

5 Korrespondenz zwischen Radikalidealen und affinen algebraischen Mengen

Sei $V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affin algebraische Menge, $\mathfrak{a} \trianglelefteq k[\underline{T}]$ ein Ideal. **Es gilt:**

$$V(\mathfrak{a}) = V(\text{rad } \mathfrak{a})$$

mit $\text{rad } \mathfrak{a} = \{f \in k[\underline{T}] \mid f^n \in \mathfrak{a} \text{ für ein } n > 0\}$, da

$$f^n(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0,$$

d.h. verschiedene Ideale können dieselbe algebraische Menge beschreiben.

Definition 9. Für eine Teilmenge $Z \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ bezeichne

$$I(Z) := \{f \in k[\underline{T}] \mid f(x) = 0 \ \forall x \in Z\}$$

das **Verschwindungsideal von Z**, das Ideal aller auf Z verschwindenden Polynomfunktionen.

Satz 10.

(i) Sei $\mathfrak{a} \trianglelefteq k[\underline{T}]$ Ideal. Dann ist $I(V(\mathfrak{a})) = \text{rad}(\mathfrak{a})$.

(ii) Sei $Z \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ Teilmenge. Dann ist $V(I(Z)) = \overline{Z}$, der Abschluss von Z in $\mathbb{A}^n(k)$.

Beweis. Übungsblatt 2. □

\mathfrak{a} heißt **Radikalideal**, falls $\mathfrak{a} = \text{rad}(\mathfrak{a})$, oder äquivalent falls $k[\underline{T}]/\mathfrak{a}$ *reduziert* ist, d.h. keine nilpotente Elemente ungleich 0 hat.

Korollar 11. Wir erhalten eine 1-1 Korrespondenz

$$\begin{aligned} \{\text{abg. Mengen } \subseteq \mathbb{A}^n\} &\leftrightarrow \{\text{Radikalideale } \mathfrak{a} \trianglelefteq k[\underline{T}]\} \\ Z &\mapsto I(Z) \\ V(\mathfrak{a}) &\leftarrow \mathfrak{a} \end{aligned}$$

die sich zu einer 1-1 Korrespondenz

$$\begin{aligned} \{\text{Punkte in } \mathbb{A}^n\} &\leftrightarrow \{\text{max. Ideale in } k[\underline{T}]\} \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \begin{aligned} \mathfrak{m}_x &= I(\{x\}) \\ &= \ker(k[\underline{T}] \rightarrow k, \ T_i \mapsto x_i) \end{aligned} \end{aligned}$$

einschränkt.