## 4.3 Faserprodukte in bel. Kategorien

$\mathcal{C}$ Kategorie, $S \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $X \xrightarrow{f} S$, $Y \xrightarrow{g} S$ Morph.

<u>Def 4.6:</u> Ein Tripel $(Z, p, q)$ mit $Z \in \mathcal{C}$ und Morph. $p: Z \to X$, $q: Z \to Y$ heißt <u>**Faserprodukt** von $X$ und $Y$ über $S$</u> (bzgl. $f$ und $g$), falls für jedes Obj. $T \in \mathcal{C}$ und für alle Paare $(u, v)$ ~~und~~ von Morph. $u: T \to X$, $v: T \to Y$ mit $f \circ u = g \circ v$ genau ein Morph. $w: T \to Z$ ex., d.d. $p \circ w = u$ und $q \circ w = v$.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dashed, "\exists_1 w"] \arrow[drr, bend left, "u"] \arrow[ddr, bend right, "v"'] & & \\
& X \times_S Y \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"] & X \arrow[d, "f"] \\
& Y \arrow[r, "g"'] & S
\end{tikzcd}$$

<u>Notation:</u> $X \times_S Y$ od. $X \times_{f,S,g} Y := Z$

$(u, v)_S := w$

Ist $S$ ein finales Obj. in $\mathcal{C}$, so ist

$X \times_S Y = X \times Y$ das kategorielle Produkt.

<u>Bsp 7.</u> (1) In der Kat. der Mengen ex. bel. Faserprodukte:

$$X \times_S Y := \{ (x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y) \}$$

$$\begin{tikzcd}
X \times_S Y \arrow[d, "p"] \arrow[r, "q"] & Y \\
X &
\end{tikzcd} \qquad x \mapsfrom (x,y) \mapsto y$$

1

(2) Top  Kat. top. Räume.  $X \xrightarrow{f} S$, $Y \xrightarrow{g} S$ stetig Abb.

$\{(x,y) \mid f(x)=g(y)\} \subset X \times Y$  def $X \times_S Y$ in Top.
mit der Top.  Produkttop.

<u>Ab jetzt:</u> Alle Faserprodukte mögen in $\mathcal{C}$ existieren.

$h: T \to S$  (kurz $T$) heißt <u>S-Objekt</u>
$f: X \to S$  mit Strukturmorph. $h$

$\mathrm{Hom}_S(T,X)$  Morph. $T \xrightarrow{w} X$ mit $f \circ w = h$: <u>S-Morph.</u>
$=: X_S(T)$  T-wertige Punkte von $X$ (über $S$)
def. Kat $\mathcal{C}/S$ mit finalem Objekt $id_S$

<u>Faserprodukt $X \times_S Y$ = Produkt von S-Objekten $f$ und $g$ in $\mathcal{C}/S$</u>

$$(X \times_S Y)(T) = X_S(T) \times Y_S(T)$$

$$\text{(UAE)} \quad \mathrm{Hom}_S(T, X \times_S Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_S(T,X) \times \mathrm{Hom}_S(T,Y)$$

$$w \longmapsto (p \circ w, q \circ w)$$

für alle $h: T \to S$

# Funktorialität

$X, Y, X', Y' \in \mathcal{C}/S$ $\quad u: X \to X'$, $v: Y \to Y'$ $S$-Morph.

$\Rightarrow \exists_1$ Morph $u \times_S v$ (oder nur $u \times v$) : $X \times_S Y \to X' \times_S Y'$

d.h.

$$\begin{tikzcd}
X \times_S Y \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "u \times v"] & X \arrow[dr, "u"] & \\
Y \arrow[dr, "v"'] & X' \times Y' \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[d] \\
& Y' \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Nämlich $u \times v := (u \circ p, v \circ q)_S$ $\quad$ (UE von $X' \times_S Y'$ !)

<u>Yoneda-Lemma</u> $\Rightarrow$:

Morph in $\mathcal{C}/S$

$f: X \to Y$ $\quad \longleftrightarrow \quad$ $\left(f_S(T) : X_S(T) \to Y_S(T)\right)_{T \in \mathcal{C}/S}$

funktoriell in $T$

<u>Prop 4.8 (Eigenschaften des Faserprodukts)</u> $\quad X, Y, Z \in \mathcal{C}/S$

$\exists$ <u>kanonische Isom.</u> (funktoriell in $X, Y, Z$) auf <u>$T$-wertigen Pkt</u>

$X_S(T) \times S_S(T) \to X_S(T)$

a) $\quad X \times_S S \xrightarrow{\sim} X$ $\quad , \quad (x, h) \mapsto x$

b) $\quad X \times_S Y \xrightarrow{\sim} Y \times_S X$ $\quad , \quad (x, y) \mapsto (y, x)$

c) $\quad (X \times_S Y) \times_S Z \xrightarrow{\sim} X \times_S (\cancel{Y} \times_S Z)$ $\quad , \quad ((x, y), z) \mapsto (x, (y, z))$

für alle $h: T \to S$

Ein kommutatives Diagramm in $\mathcal{C}$ $\qquad$ $Z \in \mathcal{C}/S$ mit $f\circ u = g \circ v$

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{u} & X \\ {\scriptstyle v}\downarrow & \square & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow[g]{} & S \end{array}$$

heißt **kartesisch**, falls $(u,v)_S : Z \to X \times_S Y$ ein Isom. in $\mathcal{C}$ (und damit automatisch in $\mathcal{C}/S$ !)

Nach Yoneda-Lemma ist das äquivalent dazu, dass das induz. Diagr.

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(T,Z) & \xrightarrow{u(T)} & \mathrm{Hom}(T,X) \\ {\scriptstyle v(T)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f(T)} \\ \mathrm{Hom}(T,Y) & \xrightarrow[g(T)]{} & \mathrm{Hom}(T,S) \end{array}$$

kartesisch ist für alle $T \in \mathcal{C}$ (Bsp. 4.7)

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,Z) \\ {\scriptstyle s}\downarrow{\scriptstyle (u,v)_S(T)} \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X\times_S Y) \end{array} \overset{!}{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,X) \times_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,S)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,Y) = \{(h_1,h_2) \mid f\circ h_1 = g \circ h_2\}$$

$$h \mapsto (p\circ h, q\circ h)$$

$$h = (p\circ h, q \circ h)_S \mapsfrom (h_1,h_2)$$

$T \xrightarrow{h} X \times_S Y$

Prop 4.10 Sei

$$\begin{tikzcd} X'' \arrow[r, "g'"] \arrow[d] & X' \arrow[r, "g"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d] \\ S'' \arrow[r, "f'"] & S' \arrow[r, "f"] & S \end{tikzcd}$$

kommutativ + rechts kart. Dann gilt

$$\begin{tikzcd} X'' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X' \arrow[d] \\ S'' \arrow[r] & S' \end{tikzcd} \Leftrightarrow \begin{tikzcd} X'' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d] \\ S'' \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

Bew. In Kat. $\mathcal{C} = \{$Mengen$\}$ + Yoneda-Lemma (Übung) □

## 4.4 Faserprodukte von Schemata

<u>Bel.</u> $X, Y \in Sch/_S \Rightarrow X \times_S Y$ ex.

<u>Fall 1.</u> $X, Y, S$ affin

<u>Prop. 4.11</u>

$$\begin{array}{ll} R \longrightarrow B & b \\ \downarrow \quad \circlearrowleft \quad \downarrow \beta & \downarrow \\ A \xrightarrow{\alpha} A \otimes_R B & 1 \otimes b \\ a \longmapsto a \otimes 1 & \end{array} \quad R\text{-Alg.} \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{ccc} Z := \mathrm{Spec}(A \otimes_R B) & \xrightarrow{q} & Y = \mathrm{Spec}(B) \\ p \downarrow & & \downarrow \\ X = \mathrm{Spec}\, A & \longrightarrow & S = \mathrm{Spec}(R) \end{array}$$

$\Rightarrow (Z, p, q) = X \times_S Y$

<u>Bew.</u> Weg $\mathrm{Hom}_{Sch}(T, \mathrm{Spec}\, C) = \mathrm{Hom}_{Ring}(C, \Gamma(T, \mathcal{O}_T))$ $(\forall\, T \in Sch)$

erhält man 2 funktoriell Isom. in $T$ ✓

$$\mathrm{Hom}_{Sch/_S}(T, Z) \cong \mathrm{Hom}_{R\text{-Alg}}(A \otimes_R B, \Gamma(T, \mathcal{O}_T))$$
$$\underset{\alpha}{\cong} \mathrm{Hom}_{R\text{-Alg}}(A, \Gamma(T, \mathcal{O}_T)) \times \mathrm{Hom}_{R\text{-Alg}}(B, \Gamma(T, \mathcal{O}_T))$$
$$\quad f \circ \alpha \qquad\qquad f \circ \beta$$
$$\cong \mathrm{Hom}_{Sch/_S}(T, X) \times \mathrm{Hom}_{Sch/_S}(T, Y)$$

$(\forall\, T \in Sch/_S)$ $\square$

~~UAE $\otimes$ ... Hom (~~

$$\begin{array}{c} R \\ \swarrow \quad \searrow \\ A \rightarrow T \\ B \rightarrow T \\ \uparrow g \nearrow \\ R \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{(f, g)} & \\ \downarrow & & \downarrow \\ A \otimes_R B & \longrightarrow T & (f(a), g(b)) \end{array}$$

**Theorem 4.12** $S \in Sch$, $\underset{\downarrow S}{X}, \underset{\downarrow S}{Y} \in Sch/_S \Rightarrow X \times_S Y \in Sch$ existiert

Bew: Erst Kor 4.13 formulieren!

Idee: Überdecke $S, X, Y$ jeweils durch offene affine Überd. + Verklebe die affinen Faserprodukte.

Schritt 1: Sei $j: U \hookrightarrow X$ offenes Unterschema + existiere $(X \times_S Y, p, q)$

$\overset{!}{\Longrightarrow}$ $p^{-1}(U) \subset X \times_S Y$ offenes Unterschema ~~ist~~ ~~selbst~~

ist $U \times_S Y$ $(p|_{p^{-1}(U)}, q|_{p^{-1}(U)})$

denn: Für $h: T \to p^{-1}(U)$ erhalte an

$$f := p \circ h : T \to U \quad \text{mit} \quad x|_U \circ f = y \circ g$$
$$g := q \circ h : T \to Y$$

---

Zu $f: T \to U$ mit $x_U \circ f = y \circ g$
$g: T \to Y$

(UE $X \times_S Y$)
$\Rightarrow \exists_1 \; h': T \to X \times_S Y$ mit $p \circ h' = j \circ f \Rightarrow p \circ h' \subset U$
$q \circ h' = g$

$\Rightarrow h'$ faktorisiert durch $p^{-1}(U)$, d.h. eindeutige

$h: T \to p^{-1}(U)$ d.d. $f = p \circ h$
$g = q \circ h$.

Schritt 2: $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ offene Überd.

Bel. Fall: $Z_i := U_i \times_S Y$ ex. $\forall i$, zu zeigen $X \times_S Y$

dann: $\begin{array}{c} Z_i \\ \downarrow \\ Y \end{array} \leftarrow pr_2$

$p_i : Z_i \xrightarrow{pr_1} U_i$, $Z_{ij} := p_i^{-1}(U_i \cap U_j) \subset Z_i$

$p_{ij} := p_i|_{Z_{ij}} : Z_{ij} \to U_i \cap U_j$

Schritt 1 $\Rightarrow$ $Z_{ij} \cong (U_i \cap U_j) \times_S Y \cong Z_{ji}$

$\Rightarrow \exists_1\ \varphi_{ji} : Z_{ij} \xrightarrow[\text{Iso}]{\cong} Z_{ji}$ mit $p_{ji} \circ \varphi_{ji} = p_{ij}$

(bzw. $\varphi_{ij}$)

+ Kozykel-Bedingung (da Isos eindeutig!)

$Z :=$ Verklebung von $Z_i$ entlang $Z_{ij}$ via $\varphi_{ij}$

$\begin{array}{c} Z_i \\ \downarrow \\ Y \end{array}$ verklebt zu $\begin{array}{c} Z \\ \downarrow q \\ Y \end{array}$, $\begin{array}{c} Z \\ \downarrow p \\ X \end{array}$ ebenso.

Bh: $(Z, p, q)$ ist Faserprodukt.

$f: T \to X$, $g: T \to Y$ mit $x \circ f = y \circ g$

Def $f_i : T_i := f^{-1}(U_i) \to U_i$ $(f|_{T_i})$

$\Rightarrow \exists_1\ h_i : T_i \to Z_i$ mit $p_i \circ h_i = f_i$, $q \circ h_i = g|_{T_i}$

verträgl. zu $h : T \to Z$ mit $p \circ h = f$

$q \circ h = g$ ☑

<u>Schritt 3:</u> Sei $W \subseteq S$ offene Teilmenge.

Falls $(X \times_S Y, p, q)$ ex., gilt:

$$\left((x \circ p)^{-1}(W) = (y \circ q)^{-1}(W), p_1, q_1\right) = x^{-1}(W) \times_W y^{-1}(W)$$

<u>denn:</u> wie unter ① nachrechnen

<u>Schritt 4:</u> $S = \bigcup S_i$ offene Überd., $X_i := x^{-1}(S_i)$

$Y_i := y^{-1}(S_i)$

Falls $X_i \times_{S_i} Y_i$ ex. $\forall i$, so auch $X \times_S Y$

(mit offener Überd. $(X_i \times_{S_i} Y_i)_i$ )

<u>Bew:</u> wie (2) mit (3) statt (1)!

<u>Schritt 5:</u> $X, Y, S$ bel. Schemata

OE $S$ affin (wg. (4), und überd. $S$ durch offene affine!)

OE $X$ affin (wg. (2), und $X$ offen affin überdeckt)

OE $Y$ affin (wg. (2) + Symmetrie)

Bew. folgt aus Prop 4.11 )

<u>Konvention:</u> $X \times_R Y := X \times_{\operatorname{Spec} R} Y$ $\qquad R, B$ Ringe

$X \otimes_S B := X \times_S \operatorname{Spec} B$

**Kor 4.13** $X \times_S Y = \bigcup_i \bigcup_{j \in J_i,\, k \in K_i} X_{ij} \times_{S_i} Y_{ik}$

ist offene Überdeckung, wobei

$S = \bigcup S_i$ offene Überdeckung, $X_i = p^{-1}(S_i)$, $Y_i = q^{-1}(S_i)$

$X_i = \bigcup_{j \in J_i} X_{ij}$ offene Überdeckung

$Y_i = \bigcup_{k \in K_i} Y_{ik}$

**Betrachte:** $X, Y \in Sch/S$, $f : X' \to X$ Morph. in $Sch/S$

$$\begin{tikzcd}
Z' = X' \times_S Y \arrow[r, "g = f \times_S \mathrm{id}_Y"] \arrow[d, "p'"] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & Z = X \times_S Y \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d] \\
X' \arrow[r, "f"] & X \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

Da $q \circ g = q'$ Basiswechsel auf $Y$ ist das große und damit alle Quadrate kartesisch (4.10).

**Prop. 4.14.** $f$ induziere Homöomorph. von $X'$ auf $f(X')$ und

$f^\#_{x'} : \mathcal{O}_{X, f(x')} \to \mathcal{O}_{X', x'}$ sei surjektiv $\forall\, x' \in X'$. (*)

Dann gilt

(1) $g$ ist ein Homöomorph. von $Z'$ auf $g(Z') = p^{-1}(f(X'))$

(2) $\forall z' \in Z'$ gilt für das kommutative Diagramm lokaler Ringe

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{Z',z'} & \mathcal{O}_{Z,g(z')} \arrow[l, "g^\sharp_{z'}"'] \\
\mathcal{O}_{X',p(z')} \arrow[u] & \mathcal{O}_{X,p(g(z'))} \arrow[l, "f^\sharp_{p(z')}"] \arrow[u, "p^\sharp_{g(z')}"']
\end{tikzcd}$$

$g^\sharp_{z'}$ ist surjektiv,

$\ker(g^\sharp_{z'})$ wird von $p^\sharp_{g(z')}\left(\ker f^\sharp_{p(z')}\right)$ erzeugt.

<u>Bew:</u> (1), (2) kann man lokal auf $S$, $Y$, $X$ verifizieren.

OE $S = \operatorname{Spec} R$, $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$ affin.

$f \longleftrightarrow \varphi : A \longrightarrow \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'})$ $R$-Algebra-Hom.

$\searrow A/\ker\varphi \nearrow$

$f$ faktorisiert als $X' \xrightarrow{f_1} \operatorname{Spec}(A/\ker\varphi) \xrightarrow{f_2} \operatorname{Spec}(A) = X$

abg. Immersion

$\mathcal{O}_X \to (f_2)_*$ surjektiv

\+ Homöomorphismus auf abg. Teilmenge

$f$ erfüllt (*)

$\Rightarrow$ $f_1$ erfüllt (*)

Daher 2 Fälle zu beweisen.

1. $j$ ist abg. Immersion oder $j_2$

2. $j^\#_{x'}$ ist surjektiv $\forall x' \in X'$ $j_1$

Lemma: $A \hookrightarrow \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'})$

$\Downarrow$ $\Rightarrow j^\#_{x'}$ surjektiv $\forall x' \in X'$

$j: X' \to \mathrm{Spec}(A)$

Bew.:

zu 1.) $j: X' = \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a}) \longrightarrow X = \mathrm{Spec}(A)$ $\mathfrak{a} \subset A$ Ideal

(abg. Unterschema affiner Sch. ist affin!)

Prop 4.11

$\Rightarrow Z, Z'$ affin

und $g$ entspricht $A \otimes_R B \twoheadrightarrow A/\mathfrak{a} \otimes_R B$ , also abg. Immersion

$R$-Alg.

$$\begin{array}{ccc} A \otimes_R B & \longrightarrow & A/\mathfrak{a} \otimes_R B \\ \uparrow p & & \uparrow p' \\ A & \xrightarrow{\phi} & A/\mathfrak{a} \end{array}$$

$g(Z') = p^{-1}(j(X')) \Rightarrow p^{-1}(\mathrm{ker}(j)) A \otimes_R B = \mathrm{ker}\, g$

zu 2.) $j^\#: j^{-1}(\mathcal{O}_X) \to \mathcal{O}_{X'}$ ist iso. Man

$(X', \mathcal{O}_{X'}) \xrightarrow{\sim} (j(X'), \mathcal{O}_{X|j(X')})$ als lokal geringter Raum

leicht zu zeigen: $(p^{-1}(j(X')), \mathcal{O}_{Z|p^{-1}(j(X'))})$ ist ein Faserprodukt

von $X'$ mit $Z$ über $X$ in Kat. lokal gr. Räume,

also erst recht in $\underline{\mathrm{Sch}}$ $(Z', \mathcal{O}_{Z'}) \to (p^{-1}(j(X')), \mathcal{O}_{Z|p^{-1}(j(X'))})$

Also ist $g$ iso. $\square$

Bsp. Bsp. 4.14 gilt z. B. folgend Situation.

(1) $j$ Immersion von Schemata

(2) $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \to X$ für $x \in X$ kanonische Abb.

(3) $\operatorname{Spec} \kappa(x) \to X$ (~~Bsp. 2.11~~) (vgl. (3.4) + Bsp. 2.11 (2))

## (4.15) Beispiele

**Produkte affiner Räume:**

$R$ Ring, $\mathbb{A}^n_R = \operatorname{Spec}(R[T_1, \dots, T_n])$

$\Rightarrow \mathbb{A}^n_R \times_R \mathbb{A}^m_R \cong \mathbb{A}^{n+m}_R$, da

$$R[T_1, \dots, T_n] \otimes_R R[T_{n+1}, \dots, T_{n+m}] \cong R[T_1, \dots, T_{n+m}].$$

**Produkte von Prävarietäten**

$k$ alg. abg., $X$ $k$-Schema v. endl. Typ.

(3.14): $X_k(k) = X_0$ (abg. Pkt. von $X$)

$x: \operatorname{Spec} k \to X \longmapsto$ Bild

$X \longmapsto (X_0, \mathcal{O}_X|_{X_0})$

$\{$ integr. Sch. v. e. T./$k$ $\} \longleftrightarrow \{$ Prävarietäten/$k$ $\}$

Lemma 4.15. $X, Y$ integre $k$-Schema $\Rightarrow X \times_k Y$ integrales $k$-Schema

(Bew. später)

$X, Y$ integral v. e. Typ $\Rightarrow Z = X \times_k Y$ integral von endl. Typ

( $X = \overset{\text{endl}}{\bigcup} X_i$ , $Y = \overset{\text{endl}}{\bigcup} Y_i$ $\Rightarrow \dot{\bigcup} X_i \times_k Y_k$
affine v. e. T. , affin

OE $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$ $\Rightarrow X \times Y = \operatorname{Spec}(A \otimes_k B)$
$A, B$ e. e. $k$-Alg. $\Rightarrow$ $A \otimes_k B$ e. e. $k$-Algebra )

$X_0, Y_0, Z_0$

$Z_0 = (X \times_k Y)_{\bar{k}}(\bar{k}) = X_{\bar{k}}(\bar{k}) \times Y_{\bar{k}}(\bar{k}) = X_0 \times Y_0$

UE

d.h. das Faserprodukt von 2 Prävarietäten $X_0, Y_0$ ist wieder eine Prävarietät $Z_0$ ( als volle Unterkat. der Kat. $\operatorname{Sch}/k$ )

$\rightsquigarrow Z_0 = X_0 \times Y_0$ (als Menge)

Projektion $Z_0 \to X_0, Y_0$ sind stetig,

aber i. a. ist Top. auf $Z_0$ feiner als Produkttop.

von $X_0$ und $Y_0$.

(4.6) **Basiswechsel**

$\mathcal{C}$ bel. Kat. mit Faserprodukten

$S' \xrightarrow{u} S$ Morph. in $\mathcal{C}$

$X \to S$ $S$-Objekt

$\Rightarrow X \times_S S' \to S'$ $S'$ Objekt, Bez. $u^*(X)$ oder $X_{(S')}$

heißt Urbild / Basiswechsel von $X$ bzgl. $u$

$f: X \to Y$ Morph. von $S$-Objekten

$\Rightarrow f \times_S id_{S'}: X \times_S S' \to Y \times_S S'$ — " — von $S'$-Obj.

$\overset{\shortparallel}{u^*(f)} =: f_{(S')}$ Basiswechsel von $f$ bzgl. $u$.

D. h. wir erhalten den kovarianten Funktor

$$u^*: \mathcal{C}/_S \to \mathcal{C}/_{S'} \quad \text{" Basiswechsel bzgl. } u \text{"}$$

Transitivität des Basiswechsels: Für $S'' \xrightarrow{u'} S'$ gilt

$$(u \circ u')^* \cong (u')^* \circ u^* \quad \text{(Iso von Funktoren)}$$

( Prop 4.10)

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "g"] & S' \arrow[d, "u"] \in \mathcal{C}/S' \\ & S \end{tikzcd}$$ wird zu $S$-Objekt via

Sei $p: X_{(S')} \to X$ die erste Projektion. Dann erhält wir zueinander inverse Bijektionen

$$\begin{array}{ccc} t' & \longmapsto & p \circ t' \\ \mathrm{Hom}_{S'}(T, X_{(S')}) & \rightleftarrows & \mathrm{Hom}_S(T, X) \\ (t, g)_{S'} & \longleftarrow\!\shortmid & t \end{array}$$

<u>Def. 4.16</u> $\mathbb{P}$ sei eine Eig. von Morph. in $\mathcal{C}$, so dass $\mathrm{id}_X$ $\mathbb{P}$ erfüllt für alle $X \in \mathcal{C}$.

a) $\mathbb{P}$ heißt <u>stabil</u>

(i) <u>unter Komposition</u>, wenn mit $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ auch $g \circ f$ $\mathbb{P}$ erfüllt.

(ii) <u>unter Basiswechsel</u>, wenn mit $f: X \to S$ auch $f_{(S')}: X_{(S')} \to S'$ für alle Morph. $S' \to S$ $\mathbb{P}$ erfüllt.

b) Wir sagen, dass $f: X \to S$ $\mathbb{P}$ <u>universell</u> erfüllt, falls $f_{(S')}$ $\mathbb{P}$ erfüllt für alle $S' \to S$.

**Bem 4.17:** Sei $\mathbb{P}$ stabil unter $\circ$. Dann sind

**äquiv.:** (i) $\forall\, S \in \mathcal{C}$ $\forall$ $S$-Morph $f: X' \to X$, $g: Y' \to Y$, die $\mathbb{P}$ erfüllen, erfüllt auch $f \times_S g$ $\mathbb{P}$.

(ii) ~~$\forall$ Morphis $f: X \to S$, die $\mathbb{P}$ erfüllen und~~ $\mathbb{P}$ ist stabil unter Basiswechsel

**Bew:** (i) $\Rightarrow$ (ii) $f_{(S')} = f \times_S \mathrm{id}_{S'}$

"$\Leftarrow$": $f, g$ $\overset{\text{ii stabil}}{\text{mögen}}$ $\mathbb{P}$ erfüllen.

Da $f \times_S g = (f \times_S \mathrm{id}_Y) \circ (\mathrm{id} \times_S g)$

OE $g = \mathrm{id}_Y$

$$f \times_S \mathrm{id}_Y : X' \times_S Y = X' \times_X (X \times_S Y) \to X \times_S Y$$

$\| \quad \nearrow$ Urb. $f$

$f_{(X \times_S Y)}$ erfüllt $\mathbb{P}$ $\square$

[illegible] fast alle $\overset{\text{behandelten}}{\text{}}$ Eig. von Morph sind stabil unter $\circ$, aber nicht unbedingt unter Basiswechsel: injektiv, also.

**Bsp:** $f: \underset{X}{\mathrm{Spec}\, \mathbb{Q}[\zeta_p]} \to \underset{S}{\mathrm{Spec}\, \mathbb{Q}}$ Homöomorph, d.h. injektiv

Mit $S' \longrightarrow \mathrm{Spec}\, \mathbb{Q}$

$f_{(S')}: X \times_S S' \to S' = \mathrm{Spec}\, \mathbb{Q}(\zeta_p)$ nicht injektiv.

$\mathrm{Spec}\; \mathbb{Q}(\zeta_p) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\zeta_p)$ $\qquad$ 1 Punkt

$p-1$ Punkte $\quad \cong \prod \mathbb{Q}(\zeta_p)$ $\quad$ //

Warnung: Absolute Eig. von Schemata sind oft nicht kompatibel mit Basiswechsel:

$k = \mathbb{F}_p(t)$ (nicht perfekt!)

$K$ perfekter Abschluss von $k$, $A := K \otimes_k K$

$$" \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{F}_p\left(t^{\frac{1}{p^n}}\right) "$$

Man kann zeigen: $\mathrm{nil}(A)$ ist nicht e.e., d.h. $\mathrm{Spec}(A)$, $A$ ist nicht-red + nicht noeth.

## (4.7) Fasern von Morphismen

Bsp.

$$\begin{array}{l} X \supset f^{-1}(s) \text{ als Schema} \\ \downarrow f \\ S \ni s \end{array}$$

Def 4.18. Für die kanon. Morph. $\mathrm{Spec}\,\kappa(s) \to S$ nennen wir

$$X_s := X \otimes_S \kappa(s)$$

die Faser von $f$ in $s$, ein $\kappa(s)$-Schema.

Prop 4.14 $\Longrightarrow$)

$$\begin{tikzcd} X_s \arrow[r, "g"] \arrow[d] & S \times_S X \arrow[r, "id"] \arrow[d, "f"] & X \arrow[d, "f"] \\ \operatorname{Spec}(\kappa(s)) \arrow[r, "can"] & S \arrow[r, "id"] & S \end{tikzcd}$$

$\underset{\text{Homöom}}{X_s \cong} f^{-1}(\underset{\text{Bild(can)}}{s})$, d.h. wir können $f^{-1}(s)$ als Schema auffassen.

$$\begin{matrix} X \\ \downarrow f \\ S \end{matrix} \quad \widehat{=} \quad \text{Familie von } \kappa(s)\text{-Schemata } X_s$$
parametrisiert durch Punkte von $S$

Bsp 4.19. $k$ alg. abg.

$X(k) := \{(u,t,s) \in \mathbb{A}^3(k);\ ut = s\}$

Da $UT - S \in k[U,T,S]$ irreduzibel ist,

$X(k)$ ist affine Varietät.

$\updownarrow$

$X = \operatorname{Spec}\left(\frac{k[U,T,S]}{(UT-S)}\right)$ affines $k$-Schema

$S = \mathbb{A}^1$, $X \longrightarrow S$ Projektion
$(u,t,s) \longmapsto s$

$s \in \mathbb{A}(k)$, $X_s = \operatorname{Spec} A_s$, $A_s = \frac{k[U,T,S]}{(UT-S)} \otimes_{k[S]} \frac{k[S]}{(S-s)}$

$\cong k[U,T]/(UT-s)$

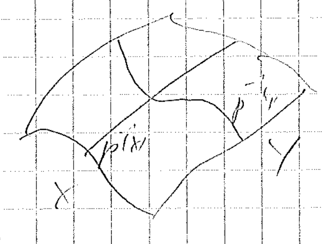
$UT - s \in k[U,T]$ irreduzibel für $s \neq 0$

reduzibel für $s = 0$.

$\Rightarrow$ $\begin{matrix} X \\ \downarrow \\ S \end{matrix}$ def. Familie $X_s$ von $k$-Schemata, so dass $s \in \mathbb{A}^1(k)$

$X_0$ reduzibel

$X_s$ irred. für $s \neq 0$.



<u>Lemma 4.20.</u>

$$\begin{tikzcd} & X \times_S Y \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ x \in X \arrow[dr, "f"'] & & Y \ni y \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

$\xi : \mathrm{Spec}(\kappa(x)) \to X$, $\quad \eta : \mathrm{Spec}(\kappa(y)) \to Y$, $\quad \mathrm{Spec}(\kappa(s)) \to S$

<u>Dann:</u> (1) $\exists\, z \in X \times_S Y$ mit $p(z) = x$, $q(z) = y$ $\iff$ $f(x) = g(y)$

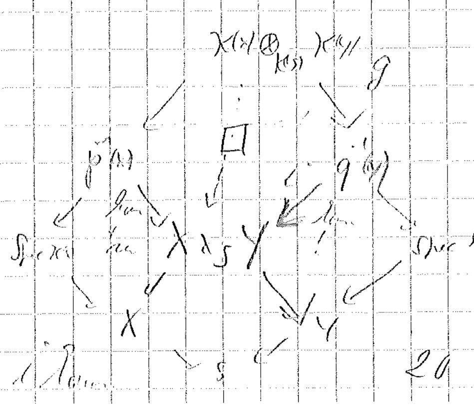
(2) Gelte (1), setze $s := f(x) = g(y)$

$\Rightarrow$ $\zeta := \xi \times_S \eta : Z := \mathrm{Spec}(\kappa(x) \otimes_{\kappa(s)} \kappa(y)) \to X \times_S Y$

ist Homöomorphismus von $Z$ auf Faser $\zeta(Z) = p^{-1}(x) \cap q^{-1}(y)$

<u>Bew:</u> (1) $\Rightarrow$ klar, $\Leftarrow$

Prop. 4.10



$$Z = p^{-1}(x) \times_{(X \times_S Y)} q^{-1}(y)$$

4.14 2x ...

$\Rightarrow$ $q(?) = ...(p^{-1}(x))$

... $q^{-1}(y) \cap p^{-1}(x)$ ...

## (4.8) Eigenschaften von Schemata-Morphismen

**Spezialisierung 4.21:** P Eig. von Morph. v. Sch. und

(1) P heißt <u>lokal a. Ziel</u>, falls für alle Morph. f gilt:

$f: X \to S$ erfüllt P $\Leftrightarrow$ $f|_{f^{-1}(S_i)}: f^{-1}(S_i) \to S_i$ erfüllt P

$\forall$ off. Überd. $S = \bigcup_{i \in J} S_i$

(2) ~ <u>lokal auf der Quelle/[illegible]</u>, falls für alle Morph. gilt:

$f: X \to Y$ erfüllt P $\Leftrightarrow$ $f|_{U_i}: U_i \to Y$, $i \in I$ erfüllt P

$\forall$ off. Überd. $X = \bigcup_{i \in I} U_i$

**Prop 4.22.** Die folg. Eig. von $\mathrm{Morph}_{Sch}$ sind

(1) <u>~~stabil~~ stabil unter Ö:</u>

injektiv, surjektiv, bijektiv, homöomorph, offen, abg., offene Immersion, abg. Immersion, Immersion, flach, treuflach

(2) <u>stabil unter Basiswechsel:</u>

surjektiv, offene Immersion, abg. Immersion, Immersion, flach, treuflach.

(3) <u>lokal bzgl. Ziel:</u>

univ., bij., homöomorph, offen, abg., off. Immersion, abg. Imm., Immersion, flach, treuflach

(4) <u>lokal bzgl. Quelle:</u> offen, flach.

<u>Bew:</u> (1), (3), (4) klar

(2) In (4.9) (offen/abg.) Immersion stabil unter Basiswechsel

Lem. 4.20 $\Rightarrow$ univ. stabil unter —"—

$$\begin{array}{ccc} X\times_S Y & \longrightarrow & Y \quad y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & S \\ \exists x & & f(x)=s \end{array} \quad \Rightarrow \exists z \in X\times_S Y \text{ mit } q(z)=y$$

Sei $f: X \to S$ flach + $S' \to S$ bel.

(3), (4) OE $X = \operatorname{Spec} A$, $S = \operatorname{Spec} R$, $S' = \operatorname{Spec}(R')$, $A$ (treu)flach $R$-Algebra

$\Rightarrow A \otimes_R R'$ (treu)flach $R'$-Algebra, d.h. $f_{(S')}$ (treu)flach $\square$

$(A \otimes_R R') \otimes_{R'} M = A \otimes_R M$ $\square$

<u>Kor 4.23.</u> Die folg. Eig. sind stabil unter $\circ$, Basiswechsel und lokal bzgl. Ziel:

"universell injektiv", "univ. bij.", "univ. homöom.", "universell offen", "univ. abg.".

## 4.9 Urbilder und Schem.-theoret. Durchschnitt von Unterschemata

$$\begin{array}{ccc} Z\times_Y X & \longrightarrow & Z \\ {\scriptstyle i(X)}\downarrow & & \downarrow {\scriptstyle i} \ \text{Immersion} \\ X & \xrightarrow[\text{Morph.}]{f} & Y \end{array}$$

bzw.

$$\begin{array}{ccc} Z\times_Y X & \xrightarrow{i(X)} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

Prop. 4.14 $\Rightarrow$

$i(X): Z\times_Y X \to X$ surjektiv auf Halmen, Homöomorph. auf abgeschl. Teil $f^{-1}(Z)$

ist Immersion

Fassen $Z\times_Y X$ als Unterschema von $X$ auf:

das Urbild von $Z$ unter $f$

Bem. (i) Ist $Z\subset Y$ offenes Unterschema, so auch $f^{-1}(Z)\subset X$

(ii) $Z=V(\mathcal{J})$ abg. --, so auch $f^{-1}(Z) = V(f^{-1}(\mathcal{J})\mathcal{O}_X)$ (Prop. 4.14)

$\mathcal{J}\subset\mathcal{O}_Y$ Idealgarbe

d.h. $i_*\mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_Y/\mathcal{J}$

Bild $(f^*(\mathcal{J}) \to f^*\mathcal{O}_Y \xrightarrow{=} \mathcal{O}_X)$

Spezialfall: Durchschnitt von 2 Unterschemata

Unterschema $Y \xrightarrow{i} X$, $j: Z\to X$

$Y\cap Z := Y\times_X Z = i^{-1}(Z) = j^{-1}(Y)$

heißt (Schem.-theoret.) Durchschnitt von $Y$ und $Z$ in $X$

UE (an UE "Faserprodukt")

E: Morph. $T \xrightarrow{x} X$ faktorisiert durch $Y \cap Z$

$\Leftrightarrow$ $x$ faktorisiert durch $Y$ und $Z$.

Sind $Y = V(g)$, $Z = V(q)$ abg. Unterr., so gilt

$$V(g) \cap V(q) = V(g+q)$$

Bsp. 26: $f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_s \in R[X_0, \dots, X_n]$ homogene Pol.

$\Rightarrow$ $V_+(f_1, \dots, f_r) \cap V_+(g_1, \dots, g_s) = V_+(f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_s)$

$\subseteq \mathbb{P}^n_R$

(4.10) Affine / proj. Räume über bel. Basen

$\mathbb{A}^n := \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}$, $S$ bel. Schema

$\mathbb{A}^n_S := \mathbb{A}^n \times_{\mathbb{Z}} S$ affiner Raum der relat. Dim. $n$ über $S$

$\mathbb{P}^n_S := \mathbb{P}^n \times_{\mathbb{Z}} S$ proj. Raum der relat. Dim. $n$ über $S$

$S = \operatorname{Spec} R$ affin: $\mathbb{A}^n_S = \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n] \otimes_{\mathbb{Z}} R) = \operatorname{Spec}(R[T_1, \dots, T_n])$

$= \mathbb{A}^n_R$ wie zuvor!

$\mathbb{P}^n_S = \mathbb{P}^n_R$ analog.

$\mathbb{A}^n_S \times_S S' = \mathbb{A}^n \times_{\mathbb{Z}} S \times_S S' = \mathbb{A}^n_{S'}$, $\mathbb{P}^n_S \times_S S' = \mathbb{P}^n_{S'}$

für $S' \to S$ bel. Basiswechsel!

$X$ bel. Sch., Fkt. auf $X$.

$$\Gamma(X, O_X) = \mathrm{Hom}_{Rg}(\mathbb{Z}[T], \Gamma(X, O_X)) = \mathrm{Hom}_{Sch_{\mathbb{Z}}}(X, \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}})$$

$$\varphi(T) \longleftarrow\!\shortmid \varphi$$

$S$ Basisschema
$\mathbb{Z} \leftarrow S$

$X$ $S$-Sch.

$$\Gamma(X, O_X) = \mathrm{Hom}_{Sch/S}(X, \mathbb{A}^1_S)$$

## (4.11) Diagonale, Graphen und Kern in bel. Kategorien (vgl. (9.1))

$S \in \mathcal{C}$ Kat. mit bel. Faserprodukten.

$X, T \in \mathcal{C}/S$, $X_S(T)$ Menge der $S$-Morph.

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow{\scriptstyle d} \\ S \end{array}$$

Def 24: Der Morph.

(1) $\Delta_{X/S} := \Delta_X := (id_X, id_X) : X \to X \times_S X$

heißt Diagonale(r Morphismus) zu $X$ über $S$.

(2) $X \xrightarrow{f} Y$ Morph$/S$. Der Morph.

$$\Gamma_f := (id_X, f)_S : X \to X \times_S Y$$

heißt der Graph(morphismus) von $f$

(3) $X \xrightarrow{f,g} Y$ Morph/$S$. d.h. $S$-Morph.

Ein $S$-Monomorph. $i: K \longrightarrow X$ heißt

**Kern** von $f$ und $g$, falls für alle $T \in \mathcal{C}/_S$

die Abb. $i(T): K_S(T) \longrightarrow X_S(T)$ injektiv ist

mit Bild $(i(T)) = \{x \in X_S(T) \mid f(T)(x) = g(T)(x)\}$.

Bez. $\mathrm{Ke}(f,g)_S$ oder $\mathrm{Ke}(f,g)$, $i$ "kanonisch".

I. a. W. $\mathrm{Ke}(f,g)$ repräsentiert den Funktor

$$\mathcal{C}/_S \longrightarrow \mathrm{Me}$$

$$T \longmapsto \{x \in X_S(T) ; f(T)(x) = g(T)(x)\}.$$

Bsp. 25: $\mathcal{C}$ = Kat. der Mengen, $\left(X \xrightarrow{u} S, Y \xrightarrow{v} S\right)$ $S$-Mengen, $f,g: X \to Y$

$\Delta_u: X \to X \times_S X = \{(x,x') \in X \times X \mid u(x) = u(x')\}$
$x \longmapsto (x,x)$

$\Gamma_f: X \to X \times_S Y = \{(x,y) \in X \times Y \mid u(x) = v(y)\}$
$x \longmapsto (x, f(x))$

$\mathrm{Ke}(f,g) = \{x \in X ; f(x) = g(x)\}$

Da $p \circ \Gamma_f = \mathrm{id}_X$, sind $\Gamma_f$ und $\Delta_{X/S} = \Gamma_{\mathrm{id}_X}$ Monomorph.

**Prop 26:**

(1) $\Delta_{X/S} = \Gamma_{id_X}$, $\Gamma_f = \mathrm{Ker}(X \times_S Y \underset{f \circ p}{\overset{q}{\rightrightarrows}} Y) \longrightarrow X \times_S Y$

kanonisch

(2) Alle Rechtecke des folg. kommut. Diagr. sind kartesisch:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(f,g) \arrow[r, "can"] \arrow[d, "can"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[r] \arrow[d, "\Gamma_f"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d, "\Delta_{Y/S}"] \\
X \arrow[r, "\Gamma_g"'] & X \times_S Y \arrow[r] & Y \times_S Y
\end{tikzcd}$$

(3) Sei $s: S \to X$ ein Schnitt von $f$ ($f \circ s = id_S$).

$\Rightarrow$
$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "s"] \arrow[d, "s"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "\Gamma_{s \circ f}"] \\
X \arrow[r, "\Delta_{X/S}"'] & X \times_S X
\end{tikzcd}$$

Bew: Mit Yoneda-Lemma reicht für $\mathcal{C}$ = Kat. der Mengen zu zeigen, die folgt aus explizit Beschr. in Prop. 25 □

Insbesondere ex. $\mathrm{Ker}(f,g)$ stets!

## 4.12 Diagonale etc für Schemata

<u>Prop 27.</u> Für affine $S$-Schemata $X = \mathrm{Spec}(B) \xrightarrow{\psi} S = \mathrm{Spec}\, R$, $Y = \mathrm{Spec}(A) \xrightarrow{\psi} S$

und $S$-Morph. $X \xrightarrow{j = \mathrm{Spec}\,\varphi} Y$

entsprechen $\Delta_{X/S}$, $\Gamma_j$ den surjektiven Ring-Hom.

$$\Delta_{B/R} : B \otimes_R B \to B, \quad b \otimes b' \mapsto bb' \qquad , \qquad \Gamma_\varphi : A \otimes_R B \to B, \quad a \otimes b \mapsto \varphi(a) b$$

Insbesondere sind $\Delta_{X/S}$, $\Gamma_j$ abg. Immersionen.

I.a. sind $\Delta_{X/S}$, $\Gamma_j$ Immersionen (nicht notwendig abg.!):

$Z, Z' \subset X$ Unterschemata

$\Rightarrow Z \times_S Z' \subset X \times_S X$ —"— (Immersion sind stabil unter Basiswechsel)

und $Z \cap Z' \overset{(*)}{=} \Delta_{X/S}^{-1}(Z \times_S Z')$

<u>Prop 28:</u> $X, Y \in Sch/S$, $X \xrightarrow{j,g} Y$ Morph$/S$

$\Rightarrow \Delta_{X/S}$, $\Gamma_j$, $\mathrm{Ker}(j,g) \to X$ sind Immersionen.

<u>Bew:</u> Zz: $\Delta_{X/S}$ Immersion (+ (2) $\Leftarrow$ Prop. 26, da Immers. stabil unter Basiswechsel)

lokal bzgl. Ziel, OE $S$ affin.

$X = \bigcup U_i$ affine Überdeckung, $U_i \times_S U_i$ überdecken $\Delta_{X/S}(X)$ offen.

$U_i \xrightarrow{\Delta_{X/S}|} \Delta_{X/S}^{-1}(U_i \times U_i)$

$$X \xrightarrow[\text{abg Imm}]{i_1} \bigcup U_i \times U_i \underset{\text{off Imm}}{\subset} X \times_S X$$

$\circledast$

$\Rightarrow$ ⊄ $X$ offen, Prop. 27. $\square$

Die Unterschem.

(i) $X \cong \Delta_{X/S}(X) \subset X \times_S X$ heißt die Diagonale von $X \times_S X$

(ii) $\Gamma_f(X) \subset X \times_S Y$ heißt Graph von $f$

**Bem 29:** (i) $\Gamma \subset X \times_S Y$ Unterschema ist der Graph eines $S$-Morph $X \xrightarrow{f} Y \iff$

$p|_\Gamma : \Gamma \to X \times_S Y \xrightarrow{p} X$ ist ein Isom.

dann $f = q \circ (p|_\Gamma)^{-1}$

(ii) I.A. ist der Ungleichheit klein:

$$\Delta_{X/S}(X) \subset \{ z \in X \times_S X ;\ f(z) = g(z) \}$$ kein "="!

## (4.13) Separierte Morphismen

~~Die~~ ~~Erg.~~ Äqu. sind.

<u>Erinnerung:</u> Für E top. Raum $X$, ~~ist Hausdorffsch~~:

(i) $X$ ist Hausdorffsch

(ii) $\Delta \subset X \times X$ ist abg. bzgl. Produkttop.

(iii) Für jedes Paar stetiger Abb $Y \xrightarrow{f,g} X$ ist $\mathrm{Ker}(f,g) \subset X$ abg.

(iv) Für jeden stet. Morph. $Y \xrightarrow{f} X$ ist

$$\Gamma_f \subset X \times Y \text{ abg.}$$

(Ann. $\mathrm{Ker}(f,g)$, $\Gamma_f$ in Kat. top. Räume = in Kat. der Mengen, mit induz. Top.!)

Für $X$ Schema ist unterlieg. top. Raum selten Hausdorffsch.

Aber (ii)–(iv) geben sinnvolle Konzepte für Schema, (~~[illegible]~~ hier ist Produkttop. $\neq$ Faserprodukttop.!)

<u>Def 30.</u> Ein Morph. von $Y \to S$ von Schemata heißt <u>separiert</u>, falls folgende äquivalente Bed. erfüllt sind.

(i) $\Delta_{Y/S}$ ist <u>abg.</u> Immersion

(ii) Für jedes Paar $f,g: X \to Y$ ist der Kern $\mathrm{Ker}(f,g) \subset X$ ein <u>abg.</u> Unterschema.

(iii) Für jeden $S$-Morph. $f: X \to Y$ ist $\Gamma_f$ eine abg. Immersion.

Dann heißt auch <u>$Y$ separiert über $S$</u>. Ein Schema heißt <u>separiert</u>, falls es sep. $/\mathbb{Z}$ ist.

**Bem.:** Prop. 26 (d.h. „abg. Immersion" stabil unter Basiswechsel)

Nach Prop. 27 ist jeder Morph. zwischen affinen Schemata separiert; insbesondere ist jedes affine Schema separiert.

**Prop. 31:** $X, Y \in Sch/S$, $Y$ sep./$S$, $U \subset X$ offen dicht

$f, g: X \to Y$ $S$-Morph. mit $f|_U = g|_U$

$\Rightarrow f|_{X_{red}} = g|_{X_{red}}$

**Bew.:** $U \subseteq \mathrm{Ker}(f,g)$ n. Vorauss. Top. Raum von
dicht $\underset{X}{\subseteq}$ abg., da $Y/S$ separ. $\Rightarrow \mathrm{Ker}(f,g) = X$

$\Rightarrow X_{red} \subseteq \mathrm{Ker}(f,g)$ $\square$

V 22.01.05

**Bsp. 32:** Bei Affiner Gerade mit Doppelpunkt (vgl. Bsp. 11 in III.5) ist nicht separiert: $V \subset U$ offen, nicht abg.

$$j, j': U \to U \cup_V U$$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}(j, j') = V \subset U \subset X$ nicht abg.!

## Bem 33,

$\mathbb{P}$ sei Eig. von Morph., so dass gilt

- stabil unter $\circ$ + Basiswechsel
- jede (abg.) Immersion erfüllt $\mathbb{P}$

Für jedes kommut. Diag.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "u"'] & & Y \arrow[dl, "v"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

~~wo~~ gilt: $u$ erfüllt $\mathbb{P}$ (+ $v$ ist separiert)

$\Rightarrow$ $f$ erfüllt $\mathbb{P}$,

da $f: \underbrace{X \xrightarrow{\Gamma_f} X \times_S Y \xrightarrow{g = u_{(Y)}} Y}_{\circ \text{ erfüllt } \mathbb{P}.}$

(abg.) Immersion erfüllt $\mathbb{P}$ — erf. $\mathbb{P}$ wg. Basiswechsel

## Prop 34,

(1) Jeder Monomorphismus von Schemata (insb. jede Immersion) ist sep.

(2) "Separiert" ist stabil unter $\circ$, Basiswechsel + lokal bzgl. Ziel

(3) Ist Komp. $X \to Y \to Z$ sep., so auch $X \to Y$.

(4) $X \xrightarrow{f} Y$ ist sep. $\Leftrightarrow$ $f_{red}: X_{red} \to Y_{red}$ ist sep.

<u>Bew.</u> (1) $f$ Mono, d.h. injektiv auf allen $T$-wertigen Punkten $\forall\, T \in Sch$

$\Rightarrow$ $\Delta_f$ Isom., d.h. bijektiv — u —

insb. abg. Immersion

(2) a) $X \xrightarrow{f} Y$, $Y \xrightarrow{g} Z$ sep. Morph., $p, q: X \times_Y X \to X$ beide Proj.

$$\Rightarrow \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Delta_f"', "\text{abg. Imm.}"] \arrow[dr, "\Delta_{g\circ f}"'] & X \times_Y X \arrow[r, "f\circ p = f \circ q"] \arrow[d, "(p,q)_Z"', "\text{abg. Imm.}"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d, "\Delta_g", "\text{abg. Imm.}"'] \\ & X \times_Z X \arrow[r, "f \times f"', "\text{(Cart. in Kat. d. Morph.)}"] & Y \times_Z Y \end{tikzcd}$$

$\Delta_{g\circ f}$ abg. Immersion

ist kommutativ $\Rightarrow$ $g \circ f$ sep.

b) $X \xrightarrow{f} S$ sep., $S' \to S$ Morph.

$$(\Delta_f)_{(S')} = \Delta_{f_{(S')}}: X \times_S S' \to (X \times_S S') \times_{S'} (X \times_S S')$$
$$= (X \times_S X) \times_S S'$$

$\Delta_f$ abg. Im. $\Rightarrow$ $\Delta_{f(S')}$ abg. Imm. $\Rightarrow$ Stabilität unter Basiswechsel

c) abg. Imm. lokal bzgl. Ziel $\Rightarrow$ auch Separiertheit.

(3) folgt aus $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ nach Bem. 33

$$\mu = \text{" } 0 \text{ "}, \; v = Y \to Z \,, \; f: X \to Y \quad ✓$$

(4) $X_{red} \xrightarrow{i} X$ ist surjektiver Immersion
$\downarrow f$ $\Rightarrow$ $i$ universeller Homöomorph.
$S$

Weiter $X_{red} \times_{S_{red}} X_{red} = X_{red} \times_S X_{red}$, dann gilt

(da $S_{red} \hookrightarrow S$ Monomorph.)

$$\Delta_f \circ i = (i \times_S i) \circ \Delta_{f_{red}}$$

$i$ univ. Homöomorph.

$\Rightarrow$ $\Delta_f$ abg. Imm. $\Leftrightarrow$ $\Delta_{f_{red}}$ abg. Imm. $\square$

Bsp. 35: $\mathbb{A}^4_S = \mathbb{A}^4 \times_{\mathbb{Z}} S$ ist separiert für $S$-Schemata
affin + Basiswechsel
daher auch jedes Unterschema.

Bsp. 36: Sei $S = \operatorname{Spec} R$ affin und $X$ ein $S$-Schema

Äquiv.
(i) $X$ ist separiert
(ii) Für je zwei affine offene Teilmengen $U, V \subset X$ ist der Durchschnitt $U \cap V$ affin und
$\rho_{U,V}: \mathcal{O}_X(U) \otimes_R \mathcal{O}_X(V) \to \mathcal{O}_X(U \cap V)$ ist surjektiv
$s \otimes t \mapsto s|_{U \cap V} \, t|_{U \cap V}$

...mit $\exists$ offene affine Überd. $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ s.d.

$U_i \cap U_j$ affin ist und $\mathcal{S}_{U_i, U_j}$ surjektiv ist

für alle $i, j$.

__Bew:__ $U \cap V = \Delta_{X/S}^{-1}(U \times_S V)$ $\forall$ $U, V \subset X$ off. Unterschema

lokal bzgl. Ziel

$\Delta_{X/S}$ abg. Imm. $\Leftrightarrow$ $U \cap V \xrightarrow{\Delta_{X/S}|_{U \cap V}} U \times_S V$ abg. Im. $\forall$ $U, V$

$X \times_S X = \bigcup_{i,j} U_i \times_S U_j$ off. Überd. $\Leftrightarrow$ $\forall (U_i, U_j)$ $i, j \in I$

Für $U = \operatorname{Spec} A$, $V = \operatorname{Spec} B$ ist auch $U \times_S V = \operatorname{Spec} A \otimes_R B$ affin

D.h. $\Delta_{X/S}|_{U \cap V}$ $U \cap V \to U \times_S V$ ist abg. Immersion

$\Leftrightarrow$ $U \cap V$ affin + induz. Hom. ist surjektiv (Pr. 3.0) $\square$

__Bsp 37:__ $\mathbb{P}_S^n$ ist separ. / $S$ $\forall n \geq 0$.

__dh.__ lokal bzgl. $S = \operatorname{Spec} R$, $\mathbb{P}_R^n = \bigcup_{i=0}^n U_i$ standard offene affine Überd.

(ii) v. Prop. 36 ist erfüllt (vgl. § II.6)

$$R\left[\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \widehat{\frac{x_i}{x_i}}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right] \otimes_R R\left[\frac{x_0}{x_j}, \ldots, \widehat{\frac{x_j}{x_j}}, \ldots, \frac{x_n}{x_j}\right] \twoheadrightarrow R\left[\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}, \left(\frac{x_j}{x_i}\right)^{-1}\right]$$

$$\frac{x_i}{x_j}$$

✓

Bsp 38: (Varietäten)

$k$ alg. abg. Kp., $X$ Prävar./$k$ (= ganzes $k$-Schema v. e. T.)

$X$ heißt Varietät, falls $X$ separiert ist über $k$.

Affine Prävar. sind also automatisch Varietäten.

$\mathbb{P}^n(k)$ ist Varietät (Bsp 37)

$\Rightarrow$ Jede quasi-projektive Prävar. ist eine Varietät!

## 14. Eigentliche (Proper) Morphismen

$X \xrightarrow{f} Y$ stetige Abb. top. Räume heißt
**eigentlich**, falls Urbilder kompakter Mengen kompakt sind.

Sei $X$ Hausdorffsch, $Y$ lokal kompakt. Dann gilt:

$f$ **eigentlich** $\Leftrightarrow$ $f$ universell abg.

(Bourbaki, Topologie générale, I §10 n°3, Prop. 7)

**Def. 39.** Ein Morph. $f: X \to Y$ von Schemata heißt
**eigentlich**, falls $f$

(i) v. e. Typ
(ii) separiert
(iii) universell abg.

Ein $S$-Schema heißt eigentlich, wenn der Strukturmorphismus dies ist.
„lokal kpt. $Y$!"

**Def. 40.** Ein Morphismus $f: X \to S$ heißt **projektiv**,
falls er sich faktorisieren läßt

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & S \\ & \mathbb{P}^n_S \arrow[u, "\pi"'] \end{tikzcd}$$

mit einer abg. Immersion $g$ und der kan. Morph. $\pi$.

Proposition: Sei $\mathbb{P}$ eine der folgenden Eigenschaften:

I v. e. Typ, II eigentlich, III projektiv. (IV separiert).

Dann gilt:

(i) Abg. Immersion erfüllen $\mathbb{P}$

(ii) $\mathbb{P}$ ist stabil unter $\circ$

(iii) $\mathbb{P}$ ist stabil unter Basiswechsel

(iv) Falls $X \xrightarrow{f} Z$, $Y \xrightarrow{g} Z$ $\mathbb{P}$ erfüllen, so auch $X \times_Z Y \to Z$

(v) ~~Falls~~ Erfüllt $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ $\mathbb{P}$ ~~erfüllt~~, so auch

$f$, falls $f$ quasi-kompakt im Fall I

$g$ separiert in den Fällen II, III

(stets im Fall IV)

Bew: vgl. Prop. 2.4, 3.16, 3.32 (3.9) in Liu, Alg. Geom. und arithm. curves)

Skizze: (iv) folgt formal aus (ii) – (iii):

$$X \times_Z Y \xrightarrow{f(Y)} Y \xrightarrow{g} Z \quad + \text{(ii)} \Rightarrow X \times_Z Y \to Z \text{ erfüllt } \mathbb{P}.$$

(v) (für II, III, IV) folgt aus $\underbrace{\text{Bem. 33}}_{\text{(ii)-(iii) nach}}$. Basiswechsel (iii)

für I: OE $Z$ affin. Sei $V \subset Y$ offen affin

$\Rightarrow f^{-1}(V) = \bigcup^{\text{endl}} U_i$ offen affin und $\mathcal{O}_X(U_i)$ ist e.e. $\mathcal{O}_Z(Z)$-Algebra

$\Rightarrow$ e.e. $\mathcal{O}_Y(V)$-Algebra $\Rightarrow \checkmark$

$\mathbb{P}^n_Y \to Y$

$\mathbb{P}^n_Z \to Z$

$\mathbb{P}^n_Z \times \mathbb{P}^m_Z \to \mathbb{P}^k_Z \to Z$

$\mathbb{P}^n_Z \times Z$

$(\mathbb{P}^n_Z \times \mathbb{P}^m_Z \longrightarrow Z) \times Z$

$\mathbb{P}_Z^{nm+n+m}$

(i) I Schnitt Reg. Bed., $j: Z \to X = \operatorname{Spec} A$ abg. Immersion

affin $\Leftarrow$ affin

$Z = \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a}) \Rightarrow$ Beh.

IV Prop 34

II aus I, IV + abg. Imm. stabil unter Basiswechsel, d.h. univ. abg.

III

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\text{abg}"] \arrow[dr, dashed, "\text{abg. Im.}"'] & S \\ & \mathbb{P}^n_S \arrow[u, "\text{Schl. abg}"'] \end{tikzcd}$$

$h = g \circ f : X \to Y \to Z$

(ii) I $V \subset Z$ offen affin $\Rightarrow g^{-1}(V) = \bigcup^{\text{endl}} U_i$ offen affin

$f^{-1}(U_i) = \bigcup^{\text{endl}} W_{ij}$ offen, affin $\qquad W_{ij} \to U_i \to V$ v. e. Typs

$h^{-1}(V) = \bigcup_{i,j} W_{ij} \Rightarrow h$ v. e. T.

II Folgt I, Prop 34 (IV), (univ.) abg. stabil unter $\circ$

III

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr, "\text{abg}"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \\ & \mathbb{P}^n_Y \arrow[u] \arrow[r, "\text{abg}"] & \mathbb{P}^n_Z \arrow[u] \\ & \mathbb{P}^n_Z \times_Z Y \arrow[u, equal] & \mathbb{P}^n_Z \times_Z (\mathbb{P}^h_Z \times_Z Y) \arrow[u] \arrow[r, "\text{Segre}", "\text{abg.}"'] & \mathbb{P}_Z^{mn+n+m} \end{tikzcd}$$

$g \times_Z \mathrm{id}_{\mathbb{P}^n_Z}$

(iii) I Faserprodukt von affinen ist $\operatorname{Spec}(A \otimes_R B)$!

II I, Prop 34, univ. abg stabil unter Basiswechsel

III

$$\begin{tikzcd}
X \times_Y Z \arrow[rr, "f(Z)"] \arrow[d] \arrow[drr, "i \times_Y Z"] & & Z \\
X \arrow[r, "f"] \arrow[drr, "i", "\text{abg.}"'] & Y & \mathbb{P}^n_Z = \mathbb{P}^n_Y \times_Y Z \arrow[u] \arrow[d] \\
& & \mathbb{P}^n_Y \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

(ii) + Bem. 17

$\mathbb{P}^n$ ist $Y$ - Raum, $id_Z$ und $\Rightarrow$ $i \times_Y id_Z$ ist projektiv.

$p_Z$ prop. nach (ii)!

$\boxed{}$

<u>Prop 42.1</u> Sei $X \xrightarrow{f} Y$ surj. Morphismus von $S$-Schemata und $Y$ sep. + v.e.Typ $/S$ sowie $X$ eigentlich$/S$

$\Rightarrow$ $Y$ eigentlich$/S$

<u>Bew.</u> $f$ surj $\Rightarrow$ $f_{(T)}: X_T \to Y_T$ surj. $\forall$ $T \to S$

$\Rightarrow$ $A \subseteq_{abg} Y_T \to T$ abg, d.h. $Y$ univ. abg. $\square$

$$\begin{tikzcd}
A \subseteq_{abg} Y_T \arrow[r] & T \\
\varphi^{-1}(A) \subseteq_{abg} X_T \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, "\text{abg}"'] &
\end{tikzcd}$$

(Liu 3.17/18)

**Prop 43.** $X$ eigentl. Schema über $S = \operatorname{Spec} A$

$\Rightarrow$ $\mathcal{O}_X(X)$ ganz über $A$

Ist $X = \operatorname{Spec} B$ affin, so ist $B$ endlich $/A$

(Liu 3.10)

**Kor 44.** $X$ zusammenh. eigentl. Var $/k$ $\Rightarrow$ $\mathcal{O}_X(X)$ endl. dim. $k$-VR

$k'/k$

**Thm 45.** $\mathcal{O}_K$ Bewertungsring, $K = \operatorname{Quot}(\mathcal{O}_K)$

$X/\mathcal{O}_K$ eigentlich

$\Rightarrow$ $X(\mathcal{O}_K) \longrightarrow X_K(K)$ ist bijektiv!

**Bewertungskriterium** (vgl. Hartshorne, Liu 3.26)

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec}(K) \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"', "\text{eigentlich}"] \\
\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_K) \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\exists_1"] & Y
\end{tikzcd}$$

$f$ eigentlich $\Leftrightarrow$ $X(\mathcal{O}_K) \longrightarrow X(K)$ bijektiv (Th. anwend. auf $\begin{array}{c} X \times_Y \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K \\ \downarrow \\ \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K \end{array}$)

Thm 46. Jeder projektive Morph ist eigentlich.

(Hm. III 3.30)