13 Räume mit Funktionen

(Prototyp eines geometrischen Objektes, Spezialfall eines “geringten Raumes” vgl. später.) Sei K ein nicht notwendigerweise algebraisch abgeschlossener Körper.

Definition 31.

(i) Ein **Raum mit Funktionen** besteht aus den folgenden Daten:

- ein topologischer Raum X;
- eine Familie von Unter-K-Algebren

$$\mathcal{O}_X(U) \leq \mathrm{Abb}(U, K), \quad \forall U \subseteq X \text{ offen } d.d$$

1. Sind $U' \subseteq U \subseteq X$ offen und $f \in \mathcal{O}_X(U)$ so ist $f|_{U'} \in \mathcal{O}_X(U')$.
2. (**Verklebungsaxiom**) Sind $U_i \subseteq X$ offen, $i \in I$, und $U = \bigcup_i U_i$, $f_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$, $i \in I$ gegeben mit

$$f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j} \quad \forall i, j \in I$$

dann ist die eindeutige Abbildung

$$f : U \to K \text{ mit } f|_{U_i} = f_i$$

in $\mathcal{O}_X(U)$, bzw. $\exists! f \in \mathcal{O}(U)$ mit $f|_{U_i} = f_i$ für alle $i \in I$.

Bezeichne $\mathcal{O}_X$ oder auch $\mathcal{O}$ die oben genannte Familie $\{\mathcal{O}_X(U) \mid U \subseteq X \text{offen}\}$. Das Tupel $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt **Raum mit Funktionen**.

(ii) Ein **Morphismus** $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ von Räumen von Funktionen ist eine stetige Abbildung $\varphi : X \to Y$, so dass für alle $V \subseteq Y$ offen und $f \in \mathcal{O}_Y$ gilt:

$$f \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(V)} : \varphi^{-1}(V) \to K$$

liegt in $\mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(V))$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi"] & Y \\
\varphi^{-1}(V) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\varphi|"] \arrow[d, "f \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(V)}"'] & V \arrow[u, hook, "\text{offen}"'] \arrow[d, "f"] \\
K \arrow[r, equal] & K
\end{tikzcd}$$

Wir erhalten die Kategorie der *Räume mit Funktionen über K*.

Definition 32 (offene Unterräume von Räumen mit Funktionen)**.** Für $(X, \mathcal{O}_X)$ einen Raum mit Funktionen und $U \subseteq X$ offen bezeichne $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ den Raum mit Funktionen gegeben durch den topologischen Raum U mit Funktionen $\mathcal{O}_X|_U(V) := \mathcal{O}_X(V)$ für $V \underset{\text{offen}}{\subseteq} U \subseteq X$.

Ab jetzt betrachten wir Räume von Funktionen über einem festen, algebraisch abgeschlossenen Grundkörper k.