

4 Der Hilbertsche Nullstellensatz

Satz 7. Sei K ein (nicht notwendigerweise algebraisch abgeschlossener) Körper, und A eine endlich erzeugte K -Algebra. Dann ist A Jacobson'sch, d.h. für jedes Primideal $\mathfrak{p} \trianglelefteq A$ gilt:

$$\mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{p}} \mathfrak{m}, \quad \mathfrak{m} \text{ maximales Ideal}$$

Ist $\mathfrak{m} \trianglelefteq A$ ein maximales Ideal, so ist die Körpererweiterung $K \subseteq A/\mathfrak{m}$ endlich.

Beweis. Algebra II / kommutative Algebra. □

Korollar 8.

- (i) Sei A eine e.e. (endlich erzeugte) k -Algebra (k sei algebraisch abgeschlossen), $\mathfrak{m} \trianglelefteq A$ ein maximales Ideal. Dann ist $A/\mathfrak{m} = k$.
- (ii) Jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \trianglelefteq k[\underline{T}]$ ist von der Form $\mathfrak{m} = (T_1 - x_1, \dots, T_n - x_n)$ mit $x_1, \dots, x_n \in k$.
- (iii) Für ein Ideal $\mathfrak{a} \trianglelefteq k[\underline{T}]$ gilt:

$$\text{rad}(\mathfrak{a}) = \sqrt{\mathfrak{a}} \stackrel{(i)}{=} \bigcap_{\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} \trianglelefteq k[\underline{T}], \mathfrak{p} \text{ prim}} \mathfrak{p} \stackrel{(ii)}{=} \bigcap_{\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m} \trianglelefteq k[\underline{T}], \mathfrak{m} \text{ maximal}} \mathfrak{m}$$

Beweis.

- (i) $k \rightarrow A \rightarrow A/\mathfrak{m}$ ist Isomorphismus, da k keine echte algebraische Körpererweiterung besitzt.
- (ii) Es ist

$$\begin{aligned} k[T_1, \dots, T_n] &\twoheadrightarrow k[\underline{T}]/\mathfrak{m} = k \\ T_i &\mapsto x_i \end{aligned}$$

surjektiv. Es folgt: $\mathfrak{m} = (T_1 - x_1, \dots, T_n - x_n)$, da letzteres bereits maximal ist. (\supseteq klar.)

- (iii) (i) Algebra II. (ii) Theorem.

□