7 Irreduzible affine algebraische Mengen

Lemma 17. *Eine abgeschlossene Teilmenge $Z \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ ist genau dann irreduzibel, wenn $I(Z) \trianglelefteq k[\underline{T}]$ ein Primideal ist. Insbesondere ist $\mathbb{A}^n(k)$ irreduzibel.*

Beweis. Z irreduzibel ist äquivalent zu

$$
\begin{aligned}
&(Z = \underbrace{V(\mathfrak{a})}_{\bigcap_i V(f_i)} \cup \underbrace{V(\mathfrak{b})}_{\bigcap_j V(g_j)} \quad \Rightarrow \quad V(\mathfrak{a}) = Z \text{ oder } V(\mathfrak{b}) = Z).\\
&\Leftrightarrow \forall f, g \in k[\underline{T}]:\ V(fg) = V(f) \cup V(g) \supseteq Z:\ V(f) \supseteq Z \text{ oder } V(g) \supseteq Z.\\
(*)\ &\Leftrightarrow \forall f, g \in k[\underline{T}]:\ fg \in I(V(fg)) \subseteq I(Z):\ f \in I(Z) \text{ oder } g \in I(Z).\\
&\Leftrightarrow I(Z) \text{ ist Primideal.}
\end{aligned}
$$

(*): $V(I(Z)) = Z$, $I(V(\mathfrak{a})) = \mathrm{rad}(\mathfrak{a})$. □

Bemerkung 18. Die Korrespondenz aus Korollar 11 schränkt sich ein zu

$$\{\text{irred. abg. Teilmengen } \subseteq \mathbb{A}^n\} \overset{1:1}{\leftrightarrow} \{\text{Primideale in } k[\underline{T}]\}$$