8 Quasikompakte und noethersche topologische Räume

Definition 19. Ein topologischer Raum X heißt **quasikompakt**, falls jede offene Überdeckung von X eine *endliche* Teilüberdeckung enthält. („quasi“ deutet an, dass X in der Regel nicht Hausdorff'sch ist!). Er heißt **noethersch**, wenn jede absteigende Kette

$$X \supseteq Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \cdots$$

abgeschlossener Teilmengen von X stationär wird ($\Leftrightarrow$ jede aufsteigende Kette offener Teilmengen wird stationär).

Lemma 20. *Sei X ein noetherscher topologischer Raum. Dann gilt:*

(i) Jede abgeschlossene Teilmenge $Z \subseteq X$ ist noethersch.

(ii) Jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ ist quasikompakt.

(iii) Jeder abgeschlossene Teilraum $Z \subseteq X$ besitzt nur endlich viele irreduzible Komponenten.

Beweis.

(i) Nach Definition, da abgeschlossene Mengen von Z auch solche von X sind.

(ii) $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ offen; Angenommen U wäre nicht quasikompakt. Dann gibt es eine Folge $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I$ von Teilmengen mit

$$V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \neq U \quad \text{für } V_j = \bigcup_{i \in I_j} U_i.$$

Widerspruch zu noethersch.

(iii) Es reicht zu zeigen: Jeder noethersche Raum ist Vereinigung endlich vieler irreduzibler Teilmengen. Da X noethersch ist, folgt mit dem *Lemma von Zorn* dass jede nichtleere Menge von algebraischen Teilmengen in X ein minimales Element besitzt.

Angenommen:$\mathcal{M} := \{Z \subseteq X \text{ abg.} \mid Z \text{ ist } \textbf{nicht} \text{ endl. Vereinigung irred. Mengen}\}$ wäre nichtleer.

$\Rightarrow \exists$ minimales Element, sagen wir Z, in $\mathcal{M}$.

$\Rightarrow Z$ ist nicht irreduzibel.

$\Rightarrow Z = Z_1 \cup Z_2$ mit $Z_1, Z_2 \subsetneq Z$ abgeschlossen.

$\Rightarrow$ (Z minimal) $Z_1, Z_2 \notin \mathcal{M}$

$\Rightarrow Z \notin \mathcal{M}$. Widerspruch.

□

Satz 21. *Jeder abgeschlossene Teilraum $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ ist noethersch.*

Beweis. Nach dem obigen Lemma ist nur zu zeigen, dass $\mathbb{A}^n(k)$ noethersch ist.

Absteigende Ketten abgeschlossener Teilmengen sind nach *Korollar 11* in 1-1 Korrespondenz mit aufsteigenden Ketten von (Radikal-)Idealen in $k[\underline{T}]$. Da $k[\underline{T}]$ nach dem Hilbertschen Basissatz noethersch ist, werden letzere Ketten stationär. □

Korollar 22 (Primärzerlegung)**.** *Sei $\mathfrak{a} = \mathrm{rad}(\mathfrak{a}) \trianglelefteq k[\underline{T}]$ ein Radikalideal. Dann gilt: $\mathfrak{a}$ ist Durchschnitt von endlich vielen Primidealen, die sich jeweils paarweise nicht enthalten; diese Darstellung ist eindeutig bis auf Reihenfolge.*

Beweis. $V(\mathfrak{a}) = \bigcup_{i=1}^n V(\mathfrak{b}_i)$, $\mathfrak{b}_i$ Primideal. Mit Satz 10 folgt:

$$\mathfrak{a} = \mathrm{rad}(\mathfrak{a}) = I(V(\mathfrak{a})) = \bigcap_{i=1}^n \underbrace{I(V(\mathfrak{b}_i))}_{\mathfrak{b}_i \text{ minimale Primideale (17)}}$$

□