9 Morphismen von affinen algebraischen Mengen

Definition 23. Seien $X \subseteq \mathbb{A}^m(k)$, $Y \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine algebraische Mengen. Ein **Morphismus** $X \to Y$ affiner algebraischer Mengen ist eine Abbildung $f : X \to Y$ der zugrundeliegenden Mengen, sodass $f_1, \dots, f_n \in k[T_1, \dots, T_m]$ existieren, derart dass $\forall x \in X$ gilt:

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)).$$

Bezeichne dafür $\hom(X, Y)$ Menge der Morphismen $X \to Y$.

Remark 24. $f : X \to Y$ lässt sich immer fortsetzen zu einem Morphismus

$$f : \mathbb{A}^n(k) \to \mathbb{A}^m(k),$$

aber nicht eindeutig, es sei denn $X = \mathbb{A}^m(k)$.

Komposition

$$X \xrightarrow[f]{f_1,\dots,f_n \in k[T_1,\dots,T_m]} Y \xrightarrow[g]{g_1,\dots,g_r \in k[T'_1,\dots,T'_m]} Z$$

mit $X \subseteq \mathbb{A}^m(k)$, $Y \subseteq \mathbb{A}^n(k)$, $Z \subseteq \mathbb{A}^r(k)$. Es folgt:

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= (g_1(f_1(x), \dots, f_n(x)), \dots, g_r(f_1(x), \dots, f_n(x)) \\ &:= h_1(x), \dots, h_r(x) \end{aligned}$$

d.h. $g \circ f$ ist durch Polynome $h_i \in k[T_1, \dots, T_m]$ gegeben, d.h. $g \circ f$ ist wieder ein Morphismus affiner algebrasischer Mengen. Wir erhalten die **Kategorie affiner algebraischer Mengen**.

Example 25.

(i) Sei die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^1(k) &\to V(T_2 - T_1^2) \subseteq \mathbb{A}^2(k) \\ x &\mapsto (x, x^2). \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist sogar ein *Isomorphismus* affiner algebraischer Mengen, da die Umkehrabbildung

$$(x, y) \mapsto x$$

ebenfalls ein Morphismus ist.

(ii) Sei $\mathrm{char}(k) \neq 2$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^1(k) &\to V(T_2^2 - T_1^2(T_1 + 1)) \\ x &\mapsto (x^2 - 1, x(x^2 - 1)) \end{aligned}$$

ist ein Morphismus, aber *nicht* bijektiv, da $1, -1$ beide auf $(0, 0)$ abgebildet werden.