24 Projektive Varietäten

Definition 57 (orig. 54)**.** Abgeschlossene Unterprävarietäten eines projektiven Raumes $\mathbb{P}^n(k)$ heißen **projektive Varietäten**.

Vorsicht: für $x = (x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n$, $f \in k[X_0, \ldots, X_n]$ ist $f(x_1, \ldots, x_n)$ *nicht* wohldefiniert, da von Repräsentaten abhängig, d.h. f kann *nicht* als Funktion auf $\mathbb{P}^n$ aufgefasst werden. Für *homogene* Polynome $f_1, \ldots, f_n \in k[X_0, \ldots X_n]$ (nicht notwendig vom selben Grad) können wir demnoch die Verschwindungsmengen definieren:

$$V_+(f_1, \ldots, f_n) = \{(x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid f_j(x_0, \ldots, x_n) = 0 \ \forall j\}$$

Da $V_+(f_1, \ldots, f_n) \cap U_i = V(\Phi_i(f_1), \ldots, \Phi_i(f_m))$ ist $V_+(f_1, \ldots, f_m)$ abgeschlossen in $\mathbb{P}^n$. Ist $V_+(f_1, \ldots, f_n)$ irreduzibel, so erhalten wir eine projektive Varietät. In der Tat entstehen alle projektiven Varietäten auf diese Weise.

Proposition 58 (orig. 55)**.** *Sei $Z \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ eine projektive Varietät. Dann existieren homogene Polynome $f_1, \ldots, f_n \in k[X_0, \ldots, X_n]$, so dass*

$$Z = V_+(f_1, \ldots, f_n)$$

gilt.

Proof. Betrachte:

$f|_{f^{-1}(U_i)} : f^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i$ ist Morphismus von Prävarietäten. Dann ist f selber ein Morphismus von Prävarietäten.

$$\begin{aligned} \overline{Y} :=& Y \cup \{0\} \text{ Abschluss von } Y \text{ in } \mathbb{A}^{n+1}(k) \\ \mathfrak{A} :=& I(\overline{Y}) \subseteq k[X_0, \ldots, X_n] \end{aligned}$$

Behauptung: $\mathfrak{A}$ wird von homogenen Polynomen erzeugt. *Denn:* für $g \in \mathfrak{A}$, $g = \sum_d g_d$ Zerlegung in homogene Bestandteile vom Grad d. $\overline{Y}$ ist Vereinigung von Ursprungsgeraden im k^{n+1}, d.h. $\forall \lambda \in k^\times$ gilt:

$$g(x_0, \ldots, x_n) = 0 \ \Leftrightarrow \ g(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = 0$$

Beweis durch Widerspruch. Nicht alle g_d liegen in $\mathfrak{A}$.
$\Rightarrow \exists (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^{n+1}(k)$, so dass $g(x_0, \ldots, x_n) = 0$, aber $g_{d_0}(x_0, \ldots, x_n) \neq 0$.
$\Rightarrow 0 \not\equiv \sum_d g_d(x_0, \ldots, x_n) T^d \in k[T]$

$\Rightarrow (\exists \lambda \in k^\times)\ 0 \neq \sum_d g_d(x_0, \ldots, x_n)\lambda^d = \sum_d g_d(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = g(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = 0$. Widerspruch.

$\Rightarrow \mathfrak{A} = (f_1, \ldots, f_m),\ f_j$ homogen.

$\Rightarrow Z = V_+(f_1, \ldots, f_m)$.

$$
\begin{aligned}
Z \ni (x_0 : \cdots : x_n) &\Leftrightarrow (\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) \in \overline{Y}\ \forall \lambda \in k^\times \text{ und } \neq 0 \\
&\Leftrightarrow f_i(x_0, \ldots, x_n) = 0\ \forall 1 \leq i \leq n,\ (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{P}^n
\end{aligned}
$$

□

Zu Bemerkung 49

Nach Satz 51 und Definition von $\mathcal{O}'_Z$ folgt: Ist X eine projektive Varietät und $U \subset X$ offen, so können wir

$\mathcal{O}_X(U) = \{f : U \to k \mid \forall x \in U\ \exists x \in V \underset{\text{offen}}{\subset} U,\ g, h \in k[X_0, \ldots, X_n]$ homogen vom gleichen Grad mit $h(v) \neq 0,\ f(v) = \frac{g(v)}{h(v)},\ \forall v \in V\}$. (*)

Insbesondere gilt:

Proposition 59 (orig. 56)**.** *Seien $V \subseteq \mathbb{P}^m(k)$, $W \subset \mathbb{P}^n(k)$ projektive Varietäten und*

$$V \subseteq \mathbb{P}^m(k) \xrightarrow{\phi} W \subseteq \mathbb{P}^n(k)$$

eine Abbildung. Dann ist ϕ eine Morphismus genau dann, wenn es zu jedem $x \in V$ eine offene Menge $x \in U_x \subset V$ und homogene Polynome $f_0, \ldots, f_n \subseteq k[X_0, \ldots, X_m]$ vom selben Grad existiert mit

$$\phi(y) = (f_0(y), \ldots, f_n(y)) \quad \forall y \in U_x$$

Proof.

- “$\Rightarrow$”, Übung.
- “$\Leftarrow$”.

  (i) ϕ stetig: Sei $Z \subseteq W$ abgeschlossen. Ohne Einschränkung $Z = V_+(g) \cap W$ für ein homogenes Polynom g. Dann berechnet sich das Urbild

  $$\phi^{-1}(Z) = V_+(g \circ \phi) \cap V.$$

  Auf U_x, $x \in V$, ist $g \circ \phi$ als homogenes Polynom in $X_0, \ldots, X_n$ gegeben.

  $\Rightarrow V(g \circ \phi) \cap U_x = \phi^{-1}(Z) \cap U_x$ abgeschlossen in U_x für alle x.

  $\Rightarrow \phi^{-1}(Z) \subseteq V$ abgeschlossen.

(ii) Zu zeigen: $\forall W' \subseteq W$ offen, $g \in \mathcal{O}_W(W')$ ist $g \circ \phi \in \mathcal{O}_V(\phi^{-1}(W'))$.

$\Rightarrow$ (*) Es ex. eine offene Umgebung W_y in W' mit $g = \frac{h}{q}$ auf W_y, h, q homogen vom Grad d.

$\Rightarrow \phi_{|U_x \cap \phi^{-1}(W_y) := \tilde{U}_x}$ ist auch von dieser Gestalt.

$\Rightarrow$ (*) $\frac{h(f_0,\dots,f_n)}{q(f_0,\dots,f_n)} = g \circ \phi_{|\tilde{U}_x} \in \mathcal{O}_V(\tilde{U}_x)$.

$\Rightarrow$ (Verkleben) $g \circ \phi \in \mathcal{O}_V(\phi^{-1}(V))$.

$\square$