X$ *nicht* abgeschlossen, d.h. $\mathfrak{p}_x$ maximal $\Rightarrow \kappa(x) \neq k$). Dazu: $\exists x \in U = \mathrm{Spec}(A) \subset X$ offen, mit x *nicht abgeschlossen* in U. $\Longleftrightarrow \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_x \in \mathrm{Spec}(A)$ *nicht* maximal, d.h. $A/\mathfrak{p}_x$ ist *kein* Körper. $\Longrightarrow k \to (A/\mathfrak{p}_x) \hookrightarrow \mathrm{Quot}(A/\mathfrak{p}_x) = \kappa(x)$ ist *echte* Inklusion.

Behauptung: $\kappa(x)$ ist nicht algebraisch abgeschlossen, d.h. nicht abstrakt isomorph zu k. Denn: *Noether-Normalisierung*:

$A/\mathfrak{p}$ ist endlich über $k[X_1, \dots, X_n]$. Nach Lemma I.9 folgt $n > 0$ (mit $A/\mathfrak{p}$ über k ganz $\Longrightarrow A/\mathfrak{p}$ Körper). $\Longrightarrow \kappa(x)$ ist endliche Erweiterung von $k(X_1, \dots, X_n)$, $n > 0$. $\Longrightarrow k$ nicht algebraisch abgeschlossen ($[k(X_1, \dots, X_n)(\sqrt[n]{X_1}) : k(X)] \to \infty$, $n \to \infty$) $\square$

Bemerkung. *Im Allgemeinen* $\exists x \in U \subset X$ *offen mit* $\{x\} \subset U$ *abgeschlossen, aber* $\{x\} \subset X$ nicht *abgeschlossen (*$X = \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}$*,* $\mathcal{O}$ *DVR,* $U = \{x\}$*,* $x = \eta$ *generischer Punkt.) Für X lokal von endlichem Typ über k (nicht notwendig algebraisch abgeschlossen) kann nach der Proposition* nicht *geschehen.*

3.13 Sehr dichte Teilmengen

Definition 3.29 (29)**.** Sei X topologischer Raum. Eine Teilmenge $Y \subset X$ heißt **sehr dicht**, falls die folgenden äquivalenten Bedingungen gelten:

(i) $U \mapsto U \cap Y$ definiert eine Bijektion:

$$\{\text{offenen Teilmengen in } X\} \leftrightarrow \{\text{offene Teilmengen in } Y\}.$$

(ii) $F \mapsto F \cap Y$ definiert eine Bijektion:

$$\{\text{abgeschlossene Teilmengen in } X\} \leftrightarrow \{\text{abgeschlossene Teilmengen in } Y\}.$$

(iii) Für alle $F \subseteq X$ abgeschlossen gilt: $F = \overline{F \cap Y}$.

(iv) Jede lokal abgeschlossene Teilmenge $Z \neq \emptyset$ von X enthält einen Punkt aus Y.

Beweis. Die Äquivalenz von (i), (ii) und (iii) ist klar.

- $(iii) \Rightarrow (iv)$

  Für abgeschlossene Teilmengen $F' \subsetneq F$ von X setze $Z := F \backslash F'$. Angenommen $(F \cap Y) \backslash (F' \cap Y) = Z \cap Y = \emptyset$. $\Longrightarrow F \cap Y = F' \cap Y$. $(iii) \Longrightarrow F = F'$, Widerspruch.

- $(iv) \Rightarrow (ii)$

  Sei $F, F' \subset X$ abgeschlossen mit $F \cap Y = F' \cap Y$. $\Longleftrightarrow ((F \cup F') \backslash (F \cap F')) \cap Y = \emptyset$. $\Longrightarrow (F \cup F') \backslash (F \cap F') = \emptyset$. $\Longrightarrow F = F'$.

□

Satz 3.30 (30)**.** *Sei X l.v.e.T über k algebraisch abgeschlossen. Dann ist $|X|$ sehr dicht in X.*

Beweis. Zeige: Bedingung (iv). Sei $\emptyset \neq A \subset X$ lokal abgeschlossen. Ohne Einschränkung:

$$A \subset_{\text{abg.}} U = \operatorname{Spec} A \subset_{\text{off.}} X.$$

Nach Voraussetzung ist A endlich-erzeugte k-Algebra. $\emptyset \neq A = V(\mathfrak{a})$ mit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m} \subset A$ für ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$. $\Longrightarrow V(\mathfrak{a})$ enthält abgeschlossenen Punkt $x \in \mathfrak{m}$. Proposition 28 $\Longrightarrow x$ ist abgeschlossen in X, da $\kappa(x) = k$. $\Longrightarrow A \cap |X| \neq \emptyset$. □

3.14 Prävarietäten als Schemata

Wir wollen einen Funktor von der Kategorie der Prävarietäten in die Kategorie der Schemata sodass, wenn wir eine geweissen Unterkategorie von $\underline{\mathcal{S}\mathrm{h}}$ betrachten, eine Äquivalenz von Kategorien entsteht.

Erinnerung: $k = \overline{k}$: $\mathbb{A}^2_k = \operatorname{Spec}(k[X,Y])$ besteht aus

- Punte des $\mathbb{A}^2(k) \rightsquigarrow$ maximale Ideale, 0-dimensionale Teilmengen.
- Irreduzible Kurve $f(x,y) = 0 \rightsquigarrow$ Primideale, 1-dimensionale Teilmengen.
- Generischer Punkt $0 \rightsquigarrow$ 2-dimensionale Teilmengen.

Wie können wir die zusätzlichen Punkte für den Funktor

$$\underline{\mathrm{Prevar/S}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Sch/S}}$$

präzisieren? Sei X ein topologischer Raum, in dem alle Punkte abgeschlossen sind. Betrachte

$$t(X) = \{Z \subset X \mid Z \text{ irreduzibel abgeschlossen}\},$$

versehen mit der Topologie: I$t(X) \supset t(Z)$, $Z \subseteq_{\text{abg.}} X$ bilden die abgeschlossenen Mengen. Überprüfe: $Z_1, Z_2, Z_i \subset X$ abgeschlossen $\Longrightarrow t(\cap_i Z_i) = \cap_i t(Z_i)$, $t(Z_1 \cup Z_2) = t(Z_i) \cup t(Z_2)$. Ist $f : X \to Y$ stetig, so auch

$$\begin{aligned} t(f) : t(X) &\longrightarrow t(Y) \\ Z &\longmapsto \overline{f(Z)} \end{aligned}$$

denn:

(i) $\overline{f(Z)}$ irreduzibel: Sei $\overline{f(Z)} = A_1 \cup A_2$, $A_i \neq \emptyset$. Dann existiert $z_1, z_2 \in Z$ mit $f(z_i) \in A_i$, denn sonst gilt $f(z) \subseteq A_1$. $Z \subseteq f^{-1}(f(Z))$ abgeschlossen. $\Longrightarrow Z = (f^{-1}(A_1) \cap Z) \cup (f^{-1}(A_2 \cap Z))$, Widerspruch.

(ii) Sei $t(Y') \subseteq t(Y)$ abgeschlossen. $t(f)^{-1}(t(Y)) = \{Z \in t(X), \overline{f(Z)} \in t(Y')\}$ denn:

„$\subseteq$“ $\overline{f(Z)} \subset Y' \Longrightarrow Z \in f^{-1}(\overline{f(Z)}) \subset f^{-1}(Y) = t(f^{-1}(Y))$

„$\supseteq$“ $z \in f^{-1}(Y)$ abgeschlossen $\Longrightarrow f(Z) \in \overline{f(Z)} \subset \overline{Y'} \subset Y'$.

Wir erhalten einen Funktor

$$t : \underline{\mathrm{TopCP}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Top}}$$

Die irreduziblen Mengen von $f(X)$ sind gerade die $t(X)$, $Z \subseteq X$ irreduzibel. $Z \in t(Z)$ ist der eindeutige generische Punkt. Sei

$$\begin{aligned} \alpha_X : X &\longrightarrow t(X) \\ x &\longmapsto \{x\} \text{ irred. abg.} \end{aligned}$$

So ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \{\text{abg. Tm. von } f(X)\} &\longrightarrow \{\text{abg. Tm. von } X\} \\ A = t(Z) &\longmapsto \alpha_X^{-1}(A) = \{x \in X : \{x\} \in t(Z)\} = Z \end{aligned}$$

eine Bijektion. $\Longrightarrow \alpha_X$ ist Homömorphismus von X auf die abgeschlossenen Punkte $|t(X)|$ von $t(X)$ [irred. abg. Teilmengen Z von X, die in $t(X)$ abgeschlossen sind.]

Es ist $\{Z\} = t(Z')$ für ein $Z' \subset X$ abgeschlossen. $\Longrightarrow$ Nur ein Punkt $x \in X$ in Z, sonst $\{x\} \subsetneq Z \subset Z'$ beide in $t(Z')$.

Es ist $|t(X)| \subset t(Y)$ eine sehr dichte Menge (Bijektion oben).

Theorem 3.31 (31)**.** *Der Funktor $X \mapsto (t(X), (\alpha_X)_*\mathcal{O}_X)$ induziert eine Äquivalenz von Kategorien:*

$$\begin{aligned} t : \{\underline{\text{Prevar/k}}\} &\overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\textit{integere k-Schemata v. endl. Typ}\} \\ \{\underline{\text{AffVar/k}}\} &\overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\textit{affine k-Schemata v. endl. Typ}\} \end{aligned}$$

Beweis. Ist X eine affine Varietät über k mit $\Gamma(X) = A$, so ist $X = \operatorname{MaxSpec}(A)$. $\Longrightarrow t(X) = \operatorname{Spec} A$ (vgl Kapitel I), $\mathcal{O}_X(D(f)) = A_f$, $f \in A$. $\Longrightarrow$ Behauptung im affinen Fall.

Ist $f : X \to Y$ Morphismus von Prävarietäten, so erhalten wir

$$\begin{aligned} t(f) : t(X) &\longrightarrow t(Y), \\ (\alpha_Y)_*\mathcal{O}_Y &\longrightarrow t(f)_*((\alpha_X)_*\mathcal{O}_X) \end{aligned}$$

Morphismus lokal geringter Räume, da ein Morphismus von Garben auf X und Y durch Komposition von Abbildungen gegeben ist!

Quasi-inverser Funktor $(X, \mathcal{O}_X) \mapsto (X(k), \mathcal{O}_{X(k)} = \alpha^{-1}\mathcal{O}_X)$ geringter Raum. **(1)** $\alpha^{-1}(U) = U \cap (X) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} U$ offene Teilmenge. **Behauptung**: Bild $(X(k), \mathcal{O}_{X(k)})$ ist Raum mit Funktionen: Sei $V \subseteq U \subseteq X$ offen. **(2)** Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{X(k)}(U \cap X(k)) \arrow[r] \arrow[d, "\text{res}"'] & \operatorname{Abb}(U \cap X(\xi), \xi) \arrow[d, "\text{res}"] \\ \mathcal{O}_{X(k)}(V \cap X(k)) \arrow[r, hook] & \operatorname{Abb}(V \cap X(k), k) \end{tikzcd}$$

kommutiert. Dazu $f \in \mathcal{O}_{X(k)}(U \cap X(k)) \overset{(1)}{=} \mathcal{O}_X(U)$, wir assoziieren es der Abbildung

$$U \cap X(k) \longrightarrow k, \quad x \mapsto f(x) := \pi_x(f),$$

mit

$$
\begin{tikzcd}
\pi_x : \mathcal{O}_X(U) \arrow[r] \arrow[d, "\text{res}"] & \mathcal{O}_{X,x} \arrow[r] & \kappa(x) = k \\
\mathcal{O}_X(V) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

$\Longrightarrow$ (2). **(3)** f, g mit derselben Funktion

$$f \equiv g : U' \to k \overset{!}{\Longrightarrow} f = g$$

Garbenaxiom $\Longrightarrow$ kann lokal überprüft werden: $U = \operatorname{Spec} A$ und $\pi_x(f) = \pi_x(g)$ für alle $x \in \operatorname{MaxSpec}$

$$\Longrightarrow f - g \in \bigcap_{\mathfrak{m} \in \operatorname{MaxSpec}(A)} \mathfrak{m} = \operatorname{nil}(A) = 0,$$

da A lokal reduzierte k-Algebra. Da sich X durch endlich viele affine Schemata der Form $\operatorname{Spec} A$, A integer endlich erzeugte k-Algebra, überdecken lässt, ist der Raum mit Funktion $X(k)$ eine Prävarietät. Die Konstruktion ist funktoriell, da jede Menge von Schemata von endlichem Typ über K abgeschlossene Punkte auf abgeschlossene Punkt schickt nach Proposition 28.

Um zu zeigen, dass beide Funktoren Quasi-Inverse zueinander sind, benutze den affinen (Varietät/Schemata) Fall, so wie die Garbenaxiome. $\square$

Bemerkung (32)**.** *Es gilt:*

$$\kappa(x) = \kappa(X(k))$$
$$\mathbb{A}_k^n \longleftrightarrow \mathbb{A}(k)$$
$$\mathbb{P}_k^n \longleftrightarrow \mathbb{P}^n(k)$$

Unterschemata und Immersion (Einbettungen)

3.15 Offene und abgeschlossene Einbettung

Definition 3.32 (33)**.** Ein Morphismus $j : Y \to X$ von Schemata heißt **offene Einbettung**, falls die unterliegende stetige Abbildung ein Homöomorphismus von Y auf eine *offene* Menge $U \subset X$ ist, sowie der Garbenhomomorphismus $\mathcal{O}_X \to j_*\mathcal{O}_Y$ einen Isomorphismus $\mathcal{O}_{X|U} \cong j_*\mathcal{O}_Y$ von Garben über U induziert.

„j induziert Isomorphismus zu Y und offenen Unterschemata U“

Definition 3.33 (34)**.** Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum. Eine Untergarbe $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ heißt **Idealgarbe**, falls $\Gamma(U, \mathcal{I}) \trianglelefteq \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ Ideal ist für alle $U \subseteq X$ offen. Es bezeichne $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ die Quotientengarbe assoziiert von der Prägarbe $U \mapsto \mathcal{O}_X(U)/\mathcal{I}(U)$. Dies ist eine Prägarbe mit $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ surjektiv, denn auf Halme:

$$\varinjlim_{x \in U}(\mathcal{O}_X(U) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_X(U)/\mathcal{I}(U)) = \mathcal{O}_{X,x} \twoheadrightarrow (\mathcal{O}_X/\mathcal{I})_x.$$

Definition 3.34 (35)**.** Sei X ein Schemata.

(i) Ein **abgeschlossenes Unterschemata von** X ist gegeben durch eine abgeschlossene Menge $Z \subseteq X$ ($i : Z \to X$ Inklusion), sowie eine Garbe $\mathcal{O}_Z$ auf Z, sodass $(Z, \mathcal{O}_Z)$ ein Schemata und $i_*\mathcal{O}_Z \cong \mathcal{O}_X/I$ für eine Idealgarbe $I \subset \mathcal{O}_X$.

(ii) Ein Morphismus $i : Z \to X$ von Schemata heißt **abgeschlossene Einbettung**, falls die unterliegende stetige Abbildung einen Homöomorphismus zwischen Z und eine abgeschlossene Teilmenge von X ist, und der Garbenhomomorphismus $i^\flat : \mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_X$ surjektiv ist.

Ist $Z \subseteq X$ ein abgeschlossenes Unterschemata wie in (1), so ist $(i, i^\flat)$ eine abgeschlossene Einbettung. Umgekehrt bestimmt jede abgeschlossene Einbettung einen Isomorphismus von seiner Quelle auf ein eindeutiges abgeschlossenes Unterschemata seines Ziels.

Warnung: Nicht für jede Idealgarbe $\mathcal{I}$ ist

$$(Z = \operatorname{supp} \mathcal{O}_X/\mathcal{I}, \mathcal{O}_X/\mathcal{I})$$

ein Schema. Später: gilt gdw. $\mathcal{I}$ quasi-kompakt ist.

Theorem 3.35 (36)**.** *Sei $X = \operatorname{Spec} A$. Dann ist die Abbildung*

$$\{\textit{Ideale } A\} \xleftrightarrow{1:1} \{\textit{abg. Unterschemata von } X\}$$
$$\mathfrak{a} \longmapsto V(\mathfrak{a}) \cong \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a})$$

eine Bijektion. Insbesondere ist jedes abgeschlossene Unterschemata eines affinen Schematas affin.

Beweis. Sei Z ein abgeschlossenes Unterschemata, $i : Z \hookrightarrow X$ Inklusion. Definition $\Longrightarrow \mathcal{O}_X \twoheadrightarrow i_*\mathcal{O}_Z$ surjektiv. Sei:

$$\mathcal{I}_Z := \ker(\mathcal{O}_X(X) \to \Gamma(X, i_*\mathcal{O}_Z) = \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)) \trianglelefteq A$$

Ideal. Falls Z von der Form $V(\mathfrak{a})$ ist (was zu zeigen ist!) gilt $\mathcal{I}_Z = \mathfrak{a}$. Daher reicht z.z. $Z = V(\mathcal{I}_Z)$. **Dazu:**

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr] & \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z) \\ & A/\mathcal{I}_Z \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

faktorisiert per Definition. $\Longrightarrow$ Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr] & X \\ & \operatorname{Spec}(A/\mathcal{I}_Z) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

kommutiert. Es ist $\operatorname{Mor}(Z, \operatorname{Spec} A) = \operatorname{Hom}(A, \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z))$, ohne Einschränkung: $\mathcal{I}_Z = 0$ (sonst ersetze A durch $A/\mathcal{I}_Z$). Zu zeigen: $Z \hookrightarrow X = V(\mathfrak{a})$ ist ein Isomorphismus.

Wir wissen: die unterliegende stetige Abbildung topologischer Räume ist injektiv und abgeschlossen. ($A \subset_{\text{abg.}} Z \subset X \Longrightarrow A \subset X$ abg.) Bleibt zu zeigen: surjektiv.

Sei $U \subseteq Z$ offen mit $(U, \mathcal{O}_{X|U})$ affin. So gilt:

$$\begin{aligned} U \subset U \backslash D(\varphi(s)|_U) &= V_U(\varphi(s)|_U) \\ &= \varphi(s)|_U \in \mathcal{O}_Z(U) \text{ nilpotent.} \end{aligned}$$

Endliche Überdeckung von Z durch affine Schemata $\Longrightarrow \varphi(s^N) = 0$. φ injektiv $\Longrightarrow s^N = 0$ bzw. $V(s) = X$. Z abgeschlossen in $X \Longrightarrow i(Z) = X$.

Behauptung: Der Homomorphismus von Garben $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Z$ ist bijektiv. Reicht zu zeigen: injektiv (da surjektiv nach Voraussetzung).

Sei $x \in X$ beliebig, $\mathcal{O}_{X,x} = A_{\mathfrak{p}_x}$. Sei $\frac{g}{1} \in \ker(\mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{Z,x})$. Überdecke

$$Z = U \cup \bigcup_{i \in I} U_i, \quad \#I < \infty$$

mit:

(i) $(U, \mathcal{O}_{Z|U})$, $(U_i, \mathcal{O}_{Z|U_i})$ affin für alle $i \in I$;

(ii) $x \in U$, $\varphi(g)|_U = 0$.

Wähle $s \in A$ mit $x \in D(s) \subseteq U$. **Behauptung:** $\varphi(s^N g) = 0$ für $N > 0$. Mit φ injektiv folgt dann $s^N g = 0$, und $\frac{g}{1} = 0$ in $\mathcal{O}_{X,x}$ da s eine Einheit ist in $\mathcal{O}_{X,x}$.

- Nach (2) ist $\varphi(g) = 0$, d.h. $\varphi(s \cdot g)|_U = \varphi(s)|_U \cdot \underbrace{\varphi(g)|_U}_{=0} = 0$.

- $D_{U_i}(\varphi(s)|_{U_i}) = D(s) \cap U_i \subseteq U \cap U_i$, also $\varphi(g)|_{D_{U_i}(\varphi(s)|_{U_i})} = 0$, d.h. $\frac{\varphi(g)}{1} = 0$ in $\mathcal{O}_Z(U_i)_{\varphi(s)|_{U_i}}$.
$\iff \varphi(s)|_{U_i}^{N_i} \varphi(g) = \varphi(s^{N_i} g) = 0$ (Die Indexmenge I ist endlich). Setze $N := \max_{i \in I}\{1, N_i\}$.

$\square$

3.16 Unterschemata und Einbettung

Offene und abgeschlossene Unterschemata sind Spezialfälle von *lokal abgeschlossene* Unterschemata.

Definition 3.36 (37)**.**

(i) Sei X ein Schemata. Ein **Unterschemata** von X ist ein Schemata $(Y, \mathcal{O}_Y)$, so dass $Y \subset X$ eine lokal abgeschlossene Teilmenge von X ist, und Y ein abgeschlossenes Unterschemata von dem offenen Unterschemata $U = X \backslash (\overline{Y} \backslash Y) \subseteq X$ ist. Wir haben dann einen natürlichen Morphismus $Y \to X$ von Schemata.

(ii) Eine **Einbettung** $i : Y \to X$ ist ein Morphismus von Schemata, dessen unterlegende stetige Abbildung ein Homöomorphismus von Y auf eine lokale abgeschlossene Teilmenge von X ist, und sodass für alle $y \in Y$:

$$i_y^{\#} : \mathcal{O}_{X,i(y)} \to \mathcal{O}_{Y,y}$$

surjektiv ist.

Bemerkung 3.37 (38)*.*

(i) Ist Y ein Unterschemata von X, dann ist $Y \hookrightarrow X$ eine Einbettung. Umgekehrt bestimmt jede Einbettung einen Isomorphismus seiner Quelle mit einem eindeutigen Unterschemata seines Ziels.

(ii) Ist Y ein Unterschemata von X, wessen unterliegende Teilmenge abgeschlossen in X ist, dann ist Y ein abgeschlossenes Unterschemata von X.

(iii) Das Analogon von *(ii)* für offene Unterschemata ist i.A. falsch.

(iv) Jede Einbettung $i : Y \hookrightarrow X$ faktorisiert als:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr] & X \\ & U = X\backslash(\overline{i(Y)}\backslash i(Y)) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Definition 3.38 (39)**.** Sei X ein Schemata und Z, Z' Unterschemata. Wir sagen Z' **majorisiert** Z, wenn die Inklusion $Z \hookrightarrow X$ faktorisiert als:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, hook] \arrow[dr] & X \\ & Z' \arrow[u, hook] \end{tikzcd} .$$

Bemerkung 3.39 (40)*.* Sei $\mathbf{P}$ die Eigenschaft eines Schemata-Morphismus, eine affine Einbettung, bzw. abgeschlossene Einbettung, bzw. Einbettung zu sein. Dann:

(i) Die Eigenschaft **P** ist lokal auf der Basis, d.h. für $f : Z \to X$ Morphismus, $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ offene Überdeckung hat f die Eigenschaft $\mathbf{P} \iff \forall i$ hat $f^{-1}(U_i) \to U_i$ die Eigenschaft **P**.

(ii) Die Komposition zweier Morphismen mit Eigenschaft **P** hat Eigenschaft **P**.

Beispiel 3.40 (41)**.**

(i) Sei $I \subseteq R[T_0, \dots, T_n]$ homogenes Ideal. Dann ist $V_+(I) \subseteq \mathbb{P}^n_R$ ein abgeschlossenes Unterschemata von $\mathbb{P}^n_R$. (Nach Bemerkung 40.1, denn $V_+(I) \cap U_i \subseteq U_i$ abgeschlossen.)

(ii) Alle Unterschemata eines k-Schematas X von endlichem Typ sind selbst von endlichem Typ.

3.17 Projektive und quasi-projektive Schemata über einen Körper

Definition 3.41 (42)**.** Sei k ein Körper.

(i) Ein k-Schemata X heißt **projektiv** wenn es ein $n \geq 0$ und eine abgeschlossene Einbettung $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_k$ gibt.

(ii) Ein k-Schemata X heißt **quasi-projektiv** wenn es ein $n \geq 0$ und eine Einbettung $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_k$ gibt.

Beispiel 3.42 (43)**.**

(i) Für ein homogenes Ideal I sind $V_+(I)$ projektive Schemata (Beispiel 41).

(ii) Sei $X = \operatorname{Spec} A$ affines k-Schemata von endlichem Typ. Dann ist X quasi-projektiv: $A \cong k[T_1, \ldots, T_n] \backslash \mathfrak{a}$,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[dr] & \mathbb{A}^n \arrow[d, "j"] \\ & \mathbb{P}^n \end{tikzcd}$$

3.18 Reduzierte Unterschemata

$$\operatorname{Spec} K[X,Y] \supset \operatorname{Spec}(K[X,Y]/Y^2) \supset \operatorname{Spec}(K[X,Y]/Y)$$

Frage. Gibt es ein „kleinstes“ Unterschemata?

Setze $\mathcal{N}_X \subset \mathcal{O}_X$, Garbifizierung der Prägarben:

$$U \mapsto \operatorname{nil}(\Gamma(U,\mathcal{O}_X)), \quad U \subseteq X \text{ offen}$$

Definiere $X_{\mathrm{red}} := (X, \mathcal{O}_X/\mathcal{N}_X)$.

Satz 3.43 (44)**.**

(i) *Der geringte Raum $X_{\mathrm{red}} = (X, \mathcal{O}_X/\mathcal{N})$ ist ein Schema, also ein abgeschlossenes Unterschema von X mit demselben topologischen Raum wie X.*

(ii) *Falls $X' \subset X$ ein weiteres solches Unterschema ist, dann gibt es eine abgeschlossene Einbettung $f : X_{\mathrm{red}} \to X'$, sodass das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} X_{\mathrm{red}} \arrow[r, hook] \arrow[d] & X \\ X' \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

(iii) *X_{red} ist reduziert und heißt das* ***unterliegend reduzierte Unterschema von X.***

(iv) *Falls $X = \operatorname{Spec} A$ affin, gilt $X_{\mathrm{red}} = \operatorname{Spec}(A/\operatorname{nil}(A))$.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei $X = \operatorname{Spec} A \implies U \mapsto \operatorname{nil}(\Gamma(U,\mathcal{O}_X))$ ist bereits eine Garbe, da

$$\operatorname{nil}(\mathcal{O}_X(D(f)) = \operatorname{nil}(A_f) = \operatorname{nil}(A)A_f$$

für alle $f \in A$. $\implies X_{\mathrm{red}} = \operatorname{Spec}(A/\operatorname{nil} A)$ offensichtlich reduziert. **Universelle Eigenschaft:** zu zeigen $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X/\mathcal{N}$ faktorisiert:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X \arrow[r] \arrow[dr] & \mathcal{O}_X/\mathcal{N}, \\ & \mathcal{O}_{X'} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

d.h. $\ker(\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{X'}) \subset \mathcal{N}$. Es reicht zu zeigen:

$$\ker(\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X'}(U)) \subset \Gamma(U,\mathcal{N})$$

für alle U offen affin. Ohne Einschränkung $X = \operatorname{Spec} A$, X' abgeschlossenes Unterschema $\implies$ affin: $X' = \operatorname{Spec} B$.

Zu zeigen: $\ker(A \to B) \subset \operatorname{nil} A$. Da nach Voraussetzung $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ bijektiv ist, folgt:

$$\ker(A \to B) \subset \bigcap_{\mathfrak{g} \in \operatorname{Spec} A} \mathfrak{g} = \operatorname{nil} A$$

□

Korollar 3.44 (45)**.** *$(X_{\mathrm{red}}, i_X : X_{red} \to X)$ ist durch die universelle Eigenschaft eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie bestimmt.*

Lemma 3.45 (46)**.** *Jede Einbettung $i : Z \to X$ ist ein Monomorphismus in* $\underline{\mathrm{Sch}}$.

Beweis.

- Stetige Abbildung $Z \hookrightarrow X$ klar.
- Die Garbenabbildung $i_Y^{\#}$ ist surjektiv.

□

Beweis von Korollar 45. Sei X'_{red} ein weiteres Schema mit universeller Eigenschaft

$$\exists f : X_{\mathrm{red}} \to X'_{\mathrm{red}}, \quad g : X'_{\mathrm{red}} \to X_{\mathrm{red}}$$

so dass

$$\begin{tikzcd} X_{\mathrm{red}} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "i_X"'] & X'_{\mathrm{red}} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i_{X'}"] & X_{\mathrm{red}} \arrow[dl, "i_X"] \\ & X & \end{tikzcd}, \quad i_X \circ (g \circ f) = i_X \circ \mathrm{id}_{X_{\mathrm{red}}}$$

i_X Monomorphismus $\Longrightarrow g \circ f = \mathrm{id}_{X_{\mathrm{red}}} = f \circ g$. Auf $(X_{\mathrm{red}}, i_X) = \{\mathrm{id}\} \Longrightarrow$ Eindeutig. □

$(\cdot)_{\mathrm{red}}$ ist ein Funktor, wie die folgende Proposition zeigt:

Satz 3.46 (47)**.** *Sei $f : X \to Y$ ein Schemata-Morphismus. Dann gibt es:*

$$X_{\mathrm{red}} \xrightarrow{f_{\mathrm{red}}} Y_{\mathrm{red}}, \quad d.d.$$

$$\begin{tikzcd} X_{\mathrm{red}} \arrow[r, hook, "i_X"] \arrow[d, "f_{\mathrm{red}}"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y_{\mathrm{red}} \arrow[r, hook, "i_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

Für weitere Morphismen $g : Y \to Z$ gilt

$$(g \circ f)_{\mathrm{red}} = g_{\mathrm{red}} \circ f_{\mathrm{red}}.$$

Beweis. i_Y Monomorphismus $\Longrightarrow$ f_{red} eindeutig. **Existenz:** Nach Verklebungs-Lemma $\Longrightarrow$ ohne Einschränkung $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$, $f \mathrel{\hat{=}} \varphi : B \to A$.

$\Longrightarrow \varphi(\mathrm{nil}(B)) \subset \mathrm{nil}(A)$
$\Longrightarrow \varphi_{\mathrm{red}} : B/\,\mathrm{nil}(B) \to A/\,\mathrm{nil}(A)$
$\Longrightarrow f_{\mathrm{red}} : \mathrm{Spec}(A/\,\mathrm{nil}(A)) \to \mathrm{Spec}(B/\,\mathrm{nil}(B)).$ □

Satz 3.47 (48)**.** *Sei X Schemata, $Z \subset X$ lokal abgeschlossene Teilmenge. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes reduziertes Unterschema mit topologischem Raum Z.*

Beweis. Eindeutigkeit: Korollar 45. Existenz: Verklebungslemma $\Longrightarrow$ ohne Einschränkung $X = \mathrm{Spec}\,A$ affin und $Z \subset X$ abgeschlossen (sonst Überdeckung von X zu $Z \subset_{\text{abg.}} U \subset_{\text{abg.}} X$) $\Longrightarrow \exists \mathfrak{a} \subset A$ so dass $Z = V(\mathfrak{A}) \Longrightarrow Z' = \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})$ ist abgeschlossenes Unterschema von X mit topologischem Raum Z. Satz 44 $\Longrightarrow \exists Z'_{\mathrm{red}} \subset Z' \subset X$. □

Damit besitzt für ein lokal abgeschlossene Teilmenge die geordnete Menge (bzgl. Inklusion) von Unterschema, denen topologischen Raum Z umfassen, ein eindeutiges minimales Element Z_{red}, das **reduzierte Unterschema** mit unterliegendem Raum Z.

Kapitel 4

Faserprodukte

4.1 Der Punkte-Funktor

Kontravarianter Funktor, $\forall X \in \underline{\mathrm{Sch}}$,

$$\begin{aligned} h_X : (\underline{\mathrm{Sch}})^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \underline{\mathrm{Set}} \\ S &\longmapsto h_X(S) := \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Sch}}}(S, X) \\ (f : T \to S) &\longmapsto (\mathrm{Hom}(S, X) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}(T, X),\ g \mapsto g \circ f) \end{aligned}$$

$f^* = h_X(S)$ heißen S-wertige Punkte von X. **Notation:** $X(S)$, $X(R)$, falls $S = \operatorname{Spec} R$.
Relative Version: $X \in \underline{\mathrm{Sch/S}}\,0$, S_0 fixes Schemata.

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{Sch/S}}\,0 &\longrightarrow \underline{\mathrm{Set}} \\ S &\longmapsto \mathrm{Hom}_{S_0}(S, X) \end{aligned}$$

Notation: $X_{S_0}(S)$**,** $X_{R_0}(S)$**,** $X_{S_0}(R)$**,** $X_{R_0}(R)$

Beispiel 4.1 (1)**.** Sei k algebraisch abgeschlossen, X/k von endlichem Typ, $x \in X_k(k)$. Dann ist

$$\mathrm{im}(\operatorname{Spec} k \xrightarrow{x} X) \in X$$

abgeschlossener Punkt. $x \mapsto \mathrm{im}(x)$ liefert Bijektion, $X_k(k) \to |X|$ Menge der abgeschlossenen Punkte.

Beispiel 4.2 (2)**.** Sei $X = \mathbb{A}^n = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[T_1, \ldots T_n])$. Dann:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^n(S) &= \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Sch}}}(S, \mathbb{A}^n) = \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Ring}}}(\mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n], \mathcal{O}_S(S)) \\ &= \Gamma(S, \mathcal{O}_S)^n \end{aligned}$$

Beispiel 4.3 (3)**.** Sei $X = \mathrm{Spec}(R[T_1, \ldots, T_n]/(f_1, \ldots, f_m))$, S ein R-Schema. Dann:

$$\begin{aligned} X_R(S) &= \mathrm{Hom}_{R\text{-Alg}}(R[I]/(f), \mathcal{O}_S(S)) \\ &= \{s \in \mathcal{O}_S(S)^n \mid f_1(s) = \cdots = f_m(s) = 0\} \end{aligned}$$

Beispiel 4.4 (4)**.** Sei $X = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[T, T^{-1}]$. Dann:

$$X(S) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[T, T^{-1}], \mathcal{O}_S(S)) = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)^\times.$$

Hier sogar $h_X : \underline{\mathrm{Sch}} \to \underline{\mathrm{Grp}}$. X ist eine abelsche Gruppe.

4.2 Yoneda-Lemma

Ziel: h_X beschreibt X eindeutig.

Erinnerung: $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ Funktoren, natürliche Transformation $f \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$:

$$f = \{f(X) : \mathcal{F}(X) :\to \mathcal{G}(X))_{X \in \mathcal{A}}.$$

Wir erhalten Kategorien: $\underline{\mathrm{Func}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, **hier:** $\mathcal{C} = \underline{\mathrm{Sch/S}}\,0$, $\hat{C} = \underline{\mathrm{Func}}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \underline{\mathrm{Set}})$. Wir erhalten einen Funktor

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &\longrightarrow \hat{\mathcal{C}}, \\ X &\longmapsto h_X, \\ f &\longmapsto \text{Pullback } f^*. \end{aligned}$$

Satz 4.5 (5)**.** *Sei $X \in \mathcal{C}$, $\mathcal{F} \in \hat{\mathcal{C}}$. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\hat{C}}(h_X, \mathcal{F}) &\longrightarrow \mathcal{F}(X) \\ \alpha &\longmapsto \alpha(X)(\mathrm{id}_X) \in \mathrm{Hom}(h_X(X), \mathcal{F}(X)) \end{aligned}$$

bijektiv und funktoriell.

Insbesondere ist der obige Funktor $\mathcal{C} \to \hat{\mathcal{C}}$ volltreu (wähle $\mathcal{F} = h_Y$!)

Beweis. Umkehrabbildung:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(X) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(h_X, \mathcal{F}) \\ \xi &\longmapsto \alpha_\xi = (\alpha_\xi(Y))_{Y \in \underline{\mathrm{Sch/S_0}}} \end{aligned}$$

$$\text{mit} \quad \begin{aligned} \alpha_\xi(Y) : \mathrm{Hom}(Y, X) = h_X(Y) &\longrightarrow \mathcal{F}(Y) \\ f &\longmapsto \mathcal{F}(f)(\xi) \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y)) \end{aligned}$$

□

4.3 Faserprodukte in beliebigen Kategorien

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $S \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, $f : X \to S$, $g : Y \to S$ Morphismen.

Definition 4.6 (6)**.** Ein Tupel (Z, p, q) mit $Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ und Morphismen $p : Z \to X$, $q : Z \to Y$, $f \circ p = g \circ q$, heißt **Faserprodukt** von X und Y über S (bzw. von f, g), falls für jedes $T \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ und Paare $(u : T \to X, v : T \to Y)$ von Morphismen mit $f \circ u = g \circ v$ genau ein Morphismus $w : T \to Z$ existiert mit $p \circ w = u$, $g \circ w = v$.

Notation: $X \times_S Y$ oder $X \times_{f,S,g} Y := Z$, $(u, v)_S := w$.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, "\exists_1"] \arrow[drr, bend left, "u"] \arrow[ddr, bend right, "v"'] & & \\
& X \times_S Y \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"] & X \arrow[d, "f"] \\
& Y \arrow[r, "g"'] & S
\end{tikzcd}$$

Ist S ein finales Objekt in $\mathcal{C}$, so ist $X \times_S Y = X \times Y$ das kategorielle Produkt.

Beispiel 4.7 (7)**.**

(i) $\mathcal{C} = \underline{\mathrm{Set}}$. $X \times_S Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(x)(\}$.

(ii) $\mathcal{C} = \underline{\mathrm{Top}}$, $f : X \to S$, $g : Y \to S$ stetige Abbildungen. Versehe $\{(x, y) \mid f(x) = g(y)\} \subset X \times Y$ mit der Topologie induziert von der Produkttopologie auf $X \times Y$. Dies ist ein Faserprodukt in $\underline{\mathrm{Top}}$.

Ab jetzt: Alle Faserprodukte mögen in $\mathcal{C}$ existieren.

Sei Morphismus $h : T \to S$ in $\mathcal{C}$, ein S-**Objekt**. (kurz T, h **Strukturmorphismus** von T.)

Für S-Objekte $h : T \to S$ und $f : X \to S$ schreibe $\mathrm{Hom}_S(T, X) := X_S(T)$ für Morphismen $w : T \to X$ mit $f \circ w = h$, die S-**Morphismen**. Nenne $X_S(T)$ die **Menge der T-wertigen Punkte von X (über S)**. Dies definiert eine Kategorie $\mathcal{C}/S$ mit finalem Objekt id_S.

Faserprodukt $X \times_S Y$ ist Produkt von S-Objekten f und g in $\mathcal{C}/S$.

$$\begin{aligned}
(X \times_S Y)(T) &= X_S(T) \times Y_S(T) \\
\text{(UAE)}\;\; \mathrm{Hom}_S(T, X \times_S Y) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_S(T, X) \times \mathrm{Hom}_S(T, Y) \\
w &\longmapsto (p \circ w, q \circ w)
\end{aligned}$$

für alle $h : T \to S$.

Funktorialität

Seien $X, Y, X', Y' \in \mathcal{C}/S$, $u : X \to X'$, $v : Y \to Y'$ S-Morphismus. $\Longrightarrow \exists_1$ Morphismus $u \times_S v$ (oder nur $u \times v$): $X \times_S Y \to X' \times_S Y'$. d.d.

$$\begin{tikzcd}
X \times_S Y \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "u \times v"] & X \arrow[dr, "u"] & \\
Y \arrow[dr, "v"'] & X' \times Y' \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[d] \\
& Y' \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Setze $u \times v := (u \circ p, v \circ q)_S$ (Universelle Eigenschaft von $X' \times_S Y'$!)

Yoneda-Lemma:

$$f : X \to Y \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C}/S) \leftrightarrow (f_S(T) : X_S(T) \to Y_S(T))_{T \in \mathcal{C}/S} \text{ funktoriell in } T$$

Satz 4.8 (8, Eigenschaften des Faserprodukts)**.** *Sei $X, Y, Z \in \mathcal{C}/S$. Dann gibt es* ***kanonische Isomorphismen*** *(funktoriell in X, Y, Z),*

(i) $X \times_S S \xrightarrow{\sim} X$

(ii) $X \times_S Y \xrightarrow{\sim} Y \times_S X$

(iii) $(X \times_S Y) \times_S Z \xrightarrow{\sim} X \times_S (Y \times_S Z)$

auf T-wertigen Punkten, für alle $h : T \to S$ S-Objekt, gegeben durch:

$$\begin{aligned}
X_S(T) \times S_S(T) &\xrightarrow{\sim} X_S(T), && (x, h) \mapsto x, \\
X_S(T) \times Y_S(T) &\xrightarrow{\sim} Y_S(T) \times X_S(T), && (x, y) \mapsto (y, x), \\
(X_S(T) \times Y_S(T)) \times Z_S(T) &\xrightarrow{\sim} X_S(T) \times (Y_S(T) \times Z_S(T)), && ((x, y), z) \mapsto (x, (y, z)).
\end{aligned}$$

Sei $Z \in \mathcal{C}/S$. Ein kommutatives Diagramm in $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, "g"'] & S
\end{tikzcd}$$

heißt **kartesisch** falls $(u, v)_S : Z \to X \times_S Y$ ein Isomorphismus ist (und dabei automatisch in $\mathcal{C}/S$).

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, dashed, "(u,v)_S"] & Y \\
X & X \times_S Y \arrow[l, "p"] \arrow[u, "q"']
\end{tikzcd}$$

Bemerkung 4.9. Nach dem Yoneda-Lemma ist dies äquivalent dazu, dass das Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,Z) \arrow[r, "u(T)"] \arrow[d, "v(T)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,X) \arrow[d, "f(T)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,Y) \arrow[r, "g(T)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,S)
\end{tikzcd} \qquad (*)$$

kartesisch ist für alle $T \in \mathcal{C}$ (Beispiel 4.7). Dies ist äquivalent zu:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,Z) \arrow[r, "\overset{!}{\cong}"] \arrow[d, "s"', "(u,v)_S(T)"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,X) \times_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,S)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,Y) \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,X \times_S Y) \arrow[ur, "f \mapsto (p \circ h, q \circ h)"']
\end{tikzcd}$$

mit $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,X) \times_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,S)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,Y) := \{(h_1,h_2) \mid f \circ f_1 = g \circ h_2\}$.

Satz 4.10 (10)**.** *Sei das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
X'' \arrow[r, "g'"] \arrow[d] & X' \arrow[r, "g"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d] \\
S'' \arrow[r, "f'"'] & S' \arrow[r, "f"'] & S
\end{tikzcd}$$

kommutativ, mit rechts ein kartesisches Diagramm. Dann gilt:

$$\begin{tikzcd}
X'' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X' \arrow[d] \\
S'' \arrow[r] & S'
\end{tikzcd} \iff \begin{tikzcd}
X'' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d] \\
S'' \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

Beweis. Zeige in der Kategorie $\mathcal{C} = \underline{\mathrm{Set}}$, und wende das Yoneda-Lemma, $(*)$ an. $\square$

4.4 Faserprodukte von Schemata

Satz 4.11 (11).

Theorem 4.12 (12).

Korollar 4.13 (13).

Sei $X, X' \in \underline{\text{Sch/S}}$, $f : X' \to X$ Morphismus in $\underline{\text{Sch/S}}$, $g := f \times_S \mathrm{id}_Y$.

$$\begin{tikzcd}
Z' = X' \times_S Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p'"'] & Z = X \times_S Y \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p'"'] & Y \arrow[d] \\
X' \arrow[r, "f"] & X \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Da $q \circ g = q'$ Projektion auf Y ist, ist das große und damit auch beide Diagramme kartesisch. (Proposition 10)

Satz 4.14 (14). *f induziert einen Homömorphismus von X' auf $f(X')$ und:*

(i) $f^{\#}_{x'} : \mathcal{O}_{X,f(x')} \to \mathcal{O}_{X',x'}$ sei surjektiv $\forall x' \in X'$ und es existiert eine offene affine Umgebung U' von $f(x')$, sodass $f^{-1}(U')$ quasi-kompakt ist, oder

(ii) $f^{\#}_{x'}$ ist bijektiv $\forall x' \in X'$.

Dann gilt:

(i) g ist ein Homöomorphismus von Z' auf $g(Z') = p^{-1}(f(X'))$.

(ii) $\forall z' \in Z'$ haben wir das induzierte Diagramm für lokale Ringe:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{Z',z'} \arrow[d] & \mathcal{O}_{Z,g(z')} \arrow[l, "g^{\#}_{z'}"'] \arrow[d, "p^{\#}_{g(z)}"] \\
\mathcal{O}_{X',p'(z')} & \mathcal{O}_{X,p(g(z'))} \arrow[l, "f_{p'(z')}"]
\end{tikzcd}$$

- $g^{\#}_{z'}$ *ist surjektiv;*
- $\ker(g^{\#}_{z'})$ *ist von* $p^{\#}_{g(z')}(\ker f^{\#}_{p'(z')})$ *erzeugt.*

Beweis. (1), (2) lassen sich lokal bzgl. S, Y, X verifizieren. Ohne Einschränkung sei $S = \operatorname{Spec} R$, $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$ affin, X' quasi-kompakt.

$$\begin{tikzcd}
f \leftrightarrow A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi_1"'] & \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \qquad R\text{-Algebren} \\
& A/\ker\varphi \arrow[u, hook, "\varphi_2"']
\end{tikzcd}$$

f faktorisiert sich als

$$X' \xrightarrow{f_1} \operatorname{Spec}(A/\ker\varphi) \xrightarrow{f_2} \operatorname{Spec}(A) = X\ .$$

Dann ist f_2 eine abgeschlossene Immersion, also surjektiv auf Halmen $(f_p)_2$, und ein Homeomorphismus auf einer abgeschlossenen Teilmenge in X. In Situation I erfüllt daher mit f auch f_1 Voraussetzung (1). Daher reicht es die folgenden 2 Fälle zu beweisen.

(i) f ist eine abgeschlossene Immersion ($\hat{=}$ f_2 Voraussetzung (1))

(ii) $f_{x'}^{\#}$ ist bijektiv für alle $x' \in X'$ ($\hat{=}$ f_1 Voraussetzung (1) + Voraussetzung (2)).

Lemma. Sei:

$$A \hookrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)\ , \quad X' \text{ quasi-kompakt}$$

$$X' \xrightarrow{f} \operatorname{Spec}(A)$$

Dann ist $f_{x'}^{\#}$ injektiv für alle $x \in X'$.

Vorüberlegung. Sei Z ein Schemata und $t \in \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$, $Z_T := \{z \mid t(z) \neq 0\} \subset Z$ offen. Die Einschränkung

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(Z, \mathcal{O}_Z) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(Z_t, \mathcal{O}_Z) \\
\Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)_t \arrow[ur, hook, dashed, "\rho_t"'] &
\end{tikzcd}$$

definiert einen Homomorphismus ρ_t. Dieser ist injektiv, falls Z quasi-kompakt, **denn** $Z = \bigcup U_i$ ist endliche offene affine Überdeckung. Sei $C_i = \mathcal{O}_Z(U_i)$, $t_i = t|_{U_i}$. $\Longrightarrow$ $(\prod_i C_i)_t = \prod_i (C_i)_{t_i}$ da i endlich. Wir erhalten das kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_Z(Z) \arrow[r] & \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)_t \arrow[r, "\rho_t"] & \Gamma(Z_t, \mathcal{O}_Z) \\
\prod_i C_i \arrow[r] \arrow[u, hook, "\text{Garbe}"] & \prod_i (C_i)_{t_i} \arrow[r, "\cong"'] \arrow[u, hook] & \prod_i \Gamma(D(t_i), \mathcal{O}_{U_i}) \arrow[u, hook, "\text{Garbe}"']
\end{tikzcd}$$

Beweis (Lemma). Sei $\mathfrak{p} \subset A \cong f(x')$. Für alle $s \in A \backslash \mathfrak{p}$ sei

$$\varphi_s : A_s \longrightarrow \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'})_{\varphi(s)}$$

der injektive Homomorphismus aus φ durch Lokalisierung in s, und sei ψ_s die injektive Komposition

$$\psi_s : A_s \xrightarrow{\varphi_s} \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'})_{\varphi(s)} \xrightarrow{\rho_{\varphi(s)}} \Gamma(X'_{\varphi(s)}, \mathcal{O}_{X'}).$$

Dann ist $X'_{\varphi(s)} = f^{-1}(D(s))$. Da für $s \in A \backslash \mathfrak{p}$ die $D(s)$ eine offene Umgebungsbasis von $f(x)'$, und da f ein Homeomorphismus auf sein Bild ist, bilden die $X'_{\varphi(s)}$ eine offene Umgebungsbasis von x'. $\Longrightarrow \varinjlim_s \Gamma(X'_{\varphi(s)}, \mathcal{O}_{X'}) = \mathcal{O}_{X',x'}$ und $\varinjlim_s \psi_s = f_{x'}^{\#} \Longrightarrow f_{x'}^{\#}$ injektiv. $\square$

Zu 1.) Sei $X' = \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a}) \xrightarrow{f} \operatorname{Spec}(A) = X$, $\mathfrak{a} \subset A$ Ideal. Proposition 11 $\Longrightarrow Z, Z'$ affin, und g entspricht R-Algebren

$$\begin{tikzcd} A \otimes_R B \arrow[r, two heads, "“g“"] & A/\mathfrak{a} \otimes_R B \\ A \arrow[u, "“p“"] \arrow[r, "“f“"'] & A/\mathfrak{a} \arrow[u, "p'"'] \end{tikzcd}$$

und “p“(ker “f“) $\subset A \otimes_R B =$ ker “g“ $\Longrightarrow g$ ist Homöomorphismus auf $g(Z') = p^{-1}(f(x'))$, $x' \in X'$. ✓

Zu 2.) Es ist $f^{\#} : f^{-1}\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{X'}$ ein Isomorphismus bzgl. $(X', \mathcal{O}_{X'}) \cong (f(x'), \mathcal{O}_X|_{f(x')})$ Isomorphismus lokal geringter Räume. Leicht zu verifizieren: $(p^{-1}(f(x')), \mathcal{O}_Z|_{p^{-1}(f(x'))})$ ist ein Faserprodukt von X' mit Z über X in der Kategorie lokal geringter Räume, also erst recht in <u>Sch</u>. (vgl. Zusatz in Theorem (Existenz $X \times_S Y$)). $\Longrightarrow g$ Isomorphismus

$$(Z', \mathcal{O}_Z) \longrightarrow (\tilde{\tilde{p}}^{-1}(f(x')), \mathcal{O}_Z|_{p^{-1}(f(x'))}) \ .$$

$\square$

Beispiel. Proposition 14 gilt in folgenden Situationen.

(i) f ist eine Immersion von Schemata.

(ii) f ist der kanonische Morphismus $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \to X$ für ein $x \in X$, vgl. (5.4), (2.11).

(iii) f ist der kanonische Morphismus $\operatorname{Spec} \kappa(x) \to X$ für ein $x \in X$.

(iv) Komposition von Morphismen, die Proposition 14 erfüllen (und Proposition 10).

4.5 Beispiele

Produkte affiner Räume Sei R ein Ring, und $\mathbb{A}^n_R = \operatorname{Spec}(R[T_1, \ldots, T_n])$ der affine Raum über R. Für $n, m \geq 0$ haben wir

$$R[T_1, \ldots, T_n] \otimes_R R[T_{n+1}, \ldots, T_{n+m}] \cong R[T_1, \ldots, T_{n+m}]$$

und deshalb nach Proposition 11

$$\mathbb{A}^n_R \times_R \mathbb{A}^m_R \cong \mathbb{A}^{n+m}_R.$$

Produkte von Prävarietäten Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, und X ein k-Schema endlichen Typs. Nach 3.14 ist $X_k(k) = X_0$ (abgeschlossene Punkte von X).

$$\begin{aligned} x : \operatorname{Spec} k \longrightarrow X &\longrightarrow \text{Bild} \\ \{\text{Integ. Sch. v.e.T.}/k\} &\longleftrightarrow \{\text{Präv.}/k\} \\ X &\longmapsto \{X_0, \mathcal{O}_X|_{X_0}\} \end{aligned}$$

Lemma 4.15 (15)**.** *Sei k ein Körper und seien X, Y integre k-Schemata. Dann ist $X \times_k Y$ ein integres k-Schemata.*

Beweis: später. Falls X, Y integral von endlichem Typ über k sind, dann ist auch $X \times_k Y$ integral von endlichem Typ über k. Denn: $X = \bigcup_{\text{endl.}} X_i$, $Y = \bigcup_{\text{endl.}} Y_j \Longrightarrow X \times_k Y = \bigcup_{i,j} X_i \times_k Y_i$. $\Longrightarrow X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$ mit A, B endlich erzeugte k-Algebras. $\Longrightarrow X \times_k Y = \operatorname{Spec} A \otimes_k B$ endlich erzeugte k-Algebra.

Seien X_0 und Y_0 die Prävarietäten zu X bzw. Y, und Z_0 die Prävarietät zu $X \times_k Y$. Dann gilt nach der universellen Eigenschaft des Faserprodukts:

$$Z_0 = (X \times_k Y)_k(k) = X_k(k) \times Y_k(k) = X_0 \times Y_0,$$

d.h. das Faserprodukt von 2 Prävarietäten X_0, Y_0 ist wieder eine Prävarietät Z_0 (als volle Unterkategorie von Sch/k) mit $Z_0 = X_0 \times Y_0$ (als Mengen). Die Projektionen $Z_0 \to X_0$ und $Z_0 \to Y_0$ sind stetig, aber im Allgemeinen ist die Topologie auf Z_0 **feiner** als die Produkttopologie von X_0 und Y_0.

4.6 Basiswechsel

Sei $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie mit Faserprodukten (z.B. Sch), $u : S' \to S$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$, $X \to S$ ein S-Objekt. $\Longrightarrow q : X \times_S S' \to S'$ ist ein S'-Objekt. Bezeichne $u^*(X) =: q$ oder $X_{(s')}$ **Urbild** oder **Basiswechsel** von X bzgl. u.

Sei $f : X \to Y$ Morphismus von S-Objekten. $\Longrightarrow f \times_S \mathrm{id}_{S'} : X \times_S S' \to Y \times_S S'$ ist ein Morphismus von S'-Objekten. Bezeichne $f \times_S \mathrm{id}_{S'} =: u^*(f) =: f_{(s')}$ der **Basiswechsel von** f **bzgl.** u. Wir erhalten einen kontravarianten Funktor

$$u^* : \mathcal{C}/S \longrightarrow \mathcal{C}/S'$$

der Kategorie von S-Objekten in $\mathcal{C}$ zu der Kategorie der S'-Objekten in $\mathcal{C}$. Nenne u^* den **Basiswechsel bzgl.** u.

Transitivität des Basiswechsels Sei $u' : S'' \to S'$ ein weiterer Morphismus in $\mathcal{C}$. Nach Proposition 10 ist $(u \circ u')^* \cong u'^* \circ u^*$ ein Isomorphismus von Funktoren. Sei

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "h"] \arrow[dr] & S' \arrow[d, "u"] \\ & S \end{tikzcd} \in \mathcal{C}/S'.$$

Wir können T als S-Objekt auffassen durch $u \circ h$. Sei $p : X_{(S')} \to X$ die erste Projektion. Dann erhalten wir zueinander inverse Bijektionen, funktoriell in T und X:

$$\begin{aligned} t &\longmapsto p\circ \\ \hom_{S'}(T, X_{(S')}) &\longleftrightarrow \hom_S(T, X) \\ (t, h)_{S'} &\longleftarrow\!\shortmid t \end{aligned}$$

Definition 4.16 (16)**.** Sei $\mathbb{P}$ eine Eigenschaft von Morphismen in $\mathcal{C}$, sodass id_X $\mathbb{P}$ erfüllt für alle $X \in \mathcal{C}$.

(i) $\mathbb{P}$ heißt **stabil**

1. **unter Komposition**, wenn mit $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ auch $g \circ f$ $\mathbb{P}$ erfüllt.
2. **unter Basiswechsel**, wenn mit $f : X \to S$ auch $f_{(S')} : X_{(S')} \to S'$ für alle Morphismen $S' \to S$, $\mathbb{P}$ erfüllt.

(ii) Wir sagen, dass $f : X \to S$ $\mathbb{P}$ **universell** erfüllt, falls $f_{(S')}$ $\mathbb{P}$ erfüllt für alle $S' \to S$.

Bemerkung 4.17 (17). Sei $\mathbb{P}$ stabil unter Komposition. Dann sind äquivalent:

(i) $\forall S \in \mathcal{C}$, $\forall S$-Morphismen $f : X' \to X$, $g : Y' \to Y$, die $\mathbb{P}$ erfüllen, erfüllt auch $f \times_S g$ $\mathbb{P}$.

(ii) $\mathbb{P}$ ist stabil unter Basiswechsel.

Beweis.

- $(i) \Rightarrow (ii)$

  $f_{(S')} = f \times_S \mathrm{id}_{S'}$.

- $(ii) \Rightarrow (i)$

  Seien f, g Morphismen (wie in 1) die $\mathbb{P}$ erfüllen. Da $f \times_S g = (f \times_S \mathrm{id}_Y) \circ (\mathrm{id}_X \times_S g)$ sei ohne Einschränkung $g = \mathrm{id}_Y$.

  $$f_{(X \times_S Y)} = f \times_S \mathrm{id}_Y : X' \times_S Y = X' \underbrace{\times_X}_{\text{bzgl. } f} (X \times_S Y) \to X \times_S Y$$

  erfüllt $\mathbb{P}$.

In $\underline{\mathrm{Sch}}$ sind fast alle betrachteten Eigenschaften von Morphismen stabil unter Komposition, aber nicht unbedingt unter Basiswechsel, z.B. injektiv oder abgeschlossen. □

Beispiel. Es ist:

$$\begin{aligned} f : X = \operatorname{Spec} \mathbb{Q}(\xi_p) &\longrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Q} = S \\ u : S' &\longrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Q} \end{aligned}$$

Homöomorphismus, d.h. injektiv, aber

$$f_{(S')} : X \times_S S' \longrightarrow \underbrace{S' = \operatorname{Spec} \mathbb{Q}(\xi_p)}_{\text{1 Punkt}}$$

ist nicht injektiv:

$$\operatorname{Spec}(\mathbb{Q}(\xi_p) \otimes \mathbb{Q}_p) \cong \underbrace{\prod^{p-1} \mathbb{Q}(\xi_p)}_{p-1 \text{ Punkte}}.$$

Warnung. Absolute Eigenschaften von Schemata sind oft nicht kompatibel mit Basiswechsel. Sei $k = \mathbb{F}_p(t)$ (nicht perfekt!), $K = \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{F}_p(t^{\frac{1}{p^n}})$ perfekter Abschluss von k, $A := K \otimes_k K$. Man kann zeigen: $\mathrm{nil}(A)$ ist *nicht* endlich erzeugt, d.h. $\operatorname{Spec}(A)$, A ist nicht reduzibel und nicht noethersch.

4.7 Fasern von Morphismen

Ziel: $X \supset f^{-1}(s)$ als Schema.
$$\begin{array}{c} \\ \downarrow f \\ S \ni s \end{array}$$

Definition 4.18 (18)**.** Für den kanonischen Morphismus $\operatorname{Spec}(\kappa(s))$ nennen wir

$$X_s := X \otimes_S \kappa(s)$$

die **Faser von** f **in** s, ein $\kappa(s)$-Schema. Proposition 14 $\Longrightarrow$

$$\begin{tikzcd} X_s \arrow[r] \arrow[d] & S \times_S X \arrow[r, "q=\mathrm{id}_X"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d] \\ \operatorname{Spec}\kappa(s) \arrow[r, "\text{canon.}"'] & S \arrow[r, "\mathrm{id}_S"'] & S \end{tikzcd} \qquad \text{kommutativ,}$$

besagt $X_s \cong f^{-1}(s)$ (=homoömorph zu Bild(canon)), d.h. wir können $f^{-1}(s)$ als Schema auffassen.

Denkweise: $\begin{array}{c} X \\ \downarrow f \\ S \end{array}$ $\cong$ Familie von $\kappa(s)$-Schemata X_s, parametrisiert durch Punkte von S.

Beispiel 4.19 (19)**.** Sei k algebraisch abgeschlossen.

$$X(k) := \{(u,t,s) \in \mathbb{A}^3(k) \mid ut = s\}$$

Da $UT - s \in k[U,T,S]$ irreduzibel ist, ist $X(k)$ eine affine Varietät. $\leftrightarrow X = \operatorname{Spec}(k[U,T,S]/(UT - S)$ ist ganzes k-Schema. Sei $S = \mathbb{A}^1$,

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow S \\ (u,t,s) &\longmapsto s \end{aligned}$$

Projektion. $s \in \mathbb{A}^1(k)$, $X_s = \operatorname{Spec} A_s$,

$$\begin{aligned} A_s &= k[U,T,S]/(UT - S) \otimes_{k[S]} k[S]/(S - s) \\ &\cong k[U,T]/(UT - S). \end{aligned}$$

$UT - s \in k[U,T]$ irreduzibel für $s \neq 0$, reduzibel für $s = 0$. $\Longrightarrow X \to S$ definiert Familie X_s von k-Schemata, sodass X_0 reduzibel, X_s irreduzibel für $s \neq 0$.

Lemma 4.20 (20)**.** *Sei das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
 & X \times_S Y \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\
x \in X \arrow[dr, "f"] & & Y \ni y \arrow[dl, "g"'] \\
\operatorname{Spec} \kappa(x) \arrow[u, "\xi"] & S & \operatorname{Spec} \kappa(y) \arrow[u, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

Dann gilt:

(i) Es gibt ein $z \in X \times_S Y$ mit $p(z) = x$, $q(z) = y$, genau dann wenn $f(x) = g(y)$.

(ii) Es gelte (1)*, setze $s := f(x) = g(y)$. Dann ist*

$$\zeta := \xi \times_S \psi : Z := \operatorname{Spec}(\kappa(x) \otimes_{\kappa(s)} \kappa(y)) \longrightarrow X \times_S Y$$

ein Homöomorphismus von Z auf Teilraum $\zeta(Z) = p^{-1}(x) \cap q^{-1}(y)$.

Beweis. Setze $Z := p^{-1}(x) \times_{(X \times_S Y)} q^{-1}(y)$, und betrachte:

$$\begin{tikzcd}
 & & Z \arrow[dl, "f'"'] \arrow[dr, "g'"] & & \\
 & p^{-1}(x) \arrow[dl] \arrow[dr] & & q^{-1}(y) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\operatorname{Spec} \kappa(s) \arrow[dr] & & X \times_S Y \arrow[dl] \arrow[dr] & & \operatorname{Spec} \kappa(y) \arrow[dl] \\
 & X \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] & \\
 & & S & &
\end{tikzcd}$$

Wende Proposition 14 zweifach an $\Longrightarrow$

$$g'(Z) = i^{-1}(p^{-1}(x)) = q^{-1}(y) \cap p^{-1}(x).$$

$\square$

4.8 Eigenschaften von Schemata-Morphismen

Notation 4.21 (21)**.** Sei $\mathbb{P}$ Eigenschaft von Morphismen von Schemata.

(i) $\mathbb{P}$ heißt **lokal im Ziel**, falls für alle Morphismen f und alle offenen Überdeckungen $S = \bigcup_{j \in J} S_j$ gilt:

$$f : X \to S \text{ erfüllt } \mathbb{P} \Longleftrightarrow f|_{f^{-1}(S_j)} : f^{-1}(S_j) : S_j \text{ erfüllt } \mathbb{P}\ \forall j \in J$$

(ii) $\mathbb{P}$ heißt **lokal in der Quelle**, falls für alle $f : X \to Y$ und alle offenen Überdeckungen $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ gilt:

$$f \text{ erfüllt } \mathbb{P} \Longleftrightarrow f|_{U_i} : U_i \to Y \text{ erfüllt } \mathbb{P}\ \forall i \in I$$

Definition. *Ein Morphismus $f : X \to Y$ von Schemata heißt* ***(treu)flach****, falls $\forall x \in X$ die Abbildung*

$$\mathcal{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

(treu)flach ist.

Satz 4.22 (22)**.** *Die folgende Eigenschaft von Schemata-Morphismen sind:*

(i) stabil unter Komposition: „injektiv“, „surjektiv“, „bijektiv“, „homöomorph“, „flach“, „treuflach“, „offen“, „abgeschlossen“, „offene Immersion“, „abgeschlossene Immersion“, „Immersion“;

(ii) stabil unter Basiswechsel: „surjektiv“, „offene Immersion“, „abgeschlossene Immersion“, „Immersion“, „flach“, „treuflach“;

(iii) lokal bzgl. Ziel: „surjektiv“, „bijektiv“, „homöomorph“, „offen“, „abgeschlossen“, „offene Immersion“, „abgeschlossene Immersion“, „Immersion“, „flach“, „treuflach“;

(iv) lokal bzgl. Quelle: „offen“, „flach“.

Beweis. Die Fälle (1), (3), (4) sind klar. Der Fall (2) für offene/abgeschlossene Immersionen wird in Abschnitt 9 behandelt. Lemma 20 $\Longrightarrow$ „surjektiv“ stabil unter Basiswechsel.

$$\begin{tikzcd}
X \times_S Y \arrow[r, "q"] & Y & y \arrow[d, mapsto] \\
X \arrow[r, two heads, "f"] & S & s \\
\exists x \arrow[urr, mapsto, bend right] & &
\end{tikzcd}$$

Sei $X \to S$ (treu)flach und $S' \to S$ beliebig. Sei in Fall (3), (4) ohne Einschränkung $X = \operatorname{Spec} A$, $S = \operatorname{Spec} R$, $S' = \operatorname{Spec} R'$, A (treu)flache R-Algebra. $\Longrightarrow A \otimes_R R'$ (treu)flache

R'-Algebra, d.h. $f_{(S')}$ ist treuflach.

$$(A \otimes_R R') \otimes_{R'} M \cong A \otimes_R M$$

$\square$

Korollar 4.23 (23)**.** *Die folgende Eigenschaften sind stabil unter Komposition, stabil unter Basiswechsel und lokal bzgl. Ziel:*

„universal injektiv“, „universal bijektiv“, „universal homöomorph“, „universell offen“, „universell abgeschlossen“.

4.9 Urbilder und Schema-theoretische Schnitte von Unterschemata

Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata und $i : Z \to Y$ eine Immersion.

$$\begin{tikzcd} Z \times_Y X \arrow[r] \arrow[d, "i_{(X)}"'] & Z \arrow[d, "i"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Proposition 14 $\Longrightarrow i_{(X)}$ ist surjektiv auf Halmen, Homöomorphismus von $Z \times_Y X$ auf lokal abgeschlossene Teilmenge $f^{-1}(Z)$ (genau $f^{-1}(i(Z))$), d.h. $i_{(X)}$ ist Immersion. Fasse $Z \times_Y X$ als Unterschema von X auf, das **Urbild von Z unter f**.

Bemerkung.

(i) Ist $Z \subset Y$ offenes Unterschema, so auch $f^{-1}(Z) \subset X$.

(ii) Ist $Z = V(\mathfrak{p})$ abgeschlossenes Unterschema, $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_Y$ Idealgarbe, so auch

$$\begin{aligned} f^{-1}(Z) &= V(f^{*^{-1}}(\mathfrak{p})\mathcal{O}_X) \\ &= \mathit{Bild}(f^{*^{-1}}(\mathfrak{p}) \to f^{*^{-1}}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X). \end{aligned}$$

Spezialfall: *Durchschnitt von 2 Unterschemata $i : Y \to X$, $j : Z \to X$:*

$$Y \cap Z := Y \times_X Z = i^{-1}(Z) = j^{-1}(Y)$$

*heißt **(Schema-theoretischer) Durchschnitt von Y und Z in X**.*

Universelle Eigenschaft (aus univ. Eig. Faserprodukt)

Ein Morphismus $h : T \to X$ faktorisiert durch $Y \cap Z$ genau dann wenn h faktorisiert durch Y und Z. Sind $Y = V(\mathfrak{p})$, $Z = V(\mathfrak{q})$ abgeschlossene Unterschemata, so folgt:

$$\begin{gathered} V(\mathfrak{p}) \cap V(\mathfrak{q}) = V(\mathfrak{p} + \mathfrak{q}) \\ A/\mathfrak{p} \otimes_A A/\mathfrak{q} \cong A/\mathfrak{q}+\mathfrak{p} \end{gathered}$$

Beispiel. $f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_s \in R[X_0, \dots, X_n]$ homogene Polynome. Dann ist:

$$V_+(f_1, \dots, f_r) \cap V_+(g_1, \dots, g_s) = V_+(f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_s) \subseteq \mathbb{P}^n_R$$

4.10 Affine und projektive Räume über beliebige Basen

$\mathbb{A}^n := \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}$, S beliebiges Schema.

$\mathbb{A}^n_S := \mathbb{A}^n \times_{\mathbb{Z}} S$ **affiner Raum der relativen Dimension** n **über** S.

$\mathbb{P}^n_S := \mathbb{P}^n \times_{\mathbb{Z}} S$ **projektiver Raum der relativen Dimension** n **über** S.

$S = \operatorname{Spec} R$ affin:

$$\begin{aligned}\mathbb{A}^n_S &= \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n] \otimes_{\mathbb{Z}} R) = \operatorname{Spec}(R[T_1, \dots, T_n]) \\ &= \mathbb{A}^n_R \text{ wie zuvor!} \\ \mathbb{P}^n_S &= \mathbb{P}^n_R \text{ analog.}\end{aligned}$$

$\mathbb{A}^S_n \times_S S' = \mathbb{A}^n \times_{\mathbb{Z}} S \times_S S' = \mathbb{A}^n_{S'}$

$\mathbb{P}^n_S \times_S S' = \mathbb{P}^n_{S'}$ für einen beliebigen Basiswechsel $S' \to S$.

Sei X ein beliebiges Schema.

$$\begin{aligned}\Gamma(X, \mathcal{O}_X) &= \operatorname{Hom}_{\underline{\text{Ring}}}(\mathbb{Z}[T], \Gamma(X, \mathcal{O}_X)) \\ &= \operatorname{Hom}_{\underline{\text{Sch}/\mathbb{Z}}}(X, \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}) \\ \varphi(T) &\leftarrow\!\shortmid \varphi\end{aligned}$$

Sei X ein S-Schema.

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \operatorname{Hom}_{\underline{\text{Sch/S}}}(X, \mathbb{A}^1_S)$$

4.11 Diagonal, Graph und Kern in beliebigen Kategorien

Sei $\mathcal{C}$ Kategorie mit Faserprodukten, $S \in \mathcal{C}$, $X, T \in \mathcal{C}/S$, $X_S(T)$ Menge der S-Morphismen.

Definition 4.24 (24)**.** Der Morphismus

(i) $\Delta_{X/S} := \Delta_u := (\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_X) : X \to X \times_S X$, $u : X \to S$, heißt **Diagonale** (diagonaler Morphismus) **von** X **über** S.

(ii) Sei $f : X \to Y \in \mathrm{Morph}/S$. Der Morphismus

$$\Gamma_j := (\mathrm{id}_X, f)_S : X \longrightarrow X \times_S Y$$

heißt der **Graph(morphismus) von** f.

(iii) Seien $f, g : X \to Y \in \mathrm{Morph}/S$. Ein S-Monomorphismus $i : K \to X$ heißt **(Differenzen)kern** von f und g, falls für alle $T \in \mathcal{C}/S$ die Abbildung $i(T) : K_S(T) \to X_S(T)$ injektiv ist mit

$$\mathrm{Bild}(i(T)) = \{x \in X_S(T) \mid f(T)(x) = g(T)(x)\}.$$

Beizchne $K(f,g)_S$ oder $\ker(f,g)$, i „kanonisch“. Mit anderen Worten, $\ker(f,g)$ separiert den Funktor

$$\begin{aligned} \mathcal{C}/S &\longrightarrow \underline{\mathrm{Sch}} \\ T &\longmapsto \{x \in X_S(T) \mid f(T)(x) = g(T)(x)\} \end{aligned}$$

Beispiel 4.25 (25)**.** In der Kategorie $\mathcal{C} = \underline{\mathrm{Set}}$ gilt für:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f{,}g"] \arrow[dr, "u"'] & Y \arrow[d, "v"] \\ & S \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} \Delta_u : X &\longrightarrow X \times X = \{(x,x') \in X \times X \mid u(x) = u(x')\} \\ x &\longmapsto (x,x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_j : X &\longrightarrow X \times_S Y = \{(x,y) \in X \times Y \mid u(x) = v(y)\} \\ x &\longmapsto (x, f(x)) \end{aligned}$$

$$\ker(f,g) = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

Da $p \circ \Gamma_j = \mathrm{id}_X$, sind Γ_j und $\Delta_{X/S} = \Gamma_{\mathrm{id}_X}$ Monomorphismen.

Satz 4.26 (26)**.** *Seien $f, g : X \to Y$ S-Morphismen.*

(i) $\Delta_{X/S} = \Gamma_{\mathrm{id}_X}$,

$$\Gamma_f = \ker(\, X \times_S Y \overset{q}{\underset{f \circ p}{\rightrightarrows}} Y\,) \longrightarrow X \times_S Y \text{ kanonisch.}$$

(ii) Alle Rechtecke des folgenden kommutativen Diagramms sind kartesisch:

$$\begin{tikzcd}
\ker(f,g) \arrow[r, "canon."] \arrow[d] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Gamma_f"'] & Y \arrow[d, "\Delta_{Y/S}"] \\
X \arrow[r, "\Gamma_g"'] & X \times_S Y \arrow[r, "f \times \mathrm{id}_S"'] & Y \times_S Y
\end{tikzcd}$$

(iii) Sei $s : S \to X$ ein Schnitt von f ($f \circ s = \mathrm{id}_S$). Dann ist das folgende Diagramm kartesisch:

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "s"] \arrow[d, "s"'] & X \arrow[d, "\Gamma_{s \circ f}"] \\
X \arrow[r, "\Delta_{X/S}"'] & X \times_S X
\end{tikzcd}$$

Beweis. Nach dem Yoneda-Lemma reicht es, denn Fall $\mathcal{C} = \underline{\mathrm{Set}}$ zu verifizieren. Dies ist elementar aufgrund der Beschreibung in Beispiel 25. □

Insbesondere existiert $\ker(f, g)$ stets!

4.12 Diagonal für Schemata

Satz 4.27 (27). *Für affine S-Schemata*

$$X = \operatorname{Spec}(B) \xrightarrow{u} S = \operatorname{Spec}(R)$$
$$Y = \operatorname{Spec}(A) \xrightarrow{v} S$$

und S-Morphismus $f = \operatorname{Spec}\varphi : X \to Y$ zu einem R-Algebra Morphismus $\varphi : A \to B$, entsprechen $\Delta_{X/S}$ und Γ_f den folgenden surjektiven Ringhomomorphismen:

$$\begin{aligned} \Delta_{B/R} : B \otimes_R B &\longrightarrow B \\ b \otimes b' &\longmapsto bb' \end{aligned}, \qquad \begin{aligned} \Gamma_\varphi : A \otimes_R B &\longrightarrow B \\ a \otimes b &\longmapsto \varphi(a)b \end{aligned}.$$

Insbesondere sind $\Delta_{X/S}$, Γ_j abgeschlossene Immersionen.

Im allgemeinen sind $\Delta_{X/S}$, Γ_f Immersionen (nicht notwendig abgeschlossen!): Seien $Z, Z' \subset X$ Unterschemata. $\implies Z \times_S Z' \subset X \times_S X$ Unterschemata (Immersionen und stabil unter Basiswechsel und Komposition), und

$$Z \cap Z' = \Delta_{X/S}^{-1}(Z \times_S Z') \qquad (*)$$

Satz 4.28 (28). *Seien $X, Y \in$ Sch/S, $f, g : X \to Y$ S-Morphismen. Dann sind $\Delta_{X/S}$, Γ_f, $\ker(f, g) \to X$ Immersionen.*

Beweis. Es reicht zu zeigen: $\Delta_{X/S}$ ist eine Immersion (und (2) in Proposition 26, da „Immersion“ stabil ist unter Basiswechsel) lokal bzgl. Ziel. Sei also ohne Einschränkung S affin. Falls $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ offene Überdeckung, dann ist $\Delta_{X/S}(X) = \bigcup_{i\in I} U_i \times_S U_i$ offene Überdeckung.

$$X \xrightarrow[\text{abg. Imm.}]{} \bigcup_{i\in I}(U_i \times_S U_i) \xhookrightarrow[\text{off. Imm.}]{} X \times_S X$$

$(*) \implies$ ohne Einschränkung, X affin. Wende nun Proposition 27 an. □

Das Unterschema

- $X \cong \Delta_{X/S}(X) \subset X \times_S X$ heißt die **Diagonale von $X \times_S X$**.
- $\Gamma_f(X) \subset X \times_S Y$ heißt der **Graph von f**.

Bemerkung 4.29 (29).

(i) Ein Unterschema $T \subset X \times_S Y$ ist der Graph eines S-Morphismus $f : X \to Y$ genau dann, wenn $p|_T : T \to X \times_S Y \underset{p}{\to} X$ ein Isomorphismus ist, *denn* $f = q \circ (p|_T)^{-1}$.

(ii) Im Allgemeinen ist die mengentheoretische Inklusion

$$\Delta_{X/S}(X) \subset \{z \in X \times_S X \mid f(z) = g(z)\}$$

keine Gleichheit!

4.13 Separierte Morphismen

Erinnerung: Für einen topologischen Raum X sind äquivalent:

(i) X ist Hausdorff.

(ii) $\Delta \subset X \times X$ ist abgeschlossen bzgl. der Produkttopolgie.

(iii) Für jedes Paar von stetigen Abbildungen $f, g : Y \to X$ ist $\ker(f, g) \subset X$ abgeschlossen.

(iv) Für jeder stetige Morphismus $f : Y \to X$ ist $\Gamma_f \subset X \times Y$ abgeschlossen.

Für ein Schema X ist der unterliegende topologische Raum selten Hausdorff, aber $(2) - (4)$ geben sinnvolle Konzepte für Schemata (im Allgemeinen ist die Produkttopologie ungleich der Faserprodukttopologie).

Definition 4.30 (30)**.** Ein Morphismus $v : Y \to S$ von Schemata heißt separiert, falls folgende äquivalente Bedingungen erfüllt sind.

(i) $\Delta_{Y/S}$ ist eine *abgeschlossene* Immersion.

(ii) Für jedees Paar $f, g : X \to Y$ ist $\ker(f, g) \subset X$ ein abgeschlossenes Unterschema.

(iii) Für jeden S-Morphismus $f : X \to Y$ ist Γ_f eine abgeschlossene Immersion.

Dann heißt auch Y ist **separiert über** S. Ein Schema Y heißt **separiert**, falls es separiert über $\mathbb{Z}$ ist.

Beweis. Die Äquivalenz folgt nach Proposition 26, und dass „abgeschlossene Immersion“ stabil unter Basiswechsel ist. □

Nach Proposition 27 ist jeder Morphismus zwischen affinen Schemata separiert. Insbesondere ist jedes affine Schemata separiert.

Satz 4.31 (31)**.** *Seien $X, Y \in \underline{\mathrm{Sch/S}}$, Y separiert über S, $U \subset X$ offenes dichtes Unterschema, $f, g : X \to Y$ S-Morphismus mit $f|_U = g|_U$. Dann ist $f|_{X_{\mathrm{red}}} = g|_{X_{\mathrm{red}}}$.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist $U \subseteq \ker(f, g)$. Da Y separiert ist über S, ist $\ker(f, g) \subset X$ abgeschlossenes Unterschema. Da U dicht ist in X, ist der unterliegende topologische Raum von $\ker(f, g)$ gleich X. $\Longrightarrow X_{\mathrm{red}} \subseteq \ker(f, g)$ als Schema. □

Beispiel 4.32 (32)**.** Sei

$$—— : ——$$

affine Gerade mit Doppelpunkt (siehe Beispiel 11, III.5) ist *nicht* separiert: $V \subset U$ offen, nicht abgeschlossen.

$$j, j' : U \longrightarrow U \cup_V U \quad \Rightarrow \quad \ker(j, j') = V \subset U \subset X \text{ nicht abg.!}$$

Bemerkung 4.33 (33). $\mathbb{P}$ sei eine Eigenschaft von Morphismen, sodass gilt:

- stabil unter Komposition und Basiswechsel;
- jede (abgeschlossene) Immersion erfüllt $\mathbb{P}$.

Für jedes kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "u"'] & Y \arrow[d, "v"] \\ & S \end{tikzcd}$$

mit u erfüllt $\mathbb{P}$ (und v seperariert) $\Longrightarrow f$ erfüllt $\mathbb{P}$, da:

$$f : X \xrightarrow[\text{(abg.) Imm. erfüllt } \mathbb{P}]{\Gamma_f} X \times_S Y \xrightarrow[\text{Basisw. erfüllt } \mathbb{P}]{q} Y$$

erfüllt $\mathbb{P}$, wegen stabil unter Komposition.

Satz 4.34 (34).

(i) Jeder Monomorphismsu von Schemata (insbesondere jede Immersion) ist separiert.

(ii) Die Eigenschaft „separiert“ ist stabil unter Komposition, stabil unter Basiswechsel, und lokal bzgl. Ziel.

(iii) Ist die Komposition $X \to Y \to Z$ zweier Morphismen separiert, so auch $X \to Y$.

(iv) $f : X \to Y$ ist seperariert genau dann, wenn $f_{\text{red}} : X_{\text{red}} \to Y_{\text{red}}$ separiert ist.

Beweis.

(i) Wenn f Monomorphismus ist (d.h. injektiv auf T-wertigen Punkten für alle Schemata T), dann ist Δ_f Isomorphismus (d.h. bijektiv auf allen T-wertigen Punkte für alle T). Insbesondere ist Δ_f eine abgeschlossene Immersion.

(ii) Seien $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ separierte Schemata-Morphismen, $p, q : X \times_Y X \to X$ die zwei Projektionen. Das folgende Diagramm ist kommutativ, und das rechte Viereck ist kartesisch (überprüfe in <u>Set</u>):

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Delta_f"] \arrow[dr, "\Delta_{g\circ f}"'] & X \times_Y X \arrow[r, "f\circ p = f\circ q"] \arrow[d, "(p,q)_Z"] & Y \arrow[d, "\Delta_g"] \\ & X \times_Z X \arrow[r, "f\times f"'] & Y \times_Z Y. \end{tikzcd}$$

Da Δ_g abgeschlossene Immersion, ist $(p, q)_Z$ abgeschlossene Immersion $\Longrightarrow$ die Komposition $\Delta_{g\circ f}$ ist abgeschlossene Immersion $\Longrightarrow g \circ f$ ist separiert.

Δ_f abgeschlossene Immersion $\Longrightarrow$ $\Delta_{f_{(S')}}$ ist abgeschlossene Immersion. Dies zeigt das „separiert“ abgeschlossen ist unter Basiswechsel. Weiter ist „separiert“ lokal bzgl. Ziel, da dies gilt für „abgeschlossene Immersion“.

(iii) Folgt aus (1), (2) nach Bemerkung 33. ($u =$ "$\circ$", $v = Y \to Z$, $f : X \to Y$)

(iv) Sei $f : X \to S$ Morphismus, $i : X_{\mathrm{red}} \to X$ kanonische Immersion. Dann ist i surjektive Immersion, also ein universeller Homöomorphismus. Identifizieren von $X_{\mathrm{red}} \times_{S_{\mathrm{red}}} X_{\mathrm{red}}$ mit $X_{\mathrm{red}} \times_S X_{\mathrm{red}}$ liefert $\Delta_f \circ i = (i \times_S i) \circ \Delta_{f_{\mathrm{red}}}$. $\Longrightarrow \Delta_f$ ist abgeschlossene Immersion genau dann wenn $\Delta_{f_{\mathrm{red}}}$ abgeschlossene Immersion.

□

Beispiel 4.35 (35)**.** Sei S beliebiges Schema, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\mathbb{A}^n_S$ separiert über S, ebenso jedes Unterschema, denn $\mathbb{A}^n_S = \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}} S$ und „separiert“ ist stabil unter Basiswechsel nach Proposition 34.

Satz 4.36 (36)**.** *Sei $S = \operatorname{Spec} R$ affin und X ein S-Schema. Dann sind äquivalent:*

(i) X ist separiert.

(ii) Für je zwei offene affine $U, V \subseteq X$ ist $U \cap V$ affin, und

$$\begin{aligned} \rho_{U,V} : \mathcal{O}_X(U) \otimes_R \mathcal{O}_X(V) &\longrightarrow \mathcal{O}_X(U \cap V), \\ s \otimes t &\longmapsto s|_{U \cap V} \cdot t|_{V \cap U}. \end{aligned}$$

(iii) Es gibt eine offene affine Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, sodass $\forall i, j \in I$: $\rho_{U,V}$ ist surjektiv.

Beweis. Für alle offene affine $U, V \subseteq X$ gilt:

$$U \cap V = \Delta^{-1}_{X/S}(U \times_S V).$$

„abgeschlossene Immersion“ ist lokal auf dem Ziel, daher: $\Delta_{X/S}$ ist abgeschlossene Immersion $\Longleftrightarrow$ für alle $U, V \subseteq X$ offen affin ist

$$U \cap V \xrightarrow{\Delta_{X/S}|_{U \cap V}} U \times_S V$$

abgeschlossene Immersion.
$\Longleftrightarrow$ für jede offene affine Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ und alle $i, j \in I$ ist

$$U_i \cap U_j \longrightarrow U_i \times_S U_j$$

abgeschlossene Immersion. Sind $U = \operatorname{Spec} A$, $V = \operatorname{Spec} B$ affin, so ist auch

$$U \times_S V = \operatorname{Spec}(A \otimes_R B)$$

affin. Daher:

$$U \cap V \longrightarrow U \times_S V$$

abgeschlossene Immersion. $\Longleftrightarrow \rho_{U,V}$ surjektiv. □

Beispiel 4.37 (37)**.** Für jedes Schema S und $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{P}^n_S$ separiert über S, denn „separiert" ist lokal auf dem Ziel (Proposition 34), daher ohne Einschränkung $S = \operatorname{Spec} R$ affin. Sei $\mathbb{P}^n_R = \bigcup_{i=0}^n U_i$ mit $U_i = \operatorname{Spec} R\left[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \widehat{\frac{X_i}{X_i}}, \dots, \frac{X_n}{X_i}\right]$ und

$$\begin{aligned}\rho_{U_i,U_j} : R\left[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \widehat{\frac{X_i}{X_i}}, \dots, \frac{X_n}{X_i}\right] \otimes_R R\left[\frac{X_0}{X_j}, \dots, \widehat{\frac{X_j}{X_j}}, \dots, \frac{X_n}{X_j}\right] \\ \longrightarrow R\left[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \widehat{\frac{X_i}{X_i}}, \dots, \frac{X_n}{X_i}\right]\left[\frac{X_i}{X_j}\right]\end{aligned}$$

ist surjektiv.

Beispiel 4.38 (38)**.** Sei k algebraisch abgeschlossener Körper, X Prävarietät über k, d.h. ganzes Schema von endlichem Typ über k. X heißt **Varietät**, wenn X separabel ist. Affine Prävarietäten sind also automatisch Varietäten. $\mathbb{P}^n(k)$ ist Varietät (Beispiel 37) $\Longrightarrow$ Jede quasi-projektive Prävarietät ist eine Varietät!

4.14 Eigentliche Morphismen

(eng. „proper“)

Ist $f : X \to Y$ stetige Abbildung zwischen topologischen Räume, dann heißt f **eigentlich**, wenn die Urbilder kompakter Mengen kompat sind.

Sei X Hausdorff, Y lokal kompakt. Dann ist f eigentlich $\iff$ f universell abgeschlossen. (Bourbaki, Topologie générale, I.10 nr. 3, Prop. 7)

$f : X \to Y$ heißt von **endlichem Typ**, wenn $\forall U \subset Y$ offen eine Überdeckung $f^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ existiert, sodass $\forall i : \mathcal{O}_X(V_i)$ ist endlich erzeugte $\mathcal{O}_Y(U)$-Algebra.

Definition 4.39 (39)**.** Ein Morphismus $f : X \to Y$ von Schemata heißt **eigentlich**, wenn:

(i) f von endlichem Typ.

(ii) f separiert.

(iii) f universell abgeschlossen.

Ein Y-Schema heißt **eigentlich**, wenn der Strukturmorphismus eigentlich ist. „eigentlich“ ist lokal auf dem Ziel.

Definition 4.40 (40)**.** Ein Morphismus $f : X \to Y$ heißt **projektiv**, wenn er sich faktorisieren lässt als

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g", "\text{abg. Imm.}"'] & & Y \\ & \mathbb{P}^n_Y \arrow[ur, "\text{kan. Morph.}"'] & \end{tikzcd}$$

für ein $n \in \mathbb{N}$.

Satz 4.41 (41)**.** *Sei $\mathbb{P}$ eine der folgenden Eigenschaften:*

I. von endlichem Typ;

II. eigentlich;

III. projektiv.

IV. (separiert)

Dann gilt:

(i) Abgeschlossene Immersionen erfüllen $\mathbb{P}$.

(ii) $\mathbb{P}$ ist stabil unter Komposition.

(iii) $\mathbb{P}$ ist stabil unter Basiswechsel.

(iv) Falls $f : X \to Z$, $g : Y \to Z$ $\mathbb{P}$ erfüllen, dann auch $X \times_Z Y \to Z$.

(v) Erfüllt $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ $\mathbb{P}$, so auch f, falls:

- *f quasi-kompakt (d.h. Y hat offene affine Überdeckung, deren Urbilder quasi-kompakt sind).*
- *g separiert, im Falle II, III.*
- *(stetig im Fall IV)*

Beweis. Lin, „Algebraic Geometry and Arithmetic curves“, Prop. 24, 3.16, 3.32, (3.9). □

Satz 4.42 (42)**.** *Sei $f : X \to Y$ surjektiver Morphismus von S-Schemata, und Y separiert von endlichem Typ über S, sowie X eigentlich über S. Dann ist Y eigentlich über S.*

Beweis. f surjektiv $\Longrightarrow \forall T \to S$ ist $f_{(T)} : X_T \to Y_T$ surjektiv.

$$\Longrightarrow \begin{tikzcd} A \underset{\text{abg.}}{\subset} Y_T \arrow[rr] & & T \\ & \varphi^{-1}(A) \underset{\text{abg.}}{\subset} X_T \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "X \text{ eig.}\Rightarrow\text{abg.}"'] & \end{tikzcd}$$

$\Longrightarrow Y_T \to T$ abgeschlossen.

$\Longrightarrow Y \to S$ universal abgeschlossen. □

Satz 4.43 (43)**.** *Sei X eigentliches Schema über $S = \operatorname{Spec} A$. Dann ist $\mathcal{O}_X(X)$ ganz über A. Ist $X = \operatorname{Spec} B$ affin, so ist B endlich über A.*

Beweis. Lin, „Algebraic Geometry and Arithmetic curves“, 3.17/3.18. □

Korollar 4.44. *Sei X reduzierte eigentliche Varietät über k. Dann ist $\mathcal{O}_X(X)$ endlich-dimensionaler k-Vektorraum.*

Theorem 4.45 (45)**.** *Sei $\mathcal{O}_K$ Bewertungsring, $K = \operatorname{Quot}(\mathcal{O}_X)$, $X/\mathcal{O}_K$ eigentlich. Dann ist $X_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_K) \to X_K(K)$ bijektiv.*

Bewertungskriterium (vgl. Hartshorne, Lin 3.26)

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} K \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\exists!"] & Y \end{tikzcd}$$

f eigentlich $\Longleftrightarrow$ universelle Eigenschaft oben erfüllt. (Theorem auf $X \times_Y \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$).

Theorem 4.46 (46, Lin III 3.30)**.** *Jeder projektive Morphismus ist eigentlich.*

Zum Beispiel: abelsche Varietäten, etwa elliptische Kurven. Theorem 46 $\Longrightarrow E(\mathbb{Q}_p) = E(\mathbb{Z}_p)$.

Kapitel 5

Dimensionen

5.1 Allgemeine Schemata

Definition 5.1 (1)**.** Für einen topologischen Raum X ist die (Krull-)Dimension das Supremum der Länge aller Ketten

$$Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_n \subseteq X$$

irreduzibler abgeschlossener Teilmengen Z_i. X sei **von Dimension** n, falls alle irreduzible Komponenten von X die Dimension n haben ($\dim \emptyset = -\infty$, sonst $\dim X \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$).

Die Dimension eines Schemas ist per Definition die Dimension des unterliegenden topologischen Raums, also $\dim X = \dim X_{\mathrm{red}}$.

Beispiel 5.2 (2)**.**

(i)