12 Funktorielle Eigenschaften von $\Gamma(X)$

Satz 29. *Für einen Morphismus $X \xrightarrow{f} Y$ affiner algebraischer Mengen definiert*

$$\begin{aligned} \Gamma(f): \quad \Gamma(Y) &\to \Gamma(X) \\ g &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

ein Homomorphismus von k-Algebren. Der so definierte kontravariante *Funktor*

$$\Gamma : \{\textit{affine algebraische Mengen}\} \to \{\textit{reduzierte endl. erz. } k\textit{-Algebren}\}$$

liefert eine Kategorienäquivalenz, welche durch Einschränkung eine Äquivalenz

$$\Gamma : \{\textit{irred. aff. alg. Mengem}\} \to \{\textit{integre endl. erz. } k\textit{-Algebren}\}$$

induziert.

Beweis. Sei $Y \xrightarrow{g} \mathbb{A}^1(k) \in \Gamma(Y)$ ein Morphismus. Es folgt:

$$g \circ f : X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} \mathbb{A}^1(k)$$

ist Morphismus, d.h. $g \circ f \in \Gamma(X)$. $\Gamma(f) : \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$ ist ein k-Algebren-Homomorphismus mit $\Gamma(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\Gamma(X)}$. Da ferner gilt, dass $\Gamma(f_1 \circ f_2) = \Gamma(f_2) \circ \Gamma(f_1)$ ist Γ ein kontravarianter Funktor.

Behauptung. Γ ist volltreu, d.h.

$$\begin{aligned} \Gamma : \hom(X, Y) &\to \hom_{k\text{-Alg}}(\Gamma(Y), \Gamma(X)) \\ f &\mapsto \Gamma(f) \end{aligned}$$

ist *bijektiv* für alle affinen algebraischen Mengen X, Y.

Beweis. Wir konstruieren eine Umkehrabbildung wie folgt: Zu $\varphi : \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$ für $X \subseteq \mathbb{A}^m(k)$, $Y \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ existiert ein Lift $\tilde{\varphi}$, s.d.

$$\begin{tikzcd} k[T_1', \dots, T_n'] \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] \arrow[d, two heads] & k[T_1, \dots, T_m] \arrow[d, two heads] \\ \Gamma(Y) \arrow[r, "\varphi"] & \Gamma(X) \end{tikzcd}$$

kommutiert; $\tilde{\varphi}(T_i') := f_i$ mit $f_i \in \pi^{-1}(\varphi(T_i')) \subseteq k[T_1, ..., T_n]$, wobei $\pi : k[\underline{T}] \to \Gamma(X)$ die kanonische

Projektion bezeichne. Definiere:

$$\begin{aligned} f: X &\to Y \\ x = (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto (\tilde{\varphi}(T_1')(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \tilde{\varphi}(T_n')(x_1, \ldots, x_n)) \end{aligned}$$

$\square$

Behauptung. Γ ist essentiell surjektiv, d.h. zu jeder reduzierten endlich erzeugten k-Algebra A existiert eine affine algebraische Menge X mit $A \cong \Gamma(X)$.

Beweis. Da nach Voraussetzung $A \cong k[T]/\mathfrak{a}$ für ein Radikalideal $\mathfrak{a}$, können wir etwa $X := V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ setzen. Der Rest folgt aus Satz 28. $\square$

$\square$

Satz 30. *Sei $f: X \to Y$ ein Morphismus affiner algebraischer Mengen und $\Gamma(f): \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$ der zugehörige Homomorphismus der Koordinatenringe. Dann gilt $\forall x \in X$: $\Gamma(f)^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{m}_{f(x)}$.*

Beweis.

$$\Gamma(f)^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \{g \in \Gamma(Y) \mid g \circ f \in \mathfrak{m}_x\} = \{g \in \Gamma(Y) \mid g(f(x)) = 0\} = \mathfrak{m}_{f(x)},$$

da $\Gamma(f)(g) = g \circ f$. $\square$