18 Topologische Eigenschaften von Prävarietäten

Lemma 42. *Für einen topologischen Raum X und $U \subseteq X$ offen haben wir eine Bijektion*

$$\begin{aligned} \{Y \subseteq U \text{ irred. abg.}\} &\longleftrightarrow \{Z \subseteq X \text{ irred. abg. mit } Z \cap U \neq \emptyset\} \\ Y &\longmapsto \overline{Y} \text{ (Abschluss in } X) \\ Z \cap U &\longleftarrow\!\shortmid Z \end{aligned}$$

Proof. Lemma 14: $Y \subseteq X$ irreduzibel $\Leftrightarrow \overline{Y} \subseteq X$ irreduzibel.

$Y \subseteq U$ abgeschlossen $\Leftrightarrow \exists A \subseteq X$ abgeschlossen: $Y = U \cap A$.

$\Rightarrow Y \subseteq \overline{Y} \subseteq A \Rightarrow Y = U \cap \overline{Y}$

Y irreduzibel in $U \Rightarrow Y$ irreduzibel in X

$\Rightarrow \overline{Y}$ irreduzibel nach 14

$\Rightarrow Y \mapsto \overline{Y} \mapsto \overline{Y} \cap U = Y$. ✓

$\emptyset \neq Z \cap U \subseteq Z$ damit dicht da Z irreduzibel (Satz 13 ii. und v.)

Also ist die Abbildung $\leftarrow$ wohldefiniert.

$\Rightarrow \overline{Z \cap U} = Z$ □

Proposition 43. *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ eine Prävarietät.*

Dann ist X noethersch (insbesondere quasikompakt) und irreduzibel.

Proof. Sei $X = \bigcup_{i=1}^n$ endliche offene aff. Überdeckung und $X \supseteq Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \cdots$ eine absteigende Kette abgeschlossener Teilmengen.

$\Rightarrow U_i \cap Z_1 \supseteq U_i \cap Z_2 \supseteq \cdots$, ist eine absteigende Kette abgeschlossener Teilmengen von U_i

$\Rightarrow \forall i\ \exists n_i \in \mathbb{N}$: $U_i \cap Z_{n_i} = U_i \cap Z_{i+m}$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Setzen wir $n := \max n_i$, so folgt:

$\forall i = 1, \ldots, n\ \forall m \geq n$: $U_i \cap Z_m = U_i \cap Z_{m+1}$

$\Rightarrow (Z_i)_i$ wird stationär da $Z_m = \bigcup_i U_i \cap Z_m$.

X ist demnach noethersch.

X ist weiter irreduzibel:

Sei $X = X_1 \cup \cdots \cup X_n$ die Zerlegung in irreduzible Komponenten.

Angenommen es wäre $n \geq 2$.

$\Rightarrow \exists i_0 \in \{2, \ldots, n\}$: $X_1 \cap X_{i_0} \neq \emptyset$. (Andernfalls gilt: $X = X_1 \sqcup \underbrace{X \backslash X_1}_{=X_2 \cup \cdots \cup X_n \text{ abg.}}$, im Widerspruch dazu, dass X zusammenhängend ist.)

Sei ohne Einschränkung $i_0 = 2$. Sei $x \in X_1 \cap X_2$, $x \in U \subseteq X$ offen, affin (d.h. affine Varietät).

U irreduzibel $\Rightarrow \overline{U}$ (Abschluss in X) $\subseteq X_j$ für ein $j \in \{1, \ldots, n\}$

Jedoch: Da $x \in X_i \cap U \subseteq U$ irreduzibel ist, ist $\underbrace{\overline{X_i \cap U}}_{\subseteq \overline{U} \subseteq X_i} = X_i$, $i = 1, 2$

$\Rightarrow X_1, X_2 \subseteq X_j$. Widerspruch zu maximale Komponente. □