Algebraische Geometrie I

Prof. Dr. Venjakob

10. Dezember 2018

Inhaltsverzeichnis

Literatur

- Görtz, Wedhorn. *Algebraic Geometry I*
- Hartshorne. *Algebraic Geometry*
- Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry 1 & 2*
- Grothendieck. *Eléments de géometrie algébrique, EGA I-IV*

Kommutative Algebra

- Brüske, Ischebeck, Vogel. *Kommutative Algebra*
- Kunz. *Einführung in die kommutative Algebra und algebraische Geometrie*

Kapitel 1

Prä-Varietäten

Abbildung 1.1: $T_2^2 = T_1^2(T_1 - 1) = T_1^3 - T_1^2$

1.1 Einführung

Algebraische Geometrie kann man verstehen, als das Studium von Systemen polynomialer Gleichungen (in mehreren Variabelen). Damit ist die algebraische Geometrie eine Verallgemeinerung der **linearen Algebra**, also statt X auch X^n, und auch der **Algebra**, durch Polynome in *mehreren* Variablen.

Frage. *Seien k ein (algebraisch abgeschlossener) Körper, und $f_1, \dots, f_m \in k[T_1, \dots, T_n]$ gegeben. Was sind die "geometrischen Eigenschaften" der Nullstellenmenge*

$$V(f_1, \dots, f_n) := \{(t_1, \dots, t_n) \in k^n \mid f_i(t_1, \dots, t_n) = 0 \ \forall i\}$$

Beispiel 1.1. Sei $f = T_2^2 - T_1^2(T_1 - 1) \in k[T_1, T_2]$. Die Nullstellenmenge für $k = \mathbb{R}$ (*aber: trügerisch, da $\mathbb{R}$ nicht algebraisch abgeschlossen!*) ist gegeben durch:

- Dimension 1
- $(0, 0)$ ist singulärer Punkt
- Alle anderen Punkte besitzen eine eindeutig bestimmte Tangente

Abbildung 1.2: **Spitze** und **Doppelpunkt**

Vergleiche mit dem **Satz über implizite Funktionen**: (Analysis, Differentialgeometrie)

$V(f)$ ist lokal diffeomorph zu $\mathbb{R}$ (= reelle Gerade) im Punkt (x_1, x_2) genau dann, wenn die Jacobi-Matrix

$$\left(\frac{\partial f}{\partial T_1}, \frac{\partial f}{\partial T_2}\right) = (T_1(3T_1 - 2),\ 2T_2)$$

Rang 1 in (x_1, x_2) hat. Das ist äquivalent dazu, dass $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$. Dies lässt sich rein formal über beliebigen Grundkörpern **algebraisch** formulieren.

Methoden. GAGA - Géometrie algébrique, géometrique analytique (Serre)

Komplexe Geometrie ($\mathbb{C}$), Differentialgeometrie ($\mathbb{R}$)	Algebraische Geometrie
Analytische Hilfsmittel	Kommutative Algebra

1.2 Die Zariski-Topologie

Definition 1.2. Sei $M \subseteq k[T_1, \ldots, T_n] =: k[\underline{T}]$ eine Teilmenge. Mit

$$V(M) := \{(t_1, \ldots, t_n) \in k^n \mid f(t_1, \ldots, t_n) = 0 \ \forall \boldsymbol{f} \in \boldsymbol{M}\}$$

bezeichnen wir die gemeinsame **Nullstellen-(Verschwindungs-)Menge** der Elemente aus M. (Manchmal auch $V(f_i, i \in I)$ statt $V(\{f_i, i \in I\})$.

Notation Wir schreiben auch $V(f_i, i \in I)$ statt $V(\{f_i \mid i \in I\})$

1.2.1 Eigenschaften

- $V(M) = V(\mathfrak{a})$, wenn $\mathfrak{a} = \langle M \rangle_{k[\underline{T}]}$ das *von M erzeugte Ideal* in $k[\underline{T}]$ bezeichnet.
- Da $k[\underline{T}]$ noethersch (Hilbertscher Basissatz) ist, reichen stets endlich viele $f_1, \ldots, f_n \in M$:

$$V(M) = V(f_1, \ldots, f_n) \qquad \text{falls } \mathfrak{a} = \langle f_1, \ldots, f_n \rangle_{k[\underline{T}]}.$$

- $V(-)$ ist **inklusionsumkehrend**, $M' \subseteq M \implies V(M) \subseteq V(M')$.

Satz 1.3. *Die Mengen $V(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{a} \trianglelefteq k[\underline{T}]$ ein Ideal, sind die* ***abgeschlossenen*** *Mengen einer Topologie auf k^n, der sogenannten* ***Zariski-Topologie****.*

(i) $\emptyset = V((1))$, $k^n = V(0)$.

(ii) $\bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i) = V\left(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right)$ *für beliebige Familien* $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ *von Idealen.*

(iii) $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ *für* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \trianglelefteq k[\underline{T}]$ *Ideale.*

Beweis. Übung / Algebra II.

□

1.3 Affine algebraische Mengen

Definition 1.4.

- $\mathbb{A}^n(k)$, der **affine Raum der Dimension n** (über k), bezeichne k^n mit der Zariski-Topologie.
- Abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{A}^n(k)$ heißen affine abgeschlossene Mengen.

Beispiel 1.5. Da $k[T]$ ein Hauptidealring ist, sind die abgeschlossen Mengen in $\mathbb{A}^1(k)$: $\emptyset$, $\mathbb{A}^1$, Mengen der Form $V(f)$, $f \in k[T] \backslash \{k\}$ (endliche Teilmengen). Insbesondere sieht man, dass die Zariski-Topologie im Allgemeinen nicht Hausdorff ist.

Beispiel 1.6. $\mathbb{A}^2(k)$ hat zumindestens als abgeschlossene Mengen:

- $\emptyset$, $\mathbb{A}^2$;
- Einpunktige Mengen: $\{(x_1, x_2)\} = V(T_1 - x_1, T_2 - x_2)$;
- $V(f)$, $f \in k[T_1, T_2]$ irreduzibel.

Ferner alle endlichen Vereinigungen dieser Liste. (Dies sind in der Tat alle, denn später sehen wir: "irreduzible" abgeschlossene Mengen entsprechen den *Primidealen*, und $k[T_1, T_2]$ hat "Krull-Dimension 2".)

1.4 Der Hilbertsche Nullstellensatz

Theorem 1.7. *Sei K ein (nicht notwendigerweise algebraisch abgeschlossener) Körper, und A eine endlich erzeugte K-Algebra. Dann ist A Jacobson'sch, d.h. für jedes Primideal $\mathfrak{p} \trianglelefteq A$ gilt:*

$$\mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{p}} \mathfrak{m}, \quad \mathfrak{m} \text{ maximales Ideal}$$

Ist $\mathfrak{m} \trianglelefteq A$ ein maximales Ideal, so ist die Körpererweiterung $K \subseteq A/\mathfrak{m}$ endlich.

Beweis. Algebra II / kommutative Algebra. □

Korollar 1.8.

(i) Sei A eine e.e. (endlich erzeugte) k-Algebra (k sei algebraisch abgeschlossen), $\mathfrak{m} \trianglelefteq A$ ein maximales Ideal. Dann ist $A/\mathfrak{m} = k$.

(ii) Jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \trianglelefteq k[\underline{T}]$ ist von der Form $\mathfrak{m} = (T_1 - x_1, \dots, T_n - x_n)$ mit $x_1, \dots, x_n \in k$.

(iii) Für ein Ideal $\mathfrak{a} \trianglelefteq k[\underline{T}]$ gilt:

$$\operatorname{rad}(\mathfrak{a}) = \sqrt{\mathfrak{a}} \overset{(i)}{=} \bigcap_{\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} \trianglelefteq k[\underline{T}], \mathfrak{p}\, prim} \mathfrak{p} \overset{(ii)}{=} \bigcap_{\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m} \trianglelefteq k[\underline{T}], \mathfrak{m}\, maximal} \mathfrak{m}$$

Beweis.

(i) $k \to A \to A/\mathfrak{m}$ ist Isomorphismus, da k keine echte algebraische Körpererweiterung besitzt.

(ii) Es ist

$$k[T_1, \dots, T_n] \twoheadrightarrow k[\underline{T}]/\mathfrak{m} = k$$
$$T_i \mapsto x_i$$

surjektiv. Es folgt: $\mathfrak{m} = (T_1 - x_1, \dots, T_n - x_n)$, da letzteres bereits maximal ist. ($\supseteq$ klar.)

(iii) (i) Algebra II. (ii) Theorem 1.7.

□

1.5 Korrespondenz zwischen Radikalidealen und affinen algebraischen Mengen

Sei $V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affin algebraische Menge, $\mathfrak{a} \trianglelefteq k[\underline{T}]$ ein Ideal. **Es gilt:**

$$V(\mathfrak{a}) = V(\operatorname{rad}\mathfrak{a})$$

mit $\operatorname{rad}\mathfrak{a} = \{f \in k[\underline{T}] \mid f^n \in \mathfrak{a} \text{ für ein } n > 0\}$, da

$$f^n(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0,$$

d.h. verschiedene Ideale können dieselbe algebraische Menge beschreiben.

Definition 1.9. Für eine Teilmenge $Z \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ bezeichne

$$I(Z) := \{f \in k[\underline{T}] \mid f(x) = 0 \ \forall x \in Z\}$$

das **Verschwindungsideal von Z**, das Ideal aller auf Z verschwindenden Polynomfunktionen.

Satz 1.10.

(i) Sei $\mathfrak{a} \trianglelefteq k[\underline{T}]$ Ideal. Dann ist $I(V(\mathfrak{a})) = \operatorname{rad}(\mathfrak{a})$.

(ii) Sei $Z \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ Teilmenge. Dann ist $V(I(Z)) = \overline{Z}$, der Abschluss von Z in $\mathbb{A}^n(k)$.

Beweis. Übungsblatt 2. □

$\mathfrak{a}$ heißt **Radikalideal**, falls $\mathfrak{a} = \operatorname{rad}(\mathfrak{a})$, oder äquivalent falls $k[\underline{T}]/\mathfrak{a}$ *reduziert* ist, d.h. keine nilpotente Elemente ungleich 0 hat.

Korollar 1.11. *Wir erhalten eine 1-1 Korrespondenz*

$$\begin{aligned}\{\textit{abg. Mengen } \subseteq \mathbb{A}^n\} &\leftrightarrow \{\textit{Radikalideale } \mathfrak{a} \trianglelefteq k[\underline{T}]\}\\ Z &\mapsto I(Z)\\ V(\mathfrak{a}) &\leftarrow\!\shortmid \mathfrak{a}\end{aligned}$$

die sich zu einer 1-1 Korrespondenz

$$\begin{aligned}\{\textit{Punkte in } \mathbb{A}^n\} &\leftrightarrow \{\textit{max. Ideale in } k[\underline{T}]\}\\ x = (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto \mathfrak{m}_x \begin{aligned}[t] &= I(\{x\})\\ &= \ker(k[\underline{T}] \to k,\ T_i \mapsto x_i)\end{aligned}\end{aligned}$$

einschränkt.

1.6 Irreduzible topologische Räume

Die folgenden topologischen Begriffe sind nur interessant, da $\mathbb{A}^n(k)$ $(n > 0)$ kein Hausdorff'scher Raum ist.

Definition 1.12. Ein topologischer Raum X heißt **irreduzibel**, falls $X \neq \emptyset$ und X sich *nicht* als Vereinigung zweier echter abgeschlossener Teilmengen darstellen lässt, d.h

$$X = A_1 \cup A_2,\ A_i \text{ abg.} \quad \Longrightarrow \quad A_1 = X \text{ oder } A_2 = X.$$

$Z \subseteq X$ heißt irreduzibel, falls Z mit der induzierten Topologie irreduzibel ist.

Satz 1.13. *Für einen topologischen Raum $X \neq \emptyset$ sind äquivalent:*

(i) X ist irreduzibel.

(ii) Je zwei nichtleere offene Teilmengen von X haben nicht-leeren Durchschnitt.

(iii) Jede nichtleere offene Teilmenge $U \subseteq X$ ist dicht in X.

(iv) Jede nichtleere offene Teilmenge $U \subseteq X$ ist zusammenhängend.

(v) Jede nichtleere offene Teilmenge $U \subseteq X$ ist irreduzibel.

Beweis.

- $(i) \Leftrightarrow (ii)$

  Komplementärmengen.

- $(ii) \Leftrightarrow (iii)$

  Es ist: $U \subseteq X$ dicht $\Leftrightarrow U \cap O \neq \emptyset$ für jedes offene $\emptyset \neq O \subseteq X$.

- $(iii) \Rightarrow (iv)$

  Klar.

- $(iv) \Rightarrow (iii)$

  Sei $\emptyset \neq U$ offen und zusammenhängend. Es folgt:

  $$U = U_1 \sqcup U_2, \qquad \emptyset \neq U_i \underset{\text{offen}}{\subseteq} U \underset{\text{offen}}{\subseteq} X$$

  Damit ist $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, ein Widerspruch zu (iii).

- $(v) \Rightarrow (i)$

  Klar. $(U = X)$

- $(iii) \Rightarrow (v)$

  Sei $\emptyset \neq U \underset{\text{offen}}{\subseteq} X$. Ist $\emptyset \neq V \underset{\text{offen}}{\subseteq} U$, so ist $V \underset{\text{offen}}{\subseteq} X$. Es folgt: V ist dicht in X und irreduzibel in U. Mit $(iii) \Rightarrow (i)$ folgt, dass U irreduzibel ist.

$\square$

Lemma 1.14. *Eine Teilmenge Y ist genau dann irreduzibel, wenn ihr Abschluss $\overline{Y}$ dies ist.*

Beweis. Y irreduzibel
$\Leftrightarrow \forall U, V \subseteq X$ offen mit $U \cap Y \neq \emptyset \neq V \cap Y$, gilt $Y \cap (U \cap V) \neq \emptyset$.
$\Leftrightarrow \overline{Y}$ irreduzibel $\square$

Definition 1.15. Eine maximale irreduzible Teilmenge eines topologischen Raumes X heißt **irreduzible Komponente** von X.

Bemerkung 1.16.

(i) Jede irreduzible Komponente ist abgeschlossen nach Lemma 1.14.

(ii) X ist Vereinigung seiner irreduziblen Komponenten, *denn*:

die Menge der irreduziblen Teilmengen von X ist **induktiv geordnet**: für jede aufsteigende Kette irreduzibler Teilmengen ist die Vereinigung wieder irreduzibel (Satz 1.13.(ii)). Mit dem **Lemma von Zorn** folgt: Jede irreduzible Teilmenge ist in einer irreduziblen Komponente enthalten. Damit ist jeder Punkt in einer irreduziblen Komponente enthalten.

1.7 Irreduzible affine algebraische Mengen

Lemma 1.17. *Eine abgeschlossene Teilmenge $Z \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ ist genau dann irreduzibel, wenn $I(Z) \trianglelefteq k[\underline{T}]$ ein Primideal ist. Insbesondere ist $\mathbb{A}^n(k)$ irreduzibel.*

Beweis. Z irreduzibel ist äquivalent zu

$$(Z = \underbrace{V(\mathfrak{a})}_{\bigcap_i V(f_i)} \cup \underbrace{V(\mathfrak{b})}_{\bigcap_j V(g_j)} \quad \Rightarrow \quad V(\mathfrak{a}) = Z \text{ oder } V(\mathfrak{b}) = Z).$$

$$\Leftrightarrow \forall f, g \in k[\underline{T}] : \ V(fg) = V(f) \cup V(g) \supseteq Z : \ V(f) \supseteq Z \text{ oder } V(g) \supseteq Z.$$

$$(*) \Leftrightarrow \forall f, g \in k[\underline{T}] : \ fg \in I(V(fg)) \subseteq I(Z) : \ f \in I(Z) \text{ oder } g \in I(Z).$$

$$\Leftrightarrow I(Z) \text{ ist Primideal.}$$

(*): $V(I(Z)) = Z$, $I(V(\mathfrak{a})) = \mathrm{rad}(\mathfrak{a})$. □

Bemerkung 1.18. Die Korrespondenz aus Korollar 1.11 schränkt sich ein zu

$$\{\text{irred. abg. Teilmengen } \subseteq \mathbb{A}^n\} \overset{1:1}{\leftrightarrow} \{\text{Primideale in } k[\underline{T}]\}$$

1.8 Quasikompakte und noethersche topologische Räume

Definition 1.19. Ein topologischer Raum X heißt **quasikompakt**, falls jede offene Überdeckung von X eine *endliche* Teilüberdeckung enthält. („quasi“ deutet an, dass X in der Regel nicht Hausdorff'sch ist!). Er heißt **noethersch**, wenn jede absteigende Kette

$$X \supseteq Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \cdots$$

abgeschlossener Teilmengen von X stationär wird ($\Leftrightarrow$ jede aufsteigende Kette offener Teilmengen wird stationär).

Lemma 1.20. *Sei X ein noetherscher topologischer Raum. Dann gilt:*

(i) Jede abgeschlossene Teilmenge $Z \subseteq X$ ist noethersch.

(ii) Jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ ist quasikompakt.

(iii) Jeder abgeschlossene Teilraum $Z \subseteq X$ besitzt nur endlich viele irreduzible Komponenten.

Beweis.

(i) Nach Definition, da abgeschlossene Mengen von Z auch solche von X sind.

(ii) $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ offen; Angenommen U wäre nicht quasikompakt. Dann gibt es eine Folge $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I$ von Teilmengen mit

$$V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \neq U \quad \text{für } V_j = \bigcup_{i \in I_j} U_i.$$

Widerspruch zu noethersch.

(iii) Es reicht zu zeigen: Jeder noethersche Raum ist Vereinigung endlich vieler irreduzibler Teilmengen. Da X noethersch ist, folgt mit dem *Lemma von Zorn* dass jede nichtleere Menge von algebraischen Teilmengen in X ein minimales Element besitzt.

Angenommen: $\mathcal{M} := \{Z \subseteq X \text{ abg.} \mid Z \text{ ist } \textbf{nicht} \text{ endl. Vereinigung irred. Mengen}\}$ wäre nichtleer.

$\Rightarrow \exists$ minimales Element, sagen wir Z, in $\mathcal{M}$.

$\Rightarrow Z$ ist nicht irreduzibel.

$\Rightarrow Z = Z_1 \cup Z_2$ mit $Z_1, Z_2 \subsetneq Z$ abgeschlossen.

$\Rightarrow$ (Z minimal) $Z_1, Z_2 \notin \mathcal{M}$

$\Rightarrow Z \notin \mathcal{M}$. Widerspruch.

□

Satz 1.21. *Jeder abgeschlossene Teilraum $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ ist noethersch.*

Beweis. Nach dem obigen Lemma ist nur zu zeigen, dass $\mathbb{A}^n(k)$ noethersch ist.

Absteigende Ketten abgeschlossener Teilmengen sind nach *Korollar 1.11* in 1-1 Korrespondenz mit aufsteigenden Ketten von (Radikal-)Idealen in $k[\underline{T}]$. Da $k[\underline{T}]$ nach dem Hilbertschen Basissatz noethersch ist, werden letzere Ketten stationär. □

Korollar 1.22 (Primärzerlegung)**.** *Sei* $\mathfrak{a} = \operatorname{rad}(\mathfrak{a}) \trianglelefteq k[\underline{T}]$ *ein Radikalideal. Dann gilt:* $\mathfrak{a}$ *ist Durchschnitt von endlich vielen Primidealen, die sich jeweils paarweise nicht enthalten; diese Darstellung ist eindeutig bis auf Reihenfolge.*

Beweis. $V(\mathfrak{a}) = \bigcup_{i=1}^n V(\mathfrak{b}_i)$, $\mathfrak{b}_i$ Primideal. [Anmerkung] Mit Satz 1.10 folgt:

$$\mathfrak{a} = \operatorname{rad}(\mathfrak{a}) = I(V(\mathfrak{a})) = \bigcap_{i=1}^n \underbrace{I(V(\mathfrak{b}_i))}_{\mathfrak{b}_i \text{ minimale Primideale (1.17)}}$$

□

1.9 Morphismen von affinen algebraischen Mengen

Definition 1.23. Seien $X \subseteq \mathbb{A}^m(k)$, $Y \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine algebraische Mengen. Ein **Morphismus** $X \to Y$ affiner algebraischer Mengen ist eine Abbildung $f : X \to Y$ der zugrundeliegenden Mengen, sodass $f_1, \dots, f_n \in k[T_1, \dots, T_m]$ existieren, derart dass $\forall x \in X$ gilt:

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in Y.$$

Es bezeichne $\hom(X, Y)$ die Menge der Morphismen $X \to Y$.

Bemerkung 1.24. $f : X \to Y$ lässt sich immer fortsetzen zu einem Morphismus

$$f : \mathbb{A}^m(k) \to \mathbb{A}^n(k),$$

aber nicht eindeutig, es sei denn $X = \mathbb{A}^m(k)$.

Komposition

$$X \xrightarrow[f_1,\dots,f_n \in k[T_1,\dots,T_m]]{f} Y \xrightarrow[g_1,\dots,g_r \in k[T'_1,\dots,T'_m]]{g} Z$$

mit $X \subseteq \mathbb{A}^m(k)$, $Y \subseteq \mathbb{A}^n(k)$, $Z \subseteq \mathbb{A}^r(k)$. Es folgt:

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= (g_1(f_1(x), \dots, f_n(x)), \dots, g_r(f_1(x), \dots, f_n(x)) \\ &=: (h_1(x), \dots, h_r(x)) \end{aligned}$$

d.h. $g \circ f$ ist durch Polynome $h_i \in k[T_1, \dots, T_m]$ gegeben, also ist $g \circ f$ wieder ein Morphismus affiner algebraischer Mengen. Wir erhalten die **Kategorie affiner algebraischer Mengen**.

Beispiel 1.25.

(i) Sei die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^1(k) &\to V(T_2 - T_1^2) \subseteq \mathbb{A}^2(k) \\ x &\mapsto (x, x^2). \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist sogar ein *Isomorphismus* affiner algebraischer Mengen, da die Umkehrabbildung

$$(x, y) \mapsto x$$

ebenfalls ein Morphismus ist.

(ii) Sei $\mathrm{char}(k) \neq 2$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^1(k) &\to V(T_2^2 - T_1^2(T_1 + 1)) \\ x &\mapsto (x^2 - 1, x(x^2 - 1)) \end{aligned}$$

ist ein Morphismus, aber *nicht* bijektiv, da $1, -1$ beide auf $(0, 0)$ abgebildet werden.

1.10 Unzulänglichkeiten des Begriffs der affinen algebraischen Mengen

(i) Offene Teilmengen affiner algebraischer Mengen tragen nicht in natürlicher Weise die Struktur einer affinen algebraischen Menge.

(ii) Insbesondere können wir affine algebraische Mengen nicht entlang offener Teilräume verkleben. (vgl. Mannigfaltigkeiten.)

(iii) Keine Unterscheidungsmöglichkeiten z.B. zwischen $\{(0,0)\}$, $V(T_1) \cap V(T_2)$ und $V(T_2) \cap V(T_1^2 - T_2) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$, obwohl die "geometrische Situation" offensichtlich verschieden ist.

Um die Punkte 1 und 2 zu verbessern, gehen wir im Folgenden zu "Räumen mit Funktionen" über, und verzichten darauf, dass sich diese in einen affinen Raum $\mathbb{A}^n(k)$ einbetten lassen.

Der Punkt 3 ist eine Motivation dafür, später Schemata einzuführen. (subtiler)

Affine algebraische Mengen als Räume von Funktionen

1.11 Der affine Koordinatenring

Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ abgeschlossen. Für den surjektiven (Def. von Morphismen) k-Algebren-Homomorphismus

$$\begin{aligned} k[\underline{T}] &\xrightarrow{\varphi} \hom(X, \mathbb{A}^1(k)) \\ f &\mapsto (x \mapsto f(x)), \end{aligned}$$

wobei die Morphismen in folgende Weise eine k-Algebra bilden:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &:= f(x) + g(x) \\ (fg)(x) &:= f(x)g(x) \\ (\alpha f)(x) &:= \alpha f(x) \end{aligned}$$

mit $f, g \in \hom(X, \mathbb{A}^1(k))$, $\alpha \in k$, gilt:

$$\ker \varphi = I(X).$$

Definition 1.26. $\Gamma(X) := k[\underline{T}]/I(X) \cong_{k-\mathrm{Alg}} \hom(X, \mathbb{A}^1(k))$ heißt der **affine Koordinatenring** von X.

Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_x := &\ \ker(\Gamma(X) \twoheadrightarrow k,\ f \mapsto f(x)) \\ = &\ \{f \in \Gamma(X) \mid f(x) = 0\} \\ = &\ \pi((T_1 - x_1, \ldots, T_n - x_n)) \\ = &\ \ker(\Gamma(\mathbb{A}^n(k)) \twoheadrightarrow k) \end{aligned}$$

unter der Projektion $\pi : k[\underline{T}] = \Gamma(\mathbb{A}^n(k)) \twoheadrightarrow \Gamma(X)$. Es ist $\mathfrak{m}_x$ ein maximales Ideal von $\Gamma(X)$ mit $\Gamma(X)/\mathfrak{m}_x \cong k$. Für ein Ideal $\mathfrak{a} \trianglelefteq \Gamma(X)$ sei

$$V(\mathfrak{a}) := \{x \in X \mid f(x) = 0\ \forall f \in \mathfrak{a}\} = V(\pi^{-1}(\mathfrak{a})) \cap X.$$

Dies sind genau die abgeschlossenen Mengen von X als Teilraum von $\mathbb{A}^n(k)$ mit der induzierten Topologie, diese wird auch **Zariski-Topologie** genannt. Für $f \in \Gamma(X)$ setze:

$$D_X(f) := D(f) := \{x \in X \mid f(x) \neq 0\} = X \setminus V(f).$$

Lemma 1.27. *Die offenen Mengen $D(f)$, $f \in \Gamma(X)$, bilden eine Basis der Topologie von X, d.h.*

$$\forall U \subseteq X \text{ offen } \exists f_i \in \Gamma(X),\ i \in I \quad \text{mit } U = \bigcup_{i \in I} D(f_i)$$

Beweis. $U = X \backslash V(\mathfrak{a})$ für ein $\mathfrak{a} \trianglelefteq \Gamma(X)$, $\mathfrak{a} = \langle f_1, \ldots, f_n \rangle_{\Gamma(X)}$. Wegen

$$V(\mathfrak{a}) = \bigcap_{i=1}^{n} V(f_i) \quad \Rightarrow \quad U = \bigcup_{i=1}^{n} D(f_i)$$

Es reichen also sogar endlich viele $f_i \in \Gamma(X)$! □

Satz 1.28. *Der Koordinatenring $\Gamma(X)$ einer affinen algebraischen Menge X ist eine endlich erzeugte k-Algebra, die reduziert ist (d.h. keine nilpotenten Elemente $\neq 0$ enthält). Ferner ist X irreduzibel genau dann, wenn $\Gamma(X)$ integer ist.*

Beweis. $k[\underline{T}] \twoheadrightarrow \Gamma(X)$ impliziert, dass $\Gamma(X)$ als k-Algebra endlich erzeugte ist. Es gilt:

$$\Gamma(X) \text{ irreduzibel } \Leftrightarrow I(X) = \operatorname{rad} I(X).$$

Denn mit Satz 1.10.(ii) und Korollar 1.11 folgt:

$$X = V(\mathfrak{a}) : \; I(X) = \operatorname{rad} \mathfrak{a}$$
$$\Rightarrow \operatorname{rad} I(X) = \operatorname{rad} \operatorname{rad} \mathfrak{a} = \operatorname{rad} \mathfrak{a} = I(X).$$

Mit Lemma 1.17 folgt: X irreduzibel
$\Leftrightarrow I(X)$ prim
$\Leftrightarrow \Gamma(X) = k[\underline{T}]/I(X)$ integer. □

1.12 Funktorielle Eigenschaften von $\Gamma(X)$

Satz 1.29. *Für einen Morphismus $X \xrightarrow{f} Y$ affiner algebraischer Mengen definiert*

$$\begin{aligned} \Gamma(f): \quad \Gamma(Y) &\to \Gamma(X) \\ g &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

ein Homomorphismus von k-Algebren. Der so definierte kontravariante *Funktor*

$$\Gamma : \{\textit{affine algebraische Mengen}\} \to \{\textit{reduzierte endl. erz. } k\textit{-Algebren}\}$$

liefert eine Kategorienäquivalenz, welche durch Einschränkung eine Äquivalenz

$$\Gamma : \{\textit{irred. aff. alg. Mengem}\} \to \{\textit{integre endl. erz. } k\textit{-Algebren}\}$$

induziert.

Beweis. Sei $Y \xrightarrow{g} \mathbb{A}^1(k) \in \Gamma(Y)$ ein Morphismus. Es folgt:

$$g \circ f : X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} \mathbb{A}^1(k)$$

ist Morphismus, d.h. $g \circ f \in \Gamma(X)$. $\Gamma(f) : \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$ ist ein k-Algebren-Homomorphismus mit $\Gamma(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\Gamma(X)}$. Da ferner gilt, dass $\Gamma(f_1 \circ f_2) = \Gamma(f_2) \circ \Gamma(f_1)$ ist Γ ein kontravarianter Funktor.

Behauptung. Γ ist volltreu, d.h.

$$\begin{aligned} \Gamma : \hom(X, Y) &\to \hom_{k\text{-Alg}}(\Gamma(Y), \Gamma(X)) \\ f &\mapsto \Gamma(f) \end{aligned}$$

ist *bijektiv* für alle affinen algebraischen Mengen X, Y.

Beweis. Wir konstruieren eine Umkehrabbildung wie folgt: Zu $\varphi : \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$ für $X \subseteq \mathbb{A}^m(k)$, $Y \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ existiert ein Lift $\tilde{\varphi}$, s.d.

$$\begin{tikzcd} k[T'_1, \ldots, T'_n] \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] \arrow[d, two heads] & k[T_1, \ldots, T_m] \arrow[d, two heads] \\ \Gamma(Y) \arrow[r, "\varphi"] & \Gamma(X) \end{tikzcd}$$

kommutiert; $\tilde{\varphi}(T'_i) := f_i$ mit $f_i \in \pi^{-1}(\varphi(T'_i)) \subseteq k[T_1, ..., T_n]$, wobei $\pi : k[\underline{T}] \to \Gamma(X)$ die kanonische Projektion bezeichne. Definiere:

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x = (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto (\tilde{\varphi}(T'_1)(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \tilde{\varphi}(T'_n)(x_1, \ldots, x_n)) \end{aligned}$$

$\square$

Behauptung. Γ ist essentiell surjektiv, d.h. zu jeder reduzierten endlich erzeugten k-Algebra A existiert eine affine algebraische Menge X mit $A \cong \Gamma(X)$.

Beweis. Da nach Voraussetzung $A \cong k[T]/\mathfrak{a}$ für ein Radikalideal $\mathfrak{a}$, können wir etwa $X := V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ setzen. Der Rest folgt aus Satz 1.28. $\square$

$\square$

Satz 1.30. *Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus affiner algebraischer Mengen und $\Gamma(f) : \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$ der zugehörige Homomorphismus der Koordinatenringe. Dann gilt $\forall x \in X \colon \Gamma(f)^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{m}_{f(x)}$.*

Beweis.

$$\Gamma(f)^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \{g \in \Gamma(Y) \mid g \circ f \in \mathfrak{m}_x\} = \{g \in \Gamma(Y) \mid g(f(x)) = 0\} = \mathfrak{m}_{f(x)},$$

da $\Gamma(f)(g) = g \circ f$. $\square$

1.13 Räume mit Funktionen

(Prototyp eines geometrischen Objektes, Spezialfall eines "geringten Raumes" vgl. später.) Sei K ein nicht notwendigerweise algebraisch abgeschlossener Körper.

Definition 1.31.

(i) Ein **Raum mit Funktionen**$_{/K}$ besteht aus den folgenden Daten:

- ein topologischer Raum X;
- eine Familie von Unter-K-Algebren

$$\mathcal{O}_X(U) \leq \mathrm{Abb}(U, K), \quad \forall U \subseteq X \text{ offen } d.d$$

1. Sind $U' \subseteq U \subseteq X$ offen und $f \in \mathcal{O}_X(U)$ so ist $f|_{U'} \in \mathcal{O}_X(U')$.
2. (**Verklebungsaxiom**) Sind $U_i \subseteq X$ offen, $i \in I$, und $U = \bigcup_i U_i$, $f_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$, $i \in I$ gegeben mit

$$f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j} \quad \forall i, j \in I$$

dann ist die eindeutige Abbildung

$$f : U \to K \text{ mit } f|_{U_i} = f_i$$

in $\mathcal{O}_X(U)$, bzw. $\exists! f \in \mathcal{O}(U)$ mit $f|_{U_i} = f_i$ für alle $i \in I$.

Bezeichne $\mathcal{O}_X$ oder auch $\mathcal{O}$ die oben genannte Familie $\{\mathcal{O}_X(U) \mid U \subseteq X \text{offen}\}$. Das Tupel $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt **Raum mit Funktionen**.

(ii) Ein **Morphismus** $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ von Räumen von Funktionen ist eine stetige Abbildung $\varphi : X \to Y$, so dass für alle $V \subseteq Y$ offen und $f \in \mathcal{O}_Y(V)$ gilt:

$$f \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(V)} : \varphi^{-1}(V) \to K$$

liegt in $\mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(V))$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi"] & Y \\
\varphi^{-1}(V) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\varphi|"] \arrow[d, "f\circ\varphi|_{\varphi^{-1}(V)}"'] & V \arrow[u, hook, "\text{offen}"'] \arrow[d, "f"] \\
K \arrow[r, equal] & K
\end{tikzcd}$$

Wir erhalten die Kategorie der *Räume mit Funktionen über K*.

Definition 1.32 (offene Unterräume von Räumen mit Funktionen)**.** Für $(X, \mathcal{O}_X)$ einen Raum mit Funktionen und $U \subseteq X$ offen bezeichne $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ den Raum mit Funktionen gegeben durch den topologischen Raum U mit Funktionen $\mathcal{O}_X|_U(V) := \mathcal{O}_X(V)$ für $V \underset{\text{offen}}{\subseteq} U \subseteq X$.

Ab jetzt betrachten wir Räume von Funktionen über einem fixierten, algebraisch abgeschlossenen Grundkörper k.

1.14 Der Raum mit Funktionen zu einer affin-algebraischen Menge

Ziel. Wir wollen jeder irreduziblen affin algebraischen Menge $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ einen Raum mit Funktionen $(X, \mathcal{O}_X)$ zuordnen. D.h. wir müssen Mengen von Funktionen $\mathcal{O}_X(U) \leq \mathrm{Abb}(U, k)$, $U \subseteq X$ offen, definieren. Diese werden als Teilmengen des Funktionenkörpers $K(X)$ definiert (dazu X irreduzibel, später bei Schemata fällt diese Bedingung weg!)

Definition 1.33. Für eine irreduzible, affin-algebraische Menge X heißt $K(X) := \mathrm{Quot}(\Gamma(X))$ **Funktionenkörper** von X.

Elemente $\frac{f}{g} \in K(X)$, $f, g \in \Gamma(X) = \hom(X, \mathbb{A}^1(k))$, $g \neq 0$ lassen sich zumindest als Funktion auf der offenen Menge $D(g) \subseteq X$ auffassen, wenn auch i.A. nicht auf ganz X.

Lemma 1.34. *Gilt für $\frac{f_1}{g_1}, \frac{f_2}{g_2} \in K(X)$, $f_i, g_i \in \Gamma(X)$, und einer offenen Teilmenge $\emptyset \neq U \subseteq D(g_1 g_2)$*

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \qquad \forall x \in U,$$

dann folgt $\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2}$ in $K(X)$.

Beweis. Sei ohne Einschränkung der Allgemeinheit $g_1 = g_2 = g$. (Sonst Erweitern!)

$\Rightarrow (f_1 - f_2)(x) = 0 \ \forall x \in U$.

$\Rightarrow \emptyset \neq U \subseteq V(f_1 - f_2) \subseteq X$ dicht, d.h. $V(f_1 - f_2) = X$.

$f_1 - f_2 \in I()V(f_1 - f_2)) = I(X) \equiv (0)$ in $\Gamma(X)$

$\Rightarrow f_1 - f_2 = 0$. □

Definition 1.35. Sei X eine irreduzible affin-algebraische Menge, $U \subseteq X$ offen. Für $x \in X$ bezeichne $\Gamma(X)_{\mathfrak{m}_x}$ die Lokalisierung von $\Gamma(X)$ an der multiplikativ abgeschlossenen Menge $S := \Gamma(X) \setminus \mathfrak{m}_x$.

$$\mathcal{O}_X(U) := \bigcap_{x \in U} \Gamma(X)_{\mathfrak{m}_x} \subseteq K(X)$$

d.h. für jedes $x \in U$ lässt sich $f \in \mathcal{O}_X(U)$ schreiben als $\frac{h}{g} \in K(X)$ mit $g(x) \neq 0$.

Für $f \in \Gamma(X)$ bezeichne $\Gamma(X)_f$ die Lokalisierung von $\Gamma(X)$ an der multiplikativ abgeschlossenen Menge $\{1, f, f^2, \ldots, f^n \ldots\}$. Dann lässt sich

$$\Gamma(X)_{\mathfrak{m}_x} = \bigcup_{f \in \Gamma(X) \setminus \mathfrak{m}_x} \Gamma(X)_f \subseteq K(X)$$

schreiben. "$\supseteq$": klar, "$\subseteq$": $\frac{g}{f}$ mit $f(x) \neq 0$ d.h. $f \notin \mathfrak{m}_x \Rightarrow \frac{g}{f} \in \Gamma(X)_f$.

Es gilt:

(i) Für $V \subseteq U \subseteq X$ offen kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(V) \arrow[r, hook] & \mathrm{Abb}(V,k) \\
\mathcal{O}_X(U) \arrow[r, hook] \arrow[u, hook] & \mathrm{Abb}(U,k) \arrow[u, "\text{Einschränkungsabb.}"']
\end{tikzcd}$$

mit $\mathcal{O}_X(U) \hookrightarrow \mathcal{O}_X(V), f \mapsto f|_V$ nach Definition.

(ii) $\mathcal{O}_X(U) \to \mathrm{Abb}(U,k)$, $f \mapsto (x \mapsto f(x) := \frac{g(x)}{f(x)} \in k)$ ist injektiv (Lemma 1.34) und wohldefiniert (kürzen/erweitern), wobei $g, h \in \Gamma(X)$ mit $h \notin \mathfrak{m}_x$ mit $f = \frac{g}{h}$ nach Definition von $\mathcal{O}_X(U)$ existiert.

(iii) **Verklebungseigenschaft.** Sei $U = \bigcup_{i\in I} U_i$. Nach Definition ist

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X(U) = \bigcap_i &\mathcal{O}_X(U_i) \subseteq K(X) \\ \ni f : U \to k \quad &\ni f_i : U_i \to k \end{aligned}$$

[Diagramm fehlt]. $(X, \mathcal{O}_X)$ ist Raum mit Funktionen, **der zur irreduziblen affin algebraische Menge assoziierte Raum von Funktionen**.

Satz 1.36 (orig. 33)**.** *Für $(X, \mathcal{O}_X)$ zu X wie oben und $f \in \Gamma(X)$ gilt:*

$$\mathcal{O}_X(D(f)) = \Gamma(X)_f,$$

insbesondere $\mathcal{O}_X(X) = \Gamma(X)$.

Beweis. $\Gamma(X)_f \subseteq \mathcal{O}_X(D(f))$ klar, da $f(x) \neq 0\ \forall x \in D(f)$ bzw. $f \in \Gamma(X) \setminus \mathfrak{m}_x$.

Sei nun g in $\mathcal{O}_X(D(f))$ gegeben, $(*)$ und $\mathfrak{a} := \{h \in \Gamma(X) \mid hg \in \Gamma(X)\} \trianglelefteq \Gamma(X)$.

Dann gilt: $g \in \Gamma(X)_f$

$\Leftrightarrow g = \frac{k}{f^n}$ für ein n und $k \in \Gamma(X)$

$\Leftrightarrow f^n \in \mathfrak{a}$ für ein n.

d.h. zu zeigen: $f \in \mathrm{rad}(\mathfrak{a}) = I(V(\mathfrak{a}))$ (Hilbertscher Nullstellensatz)

$\Leftrightarrow f(x) = 0\ \forall x \in V(\mathfrak{a})$

Ist dazu $x \in X$ mit $f(x) \neq 0$, also $x \in D(f)$, so existieren wegen $g \in \mathcal{O}_X(D(f))$ Funktionen $f_1, f_2 \in \Gamma(X)$, $f_2 \notin \mathfrak{m}_x$ mit $g = \frac{f_1}{f_2}$, also gilt $f_2 \in \mathfrak{a}$.

Da $f_2(x) \neq 0$ folgt weiter $x \notin V(\mathfrak{a})$. □

Bemerkung 1.37 (orig. 34).

(i) Im Allgemeinen existieren für $f \in \mathcal{O}_x(U)$ **nicht notwendigerweise** $g, h \in \Gamma(X)$ mit $f = \frac{g}{h}$ und $h(x) \neq 0\ \forall x \in U$.

(ii) **Alternative Definition von $\mathcal{O}_X$, I.**

$$\mathcal{O}_X(D(f)) := \Gamma(X)_f, \quad \forall f \in \Gamma(X).$$

Da $(D(f))_{f\in\Gamma(X)}$ Basis der Topologie bildet, kann es höchstens einen Raum mit Funktionen mit dieser Eigenschaft geben, es bleibt die Existenz zu zeigen.

(iii) **Alternative Definition von $\mathcal{O}_X$, II.**

Direkt von einer integeren endlich erzeugten k-Algebra A ausgehend (die X bis auf Isomorphie festlegt), aber ohne "Koordinaten" zu wählen.

$$X := \{\mathfrak{m} \trianglelefteq A \mid \ \mathfrak{m} \text{ ist max. Ideal}\}$$

Die **abgeschlossenen Mengen** sind gegeben durch:

$$V(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{m} \in X \mid \mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{a}\}, \quad \mathfrak{a} \trianglelefteq A \text{ Ideal.}$$

$\mathcal{O}_X(U) := \bigcap_{\mathfrak{m}\in U} A_{\mathfrak{m}} \subseteq \mathrm{Quot}(A)$ für $U \subseteq X$ offen (vgl. später Schemata).

1.15 Funktorialität der Konstruktion

Satz 1.38 (orig. 35). *Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen irreduziblen affin-algebraischen Mengen. Es sind äquivalent:*

(i) *f ist ein Morphismus affin-algebraischer Mengen.*

(ii) *$\forall g \in \Gamma(Y)$ gilt $g \circ f \in \Gamma(X)$.*

(iii) *f ist ein Morphismus von Räumen von Funktionen, d.h. für alle $U \subseteq Y$ offen und alle $g \in \mathcal{O}_Y(U)$ gilt $g \circ f \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$.*

Beweis.

- *(i)* $\Leftrightarrow$ *(ii)*

  Folgt aus Satz 1.29.

- *(iii)* $\Rightarrow$ *(ii)*

  $U := Y$ und Satz 1.36.

- *(ii)* $\Rightarrow$ *(iii)*

  Betrachte $\Gamma(f) : \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$, $h \mapsto h \circ f$. Aufgrund des Verklebungsaxioms reicht es, die Bedingung für U von der Form $D(g)$ zu zeigen; hier gilt:

  $$f^{-1}(D(g)) = \{x \in X \mid \underbrace{g(f(x))}_{=\Gamma(f)(g)(x)} \neq 0\} = D(g \circ f)$$

  Deswegen induziert $\Gamma(f)$:

  $$\begin{array}{rcl} h & \longmapsto & h \circ f \\ \mathcal{O}_Y(D(g)) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(D(g \circ f)) \\ \shortparallel & & \\ \Gamma(Y)_g & \longrightarrow & \Gamma(X)_{g \circ f} \\ \dfrac{h}{g^n} & \longmapsto & \dfrac{h \circ f}{(g \circ f)^n} \end{array}$$

  mit $h \circ f, g \circ f \in \Gamma(X)$ nach Voraussetzung.

$\square$

Insgesamt erhalten wir:

Theorem 1.39 (orig. 36). *Die obige Konstruktion definiert einen volltreuen Funktor*

$$\{\textit{irreduzible aff. alg. Mengen über } k\} \to \{\textit{Räume mit Funktionen über } k\}.$$

Prävarietäten

Ziel. Klasse der affin-algebraischen Mengen, aufgefasst als Räume mit Funktionen durch Verkleben vergrößern.

$(X, \mathcal{O}_X)$ heißt **zusammenhängend**, falls X als topologischer Raum zusammenhängend ist.

1.16 Definition von Prävarietäten

Definition 1.40 (orig. 37)**.** Eine **affine Varietät** ist ein Raum mit Funktionen, der isomorph zu dem Raum mit Funktionen assoziiert zu einer irreduziblen affin-algebraischen Menge ist.

Definition 1.41 (orig. 38)**.** Eine **Prävarietät** ist ein zusammenhängender Raum mit Funktionen $(X, \mathcal{O}_X)$, für den eine *endliche* Überdeckung $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$ durch offene Teilmengen $U_i \subseteq X$ existiert, d.d. $\forall i = 1, \ldots, n$ $(U_i, \mathcal{O}_{X|_{U_i}})$ eine affine Varietät ist. Insbesondere sind affine Varietäten Prävarietäten!

Ein **Morphismus von Prävarietäten** ist ein Morphismus der entsprechenden Räume mit Funktionen.

Später sehen wir: Varietät = „separierte Prävarietät“. Affine Varietäten sind stets „separiert“, daher braucht man nicht von „affinen Prävarietäten“ zu reden. Ist X eine affine Varietät, so schreiben wir oft $\Gamma(X)$ für $\mathcal{O}_X(X)$ (vgl. Satz 1.36).

Unter einer **offenen affinen Überdeckung** einer Prävarietät X verstehen wir eine Famile von offenen affinen Unterräumen mit Funktionen $U_i \subseteq X$, $i \in I$ die affine Varietäten sind, d.d. $X = \bigcup_i U_i$.

1.17 Vergleich mit differenzierbaren/komplexen Mannigfaltigkeiten

Differential/Komplexe Geometrie Mannigfaltigkeiten werden via Kartenabbildungen mit differenzierbaren/holomorphen Übergangsabbildungen definiert (hier problematisch, da offene Teile affiner algebraischer Mengen i.A. keine solche Struktur besitzen.) Jedoch:

$$\begin{aligned} \{\text{differenzierbare Mfgkt.}\} &\longrightarrow \{\text{Räume mit Fkt.}/\mathbb{R}\} \\ X &\longmapsto (X, \mathcal{O}_X) \\ &\qquad \mathcal{O}_X(U) := C^\infty(U, \mathbb{R}),\ U \subseteq X \text{ offen} \end{aligned}$$

ist ein volltreuer Funktor. Daher kann man differenzierbare Mannigfaltigkeiten auch als diejenigen Räume mit Funktionen über $\mathbb{R}$ definieren, für die X Hausdorff ist, und so dass eine offene Überdeckung durch solche Räume mit Funktionen über $\mathbb{R}$ existiert, die in obiger Weise offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ zugeordnet sind. (Analog bei komplexen Mannigfaltigkeiten.)

1.18 Topologische Eigenschaften von Prävarietäten

Lemma 1.42. *Für einen topologischen Raum X und $U \subseteq X$ offen haben wir eine Bijektion*

$$\begin{aligned}\{Y \subseteq U \text{ irred. abg.}\} &\longleftrightarrow \{Z \subseteq X \text{ irred. abg. mit } Z \cap U \neq \emptyset\}\\ Y &\longmapsto \overline{Y} \text{ (Abschluss in } X)\\ Z \cap U &\longleftarrow Z\end{aligned}$$

Beweis. Lemma 1.14: $Y \subseteq X$ irreduzibel $\Leftrightarrow \overline{Y} \subseteq X$ irreduzibel.

$Y \subseteq U$ abgeschlossen $\Leftrightarrow \exists A \subseteq X$ abgeschlossen: $Y = U \cap A$.

$\Rightarrow Y \subseteq \overline{Y} \subseteq A \Rightarrow Y = U \cap \overline{Y}$

Y irreduzibel in $U \Rightarrow Y$ irreduzibel in X

$\Rightarrow \overline{Y}$ irreduzibel nach 1.14

$\Rightarrow Y \mapsto \overline{Y} \mapsto \overline{Y} \cap U = Y$. ✓

$\emptyset \neq Z \cap U \subseteq Z$ damit dicht da Z irreduzibel (Satz 1.13 ii. und v.)

Also ist die Abbildung $\leftarrow$ wohldefiniert.

$\Rightarrow \overline{Z \cap U} = Z$ □

Satz 1.43. *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ eine Prävarietät.*

Dann ist X noethersch (insbesondere quasikompakt) und irreduzibel.

Beweis. Sei $X = \bigcup_{i=1}^n$ endliche offene aff. Überdeckung und $X \supseteq Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \cdots$ eine absteigende Kette abgeschlossener Teilmengen.

$\Rightarrow U_i \cap Z_1 \supseteq U_i \cap Z_2 \supseteq \cdots$, ist eine absteigende Kette abgeschlossener Teilmengen von U_i

$\Rightarrow \forall i\ \exists n_i \in \mathbb{N}$: $U_i \cap Z_{n_i} = U_i \cap Z_{i+m}$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Setzen wir $n := \max n_i$, so folgt:

$\forall i = 1, \ldots, n\ \forall m \geq n$: $U_i \cap Z_m = U_i \cap Z_{m+1}$

$\Rightarrow (Z_i)_i$ wird stationär da $Z_m = \bigcup_i U_i \cap Z_m$.

X ist demnach noethersch.

X ist weiter irreduzibel:

Sei $X = X_1 \cup \cdots \cup X_n$ die Zerlegung in irreduzible Komponenten.

Angenommen es wäre $n \geq 2$.

$\Rightarrow \exists i_0 \in \{2, \ldots, n\}$: $X_1 \cap X_{i_0} \neq \emptyset$. (Andernfalls gilt: $X = X_1 \sqcup \underbrace{X \setminus X_1}_{=X_2 \cup \cdots \cup X_n \text{ abg.}}$, im Widerspruch dazu, dass X zusammenhängend ist.)

Sei ohne Einschränkung $i_0 = 2$. Sei $x \in X_1 \cap X_2$, $x \in U \subseteq X$ offen, affin (d.h. affine Varietät).

U irreduzibel $\Rightarrow \overline{U}$ (Abschluss in X) $\subseteq X_j$ für ein $j \in \{1, \ldots, n\}$

Jedoch: Da $x \in X_i \cap U \subseteq U$ irreduzibel ist, ist $\underbrace{\overline{X_i \cap U}}_{\subseteq \overline{U} \subseteq X_i} = X_i$, $i = 1, 2$

$\Rightarrow X_1, X_2 \subseteq X_j$. Widerspruch zu maximale Komponente. □

1.19 Offene Untervarietäten

Offene Teilmengen von affinen Varietäten (und allgemeiner beliebigen Prävarietäten) sind wieder Prävarietäten. (aber i.A. nicht affin!)

Lemma 1.44 (orig. 41). *Sei X eine affine Varietät, $f \in \mathcal{O}_X(X)$, $D(f) \subseteq X$. Die Lokalisierung von $\Gamma(X) = \mathcal{O}_X(X)$ an f,*

$$\Gamma(X)_f = \Gamma(X)[T]/(Tf - 1)$$

ist eine integre, endlich erzeugte k-Algebra. $(Y, \mathcal{O}_Y)$ bezeichne die zugehörige affine Varietät. Dann gilt:

$$(D(f), \mathcal{O}_X|_{D(f)}) \cong (Y, \mathcal{O}_Y)$$

als Räume mit Funktionen, d.h. $(D(f), \mathcal{O}_{X|_{D(f)}})$ ist selbst affine Varietät.

Beweis. $\mathcal{O}_X(D(f)) = \mathcal{O}_X(X)_f$ muss affiner Koordinatenring von $(D(f), \mathcal{O}_{X|_{D(f)}})$ sein, wenn letzterer Raum von Funktionen affin ist. $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ korrespondiert zu dem Radikalideal:

$$\mathfrak{a} := I(X) \trianglelefteq k[T_1, \dots, T_n] \ \subseteq\ \mathfrak{a}' := (\mathfrak{a}, fT_{n+1} - 1) \subseteq k[T_1, \dots, T_{n+1}]$$

mit Koordinatenringen:

$$\begin{aligned} \Gamma(X) &= k[T_1, \dots, T_n]/\mathfrak{a} \\ \Gamma(Y) &= \Gamma(X)_f = (k[T_1, \dots, T_n]/\mathfrak{a})[T_{n+1}]/(T_{n+1}f - 1) \\ &\cong k[T_1, \dots, T_{n+1}]/\mathfrak{a}' \end{aligned}$$

Für $Y = V(\mathfrak{a}') \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(k)$ induziert die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} Y \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(k) & (x_1, \dots, x_{n+1}) & T_i \\ \downarrow & \downarrow & \uparrow \\ X \subseteq \mathbb{A}^n(k) & (x_1, \dots, x_n) & T_i \end{array}$$

eine Bijektion $Y \xrightarrow{j} D_X(f)$ mit Umkehrabbildung $(x_0, \dots, x_n, \frac{1}{f(x_0, \dots, x_n)}) \leftarrow\!\shortmid (x_0, \dots, x_n)$

Behauptung. j ist Isomorphismus von Räumen mit Funktionen:

(i) j ist *stetig* (als Einschränkung einer stetigen Abbildung) ✓

(ii) j ist *offen*: Für $\frac{g}{f^n} \in \Gamma(X)_f = \Gamma(Y)$ mit $g \in \Gamma(X)$ gilt

$$\begin{aligned} j\left(D_Y\left(\frac{g}{f^n}\right)\right) &= j\left(D_Y(gf)\right) && f \text{ Einheit} \\ &= D_X(gf) \text{ offen} \end{aligned}$$

$\Rightarrow j$ Homömorphismus.

(iii) j induziert $\forall g \in \Gamma(X)$ Isomorphismen:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X(D(fg)) &\longrightarrow \Gamma(Y)_g \\ s &\longmapsto s \circ j \end{aligned}$$

mit $\mathcal{O}_X(D(fg)) = \Gamma(X)_{fg} = \Gamma(X)_f)_g = \Gamma(Y)_g$. Mit dem Verklebungsaxiom folgt: j ist Morphismus von Räumen mit Funktionen.

□

Satz 1.45 (orig. 42)**.** *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ Prävarietät, $\emptyset \neq U \subseteq X$ offen. Dann ist $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ eine Prävarietät und $U \hookrightarrow X$ ist Morphismus von Prävarietäten.*

Beweis. X ist irreduzibel, also folgt mit Satz 1.13, dass U zusammenhängend ist. Nach Voraussetzung besitzt $X = \bigcup_i X_i$ eine affine, offene Überdeckung. Es folgt:

$$U = \bigcup_i (\underbrace{X_i \cap U}_{\text{offen in } X_i}) = \bigcup_{i,j} D_{X_i}(f_{i,j})$$

und $D_{X_i}(f_{i,j})$ ist eine affine Varietät nach Lemma 1.44. Da X noethersch ist, folgt mit Lemma 1.20, dass U quasikompakt ist.

$\Rightarrow$ Es existiert eine endliche Teilüberdeckung, also ist U Prävarietät. ✓

Die kanonische Inklusion $i : U \hookrightarrow X$ ist sicher stetig. Für $f \in \mathcal{O}_X(V), V \subseteq X$ offen gilt mit dem Einschränkungsaxiom

$$\mathcal{O}_X|_U(U \cap V) = \mathcal{O}_X(U \cap V) \ni f \circ i = f|_{U \cap V}$$

Also ist i Morphismus von Prävarietäten. □

Die offenen affinen Teilmengen einer Prävarietät X ($\hat{=} U \subseteq X$ offen mit $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ affine Varietät) bilden eine Basis der Topologie von X, da X durch offene affine Untervarietäten überdeckt wird und letzere diese Eigenschaft nach Lemma 1.44 haben.

1.20 Funktionenkörper einer Prävarietät

Definition 1.46 (orig. 43)**.** Für eine Prävarietät X sind die rationalen Funktionenkörper aller nicht-leeren affin-offenen Teilmengen in natürlicher Weise zu einander isomorph. Diesen Körper $K(X)$ nennen wir den **rationalen Funktionenkörper**von X.

Beweis. $\emptyset \neq U, V \subseteq X$ affine, offene Untervarietäten. Da X irreduzibel ist, gilt nach *Satz 1.13*:

$$\emptyset \neq U \cap V \subseteq U \text{ offen.}$$

Nach Definition von $\mathcal{O}_X$ ist

$$\mathcal{O}_X(U) \subseteq \mathcal{O}_X(U \cap V) \subseteq K(U) = \operatorname{Quot}(\mathcal{O}_X(U)).$$

Das impliziert $\operatorname{Quot}(\mathcal{O}_X(U \cap V)) = K(U)$. Aus Symmetriegründen ist aber damit auch bereits $K(V) = \operatorname{Quot}(\mathcal{O}_X(U \cap V))$. □

Bemerkung 1.47 (orig. 44)*.* Bildung des des Funktionenkörpers $K(\cdot)$ ist **nicht** funktoriell! Für $X \to Y$ Morphismus affiner Varietäten ist die Abbildung auf den Koordinatenringen $\Gamma(Y) \to \Gamma(X)$ i.A. **nicht** injektiv, induziert also keine Abbildung $K(Y) \hookrightarrow K(X)$.

Jedoch: Eine Isomorphie $X \xrightarrow{\sim} Y$ induziert $K(Y) \xrightarrow{\sim} K(X)$. Allgemeiner sei $X \xrightarrow{\varphi} Y$ Morphismus mit $\operatorname{im}(\varphi) \subseteq Y$ offen ($\Rightarrow$ dicht. Später: $X \xrightarrow{\varphi} Y$ **dominant**, gdw. $\operatorname{im}(\varphi) \subseteq Y$ dicht) induziert in funktioreller Weise eine Abbildung $K(Y) \hookrightarrow K(X)$.

Satz 1.48 (orig. 45)**.** *Sei X eine Prävarietät, $V \subseteq U \subseteq X$ offen. Dann gilt:*

(i) $\mathcal{O}_X(U) \subseteq K(X)$ ist k-Unteralgebra.

(ii) $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$ ist Inklusion von Teilmengen des Funktionenkörpers $K(X)$.

(iii) Insbesondere gilt für $U, V \subseteq X$ offen:

$$\mathcal{O}_X(U \cup V) = \mathcal{O}_X(U) \cap \mathcal{O}_X(V).$$

Beweis.

(ii) Sei $\mathcal{O}_X(X) \ni f : X \to k$. Dann ist $f^{-1}(0) \subseteq X$ abgeschlossen, da für $W \subseteq X$ affin-offen beliebig gilt, dass

$$f^{-1}(0) \cap W = V(f|_W).$$

Dazu macht man sich klar: „abgeschlossen" ist eine lokale Eigenschaft, affin-offene W bilden eine Basis der Topologie.

$\Rightarrow \mathcal{O}_X(U) \hookrightarrow \mathcal{O}_X(V)$, $f \mapsto f|_V$ ist injektiv für $\emptyset \neq V \subseteq U \subseteq X$ offen.
$\Rightarrow V \subseteq f^{-1}(0)$
$\Rightarrow f^{-1}(0) = U$
$\Rightarrow f \equiv 0.$

(i) $U \supseteq W$ affin-offene Untervarietät.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(W) \arrow[r, hook] & K(W) \text{ } k\text{-Algebren} \\
\mathcal{O}_X(U) \arrow[u, hook] \arrow[ur, hook, dashed] &
\end{tikzcd}$$

(iii) Wir haben folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{O}_X(U) \arrow[dr, hook] & \\
\mathcal{O}_X(U \cup V) \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \mathcal{O}_X(U \cap V) \\
& \mathcal{O}_X(V) \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

Nach dem Verklebungsaxiom ist die Sequenz

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X(U \cup V) \arrow[r] & \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{O}_X(V) \arrow[r] & \mathcal{O}_X(U \cap V) \\
& f \arrow[r, mapsto] & (f|_U, f|_V) & \\
& & (g,h) \arrow[r, mapsto] & g|_{U\cap V} - h|_{U\cap V}
\end{tikzcd}$$

exakt.

$\square$

1.21 Abgeschlossene Unterprävarietäten

Sei X eine Prävarietät, $Z \subseteq X$ abgeschlossen und irreduzibel.

Ziel. $(Z, \mathcal{O}'_Z)$ Raum von Funktionen erklären. Definiere dazu für $U \subseteq Z$ offen:

$$\mathcal{O}'_Z(U) := \{f \in \mathrm{Abb}(U,k) \mid \forall x \in U\ \exists x \in V \subseteq X \text{ offen, } g \in \mathcal{O}_X(V) \text{ mit } f|_{U\cap V} = g|_{U\cap V}\}$$

Damit ist $(Z, \mathcal{O}'_Z)$ Raum von Funktionen (klar!) mit $\mathcal{O}'_X = \mathcal{O}_X$.

Lemma 1.49 (orig. 46)**.** *Seien $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine irreduzible, affin-algebraische Menge und $Z \subseteq X$ ein irreduzibler abgeschlossener Teilraum. Dann ist $(Z, \mathcal{O}_Z) = (Z, \mathcal{O}'_Z)$.*

Bezeichne ab jetzt stets $\mathcal{O}_Z$ für $\mathcal{O}_{Z'}$.

Beweis. $Z \subseteq X$ ist in beiden Fällen mit der Teilraumtopologie ausgestattet! Ferner wissen wir, dass der Morphismus $Z \hookrightarrow X$ affin-algebraischer Mengen einen Morphismus $(Z, \mathcal{O}_Z) \to (X, \mathcal{O}_X)$ von Prävarietäten induziert. Nach Definition von $\mathcal{O}'$ folgt dann:

$$\mathcal{O}'_Z(U) \subseteq \mathcal{O}_Z(U) \quad \text{für } U \subseteq Z \text{ offen, denn:}$$

Ist $f \in \mathcal{O}'_Z(U)$ und $x \in U$ so existieren nach Definition eine offene Umgebung $x \in V_x \subseteq X$ und ein $g \in \mathcal{O}_X(V_x)$ d.d. $f|_{U\cap V_x} = g|_{U\cap V_x}$. Damit gilt $g|_{Z\cap V_x} \in \mathcal{O}_Z(Z \cap V_x)$. Mit dem Verklebungsaxiom erhalten wir also $f \in \mathcal{O}_Z(U)$.

Sei $f \in \mathcal{O}_Z(U)$ und $x \in U$ beliebig. Es folgt: $\exists h \in \Gamma(Z)$ mit $x \in D(h) \subseteq U$ und

$$f|_{D(h)} = \frac{g}{h^n} \in \Gamma(Z)_h = \mathcal{O}_Z(D(h))$$

für $n \geq 0$ und $g \in \Gamma(Z)$ geeignet. Lifte $g, h \in \Gamma(Z) \twoheadleftarrow \Gamma(X)$ zu $\overline{g}, \overline{h} \in \Gamma(X)$ und setze $V := D(\overline{h}) \subseteq X$.

$\Rightarrow x \in V$, $\frac{\overline{g}}{\overline{h}^n} \in \mathcal{O}_X(D(\overline{h}))$ und $f|_{U\cap V} = \frac{\overline{g}}{\overline{h}^n}|_{U\cap V}$.

$\Rightarrow f \in \mathcal{O}'_Z(U)$. □

Korollar 1.50 (orig. 47)**.** *Wenn X eine Prävarietät ist, und $Z \subseteq X$ irreduzibel und abgeschlossen, dann ist $(Z, \mathcal{O}_Z)$ ebenfalls eine Prävarietät.*

Beweis. Es ist $X = \bigcup_i X_i$ für eine endliche affin-offene Überdeckung $(X_i)_i$. Damit ist

$$Z = \bigcup_i (Z \cap X_i) := \bigcup_i Z_i$$

mit $(Z_i, \mathcal{O}_{Z_i})$ affine Varietät nach Lemma 1.49. □

Beispiele (Projektiver Raum und projektive Varietäten)

1.22 Homogene Polynome

Definition 1.51 (orig. 48). Ein Polynom $f \in k[X_0, \ldots, X_n]$ heißt **homogen vom Grad** $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, falls f die Summe von Monomen von Grad d ist. (Insbesondere ist für jedes d das Nullpolynom homogen von Grad d.)

Es bezeichne $k[X_0, \ldots, X_n]_d$ den k-Untervektorraum der Polynome **homogen vom Grad** d, $k[X_0, \ldots, X_n]_{\leq n}$ den k-Untervektorraum **aller Polynome vom Grad** $\leq n$.

Bemerkung 1.52 (orig. 49). Da $\#k$ unendlich ist, ist f homogen vom Grad $d \Leftrightarrow f(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, \ldots, x_n)\ \forall x_0, \ldots, x_n \in k,\ \lambda \in k^{\times}$.

Es gilt: $k[X_0, \ldots X_n] = \bigoplus_{d \geq 0} k[X_0, \ldots, X_n]_d$.

Lemma 1.53 (orig. 50). *Für $i \in \{0, \ldots, n\}$ und $d \geq 0$ haben wir bijektive k-lineare Abbildungen*

$$k[X_0, \ldots, X_n]_d \longrightarrow k[T_0, \ldots, \hat{T}_i, \ldots, T_n]_{\leq d}$$

$$f \xmapsto{\Phi_i^d} f(T_0, \ldots, \underbrace{1}_{i}, \ldots, T_n)$$

$$X_i^d g\left(\frac{X_0}{X_i}, \ldots, \frac{\hat{X}_i}{X_i}, \ldots, \frac{X_n}{X_i}\right) \xleftarrow{\Psi_i^d} g$$

Dehomogenisierung *bzw.* ***Homogenisierung.***

Beweis. Es reicht, $\Psi_i^d \circ \Phi_i^d = \mathrm{id}$, $\Phi_i^d \circ \Psi_i^d = \mathrm{id}$ auf Monomen nachzurechnen, da alle Abbildungen k-linear sind. □

Oft ist es nützlich, $k[T_0, \ldots, \hat{T}_i, \ldots, T_n]$ mit $k\left[\frac{X_0}{X_i}, \ldots, \frac{\hat{X}_i}{X_i}, \ldots, \frac{X_n}{X_i}\right] \hookrightarrow k(X_0, \ldots, X_n)$ zu identifizieren.

1.23 Definition des projektiven Raumes

Seien $X_1 = X_2 = \mathbb{A}^1$, $\tilde{U}_1 \subseteq X_1, \tilde{U}_2 \subseteq X_2$ mit $\tilde{U}_1 = \tilde{U}_2 = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$.

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1 &\xrightarrow{\sim} \tilde{U}_2 \\ x &\longmapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Verkleben von X_1 und X_2 entlang $\tilde{U}_1 \xrightarrow{\sim} \tilde{U}_2$ liefert die **projektive Gerade**

$$\mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 \cup \{\infty\} = U_1 \cup U_2.$$

Allgemein:

$$\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i = \mathbb{A}^n \cup \mathbb{P}^{n-1} = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \dots \sqcup \mathbb{A}^1 \sqcup \mathbb{A}^0$$

Idee: $\mathbb{P}^2 \supseteq \mathbb{A}^2$: Zwei verschiedene Geraden in $\mathbb{P}^2$ schneiden sich genau in einem Punkt.
Als Menge:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^n(k) :&= \{\text{Ursprungsgeraden in } k^{n+1}\} = \{1\text{-dim. } k\text{-Unterräume}\} \\ &= (k^{n+1} \setminus \{0\})/k^\times \end{aligned}$$

Man schreibt meist kurz $(x_0 : \ldots : x_n)$ für den Repräsentanten der Klasse von $\langle (x_0, \ldots x_n) \rangle_k$ und nennt $(x_0 : \ldots : x_n)$ **homogene Koordinaten** auf $\mathbb{P}^n$.

Äquivalenzrelation:

$$(x_0, \ldots, x_n) \sim (x'_0, \ldots, x'_n) \Leftrightarrow \exists \lambda \in k^\times \text{ mit } x_i = \lambda x'_i \ \forall i.$$

Die Mengen

$$U_i := \{(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^n(k), \ 0 \leq i \leq n$$

sind wohldefiniert und überdecken $\mathbb{P}^n(k)$:

$$\mathbb{P}^n(k) = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$$

Weiter hat man eine Bijektion

$$\begin{aligned} U_i &\xrightarrow{\kappa_i} \mathbb{A}^n(k) \\ (x_0 : \ldots : x_n) &\longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{\hat{x}_i}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i} \right) \\ (t_0 : \cdots t_{i-1} : 1 : t_{i+1} : \cdots t_n) &\longleftarrow (t_0, \ldots, \hat{t}_i, \ldots, t_n) \end{aligned}$$

Über die κ_i definiert man nun eine Topologie auf $\mathbb{P}^n(k)$ durch:
$U \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ ist genau dann offen, wenn $\kappa_i(U \cap U_i) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ offen ist für alle i.

Es gilt:

$$U_i \cap U_j = D(T_j) \subseteq U_i \text{ offen}, \ i \neq j$$

wenn auf $U_i \cong \mathbb{A}^n$ die Koordinaten $T_0, \dots, \hat{T_i}, \dots, T_n$ verwendet werden. Damit wird $\mathbb{P}^n(k)$ zu einem topologischen Raum, der durch die U_i, $0 \leq i \leq n$, offen überdeckt wird.

1.23.1 Reguläre Funktionen

Sei $U \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ eine beliebige offene Teilmenge. Die regularären Funktionen auf U sind definiert als

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U) := \{f \in \mathrm{Abb}(U, k) \mid f|_{U \cap U_i} \in \mathcal{O}_{U_i}(U \cap U_i)\} \qquad \forall i \in \{0, \dots, n\}$$

wobei wir die U_i via κ_i implizit als Raum mit Funktionen auffassen. Insgesamt erhalten wir:

$$\mathbb{P}^n(k) = (\mathbb{P}^n(k), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$$

als Raum mit Funktionen.

Satz 1.54 (orig 51). *Für $U \subseteq \mathbb{P}^n$ offen gilt: $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U) = \{f : U \to k \mid \forall x \in U \colon \exists x \in V \subseteq U$ offen, $d \geq 0$ und $g, h \in k[X_0, \dots, X_n]_d$ homogen vom selben Grad d, d.d. $\forall v \in V \colon h(v) \neq 0$ und $f(v) = \frac{g(v)}{h(v)}\}$*

Wohldefiniertheit: Sei $v = (x_0 : \dots : x_n)$.

$$f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \frac{g(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n)}{h(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n)} = \frac{\lambda^d g(x_0, \dots, x_n)}{\lambda^d h(x_0, \dots, x_n)} = f(x_0, \dots, x_n)$$

Beweis.

„$\subseteq$“: Sei $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U)$. Dann ist $f|_{U \cap U_i} \in \mathcal{O}_{U_i}(U \cap U_i)$. Es folgt:

$$f = \frac{\tilde{g}}{\tilde{h}}, \ \tilde{g}, \tilde{h} \in k[T_0, \dots, \hat{T_i}, \dots, T_n]$$

Definiere $d := \max\{\deg(\tilde{g}), \deg(\tilde{h})\}$. Homogenisiere:

$$g := \psi_i^d(\tilde{g}), \ h := \psi_i^d(\tilde{h})$$

$\Rightarrow f = \frac{g}{h}$ lokal.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\tilde{g}}{\tilde{h}}(\kappa_i(x)) \\
f((x_0 : \dots : x_n)) &= \frac{\tilde{g}\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\hat{x}_i}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)}{\tilde{h}\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\hat{x}_i}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)} \\
&= \frac{x_i^d \tilde{g}(\dots)}{x_i^d \tilde{h}(\dots)} \\
&= \frac{\psi_i^d(\tilde{g})(\dots)}{\psi_i^d(\tilde{h})(\dots)} = \frac{g}{h}(x_0 : \dots : x_n)
\end{aligned}
$$

„$\supseteq$“: Sei f in der rechten Menge, fixiere $i \in \{0, \dots, n\}$. Nach Voraussetzung ist f lokal auf $U \cap U_i$ von der Form $f = \frac{g}{h}$, $g, h \in k[X_0, \dots, X_n]_d$, $d \geq 0$ geeignet. Definiere:

$$\tilde{g}_i := \frac{g}{X_i^d},\ \tilde{h} := \frac{h}{X_i^d} \in k\left[\frac{X_0}{X_i}, \dots \frac{\hat{X}_i}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}\right]$$

$\Rightarrow f$ ist lokal von der Form: $\frac{\tilde{g}}{\tilde{h}}$, $\tilde{g}$,$\tilde{h} \in k[T_0, \dots, \hat{T}_i, \dots T_n]$.

$\Rightarrow f|_{U \cap U_i} \in \mathcal{O}_{U_i}(U \cap U_i)$, also $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U)$.

□

Korollar 1.55 (orig. 52)**.** *Für $i \in \{0, \dots, n\}$ induziert*

$$U \underset{\cong}{\xrightarrow{\kappa_i}} \mathbb{A}^n(k)$$

einen Isomorphismus

$$(U_i, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n|_{U_i}}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{A}^n(k)$$

von Räumen mit Funktionen. Insbesondere ist $\mathbb{P}^n(k)$ eine Prävarietät.

Beweis. Zu zeigen: $\forall U \subseteq U_i$ offen gilt

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(U) = \mathcal{O}_{U_i}(U) = \{f : U \to k \mid f \in \mathcal{O}_{U_i}(U)\}$$

d.h. auf der rechten Seite muss die Bedingung nur für das fixierte i überprüft werden. Dies folgt aus dem Beweis von Satz 1.54. □

Damit identifizieren sich die Funktionenkörper

$$K(\mathbb{P}^n(k)) = K(U_i) = k\left(\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}\right)$$

Satz 1.56 (orig. 53)**.** *$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(\mathbb{P}^n(k)) = k$. Insbesondere ist $\mathbb{P}^n$ für $n \geq 1$ **keine** affine Varietät. (Da der k-Algebra $A = k$ ja $\mathbb{A}^0(k) = \{pt\}$ als affine Varietät entspricht.)*

Beweis. $k \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(\mathbb{P}^n(k))$ klar, da konstante Funktionen. Nach Satz 1.48 (iii) gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mathbb{P}^n) &= \bigcap_{i=0}^{n} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U_i) \subseteq K(\mathbb{P}^n(k)) \\ &= \bigcap_{i=0}^{n} k[t_0, \ldots, \hat{t}_i, \ldots, t_n] = k\end{aligned}$$

□

1.24 Projektive Varietäten

Definition 1.57 (orig. 54)**.** Abgeschlossene Unterprävarietäten eines projektiven Raumes $\mathbb{P}^n(k)$ heißen **projektive Varietäten**.

Vorsicht: für $x = (x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n$, $f \in k[X_0, \ldots, X_n]$ ist $f(x_1, \ldots, x_n)$ *nicht* wohldefiniert, da von Repräsentaten abhängig, d.h. f kann *nicht* als Funktion auf $\mathbb{P}^n$ aufgefasst werden. Für *homogene* Polynome $f_1, \ldots, f_n \in k[X_0, \ldots X_n]$ (nicht notwendig vom selben Grad) können wir dennoch Verschwindungsmengen definieren:

$$V_+(f_1, \ldots, f_n) = \{(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid f_j(x_0, \ldots, x_n) = 0 \ \forall j\}$$

Da $V_+(f_1, \ldots, f_n) \cap U_i = V(\Phi_i(f_1), \ldots, \Phi_i(f_m))$ ist $V_+(f_1, \ldots, f_m)$ abgeschlossen in $\mathbb{P}^n$. Ist $V_+(f_1, \ldots, f_n)$ irreduzibel, so erhalten wir eine projektive Varietät. In der Tat entstehen alle projektiven Varietäten auf diese Weise, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 1.58 (orig. 55)**.** *Sei $Z \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ eine projektive Varietät. Dann existieren homogene Polynome $f_1, \ldots, f_n \in k[X_0, \ldots, X_n]$, so dass*

$$Z = V_+(f_1, \ldots, f_n)$$

gilt.

Beweis. Betrachte:

$f| : f^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i$ ist Morphismus von Prävarietäten. Dann ist f selbst ein Morphismus von Prävarietäten: *lokal* ist die Aussage klar, *global* verklebt man.

$$\begin{aligned}\overline{Y} :=& Y \cup \{0\}, \text{ der Abschluss von } Y \text{ in } \mathbb{A}^{n+1}(k)\\ \mathfrak{a} :=& I(\overline{Y}) \subseteq k[X_0, \ldots, X_n]\end{aligned}$$

Behauptung: $\mathfrak{a}$ wird von homogenen Polynomen erzeugt. *Denn:* Sei für $g \in \mathfrak{a}$, $g = \sum_d g_d$ die Zerlegung in homogene Bestandteile vom Grad d. $\overline{Y}$ ist Vereinigung von Ursprungsgeraden im k^{n+1}, d.h. $\forall \lambda \in k^\times$ gilt:

$$g(x_0, \ldots, x_n) = 0 \ \Leftrightarrow \ g(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = 0$$

Beweis durch Widerspruch: *Angenommen* nicht alle g_d liegen in $\mathfrak{a}$.
$\Rightarrow \exists (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^{n+1}(k)$, so dass $g(x_0, \ldots, x_n) = 0$, aber $g_{d_0}(x_0, \ldots, x_n) \neq 0$.
$\Rightarrow 0 \neq \sum_d g_d(x_0, \ldots, x_n) T^d \in k[T]$
$\Rightarrow \exists \lambda \in k^\times$: $0 \neq \sum_d g_d(x_0, \ldots, x_n)\lambda^d = \sum_d g_d(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = g(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = 0$. Widerspruch.

$\Rightarrow \mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_m)$, mit f_j homogen, also $Z = V_+(f_1, \ldots, f_m)$.

$$Z \ni (x_0 : \ldots : x_n) \Leftrightarrow (\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) \in \overline{Y}\ \forall \lambda \in k^\times \text{ und } \neq 0$$
$$\Leftrightarrow f_i(x_0, \ldots, x_n) = 0\ \forall 1 \leq i \leq n,\ (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{P}^n$$

□

Zu Bemerkung 1.52:

Nach Satz 1.54 und Definition von $\mathcal{O}'_Z$ folgt: Ist X eine projektive Varietät und $U \subseteq X$ offen, so erhalten wir

(†) $\mathcal{O}_X(U) = \{f : U \to k \mid \forall x \in U\ \exists x \in V \underset{\text{offen}}{\subseteq} U,\ g, h \in k[X_0, \ldots, X_n]$ homogen vom gleichen Grad mit $h(v) \neq 0,\ f(v) = \frac{g(v)}{h(v)},\ \forall v \in V\}$.

Insbesondere gilt:

Satz 1.59 (orig. 56). *Seien $V \subseteq \mathbb{P}^m(k)$, $W \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ projektive Varietäten und*

$$\phi : V \longrightarrow W$$

eine Abbildung. Dann ist ϕ eine Morphismus genau dann, wenn zu jedem $x \in V$ eine offene Umgebung $x \in U_x \subseteq V$ und homogene Polynome $f_0, \ldots, f_n \subseteq k[X_0, \ldots, X_m]$ vom selben Grad existieren mit

$$\phi(y) = (f_0(y), \ldots, f_n(y)) \quad \forall y \in U_x$$

Beweis.

- "⇒": Übung.
- "⇐":
  - (i) ϕ stetig: Sei $Z \subseteq W$ abgeschlossen. Ohne Einschränkung $Z = V_+(g) \cap W$ für ein homogenes Polynom g. Dann berechnet sich das Urbild

    $$\phi^{-1}(Z) = V_+(g \circ \phi) \cap V.$$

    Auf U_x, $x \in V$, ist $g \circ \phi$ als homogenes Polynom in $X_0, \ldots, X_n$ gegeben.
    $\Rightarrow V(g \circ \phi) \cap U_x = \phi^{-1}(Z) \cap U_x$ abgeschlossen in U_x für alle x.
    $\Rightarrow \phi^{-1}(Z) \subseteq V$ abgeschlossen.
  - (ii) Zu zeigen: $\forall W' \subseteq W$ offen, $g \in \mathcal{O}_W(W')$ ist $g \circ \phi \in \mathcal{O}_V(\phi^{-1}(W'))$.
    (†) ⇒ Es ex. eine offene Umgebung W_y in W' mit $g = \frac{h}{q}$ auf W_y, h, q homogen vom Grad d.
    $\Rightarrow \phi_{|U_x \cap \phi^{-1}(W_y) := \tilde{U}_x}$ ist auch von dieser Gestalt, also $\frac{h(f_0, \ldots, f_n)}{q(f_0, \ldots, f_n)} = g \circ \phi_{|\tilde{U}_x} \in \mathcal{O}_V(\tilde{U}_x)$.

  Verklebungsaxiom $\Rightarrow g \circ \phi \in \mathcal{O}_V(\phi^{-1}(V))$.

□

1.25 Koordinatenwechsel in $\mathbb{P}^n$

Sei $A = (a_{ij}) \in GL_{n+1}(k)$ eine invertierbare, lineare Abbildung $k^{n+1} \to k^{n+1}$. Dann überführt A Ursprungsgeraden in Ursprungsgeraden, respektiert also die Äquivalenzrelation des projektiven Raumes. Wir erhalten Abbildungen:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^n(k) &\xrightarrow{\phi_A} \mathbb{P}^n(k) \\ (x_0 : \ldots : x_n) &\longmapsto \left(\sum_{i=0}^{n} a_{0i} x_i : \ldots : \sum_{i=0}^{n} a_{ni} x_i \right), \end{aligned}$$

die nach Satz 1.59 ein Morphismus von Prävarietäten ist. Offensichtlich gilt für $A, B \in GL_{n+1}(k)$:

$$\varphi_{A \cdot B} = \varphi_A \circ \varphi_B$$

d.h. φ_A ist insbesondere wieder ein Isomorphismus, **der durch A bestimmte Koordinatenwechsel des** $\mathbb{P}^n(k)$. Es *bezeichne* $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n(k))$ die Gruppe der Automorphismen von $\mathbb{P}^n(k)$. Es folgt:

$$\varphi_- : GL_{n+1}(k) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n(k)), A \mapsto \varphi_A$$

ist ein Gruppenhomomorphismus mit

$$Z := \ker \varphi_- = \{\lambda E_{n+1}, \mid \lambda \in k^\times\}$$

der Untergruppe der Skalarmatrizen. *Später*:

$$PGL_{n+1}(k) := GL_{n+1}(k)/Z \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n(k)), \quad Z \cong k^\times$$

die **projektive lineare Gruppe**.

Beispiel. Sei $n = 1$. Es ist

$$\begin{aligned} PGL_2(\mathbb{C}) &= \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\ (z : w) & \mapsto (az + bw, cz + dw) \end{array} \right\} \\ &\leftrightarrow \text{Möbiustransformationen } z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \end{aligned}$$

1.26 Lineare Unterräume von $\mathbb{P}^n$

Sei $\varphi : k^{m+1} \to k^{n+1}$ ein *injektiver* Homomorphismus von k-Vektorräumen. φ induziert eine injektive Abbildung

$$\imath : \mathbb{P}^m(k) \to \mathbb{P}^n(k)$$

die nach Satz 1.59 ein Morphismus von Prävarietäten ist. Das Bild von $\imath$ ist eine abgeschlossene Untervarietät. Ist $A = (a_{ij}) \in M_{l\times(n+1)}$ mit $\mathrm{im}(\varphi) = \ker(k^{n+1} \xrightarrow{A} k^l)$ und

$$f_i := \sum_{j=0}^{n} a_{ij}X_j \in k[X_0, \dots, X_n], \text{ für } i = 1, \dots, l$$

so identifiziert $\imath$ den projektiven Raum $\mathbb{P}^m(k)$ mit $V_+(f_1, \dots, f_l) \subseteq \mathbb{P}^n(k)$. (Die Abbildung $\imath : \mathbb{P}^m(k) \to V_+(f_1, \dots, f_l)$ ist ein Isomorphismus von Prävarietäten, mit Umkehrabbildung induziert von $\varphi^{-1} : \varphi(k^{m+1}) \to k^{m+1}$)

Beispiel. $\mathbb{P}^m = V_+(X_{m+1}, \dots, X_n) \subseteq \mathbb{P}^n$. Solche Unterräume heißen **lineare Unterräume** (der Dimension m).

$m = 0$: Punkte
$m = 1$: Geraden
$m = 2$: Ebenen
$m = n - 1$: Hyperebenen in $\mathbb{P}^n(k)$.

- Zu zwei Punkten $p \neq q \in \mathbb{P}^n(k)$ existiert genau eine gerade $\overline{pq}$ in $\mathbb{P}^n(k)$, die p und q enthält, da zu zwei verschiedenen Ursprungsgeraden im k^{n+1} genau eine Ebene (in k^{n+1}) existiert, die beide Geraden enthält.

- Je zwei verschiedene Geraden in $\mathbb{P}^2(k)$ schneiden sich in genau einem Punkt, da Geraden in $\mathbb{P}^2$ Ebenen in k^3 entsprechen, und zwei Ebenen sich dort genau in einer Geraden, d.h. einem Punkt des $\mathbb{P}^2$, schneiden. Dimensionsformel (lineare Algebra):

$$\dim_k E_1 \cap E_2 = -\underbrace{\dim_k(E_1 + E_2)}_{3} + \underbrace{\dim_k E_1}_{2} + \underbrace{\dim_k E_2}_{2} = 1$$

Später: Verallgemeinerung durch den *Satz von Bézout* für allgemeine Unterprävarietäten $V_+(f)$.

1.27 Kegel

Sei $H \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ Hyperebene, $p \in \mathbb{P}^n(k) \setminus H$, $X \subseteq H$ abgeschlossene Unterprävarietät.

$$\overline{X,p} := \bigcup_{q \in X} \overline{qp}$$

heißt **Kegel von** X **über** p, es handelt sich um eine abgeschlossenen Untervarietät von $\mathbb{P}^n(k)$. Ohne Einschränkung: $H = V_+(X_n)$, $p = (0 : \ldots : 0 : 1)$ (geeigneter Koordinatenwechsel) Für

$$\begin{aligned} X = V_+(f_1, \ldots, f_m) \subseteq \mathbb{P}^{n-1}(k) = H, &\quad f_i \in k[X_0, \ldots, X_{n-1}] \\ \Rightarrow \overline{X,p} = V_+(\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_m) \subseteq \mathbb{P}^n(k), &\quad \tilde{f}_i \in k[X_0, \ldots, X_n] \end{aligned}$$

Verallgemeinerung. Sei $\mathbb{P}^m(k) \cong \Lambda \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ linearer Unterraum, $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ komplementärer linearer Unterraum, d.h. $\Lambda \cap V = \emptyset$ und $\mathbb{P}^n(k)$ ist der *kleinste* lineare Unterraum von $\mathbb{P}^n(k)$, der Λ und V enthält. Für $X \subseteq V$ eine abgeschlossene Unterprävarietät definiert man den

Kegel von X **über** Λ durch $\overline{X,\Lambda} := \bigcup_{q \in X} \overline{q,\Lambda}$, wobei der von q und Λ aufgespannte lineare Unterraum $\overline{q,\Lambda}$ der kleinste Unterraum sei, der q und Λ enthält.

1.28 Quadriken

Sei in diesem Abschnitt $\mathrm{char}(k) \neq 2$.

Definition 1.60 (orig. 57)**.** Eine abgeschlossene Unterprävarietät $Q \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ von der Form $V_+(q)$, $0 \neq q \in k[X_0, \ldots, X_n]_2$ heißt **Quadrik**.

$$Q = V_+(q)$$

Zur quadratischen Form q gehört eine assoziierte Bilinearform β auf k^{n+1} (vgl. lineare Algebra),

$$\beta(v, w) := \frac{1}{2}(q(v + w) - q(v) - q(w)), \quad v, w \in k^{n+1}$$

Es gibt eine Basis von k^{n+1}, sodass die Strukturmatrix B von β die Gestalt

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

hat, d.h. Koordinatenwechsel zur Basiswechselmatrix liefert einen Isomorphismus

$$Q \xrightarrow{\sim} V_+(X_0^2 + \cdots + X_{r-1}^2), \quad r = \mathrm{rk}\ B$$

Lemma 1.61 (orig. 58)**.** *(i) $X_0^2 + \ldots + X_{r-1}^2$ ist irreduzibel $\iff r > 2$*

(ii) $V_+(X_0^2 + \ldots + X_{r-1}^2)$ ist irreduzibel $\iff r \neq 2$

Beweis.

- $r = 0, 1 : X_0^2 = X_0 \cdot X_0 \Rightarrow V_+(X_0^2) = V_+(X_0)$ irreduzibel
- $r = 2 : X_0^2 + X_1^2 = (X_0 + i \cdot X_1) \cdot (X_0 - i \cdot X_1)$ für $i = \sqrt{-1}$
- $r > 2$: Angenommen $\sum_i a_i X_i \cdot \sum_j b_j X_j = X_0^2 + \ldots X_{r-1}^2$.
  Ausmultiplizieren + Koeffizientenvergleich $\Rightarrow$ Widerspruch.

□

Satz 1.62 (orig. 59)**.** *Ist $r \neq s$, so sind $V_+(T_0^2 + \cdots + T_{r-1}^2)$ und $V_+(T_0^2 + \cdots + T_{s-1}^2)$ nicht isomorph.*

Beweis. Später: Es gibt keinen Koordinatenwechsel von $\mathbb{P}^n(k)$, der die beiden Mengen miteinander identifiziert, damit auch kein Automorphismus von $\mathbb{P}^n(k)$. □

Definition 1.63. Eine Quadrik $Q \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ mit $Q \cong V_+(T_0^2+\cdots+T_{r-1}^2)$, $r \geq 1$, hat **Dimension** $n - 1$ und den **Rang** r. (nach Satz eindeutig!)

Korollar 1.64 (orig. 61)**.** *Zwei Quadriken Q_1 und Q_2 sind genau dann isomorph als Prävarietäten, wenn sie dieselbe Dimension und denselben Rang haben.*

Beweis.

„$\Leftarrow$“ $Q_1 \cong V_+(T_0^2 + \cdots + T_{n-1}^2) \cong Q_2$ in dem selben $\mathbb{P}^n$.

„$\Rightarrow$“ Für $Q \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ berechne $K(Q)$. Ohne Einschränkung $Q = V_+(X_0^2 + \cdots + X_{n-1}^2)$.

(i) $r = 1$: $V_+(X_0^2) = V_+(X_0) = \mathbb{P}^{n-1}(k)$: $K(Q) = k(T_1, \ldots, T_{n-1})$.

(ii) $r = 2$: reduzibel: Zerlegung in zwei Hyperebenen $Z \cong \mathbb{P}^{n-1}$
$\Rightarrow K(Z) \cong k(T_1, \ldots, T_{n-1})$.

(iii) $r > 2$: $U = V(1 + T_1^2 + \cdots + T_{n-1}^2) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ ist nichtleere offene affine Teilmenge von Q.
$\Rightarrow K(Q) = K(U) = \mathrm{Quot}(\Gamma(U)) = \mathrm{Quot}(k[T_1, \ldots, T_n]/(1 + T_1^2 + \cdots + T_{n-1}^2)$
$\Rightarrow \mathrm{trgrad}_k\ K(Q) = n - 1$.

□

Beispiel 1.65. Q Quadrik in $\mathbb{P}^n$ (vgl. Joe Harris, Seite 34).

(i) In $\mathbb{P}^1(k)$.

- *Rang 2:* 2 Punkte, reduzibel.
- *Rang 1:* 1 Punkt (Doppelpunkt).

(ii) In $\mathbb{P}^2(k)$.

- *Rang 3:* Glatter Kegel $\cong \mathbb{P}^1(k)$. $X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 = 0$
- *Rang 2:* 2 verschiedene Geraden, reduzibel.
- *Rang 1:* (Doppel)gerade.

(iii) In $\mathbb{P}^3(k)$.

- Rang 1: Doppelebene (2-dimensionaler linearer Unterraum)
- Rang 2: (insert image)
- Rang 3: (insert image)
- Rang 4: (insert image)

Die Quadrik $Q \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ heißt **glatt**, falls $r = n+1$, d.h. falls die Matrix B zu q maximalen Rang hat. Für $\mathrm{rk}(Q) > 3$, $\dim(Q) = d$, ist $Q \cong \overline{\widetilde{Q}, \Lambda}$ Kegel über einer **glatten** Quadrik $\widetilde{Q}$, da Dimension $r - 2$ bzgl. einer $(d - r + 2)$-dimensionalen Unterraums 1.

- $r = 1, 2$ ausgeartet.

- $r = 1$. $Q = V_+(X_0^2) = V_+(X_0)$ Hyperebenen in $\mathbb{P}^n(k)$. Der Unterschied zwischen $V_+(X_0^2)$ und $V_+(X_0)$ ist für eine projektive Varietät Q nicht sichtbar, jedoch in der Theorie der Schemata unterscheidbar!

- $r = 2$. $Q = V_+(X_0^2 + X_1^2)$ reduzibel, d.h. keine Prävarietät in unserem Sinne! Auch hier werden uns Schemata später helfen.

$Q = V_+(X_0^2 + X_1^2 + \cdots + X_{n-1}^2) \subseteq \mathbb{P}^{d+1}$, $r \leq d+2$
$\tilde{Q} = V_+(X_0^2 + \cdots + X_{n-1}^2) \subseteq \mathbb{P}^{r-1}$ glatt.
$A = \mathbb{P}^{d+1-v} = V_+(X_0, \ldots, X_{n-1}) \subseteq \mathbb{P}^{d+1}$
$Q = \overline{\widetilde{Q}, \Lambda}$

Kapitel 2

Das Ringspektrum

Bisher:
Prävarietäten$_{/k}$ sind Verklebungen von *affinen Varietäten*$_{/k}$ mit k algebraisch abgeschlossen.
Dabei sind affine Varietäten$_{/k}$ äquivalent zu *endlich erzeugten, integren k-Algebren*,
wobei die Punkte der Varietäten den maximalen Idealen der k-Algebren entsprechen.

Ziel: Schemata sind Verklebungen von *affinen Schemata*.
Dabei sollen affine Schemta äquivalent zu *beliebigen* (kommutativen) Ringen sein.
Die Punkte affiner Schemata werden den *Primidealen* der zugehörigen Ringe entsprechen.

Methodik: Wir wollen einen Funktor:

$$A \longmapsto (\underbrace{\mathrm{Spec}(A)}_{\text{top. Raum}}, \underbrace{\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}}_{\textit{Garbe}})$$

$\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$ ist dabei „Garbe von Funktionen“ und verallgemeinert „Systeme von Funktionen“ für Raume mit Funktionen.

Wir erhalten insbesondere affine Schemata für k-Algebren über beliebigen Körpern k!

Grund für den Übergang zu Primidealen:

Für einen Ringhomomorphismus $\varphi : A \to B$, und ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \subseteq B$ ist $\mathfrak{m}^c := \varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ im Allgemeinen **kein** maximales Ideal von A. Wir erhalten in dieser Allgemeinheit also keinen Funktor auf den Maximalsprektren, wie bisher.

Das Ringspektrum als topologischer Raum

2.1 Definition von Spec(A)

Sei A stets ein kommutativer Ring. $\mathrm{Spec}(A) := \{\mathfrak{p} \trianglelefteq A \mid \mathfrak{p} \text{ prim}\}$.

Für $M \subseteq A$ definiert man

$$V(M) := V_A(M) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid M \subseteq \mathfrak{p}\} = V(\langle M\rangle_A)$$
$$V(f) := V(\{f\}) \text{ für } f \in A$$

Lemma 2.1. *Es ist*

$$\{\textit{Ideale in } A\} \longrightarrow \{\textit{Teilmengen in } \mathrm{Spec}(A)\}$$
$$\mathfrak{a} \longmapsto V(\mathfrak{a})$$

eine inklusionsumkehrende Abbildung. Weiter gilt:

(i) $V(0) = \mathrm{Spec}(A)$, $V(1) = \emptyset$.

(ii) $V\left(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{a}_i\right) = V\left(\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i\right) = \bigcap_{i\in I} V(\mathfrak{a}_i)$

(iii) $V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}') = V(\mathfrak{a}\mathfrak{a}') = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{a}')$

Beweis.

- (1), (2) klar.
- (3). $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}' \supseteq \mathfrak{a}\mathfrak{a}' \Rightarrow \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}\mathfrak{a}'$.

  $\mathfrak{p}$ prim $\Rightarrow \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}'$.

  $\Rightarrow \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}'$

□

Definition 2.2. Spec(A) mit der Topologie, dessen abgeschlossene Mengen gerade die Mengen der Form $V(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{a} \trianglelefteq A$ ein Ideal sind, heißt das **(Prim)Spektrum von** A (mit der Zariski-Topologie).

$$x \in \operatorname{Spec}(A) \leftrightarrow \mathfrak{p}_x \trianglelefteq A \text{ prim}$$
$$Y \subseteq \operatorname{Spec}(A), \quad I(Y) := \bigcap_{y \in Y} \mathfrak{p}_y$$

$I(-)$ ist inklusionumkehrend, $I(\emptyset) = A$.

Satz 2.3. *Seien $\mathfrak{a} \trianglelefteq A$ ein Ideal und $Y \subseteq$ Spec(A) eine Teilmenge. Dann gilt:*

(i) $\operatorname{rad} I(Y) = I(Y)$, $V(\mathfrak{a}) = V(\operatorname{rad} \mathfrak{a})$

(ii) $I(V(\mathfrak{a})) = \operatorname{rad}(\mathfrak{a})$, $V(I(Y)) = \overline{Y}$ *(Abschluss in* Spec(A)*).*

(iii) Wir haben eine 1:1-Korrespondenz:

$$\{\mathfrak{a} \trianglelefteq A \mid \mathfrak{a} = \operatorname{rad} \mathfrak{a}\} \longrightarrow \{\textit{abg. Teilmengen } Y \textit{ in } \operatorname{Spec}(A)\}$$

Beweis.

(i) $V(\mathfrak{a}) = V(\operatorname{rad} \mathfrak{a})$.

- „$\supseteq$". Klar, da rad $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{a}$.
- „$\subseteq$". Aus $f^r \in \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ folgt $f \in \mathfrak{p}$, da $\mathfrak{p}$ prim, also $\operatorname{rad} \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$.

(ii) $\operatorname{rad} \mathfrak{a} = \bigcap_{x \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}_x = IV(\mathfrak{a})$. Es ist:

$$V(\mathfrak{b}) \supseteq Y \Leftrightarrow \forall \mathfrak{p} \in Y: \ \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{b}$$
$$\Leftrightarrow I(Y) \supseteq \mathfrak{b}.$$

Damit ist $V(I(Y))$ die kleinste abgeschlossene Teilmenge, die Y umfasst, d.h. $V(I(Y)) = \overline{Y}$.

(iii) Klar.

□

2.2 Topologische Eigenschaften von Spec(A)

Definiere $D(f) := D_A(f) := \mathrm{Spec}(A) \setminus V(f) = \{x \in \mathrm{Spec}\, A \mid f \notin \mathfrak{p}_x\}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_x : A &\longrightarrow A/\mathfrak{p}_x \subseteq \kappa_x(A) := \mathrm{Quot}(A/\mathfrak{p}_x) \\ f &\longmapsto f(x) := f(\mathfrak{p}_x) := f \mod \mathfrak{p}_x \end{aligned}$$

Für $x \in D(f)$ gilt dann $f(x) = \mathrm{ev}_x(f) \neq 0$.

Mengen der Form $D(f), f \in A$ heißen **(standard) prinzipal offene Mengen**. Man hat:

$$\begin{aligned} D(0) = \emptyset,\ D(1) &= \mathrm{Spec}(A) = D(u),\ u \in A^\times \\ D(f) \cap D(g) &= D(fg) \end{aligned}$$

Lemma 2.4. *Für $f_i \in A, i \in I$, $g \in A$ gilt:*

$$\begin{aligned} D(g) \subseteq \bigcup_{i\in I} D(f_i) &\Leftrightarrow g^n \in \mathfrak{a} = (f_i, i \in I) \text{ für } n \in \mathbb{N} \text{ geeignet} \\ &\Leftrightarrow g \in \mathrm{rad}(\mathfrak{a}) \end{aligned}$$

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned} D(g) \subseteq \bigcup_i D(f) \Leftrightarrow V(g) &\supseteq \bigcap_i V(f_i) = V(\mathfrak{a}) \\ &\Leftrightarrow g \in \mathrm{rad}((g)) \subseteq \mathrm{rad}(\mathfrak{a}) \text{ nach 2.3} \end{aligned}$$

Für $g = 1$, folgt:

$$\mathrm{Spec}(A) = \bigcup_{i\in I} D(f_i) \Leftrightarrow \sum_{i\in I} Af_i = A$$

□

Satz 2.5. *Die prinzipal offenen Mengen $D(f)$, $f \in A$, bilden eine Basis der Topologie von* $\mathrm{Spec}(A)$*, und sind quasikompakt. Insbesondere ist* $\mathrm{Spec}(A)$ *quasikompakt.*

Beweis. Nach Lemma 2.1.(ii) gilt:

$$V(\mathfrak{a}) = \bigcap_{f\in\mathfrak{a}} V(f) \Longrightarrow \mathrm{Spec}\, A \setminus V(\mathfrak{a}) = \bigcup_{f\in\mathfrak{a}} D(f) \Rightarrow \text{Basis der Topologie}$$

Sei $D(g) \subseteq \bigcup_i D(f_i)$.

2.4 $\Rightarrow g^n = \sum_{i\in I} a_i f_i$, $a_i \in A$ fast alle 0.

$\Rightarrow D(g) \subseteq \bigcup_{i\in J} D(f_i)\ \forall i \in J \subseteq I$ endlich

$\Rightarrow D(g)$ quasikompakt. □

Satz 2.6. $Y \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ *ist irreduzibel, genau dann wenn $\mathfrak{p} := I(Y) \trianglelefteq A$ prim ist. In diesem Fall ist $\{\mathfrak{p}\} \subseteq \overline{Y}$ dicht!*

Beweis.

„⇒“: Seien Y irreduzibel und $f, g \in A$ mit $fg \in \mathfrak{p}$.

$\Rightarrow Y \subseteq \overline{Y} = VI(Y) \subseteq V(fg) = V(f) \cup V(g)$

Y irreduzibel ⇒ Ohne Einschränkung: $Y \subseteq V(f)$.

$\Rightarrow f \in \bigcap_{y \in V(f)} \mathfrak{p}_y = IV(f) \subseteq I(Y) = \mathfrak{p}$, d.h. $\mathfrak{p}$ ist prim.

„⇐“: Sei umgekehrt $\mathfrak{p} = I(Y)$ ein Primideal.

Satz 2.3 $\Rightarrow \overline{Y} = V(\mathfrak{p}) = VI(\{\mathfrak{p}\}) = \overline{\{\mathfrak{p}\}}$, d.h. $\overline{Y}$ ist der Abschluss der irreduziblen Menge $\{\mathfrak{p}\}$ und daher selbst irreduzibel.

Lemma 1.14 ⇒ Y ist auch irreduzibel, da dicht in $\overline{Y}$.

□

Warnung: im Allgemeinen ist $\mathfrak{p}$ kein Punkt in Y!

Korollar 2.7. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \operatorname{Spec}(A) &\longrightarrow \{\textit{abg. irred. Teilmengen von Spec } A\} \\ \mathfrak{p} &\longmapsto V(\mathfrak{p}) = \overline{\{\mathfrak{p}\}} \end{aligned}$$

ist eine Bijektion, unter der die minimalen *Primideale von A den irreduziblen Komponenten entsprechen.*

Beweis. Proposition 2.3 und 2.6. □

Definition 2.8. Für einen topologischen Raum X heißt $\eta \in X$ **generischer Punkt**, falls $\overline{\{\eta\}} = X$. Allgemeiner sagen wir für $x, x' \in X$, dass x eine **Verallgeimeinerung** (engl. **„generalization“**) von x' ist, bzw. x' eine **Spezialisierung** von x, falls $x' \in \overline{\{x\}}$.

Bemerkung 2.9.

(i) $\eta \in X$ generisch ⇔ η ist Verallgemeinerung von jedem Punkt von X.

(ii) Existiert ein generischer Punkt in X, so ist X als Abschluss einer irreduziblen Menge selbst irreduzibel.

(iii) Für $X = \operatorname{Spec}(A)$ gilt: x' ist eine Spezialisierung von $x \Leftrightarrow \mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_{x'}$

$$\begin{array}{c} \Leftrightarrow V(\mathfrak{p}_{x'}) \subseteq V(\mathfrak{p}_x) \\ \quad\ \shortparallel \qquad\ \shortparallel \\ x' \in \overline{\{x'\}} \subseteq \overline{\{x\}} \end{array}$$

Ferner hat jede abgeschlossene irreduzible Teilmenge $Y \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ einen *eindeutigen* generischen Punkt (dies gilt nicht für beliebige irreduzible Teilmengen $Y \subseteq \operatorname{Spec}(A)$).

2.3 Der Funktor $A \mapsto$ Spec(A)

Ziel: Wir wollen einen kontravarianten Funktor

$$\begin{aligned} \underline{\text{CRing}} &\longrightarrow \underline{\text{Top}} \\ A &\longmapsto \operatorname{Spec} A \end{aligned}$$

definieren. Sei $\varphi : A \longrightarrow B$ ein Ringhomomorphismus, $\mathfrak{q}$ Primideal von B. Es folgt: $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \trianglelefteq A$ ist Primideal, denn $A/\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \hookrightarrow B/\mathfrak{q}$ ist integer als Unterring eines integren Rings. Wir erhalten also eine Abbildung

$$\begin{aligned} {}^a\varphi = \operatorname{Spec}\varphi : \ \operatorname{Spec} B &\longrightarrow \operatorname{Spec} A \\ \mathfrak{q} &\longmapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \end{aligned}$$

Satz 2.10.

(i) $({}^a\varphi)^{-1}(V(M)) = V(\varphi(M))$ *für* $M \subseteq \operatorname{Spec} A$ *Teilmenge, insbesondere gilt* $({}^a\varphi)^{-1}(D(f)) = D(\varphi(f))$, $f \in A$.

(ii) $V(\varphi^{-1}(\mathfrak{b})) = \overline{{}^a\varphi(V(\mathfrak{b}))}$ *für* $\mathfrak{b} \trianglelefteq B$ *Ideal.*

Beweis.

(i) Für $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$ gilt:

$$\mathfrak{q} \in V(\varphi(M)) \iff \mathfrak{q} \supseteq \varphi(M) \iff \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \supseteq M \iff \mathfrak{q} \in ({}^a\varphi)^{-1}(V(M)) \tag{2.1}$$

Weiter:

$$\begin{aligned} D(\varphi(f)) &= \operatorname{Spec}(B) \setminus V(\varphi(f)) && (2.2) \\ &= \operatorname{Spec}(B) \setminus ({}^a\varphi)^{-1}(V(f)) && (2.3) \\ &= ({}^a\varphi)^{-1}(D(f)) && (2.4) \end{aligned}$$

(ii) $\overline{{}^a\varphi(V(\mathfrak{b}))} = VI({}^a\varphi(V(\mathfrak{b})))$ nach Satz 2.3. Nach Definition gilt:

$$\begin{aligned} I({}^a\varphi(V(\mathfrak{b})) &= \bigcap_{\mathfrak{p} \in {}^a\varphi(V(\mathfrak{b}))} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{q} \in V(\mathfrak{b})} \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \\ \text{komm. Algebra } &= \varphi^{-1}(\operatorname{rad} \mathfrak{b}) \\ &\overset{!}{=} \operatorname{rad} \varphi^{-1}(\mathfrak{b}) \end{aligned}$$

Denn: Ohne Einschränkung gelte $\mathfrak{b} = 0$, $\varphi^{-1}(\mathfrak{b}) = \ker\varphi$ (betrachte $A/\varphi^{-1}(\mathfrak{b}) \hookrightarrow B/\mathfrak{b}$). Es ist:

$$a \in \varphi^{-1}(\sqrt{0}) \Leftrightarrow \varphi(a)^n = \varphi(a^n) = 0 \text{ für } n \text{ geeignet}$$

$V(\cdot)$ liefert die Behauptung: $V(\operatorname{rad}\varphi^{-1}(\mathfrak{b})) = V(\varphi^{-1}(\mathfrak{b}))$ nach Satz 2.3.

□

Insbesondere ist ${}^a\varphi : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ *stetig*. Wegen

$$^a(\psi \circ \varphi) = \ ^a\varphi \ \circ \ ^a\psi \text{ und } ^a\mathrm{id}_A = \mathrm{id}_{\operatorname{Spec} A}$$

für einen weiteren Ringhomomorphismus $\psi : B \to C$ ist $A \mapsto \operatorname{Spec} A$ der gesuchte kontravariante Funktor.

Korollar 2.11. *${}^a\varphi$ ist **dominant**, d.h.* $\operatorname{im}({}^a\varphi) \subseteq \operatorname{Spec} A$ *dicht* $\iff$ *Jedes Element in* $\ker\varphi$ *ist nilpotent:* $\ker\varphi \subseteq \mathit{rad}(0)$.

Satz 2.12.

(i) Ist $\varphi : A \to B$ ein surjektiver Ringhomomorphismus mit $\ker\varphi =: \mathfrak{a}$, dann ist ${}^a\varphi$ ein Homöomorphismus von $\operatorname{Spec} B$ auf $V(\mathfrak{a}) \underset{abg.}{\subseteq} \operatorname{Spec} A$.

(ii) Ist S eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von A, und $\varphi : A \longrightarrow S^{-1}A =: B$ die kanonische Lokalisierungsabbildung, dann ist ${}^a\varphi$ ein Homöomorphismus, von $\operatorname{Spec} S^{-1}A$ auf $\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid S \cap \mathfrak{p} = \emptyset\}$.

Beweis. ${}^a\varphi$ injektiv + im ${}^a\varphi$ ist bekannt aus kommutative Algebra. *Ferner*: Für $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$, $\mathfrak{b} \trianglelefteq B$ Ideal gilt $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{b} \Leftrightarrow \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \supseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{b})$, also

$$^a\varphi(V(\mathfrak{b})) = V(\varphi^{-1}(\mathfrak{b})),$$

d.h. ${}^a\varphi$ ist abgeschlossen. □

2.4 Beispiele

- $\operatorname{Spec} A = \emptyset \Leftrightarrow A = \{0\}$.
- A Körper oder Ring mit einem einzigem Primideal: $\operatorname{Spec} A = \{\mathfrak{p}\}$.
- A Artinsch: $\operatorname{Spec} A$ endlich und diskret (da maximale Primideale mit den minimalen Primidealen übereinstimmen)

  ($\operatorname{Spec} A = \operatorname{Spec}(A/\sqrt{0})$, $A/\sqrt{0}$ Produkt von Körpern. $\operatorname{Spec}(\prod_i A_i) = \coprod_i \operatorname{Spec}(A_i)$)

Beispiel 2.13. Sei A Hauptidealring (z.B. $\mathbb{Z}$ oder $K[X]$). Falls $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal ist, dann ist $\mathfrak{p} = (\pi)$, π Primelement in A.

Alle Primideale sind maximal oder 0.

Abg. Punkte von $\operatorname{Spec} A \leftrightarrow$ Primelemente modulo $A^\times$

$\overline{\{\eta\}} = \operatorname{Spec} A$ für $\eta \in \operatorname{Spec} A$ mit $\mathfrak{p}_\eta = (0)$.

Abgeschlossene Mengen $\operatorname{Spec} A \neq V(\mathfrak{a}) \overset{0\neq\mathfrak{a}=(f)}{=} V(f) = \{(p_1), \ldots, (p_n)\}$ falls $f = p_1^{e_1} \cdots p_n^{e_n}$, p_i paarweise verschieden, $e_i \geq 1$, sind genau *endliche Mengen abgeschlossener Punkte.*

$g \neq 0 \neq f$:

$$\begin{aligned} V(f) \cap V(g) &= V(f,g) = V(d), && d = \operatorname{ggT}(f,g) \\ V(f) \cup V(g) &= V((f) \cap (g)) = V(e), && e = \operatorname{kgV}(f,g) \end{aligned}$$

Falls A *lokaler* Hauptidealring ist (also diskreter Bewertungsring, der kein Körper ist), dann:

$$\operatorname{Spec} A = \{x, \eta\},\ \mathfrak{p}_x \text{ max. Ideal, } \mathfrak{p}_\eta = (0)$$

$\{\eta\}$ einzige nicht-triviale offene Menge.

Beispiel 2.14. Sei k algebraisch abgeschlossener Körper. Affine Varietäten $V \leftrightarrow$ endlich erzeugte k-Algebren A.

$V =$\{max. Ideale in $A\} \subseteq \operatorname{Spec}(A)$

Topologie auf V ist die Unterraumtopologie von $\operatorname{Spec}(A)$.

Beispiel 2.15. Sei R Hauptidealring, $A = R[T]$, $X = \operatorname{Spec}(A)$. R faktoriell $\Rightarrow R[T]$ faktoriell, nach dem Satz von Gauß, mit Primidealen:

(i) $p \in R$ prim

Beweis. $p \in R$ prim $\Rightarrow R/pR$ Körper. Nach Proposition 2.12 gilt:

$$\overline{pR[T]} = V(pR[T]) \cong \operatorname{Spec}\left(R/pR[T]\right)$$

ein Hauptidealring mit unendlich vielen Elementen. Damit ist $pR[T]$ *nicht* maximal, sondern

$$V(pR[T]) = \{pR[T], (f,p), f \in R[T] \text{ mit } \overline{f} \in R/p[T] \text{ irreduzibel}\}$$

□

(ii) $f \in R[T]$ primitives Polynom, irreduzibel in $\mathrm{Quot}(R)[T]$

Beweis. Sei f primitives, irreduzibles Polynom.

- $l(f) \in R^\times \Rightarrow$ (Division mit Rest) $R \subseteq R[T]/pR[T]$ ist eine ganze Ringerweiterung und ein endl.-erz. freier R-Modul vom Rang $\deg(f)$. Angenommen, $fR[T]$ ist maximal. Dann ist $R[T]/fR[T]$ ein Körper, also R ein Körper (da ganze Ringerweiterung). Widerspruch.
- Andernfalls kann $fR[T]$ ein maximales Ideal sein: R habe nur endlich viele Primelemente.
$$0 \neq a := \prod_p p \in R, \ f := aT - 1$$
Es folgt:
$$R[T]/fR[T] \cong R[a^{-1}] = \mathrm{Quot}(R)$$
also ist $fR[T]$ maximal.

□

Exkursion über Garben

Bisher:

$$X \text{affin alg. Menge} \longmapsto \Gamma(X) = \mathrm{Hom}(X, \mathbb{A}^1) \tag{2.5}$$

Jetzt:

$$\mathrm{Spec}\, A \longleftarrow\!\shortmid A \tag{2.6}$$

d.h. A soll den Funktionen auf $\mathrm{Spec}\, A$ entsprechen. Für $x \in \mathrm{Spec}\, A$ definiert man $ev_x : A \to \kappa_A(x) := A_{\mathfrak{p}_x}/\mathfrak{p}_x A_{\mathfrak{p}_x} \cong \mathrm{Quot}(A/\mathfrak{p}_x)$ durch $f \mapsto f(x) := ev_x(f) := f \mod \mathfrak{p}_x$. Mit dieser Definition folgt insbesondere $D(f) = \{x \in \mathrm{Spec}\, A \mid f(x) \neq 0\}$. Da $x \mapsto f(x)$ keine Funktion im engeren Sinne ist, können wir diese Konstruktion nicht als System von Funktionen auffassen. Wichtige Aussagen: Restriktion + Verklebung $\rightsquigarrow$ Garben.

2.5 Prägarben und Garben

Definition 2.16. Sei X ein topologischer Raum.
(i) Eine **Prägarbe** $\mathcal{F}$ auf X besteht aus den folgenden Daten:

- eine Menge $\mathcal{F}(U)$ für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$
- Eine **Restriktionsabbildung** $res_U^V : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ für jedes Paar $U \subseteq V$ offen in X, so dass:
  - $res_U^U = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)}$
  - $res_U^W = res_U^V \circ res_V^W$ für $U \subseteq V \subseteq W$ offen in X

(ii) Ein **Morphismus von Prägarben** $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ist eine Familie von Abbildungen $\{\phi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U) \mid U \subseteq X \text{ offen }\}$, so dass für alle Paare $U \subseteq V$ offen in X, das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\phi_V"] \arrow[d, "res_U^V"] & \mathcal{G}(V) \arrow[d, "res_U^V"] \\ \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\phi_U"] & \mathcal{G}(U) \end{tikzcd}$$

Notation: $U \subseteq V$, $s \in \mathcal{F}(V)$, dann: $s|_U := res_U^V(s)$.
Die Elemente in $\mathcal{F}(U)$ heißen **Schnitte von $\mathcal{F}$ über** U, $\Gamma(U, \mathcal{F}) := \mathcal{F}(U)$.

Alternative Beschreibung:

$\mathcal{O}\mathrm{uv}_X$: Kategorie offener Mengen von X mit $\mathrm{Hom}(U, V) := \begin{cases} \emptyset, \text{ falls } U \not\subseteq V \\ \{U \to V\}, \text{ falls } U \subseteq V \end{cases}$. Eine **Prägarbe auf** X ist ein kontravarianter Funktor $\mathcal{F} : \mathcal{O}\mathrm{uv}_X \to \underline{\mathrm{Set}}$. Ersetzt man $\underline{\mathrm{Set}}$ durch eine Kategorie $\mathcal{C}$, so bekommt man Prägarben **mit Werten in** $\mathcal{C}$. Ein Morphismus von Prägarben

$\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ist eine natürliche Transformation $\mathcal{F} \implies \mathcal{G}$.

Für eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X, $U \subseteq X$ offen und $U = \bigcup_i U_i$ eine offene Überdeckung von U, definiere:

$$\rho : \mathcal{F}(U) \to \prod_i \mathcal{F}(U_i), s \mapsto (s|_{U_i})_i \tag{2.7}$$

$$b : \prod_i \mathcal{F}(U_i) \to \prod_{(i,j)} \mathcal{F}(U_i \cap U_j), (s_i)_i \mapsto (s_i|_{U_i \cap U_j})_{(i,j)} \tag{2.8}$$

$$b' : \prod_i \mathcal{F}(U_i) \to \prod_{(i,j)} \mathcal{F}(U_i \cap U_j), (s_i)_i \mapsto (s_j|_{U_i \cap U_j})_{(i,j)} \tag{2.9}$$

Definition 2.17. (i) Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X heißt **Garbe**, falls für alle offenen Teilmengen $U \subset X$ und alle offenen Überdeckungen $U = \bigcup_i U_i$ wie oben gilt:

$$(Sh) \quad \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\rho} \prod_i \mathcal{F}(U_i) \overset{b}{\underset{b'}{\rightrightarrows}} \prod_{(i,j)} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

d.h. ρ ist injektiv und $\operatorname{im} \rho = \{s \in \prod_i \mathcal{F}(U_i) \mid b(s) = b'(s)\}$, mit anderen Worten: $(\mathcal{F}(U), \rho)$ ist **Equalizer** von b und b'.
Dabei ist (Sh) äquivalent zu:

(Sh0) $\mathcal{F}(\emptyset)$ ist finales Objekt.

(Sh1) Gilt für $s, s' \in \mathcal{F}(U)$ $s|_{U_i} = s'|_{U_i}$ für alle i, so folgt $s = s'$.

(Sh2) Zu jeder Familie $(s_i)_i \in \prod_i \mathcal{F}(U_i)$ mit $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ existiert ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $s|_{U_i} = s_i$.

(ii) Ein **Morphismus von Garben** ist ein Morphismus der unterliegenden Prägarben.

Wir erhalten die Kategorie $\underline{\mathcal{PS}\mathrm{h}}_X(\underline{\mathrm{Set}})$ der Mengenwertigen Prägarben auf X und die volle Unterkategorie $\underline{\mathcal{S}\mathrm{h}}_X(\underline{\mathrm{Set}})$ der Mengenwertigen Garben auf X. Analog erhalten wir Garben von abelschen Gruppen, Ringen, R-Moduln und R-Algebren.

Bemerkung 2.18. (i) $\mathcal{F} \in \underline{\mathcal{S}\mathrm{h}} \implies \Gamma(\emptyset, \mathcal{F})$ ist einpunktig (wegen (Sh) für die leere Überdeckung)

(ii) $X = \{pt\} \implies \mathcal{F}$ auf X ist eindeutig durch $\mathcal{F}(X)$ bestimmt

Beispiel 2.19. (i) $\mathcal{F} \in \underline{\mathcal{PS}\mathrm{h}}_X, U \subseteq X$ offen $\implies \mathcal{F}|_U \in \underline{\mathcal{PS}\mathrm{h}}_U$ mit $\Gamma(V, \mathcal{F}|_U) := \Gamma(V, \mathcal{F})$. Ist $\mathcal{F} \in \underline{\mathcal{S}\mathrm{h}}_X$, so ist $\mathcal{F}|_U \in \underline{\mathcal{S}\mathrm{h}}_U$.

(ii) Für X, Y top. Räume definiert $\mathcal{F}$ gegeben durch $\Gamma(U, \mathcal{F}) := \mathcal{C}(U, Y) = \{f : U \to Y \mid f \text{ stetig}\}$ und $res^U_V : f \mapsto f|_V$ eine Garbe.

(iii) k ein Körper, $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Raum mit Funktionen$/_k \implies \mathcal{O}_X$ ist Garbe von k-Algebren auf X.

(iv) Für einen top. Raum X definiert $\mathcal{F}(U) := \{f : U \to \mathbb{R} \mid f$ stetig und beschränkt$\}$ eine Prägarbe auf X, im Allgemeinen aber keine Garbe.

Sei $\mathcal{B}$ eine Basis der Topologie von X und $\mathcal{F} \in \underline{\mathcal{S}\mathrm{h}}_X$. Sei für $V \subseteq X$ offen $\mathcal{B}_V := \{U \in \mathcal{B} \mid U \subseteq V\}$. Dann folgt wegen (Sh):

$$\mathcal{F}(V) \cong_{(\dagger)} \{(s_U)_U \in \prod_{U \in \mathcal{B}_V} \mathcal{F}(U) \mid \forall U' \subseteq U \in \mathcal{B}_V : s_U|_{U'} = s_{U'}\} \cong \varprojlim_{U \in \mathcal{B}_V} \mathcal{F}(U)$$

d.h. $\mathcal{F}$ ist bereits eindeutig durch die Schnitte auf einer Basis von X bestimmt.
$(\dagger)$: einfache Folgerung aus $(Sh1)$.

Eine **Prägarbe auf** $\mathcal{B}$ ist ein kontravarianter Funktor $\mathcal{F} : \mathcal{B} \to \underline{\mathrm{Set}}$. Jedes solche $\mathcal{F}$ induziert eine Prägarbe $\overline{\mathcal{F}}^X$ auf X durch $\overline{\mathcal{F}}^X(V) := \varprojlim_{U \in \mathcal{B}_V} \mathcal{F}(U)$. Für $U \in \mathcal{B}$ gilt dann $\overline{\mathcal{F}}^X(U) = \varprojlim_{U' \in \mathcal{B}_U} \mathcal{F}(U') = \mathcal{F}(U)$, da U initial in $\mathcal{B}_U$.
Ein **Morphismus von Prägarben auf** $\mathcal{B}$ ist wieder ein Morphismus von Funktoren.

Satz 2.20. *$\overline{\mathcal{F}}^X$ ist eine Garbe $\iff$ $\mathcal{F}$ erfüllt (Sh) für alle $U \in \mathcal{B}$ und Überdeckungen $U = \bigcup_i U_i$ mit $U_i \in \mathcal{B}$.*
*In diesem Fall heißt $\mathcal{F}$ **Garbe auf** $\mathcal{B}$.*

Beweis. Im Folgenden schreiben wir $\overline{\mathcal{F}} := \overline{\mathcal{F}}^X$.

„$\Rightarrow$“: $\overline{\mathcal{F}}^X(U) = \mathcal{F}(U)$ für alle $U \in \mathcal{B}$.

„$\Leftarrow$“: Sei $U \subseteq X$ offen und $U = \bigcup_i U_i$ eine offene Überdeckung von U in X.
$\underline{(Sh1)}$:

$$\varprojlim_{B \in \mathcal{B}_U} \mathcal{F}(B) = \overline{\mathcal{F}}(U) \hookrightarrow \prod_i \overline{\mathcal{F}}(U_i) \hookrightarrow \prod_i \prod_{B \in \mathcal{B}_{U_i}} \mathcal{F}(B)$$

$$s = (s_B)_B, s' = (s'_B)_B \longmapsto s|_{U_i} = s'|_{U_i} \longmapsto ((s_B)_{B \in \mathcal{B}_{U_i}})_i = ((s'_B)_{B \in \mathcal{B}_{U_i}})_i \qquad (\dagger)$$

Behauptung: $\forall B \in \mathcal{B}_U : \ s_B = s'_B$, d.h. $s = s'$. <u>denn:</u>

$$\mathcal{F}(B) \hookrightarrow \prod_i \prod_{B' \in \mathcal{B}_{U_i \cap B}} \mathcal{F}(B')$$

ist injektiv nach $(Sh1)$ für $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{B}$.
s_B und s'_B haben gleiches Bild wegen $(\dagger)$.
$\underline{(Sh2)}$:

$$\overline{\mathcal{F}}(U) \xrightarrow{\rho} \prod_i \overline{\mathcal{F}}(U_i) \longrightarrow \prod_{(i,j)} \overline{\mathcal{F}}(U_i \cap U_j)$$

„$\overline{\mathcal{F}}(U) \subseteq \ker$“ : $\rho(s) = ((s_B)_{B \in \mathcal{B}_{U_i}})_i$. Sei $T \in \mathcal{B}_{U_i \cap U_j} \subseteq \mathcal{B}_{U_i}$, $V \in \mathcal{B}_{U_i}$ und $W \in \mathcal{B}_{U_j}$. Dann folgt:
$s_V|_T = s_T = s_W|_T \implies$ Behauptung.

„$\overline{\mathcal{F}}(U) \supseteq \ker$“ : Sei $(s_i)_i \in \prod_i \overline{\mathcal{F}}(U_i)$ mit $b((s_i)_i) = b'((s_i)_i)$.
<u>Gesucht:</u> $s = (s_B)_B \in \overline{\mathcal{F}}(U)$ mit $s|_{U_i} = s_i$.

Es gilt:

$$\mathcal{F}(B) \xrightarrow{\rho} \prod_i \prod_{B' \in \mathcal{B}_{U_i \cap B}} \mathcal{F}(B') \overset{b}{\underset{b'}{\rightrightarrows}} \prod_{(i,j)} \prod_{\mathcal{B}_{U_i \cap B} \times \mathcal{B}_{U_j \cap B}} \mathcal{F}(V \cap W)$$

ist exakt, d.h. ein Equalizer-Diagramm. Konstruiere damit $s_B \in \mathcal{F}(B)$, welche kompatibles System bilden. $s = (s_B)_B$ ist dann das gesuchte Element in $\overline{\mathcal{F}}(U)$.

$\square$

2.6 Halme von Garben

Für $x \in X$ und $\mathcal{F} \in \underline{\mathcal{PS}\mathrm{h}}_X$ ist $(\mathcal{F}(V), res_U^V)_{x \in U \subseteq X \text{offen}}$ ein filtriertes induktives System.
filtriert:
$\forall U, V \subseteq X$ offen $\exists W \subseteq U, V$ offen. (z.B. $W = U \cap V$).

Definition 2.21. Der induktive Limes (oder auch Colimes) $\mathcal{F}_x := \varinjlim_{x \in U} \mathcal{F}(U)$ heißt **Halm** von $\mathcal{F}$ in x. Für $x \in U \subseteq X$ offen hat man einen kanonischen Morphismus $\pi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x$. Das Bild eines Schnittes $s \in \mathcal{F}(U)$ unter π_U heißt **Keim** von s in x und wird mit s_x bezeichnet.

Ein Morphismus von Prägarben $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ induziert eine Abbildung $\varphi_x = \varinjlim_{x \in U} \varphi_U : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ von Halmen in x.

Beispiel 2.22. $z_0 \in X := \mathbb{C}$, $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$: Garbe der holomorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$. Dann gilt: $(U, f) \sim (V, g) \iff f$ und g haben dieselbe Taylor-Entwicklung um z_0.
$\implies \mathcal{O}_{\mathbb{C}, z_0} = \mathbb{C}\{\{z_0\}\}$ ist der Ring der Potenzreihen um z_0 mit positivem Konvergenzradius.

Satz 2.23. *Seien X ein top. Raum, $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \underline{\mathcal{PS}\mathrm{h}}_X$ und $\mathcal{F} \overset{\varphi}{\underset{\psi}{\rightrightarrows}} \mathcal{G}$ zwei Morphismen.*

(1) Ist $\mathcal{F}$ eine Garbe, so gilt $\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ ist injektiv für alle $x \in X \iff \varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ ist injektiv für alle $U \subseteq X$ offen.

(2) Sind $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Garben, so gilt:

(a) φ_x ist bijektiv für alle $x \in X \iff \varphi_U$ ist bijektiv für alle $U \subseteq X$ offen.

(b) $\varphi = \psi \iff \varphi_x = \psi_x$ für alle $x \in X$.

Beweis. Für $U \subseteq X$ offen ist

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \hookrightarrow & \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \\ & & \\ s & \longmapsto & (s_x)_{x \in U} \end{array}$$

injektiv, denn:
Seien $s, t \in \mathcal{F}(U)$ mit $s_x = t_x$ für alle $x \in U$. Dann gibt es für jedes $x \in U$ eine offene Umgebung $x \in V_x \subseteq U$ s.d. $s|_{V_x} = t|_{V_x}$.
$(Sh1) \implies s = t$.
Wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varphi_U"] & \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \arrow[d, "\prod_x \varphi_x"] \\ \mathcal{G}(U) \arrow[r] & \prod_{x \in U} \mathcal{G}_x \end{tikzcd}$$

welches "(1) ⇒ " und (2)(b) impliziert.

Allgemein gilt:

(i) Filtrierte Colimiten injektiver Abbildungen sind injektiv, d.h. “(1) $\Leftarrow$ “ gilt.

(ii) Colimiten surjektiver Abbildungen sind surjektiv, d.h. “(2)(a) $\Leftarrow$ “ gilt

Zu “(2)(a) $\Rightarrow$ “: reicht z.z.: Bijektivität von φ_x impliziert Surjektivität von φ_U.
Sei dazu $t \in \mathcal{G}(U)$. Wähle für alle $x \in U$ eine offene Umgebung $x \in U^x \subseteq U$ und $s^x \in \mathcal{F}(U^x)$ so dass $(\varphi_{U^x}(s^x))_x = t_x$.
$\Longrightarrow \ \exists x \in V^x \subseteq U^x$ offen mit $\varphi_{V^x}(s^x|_{V^x}) = t|_{V^x}$.
Da $U = \bigcup_x V^x$ offene Überdeckung, gilt für alle $x, y \in U$:

$$\varphi_{V^y \cap V^x}(s^x|_{V^y \cap V^y}) = t|_{V^y \cap V^x} = \varphi_{V^y \cap V^x}(s^y|_{V^y \cap V^x})$$

φ_U injektiv nach (1) $\Longrightarrow$ $s^x|_{V^y \cap V^y} = s^y|_{V^y \cap V^y}$.
$(Sh2)$ $\Longrightarrow$ $\exists s \in \mathcal{F}(U)$ mit $s|_{V^x} = s^x$ für alle $x \in U$.
$\Longrightarrow$ $\varphi_U(s)_x = [(V^x, \varphi_{V^x}(s|_{V^x}))] = [(V^x, t|_{V^x})] = t_x \Longrightarrow \varphi_U(s) = t$. □

Definition 2.24. Ein Morphismus $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ von Garben heißt **injektiv/ surjektiv/ bijektiv** $:\Longleftrightarrow \ \forall x \in X : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ ist injektiv/ surjektiv/ bijektiv.

Bemerkung 2.25. $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ist surjektiv gdw. für alle $t \in \mathcal{F}(U)$ eine offene Überdeckung $U = \bigcup_i U_i$ existiert und $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ s.d. $\varphi_{U_i}(s_i) = t|_{U_i}$, d.h. <u>lokal</u> findet man stets ein Urbild.
Warnung: Aus φ surjektiv folgt nicht φ_U surjektiv für alle $U \subseteq X$ offen.

2.7 Die zu einer Prägarbe assoziierte Garbe

Definition 2.26. Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf einem top. Raum X. Eine **Vergarbung** (auch Garbifizierung/ assoziierte Garbe) von $\mathcal{F}$ ist eine Garbe $\mathcal{F}^{sh}$ auf X zusammen mit einem Morphismus $\iota : \mathcal{F} \to V(\mathcal{F}^{sh})$ von Prägarben, so dass gilt:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mor}_{\underline{\mathcal{PS}\mathrm{h}}_X}(\mathcal{F}, V(\mathcal{G})) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Mor}_{\underline{\mathcal{S}\mathrm{h}}_X}(\mathcal{F}^{sh}, \mathcal{G}) \\ \\ \varphi \circ \iota & \longleftarrow\!\!\!\shortmid & \varphi \end{array}$$

Hierbei bezeichne $V : \underline{\mathcal{S}\mathrm{h}}_X \to \underline{\mathcal{PS}\mathrm{h}}_X$ den Vergissfunktor.
Durch diese Eigenschaft ist $(\mathcal{F}^{sh}, \iota)$ eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus bestimmt.
Ferner gilt:

(0) Es existiert eine Vergarbung $\iota : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^{sh}$

(1) ι wie oben induziert einen Isomorphismus $\iota_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}^{sh}_x$ auf Halmen für alle $x \in X$.

(2) Für jede Prägarbe $\mathcal{G}$ auf X und jeden Morphismus $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ existiert genau ein Morphismus $\varphi^{sh} : \mathcal{F}^{sh} \to \mathcal{G}^{sh}$ s.d. folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\iota_{\mathcal{F}}"] \arrow[d, "\varphi"] & \mathcal{F}^{sh} \arrow[d, "\varphi^{sh}"] \\ \mathcal{G} \arrow[r, "\iota_{\mathcal{G}}"] & \mathcal{G}^{sh} \end{tikzcd}$$

d.h. $\underline{\mathcal{PS}\mathrm{h}}_X \to \underline{\mathcal{S}\mathrm{h}}_X, \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^{sh}$ ist ein Funktor, linksadjungiert zum Vergissfunktor V.

Beweis. <u>Existenz</u>:
$\mathcal{F}^{sh}(U) := \{(s_x)_x \in \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \mid \forall x \in U : \ \exists x \in U^x \subseteq U$ offen und $t \in \mathcal{F}(U^x) : \ \forall y \in U^x : t_x = s_x\}$
"Keime, die lokal Schnitte von $\mathcal{F}$ sind" - $(Sh2)$ erzwingt dies.
Für $U \subseteq V$ ist res^V_U induziert von:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}^{sh}(V) \arrow[r, dashed, "res^V_U"] \arrow[d, hook] & \mathcal{F}^{sh}(U) \arrow[d, hook] \\ \prod_{x \in V} \mathcal{F}_x \arrow[r, "proj."] & \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \end{tikzcd}$$

□