AG1, V20, 21.12.2018

Ist $Z \subseteq X$ ein abg. Unterschema wie in (i) so ist (i, i^b) eine abg. Einbettung. Umgekehrt bestimmt jedes abg. Einbettung einen Iso von seiner Quelle auf ein eindeutiges abg. Unterschema seines Ziel

Warnung: Nicht für jedes Idealgarbe $\mathcal{I}$ ist

$$\left(Z = \operatorname{supp} \mathcal{O}_X/\mathcal{I},\ \mathcal{O}_X/\mathcal{I} \right)$$ ein Schema

Später: gilt gdw. $\mathcal{I}$ quasi-kompakt

Theorem 36: $X = \operatorname{Spec} A$. Dann ist die Abb

$$\{\text{Ideale } A\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\text{abg. Unterschema von } X\}$$

$$\mathfrak{a} \longmapsto V(\mathfrak{a}) \text{ (mit Schemata-Struktur via } \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a})\text{)}$$

eine Bijektion.

Insbesondere ist jedes abg. Unterschemata eines affines Schemata und ~~offen~~. affin.

Ag1, V21, 9.01.2019

Bew: Sei Z ein abg Unterschema, $i: Z \hookrightarrow X$ Inklusion

Def $\mathcal{O}_X \twoheadrightarrow i_* \mathcal{O}_Z$ surj

$I_Z := \mathrm{Kern}(\mathcal{O}_X(X) \to \Gamma(X, i_* \mathcal{O}_Z) = \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)) \trianglelefteq A$ Ideal

Falls Z von der Form $V(\mathfrak{a})$ (was zu zeigen ist!) gilt $I_Z = \mathfrak{a}$. Daher

reicht zz. $Z = V(I_Z)$ dazu:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, two heads] & \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z) \\ & A/I_Z \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

faktorisiert per definiton

$$\Rightarrow \quad \begin{tikzcd} Z \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr] & X \\ & \mathrm{Spec}(A/I_Z) \arrow[u, hook] \arrow[u, phantom, "\cong"] \end{tikzcd}$$

OE. $I_Z = 0$

$\mathrm{Mor}(Z, \mathrm{Spec}\, A) = \mathrm{Hom}(A, \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z))$ (sonst A durch A/I_Z ersetzen)

zz. $Z \hookrightarrow X$ Iso, $X = V(0)$

Beh Unterliegende stetige Abbildung topologische dann inj + abg.

($A \underset{\text{abg}}{\subseteq} Z \subset X \Rightarrow A \subset X$ abg.) ~~red~~ reicht zz. surj.

Sei $U \subseteq Z$ offen mit $(U, \mathcal{O}_{X|U})$ affin, so folgt $U \subset U \setminus D(\varphi(s)|_U) = V_U(\varphi(s)|_U)$

$= \varphi(s)|_U \in \mathcal{O}_Z(U)$ nilpotent $\underset{\text{all } U}{\overset{\text{endl.}}{\Longrightarrow}} \varphi(s^N) = 0 \Rightarrow s^N = 0 \Rightarrow V(s) = X$

$\Rightarrow i(Z) = X$

Beh. $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Z$ bij. Garben hom zz. inj (da surj nach Voraussetz.)

$x \in X$ bel $\mathcal{O}_{X,x} = A_{\mathfrak{p}_x}$

Sei $\frac{g}{1} \in \mathrm{Kern}(\mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{Z,x})$ Überdecke $Z = U \cup \bigcup_{i \in I} U_i$, $\# I < \infty$

mit (1) $(U, \mathcal{O}_{Z|U})$, $(U_i, \mathcal{O}_{Z|U_i})$ affin $\forall i$

(2) $x \in U$, $\varphi(g)|_U = 0$ (~~und $x \notin U_i \; \forall i$~~)

Wähle $s \in A$ mit $x \in D(s) \subseteq U$

Beh $\varphi(s^N g) = 0$ für ~~...~~ $N \gg 0$ ($\underset{\text{inj}}{\overset{\varphi}{\Longrightarrow}} s^N g = 0 \overset{s \notin \mathfrak{p}_x}{\Longrightarrow} \frac{g}{1} = 0$ ~~...~~ in $\mathcal{O}_{X,x}$

und Kern $= 0$.)

AG 1, V21, 09.01.2019

- Nach (2) $\varphi(g)|_{\mathcal{U}} = 0$, d.h. $\varphi(s\cdot g)|_{\mathcal{U}} = \varphi(s)|_{\mathcal{U}} \cdot \underbrace{\varphi(g)|_{\mathcal{U}}}_{=0} = 0$

- $D_{\mathcal{U}_i}(\varphi(s)|_{\mathcal{U}_i}) = D(s) \cap \mathcal{U}_i \subset \underline{\mathcal{U} \cap \mathcal{U}_i}$

$\Rightarrow \varphi(g)|_{D_{\mathcal{U}_i}(\varphi(s)|_{\mathcal{U}_i})} = 0$

d.h. $\frac{\varphi(g)}{1} = 0$ in $\mathcal{O}_Z(\mathcal{U}_i)_{\varphi(s)|_{\mathcal{U}_i}} \iff \varphi(s)|_{\mathcal{U}_i}^{N_i} \varphi(g) = 0$

$\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \| \; \varphi(s^{N_i} g)$

$N := \max_{i \in I} \{1, N_i\}$ $\square$

16. Unterschemata und Einbettung

Offene und abg Unterschemata sind Beispiel von

Def 37: (i) X Schemata: Ein Unterschemata von X ist ein Schema $(Y, \mathcal{O}_Y)$, ~~[illegible]~~ sodass $Y \subset X$ ein lokal abg Teilmenge von X ist und sodass Y eine abg. Unterschemata von dem offenen Unterschemata $\mathcal{U} = X \setminus (\bar{Y} \setminus Y) \subseteq X$ ist deren [illegible] Menge der größte offene Teilmenge von X ist mit $Y \subseteq_a \mathcal{U}$.
Dann gibt es nat. Morph $Y \to X$ von Schemata.
(ii) Eine Einbettung $Y \xrightarrow{i} X$ ist ein Morph von Schemata, deren unterliegende stetige Abb. ein Homöomorphismus von Y auf eine lokale abg Teilmenge von X und sodass $\forall y \in Y$:

$i_y^\#: \mathcal{O}_{X, i(y)} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{Y, y}$

surjiv ist.

Bem 38 (i) Y Unterschemata von X $\Rightarrow$ $Y \hookrightarrow X$ ist Einbettungen.
Umgekehrt [illegible] jeder Einbettungen unter Iso ihren Definit-Bereichs auf ein eindeutig Unterschemata ihres Zielbereiches

ii) Ist Y ein Unterschemata von X mit abg ~~offener~~ Menge ist Y abg. Unterschemata

iii) Das Analog von (ii) für offene Unterschemata ist i.a falsch

iv) Jede Einbettung $Y \xhookrightarrow{i} X$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr] & X \\ & \mathcal{U} = X \setminus (\overline{i(y)} \setminus i(y)) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Def 39 Z, Z' Unterschemata von

Z' majorisiert $Z :\iff$

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, hook] \arrow[dr] & X \\ & Z' \arrow[u, hook, "\exists"] \end{tikzcd}$$ (als Schemata)

Bem 40 (Übung) Sei P die Eigenschaft eines Schemata-Morph, eine offene (abg $\emptyset$) Einbettung zu sein. Dann:

i) Die Eig P ist lokal auf der Basis, d.h. für $Z \xrightarrow{f} X$ Morph, $X = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ offene Überd. hat f die Eigenschaft $\iff \forall_i\ f^{-1}(\mathcal{U}_i) \to \mathcal{U}$ hat Eig P

(ii) Der Komposition zwei Morph mit Eig P hat Eig P.

Bsp 41: (i) $I \subseteq R[T_0, \dots, T_n]$ homog Ideal $\Rightarrow V_+(I) \subseteq \mathbb{P}^n_R$ abg Unterschemata (nach ii) Bem 40, d. $V_+(I) \cap \mathcal{U}_i \subseteq \mathcal{U}_i$ abg.)

ii) Alle Unterschemata eines k-Schemas X v.e.T sind ~~abg~~ selbst v.e.T.

(Bew für $D(s)$ für X affin $\Rightarrow$ und für bel offene Unterschemata für abg. affine koordinatenring Quotient der Ringe des umgebenden Schemas.

15. Projektive und quasi-proj Schemata / k Kp.

Def X/k Schema heißt • projektive $:\iff \exists\, n \geq 0$ + abg Einbettung $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$

quasiproj $\iff \exists\ X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ Einbettung für ein $n \geq 0$

Bsp 43 i) $V_+(I)$ projektiv ii) $X = \operatorname{Spec} A$ affines k-Schema v.e.T $\Rightarrow X$ quasi-proj

$A = k[T_1, \dots, T_n]/_{\mathfrak{a}}$ mit

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[dr] & \mathbb{A}^n \arrow[d, hook, "j"] \\ & \mathbb{P}^n \end{tikzcd}$$

AG1, V21, 09.01.2019

18. Reduziert Unterschemata

$\operatorname{Spec} k[X,Y] \supset \operatorname{Spec}(k[X,Y]/Y^2) \supset \operatorname{Spec}(k[X,Y]/Y)$

Frage: Gibt es "kleinste" Unterschema? Setze $N_X \subset \mathcal{O}_X$ Garbifizierung der Prägaben $U \mapsto \operatorname{nil}(\Gamma(U, \mathcal{O}_X))$

$X_{red} := (X, \mathcal{O}_X/N)$

AG1, V, 11.01.2019

A DBR, $\underset{X:=}{\operatorname{Spec}}(A) = \{(0), m\}$ $x = (0)$, $U = \{x\}$, $m \in V \subseteq_{o} X \Rightarrow V = X$

Satz 44: Der geringte Raum $X_{red} = (X, \mathcal{O}_X/N)$ ist ein Schema, also ein abg. Unterschema von X mit denselben top. Raum wie X.

2) Falls $X' \subset X$ ein weiteres solches Unterschema ist, dann gibt es eine abg. Einbettung

$X_{red} \xrightarrow{f} X'$, s.d.

$$\begin{tikzcd} X_{red} \arrow[r, hook] \arrow[d] & X \\ X' \arrow[ur, hook, "="] & \end{tikzcd}$$

kommutiert

3) X_{red} ist reduziert und heißt <u>das unterliegende reduzierte Unterschema von X</u>

4) Falls $X = \operatorname{Spec} A$ affin, gilt $X_{red} = \operatorname{Spec}(A/\operatorname{nil}(A))$

Beweis: 1) OE $X = \operatorname{Spec} A \Rightarrow U \mapsto \operatorname{nil}(\Gamma(U, \mathcal{O}_X))$ ist bereits eine Garbe, da $\operatorname{nil}(\mathcal{O}_X(D(f))) = \operatorname{nil}(A_f) = \operatorname{nil}(A)\, A_f$

$\Rightarrow X_{red} = \operatorname{Spec}(A/\operatorname{nil} A)$ offensichtlich reduziert

Uni. Eig. zz. $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X/N$ faktorisiert, d.h. ~~kern~~

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_X/N \\ \mathcal{O}_{X'} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$\operatorname{Kern}(\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{X'}) \subseteq N$

noch zz.: $\ker(\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X'}(U)) \subset \Gamma(U, N) \quad \forall U$ offen affin

OE $X = \operatorname{Spec} A$, X' abg Unterschema $\Rightarrow$ affin: $X' = \operatorname{Spec} B$

zz. ~~nil~~ $\ker(A \to B) \subset \operatorname{nil} A$

Da ~~nil~~ nach Vorauss. $\operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ bijektiv

$\Rightarrow \ker(A \to B) \subset \bigcap_{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A} \mathfrak{q} = \operatorname{nil}(A)$ $\square$

Kor 45: $(X_{red}, i_X : X_{red} \to X)$ ist durch die UE eindeutig bis auf eindeutige Isomorph bestimmt.

Lemm 46: Einbettung sind ~~nicht~~ Monomorphismen

Bew: • stetige Abb $Z \hookrightarrow X$ klar

• Garbenabb. $i_Y^{\#}$ surj $\square$

Bew (Kor 45) Sei $X'_{\cancel{red}}$ ein weiteres Schema mit UE $\exists f : X_{red} \to X'_{red}$

$g : X'_{red} \to X_{red}$ s.d.

$$\begin{tikzcd} X_{red} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "i_X"'] & X'_{red} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i_X'"] & X_{red} \arrow[dl, "i_X"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

$i_X \circ (g \circ f) = i_X \circ id_{X_{red}}$

$\operatorname{Aut}(X_{red}, i_X) = \{id\}$
$\Rightarrow$ Eindeutig!

$\overset{i_X}{\underset{\text{Mono}}{\Rightarrow}}$ $g \circ f = id_{X_{red}} \underset{\text{Analog}}{=} f \circ g$ $\square$

$(\ )_{red}$ ist Funktor:

Prop 47: $X \xrightarrow{f} Y$ Schemata-Morph

$\Rightarrow \exists_1\ X_{red} \xrightarrow{f_{red}} Y_{red}$, d.h.

$$\begin{tikzcd} X_{red} \arrow[r, hook, "i_X"] \arrow[d, "f_{red}"'] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y_{red} \arrow[r, hook, "i_Y"] & Y \end{tikzcd}$$

Für weiterer Morph. $Y \xrightarrow{g} Z$ gilt $(g \circ f)_{red} = g_{red} \circ f_{red}$.

Bew: i_Y Monomorph $\Rightarrow$ f_{red} eindeutig.

~~Existenz: A~~ AG1, V, 21.1.2019

Existenz: Nach Verklebung-Lemma OE $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$

$f \triangleq \varphi : B \to A$

$\Rightarrow \varphi(\text{nil}(B)) \subset \text{nil}(A)$

$\Rightarrow \varphi_{red} : B/\text{nil}(B) \longrightarrow A/\text{nil}(A) \Rightarrow f_{red} : \operatorname{Spec}(A/\text{nil}(A)) \to \operatorname{Spec}(B/\text{nil}B)$

$\square$

Prop 48 X Schema, $Z \subset X$ lokal abg Teilmenge. Dann ex. ein eindeutig bestimmtes red Unterschem mit top. Raum Z.

Bew: Eindeutigkeit: Kor 45

Existenz: (Verklebungslemma) OE $X = \operatorname{Spec} A$ affin und $Z \subset X$ abg. (sonst Überdeckung von X zu $Z \subset_a U \subset_a X$) $\Rightarrow \exists \mathfrak{a} \subset A$: $Z = V(\mathfrak{a}) \Rightarrow Z' = \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a})$ ist abg. Unterschema von X mit top. Raum

$\overset{\text{Satz 44}}{\Rightarrow} \exists Z'_{red} \subset Z' \subset X$ $\square$

Dammit besitzt für eine lokal abg Teilmenge Z der geordneten Menge (bzgl "≤") von Unterschemata, denen top. Raum Z umfassen, einen eindeutigen minimal Element Z_{red}, das reduzierte Unterschema mit unterliegend Raum Z.