

## 6 Irreduzible topologische Räume

Die folgenden topologischen Begriffe sind nur interessant, da  $\mathbb{A}^n(k)$  ( $n > 0$ ) kein Hausdorff'scher Raum ist.

**Definition 12.** Ein topologischer Raum  $X$  heißt **irreduzibel**, falls  $X \neq \emptyset$  und  $X$  sich *nicht* als Vereinigung zweier echter abgeschlossener Teilmengen darstellen lässt, d.h.

$$X = A_1 \cup A_2, \quad A_i \text{ abg.} \quad \implies \quad A_1 = X \text{ oder } A_2 = X.$$

$Z \subseteq X$  heißt irreduzibel, falls  $Z$  mit der induzierten Topologie irreduzibel ist.

**Satz 13.** Für einen topologischen Raum  $X \neq \emptyset$  sind äquivalent:

- (i)  $X$  ist irreduzibel.
- (ii) Je zwei nichtleere offene Teilmengen von  $X$  haben nicht-leeren Durchschnitt.
- (iii) Jede nichtleere offene Teilmenge  $U \subseteq X$  ist dicht in  $X$ .
- (iv) Jede nichtleere offene Teilmenge  $U \subseteq X$  ist zusammenhängend.
- (v) Jede nichtleere offene Teilmenge  $U \subseteq X$  ist irreduzibel.

*Beweis.*

- (i)  $\Leftrightarrow$  (ii)

Komplementärmengen.

- (ii)  $\Leftrightarrow$  (iii)

Es ist:  $U \subseteq X$  dicht  $\Leftrightarrow U \cap O \neq \emptyset$  für jedes offene  $\emptyset \neq O \subseteq X$ .

- (iii)  $\Rightarrow$  (iv)

Klar.

- (iv)  $\Rightarrow$  (iii)

Sei  $\emptyset \neq U$  offen und zusammenhängend. Es folgt:

$$U = U_1 \sqcup U_2, \quad \emptyset \neq U_i \underset{\text{offen}}{\subseteq} U \underset{\text{offen}}{\subseteq} X$$

Damit ist  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ , ein Widerspruch zu (iii).

- (v)  $\Rightarrow$  (i)

Klar. ( $U = X$ )

- $(iii) \Rightarrow (v)$

Sei  $\emptyset \neq U \subseteq_{\text{offen}} X$ . Ist  $\emptyset \neq V \subseteq_{\text{offen}} U$ , so ist  $V \subseteq_{\text{offen}} X$ . Es folgt:  $V$  ist dicht in  $X$  und irreduzibel in  $U$ . Mit  $(iii) \Rightarrow (i)$  folgt, dass  $U$  irreduzibel ist.

□

**Lemma 14.** Eine Teilmenge  $Y$  ist genau dann irreduzibel, wenn ihr Abschluss  $\overline{Y}$  dies ist.

*Beweis.*  $Y$  irreduzibel

$\Leftrightarrow \forall U, V \subseteq X$  offen mit  $U \cap Y \neq \emptyset \neq V \cap Y$ , gilt  $Y \cap (U \cap V) \neq \emptyset$ .

$\Leftrightarrow \overline{Y}$  irreduzibel

□

**Definition 15.** Eine maximale irreduzible Teilmenge eines topologischen Raumes  $X$  heißt **irreduzible Komponente** von  $X$ .

*Bemerkung 16.*

(i) Jede irreduzible Komponente ist abgeschlossen nach Lemma 14.

(ii)  $X$  ist Vereinigung seiner irreduziblen Komponenten, *denn:*

die Menge der irreduziblen Teilmengen von  $X$  ist **induktiv geordnet**: für jede aufsteigende Kette irreduzibler Teilmengen ist die Vereinigung wieder irreduzibel (Satz 13 (ii)). Mit dem **Lemma von Zorn** folgt: Jede irreduzible Teilmenge ist in einer irreduziblen Komponente enthalten. Damit ist jeder Punkt in einer irreduziblen Komponente enthalten.