

# Algebraische Geometrie I

Prof. Dr. Venjakob

18. Januar 2019



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Prä-Varietäten</b>	<b>5</b>
1.1	Einführung . . . . .	6
1.2	Die Zariski-Topologie . . . . .	7
1.2.1	Eigenschaften . . . . .	7
1.3	Affine algebraische Mengen . . . . .	8
1.4	Der Hilbertsche Nullstellensatz . . . . .	9
1.5	Korrespondenz zwischen Radikalidealen und affinen algebraischen Mengen . . .	10
1.6	Irreduzible topologische Räume . . . . .	11
1.7	Irreduzible affine algebraische Mengen . . . . .	13
1.8	Quasikompakte und noethersche topologische Räume . . . . .	14
1.9	Morphismen von affinen algebraischen Mengen . . . . .	16
1.10	Unzulänglichkeiten des Begriffs der affinen algebraischen Mengen . . . . .	17
1.11	Der affine Koordinatenring . . . . .	18
1.12	Funktorielle Eigenschaften von $\Gamma(X)$ . . . . .	20
1.13	Räume mit Funktionen . . . . .	22
1.14	Der Raum mit Funktionen zu einer affin-algebraischen Menge . . . . .	24
1.15	Funktorialität der Konstruktion . . . . .	27
1.16	Definition von Prävarietäten . . . . .	29
1.17	Vergleich mit differenzierbaren/komplexen Mannigfaltigkeiten . . . . .	30
1.18	Topologische Eigenschaften von Prävarietäten . . . . .	31
1.19	Offene Untervarietäten . . . . .	32
1.20	Funktionenkörper einer Prävarietät . . . . .	34
1.21	Abgeschlossene Unterprävarietäten . . . . .	36
1.22	Homogene Polynome . . . . .	37
1.23	Definition des projektiven Raumes . . . . .	38
1.23.1	Reguläre Funktionen . . . . .	39
1.24	Projektive Varietäten . . . . .	42
1.25	Koordinatenwechsel in $\mathbb{P}^n$ . . . . .	44
1.26	Lineare Unterräume von $\mathbb{P}^n$ . . . . .	45
1.27	Kegel . . . . .	46
1.28	Quadriken . . . . .	47

<b>2</b>	<b>Das Ringspektrum</b>	<b>51</b>
2.1	Definition von $\text{Spec}(A)$ . . . . .	52
2.2	Topologische Eigenschaften von $\text{Spec}(A)$ . . . . .	54
2.3	Der Funktor $A \mapsto \text{Spec}(A)$ . . . . .	56
2.4	Beispiele . . . . .	58
2.5	Prägarben und Garben . . . . .	60
2.6	Halme von Garben . . . . .	64
2.7	Die zu einer Prägarbe assoziierte Garbe . . . . .	66
2.8	Direktes und inverses Bild von Garben . . . . .	67
<b>3</b>	<b>Schemata</b>	<b>69</b>
3.1	Schemata . . . . .	70
<b>4</b>	<b>Faserprodukte</b>	<b>71</b>
4.1	Der 'Punkte-Funktor' . . . . .	72
4.2	Yoneda Lemma . . . . .	73
4.3	Faserprodukt in beliebiger Kategorie . . . . .	74

## Literatur

- Görtz, Wedhorn. *Algebraic Geometry I*
- Hartshorne. *Algebraic Geometry*
- Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry 1 & 2*
- Grothendieck. *Eléments de géométrie algébrique, EGA I-IV*

## Kommutative Algebra

- Brüske, Ischebeck, Vogel. *Kommutative Algebra*
- Kunz. *Einführung in die kommutative Algebra und algebraische Geometrie*



# Kapitel 1

## Prä-Varietäten

Abbildung 1.1:  $T_2^2 = T_1^2(T_1 - 1) = T_1^3 - T_1^2$

## 1.1 Einführung

**Algebraische Geometrie** kann man verstehen, als das Studium von Systemen polynomialer Gleichungen (in mehreren Variablen). Damit ist die algebraische Geometrie eine Verallgemeinerung der **linearen Algebra**, also statt  $X$  auch  $X^n$ , und auch der **Algebra**, durch Polynome in *mehreren* Variablen.

**Frage.** Seien  $k$  ein (algebraisch abgeschlossener) Körper, und  $f_1, \dots, f_m \in k[T_1, \dots, T_n]$  gegeben. Was sind die “geometrischen Eigenschaften” der Nullstellenmenge

$$V(f_1, \dots, f_n) := \{(t_1, \dots, t_n) \in k^n \mid f_i(t_1, \dots, t_n) = 0 \ \forall i\}$$

**Beispiel 1.1.** Sei  $f = T_2^2 - T_1^2(T_1 - 1) \in k[T_1, T_2]$ . Die Nullstellenmenge für  $k = \mathbb{R}$  (aber: trügerisch, da  $\mathbb{R}$  nicht algebraisch abgeschlossen!) ist gegeben durch:

- Dimension 1
- $(0, 0)$  ist singulärer Punkt
- Alle anderen Punkte besitzen eine eindeutig bestimmte Tangente

### Abbildung 1.2: **Spitze** und **Doppelpunkt**

Vergleiche mit dem **Satz über implizite Funktionen**: (Analysis, Differentialgeometrie)

$V(f)$  ist lokal diffeomorph zu  $\mathbb{R}$  (= reelle Gerade) im Punkt  $(x_1, x_2)$  genau dann, wenn die Jacobi-Matrix

$$\left( \frac{\partial f}{\partial T_1}, \frac{\partial f}{\partial T_2} \right) = (T_1(3T_1 - 2), 2T_2)$$

Rang 1 in  $(x_1, x_2)$  hat. Das ist äquivalent dazu, dass  $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ . Dies lässt sich rein formal über beliebigen Grundkörpern **algebraisch** formulieren.

**Methoden.** GAGA - Géometrie algébrique, géometrique analytique (Serre)

Komplexe Geometrie ( $\mathbb{C}$ ), Differentialgeometrie ( $\mathbb{R}$ )	Algebraische Geometrie
Analytische Hilfsmittel	Kommutative Algebra



## 1.2 Die Zariski-Topologie

**Definition 1.2.** Sei  $M \subseteq k[T_1, \dots, T_n] =: k[\underline{T}]$  eine Teilmenge. Mit

$$V(M) := \{(t_1, \dots, t_n) \in k^n \mid f(t_1, \dots, t_n) = 0 \ \forall f \in M\}$$

bezeichnen wir die gemeinsame **Nullstellen-(Verschwindungs-)Menge** der Elemente aus  $M$ . (Manchmal auch  $V(f_i, i \in I)$  statt  $V(\{f_i, i \in I\})$ ).

**Notation** Wir schreiben auch  $V(f_i, i \in I)$  statt  $V(\{f_i \mid i \in I\})$

### 1.2.1 Eigenschaften

- $V(M) = V(\mathfrak{a})$ , wenn  $\mathfrak{a} = \langle M \rangle_{k[\underline{T}]}$  das von  $M$  erzeugte Ideal in  $k[\underline{T}]$  bezeichnet.
- Da  $k[\underline{T}]$  noethersch (Hilbertscher Basissatz) ist, reichen stets endlich viele  $f_1, \dots, f_n \in M$ :

$$V(M) = V(f_1, \dots, f_n) \quad \text{falls } \mathfrak{a} = \langle f_1, \dots, f_n \rangle_{k[\underline{T}]}.$$

- $V(-)$  ist **inklusionsumkehrend**,  $M' \subseteq M \implies V(M) \subseteq V(M')$ .

**Satz 1.3.** Die Mengen  $V(\mathfrak{a})$ ,  $\mathfrak{a} \trianglelefteq k[\underline{T}]$  ein Ideal, sind die **abgeschlossenen** Mengen einer Topologie auf  $k^n$ , der sogenannten **Zariski-Topologie**.

$$(i) \ \emptyset = V((1)), \ k^n = V(0).$$

$$(ii) \ \bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i) = V\left(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right) \text{ für beliebige Familien } (\mathfrak{a}_i)_{i \in I} \text{ von Idealen.}$$

$$(iii) \ V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \text{ für } \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \trianglelefteq k[\underline{T}] \text{ Ideale.}$$

*Beweis.* Übung / Algebra II.

□

### 1.3 Affine algebraische Mengen

#### Definition 1.4.

- $\mathbb{A}^n(k)$ , der **affine Raum der Dimension  $n$**  (über  $k$ ), bezeichne  $k^n$  mit der Zariski-Topologie.
- Abgeschlossene Teilmengen von  $\mathbb{A}^n(k)$  heißen affine abgeschlossene Mengen.

**Beispiel 1.5.** Da  $k[T]$  ein Hauptidealring ist, sind die abgeschlossenen Mengen in  $\mathbb{A}^1(k)$ :  $\emptyset$ ,  $\mathbb{A}^1$ , Mengen der Form  $V(f)$ ,  $f \in k[T] \setminus \{k\}$  (endliche Teilmengen). Insbesondere sieht man, dass die Zariski-Topologie im Allgemeinen nicht Hausdorff ist.

**Beispiel 1.6.**  $\mathbb{A}^2(k)$  hat zumindestens als abgeschlossene Mengen:

- $\emptyset$ ,  $\mathbb{A}^2$ ;
- Einpunktige Mengen:  $\{(x_1, x_2)\} = V(T_1 - x_1, T_2 - x_2)$ ;
- $V(f)$ ,  $f \in k[T_1, T_2]$  irreduzibel.

Ferner alle endlichen Vereinigungen dieser Liste. (Dies sind in der Tat alle, denn später sehen wir: “irreduzible” abgeschlossene Mengen entsprechen den *Primidealen*, und  $k[T_1, T_2]$  hat “Krull-Dimension 2”.)

## 1.4 Der Hilbertsche Nullstellensatz

**Theorem 1.7.** *Sei  $K$  ein (nicht notwendigerweise algebraisch abgeschlossener) Körper, und  $A$  eine endlich erzeugte  $K$ -Algebra. Dann ist  $A$  Jacobson'sch, d.h. für jedes Primideal  $\mathfrak{p} \subseteq A$  gilt:*

$$\mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{p}} \mathfrak{m}, \quad \mathfrak{m} \text{ maximales Ideal}$$

*Ist  $\mathfrak{m} \subseteq A$  ein maximales Ideal, so ist die Körpererweiterung  $K \subseteq A/\mathfrak{m}$  endlich.*

*Beweis.* Algebra II / kommutative Algebra. □

**Korollar 1.8.**

- (i) *Sei  $A$  eine e.e. (endlich erzeugte)  $k$ -Algebra ( $k$  sei algebraisch abgeschlossen),  $\mathfrak{m} \subseteq A$  ein maximales Ideal. Dann ist  $A/\mathfrak{m} = k$ .*
- (ii) *Jedes maximale Ideal  $\mathfrak{m} \subseteq k[\underline{T}]$  ist von der Form  $\mathfrak{m} = (T_1 - x_1, \dots, T_n - x_n)$  mit  $x_1, \dots, x_n \in k$ .*
- (iii) *Für ein Ideal  $\mathfrak{a} \subseteq k[\underline{T}]$  gilt:*

$$\text{rad}(\mathfrak{a}) = \sqrt{\mathfrak{a}} \stackrel{(i)}{=} \bigcap_{\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} \subseteq k[\underline{T}], \mathfrak{p} \text{ prim}} \mathfrak{p} \stackrel{(ii)}{=} \bigcap_{\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m} \subseteq k[\underline{T}], \mathfrak{m} \text{ maximal}} \mathfrak{m}$$

*Beweis.*

- (i)  $k \rightarrow A \rightarrow A/\mathfrak{m}$  ist Isomorphismus, da  $k$  keine echte algebraische Körpererweiterung besitzt.
- (ii) Es ist

$$\begin{aligned} k[T_1, \dots, T_n] &\twoheadrightarrow k[\underline{T}]/\mathfrak{m} = k \\ T_i &\mapsto x_i \end{aligned}$$

surjektiv. Es folgt:  $\mathfrak{m} = (T_1 - x_1, \dots, T_n - x_n)$ , da letzteres bereits maximal ist. ( $\supseteq$  klar.)

- (iii) (i) Algebra II. (ii) Theorem 1.7.

□

## 1.5 Korrespondenz zwischen Radikalidealen und affinen algebraischen Mengen

Sei  $V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  affin algebraische Menge,  $\mathfrak{a} \trianglelefteq k[\underline{T}]$  ein Ideal. **Es gilt:**

$$V(\mathfrak{a}) = V(\text{rad } \mathfrak{a})$$

mit  $\text{rad } \mathfrak{a} = \{f \in k[\underline{T}] \mid f^n \in \mathfrak{a} \text{ für ein } n > 0\}$ , da

$$f^n(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0,$$

d.h. verschiedene Ideale können dieselbe algebraische Menge beschreiben.

**Definition 1.9.** Für eine Teilmenge  $Z \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  bezeichne

$$I(Z) := \{f \in k[\underline{T}] \mid f(x) = 0 \ \forall x \in Z\}$$

das **Verschwindungsideal von Z**, das Ideal aller auf  $Z$  verschwindenden Polynomfunktionen.

**Satz 1.10.**

(i) Sei  $\mathfrak{a} \trianglelefteq k[\underline{T}]$  Ideal. Dann ist  $I(V(\mathfrak{a})) = \text{rad}(\mathfrak{a})$ .

(ii) Sei  $Z \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  Teilmenge. Dann ist  $V(I(Z)) = \overline{Z}$ , der Abschluss von  $Z$  in  $\mathbb{A}^n(k)$ .

*Beweis.* Übungsblatt 2. □

$\mathfrak{a}$  heißt **Radikalideal**, falls  $\mathfrak{a} = \text{rad}(\mathfrak{a})$ , oder äquivalent falls  $k[\underline{T}]/\mathfrak{a}$  reduziert ist, d.h. keine nilpotente Elemente ungleich 0 hat.

**Korollar 1.11.** Wir erhalten eine 1-1 Korrespondenz

$$\begin{aligned} \{\text{abg. Mengen } \subseteq \mathbb{A}^n\} &\leftrightarrow \{\text{Radikalideale } \mathfrak{a} \trianglelefteq k[\underline{T}]\} \\ Z &\mapsto I(Z) \\ V(\mathfrak{a}) &\leftarrow \mathfrak{a} \end{aligned}$$

die sich zu einer 1-1 Korrespondenz

$$\begin{aligned} \{\text{Punkte in } \mathbb{A}^n\} &\leftrightarrow \{\text{max. Ideale in } k[\underline{T}]\} \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \mathfrak{m}_x = I(\{x\}) \\ &= \ker(k[\underline{T}] \rightarrow k, \ T_i \mapsto x_i) \end{aligned}$$

einschränkt.

## 1.6 Irreduzible topologische Räume

Die folgenden topologischen Begriffe sind nur interessant, da  $\mathbb{A}^n(k)$  ( $n > 0$ ) kein Hausdorff'scher Raum ist.

**Definition 1.12.** Ein topologischer Raum  $X$  heißt **irreduzibel**, falls  $X \neq \emptyset$  und  $X$  sich *nicht* als Vereinigung zweier echter abgeschlossener Teilmengen darstellen lässt, d.h

$$X = A_1 \cup A_2, \quad A_i \text{ abg.} \quad \implies \quad A_1 = X \text{ oder } A_2 = X.$$

$Z \subseteq X$  heißt irreduzibel, falls  $Z$  mit der induzierten Topologie irreduzibel ist.

**Satz 1.13.** Für einen topologischen Raum  $X \neq \emptyset$  sind äquivalent:

- (i)  $X$  ist irreduzibel.
- (ii) Je zwei nichtleere offene Teilmengen von  $X$  haben nicht-leeren Durchschnitt.
- (iii) Jede nichtleere offene Teilmenge  $U \subseteq X$  ist dicht in  $X$ .
- (iv) Jede nichtleere offene Teilmenge  $U \subseteq X$  ist zusammenhängend.
- (v) Jede nichtleere offene Teilmenge  $U \subseteq X$  ist irreduzibel.

*Beweis.*

- (i)  $\Leftrightarrow$  (ii)

Komplementärmengen.

- (ii)  $\Leftrightarrow$  (iii)

Es ist:  $U \subseteq X$  dicht  $\Leftrightarrow U \cap O \neq \emptyset$  für jedes offene  $\emptyset \neq O \subseteq X$ .

- (iii)  $\Rightarrow$  (iv)

Klar.

- (iv)  $\Rightarrow$  (iii)

Sei  $\emptyset \neq U$  offen und zusammenhängend. Es folgt:

$$U = U_1 \sqcup U_2, \quad \emptyset \neq U_i \underset{\text{offen}}{\subseteq} U \underset{\text{offen}}{\subseteq} X$$

Damit ist  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ , ein Widerspruch zu (iii).

- (v)  $\Rightarrow$  (i)

Klar. ( $U = X$ )

- $(iii) \Rightarrow (v)$

Sei  $\emptyset \neq U \underset{\text{offen}}{\subseteq} X$ . Ist  $\emptyset \neq V \underset{\text{offen}}{\subseteq} U$ , so ist  $V \underset{\text{offen}}{\subseteq} X$ . Es folgt:  $V$  ist dicht in  $X$  und irreduzibel in  $U$ . Mit  $(iii) \Rightarrow (i)$  folgt, dass  $U$  irreduzibel ist.

□

**Lemma 1.14.** Eine Teilmenge  $Y$  ist genau dann irreduzibel, wenn ihr Abschluss  $\overline{Y}$  dies ist.

*Beweis.*  $Y$  irreduzibel

$\Leftrightarrow \forall U, V \subseteq X$  offen mit  $U \cap Y \neq \emptyset \neq V \cap Y$ , gilt  $Y \cap (U \cap V) \neq \emptyset$ .

$\Leftrightarrow \overline{Y}$  irreduzibel

□

**Definition 1.15.** Eine maximale irreduzible Teilmenge eines topologischen Raumes  $X$  heißt **irreduzible Komponente** von  $X$ .

*Bemerkung 1.16.*

- (i) Jede irreduzible Komponente ist abgeschlossen nach Lemma 1.14.
- (ii)  $X$  ist Vereinigung seiner irreduziblen Komponenten, *denn:*

die Menge der irreduziblen Teilmengen von  $X$  ist **induktiv geordnet**: für jede aufsteigende Kette irreduzibler Teilmengen ist die Vereinigung wieder irreduzibel (Satz 1.13.(ii)). Mit dem **Lemma von Zorn** folgt: Jede irreduzible Teilmenge ist in einer irreduziblen Komponente enthalten. Damit ist jeder Punkt in einer irreduziblen Komponente enthalten.

## 1.7 Irreduzible affine algebraische Mengen

**Lemma 1.17.** *Eine abgeschlossene Teilmenge  $Z \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  ist genau dann irreduzibel, wenn  $I(Z) \trianglelefteq k[\underline{T}]$  ein Primideal ist. Insbesondere ist  $\mathbb{A}^n(k)$  irreduzibel.*

*Beweis.*  $Z$  irreduzibel ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} (Z = \underbrace{V(\mathfrak{a})}_{\cap_i V(f_i)} \cup \underbrace{V(\mathfrak{b})}_{\cap_j V(g_j)}) &\Rightarrow V(\mathfrak{a}) = Z \text{ oder } V(\mathfrak{b}) = Z. \\ \Leftrightarrow \forall f, g \in k[\underline{T}] : V(fg) = V(f) \cup V(g) \supseteq Z : V(f) \supseteq Z \text{ oder } V(g) \supseteq Z. \\ (*) \Leftrightarrow \forall f, g \in k[\underline{T}] : fg \in I(V(fg)) \subseteq I(Z) : f \in I(Z) \text{ oder } g \in I(Z). \\ \Leftrightarrow I(Z) \text{ ist Primideal.} \end{aligned}$$

$$(*) : V(I(Z)) = Z, I(V(\mathfrak{a})) = \text{rad}(\mathfrak{a}).$$

□

*Bemerkung 1.18.* Die Korrespondenz aus Korollar 1.11 schränkt sich ein zu

$$\{\text{irred. abg. Teilmengen} \subseteq \mathbb{A}^n\} \xleftrightarrow{1:1} \{\text{Primideale in } k[\underline{T}]\}$$

## 1.8 Quasikompakte und noethersche topologische Räume

**Definition 1.19.** Ein topologischer Raum  $X$  heißt **quasikompakt**, falls jede offene Überdeckung von  $X$  eine *endliche* Teilüberdeckung enthält. („quasi“ deutet an, dass  $X$  in der Regel nicht Hausdorff’sch ist!). Er heißt **noethersch**, wenn jede absteigende Kette

$$X \supseteq Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \cdots$$

abgeschlossener Teilmengen von  $X$  stationär wird ( $\Leftrightarrow$  jede aufsteigende Kette offener Teilmengen wird stationär).

**Lemma 1.20.** *Sei  $X$  ein noetherscher topologischer Raum. Dann gilt:*

- (i) *Jede abgeschlossene Teilmenge  $Z \subseteq X$  ist noethersch.*
- (ii) *Jede offene Teilmenge  $U \subseteq X$  ist quasikompakt.*
- (iii) *Jeder abgeschlossene Teilraum  $Z \subseteq X$  besitzt nur endlich viele irreduzible Komponenten.*

*Beweis.*

- (i) Nach Definition, da abgeschlossene Mengen von  $Z$  auch solche von  $X$  sind.
- (ii)  $U = \bigcup_{i \in I} U_i$  offen; Angenommen  $U$  wäre nicht quasikompakt. Dann gibt es eine Folge  $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I$  von Teilmengen mit

$$V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \neq U \quad \text{für } V_j = \bigcup_{i \in I_j} U_i.$$

Widerspruch zu noethersch.

- (iii) Es reicht zu zeigen: Jeder noethersche Raum ist Vereinigung endlich vieler irreduzibler Teilmengen. Da  $X$  noethersch ist, folgt mit dem *Lemma von Zorn* dass jede nichtleere Menge von algebraischen Teilmengen in  $X$  ein minimales Element besitzt.

Angenommen:  $\mathcal{M} := \{Z \subseteq X \text{ abg.} \mid Z \text{ ist **nicht** endl. Vereinigung irred. Mengen}\}$  wäre nichtleer.

$\Rightarrow \exists$  minimales Element, sagen wir  $Z$ , in  $\mathcal{M}$ .

$\Rightarrow Z$  ist nicht irreduzibel.

$\Rightarrow Z = Z_1 \cup Z_2$  mit  $Z_1, Z_2 \subsetneq Z$  abgeschlossen.

$\Rightarrow (Z \text{ minimal}) \ Z_1, Z_2 \notin \mathcal{M}$

$\Rightarrow Z \notin \mathcal{M}$ . Widerspruch.

□

**Satz 1.21.** *Jeder abgeschlossene Teilraum  $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  ist noethersch.*



*Beweis.* Nach dem obigen Lemma ist nur zu zeigen, dass  $\mathbb{A}^n(k)$  noethersch ist.

Absteigende Ketten abgeschlossener Teilmengen sind nach *Korollar 1.11* in 1-1 Korrespondenz mit aufsteigenden Ketten von (Radikal-)Idealen in  $k[\underline{T}]$ . Da  $k[\underline{T}]$  nach dem Hilbertschen Basissatz noethersch ist, werden letzere Ketten stationär.  $\square$

**Korollar 1.22** (Primärzerlegung). *Sei  $\mathfrak{a} = \text{rad}(\mathfrak{a}) \trianglelefteq k[\underline{T}]$  ein Radikalideal. Dann gilt:  $\mathfrak{a}$  ist Durchschnitt von endlich vielen Primidealen, die sich jeweils paarweise nicht enthalten; diese Darstellung ist eindeutig bis auf Reihenfolge.*

*Beweis.*  $V(\mathfrak{a}) = \bigcup_{i=1}^n V(\mathfrak{b}_i)$ ,  $\mathfrak{b}_i$  Primideal. [Anmerkung] Mit Satz 1.10 folgt:

$$\mathfrak{a} = \text{rad}(\mathfrak{a}) = I(V(\mathfrak{a})) = \bigcap_{i=1}^n \underbrace{I(V(\mathfrak{b}_i))}_{\mathfrak{b}_i \text{ minimale Primideale}} \quad (1.17)$$

$\square$

## 1.9 Morphismen von affinen algebraischen Mengen

**Definition 1.23.** Seien  $X \subseteq \mathbb{A}^m(k)$ ,  $Y \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  affine algebraische Mengen. Ein **Morphismus**  $X \rightarrow Y$  affiner algebraischer Mengen ist eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  der zugrundeliegenden Mengen, sodass  $f_1, \dots, f_n \in k[T_1, \dots, T_m]$  existieren, derart dass  $\forall x \in X$  gilt:

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in Y.$$

Es bezeichne  $\text{hom}(X, Y)$  die Menge der Morphismen  $X \rightarrow Y$ .

*Bemerkung 1.24.*  $f : X \rightarrow Y$  lässt sich immer fortsetzen zu einem Morphismus

$$f : \mathbb{A}^m(k) \rightarrow \mathbb{A}^n(k),$$

aber nicht eindeutig, es sei denn  $X = \mathbb{A}^m(k)$ .

### Komposition

$$X \xrightarrow[\substack{f \\ f_1, \dots, f_n \in k[T_1, \dots, T_m]}} Y \xrightarrow[\substack{g \\ g_1, \dots, g_r \in k[T'_1, \dots, T'_m]}} Z$$

mit  $X \subseteq \mathbb{A}^m(k)$ ,  $Y \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ ,  $Z \subseteq \mathbb{A}^r(k)$ . Es folgt:

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= (g_1(f_1(x), \dots, f_n(x)), \dots, g_r(f_1(x), \dots, f_n(x))) \\ &=: (h_1(x), \dots, h_r(x)) \end{aligned}$$

d.h.  $g \circ f$  ist durch Polynome  $h_i \in k[T_1, \dots, T_m]$  gegeben, also ist  $g \circ f$  wieder ein Morphismus affiner algebraischer Mengen. Wir erhalten die **Kategorie affiner algebraischer Mengen**.

### Beispiel 1.25.

(i) Sei die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^1(k) &\rightarrow V(T_2 - T_1^2) \subseteq \mathbb{A}^2(k) \\ x &\mapsto (x, x^2). \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist sogar ein *Isomorphismus* affiner algebraischer Mengen, da die Umkehrabbildung

$$(x, y) \mapsto x$$

ebenfalls ein Morphismus ist.

(ii) Sei  $\text{char}(k) \neq 2$ . Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^1(k) &\rightarrow V(T_2^2 - T_1^2(T_1 + 1)) \\ x &\mapsto (x^2 - 1, x(x^2 - 1)) \end{aligned}$$

ist ein Morphismus, aber *nicht* bijektiv, da  $1, -1$  beide auf  $(0, 0)$  abgebildet werden.

## 1.10 Unzulänglichkeiten des Begriffs der affinen algebraischen Mengen

- (i) Offene Teilmengen affiner algebraischer Mengen tragen nicht in natürlicher Weise die Struktur einer affinen algebraischen Menge.
- (ii) Insbesondere können wir affine algebraische Mengen nicht entlang offener Teilräume verkleben. (vgl. Mannigfaltigkeiten.)
- (iii) Keine Unterscheidungsmöglichkeiten z.B. zwischen  $\{(0, 0)\}$ ,  $V(T_1) \cap V(T_2)$  und  $V(T_2) \cap V(T_1^2 - T_2) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$ , obwohl die “geometrische Situation” offensichtlich verschieden ist.

Um die Punkte 1 und 2 zu verbessern, gehen wir im Folgenden zu “Räumen mit Funktionen” über, und verzichten darauf, dass sich diese in einen affinen Raum  $\mathbb{A}^n(k)$  einbetten lassen.

Der Punkt 3 ist eine Motivation dafür, später Schemata einzuführen. (subtiler)

## Affine algebraische Mengen als Räume von Funktionen

### 1.11 Der affine Koordinatenring

Sei  $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  abgeschlossen. Für den surjektiven (Def. von Morphismen)  $k$ -Algebren-Homomorphismus

$$\begin{aligned} k[\underline{T}] &\xrightarrow{\varphi} \text{hom}(X, \mathbb{A}^1(k)) \\ f &\mapsto (x \mapsto f(x)), \end{aligned}$$

wobei die Morphismen in folgende Weise eine  $k$ -Algebra bilden:

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &:= f(x) + g(x) \\ (fg)(x) &:= f(x)g(x) \\ (\alpha f)(x) &:= \alpha f(x) \end{aligned}$$

mit  $f, g \in \text{hom}(X, \mathbb{A}^1(k))$ ,  $\alpha \in k$ , gilt:

$$\ker \varphi = I(X).$$

**Definition 1.26.**  $\Gamma(X) := k[\underline{T}]/I(X) \cong_{k\text{-Alg}} \text{hom}(X, \mathbb{A}^1(k))$  heißt der **affine Koordinatenring** von  $X$ .

Für  $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$  gilt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_x &:= \ker(\Gamma(X) \rightarrow k, f \mapsto f(x)) \\ &= \{f \in \Gamma(X) \mid f(x) = 0\} \\ &= \pi((T_1 - x_1, \dots, T_n - x_n)) \\ &= \ker(\Gamma(\mathbb{A}^n(k)) \rightarrow k) \end{aligned}$$

unter der Projektion  $\pi : k[\underline{T}] = \Gamma(\mathbb{A}^n(k)) \twoheadrightarrow \Gamma(X)$ . Es ist  $\mathfrak{m}_x$  ein maximales Ideal von  $\Gamma(X)$  mit  $\Gamma(X)/\mathfrak{m}_x \cong k$ . Für ein Ideal  $\mathfrak{a} \subseteq \Gamma(X)$  sei

$$V(\mathfrak{a}) := \{x \in X \mid f(x) = 0 \ \forall f \in \mathfrak{a}\} = V(\pi^{-1}(\mathfrak{a})) \cap X.$$

Dies sind genau die abgeschlossenen Mengen von  $X$  als Teilraum von  $\mathbb{A}^n(k)$  mit der induzierten Topologie, diese wird auch **Zariski-Topologie** genannt. Für  $f \in \Gamma(X)$  setze:

$$D_X(f) := D(f) := \{x \in X \mid f(x) \neq 0\} = X \setminus V(f).$$

**Lemma 1.27.** Die offenen Mengen  $D(f)$ ,  $f \in \Gamma(X)$ , bilden eine Basis der Topologie von  $X$ , d.h.

$$\forall U \subseteq X \text{ offen } \exists f_i \in \Gamma(X), i \in I \quad \text{mit } U = \bigcup_{i \in I} D(f_i)$$

*Beweis.*  $U = X \setminus V(\mathfrak{a})$  für ein  $\mathfrak{a} \subseteq \Gamma(X)$ ,  $\mathfrak{a} = \langle f_1, \dots, f_n \rangle_{\Gamma(X)}$ . Wegen

$$V(\mathfrak{a}) = \bigcap_{i=1}^n V(f_i) \quad \Rightarrow \quad U = \bigcup_{i=1}^n D(f_i)$$

Es reichen also sogar endlich viele  $f_i \in \Gamma(X)$ ! □

**Satz 1.28.** *Der Koordinatenring  $\Gamma(X)$  einer affinen algebraischen Menge  $X$  ist eine endlich erzeugte  $k$ -Algebra, die reduziert ist (d.h. keine nilpotenten Elemente  $\neq 0$  enthält). Ferner ist  $X$  irreduzibel genau dann, wenn  $\Gamma(X)$  integer ist.*

*Beweis.*  $k[\underline{T}] \twoheadrightarrow \Gamma(X)$  impliziert, dass  $\Gamma(X)$  als  $k$ -Algebra endlich erzeugt ist. Es gilt:

$$\Gamma(X) \text{ irreduzibel} \Leftrightarrow I(X) = \text{rad } I(X).$$

Denn mit Satz 1.10.(ii) und Korollar 1.11 folgt:

$$\begin{aligned} X = V(\mathfrak{a}) : I(X) &= \text{rad } \mathfrak{a} \\ \Rightarrow \text{rad } I(X) &= \text{rad rad } \mathfrak{a} = \text{rad } \mathfrak{a} = I(X). \end{aligned}$$

Mit Lemma 1.17 folgt:  $X$  irreduzibel

$$\Leftrightarrow I(X) \text{ prim}$$

$$\Leftrightarrow \Gamma(X) = k[\underline{T}]/I(X) \text{ integer.} \quad \square$$

## 1.12 Funktorielle Eigenschaften von $\Gamma(X)$

**Satz 1.29.** Für einen Morphismus  $X \xrightarrow{f} Y$  affiner algebraischer Mengen definiert

$$\begin{aligned}\Gamma(f) : \Gamma(Y) &\rightarrow \Gamma(X) \\ g &\mapsto g \circ f\end{aligned}$$

ein Homomorphismus von  $k$ -Algebren. Der so definierte kontravariante Funktor

$$\Gamma : \{\text{affine algebraische Mengen}\} \rightarrow \{\text{reduzierte endl. erz. } k\text{-Algebren}\}$$

liefert eine Kategorienäquivalenz, welche durch Einschränkung eine Äquivalenz

$$\Gamma : \{\text{irred. aff. alg. Mengen}\} \rightarrow \{\text{integre endl. erz. } k\text{-Algebren}\}$$

induziert.

*Beweis.* Sei  $Y \xrightarrow{g} \mathbb{A}^1(k) \in \Gamma(Y)$  ein Morphismus. Es folgt:

$$g \circ f : X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} \mathbb{A}^1(k)$$

ist Morphismus, d.h.  $g \circ f \in \Gamma(X)$ .  $\Gamma(f) : \Gamma(Y) \rightarrow \Gamma(X)$  ist ein  $k$ -Algebren-Homomorphismus mit  $\Gamma(\text{id}_X) = \text{id}_{\Gamma(X)}$ . Da ferner gilt, dass  $\Gamma(f_1 \circ f_2) = \Gamma(f_2) \circ \Gamma(f_1)$  ist  $\Gamma$  ein kontravarianter Funktor.

*Behauptung.*  $\Gamma$  ist volltreu, d.h.

$$\begin{aligned}\Gamma : \text{hom}(X, Y) &\rightarrow \text{hom}_{k\text{-Alg}}(\Gamma(Y), \Gamma(X)) \\ f &\mapsto \Gamma(f)\end{aligned}$$

ist *bijektiv* für alle affinen algebraischen Mengen  $X, Y$ .

*Beweis.* Wir konstruieren eine Umkehrabbildung wie folgt: Zu  $\varphi : \Gamma(Y) \rightarrow \Gamma(X)$  für  $X \subseteq \mathbb{A}^m(k)$ ,  $Y \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  existiert ein Lift  $\tilde{\varphi}$ , s.d.

$$\begin{array}{ccc}k[T'_1, \dots, T'_n] & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & k[T_1, \dots, T_m] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(Y) & \xrightarrow{\varphi} & \Gamma(X)\end{array}$$

kommutiert;  $\tilde{\varphi}(T'_i) := f_i$  mit  $f_i \in \pi^{-1}(\varphi(T'_i)) \subseteq k[T_1, \dots, T_m]$ , wobei  $\pi : k[\underline{T}] \rightarrow \Gamma(X)$  die kanonische Projektion bezeichne. Definiere:

$$\begin{aligned}f : X &\rightarrow Y \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (\tilde{\varphi}(T'_1)(x_1, \dots, x_n), \dots, \tilde{\varphi}(T'_n)(x_1, \dots, x_n))\end{aligned}$$

□

*Behauptung.*  $\Gamma$  ist essentiell surjektiv, d.h. zu jeder reduzierten endlich erzeugten  $k$ -Algebra  $A$  existiert eine affine algebraische Menge  $X$  mit  $A \cong \Gamma(X)$ .

*Beweis.* Da nach Voraussetzung  $A \cong k[T]/\mathfrak{a}$  für ein Radikalideal  $\mathfrak{a}$ , können wir etwa  $X := V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  setzen. Der Rest folgt aus Satz 1.28. □

□

**Satz 1.30.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein Morphismus affiner algebraischer Mengen und  $\Gamma(f) : \Gamma(Y) \rightarrow \Gamma(X)$  der zugehörige Homomorphismus der Koordinatenringe. Dann gilt  $\forall x \in X : \Gamma(f)^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{m}_{f(x)}$ .

*Beweis.*

$$\Gamma(f)^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \{g \in \Gamma(Y) \mid g \circ f \in \mathfrak{m}_x\} = \{g \in \Gamma(Y) \mid g(f(x)) = 0\} = \mathfrak{m}_{f(x)},$$

da  $\Gamma(f)(g) = g \circ f$ . □

## 1.13 Räume mit Funktionen

(Prototyp eines geometrischen Objektes, Spezialfall eines “geringten Raumes” vgl. später.) Sei  $K$  ein nicht notwendigerweise algebraisch abgeschlossener Körper.

**Definition 1.31.**

(i) Ein **Raum mit Funktionen** $_{/K}$  besteht aus den folgenden Daten:

- ein topologischer Raum  $X$ ;
- eine Familie von Unter- $K$ -Algebren

$$\mathcal{O}_X(U) \leq \text{Abb}(U, K), \quad \forall U \subseteq X \text{ offen d.d.}$$

1. Sind  $U' \subseteq U \subseteq X$  offen und  $f \in \mathcal{O}_X(U)$  so ist  $f|_{U'} \in \mathcal{O}_X(U')$ .
2. (**Verklebungssaxiom**) Sind  $U_i \subseteq X$  offen,  $i \in I$ , und  $U = \bigcup_i U_i$ ,  $f_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$ ,  $i \in I$  gegeben mit

$$f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j} \quad \forall i, j \in I$$

dann ist die eindeutige Abbildung

$$f : U \rightarrow K \text{ mit } f|_{U_i} = f_i$$

in  $\mathcal{O}_X(U)$ , bzw.  $\exists! f \in \mathcal{O}(U)$  mit  $f|_{U_i} = f_i$  für alle  $i \in I$ .

Bezeichne  $\mathcal{O}_X$  oder auch  $\mathcal{O}$  die oben genannte Familie  $\{\mathcal{O}_X(U) \mid U \subseteq X \text{ offen}\}$ . Das Tupel  $(X, \mathcal{O}_X)$  heißt **Raum mit Funktionen**.

(ii) Ein **Morphismus**  $(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  von Räumen von Funktionen ist eine stetige Abbildung  $\varphi : X \rightarrow Y$ , so dass für alle  $V \subseteq Y$  offen und  $f \in \mathcal{O}_Y(V)$  gilt:

$$f \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(V)} : \varphi^{-1}(V) \rightarrow K$$

liegt in  $\mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(V))$ .

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ \uparrow & & \uparrow \text{offen} \\ \varphi^{-1}(V) & \xrightarrow{\varphi|} & V \\ \downarrow f \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(V)} & & \downarrow f \\ K & \xlongequal{\quad} & K \end{array}$$

Wir erhalten die Kategorie der *Räume mit Funktionen über  $K$* .

**Definition 1.32** (offene Unterräume von Räumen mit Funktionen). Für  $(X, \mathcal{O}_X)$  einen Raum mit Funktionen und  $U \subseteq X$  offen bezeichne  $(U, \mathcal{O}_X|_U)$  den Raum mit Funktionen gegeben durch den topologischen Raum  $U$  mit Funktionen  $\mathcal{O}_X|_U(V) := \mathcal{O}_X(V)$  für  $V \subseteq U \subseteq X$ .  
offen



**Ab jetzt** betrachten wir Räume von Funktionen über einem fixierten, algebraisch abgeschlossenen Grundkörper  $k$ .

## 1.14 Der Raum mit Funktionen zu einer affin-algebraischen Menge

**Ziel.** Wir wollen jeder irreduziblen affin algebraischen Menge  $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  einen Raum mit Funktionen  $(X, \mathcal{O}_X)$  zuordnen. D.h. wir müssen Mengen von Funktionen  $\mathcal{O}_X(U) \leq \text{Abb}(U, k)$ ,  $U \subseteq X$  offen, definieren. Diese werden als Teilmengen des Funktionenkörpers  $K(X)$  definiert (dazu  $X$  irreduzibel, später bei Schemata fällt diese Bedingung weg!)

**Definition 1.33.** Für eine irreduzible, affin-algebraische Menge  $X$  heißt  $K(X) := \text{Quot}(\Gamma(X))$  **Funktionenkörper** von  $X$ .

Elemente  $\frac{f}{g} \in K(X)$ ,  $f, g \in \Gamma(X) = \text{hom}(X, \mathbb{A}^1(k))$ ,  $g \neq 0$  lassen sich zumindest als Funktion auf der offenen Menge  $D(g) \subseteq X$  auffassen, wenn auch i.A. nicht auf ganz  $X$ .

**Lemma 1.34.** Gilt für  $\frac{f_1}{g_1}, \frac{f_2}{g_2} \in K(X)$ ,  $f_i, g_i \in \Gamma(X)$ , und einer offenen Teilmenge  $\emptyset \neq U \subseteq D(g_1 g_2)$

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \quad \forall x \in U,$$

dann folgt  $\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2}$  in  $K(X)$ .

*Beweis.* Sei ohne Einschränkung der Allgemeinheit  $g_1 = g_2 = g$ . (Sonst Erweitern!)

$$\Rightarrow (f_1 - f_2)(x) = 0 \quad \forall x \in U.$$

$$\Rightarrow \emptyset \neq U \subseteq V(f_1 - f_2) \subseteq X \text{ dicht, d.h. } V(f_1 - f_2) = X.$$

$$f_1 - f_2 \in I(V(f_1 - f_2)) = I(X) \equiv (0) \text{ in } \Gamma(X)$$

$$\Rightarrow f_1 - f_2 = 0.$$

□

**Definition 1.35.** Sei  $X$  eine irreduzible affin-algebraische Menge,  $U \subseteq X$  offen. Für  $x \in X$  bezeichne  $\Gamma(X)_{\mathfrak{m}_x}$  die Lokalisierung von  $\Gamma(X)$  an der multiplikativ abgeschlossenen Menge  $S := \Gamma(X) \setminus \mathfrak{m}_x$ .

$$\mathcal{O}_X(U) := \bigcap_{x \in U} \Gamma(X)_{\mathfrak{m}_x} \subseteq K(X)$$

d.h. für jedes  $x \in U$  lässt sich  $f \in \mathcal{O}_X(U)$  schreiben als  $\frac{h}{g} \in K(X)$  mit  $g(x) \neq 0$ .

Für  $f \in \Gamma(X)$  bezeichne  $\Gamma(X)_f$  die Lokalisierung von  $\Gamma(X)$  an der multiplikativ abgeschlossenen Menge  $\{1, f, f^2, \dots, f^n, \dots\}$ . Dann lässt sich

$$\Gamma(X)_{\mathfrak{m}_x} = \bigcup_{f \in \Gamma(X) \setminus \mathfrak{m}_x} \Gamma(X)_f \subseteq K(X)$$

schreiben. “ $\supseteq$ ”: klar, “ $\subseteq$ ”:  $\frac{g}{f}$  mit  $f(x) \neq 0$  d.h.  $f \notin \mathfrak{m}_x \Rightarrow \frac{g}{f} \in \Gamma(X)_f$ .

**Es gilt:**

(i) Für  $V \subseteq U \subseteq X$  offen kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(V) & \hookrightarrow & \text{Abb}(V, k) \\ \uparrow & & \uparrow \text{Einschränkungsabb.} \\ \mathcal{O}_X(U) & \hookrightarrow & \text{Abb}(U, k) \end{array}$$

mit  $\mathcal{O}_X(U) \hookrightarrow \mathcal{O}_X(V)$ ,  $f \mapsto f|_V$  nach Definition.

(ii)  $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \text{Abb}(U, k)$ ,  $f \mapsto (x \mapsto f(x) := \frac{g(x)}{f(x)} \in k)$  ist injektiv (Lemma 1.34) und wohldefiniert (kürzen/erweitern), wobei  $g, h \in \Gamma(X)$  mit  $h \notin \mathfrak{m}_x$  mit  $f = \frac{g}{h}$  nach Definition von  $\mathcal{O}_X(U)$  existiert.

(iii) **Verklebungseigenschaft.** Sei  $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ . Nach Definition ist

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X(U) &= \bigcap_i \mathcal{O}_X(U_i) \subseteq K(X) \\ \ni f : U &\rightarrow k \quad \ni f_i : U_i \rightarrow k \end{aligned}$$

[Diagramm fehlt].  $(X, \mathcal{O}_X)$  ist Raum mit Funktionen, **der zur irreduziblen affin algebraische Menge assoziierte Raum von Funktionen.**

**Satz 1.36** (orig. 33). Für  $(X, \mathcal{O}_X)$  zu  $X$  wie oben und  $f \in \Gamma(X)$  gilt:

$$\mathcal{O}_X(D(f)) = \Gamma(X)_f,$$

insbesondere  $\mathcal{O}_X(X) = \Gamma(X)$ .

*Beweis.*  $\Gamma(X)_f \subseteq \mathcal{O}_X(D(f))$  klar, da  $f(x) \neq 0 \forall x \in D(f)$  bzw.  $f \in \Gamma(X) \setminus \mathfrak{m}_x$ .

Sei nun  $g$  in  $\mathcal{O}_X(D(f))$  gegeben,  $(*)$  und  $\mathfrak{a} := \{h \in \Gamma(X) \mid hg \in \Gamma(X)\} \subseteq \Gamma(X)$ .

Dann gilt:  $g \in \Gamma(X)_f$

$$\Leftrightarrow g = \frac{k}{f^n} \text{ für ein } n \text{ und } k \in \Gamma(X)$$

$$\Leftrightarrow f^n \in \mathfrak{a} \text{ für ein } n.$$

d.h. zu zeigen:  $f \in \text{rad}(\mathfrak{a}) = I(V(\mathfrak{a}))$  (Hilbertscher Nullstellensatz)

$$\Leftrightarrow f(x) = 0 \forall x \in V(\mathfrak{a})$$

Ist dazu  $x \in X$  mit  $f(x) \neq 0$ , also  $x \in D(f)$ , so existieren wegen  $g \in \mathcal{O}_X(D(f))$

Funktionen  $f_1, f_2 \in \Gamma(X)$ ,  $f_2 \notin \mathfrak{m}_x$  mit  $g = \frac{f_1}{f_2}$ , also gilt  $f_2 \in \mathfrak{a}$ .

Da  $f_2(x) \neq 0$  folgt weiter  $x \notin V(\mathfrak{a})$ . □

*Bemerkung 1.37* (orig. 34).

(i) Im Allgemeinen existieren für  $f \in \mathcal{O}_x(U)$  **nicht notwendigerweise**  $g, h \in \Gamma(X)$  mit  $f = \frac{g}{h}$  und  $h(x) \neq 0 \forall x \in U$ .

(ii) **Alternative Definition von  $\mathcal{O}_X$ , I.**

$$\mathcal{O}_X(D(f)) := \Gamma(X)_f, \quad \forall f \in \Gamma(X).$$

Da  $(D(f))_{f \in \Gamma(X)}$  Basis der Topologie bildet, kann es höchstens einen Raum mit Funktionen mit dieser Eigenschaft geben, es bleibt die Existenz zu zeigen.

(iii) **Alternative Definition von  $\mathcal{O}_X$ , II.**

Direkt von einer integeren endlich erzeugten  $k$ -Algebra  $A$  ausgehend (die  $X$  bis auf Isomorphie festlegt), aber ohne “Koordinaten” zu wählen.

$$X := \{\mathfrak{m} \trianglelefteq A \mid \mathfrak{m} \text{ ist max. Ideal}\}$$

Die **abgeschlossenen Mengen** sind gegeben durch:

$$V(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{m} \in X \mid \mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{a}\}, \quad \mathfrak{a} \trianglelefteq A \text{ Ideal.}$$

$$\mathcal{O}_X(U) := \bigcap_{\mathfrak{m} \in U} A_{\mathfrak{m}} \subseteq \text{Quot}(A) \text{ für } U \subseteq X \text{ offen (vgl. später Schemata).}$$

## 1.15 Funktorialität der Konstruktion

**Satz 1.38** (orig. 35). *Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung zwischen irreduziblen affin-algebraischen Mengen. Es sind äquivalent:*

- (i)  *$f$  ist ein Morphismus affin-algebraischer Mengen.*
- (ii)  $\forall g \in \Gamma(Y)$  gilt  $g \circ f \in \Gamma(X)$ .
- (iii)  *$f$  ist ein Morphismus von Räumen von Funktionen, d.h. für alle  $U \subseteq Y$  offen und alle  $g \in \mathcal{O}_Y(U)$  gilt  $g \circ f \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$ .*

*Beweis.*

- (i)  $\Leftrightarrow$  (ii)

Folgt aus Satz 1.29.

- (iii)  $\Rightarrow$  (ii)

$U := Y$  und Satz 1.36.

- (ii)  $\Rightarrow$  (iii)

Betrachte  $\Gamma(f) : \Gamma(Y) \rightarrow \Gamma(X)$ ,  $h \mapsto h \circ f$ . Aufgrund des Verklebungssaxioms reicht es, die Bedingung für  $U$  von der Form  $D(g)$  zu zeigen; hier gilt:

$$f^{-1}(D(g)) = \{x \in X \mid \underbrace{g(f(x))}_{=\Gamma(f)(g)(x)} \neq 0\} = D(g \circ f)$$

Deswegen induziert  $\Gamma(f)$ :

$$\begin{aligned} h &\longmapsto h \circ f \\ \mathcal{O}_Y(D(g)) &\longrightarrow \mathcal{O}_X(D(g \circ f)) \\ \parallel \\ \Gamma(Y)_g &\longrightarrow \Gamma(X)_{g \circ f} \\ \frac{h}{g^n} &\longmapsto \frac{h \circ f}{(g \circ f)^n} \end{aligned}$$

mit  $h \circ f, g \circ f \in \Gamma(X)$  nach Voraussetzung.

□

Insgesamt erhalten wir:

**Theorem 1.39** (orig. 36). *Die obige Konstruktion definiert einen volltreuen Funktor*

$$\{\text{irreduzible aff. alg. Mengen über } k\} \rightarrow \{\text{Räume mit Funktionen über } k\}.$$



# Prävarietäten

**Ziel.** Klasse der affin-algebraischen Mengen, aufgefasst als Räume mit Funktionen durch Verkleben vergrößern.

$(X, \mathcal{O}_X)$  heißt **zusammenhängend**, falls  $X$  als topologischer Raum zusammenhängend ist.

## 1.16 Definition von Prävarietäten

**Definition 1.40** (orig. 37). Eine **affine Varietät** ist ein Raum mit Funktionen, der isomorph zu dem Raum mit Funktionen assoziiert zu einer irreduziblen affin-algebraischen Menge ist.

**Definition 1.41** (orig. 38). Eine **Prävarietät** ist ein zusammenhängender Raum mit Funktionen  $(X, \mathcal{O}_X)$ , für den eine *endliche* Überdeckung  $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$  durch offene Teilmengen  $U_i \subseteq X$  existiert, d.d.  $\forall i = 1, \dots, n$   $(U_i, \mathcal{O}_{X|U_i})$  eine affine Varietät ist. Insbesondere sind affine Varietäten Prävarietäten!

Ein **Morphismus von Prävarietäten** ist ein Morphismus der entsprechenden Räume mit Funktionen.

Später sehen wir: Varietät = „separierte Prävarietät“. Affine Varietäten sind stets „separiert“, daher braucht man nicht von „affinen Prävarietäten“ zu reden. Ist  $X$  eine affine Varietät, so schreiben wir oft  $\Gamma(X)$  für  $\mathcal{O}_X(X)$  (vgl. Satz 1.36).

Unter einer **offenen affinen Überdeckung** einer Prävarietät  $X$  verstehen wir eine Familie von offenen affinen Unterräumen mit Funktionen  $U_i \subseteq X$ ,  $i \in I$  die affine Varietäten sind, d.d.  $X = \bigcup_i U_i$ .

## 1.17 Vergleich mit differenzierbaren/komplexen Mannigfaltigkeiten

**Differential/Komplexe Geometrie** Mannigfaltigkeiten werden via Kartenabbildungen mit differenzierbaren/holomorphen Übergangsabbildungen definiert (hier problematisch, da offene Teile affiner algebraischer Mengen i.A. keine solche Struktur besitzen.) Jedoch:

$$\begin{aligned} \{\text{differenzierbare Mfgkt.}\} &\longrightarrow \{\text{Räume mit Fkt.}/\mathbb{R}\} \\ X &\longmapsto (X, \mathcal{O}_X) \\ \mathcal{O}_X(U) &:= C^\infty(U, \mathbb{R}), \quad U \subseteq X \text{ offen} \end{aligned}$$

ist ein volltreuer Funktor. Daher kann man differenzierbare Mannigfaltigkeiten auch als diejenigen Räume mit Funktionen über  $\mathbb{R}$  definieren, für die  $X$  Hausdorff ist, und so dass eine offene Überdeckung durch solche Räume mit Funktionen über  $\mathbb{R}$  existiert, die in obiger Weise offene Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  zugeordnet sind. (Analog bei komplexen Mannigfaltigkeiten.)



## 1.18 Topologische Eigenschaften von Prävarietäten

**Lemma 1.42.** Für einen topologischen Raum  $X$  und  $U \subseteq X$  offen haben wir eine Bijektion

$$\begin{aligned} \{Y \subseteq U \text{ irred. abg.}\} &\longleftrightarrow \{Z \subseteq X \text{ irred. abg. mit } Z \cap U \neq \emptyset\} \\ Y &\longmapsto \overline{Y} \text{ (Abschluss in } X) \\ Z \cap U &\longleftarrow Z \end{aligned}$$

*Beweis.* Lemma 1.14:  $Y \subseteq X$  irreduzibel  $\Leftrightarrow \overline{Y} \subseteq X$  irreduzibel.

$Y \subseteq U$  abgeschlossen  $\Leftrightarrow \exists A \subseteq X$  abgeschlossen:  $Y = U \cap A$ .

$\Rightarrow Y \subseteq \overline{Y} \subseteq A \Rightarrow Y = U \cap \overline{Y}$

$Y$  irreduzibel in  $U \Rightarrow Y$  irreduzibel in  $X$

$\Rightarrow \overline{Y}$  irreduzibel nach 1.14

$\Rightarrow Y \mapsto \overline{Y} \mapsto \overline{Y} \cap U = Y$ . ✓

$\emptyset \neq Z \cap U \subseteq Z$  damit dicht da  $Z$  irreduzibel (Satz 1.13 ii. und v.)

Also ist die Abbildung  $\leftarrow$  wohldefiniert.

$\Rightarrow \overline{Z \cap U} = Z$

□

**Satz 1.43.** Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  eine Prävarietät.

Dann ist  $X$  noethersch (insbesondere quasikompakt) und irreduzibel.

*Beweis.* Sei  $X = \bigcup_{i=1}^n$  endliche offene aff. Überdeckung und  $X \supseteq Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \dots$  eine absteigende Kette abgeschlossener Teilmengen.

$\Rightarrow U_i \cap Z_1 \supseteq U_i \cap Z_2 \supseteq \dots$ , ist eine absteigende Kette abgeschlossener Teilmengen von  $U_i$

$\Rightarrow \forall i \exists n_i \in \mathbb{N}: U_i \cap Z_{n_i} = U_i \cap Z_{i+m}$  für alle  $m \in \mathbb{N}$ . Setzen wir  $n := \max n_i$ , so folgt:

$\forall i = 1, \dots, n \forall m \geq n: U_i \cap Z_m = U_i \cap Z_{m+1}$

$\Rightarrow (Z_i)_i$  wird stationär da  $Z_m = \bigcup_i U_i \cap Z_m$ .

$X$  ist demnach noethersch.

$X$  ist weiter irreduzibel:

Sei  $X = X_1 \cup \dots \cup X_n$  die Zerlegung in irreduzible Komponenten.

Angenommen es wäre  $n \geq 2$ .

$\Rightarrow \exists i_0 \in \{2, \dots, n\}: X_1 \cap X_{i_0} \neq \emptyset$ . (Andernfalls gilt:  $X = X_1 \sqcup \underbrace{X \setminus X_1}_{= X_2 \cup \dots \cup X_n \text{ abg.}}$ , im Widerspruch

dazu, dass  $X$  zusammenhängend ist.)

Sei ohne Einschränkung  $i_0 = 2$ . Sei  $x \in X_1 \cap X_2$ ,  $x \in U \subseteq X$  offen, affin (d.h. affine Varietät).

$U$  irreduzibel  $\Rightarrow \overline{U}$  (Abschluss in  $X$ )  $\subseteq X_j$  für ein  $j \in \{1, \dots, n\}$

**Jedoch:** Da  $x \in X_i \cap U \subseteq U$  irreduzibel ist, ist  $\underbrace{\overline{X_i \cap U}}_{\subseteq \overline{U} \subseteq X_i} = X_i$ ,  $i = 1, 2$

$\Rightarrow X_1, X_2 \subseteq X_j$ . Widerspruch zu maximale Komponente.

□

## 1.19 Offene Untervarietäten

Offene Teilmengen von affinen Varietäten (und allgemeiner beliebigen Prävarietäten) sind wieder Prävarietäten. (aber i.A. nicht affin!)

**Lemma 1.44** (orig. 41). *Sei  $X$  eine affine Varietät,  $f \in \mathcal{O}_X(X)$ ,  $D(f) \subseteq X$ . Die Lokalisierung von  $\Gamma(X) = \mathcal{O}_X(X)$  an  $f$ ,*

$$\Gamma(X)_f = \Gamma(X)[T]/(Tf - 1)$$

*ist eine integrale, endlich erzeugte  $k$ -Algebra.  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  bezeichne die zugehörige affine Varietät. Dann gilt:*

$$(D(f), \mathcal{O}_{X|D(f)}) \cong (Y, \mathcal{O}_Y)$$

*als Räume mit Funktionen, d.h.  $(D(f), \mathcal{O}_{X|D(f)})$  ist selbst affine Varietät.*

*Beweis.*  $\mathcal{O}_X(D(f)) = \mathcal{O}_X(X)_f$  muss affiner Koordinatenring von  $(D(f), \mathcal{O}_{X|D(f)})$  sein, wenn letzterer Raum von Funktionen affin ist.  $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  korrespondiert zu dem Radikalideal:

$$\mathfrak{a} := I(X) \trianglelefteq k[T_1, \dots, T_n] \subseteq \mathfrak{a}' := (\mathfrak{a}, fT_{n+1} - 1) \subseteq k[T_1, \dots, T_{n+1}]$$

mit Koordinatenringen:

$$\begin{aligned} \Gamma(X) &= k[T_1, \dots, T_n]/\mathfrak{a} \\ \Gamma(Y) &= \Gamma(X)_f = (k[T_1, \dots, T_n]/\mathfrak{a})[T_{n+1}]/(T_{n+1}f - 1) \\ &\cong k[T_1, \dots, T_{n+1}]/\mathfrak{a}' \end{aligned}$$

Für  $Y = V(\mathfrak{a}') \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(k)$  induziert die Abbildung

$$\begin{array}{ccccc} Y \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(k) & & (x_1, \dots, x_{n+1}) & & T_i \\ \downarrow & & \downarrow & & \uparrow \\ X \subseteq \mathbb{A}^n(k) & & (x_1, \dots, x_n) & & T_i \end{array}$$

eine Bijektion  $Y \xrightarrow{j} D_X(f)$  mit Umkehrabbildung  $(x_0, \dots, x_n, \frac{1}{f(x_0, \dots, x_n)}) \leftarrow (x_0, \dots, x_n)$

*Behauptung.*  $j$  ist Isomorphismus von Räumen mit Funktionen:

(i)  $j$  ist *stetig* (als Einschränkung einer stetigen Abbildung) ✓

(ii)  $j$  ist *offen*: Für  $\frac{g}{f^n} \in \Gamma(X)_f = \Gamma(Y)$  mit  $g \in \Gamma(X)$  gilt

$$\begin{aligned} j \left( D_Y \left( \frac{g}{f^n} \right) \right) &= j(D_Y(gf)) && f \text{ Einheit} \\ &= D_X(gf) \text{ offen} \end{aligned}$$

$\Rightarrow j$  Homöomorphismus.

(iii)  $j$  induziert  $\forall g \in \Gamma(X)$  Isomorphismen:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_X(D(fg)) &\longrightarrow \Gamma(Y)_g \\ s &\longmapsto s \circ j\end{aligned}$$

mit  $\mathcal{O}_X(D(fg)) = \Gamma(X)_{fg} = \Gamma(X)_f|_g = \Gamma(Y)_g$ . Mit dem Verklebungssaxiom folgt:  $j$  ist Morphismus von Räumen mit Funktionen.

□

**Satz 1.45** (orig. 42). *Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  Prävarietät,  $\emptyset \neq U \subseteq X$  offen. Dann ist  $(U, \mathcal{O}_X|_U)$  eine Prävarietät und  $U \hookrightarrow X$  ist Morphismus von Prävarietäten.*

*Beweis.*  $X$  ist irreduzibel, also folgt mit Satz 1.13, dass  $U$  zusammenhängend ist. Nach Voraussetzung besitzt  $X = \bigcup_i X_i$  eine affine, offene Überdeckung. Es folgt:

$$U = \bigcup_i (\underbrace{X_i \cap U}_{\text{offen in } X_i}) = \bigcup_{i,j} D_{X_i}(f_{i,j})$$

und  $D_{X_i}(f_{i,j})$  ist eine affine Varietät nach Lemma 1.44. Da  $X$  noethersch ist, folgt mit Lemma 1.20, dass  $U$  quasikompakt ist.

$\Rightarrow$  Es existiert eine endliche Teilüberdeckung, also ist  $U$  Prävarietät. ✓

Die kanonische Inklusion  $i : U \hookrightarrow X$  ist sicher stetig. Für  $f \in \mathcal{O}_X(V)$ ,  $V \subseteq X$  offen gilt mit dem Einschränkungssaxiom

$$\mathcal{O}_X|_U(U \cap V) = \mathcal{O}_X(U \cap V) \ni f \circ i = f|_{U \cap V}$$

Also ist  $i$  Morphismus von Prävarietäten.

□

Die offenen affinen Teilmengen einer Prävarietät  $X$  ( $\hat{=} U \subseteq X$  offen mit  $(U, \mathcal{O}_X|_U)$  affine Varietät) bilden eine Basis der Topologie von  $X$ , da  $X$  durch offene affine Untervarietäten überdeckt wird und letzere diese Eigenschaft nach Lemma 1.44 haben.

## 1.20 Funktionenkörper einer Prävarietät

**Definition 1.46** (orig. 43). Für eine Prävarietät  $X$  sind die rationalen Funktionenkörper aller nicht-leeren affin-offenen Teilmengen in natürlicher Weise zu einander isomorph. Diesen Körper  $K(X)$  nennen wir den **rationalen Funktionenkörper** von  $X$ .

*Beweis.*  $\emptyset \neq U, V \subseteq X$  affine, offene Untervarietäten. Da  $X$  irreduzibel ist, gilt nach *Satz 1.13*:

$$\emptyset \neq U \cap V \subseteq U \text{ offen.}$$

Nach Definition von  $\mathcal{O}_X$  ist

$$\mathcal{O}_X(U) \subseteq \mathcal{O}_X(U \cap V) \subseteq K(U) = \text{Quot}(\mathcal{O}_X(U)).$$

Das impliziert  $\text{Quot}(\mathcal{O}_X(U \cap V)) = K(U)$ . Aus Symmetriegründen ist aber damit auch bereits  $K(V) = \text{Quot}(\mathcal{O}_X(U \cap V))$ .  $\square$

*Bemerkung 1.47* (orig. 44). Bildung des des Funktionenkörpers  $K(\cdot)$  ist **nicht** funktoriell! Für  $X \rightarrow Y$  Morphismus affiner Varietäten ist die Abbildung auf den Koordinatenringen  $\Gamma(Y) \rightarrow \Gamma(X)$  i.A. **nicht** injektiv, induziert also keine Abbildung  $K(Y) \hookrightarrow K(X)$ .

*Jedoch:* Eine Isomorphie  $X \xrightarrow{\sim} Y$  induziert  $K(Y) \xrightarrow{\sim} K(X)$ . Allgemeiner sei  $X \xrightarrow{\varphi} Y$  Morphismus mit  $\text{im}(\varphi) \subseteq Y$  offen ( $\Rightarrow$  dicht. Später:  $X \xrightarrow{\varphi} Y$  **dominant**, gdw.  $\text{im}(\varphi) \subseteq Y$  dicht) induziert in funktorieller Weise eine Abbildung  $K(Y) \hookrightarrow K(X)$ .

**Satz 1.48** (orig. 45). Sei  $X$  eine Prävarietät,  $V \subseteq U \subseteq X$  offen. Dann gilt:

(i)  $\mathcal{O}_X(U) \subseteq K(X)$  ist  $k$ -Unteralgebra.

(ii)  $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(V)$  ist Inklusion von Teilmengen des Funktionenkörpers  $K(X)$ .

(iii) Insbesondere gilt für  $U, V \subseteq X$  offen:

$$\mathcal{O}_X(U \cup V) = \mathcal{O}_X(U) \cap \mathcal{O}_X(V).$$

*Beweis.*

(ii) Sei  $\mathcal{O}_X(X) \ni f : X \rightarrow k$ . Dann ist  $f^{-1}(0) \subseteq X$  abgeschlossen, da für  $W \subseteq X$  affin-offen beliebig gilt, dass

$$f^{-1}(0) \cap W = V(f|_W).$$

Dazu macht man sich klar: „abgeschlossen“ ist eine lokale Eigenschaft, affin-offene  $W$  bilden eine Basis der Topologie.

$\Rightarrow \mathcal{O}_X(U) \hookrightarrow \mathcal{O}_X(V)$ ,  $f \mapsto f|_V$  ist injektiv für  $\emptyset \neq V \subseteq U \subseteq X$  offen.

$\Rightarrow V \subseteq f^{-1}(0)$

$\Rightarrow f^{-1}(0) = U$

$\Rightarrow f \equiv 0$ .

(i)  $U \supseteq W$  affin-offene Untervarietät.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(W) & \hookrightarrow & K(W) \text{ } k\text{-Algebren} \\ \uparrow & \nearrow & \\ \mathcal{O}_X(U) & & \end{array}$$

(iii) Wir haben folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{O}_X(U) & \\ \nearrow & & \searrow \\ \mathcal{O}_X(U \cup V) & & \mathcal{O}_X(U \cap V) \\ \searrow & & \nearrow \\ & \mathcal{O}_X(V) & \end{array}$$

Nach dem Verklebungssaxiom ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(U \cup V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{O}_X(V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U \cap V)$$

$$f \longmapsto (f|_U, f|_V)$$

$$(g, h) \longmapsto g|_{U \cap V} - h|_{U \cap V}$$

exakt.

□

## 1.21 Abgeschlossene Unterprävarietäten

Sei  $X$  eine Prävarietät,  $Z \subseteq X$  abgeschlossen und irreduzibel.

**Ziel.**  $(Z, \mathcal{O}'_Z)$  Raum von Funktionen erklären. Definiere dazu für  $U \subseteq Z$  offen:

$$\mathcal{O}'_Z(U) := \{f \in \text{Abb}(U, k) \mid \forall x \in U \exists x \in V \subseteq X \text{ offen, } g \in \mathcal{O}_X(V) \text{ mit } f|_{U \cap V} = g|_{U \cap V}\}$$

Damit ist  $(Z, \mathcal{O}'_Z)$  Raum von Funktionen (klar!) mit  $\mathcal{O}'_X = \mathcal{O}_X$ .

**Lemma 1.49** (orig. 46). *Seien  $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  eine irreduzible, affin-algebraische Menge und  $Z \subseteq X$  ein irreduzibler abgeschlossener Teilraum. Dann ist  $(Z, \mathcal{O}_Z) = (Z, \mathcal{O}'_Z)$ .*

Bezeichne ab jetzt stets  $\mathcal{O}_Z$  für  $\mathcal{O}'_Z$ .

*Beweis.*  $Z \subseteq X$  ist in beiden Fällen mit der Teilraumtopologie ausgestattet! Ferner wissen wir, dass der Morphismus  $Z \hookrightarrow X$  affin-algebraischer Mengen einen Morphismus  $(Z, \mathcal{O}_Z) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$  von Prävarietäten induziert. Nach Definition von  $\mathcal{O}'$  folgt dann:

$$\mathcal{O}'_Z(U) \subseteq \mathcal{O}_Z(U) \quad \text{für } U \subseteq Z \text{ offen, denn:}$$

Ist  $f \in \mathcal{O}'_Z(U)$  und  $x \in U$  so existieren nach Definition eine offene Umgebung  $x \in V_x \subseteq X$  und ein  $g \in \mathcal{O}_X(V_x)$  d.d.  $f|_{U \cap V_x} = g|_{U \cap V_x}$ . Damit gilt  $g|_{Z \cap V_x} \in \mathcal{O}_Z(Z \cap V_x)$ . Mit dem Verklebungssaxiom erhalten wir also  $f \in \mathcal{O}_Z(U)$ .

Sei  $f \in \mathcal{O}_Z(U)$  und  $x \in U$  beliebig. Es folgt:  $\exists h \in \Gamma(Z)$  mit  $x \in D(h) \subseteq U$  und

$$f|_{D(h)} = \frac{g}{h^n} \in \Gamma(Z)_h = \mathcal{O}_Z(D(h))$$

für  $n \geq 0$  und  $g \in \Gamma(Z)$  geeignet. Lifte  $g, h \in \Gamma(Z) \leftarrow \Gamma(X)$  zu  $\bar{g}, \bar{h} \in \Gamma(X)$  und setze  $V := D(\bar{h}) \subseteq X$ .

$$\Rightarrow x \in V, \frac{\bar{g}}{\bar{h}^n} \in \mathcal{O}_X(D(\bar{h})) \text{ und } f|_{U \cap V} = \frac{\bar{g}}{\bar{h}^n}|_{U \cap V}.$$

$$\Rightarrow f \in \mathcal{O}'_Z(U). \quad \square$$

**Korollar 1.50** (orig. 47). *Wenn  $X$  eine Prävarietät ist, und  $Z \subseteq X$  irreduzibel und abgeschlossen, dann ist  $(Z, \mathcal{O}_Z)$  ebenfalls eine Prävarietät.*

*Beweis.* Es ist  $X = \bigcup_i X_i$  für eine endliche affin-offene Überdeckung  $(X_i)_i$ . Damit ist

$$Z = \bigcup_i (Z \cap X_i) := \bigcup_i Z_i$$

mit  $(Z_i, \mathcal{O}_{Z_i})$  affine Varietät nach Lemma 1.49.  $\square$

## Beispiele (Projektiver Raum und projektive Varietäten)

### 1.22 Homogene Polynome

**Definition 1.51** (orig. 48). Ein Polynom  $f \in k[X_0, \dots, X_n]$  heißt **homogen vom Grad**  $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , falls  $f$  die Summe von Monomen von Grad  $d$  ist. (Insbesondere ist für jedes  $d$  das Nullpolynom homogen von Grad  $d$ .)

Es bezeichne  $k[X_0, \dots, X_n]_d$  den  $k$ -Untervektorraum der Polynome **homogen vom Grad**  $d$ ,  $k[X_0, \dots, X_n]_{\leq n}$  den  $k$ -Untervektorraum **aller Polynome vom Grad**  $\leq n$ .

*Bemerkung 1.52* (orig. 49). Da  $\#k$  unendlich ist, ist  $f$  homogen vom Grad  $d \Leftrightarrow f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, \dots, x_n) \quad \forall x_0, \dots, x_n \in k, \lambda \in k^\times$ .

Es gilt:  $k[X_0, \dots, X_n] = \bigoplus_{d \geq 0} k[X_0, \dots, X_n]_d$ .

**Lemma 1.53** (orig. 50). Für  $i \in \{0, \dots, n\}$  und  $d \geq 0$  haben wir bijektive  $k$ -lineare Abbildungen

$$\begin{aligned} k[X_0, \dots, X_n]_d &\longrightarrow k[T_0, \dots, \hat{T}_i, \dots, T_n]_{\leq d} \\ f &\longmapsto f(T_0, \dots, \underbrace{1}_i, \dots, T_n) \\ X_i^d g \left( \frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{\hat{X}_i}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i} \right) &\longleftarrow \Psi_i^d g \end{aligned}$$

**Dehomogenisierung** bzw. **Homogenisierung**.

*Beweis.* Es reicht,  $\Psi_i^d \circ \Phi_i^d = \text{id}$ ,  $\Phi_i^d \circ \Psi_i^d = \text{id}$  auf Monomen nachzurechnen, da alle Abbildungen  $k$ -linear sind.  $\square$

Oft ist es nützlich,  $k[T_0, \dots, \hat{T}_i, \dots, T_n]$  mit  $k\left[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{\hat{X}_i}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}\right] \hookrightarrow k(X_0, \dots, X_n)$  zu identifizieren.

## 1.23 Definition des projektiven Raumes

Seien  $X_1 = X_2 = \mathbb{A}^1$ ,  $\tilde{U}_1 \subseteq X_1, \tilde{U}_2 \subseteq X_2$  mit  $\tilde{U}_1 = \tilde{U}_2 = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ .

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1 &\xrightarrow{\sim} \tilde{U}_2 \\ x &\longmapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Verkleben von  $X_1$  und  $X_2$  entlang  $\tilde{U}_1 \xrightarrow{\sim} \tilde{U}_2$  liefert die **projektive Gerade**

$$\mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 \cup \{\infty\} = U_1 \cup U_2.$$

Allgemein:

$$\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i = \mathbb{A}^n \cup \mathbb{P}^{n-1} = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \dots \sqcup \mathbb{A}^1 \sqcup \mathbb{A}^0$$

**Idee:**  $\mathbb{P}^2 \supseteq \mathbb{A}^2$ : Zwei verschiedene Geraden in  $\mathbb{P}^2$  schneiden sich genau in einem Punkt.

**Als Menge:**

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^n(k) &:= \{\text{Ursprungsgeraden in } k^{n+1}\} = \{1\text{-dim. } k\text{-Unterräume}\} \\ &= (k^{n+1} \setminus \{0\}) / k^\times \end{aligned}$$

Man schreibt meist kurz  $(x_0 : \dots : x_n)$  für den Repräsentanten der Klasse von  $\langle (x_0, \dots, x_n) \rangle_k$  und nennt  $(x_0 : \dots : x_n)$  **homogene Koordinaten** auf  $\mathbb{P}^n$ .

*Äquivalenzrelation:*

$$(x_0, \dots, x_n) \sim (x'_0, \dots, x'_n) \Leftrightarrow \exists \lambda \in k^\times \text{ mit } x_i = \lambda x'_i \ \forall i.$$

Die Mengen

$$U_i := \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^n(k), \quad 0 \leq i \leq n$$

sind wohldefiniert und überdecken  $\mathbb{P}^n(k)$ :

$$\mathbb{P}^n(k) = \bigcup_{i=0}^n U_i$$

Weiter hat man eine Bijektion

$$\begin{aligned} U_i &\xrightarrow{\kappa_i} \mathbb{A}^n(k) \\ (x_0 : \dots : x_n) &\longmapsto \left( \frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\hat{x}_i}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right) \\ (t_0 : \dots : t_{i-1} : 1 : t_{i+1} : \dots : t_n) &\longleftarrow (t_0, \dots, \hat{t}_i, \dots, t_n) \end{aligned}$$

Über die  $\kappa_i$  definiert man nun eine Topologie auf  $\mathbb{P}^n(k)$  durch:

$U \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  ist genau dann offen, wenn  $\kappa_i(U \cap U_i) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  offen ist für alle  $i$ .



Es gilt:

$$U_i \cap U_j = D(T_j) \subseteq U_i \text{ offen, } i \neq j$$

wenn auf  $U_i \cong \mathbb{A}^n$  die Koordinaten  $T_0, \dots, \hat{T}_i, \dots, T_n$  verwendet werden. Damit wird  $\mathbb{P}^n(k)$  zu einem topologischen Raum, der durch die  $U_i$ ,  $0 \leq i \leq n$ , offen überdeckt wird.

### 1.23.1 Reguläre Funktionen

Sei  $U \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  eine beliebige offene Teilmenge. Die regulären Funktionen auf  $U$  sind definiert als

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U) := \{f \in \text{Abb}(U, k) \mid f|_{U \cap U_i} \in \mathcal{O}_{U_i}(U \cap U_i)\} \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}$$

wobei wir die  $U_i$  via  $\kappa_i$  implizit als Raum mit Funktionen auffassen. Insgesamt erhalten wir:

$$\mathbb{P}^n(k) = (\mathbb{P}^n(k), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$$

als Raum mit Funktionen.

**Satz 1.54** (orig 51). Für  $U \subseteq \mathbb{P}^n$  offen gilt:  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U) = \{f : U \rightarrow k \mid \forall x \in U: \exists x \in V \subseteq U \text{ offen, } d \geq 0 \text{ und } g, h \in k[X_0, \dots, X_n]_d \text{ homogen vom selben Grad } d, \text{ d.d. } \forall v \in V: h(v) \neq 0 \text{ und } f(v) = \frac{g(v)}{h(v)}\}$

Wohldefiniertheit: Sei  $v = (x_0 : \dots : x_n)$ .

$$f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \frac{g(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n)}{h(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n)} = \frac{\lambda^d g(x_0, \dots, x_n)}{\lambda^d h(x_0, \dots, x_n)} = f(x_0, \dots, x_n)$$

*Beweis.*

„ $\subseteq$ “: Sei  $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U)$ . Dann ist  $f|_{U \cap U_i} \in \mathcal{O}_{U_i}(U \cap U_i)$ . Es folgt:

$$f = \frac{\tilde{g}}{\tilde{h}}, \quad \tilde{g}, \tilde{h} \in k[T_0, \dots, \hat{T}_i, \dots, T_n]$$

Definiere  $d := \max\{\deg(\tilde{g}), \deg(\tilde{h})\}$ . Homogenisiere:

$$g := \psi_i^d(\tilde{g}), \quad h := \psi_i^d(\tilde{h})$$

$\Rightarrow f = \frac{g}{h}$  lokal.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\tilde{g}}{\tilde{h}}(\kappa_i(x)) \\ f((x_0 : \dots : x_n)) &= \frac{\tilde{g}\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\hat{x}_i}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)}{\tilde{h}\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\hat{x}_i}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)} \\ &= \frac{x_i^d \tilde{g}(\dots)}{x_i^d \tilde{h}(\dots)} \\ &= \frac{\psi_i^d(\tilde{g})(\dots)}{\psi_i^d(\tilde{h})(\dots)} = \frac{g}{h}(x_0 : \dots : x_n) \end{aligned}$$

„ $\supseteq$ “: Sei  $f$  in der rechten Menge, fixiere  $i \in \{0, \dots, n\}$ . Nach Voraussetzung ist  $f$  lokal auf  $U \cap U_i$  von der Form  $f = \frac{g}{h}$ ,  $g, h \in k[X_0, \dots, X_n]_d$ ,  $d \geq 0$  geeignet. Definiere:

$$\tilde{g}_i := \frac{g}{X_i^d}, \quad \tilde{h} := \frac{h}{X_i^d} \in k\left[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{\hat{X}_i}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}\right]$$

$\Rightarrow f$  ist lokal von der Form:  $\frac{\tilde{g}}{\tilde{h}}, \tilde{g}, \tilde{h} \in k[T_0, \dots, \hat{T}_i, \dots, T_n]$ .

$\Rightarrow f|_{U \cap U_i} \in \mathcal{O}_{U_i}(U \cap U_i)$ , also  $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U)$ .

□

**Korollar 1.55** (orig. 52). Für  $i \in \{0, \dots, n\}$  induziert

$$U \xrightarrow[\cong]{\kappa_i} \mathbb{A}^n(k)$$

einen Isomorphismus

$$(U_i, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n|_{U_i}}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{A}^n(k)$$

von Räumen mit Funktionen. Insbesondere ist  $\mathbb{P}^n(k)$  eine Prävarietät.

*Beweis.* Zu zeigen:  $\forall U \subseteq U_i$  offen gilt

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(U) = \mathcal{O}_{U_i}(U) = \{f : U \rightarrow k \mid f \in \mathcal{O}_{U_i}(U)\}$$

d.h. auf der rechten Seite muss die Bedingung nur für das fixierte  $i$  überprüft werden. Dies folgt aus dem Beweis von Satz 1.54. □

Damit identifizieren sich die Funktionenkörper

$$K(\mathbb{P}^n(k)) = K(U_i) = k\left(\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}\right)$$

**Satz 1.56** (orig. 53).  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(\mathbb{P}^n(k)) = k$ . Insbesondere ist  $\mathbb{P}^n$  für  $n \geq 1$  **keine** affine Varietät. (Da der  $k$ -Algebra  $A = k$  ja  $\mathbb{A}^0(k) = \{pt\}$  als affine Varietät entspricht.)

*Beweis.*  $k \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(\mathbb{P}^n(k))$  klar, da konstante Funktionen. Nach Satz 1.48 (iii) gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mathbb{P}^n) &= \bigcap_{i=0}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U_i) \subseteq K(\mathbb{P}^n(k)) \\ &= \bigcap_{i=0}^n k[t_0, \dots, \hat{t}_i, \dots, t_n] = k\end{aligned}$$

□

## 1.24 Projektive Varietäten

**Definition 1.57** (orig. 54). Abgeschlossene Unterprävarietäten eines projektiven Raumes  $\mathbb{P}^n(k)$  heißen **projektive Varietäten**.

Vorsicht: für  $x = (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n$ ,  $f \in k[X_0, \dots, X_n]$  ist  $f(x_1, \dots, x_n)$  *nicht* wohldefiniert, da von Repräsentanten abhängig, d.h.  $f$  kann *nicht* als Funktion auf  $\mathbb{P}^n$  aufgefasst werden. Für *homogene* Polynome  $f_1, \dots, f_n \in k[X_0, \dots, X_n]$  (nicht notwendig vom selben Grad) können wir dennoch Verschwindungsmengen definieren:

$$V_+(f_1, \dots, f_n) = \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid f_j(x_0, \dots, x_n) = 0 \ \forall j\}$$

Da  $V_+(f_1, \dots, f_n) \cap U_i = V(\Phi_i(f_1), \dots, \Phi_i(f_n))$  ist  $V_+(f_1, \dots, f_n)$  abgeschlossen in  $\mathbb{P}^n$ . Ist  $V_+(f_1, \dots, f_n)$  irreduzibel, so erhalten wir eine projektive Varietät. In der Tat entstehen alle projektiven Varietäten auf diese Weise, wie der folgende Satz zeigt:

**Satz 1.58** (orig. 55). Sei  $Z \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  eine projektive Varietät. Dann existieren homogene Polynome  $f_1, \dots, f_n \in k[X_0, \dots, X_n]$ , so dass

$$Z = V_+(f_1, \dots, f_n)$$

*gilt.*

*Beweis.* Betrachte:

$f| : f^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i$  ist Morphismus von Prävarietäten. Dann ist  $f$  selbst ein Morphismus von Prävarietäten: *lokal* ist die Aussage klar, *global* verklebt man.

$$\overline{Y} := Y \cup \{0\}, \text{ der Abschluss von } Y \text{ in } \mathbb{A}^{n+1}(k)$$

$$\mathfrak{a} := I(\overline{Y}) \subseteq k[X_0, \dots, X_n]$$

Behauptung:  $\mathfrak{a}$  wird von homogenen Polynomen erzeugt. *Denn:* Sei für  $g \in \mathfrak{a}$ ,  $g = \sum_d g_d$  die Zerlegung in homogene Bestandteile vom Grad  $d$ .  $\overline{Y}$  ist Vereinigung von Ursprungsgeraden im  $k^{n+1}$ , d.h.  $\forall \lambda \in k^\times$  gilt:

$$g(x_0, \dots, x_n) = 0 \Leftrightarrow g(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = 0$$

Beweis durch Widerspruch: *Angenommen* nicht alle  $g_d$  liegen in  $\mathfrak{a}$ .

$$\Rightarrow \exists (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^{n+1}(k), \text{ so dass } g(x_0, \dots, x_n) = 0, \text{ aber } g_{d_0}(x_0, \dots, x_n) \neq 0.$$

$$\Rightarrow 0 \neq \sum_d g_d(x_0, \dots, x_n) T^d \in k[T]$$

$$\Rightarrow \exists \lambda \in k^\times : 0 \neq \sum_d g_d(x_0, \dots, x_n) \lambda^d = \sum_d g_d(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = g(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = 0. \text{ Wider-}$$

spruch.

$\Rightarrow \mathfrak{a} = (f_1, \dots, f_m)$ , mit  $f_j$  homogen, also  $Z = V_+(f_1, \dots, f_m)$ .

$$\begin{aligned} Z \ni (x_0 : \dots : x_n) &\Leftrightarrow (\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) \in \bar{Y} \quad \forall \lambda \in k^\times \text{ und } \neq 0 \\ &\Leftrightarrow f_i(x_0, \dots, x_n) = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n, \quad (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{P}^n \end{aligned}$$

□

Zu Bemerkung 1.52:

Nach Satz 1.54 und Definition von  $\mathcal{O}'_Z$  folgt: Ist  $X$  eine projektive Varietät und  $U \subseteq X$  offen, so erhalten wir

(†)  $\mathcal{O}_X(U) = \{f : U \rightarrow k \mid \forall x \in U \exists x \in V \underset{\text{offen}}{\subseteq} U, \quad g, h \in k[X_0, \dots, X_n] \text{ homogen vom gleichen Grad mit } h(v) \neq 0, \quad f(v) = \frac{g(v)}{h(v)}, \quad \forall v \in V\}$ .

Insbesondere gilt:

**Satz 1.59** (orig. 56). *Seien  $V \subseteq \mathbb{P}^m(k)$ ,  $W \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  projektive Varietäten und*

$$\phi : V \longrightarrow W$$

*eine Abbildung. Dann ist  $\phi$  eine Morphismus genau dann, wenn zu jedem  $x \in V$  eine offene Umgebung  $x \in U_x \subseteq V$  und homogene Polynome  $f_0, \dots, f_n \in k[X_0, \dots, X_m]$  vom selben Grad existieren mit*

$$\phi(y) = (f_0(y), \dots, f_n(y)) \quad \forall y \in U_x$$

*Beweis.*

• “ $\Rightarrow$ ”: Übung.

• “ $\Leftarrow$ ”:

(i)  $\phi$  stetig: Sei  $Z \subseteq W$  abgeschlossen. Ohne Einschränkung  $Z = V_+(g) \cap W$  für ein homogenes Polynom  $g$ . Dann berechnet sich das Urbild

$$\phi^{-1}(Z) = V_+(g \circ \phi) \cap V.$$

Auf  $U_x$ ,  $x \in V$ , ist  $g \circ \phi$  als homogenes Polynom in  $X_0, \dots, X_n$  gegeben.

$\Rightarrow V(g \circ \phi) \cap U_x = \phi^{-1}(Z) \cap U_x$  abgeschlossen in  $U_x$  für alle  $x$ .

$\Rightarrow \phi^{-1}(Z) \subseteq V$  abgeschlossen.

(ii) Zu zeigen:  $\forall W' \subseteq W$  offen,  $g \in \mathcal{O}_W(W')$  ist  $g \circ \phi \in \mathcal{O}_V(\phi^{-1}(W'))$ .

(†)  $\Rightarrow$  Es ex. eine offene Umgebung  $W_y$  in  $W'$  mit  $g = \frac{h}{q}$  auf  $W_y$ ,  $h, q$  homogen vom Grad  $d$ .

$\Rightarrow \phi|_{U_x \cap \phi^{-1}(W_y) := \tilde{U}_x}$  ist auch von dieser Gestalt, also  $\frac{h(f_0, \dots, f_n)}{q(f_0, \dots, f_n)} = g \circ \phi|_{\tilde{U}_x} \in \mathcal{O}_V(\tilde{U}_x)$ .

Verklebungssaxiom  $\Rightarrow g \circ \phi \in \mathcal{O}_V(\phi^{-1}(V))$ .

□

## 1.25 Koordinatenwechsel in $\mathbb{P}^n$

Sei  $A = (a_{ij}) \in GL_{n+1}(k)$  eine invertierbare, lineare Abbildung  $k^{n+1} \rightarrow k^{n+1}$ . Dann überführt  $A$  Ursprungsgeraden in Ursprungsgeraden, respektiert also die Äquivalenzrelation des projektiven Raumes. Wir erhalten Abbildungen:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^n(k) &\xrightarrow{\phi_A} \mathbb{P}^n(k) \\ (x_0 : \dots : x_n) &\mapsto \left( \sum_{i=0}^n a_{0i}x_i : \dots : \sum_{i=0}^n a_{ni}x_i \right), \end{aligned}$$

die nach Satz 1.59 ein Morphismus von Prävarietäten ist. Offensichtlich gilt für  $A, B \in GL_{n+1}(k)$ :

$$\varphi_{A \cdot B} = \varphi_A \circ \varphi_B$$

d.h.  $\varphi_A$  ist insbesondere wieder ein Isomorphismus, **der durch  $A$  bestimmte Koordinatenwechsel des  $\mathbb{P}^n(k)$** . Es bezeichne  $\text{Aut}(\mathbb{P}^n(k))$  die Gruppe der Automorphismen von  $\mathbb{P}^n(k)$ . Es folgt:

$$\varphi_- : GL_{n+1}(k) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{P}^n(k)), A \mapsto \varphi_A$$

ist ein Gruppenhomomorphismus mit

$$Z := \ker \varphi_- = \{\lambda E_{n+1}, \mid \lambda \in k^\times\}$$

der Untergruppe der Skalarmatrizen. *Später:*

$$PGL_{n+1}(k) := GL_{n+1}(k)/Z \xrightarrow{\sim} \text{Aut}(\mathbb{P}^n(k)), \quad Z \cong k^\times$$

die **projektive lineare Gruppe**.

**Beispiel.** Sei  $n = 1$ . Es ist

$$\begin{aligned} PGL_2(\mathbb{C}) &= \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\ (z : w) & \mapsto (az + bw, cz + dw) \end{array} \right\} \\ &\leftrightarrow \text{Möbiustransformationen } z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \end{aligned}$$

## 1.26 Lineare Unterräume von $\mathbb{P}^n$

Sei  $\varphi : k^{m+1} \rightarrow k^{n+1}$  ein *injektiver* Homomorphismus von  $k$ -Vektorräumen.  $\varphi$  induziert eine injektive Abbildung

$$\iota : \mathbb{P}^m(k) \rightarrow \mathbb{P}^n(k)$$

die nach Satz 1.59 ein Morphismus von Prävarietäten ist. Das Bild von  $\iota$  ist eine abgeschlossene Untervarietät. Ist  $A = (a_{ij}) \in M_{l \times (n+1)}$  mit  $\text{im}(\varphi) = \ker(k^{n+1} \xrightarrow{A} k^l)$  und

$$f_i := \sum_{j=0}^n a_{ij} X_j \in k[X_0, \dots, X_n], \text{ für } i = 1, \dots, l$$

so identifiziert  $\iota$  den projektiven Raum  $\mathbb{P}^m(k)$  mit  $V_+(f_1, \dots, f_l) \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ . (Die Abbildung  $\iota : \mathbb{P}^m(k) \rightarrow V_+(f_1, \dots, f_l)$  ist ein Isomorphismus von Prävarietäten, mit Umkehrabbildung induziert von  $\varphi^{-1} : \varphi(k^{m+1}) \rightarrow k^{m+1}$ )

**Beispiel.**  $\mathbb{P}^m = V_+(X_{m+1}, \dots, X_n) \subseteq \mathbb{P}^n$ . Solche Unterräume heißen **lineare Unterräume** (der Dimension  $m$ ).

$m = 0$ : Punkte

$m = 1$ : Geraden

$m = 2$ : Ebenen

$m = n - 1$ : Hyperebenen in  $\mathbb{P}^n(k)$ .

- Zu zwei Punkten  $p \neq q \in \mathbb{P}^n(k)$  existiert genau eine gerade  $\overline{pq}$  in  $\mathbb{P}^n(k)$ , die  $p$  und  $q$  enthält, da zu zwei verschiedenen Ursprungsgeraden im  $k^{n+1}$  genau eine Ebene (in  $k^{n+1}$ ) existiert, die beide Geraden enthält.
- Je zwei verschiedene Geraden in  $\mathbb{P}^2(k)$  schneiden sich in genau einem Punkt, da Geraden in  $\mathbb{P}^2$  Ebenen in  $k^3$  entsprechen, und zwei Ebenen sich dort genau in einer Geraden, d.h. einem Punkt des  $\mathbb{P}^2$ , schneiden. Dimensionsformel (lineare Algebra):

$$\dim_k E_1 \cap E_2 = - \underbrace{\dim_k(E_1 + E_2)}_3 + \underbrace{\dim_k E_1}_2 + \underbrace{\dim_k E_2}_2 = 1$$

*Später:* Verallgemeinerung durch den *Satz von Bézout* für allgemeine Unterprävarietäten  $V_+(f)$ .

## 1.27 Kegel

Sei  $H \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  Hyperebene,  $p \in \mathbb{P}^n(k) \setminus H$ ,  $X \subseteq H$  abgeschlossene Unterprävarietät.

$$\overline{X, p} := \bigcup_{q \in X} \overline{qp}$$

heißt **Kegel von  $X$  über  $p$** , es handelt sich um eine abgeschlossenen Untervarietät von  $\mathbb{P}^n(k)$ . Ohne Einschränkung:  $H = V_+(X_n)$ ,  $p = (0 : \dots : 0 : 1)$  (geeigneter Koordinatenwechsel)  
Für

$$\begin{aligned} X = V_+(f_1, \dots, f_m) &\subseteq \mathbb{P}^{n-1}(k) = H, \quad f_i \in k[X_0, \dots, X_{n-1}] \\ \Rightarrow \overline{X, p} = V_+(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_m) &\subseteq \mathbb{P}^n(k), \quad \tilde{f}_i \in k[X_0, \dots, X_n] \end{aligned}$$

Verallgemeinerung. Sei  $\mathbb{P}^m(k) \cong \Lambda \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  linearer Unterraum,  $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  komplementärer linearer Unterraum, d.h.  $\Lambda \cap V = \emptyset$  und  $\mathbb{P}^n(k)$  ist der *kleinste* lineare Unterraum von  $\mathbb{P}^n(k)$ , der  $\Lambda$  und  $V$  enthält. Für  $X \subseteq V$  eine abgeschlossene Unterprävarietät definiert man den

**Kegel von  $X$  über  $\Lambda$**  durch  $\overline{X, \Lambda} := \bigcup_{q \in X} \overline{q, \Lambda}$ , wobei der von  $q$  und  $\Lambda$  aufgespannte lineare Unterraum  $\overline{q, \Lambda}$  der kleinste Unterraum sei, der  $q$  und  $\Lambda$  enthält.



## 1.28 Quadriken

Sei in diesem Abschnitt  $\text{char}(k) \neq 2$ .

**Definition 1.60** (orig. 57). Eine abgeschlossene Unterprävarietät  $Q \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  von der Form  $V_+(q)$ ,  $0 \neq q \in k[X_0, \dots, X_n]_2$  heißt **Quadrik**.

$$Q = V_+(q)$$

Zur quadratischen Form  $q$  gehört eine assoziierte Bilinearform  $\beta$  auf  $k^{n+1}$  (vgl. lineare Algebra),

$$\beta(v, w) := \frac{1}{2}(q(v+w) - q(v) - q(w)), \quad v, w \in k^{n+1}$$

Es gibt eine Basis von  $k^{n+1}$ , sodass die Strukturmatrix  $B$  von  $\beta$  die Gestalt

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

hat, d.h. Koordinatenwechsel zur Basiswechselmatrix liefert einen Isomorphismus

$$Q \xrightarrow{\sim} V_+(X_0^2 + \dots + X_{r-1}^2), \quad r = \text{rk } B$$

**Lemma 1.61** (orig. 58). (i)  $X_0^2 + \dots + X_{r-1}^2$  ist irreduzibel  $\iff r > 2$

(ii)  $V_+(X_0^2 + \dots + X_{r-1}^2)$  ist irreduzibel  $\iff r \neq 2$

*Beweis.* •  $r = 0, 1 : X_0^2 = X_0 \cdot X_0 \Rightarrow V_+(X_0^2) = V_+(X_0)$  irreduzibel

•  $r = 2 : X_0^2 + X_1^2 = (X_0 + i \cdot X_1) \cdot (X_0 - i \cdot X_1)$  für  $i = \sqrt{-1}$

•  $r > 2$  : Angenommen  $\sum_i a_i X_i \cdot \sum_j b_j X_j = X_0^2 + \dots + X_{r-1}^2$ .

Ausmultiplizieren + Koeffizientenvergleich  $\Rightarrow$  Widerspruch.

□

**Satz 1.62** (orig. 59). Ist  $r \neq s$ , so sind  $V_+(T_0^2 + \dots + T_{r-1}^2)$  und  $V_+(T_0^2 + \dots + T_{s-1}^2)$  nicht isomorph.

*Beweis.* Später: Es gibt keinen Koordinatenwechsel von  $\mathbb{P}^n(k)$ , der die beiden Mengen miteinander identifiziert, damit auch kein Automorphismus von  $\mathbb{P}^n(k)$ . □

**Definition 1.63.** Eine Quadrik  $Q \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  mit  $Q \cong V_+(T_0^2 + \dots + T_{r-1}^2)$ ,  $r \geq 1$ , hat **Dimension**  $n - 1$  und den **Rang**  $r$ . (nach Satz eindeutig!)

**Korollar 1.64** (orig. 61). *Zwei Quadriken  $Q_1$  und  $Q_2$  sind genau dann isomorph als Prävarietäten, wenn sie dieselbe Dimension und denselben Rang haben.*

*Beweis.*

„ $\Leftarrow$ “  $Q_1 \cong V_+(T_0^2 + \cdots + T_{n-1}^2) \cong Q_2$  in dem selben  $\mathbb{P}^n$ .

„ $\Rightarrow$ “ Für  $Q \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  berechne  $K(Q)$ . Ohne Einschränkung  $Q = V_+(X_0^2 + \cdots + X_{n-1}^2)$ .

- (i)  $r = 1$ :  $V_+(X_0^2) = V_+(X_0) = \mathbb{P}^{n-1}(k)$ :  $K(Q) = k(T_1, \dots, T_{n-1})$ .
- (ii)  $r = 2$ : reduzibel: Zerlegung in zwei Hyperebenen  $Z \cong \mathbb{P}^{n-1}$   
 $\Rightarrow K(Z) \cong k(T_1, \dots, T_{n-1})$ .
- (iii)  $r > 2$ :  $U = V(1 + T_1^2 + \cdots + T_{n-1}^2) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  ist nichtleere offene affine Teilmenge von  $Q$ .  
 $\Rightarrow K(Q) = K(U) = \text{Quot}(\Gamma(U)) = \text{Quot}(k[T_1, \dots, T_n]/(1 + T_1^2 + \cdots + T_{n-1}^2))$   
 $\Rightarrow \text{trgrad}_k K(Q) = n - 1$ .

□

**Beispiel 1.65.**  $Q$  Quadrik in  $\mathbb{P}^n$  (vgl. Joe Harris, Seite 34).

(i) In  $\mathbb{P}^1(k)$ .

- Rang 2: 2 Punkte, reduzibel.
- Rang 1: 1 Punkt (Doppelpunkt).

(ii) In  $\mathbb{P}^2(k)$ .

- Rang 3: Glatter Kegel  $\cong \mathbb{P}^1(k)$ .  $X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 = 0$
- Rang 2: 2 verschiedene Geraden, reduzibel.
- Rang 1: (Doppel)gerade.

(iii) In  $\mathbb{P}^3(k)$ .

- Rang 1: Doppelebene (2-dimensionaler linearer Unterraum)
- Rang 2: (insert image)
- Rang 3: (insert image)
- Rang 4: (insert image)

Die Quadrik  $Q \subseteq \mathbb{P}^n(k)$  heißt **glatt**, falls  $r = \overline{n+1}$ , d.h. falls die Matrix  $B$  zu  $q$  maximalen Rang hat. Für  $\text{rk}(Q) > 3$ ,  $\dim(Q) = d$ , ist  $Q \cong \widetilde{\widetilde{Q}} \wedge$  Kegel über einer **glatten** Quadrik  $\widetilde{Q}$ , da Dimension  $r - 2$  bzgl. einer  $(d - r + 2)$ -dimensionalen Unterräumen 1.

- $r = 1, 2$  ausgeartet.

- $r = 1$ .  $Q = V_+(X_0^2) = V_+(X_0)$  Hyperebenen in  $\mathbb{P}^n(k)$ . Der Unterschied zwischen  $V_+(X_0^2)$  und  $V_+(X_0)$  ist für eine projektive Varietät  $Q$  nicht sichtbar, jedoch in der Theorie der Schemata unterscheidbar!
- $r = 2$ .  $Q = V_+(X_0^2 + X_1^2)$  reduzibel, d.h. keine Prävarietät in unserem Sinne! Auch hier werden uns Schemata später helfen.

$$Q = V_+(X_0^2 + X_1^2 + \cdots + X_{n-1}^2) \subseteq \mathbb{P}^{d+1}, r \leq d+2$$

$$\tilde{Q} = V_+(X_0^2 + \cdots + X_{n-1}^2) \subseteq \mathbb{P}^{r-1} \text{ glatt.}$$

$$A = \overline{\mathbb{P}^{d+1-v}} = V_+(X_0, \dots, X_{n-1}) \subseteq \mathbb{P}^{d+1}$$

$$Q = \overline{\tilde{Q}}, \Lambda$$



## Kapitel 2

### Das Ringspektrum

*Bisher:*

Prävarietäten<sub>/k</sub> sind Verklebungen von *affinen Varietäten*<sub>/k</sub> mit  $k$  algebraisch abgeschlossen. Dabei sind affine Varietäten<sub>/k</sub> äquivalent zu *endlich erzeugten, integren  $k$ -Algebren*, wobei die Punkte der Varietäten den maximalen Idealen der  $k$ -Algebren entsprechen.

**Ziel:** Schemata sind Verklebungen von *affinen Schemata*.

Dabei sollen affine Schemata äquivalent zu *beliebigen* (kommutativen) Ringen sein.

Die Punkte affiner Schemata werden den *Primidealen* der zugehörigen Ringe entsprechen.

**Methodik:** Wir wollen einen Funktor:

$$A \longmapsto (\underbrace{\operatorname{Spec}(A)}_{\text{top. Raum}}, \underbrace{\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}}_{\text{Garbe}})$$

$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}$  ist dabei „Garbe von Funktionen“ und verallgemeinert „Systeme von Funktionen“ für Räume mit Funktionen.

Wir erhalten insbesondere affine Schemata für  $k$ -Algebren über beliebigen Körpern  $k$ !

Grund für den Übergang zu Primidealen:

Für einen Ringhomomorphismus  $\varphi : A \rightarrow B$ , und ein maximales Ideal  $\mathfrak{m} \subseteq B$  ist  $\mathfrak{m}^c := \varphi^{-1}(\mathfrak{m})$  im Allgemeinen **kein** maximales Ideal von  $A$ . Wir erhalten in dieser Allgemeinheit also keinen Funktor auf den Maximalspektralen, wie bisher.

## Das Ringspektrum als topologischer Raum

### 2.1 Definition von $\operatorname{Spec}(A)$

Sei  $A$  stets ein kommutativer Ring.  $\operatorname{Spec}(A) := \{\mathfrak{p} \trianglelefteq A \mid \mathfrak{p} \text{ prim}\}$ .

Für  $M \subseteq A$  definiert man

$$\begin{aligned} V(M) &:= V_A(M) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid M \subseteq \mathfrak{p}\} = V(\langle M \rangle_A) \\ V(f) &:= V(\{f\}) \text{ für } f \in A \end{aligned}$$

**Lemma 2.1.** *Es ist*

$$\begin{aligned} \{\text{Ideale in } A\} &\longrightarrow \{\text{Teilmengen in } \operatorname{Spec}(A)\} \\ \mathfrak{a} &\longmapsto V(\mathfrak{a}) \end{aligned}$$

*eine inklusionsumkehrende Abbildung. Weiter gilt:*

$$(i) \quad V(0) = \operatorname{Spec}(A), \quad V(1) = \emptyset.$$

$$(ii) \quad V\left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right) = V\left(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right) = \bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i)$$

$$(iii) \quad V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}') = V(\mathfrak{a}\mathfrak{a}') = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{a}')$$

*Beweis.*

- (1), (2) klar.
- (3).  $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}' \supseteq \mathfrak{a}\mathfrak{a}' \Rightarrow \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}\mathfrak{a}'$ .  
 $\mathfrak{p} \text{ prim} \Rightarrow \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a} \text{ oder } \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}'$ .  
 $\Rightarrow \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}'$

□

**Definition 2.2.**  $\text{Spec}(A)$  mit der Topologie, dessen abgeschlossene Mengen gerade die Mengen der Form  $V(\mathfrak{a})$ ,  $\mathfrak{a} \trianglelefteq A$  ein Ideal sind, heißt das **(Prim)Spektrum von  $A$**  (mit der Zariski-Topologie).

$$x \in \text{Spec}(A) \leftrightarrow \mathfrak{p}_x \trianglelefteq A \text{ prim}$$

$$Y \subseteq \text{Spec}(A), \quad I(Y) := \bigcap_{y \in Y} \mathfrak{p}_y$$

$I(-)$  ist inklusionumkehrend,  $I(\emptyset) = A$ .

**Satz 2.3.** Seien  $\mathfrak{a} \trianglelefteq A$  ein Ideal und  $Y \subseteq \text{Spec}(A)$  eine Teilmenge. Dann gilt:

- (i)  $\text{rad } I(Y) = I(Y)$ ,  $V(\mathfrak{a}) = V(\text{rad } \mathfrak{a})$
- (ii)  $I(V(\mathfrak{a})) = \text{rad}(\mathfrak{a})$ ,  $V(I(Y)) = \overline{Y}$  (Abschluss in  $\text{Spec}(A)$ ).
- (iii) Wir haben eine 1:1-Korrespondenz:

$$\{\mathfrak{a} \trianglelefteq A \mid \mathfrak{a} = \text{rad } \mathfrak{a}\} \longrightarrow \{\text{abg. Teilmengen } Y \text{ in } \text{Spec}(A)\}$$

*Beweis.*

$$(i) \quad V(\mathfrak{a}) = V(\text{rad } \mathfrak{a}).$$

- „ $\supseteq$ “. Klar, da  $\text{rad } \mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{a}$ .
- „ $\subseteq$ “. Aus  $f^r \in \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$  folgt  $f \in \mathfrak{p}$ , da  $\mathfrak{p}$  prim, also  $\text{rad } \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ .

$$(ii) \quad \text{rad } \mathfrak{a} = \bigcap_{x \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}_x = IV(\mathfrak{a}). \text{ Es ist:}$$

$$V(\mathfrak{b}) \supseteq Y \Leftrightarrow \forall \mathfrak{p} \in Y : \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{b}$$

$$\Leftrightarrow I(Y) \supseteq \mathfrak{b}.$$

Damit ist  $V(I(Y))$  die kleinste abgeschlossene Teilmenge, die  $Y$  umfasst, d.h.  $V(I(Y)) = \overline{Y}$ .

$$(iii) \quad \text{Klar.}$$

□

## 2.2 Topologische Eigenschaften von $\text{Spec}(A)$

Definiere  $D(f) := D_A(f) := \text{Spec}(A) \setminus V(f) = \{x \in \text{Spec } A \mid f \notin \mathfrak{p}_x\}$ ,

$$\begin{aligned} \text{ev}_x : A &\longrightarrow A/\mathfrak{p}_x \subseteq \kappa_x(A) := \text{Quot}(A/\mathfrak{p}_x) \\ f &\longmapsto f(x) := f(\mathfrak{p}_x) := f \pmod{\mathfrak{p}_x} \end{aligned}$$

Für  $x \in D(f)$  gilt dann  $f(x) = \text{ev}_x(f) \neq 0$ .

Mengen der Form  $D(f)$ ,  $f \in A$  heißen **(standard) prinzipal offene Mengen**. Man hat:

$$\begin{aligned} D(0) &= \emptyset, \quad D(1) = \text{Spec}(A) = D(u), \quad u \in A^\times \\ D(f) \cap D(g) &= D(fg) \end{aligned}$$

**Lemma 2.4.** Für  $f_i \in A, i \in I, g \in A$  gilt:

$$\begin{aligned} D(g) \subseteq \bigcup_{i \in I} D(f_i) &\Leftrightarrow g^n \in \mathfrak{a} = (f_i, i \in I) \text{ für } n \in \mathbb{N} \text{ geeignet} \\ &\Leftrightarrow g \in \text{rad}(\mathfrak{a}) \end{aligned}$$

*Beweis.* Es gilt:

$$\begin{aligned} D(g) \subseteq \bigcup_i D(f_i) &\Leftrightarrow V(g) \supseteq \bigcap_i V(f_i) = V(\mathfrak{a}) \\ &\Leftrightarrow g \in \text{rad}((g)) \subseteq \text{rad}(\mathfrak{a}) \text{ nach 2.3} \end{aligned}$$

Für  $g = 1$ , folgt:

$$\text{Spec}(A) = \bigcup_{i \in I} D(f_i) \Leftrightarrow \sum_{i \in I} A f_i = A$$

□

**Satz 2.5.** Die prinzipal offenen Mengen  $D(f)$ ,  $f \in A$ , bilden eine Basis der Topologie von  $\text{Spec}(A)$ , und sind quasikompakt. Insbesondere ist  $\text{Spec}(A)$  quasikompakt.

*Beweis.* Nach Lemma 2.1.(ii) gilt:

$$V(\mathfrak{a}) = \bigcap_{f \in \mathfrak{a}} V(f) \implies \text{Spec } A \setminus V(\mathfrak{a}) = \bigcup_{f \in \mathfrak{a}} D(f) \Rightarrow \text{Basis der Topologie}$$

Sei  $D(g) \subseteq \bigcup_i D(f_i)$ .

2.4  $\Rightarrow g^n = \sum_{i \in I} a_i f_i$ ,  $a_i \in A$  fast alle 0.

$\Rightarrow D(g) \subseteq \bigcup_{i \in J} D(f_i) \quad \forall i \in J \subseteq I$  endlich

$\Rightarrow D(g)$  quasikompakt. □

**Satz 2.6.**  $Y \subseteq \text{Spec}(A)$  ist irreduzibel, genau dann wenn  $\mathfrak{p} := I(Y) \trianglelefteq A$  prim ist. In diesem Fall ist  $\{\mathfrak{p}\} \subseteq \overline{Y}$  dicht!



*Beweis.*

„ $\Rightarrow$ “: Seien  $Y$  irreduzibel und  $f, g \in A$  mit  $fg \in \mathfrak{p}$ .

$$\Rightarrow Y \subseteq \overline{Y} = VI(Y) \subseteq V(fg) = V(f) \cup V(g)$$

$Y$  irreduzibel  $\Rightarrow$  Ohne Einschränkung:  $Y \subseteq V(f)$ .

$$\Rightarrow f \in \bigcap_{y \in V(f)} \mathfrak{p}_y = IV(f) \subseteq I(Y) = \mathfrak{p}, \text{ d.h. } \mathfrak{p} \text{ ist prim.}$$

„ $\Leftarrow$ “: Sei umgekehrt  $\mathfrak{p} = I(Y)$  ein Primideal.

Satz 2.3  $\Rightarrow \overline{Y} = V(\mathfrak{p}) = VI(\{\mathfrak{p}\}) = \overline{\{\mathfrak{p}\}}$ , d.h.  $\overline{Y}$  ist der Abschluss der irreduziblen Menge  $\{\mathfrak{p}\}$  und daher selbst irreduzibel.

Lemma 1.14  $\Rightarrow Y$  ist auch irreduzibel, da dicht in  $\overline{Y}$ .

□

Warnung: im Allgemeinen ist  $\mathfrak{p}$  kein Punkt in  $Y$ !

**Korollar 2.7.** *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \text{Spec}(A) &\longrightarrow \{\text{abg. irred. Teilmengen von Spec } A\} \\ \mathfrak{p} &\longmapsto V(\mathfrak{p}) = \overline{\{\mathfrak{p}\}} \end{aligned}$$

*ist eine Bijektion, unter der die minimalen Primideale von  $A$  den irreduziblen Komponenten entsprechen.*

*Beweis.* Proposition 2.3 und 2.6.

□

**Definition 2.8.** Für einen topologischen Raum  $X$  heißt  $\eta \in X$  **generischer Punkt**, falls  $\overline{\{\eta\}} = X$ . Allgemeiner sagen wir für  $x, x' \in X$ , dass  $x$  eine **Verallgemeinerung** (engl. „**generalization**“) von  $x'$  ist, bzw.  $x'$  eine **Spezialisierung** von  $x$ , falls  $x' \in \overline{\{x\}}$ .

*Bemerkung 2.9.*

- (i)  $\eta \in X$  generisch  $\Leftrightarrow \eta$  ist Verallgemeinerung von jedem Punkt von  $X$ .
- (ii) Existiert ein generischer Punkt in  $X$ , so ist  $X$  als Abschluss einer irreduziblen Menge selbst irreduzibel.
- (iii) Für  $X = \text{Spec}(A)$  gilt:  $x'$  ist eine Spezialisierung von  $x \Leftrightarrow \mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_{x'}$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow V(\mathfrak{p}_{x'}) &\subseteq V(\mathfrak{p}_x) \\ \parallel \quad \parallel \\ x' &\in \overline{\{x'\}} \subseteq \overline{\{x\}} \end{aligned}$$

Ferner hat jede abgeschlossene irreduzible Teilmenge  $Y \subseteq \text{Spec}(A)$  einen *eindeutigen* generischen Punkt (dies gilt nicht für beliebige irreduzible Teilmengen  $Y \subseteq \text{Spec}(A)$ ).

## 2.3 Der Funktor $A \mapsto \text{Spec}(A)$

**Ziel:** Wir wollen einen kontravarianten Funktor

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{CRing}} & \longrightarrow & \underline{\text{Top}} \\ A & \longmapsto & \text{Spec } A \end{array}$$

definieren. Sei  $\varphi : A \longrightarrow B$  ein Ringhomomorphismus,  $\mathfrak{q}$  Primideal von  $B$ . Es folgt:  $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \trianglelefteq A$  ist Primideal, denn  $A/\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \hookrightarrow B/\mathfrak{q}$  ist integer als Unterring eines integren Rings. Wir erhalten also eine Abbildung

$$\begin{aligned} {}^a\varphi = \text{Spec } \varphi : \text{Spec } B &\longrightarrow \text{Spec } A \\ \mathfrak{q} &\longmapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \end{aligned}$$

**Satz 2.10.**

(i)  $({}^a\varphi)^{-1}(V(M)) = V(\varphi(M))$  für  $M \subseteq \text{Spec } A$  Teilmenge, insbesondere gilt  $({}^a\varphi)^{-1}(D(f)) = D(\varphi(f))$ ,  $f \in A$ .

(ii)  $V(\varphi^{-1}(\mathfrak{b})) = \overline{{}^a\varphi(V(\mathfrak{b}))}$  für  $\mathfrak{b} \trianglelefteq B$  Ideal.

*Beweis.*

(i) Für  $\mathfrak{q} \in \text{Spec } B$  gilt:

$$\mathfrak{q} \in V(\varphi(M)) \iff \mathfrak{q} \supseteq \varphi(M) \iff \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \supseteq M \iff \mathfrak{q} \in ({}^a\varphi)^{-1}(V(M)) \quad (2.1)$$

Weiter:

$$D(\varphi(f)) = \text{Spec}(B) \setminus V(\varphi(f)) \quad (2.2)$$

$$= \text{Spec}(B) \setminus ({}^a\varphi)^{-1}(V(f)) \quad (2.3)$$

$$= ({}^a\varphi)^{-1}(D(f)) \quad (2.4)$$

(ii)  $\overline{{}^a\varphi(V(\mathfrak{b}))} = VI({}^a\varphi(V(\mathfrak{b})))$  nach Satz 2.3. Nach Definition gilt:

$$I({}^a\varphi(V(\mathfrak{b}))) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in {}^a\varphi(V(\mathfrak{b}))} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{q} \in V(\mathfrak{b})} \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$$

$$\text{komm. Algebra} = \varphi^{-1}(\text{rad } \mathfrak{b})$$

$$\stackrel{!}{=} \text{rad } \varphi^{-1}(\mathfrak{b})$$

Denn: Ohne Einschränkung gelte  $\mathfrak{b} = 0$ ,  $\varphi^{-1}(\mathfrak{b}) = \ker \varphi$  (betrachte  $A/\varphi^{-1}(\mathfrak{b}) \hookrightarrow B/\mathfrak{b}$ ).

Es ist:

$$a \in \varphi^{-1}(\sqrt{0}) \Leftrightarrow \varphi(a)^n = \varphi(a^n) = 0 \text{ für } n \text{ geeignet}$$

$V(\cdot)$  liefert die Behauptung:  $V(\text{rad } \varphi^{-1}(\mathfrak{b})) = V(\varphi^{-1}(\mathfrak{b}))$  nach Satz 2.3.

□

Insbesondere ist  ${}^a\varphi : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$  stetig. Wegen

$${}^a(\psi \circ \varphi) = {}^a\varphi \circ {}^a\psi \text{ und } {}^a\text{id}_A = \text{id}_{\text{Spec } A}$$

für einen weiteren Ringhomomorphismus  $\psi : B \rightarrow C$  ist  $A \mapsto \text{Spec } A$  der gesuchte kontravariante Funktor.

**Korollar 2.11.**  ${}^a\varphi$  ist **dominant**, d.h.  $\text{im } ({}^a\varphi) \subseteq \text{Spec } A$  dicht  $\iff$  Jedes Element in  $\ker \varphi$  ist nilpotent:  $\ker \varphi \subseteq \text{rad}(0)$ .

**Satz 2.12.**

- (i) Ist  $\varphi : A \rightarrow B$  ein surjektiver Ringhomomorphismus mit  $\ker \varphi =: \mathfrak{a}$ , dann ist  ${}^a\varphi$  ein Homöomorphismus von  $\text{Spec } B$  auf  $V(\mathfrak{a}) \subseteq_{\text{abg.}} \text{Spec } A$ .
- (ii) Ist  $S$  eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von  $A$ , und  $\varphi : A \rightarrow S^{-1}A =: B$  die kanonische Lokalisierungsabbildung, dann ist  ${}^a\varphi$  ein Homöomorphismus, von  $\text{Spec } S^{-1}A$  auf  $\{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid S \cap \mathfrak{p} = \emptyset\}$ .

*Beweis.*  ${}^a\varphi$  injektiv + im  ${}^a\varphi$  ist bekannt aus kommutative Algebra. Ferner: Für  $\mathfrak{q} \in \text{Spec } B$ ,  $\mathfrak{b} \trianglelefteq B$  Ideal gilt  $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{b} \iff \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \supseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{b})$ , also

$${}^a\varphi(V(\mathfrak{b})) = V(\varphi^{-1}(\mathfrak{b})),$$

d.h.  ${}^a\varphi$  ist abgeschlossen.

□

## 2.4 Beispiele

- $\text{Spec } A = \emptyset \Leftrightarrow A = \{0\}$ .
  - $A$  Körper oder Ring mit einem einzigem Primideal:  $\text{Spec } A = \{\mathfrak{p}\}$ .
  - $A$  Artinsch:  $\text{Spec } A$  endlich und diskret (da maximale Primideale mit den minimalen Primidealen übereinstimmen)
- ( $\text{Spec } A = \text{Spec}(A/\sqrt{0})$ ,  $A/\sqrt{0}$  Produkt von Körpern.  $\text{Spec}(\prod_i A_i) = \coprod_i \text{Spec}(A_i)$ )

**Beispiel 2.13.** Sei  $A$  Hauptidealring (z.B.  $\mathbb{Z}$  oder  $K[X]$ ). Falls  $\mathfrak{p}$  ein maximales Ideal ist, dann ist  $\mathfrak{p} = (\pi)$ ,  $\pi$  Primelement in  $A$ .

Alle Primideale sind maximal oder 0.

Abg. Punkte von  $\text{Spec } A \leftrightarrow$  Primelemente modulo  $A^\times$

$\overline{\{\eta\}} = \text{Spec } A$  für  $\eta \in \text{Spec } A$  mit  $\mathfrak{p}_\eta = (0)$ .

Abgeschlossene Mengen  $\text{Spec } A \neq V(\mathfrak{a}) \stackrel{0 \neq a \in (f)}{=} V(f) = \{(p_1), \dots, (p_n)\}$  falls  $f = p_1^{e_1} \cdots p_n^{e_n}$ ,  $p_i$  paarweise verschieden,  $e_i \geq 1$ , sind genau *endliche Mengen abgeschlossener Punkte*.

$g \neq 0 \neq f$ :

$$\begin{aligned} V(f) \cap V(g) &= V(f, g) = V(d), & d &= \text{ggT}(f, g) \\ V(f) \cup V(g) &= V((f) \cap (g)) = V(e), & e &= \text{kgV}(f, g) \end{aligned}$$

Falls  $A$  *lokaler* Hauptidealring ist (also diskreter Bewertungsring, der kein Körper ist), dann:

$$\text{Spec } A = \{x, \eta\}, \quad \mathfrak{p}_x \text{ max. Ideal}, \quad \mathfrak{p}_\eta = (0)$$

$\{\eta\}$  einzige nicht-triviale offene Menge.

**Beispiel 2.14.** Sei  $k$  algebraisch abgeschlossener Körper. Affine Varietäten  $V \leftrightarrow$  endlich erzeugte  $k$ -Algebren  $A$ .

$$V = \{\text{max. Ideale in } A\} \subseteq \text{Spec}(A)$$

Topologie auf  $V$  ist die Unterraumtopologie von  $\text{Spec}(A)$ .

**Beispiel 2.15.** Sei  $R$  Hauptidealring,  $A = R[T]$ ,  $X = \text{Spec}(A)$ .  $R$  faktoriell  $\Rightarrow R[T]$  faktoriell, nach dem Satz von Gauß, mit Primidealen:

(i)  $p \in R$  prim

*Beweis.*  $p \in R$  prim  $\Rightarrow R/pR$  Körper. Nach Proposition 2.12 gilt:

$$\overline{pR[T]} = V(pR[T]) \cong \text{Spec}(R/pR[T])$$

ein Hauptidealring mit unendlich vielen Elementen. Damit ist  $pR[T]$  *nicht* maximal, sondern

$$V(pR[T]) = \{pR[T], (f, p), f \in R[T] \text{ mit } \bar{f} \in R/p[T] \text{ irreduzibel}\}$$

□

(ii)  $f \in R[T]$  primitives Polynom, irreduzibel in  $\text{Quot}(R)[T]$

*Beweis.* Sei  $f$  primitives, irreduzibles Polynom.

- $l(f) \in R^\times \Rightarrow$  (Division mit Rest)  $R \subseteq R[T]/pR[T]$  ist eine ganze Ringerweiterung und ein endl.-erz. freier  $R$ -Modul vom Rang  $\deg(f)$ . Angenommen,  $fR[T]$  ist maximal. Dann ist  $R[T]/fR[T]$  ein Körper, also  $R$  ein Körper (da ganze Ringerweiterung). Widerspruch.
- Andernfalls kann  $fR[T]$  ein maximales Ideal sein:  $R$  habe nur endlich viele Primelemente.

$$0 \neq a := \prod_p p \in R, \quad f := aT - 1$$

Es folgt:

$$R[T]/fR[T] \cong R[a^{-1}] = \text{Quot}(R)$$

also ist  $fR[T]$  maximal.

□

## Exkursion über Garben

Bisher:

$$X \text{ affin alg. Menge} \longmapsto \Gamma(X) = \text{Hom}(X, \mathbb{A}^1) \quad (2.5)$$

Jetzt:

$$\text{Spec } A \longleftarrow A \quad (2.6)$$

d.h.  $A$  soll den Funktionen auf  $\text{Spec } A$  entsprechen. Für  $x \in \text{Spec } A$  definiert man  $ev_x : A \rightarrow \kappa_A(x) := A_{\mathfrak{p}_x}/\mathfrak{p}_x A_{\mathfrak{p}_x} \cong \text{Quot}(A/\mathfrak{p}_x)$  durch  $f \mapsto f(x) := ev_x(f) := f \bmod \mathfrak{p}_x$ . Mit dieser Definition folgt insbesondere  $D(f) = \{x \in \text{Spec } A \mid f(x) \neq 0\}$ . Da  $x \mapsto f(x)$  keine Funktion im engeren Sinne ist, können wir diese Konstruktion nicht als System von Funktionen auffassen. Wichtige Aussagen: Restriktion + Verklebung  $\rightsquigarrow$  Garben.

## 2.5 Prägarben und Garben

**Definition 2.16.** Sei  $X$  ein topologischer Raum.

(i) Eine **Prägarbe**  $\mathcal{F}$  auf  $X$  besteht aus den folgenden Daten:

- eine Menge  $\mathcal{F}(U)$  für jede offene Teilmenge  $U \subseteq X$
- Eine **Restriktionsabbildung**  $res_U^V : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$  für jedes Paar  $U \subseteq V$  offen in  $X$ , so dass:

$$- res_U^U = \text{id}_{\mathcal{F}(U)}$$

$$- res_U^W = res_U^V \circ res_V^W \text{ für } U \subseteq V \subseteq W \text{ offen in } X$$

(ii) Ein **Morphismus von Prägarben**  $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  ist eine Familie von Abbildungen  $\{\phi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U) \mid U \subseteq X \text{ offen}\}$ , so dass für alle Paare  $U \subseteq V$  offen in  $X$ , das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\phi_V} & \mathcal{G}(V) \\ \downarrow res_U^V & & \downarrow res_U^V \\ \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\phi_U} & \mathcal{G}(U) \end{array}$$

Notation:  $U \subseteq V$ ,  $s \in \mathcal{F}(V)$ , dann:  $s|_U := res_U^V(s)$ .

Die Elemente in  $\mathcal{F}(U)$  heißen **Schnitte von  $\mathcal{F}$  über  $U$** ,  $\Gamma(U, \mathcal{F}) := \mathcal{F}(U)$ .

Alternative Beschreibung:

$\text{Ouv}_X$ : Kategorie offener Mengen von  $X$  mit  $\text{Hom}(U, V) := \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } U \not\subseteq V \\ \{U \rightarrow V\}, & \text{falls } U \subseteq V \end{cases}$ . Eine

**Prägarbe auf  $X$**  ist ein kontravarianter Funktor  $\mathcal{F} : \text{Ouv}_X \rightarrow \underline{\text{Set}}$ . Ersetzt man  $\underline{\text{Set}}$  durch eine Kategorie  $\mathcal{C}$ , so bekommt man Prägarben **mit Werten in  $\mathcal{C}$** . Ein Morphismus von Prägarben

$\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  ist eine natürliche Transformation  $\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$ .

Für eine Prägarbe  $\mathcal{F}$  auf  $X$ ,  $U \subseteq X$  offen und  $U = \bigcup_i U_i$  eine offene Überdeckung von  $U$ , definiere:

$$\rho : \mathcal{F}(U) \rightarrow \prod_i \mathcal{F}(U_i), s \mapsto (s|_{U_i})_i \quad (2.7)$$

$$b : \prod_i \mathcal{F}(U_i) \rightarrow \prod_{(i,j)} \mathcal{F}(U_i \cap U_j), (s_i)_i \mapsto (s_i|_{U_i \cap U_j})_{(i,j)} \quad (2.8)$$

$$b' : \prod_i \mathcal{F}(U_i) \rightarrow \prod_{(i,j)} \mathcal{F}(U_i \cap U_j), (s_i)_i \mapsto (s_j|_{U_i \cap U_j})_{(i,j)} \quad (2.9)$$

**Definition 2.17.** (i) Eine Prägarbe  $\mathcal{F}$  auf  $X$  heißt **Garbe**, falls für alle offenen Teilmengen  $U \subset X$  und alle offenen Überdeckungen  $U = \bigcup_i U_i$  wie oben gilt:

$$(Sh) \quad \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\rho} \prod_i \mathcal{F}(U_i) \xrightleftharpoons[b']{b} \prod_{(i,j)} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

d.h.  $\rho$  ist injektiv und  $\text{im } \rho = \{s \in \prod_i \mathcal{F}(U_i) \mid b(s) = b'(s)\}$ , mit anderen Worten:  $(\mathcal{F}(U), \rho)$  ist **Equalizer** von  $b$  und  $b'$ .

Dabei ist (Sh) äquivalent zu:

(Sh0)  $\mathcal{F}(\emptyset)$  ist finales Objekt.

(Sh1) Gilt für  $s, s' \in \mathcal{F}(U)$   $s|_{U_i} = s'|_{U_i}$  für alle  $i$ , so folgt  $s = s'$ .

(Sh2) Zu jeder Familie  $(s_i)_i \in \prod_i \mathcal{F}(U_i)$  mit  $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$  existiert ein  $s \in \mathcal{F}(U)$  mit  $s|_{U_i} = s_i$ .

(ii) Ein **Morphismus von Garben** ist ein Morphismus der unterliegenden Prägarben.

Wir erhalten die Kategorie  $\underline{\mathcal{PSh}}_X(\underline{\text{Set}})$  der mengenwertigen Prägarben auf  $X$  und die volle Unterkategorie  $\underline{\mathcal{Sh}}_X(\underline{\text{Set}})$  der mengenwertigen Garben auf  $X$ . Analog erhalten wir Garben von abelschen Gruppen, Ringen,  $R$ -Moduln und  $R$ -Algebren.

*Bemerkung 2.18.* (i)  $\mathcal{F} \in \underline{\mathcal{Sh}} \Rightarrow \Gamma(\emptyset, \mathcal{F})$  ist einpunktig (wegen (Sh) für die leere Überdeckung)

(ii)  $X = \{pt\} \Rightarrow \mathcal{F}$  auf  $X$  ist eindeutig durch  $\mathcal{F}(X)$  bestimmt

**Beispiel 2.19.** (i)  $\mathcal{F} \in \underline{\mathcal{PSh}}_X, U \subseteq X$  offen  $\Rightarrow \mathcal{F}|_U \in \underline{\mathcal{PSh}}_U$  mit  $\Gamma(V, \mathcal{F}|_U) := \Gamma(V, \mathcal{F})$ . Ist  $\mathcal{F} \in \underline{\mathcal{Sh}}_X$ , so ist  $\mathcal{F}|_U \in \underline{\mathcal{Sh}}_U$ .

(ii) Für  $X, Y$  top. Räume definiert  $\mathcal{F}$  gegeben durch  $\Gamma(U, \mathcal{F}) := \mathcal{C}(U, Y) = \{f : U \rightarrow Y \mid f \text{ stetig}\}$  und  $\text{res}_V^U : f \mapsto f|_V$  eine Garbe.

(iii)  $k$  ein Körper,  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein Raum mit Funktionen/ $k \Rightarrow \mathcal{O}_X$  ist Garbe von  $k$ -Algebren auf  $X$ .

- (iv) Für einen top. Raum  $X$  definiert  $\mathcal{F}(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig und beschränkt}\}$  eine Prägarbe auf  $X$ , im Allgemeinen aber keine Garbe.

Sei  $\mathcal{B}$  eine Basis der Topologie von  $X$  und  $\mathcal{F} \in \underline{Sh}_X$ . Sei für  $V \subseteq X$  offen  $\mathcal{B}_V := \{U \in \mathcal{B} \mid U \subseteq V\}$ . Dann folgt wegen (Sh):

$$\mathcal{F}(V) \cong_{(\dagger)} \{(s_U)_U \in \prod_{U \in \mathcal{B}_V} \mathcal{F}(U) \mid \forall U' \subseteq U \in \mathcal{B}_V : s_U|_{U'} = s_{U'}\} \cong \varprojlim_{U \in \mathcal{B}_V} \mathcal{F}(U)$$

d.h.  $\mathcal{F}$  ist bereits eindeutig durch die Schnitte auf einer Basis von  $X$  bestimmt.

( $\dagger$ ) : einfache Folgerung aus (Sh1).

Eine **Prägarbe auf  $\mathcal{B}$**  ist ein kontravarianter Funktor  $\mathcal{F} : \mathcal{B} \rightarrow \underline{Set}$ . Jedes solche  $\mathcal{F}$  induziert eine Prägarbe  $\overline{\mathcal{F}}^X$  auf  $X$  durch  $\overline{\mathcal{F}}^X(V) := \varprojlim_{U \in \mathcal{B}_V} \mathcal{F}(U)$ . Für  $U \in \mathcal{B}$  gilt dann  $\overline{\mathcal{F}}^X(U) = \varprojlim_{U' \in \mathcal{B}_U} \mathcal{F}(U') = \mathcal{F}(U)$ , da  $U$  initial in  $\mathcal{B}_U$ .

Ein **Morphismus von Prägarben auf  $\mathcal{B}$**  ist wieder ein Morphismus von Funktoren.

**Satz 2.20.**  $\overline{\mathcal{F}}^X$  ist eine Garbe  $\iff \mathcal{F}$  erfüllt (Sh) für alle  $U \in \mathcal{B}$  und Überdeckungen  $U = \bigcup_i U_i$  mit  $U_i \in \mathcal{B}$ .

In diesem Fall heißt  $\mathcal{F}$  **Garbe auf  $\mathcal{B}$** .

*Beweis.* Im Folgenden schreiben wir  $\overline{\mathcal{F}} := \overline{\mathcal{F}}^X$ .

„ $\Rightarrow$ “:  $\overline{\mathcal{F}}^X(U) = \mathcal{F}(U)$  für alle  $U \in \mathcal{B}$ .

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $U \subseteq X$  offen und  $U = \bigcup_i U_i$  eine offene Überdeckung von  $U$  in  $X$ .

(Sh1):

$$\varprojlim_{B \in \mathcal{B}_U} \mathcal{F}(B) = \overline{\mathcal{F}}(U) \hookrightarrow \prod_i \overline{\mathcal{F}}(U_i) \hookrightarrow \prod_i \prod_{B \in \mathcal{B}_{U_i}} \mathcal{F}(B)$$

$$s = (s_B)_B, s' = (s'_B)_B \longmapsto s|_{U_i} = s'|_{U_i} \longmapsto ((s_B)_{B \in \mathcal{B}_{U_i}})_i = ((s'_B)_{B \in \mathcal{B}_{U_i}})_i \quad (\dagger)$$

Behauptung:  $\forall B \in \mathcal{B}_U : s_B = s'_B$ , d.h.  $s = s'$ . denn:

$$\mathcal{F}(B) \hookrightarrow \prod_i \prod_{B' \in \mathcal{B}_{U_i \cap B}} \mathcal{F}(B')$$

ist injektiv nach (Sh1) für  $\mathcal{F}$  auf  $\mathcal{B}$ .

$s_B$  und  $s'_B$  haben gleiches Bild wegen ( $\dagger$ ).

(Sh2):

$$\overline{\mathcal{F}}(U) \xrightarrow{\rho} \prod_i \overline{\mathcal{F}}(U_i) \longrightarrow \prod_{(i,j)} \overline{\mathcal{F}}(U_i \cap U_j)$$

„ $\overline{\mathcal{F}}(U) \subseteq \ker \rho$ “ :  $\rho(s) = ((s_B)_{B \in \mathcal{B}_{U_i}})_i$ . Sei  $T \in \mathcal{B}_{U_i \cap U_j} \subseteq \mathcal{B}_{U_i}$ ,  $V \in \mathcal{B}_{U_i}$  und  $W \in \mathcal{B}_{U_j}$ . Dann folgt:

$$s_V|_T = s_T = s_W|_T \implies \text{Behauptung.}$$

„ $\overline{\mathcal{F}}(U) \supseteq \ker \rho$ “ : Sei  $(s_i)_i \in \prod_i \overline{\mathcal{F}}(U_i)$  mit  $b((s_i)_i) = b'((s_i)_i)$ .

Gesucht:  $s = (s_B)_B \in \overline{\mathcal{F}}(U)$  mit  $s|_{U_i} = s_i$ .



Es gilt:

$$\mathcal{F}(B) \xrightarrow{\rho} \prod_i \prod_{B' \in \mathcal{B}_{U_i \cap B}} \mathcal{F}(B') \xrightleftharpoons[b']{b} \prod_{(i,j)} \prod_{\mathcal{B}_{U_i \cap B} \times \mathcal{B}_{U_j \cap B}} \mathcal{F}(V \cap W)$$

ist exakt, d.h. ein Equalizer-Diagramm. Konstruiere damit  $s_B \in \mathcal{F}(B)$ , welche kompatibles System bilden.  $s = (s_B)_B$  ist dann das gesuchte Element in  $\overline{\mathcal{F}}(U)$ .

□

## 2.6 Halme von Garben

Für  $x \in X$  und  $\mathcal{F} \in \underline{\mathcal{PSh}}_X$  ist  $(\mathcal{F}(V), \text{res}_U^V)_{x \in U \subseteq X \text{ offen}}$  ein filtriertes induktives System.  
filtriert:

$\forall U, V \subseteq X$  offen  $\exists W \subseteq U, V$  offen. (z.B.  $W = U \cap V$ ).

**Definition 2.21.** Der induktive Limes (oder auch Colimes)  $\mathcal{F}_x := \varinjlim_{x \in U} \mathcal{F}(U)$  heißt **Halm** von  $\mathcal{F}$  in  $x$ . Für  $x \in U \subseteq X$  offen hat man einen kanonischen Morphismus  $\pi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}_x$ . Das Bild eines Schnittes  $s \in \mathcal{F}(U)$  unter  $\pi_U$  heißt **Keim** von  $s$  in  $x$  und wird mit  $s_x$  bezeichnet.

Ein Morphismus von Prägarben  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  induziert eine Abbildung  $\varphi_x = \varinjlim_{x \in U} \varphi_U : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$  von Halmen in  $x$ .

**Beispiel 2.22.**  $z_0 \in X := \mathbb{C}$ ,  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ : Garbe der holomorphen Funktionen auf  $\mathbb{C}$ . Dann gilt:  
 $(U, f) \sim (V, g) \iff f$  und  $g$  haben dieselbe Taylor-Entwicklung um  $z_0$ .  
 $\implies \mathcal{O}_{\mathbb{C}, z_0} = \mathbb{C}\{\{z_0\}\}$  ist der Ring der Potenzreihen um  $z_0$  mit positivem Konvergenzradius.

**Satz 2.23.** Seien  $X$  ein top. Raum,  $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \underline{\mathcal{PSh}}_X$  und  $\mathcal{F} \xrightarrow[\psi]{\varphi} \mathcal{G}$  zwei Morphismen.

(1) Ist  $\mathcal{F}$  eine Garbe, so gilt  $\varphi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$  ist injektiv für alle  $x \in X \iff \varphi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$  ist injektiv für alle  $U \subseteq X$  offen.

(2) Sind  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  Garben, so gilt:

(a)  $\varphi_x$  ist bijektiv für alle  $x \in X \iff \varphi_U$  ist bijektiv für alle  $U \subseteq X$  offen.

(b)  $\varphi = \psi \iff \varphi_x = \psi_x$  für alle  $x \in X$ .

*Beweis.* Für  $U \subseteq X$  offen ist

$$\mathcal{F}(U) \hookrightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$$

$$s \longmapsto (s_x)_{x \in U}$$

injektiv, denn:

Seien  $s, t \in \mathcal{F}(U)$  mit  $s_x = t_x$  für alle  $x \in U$ . Dann gibt es für jedes  $x \in U$  eine offene Umgebung  $x \in V_x \subseteq U$  s.d.  $s|_{V_x} = t|_{V_x}$ .

(Sh1)  $\implies s = t$ .

Wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \hookrightarrow & \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \\ \downarrow \varphi_U & & \downarrow \prod_x \varphi_x \\ \mathcal{G}(U) & \longrightarrow & \prod_{x \in U} \mathcal{G}_x \end{array}$$

welches “(1)  $\Rightarrow$  “ und (2)(b) impliziert.

Allgemein gilt:

(i) Filtrierte Colimiten injektiver Abbildungen sind injektiv, d.h. “(1)  $\Leftarrow$  “ gilt.

(ii) Colimiten surjektiver Abbildungen sind surjektiv, d.h. “(2)(a)  $\Leftarrow$  “ gilt

Zu “(2)(a)  $\Rightarrow$  “: reicht z.z.: Bijektivität von  $\varphi_x$  impliziert Surjektivität von  $\varphi_U$ .

Sei dazu  $t \in \mathcal{G}(U)$ . Wähle für alle  $x \in U$  eine offene Umgebung  $x \in U^x \subseteq U$  und  $s^x \in \mathcal{F}(U^x)$  so dass  $(\varphi_{U^x}(s^x))_x = t_x$ .

$\implies \exists x \in V^x \subseteq U^x$  offen mit  $\varphi_{V^x}(s^x|_{V^x}) = t|_{V^x}$ .

Da  $U = \bigcup_x V^x$  offene Überdeckung, gilt für alle  $x, y \in U$ :

$$\varphi_{V^y \cap V^x}(s^x|_{V^y \cap V^x}) = t|_{V^y \cap V^x} = \varphi_{V^y \cap V^x}(s^y|_{V^y \cap V^x})$$

$\varphi_U$  injektiv nach (1)  $\implies s^x|_{V^y \cap V^y} = s^y|_{V^y \cap V^y}$ .

(Sh2)  $\implies \exists s \in \mathcal{F}(U)$  mit  $s|_{V^x} = s^x$  für alle  $x \in U$ .

$\implies \varphi_U(s)_x = [(V^x, \varphi_{V^x}(s|_{V^x}))] = [(V^x, t|_{V^x})] = t_x \implies \varphi_U(s) = t$ . □

**Definition 2.24.** Ein Morphismus  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  von Garben heißt **injektiv**/ **surjektiv**/ **bijektiv** :  $\iff \forall x \in X : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$  ist injektiv/ surjektiv/ bijektiv.

*Bemerkung 2.25.*  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  ist surjektiv gdw. für alle  $t \in \mathcal{F}(U)$  eine offene Überdeckung  $U = \bigcup_i U_i$  existiert und  $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$  s.d.  $\varphi_{U_i}(s_i) = t|_{U_i}$ , d.h. lokal findet man stets ein Urbild.

**Warnung:** Aus  $\varphi$  surjektiv folgt nicht  $\varphi_U$  surjektiv für alle  $U \subseteq X$  offen.

## 2.7 Die zu einer Prägarbe assoziierte Garbe

**Definition 2.26.** Sei  $\mathcal{F}$  eine Prägarbe auf einem top. Raum  $X$ . Eine **Vergarbung** (auch Garbifizierung/ assoziierte Garbe) von  $\mathcal{F}$  ist eine Garbe  $\mathcal{F}^{sh}$  auf  $X$  zusammen mit einem Morphismus  $\iota : \mathcal{F} \rightarrow V(\mathcal{F}^{sh})$  von Prägarben, so dass gilt:

$$\text{Mor}_{\underline{\mathcal{PSh}}_X}(\mathcal{F}, V(\mathcal{G})) \xrightarrow{\cong} \text{Mor}_{\underline{\mathcal{Sh}}_X}(\mathcal{F}^{sh}, \mathcal{G})$$

$$\varphi \circ \iota \longleftarrow \longrightarrow \varphi$$

Hierbei bezeichne  $V : \underline{\mathcal{Sh}}_X \rightarrow \underline{\mathcal{PSh}}_X$  den Vergissfunktork.

Durch diese Eigenschaft ist  $(\mathcal{F}^{sh}, \iota)$  eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus bestimmt.

Ferner gilt:

- (0) Es existiert eine Vergarbung  $\iota : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^{sh}$
- (1)  $\iota$  wie oben induziert einen Isomorphismus  $\iota_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}_x^{sh}$  auf Halmen für alle  $x \in X$ .
- (2) Für jede Prägarbe  $\mathcal{G}$  auf  $X$  und jeden Morphismus  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  existiert genau ein Morphismus  $\varphi^{sh} : \mathcal{F}^{sh} \rightarrow \mathcal{G}^{sh}$  s.d. folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\iota_{\mathcal{F}}} & \mathcal{F}^{sh} \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi^{sh} \\ \mathcal{G} & \xrightarrow{\iota_{\mathcal{G}}} & \mathcal{G}^{sh} \end{array}$$

d.h.  $\underline{\mathcal{PSh}}_X \rightarrow \underline{\mathcal{Sh}}_X, \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^{sh}$  ist ein Funktor, linksadjungiert zum Vergissfunktork  $V$ .

*Beweis. Existenz:*

$$\mathcal{F}^{sh}(U) := \{(s_x)_x \in \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \mid \forall x \in U : \exists x \in U^x \subseteq U \text{ offen und } t \in \mathcal{F}(U^x) : \forall y \in U^x : t_x = s_x\}$$

“Keime, die lokal Schnitte von  $\mathcal{F}$  sind“ - (Sh2) erzwingt dies.

Für  $U \subseteq V$  ist  $\text{res}_U^V$  induziert von:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}^{sh}(V) & \xrightarrow{\text{res}_U^V} & \mathcal{F}^{sh}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_{x \in V} \mathcal{F}_x & \xrightarrow{\text{proj.}} & \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \end{array}$$

□

## 2.8 Direktes und inverses Bild von Garben

Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetige Abbildung topologischer Räume,  $\mathcal{F}$  eine Prägarbe auf  $X$ . Ziel:  $f_*\mathcal{F}$  Prägarbe auf  $Y$ , das direkte Bild von  $\mathcal{F}$  unter  $f$ . Definiere  $(f_*\mathcal{F})(V) := \mathcal{F}(f^{-1}(V))$  mit Restriktionsabbildung von  $\mathcal{F}$  ( $V_1 \subseteq V_2 : s \in f_*\mathcal{F}(V_2) \rightarrow s|_{V_1} = \text{Res}_{f^{-1}(V_1)}^{f^{-1}(V_2)} s$ ).

$$\begin{aligned} f_* : PSh(X) &\longrightarrow PSh(Y) \\ \mathcal{F} &\longmapsto f_*\mathcal{F} \\ \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} &\longmapsto f_*(U) : f_*\mathcal{F} \rightarrow f_*\mathcal{G} \end{aligned}$$

ist Funktor via  $(f_*\varphi)_V = \varphi_{f^{-1}(V)}$ .

*Bemerkung 2.27* (28).

- (i)  $\mathcal{F}$  Garbe auf  $X \implies f_*\mathcal{F}$  Garbe auf  $Y$ , d.h.  $f_* : Sh(X) \rightarrow Sh(Y)$ .
- (ii) Ist  $g : Y \rightarrow Z$  eine weitere stetige Abbildung topologischer Räume, so existiert ein offensichtlicher Isomorphismus  $g_* \circ (f_*\mathcal{F}) = (g \circ f)_*\mathcal{F}$ , funktoriell in  $\mathcal{F}$ .

Nun sei  $\mathcal{G}$  eine Prägarbe auf  $Y$ .

**Ziel:** Definiere  $f^+\mathcal{G}$  Prägarbe auf  $X$ .  $f^+\mathcal{G} = \widetilde{f^+\mathcal{G}}$  Garbe auf  $X$ , **Inverses Bild zu  $\mathcal{G}$  unter  $f$**  via

$$(f^+\mathcal{G})(U) := \lim_{Y \supseteq V \supseteq f(U)} \mathcal{G}(V)$$

mit induzierte Restriktionsabbildung.

**Warnung:**  $\mathcal{G}$  Garbe auf  $Y \rightsquigarrow f^+\mathcal{G}$  im Allgemeinen keine Garbe auf  $X$ . Falls  $f : X \hookrightarrow Y$  Inklusion,  $\mathcal{G}|_X := f^{-1}\mathcal{G}$ . Ist  $X \subseteq Y$  offen stimmt  $\mathcal{G}|_X$  mit der Einschränkung aus Beispiel 19 überein (cofinales Objekt).  $\rightsquigarrow f^{-1} : PSh(Y) \rightarrow PSh(X)$  Funktor.

$g : Y \xrightarrow{\text{stetig}} Z$ ,  $\mathcal{H}$  Prägarbe auf  $Z$ ,  $U \subseteq X$  offen.

$$Z \supseteq_{\text{offen}} W \supseteq g(f(U)) \iff W \supseteq g(V)$$

für ein  $f(U) \subseteq V \subseteq Y$  offen.

$$\begin{aligned} \lim_{\rightarrow} \lim_{\rightarrow} &= \lim_{\rightarrow} \implies f^+(g^+\mathcal{H}) = (g \circ f)^+\mathcal{H} \quad (*) \\ &\implies f^{-1}(g^{-1}\mathcal{H}) = (g \circ f)^{-1}\mathcal{H} \end{aligned}$$

**Beispiel 2.28.**  $\iota : \{x\} \rightarrow X$  Inklusion,  $\mathcal{F}$  Prägarbe auf  $X$ .  $\implies \iota^{-1}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_x$  per Definition.

(\*)  $\implies$

$$\begin{aligned} (f^{-1}\mathcal{G})_x &= \mathcal{G}_{f(x)} \\ \parallel &\quad \parallel \\ \iota^{-1} \circ (f^{-1}\mathcal{G}) &= (f \circ \iota)^{-1}\mathcal{G} \end{aligned}$$

**Satz 2.29** (29). Für  $f : X \rightarrow Y$  stetig sind die Funktionen  $f_*$  und  $f^{-1}$  zueinander adjungiert, d.h. für  $\mathcal{F}$  Garbe auf  $X$ ,  $\mathcal{G}$  Prägarbe auf  $Y$  existiert eine Bijektion

$$\begin{aligned} \text{hom}_{\mathcal{S}h(X)}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) &\longleftrightarrow \text{hom}_{\mathcal{P}sh(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}) \\ \varphi &\longmapsto \varphi^\flat \\ \psi^\sharp &\longleftarrow \psi \end{aligned}$$

funktoriell in  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$ .

*Beweis.*  $\varphi : f^{-1}\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$  Morphismus von Garben auf  $X$ .  $t \in \mathcal{G}(V)$ ,  $V \subseteq Y$  offen

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(V) &\rightarrow f^+\mathcal{G}(f^{-1}(V)) \xrightarrow{\iota_{f^+\mathcal{G}}} f^{-1}\mathcal{G}(f^{-1}(V)) \xrightarrow{\varphi_{f^{-1}(V)}} \mathcal{F}(f^{-1}(V)) = f_*\mathcal{F}(V) \\ &\parallel \quad \lim_{\substack{\longrightarrow \\ Y \supseteq W \supseteq f f^{-1}(V) \subseteq V}} \\ t &\mapsto \varphi_V^\flat(t) \end{aligned}$$

Definition von  $\psi^\sharp$ .  $\mathcal{G} \xrightarrow{\psi} f_*\mathcal{F}$  Morphismus von Prägarben auf  $Y$ . Wir definieren  $\psi^\sharp : f^+\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ , welches dann  $\psi^\sharp : f^{-1}\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$  induziert.  $U \subseteq X$  offen,  $S \subseteq f^+\mathcal{G}(U)$ ,  $s = [(V, s_V)]$ ,  $V \supseteq f(U)$ ,  $s_V \in \mathcal{G}(V)$ .  $\implies f^{-1}(V) \supseteq U$ .

$$\begin{array}{ccc} \psi_V(s_V) \in f_*\mathcal{F}(V) & \xlongequal{\quad} & \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \\ & \swarrow & \downarrow \\ & & \psi_U^\sharp(s) \in \mathcal{F}(U) \end{array}$$

Überprüfe  $\varphi^\flat = \varphi$ ,  $\psi^\sharp = \mathcal{H}$  und Funktoriell. □

Definition + Proposition 29 verallgemeinern sich zu (Prä)Garben von Ringen,  $R$ -Moduln,  $R$ -Algebren.

**Beschreibung** von:

$$\begin{array}{ccc} f(x) \in U \subseteq Y & & \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\varphi_U^\flat} \mathcal{F}(f^{-1}(U)) \twoheadrightarrow \mathcal{F}_x \\ \text{offen} & & \downarrow \\ & & \mathcal{G}_{f(x)} \dashrightarrow \mathcal{F}_x \\ \lim_{\substack{\longrightarrow \\ U}} & & \end{array}$$

# Kapitel 3

## Schemata

### 3.1 Schemata

**Definition 3.1.** Ein Schemata ist ein lokal geringter Raum  $(X, \mathcal{O}_X)$ , der eine offene Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  besitzt derart alle lokal geringter Räume  $(U_i, \mathcal{O}_{X|U_i})$  affine Schemata sind.

Für ein Schemata  $S$  besitzt **Sch/ $_S$**  **Kategorie der Schemata über  $S$**  oder  **$S$ -Schemata**

- Morphismen  $X \rightarrow S$  von Schemata



# Kapitel 4

## Faserprodukte

## 4.1 Der 'Punkte-Funktor'

(Kontra) Funktor  $\forall X \in \mathbf{Sch}$

$$h_X: (\mathbf{Sch})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 S & \xrightarrow{\quad} & h_X(S) := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(S, X) & & g \\
 \uparrow f & & \downarrow f* = h_X(f) & & \downarrow \\
 T & & h_X(T) & & g \circ f
 \end{array}$$

$h_X(S)$  heißen  $S$ -wertige Punkte in  $X$ .

**Notation**  $X(S)$ ,  $X(R)$ , falls  $S = \mathrm{Spec}(R)$

## 4.2 Yoneda Lemma

Ziel:  $h_X$  beschreibt  $X$  eindeutig.

### 4.3 Faserprodukt in beliebiger Kategorie