

9 Morphismen von affinen algebraischen Mengen

Definition 23. Seien $X \subseteq \mathbb{A}^m(k)$, $Y \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine algebraische Mengen. Ein **Morphismus** $X \rightarrow Y$ affiner algebraischer Mengen ist eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ der zugrundeliegenden Mengen, sodass $f_1, \dots, f_n \in k[T_1, \dots, T_m]$ existieren, derart dass $\forall x \in X$ gilt:

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in Y.$$

Es bezeichne $\text{hom}(X, Y)$ die Menge der Morphismen $X \rightarrow Y$.

Remark 24. $f : X \rightarrow Y$ lässt sich immer fortsetzen zu einem Morphismus

$$f : \mathbb{A}^m(k) \rightarrow \mathbb{A}^n(k),$$

aber nicht eindeutig, es sei denn $X = \mathbb{A}^m(k)$.

Komposition

$$X \xrightarrow[\substack{f_1, \dots, f_n \in k[T_1, \dots, T_m]}}^f Y \xrightarrow[\substack{g_1, \dots, g_r \in k[T'_1, \dots, T'_m]}}^g Z$$

mit $X \subseteq \mathbb{A}^m(k)$, $Y \subseteq \mathbb{A}^n(k)$, $Z \subseteq \mathbb{A}^r(k)$. Es folgt:

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= (g_1(f_1(x), \dots, f_n(x)), \dots, g_r(f_1(x), \dots, f_n(x))) \\ &=: (h_1(x), \dots, h_r(x)) \end{aligned}$$

d.h. $g \circ f$ ist durch Polynome $h_i \in k[T_1, \dots, T_m]$ gegeben, also ist $g \circ f$ wieder ein Morphismus affiner algebraischer Mengen. Wir erhalten die **Kategorie affiner algebraischer Mengen**.

Example 25.

(i) Sei die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^1(k) &\rightarrow V(T_2 - T_1^2) \subseteq \mathbb{A}^2(k) \\ x &\mapsto (x, x^2). \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist sogar ein *Isomorphismus* affiner algebraischer Mengen, da die Umkehrabbildung

$$(x, y) \mapsto x$$

ebenfalls ein Morphismus ist.

(ii) Sei $\text{char}(k) \neq 2$. Die Abbildung

$$\begin{aligned}\mathbb{A}^1(k) &\rightarrow V(T_2^2 - T_1^2(T_1 + 1)) \\ x &\mapsto (x^2 - 1, x(x^2 - 1))\end{aligned}$$

ist ein Morphismus, aber *nicht* bijektiv, da $1, -1$ beide auf $(0, 0)$ abgebildet werden.