

2 Die Zariski-Topologie

Definition 2. Sei $M \subseteq k[T_1, \dots, T_n] =: k[\underline{T}]$ eine Teilmenge. Mit

$$V(M) := \{(t_1, \dots, t_n) \in k^n \mid f(t_1, \dots, t_n) = 0 \ \forall f \in M\}$$

bezeichnen wir die gemeinsame **Nullstellen-(Verschwindungs-)Menge** der Elemente aus M . (Manchmal auch $V(f_i, i \in I)$ statt $V(\{f_i, i \in I\})$).

Notation Wir schreiben auch $V(f_i, i \in I)$ statt $V(\{f_i \mid i \in I\})$

2.1 Eigenschaften

- $V(M) = V(\mathfrak{A})$, wenn $\mathfrak{A} = \langle M \rangle_{k[\underline{T}]}$ das von M erzeugte Ideal in $k[\underline{T}]$ bezeichnet.
- Da $k[\underline{T}]$ noethersch (Hilbertscher Basissatz) ist, reichen stets endlich viele $f_1, \dots, f_n \in M$:

$$V(M) = V(f_1, \dots, f_n) \quad \text{falls } \mathfrak{A} = \langle f_1, \dots, f_n \rangle.$$

- $V(-)$ ist **inklusionsumkehrend**, $M' \subseteq M \implies V(M) \subseteq V(M')$.

Satz 3. Die Mengen $V(\mathfrak{A})$, $\mathfrak{A} \trianglelefteq k[\underline{T}]$ ein Ideal, sind die **abgeschlossenen** Mengen einer Topologie auf k^n , der sogenannten **Zariski-Topologie**.

$$(i) \quad \emptyset = V((1)), \quad k^n = V(0).$$

$$(ii) \quad \bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{A}_i) = V\left(\sum_{i \in I} \mathfrak{A}_i\right) \text{ für beliebige Familien } (\mathfrak{A}_i)_{i \in I} \text{ von Idealen.}$$

$$(iii) \quad V(\mathfrak{A}) \cup V(\mathfrak{B}) = V(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \text{ für } \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \trianglelefteq k[\underline{T}] \text{ Ideale.}$$

Beweis. Übung / Algebra II.

□