# 21 Abgeschlossene Unterprävarietäten

Sei $X$ Prävarietät, $Z \subseteq X$ abgeschlossen irreduzibel.

**Ziel.** $(Z, \mathcal{O}'_Z)$ Raum von Funktionen erklären. Definiere dazu:

$$\mathcal{O}'_Z := \{f \in \text{Abb}(U, k) \mid \forall x \in U\ \exists x \in V \subseteq X \text{ offen},\ g \in \mathcal{O}_X(V)\}$$

mit $f_{|U \cap V} = g_{|U \cap V}$ für $U \subset Z$ offen. Damit ist $(Z, \mathcal{O}'_Z)$ Raum von Funktionen (klar!) mit $\mathcal{O}'_X = \mathcal{O}_X$.

**Lemma 49** (orig. 46)**.** *$X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ irreduzible affine algebraische Menge, und $Z \subset X$ sei ein irreduzibler abgeschlossener Teil. Dann ist $(Z, \mathcal{O}_Z) = (Z, \mathcal{O}'_Z)$.*

*Bezeichne ab jetzt stets $\mathcal{O}_Z$ für $\mathcal{O}_{Z'}$.*

*Proof.* $Z \subseteq X$ ist in beiden Fällen mit der Teilraumtopologie ausgestattet! Ferner wissen wir, dass der Morphismus $Z \hookrightarrow X$ affiner algebraischer Mengen einen Morphismus $(Z, \mathcal{O}_Z) \to (X, \mathcal{O}_X)$ von Prävarietäten induziert. Nach Definition von $\mathcal{O}'$ folgt dann:

$$\mathcal{O}'_Z \subseteq \mathcal{O}_Z(U) \quad \text{für } U \subseteq Z \text{ offen.}$$

Dies gilt da:

$$\begin{aligned} & x \in V_x \subseteq X \cup V \\ & f_{|U \cap V_x} = g_{x|U \cap V_x} \in \mathcal{O}_Z(U \cap V_x) \end{aligned}$$

mit $g \in \mathcal{O}_X(V_x) \Rightarrow$ (Morphismus!) $g_{|Zcap V_x} \in \mathcal{O}_Z(Z \cap V_x)$

Verklebungsaxiom $\Rightarrow f \in \mathcal{O}_Z(U)$.

Sei $f \in \mathcal{O}_Z(U)$ und $x \in U$ beliebig. Es folgt: $\exists h \in \Gamma(Z)$ mit $x \in \mathcal{D}(h) \subseteq U$ und

$$f_{|\mathcal{D}(h)} = \frac{g}{h^n} \in \Gamma(Z)_h = \mathcal{O}_Z(\mathcal{D}(h))$$

für $h \geq 0$, $g \in \Gamma(Z)$ geeignet. Lifte $g, h \in \Gamma(Z) \twoheadleftarrow \Gamma(X)$ zu $\overline{g}, \overline{h} \in \Gamma(X)$ und setze $V := D(\overline{h}) \subseteq X$.

$\Rightarrow x \in V$, $\frac{\overline{g}}{\overline{h}^n} \in \mathcal{O}_X(\mathcal{D}(\overline{h}))$ und $f_{|U \cap V} = \frac{\overline{g}}{\overline{h}^n}|_{U \cap V}$.

$\Rightarrow f \in \mathcal{O}'_Z(U)$. □

**Corollary 50** (orig. 47)**.** *Wenn $X$ eine Prävarietät ist, und $Z \subseteq X$ irreduzibel abgeschlossen. Dann ist $(Z, \mathcal{O}_Z)$ ebenfalls eine Prävarietät.*

*Proof.* Es ist $X = \bigcup_{\text{endl.}} X_i$ endliche affine offene Überdeckung. Damit ist

$$Z = \bigcup (Z \cap X_i) := \bigcup Z_i$$

mit $(Z_i, \mathcal{O}_{Z_i})$ affine Varietät nach Lemma 46. $\square$