AG1, V15, 6.12.2018

$(i_x \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A/a})|_{V(a)} \xrightarrow{\sim} i_x \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A/a}$, da $x \in V(a)$

$(\quad)_x = (\quad)_x$

Bsp 39, $b \subset B$ Ideal

$V(b^n) = V(b) \subset \operatorname{Spec} B$ als abg. TM hängt nicht von $n \geq 1$ ab, aber $\operatorname{Spec}(B/b^n) = V(b^n)$ als affines Schema sehr wohl!

etwa: $B = k[T]$, $b = (T)$, k alg. abg. K

Abg Pkt von $\mathbb{A}^1_k := \operatorname{Spec}(k[T]) \longleftrightarrow k$

$b \longleftrightarrow 0$

Kappa

$A = k[T]/(T^n)$, $X = \operatorname{Spec} A = \{x\}$: $\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_{X,x} = A$, $k(x) = k$

$0 \neq m_x = (T \bmod T^n)$
$n > 1$

$X \subset \mathbb{A}^1$ abg. Unterschema, ein in einem Pkt konzentriert

$B = k[T]$ k-Algebra von Fktionen auf $\mathbb{A}^1$

$\downarrow$ Einschränkungen auf $X \subset \mathbb{A}^1$

$k[T]/(T^n)$

$n = 1$ $k[T]/(T^n) = k$, $f \longmapsto f(0)$

$n > 1$ $k[T]/(T^n) \neq k$ $f \longmapsto$ Taylor Entwicklung von f um 0 der Länge $n-1$

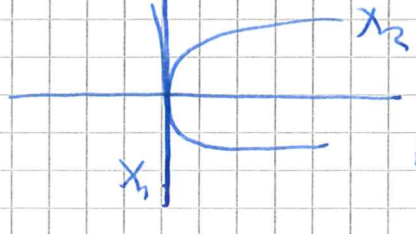
$\{x\} \subset \mathbb{A}^1$ hat "infinitesimale Ausdehnung der Länge $n-1$ in $\mathbb{A}^1_k$"

$\mathbb{A}^2_k := \operatorname{Spec}(k[T,U]) \supseteq \{(u,t) \mid u,t \in k\} = k^2$

$a_1 = (U)$ ~~$a_2 = (\ldots)$~~ $a_2 = (U - T^n)$

$X_1 \overset{?}{=} \{(u,t) \in \mathbb{A}^2(k) \mid u = 0\}$, $X_2 \overset{?}{=} \{(u,t) \in \mathbb{A}^2(k) \mid u = t^2\}$

$X_1 \cap X_2 = \{(0,0)\}$ als Menge.



aber für $n > 1$ treffen sich beide Mengen ~~mit~~ nicht transversal!

( )

Als affine Schemata wird später der $\cap$ als $\mathrm{Spec}\left(\mathbb{Z}[T,U]/_{\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2}\right)$ def. $\cong \mathbb{Z}[T]/(T^4)$

also eine präzise Beschreibung als Durchschnitt!

AG 1, V 16, ~~3~~ 7.12.2018

III Schemata

= Verkleben affiner Schemata

Prävarietäten

1. Schemata

Def 1 Ein Schema ist ein lokal geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, der eine offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ besitzt derart, dass alle lokal geringten Räume $(U_i, \mathcal{O}_{X|U_i})$ affine Schemata sind.

Für ein Schemata S bez. $Sch/_S$ Kategorie der Schemata über S oder S-Schemata

ob$(\%)$: Morphismen $X \to S$ von Schemata

~~Morph($X\to S$, $Y \to S$)~~

$\mathrm{Mor}(X \to S, Y \to S)$ Morphismen

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr] & \equiv & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

mit

$X \to S$ heißt Strukturmorphismus des S-Schema X

Ist $S = \mathrm{Spec}\, R$ affin, spricht man auch von $\underline{R\text{-Schemata}}_{\mathrm{Hom}_R(X,Y)}$ / $\underline{\text{Schemata ü. } R}_{\mathrm{Hom}_R(X,Y)}$

2. offene Unterschemata

Erinnerung $X = \mathrm{Spec}\, A$ affin $\Rightarrow (D(f), \mathcal{O}_X|_{D(f)})$ auch affine und $D(f)$ Basis der Topologie

Def + Prop 2: Sei X ein Schemata:

(1) Ist $U \subset X$ eine ~~affi~~ offene TM, und $(U, \mathcal{O}_{X|U})$ wieder ein Schemata. U heißt ein offenes Unterschemata, ist U affin, dann heißt U affin offenes Schemata

(2) Der zugrundeliegende top-Raum der affinen offene Unterschemata bilden eine Basis der Top.

Bew: $\exists (U_i)$ Überdeckung von X, d.h. $(U_i, \mathcal{O}_{X|U_i})$ affine, $\cong \mathrm{Spec}(A)$

$U = \bigcup (U \cap U_i) \overset{(*)}{=} \bigcup_{i j \in I_i} D(f_{ij})$ $\quad (*)$ $U \cap U_i \subset \mathrm{Spec}(A_i)$

$\qquad = \bigcup_{j\in I_i} D(f_{ij})$, $f_{ij} \in A_i$

AG 1, V16, 7.12.2018

Zu $\mathcal{U} \subset X$ offen gibt es kanonische Morph. von Schemata $(j, j^b): (\mathcal{U}, \mathcal{O}_{X|\mathcal{U}}) \to (X, \mathcal{O}_X)$
via • der Inklusion $j: \mathcal{U} \hookrightarrow X$
• $j^b: \mathcal{O}_X \longrightarrow j_* (\mathcal{O}_{X|\mathcal{U}})$
$\Gamma(V, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{res_{V,V \cap \mathcal{U}}} \Gamma(V \cap \mathcal{U}, \mathcal{O}_X) = \Gamma(V, j_*(\mathcal{O}_{X|\mathcal{U}}))$, $V \subset X$ offen

Eine affine offene Überdeckung eines Schemata X ist eine Überdeckung $X = \bigcup \mathcal{U}_i$, s.d. alle $\mathcal{U}_i$ affine offene Unterschemata sind.

Lem 3, $\mathcal{U}, V \subset X$ affine offene Unterschemata $\Rightarrow \exists\, W \subset \mathcal{U} \cap V$ offene Unterschemata, welches gleichzeitig prinzipal offen zu $\mathcal{U}$ und V ist.
Bew: OE $V \subset \mathcal{U}$ (sonst ersetzen V durch geeignete prinzipale TM bzgl. V, in $\mathcal{U} \cap V$ enthält.
Wähle: $f \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X)$ s.d. $D_{\mathcal{U}}(f) \subset V$

$$\begin{array}{c} f \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X) \\ \downarrow res \\ f|_V \in \Gamma(V, \mathcal{O}_X) \end{array} \qquad D_{\mathcal{U}}(f) = D_V(f)$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X)_f = \mathcal{O}_X(D_{\mathcal{U}}(f)) \\ \Gamma(V, \mathcal{O}_X)_{f|V} = \mathcal{O}_X(D_V(f|_V)) \end{pmatrix} \qquad \square$$

3. Morphismen in affine Schemata hinein

Prop 4: X Schemata, $Y = \mathrm{Spec}\, B$ affin Schemata $\Rightarrow$
$$\mathrm{Hom}(X, Y) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{Ring}(B, \Gamma(X, \mathcal{O}_X))$$
$$(f, f^b) \longmapsto f^b_Y \quad \text{ist bijektiv.}$$

Prop 5 (Verkleben von Morphismen) X, Y lokal geringte Räume. Für $\mathcal{U} \subset X$ offen def $\mathcal{U} \mapsto \mathrm{Hom}(\mathcal{U}, Y) = \{(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{X|\mathcal{U}}) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ Morphismus lokal geringter Räume$\}$ eine Garbe von Mengen auf X, d.h.
(i) für eine offene Überdeckung $X = \bigcup \mathcal{U}_i$, eine Familie $\mathcal{U}_i \xrightarrow{f_i} Y$ verkleben zu Morph. $X \xrightarrow{f} Y \Leftrightarrow f_i|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j} = f_j|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j}$
(ii) f ist eindeutig bestimmt.
Bem $G: \mathcal{U} \mapsto \mathrm{Hom}_{Ring}(B, \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X))$ ist Garbe von Mengen

Bew. Prop 5: Verkleben top. Räume + stet Ab klar ✓;

$\mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X$ heißt sich ebenfall verkleben $\square$

Bew Prop 4: $X = \bigcup \mathcal{U}_i$ sei affine offene Überdeckung $\overset{\text{II}}{\Rightarrow}$ ~~Hom(U, Y)~~ $\Rightarrow$ ~~Ho~~

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(\mathcal{U},Y) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}(B, \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}(V,Y) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}(B, \Gamma(V, \mathcal{O}_X)) \end{array}$$

, so dass für $V \subset \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$ (da $\Gamma(-)$ kontravariant)

? $\Rightarrow$ $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ Morph von Garben mit Isom. $\mathcal{F}(\mathcal{U}) \xrightarrow[\varphi_{\mathcal{U}}]{\sim} \mathcal{G}(\mathcal{U})$ $\forall\, \mathcal{U} \in \mathcal{B}$

$\Rightarrow$ $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$ als Garbe $\Rightarrow \mathcal{F}(X) \cong \mathcal{G}(X)$ $\square$

(Bew) $V \subset X$ offen bel $\varphi_V = \varprojlim_{\mathcal{U} \in \mathcal{B}_V} \varphi_{\mathcal{U}}$

Da $\mathbb{Z}$ cofinales Obj. in Kat der Ringe, ist ($\mathbb{Z} \xrightarrow{\exists_1} R$ für bel Ring R) gilt

Kor 6 Jedes Schemata X besitzt eindeutig best Mor $X \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, d.h. $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ ist ein terminales Obj in der Kat der Schemata: Jedes Schema ist ein $\mathbb{Z}$-Schema auf genau 1 Weise)

$$\mathrm{Hom}(X, \underbrace{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[T]}_{\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rin}}(\mathbb{Z}[T], \mathcal{O}_X(X)) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$$

$$\mathrm{Hom}_R(X, \underbrace{\mathbb{A}^1_R}_{= \mathrm{Spec}\, R[T]}) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$$ als R-Algebra für R-Schemata X

4. Morphismen der Form $\mathrm{Spec}(k) \to X$

$x \in \mathcal{U} \subseteq_{\circ} X$ Schemata, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_x \subset A \Rightarrow \mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{\mathcal{U},x} = A_{\mathfrak{p}}$
Spitze (x)

$A \to A_{\mathfrak{p}}$ induziert $j_x : \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{X,x} = \mathrm{Spec}\, A_{\mathfrak{p}} \to \mathrm{Spec}\, A = \mathcal{U} \subset X$

$k(x) = \mathcal{O}_{X,x} / \mathfrak{m}_x$

Morph von Schemata unabhängig von $\mathcal{U}$ nach Prop 2 (2)

II Prop 22 $\quad j_x : \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{X,x} \xrightarrow{\sim} Z = \{x' \in X \mid x' \text{ Verall von } x\} = \bigcap_{x \in \mathcal{U} \subseteq_{\circ} X} \mathcal{U}$

$(x \in \overline{\{x'\}} \Leftrightarrow \mathfrak{p}_{x'} \subset \mathfrak{p}_x)$

$\mathcal{O}_{X,x} \twoheadrightarrow k(x)$ induziert $i_x : \mathrm{Spec}\, k(x) \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \xrightarrow{j_x} X$ Morphismus von Schemata
(i_x: jötes)

$\{pt\} \longrightarrow X$

Bsp 1, Vorl 7.12

Nun sei k bel Kp und $f: \mathrm{Spec}\, k \to X$ ein bel Morphismus $f(pt) = x \in X$

f induziert lokalen Hom

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{X,x} \arrow[r] \arrow[d] & k = \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(k),(0)} \\ k(x) \arrow[ur, "\iota"] & \end{tikzcd}$$

d.h. f faktorisiert als ~~f~~ $\hat{\iota}_x \circ \mathrm{Spec}\,\iota : \mathrm{Spec}\, k \to \mathrm{Spec} \xrightarrow{\hat{\iota}_x} X$

Damit haben wir

Prop 7: $\mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}\, k, X) \xrightarrow{\sim} \{(x, \iota) : x \in X,\ \iota : k(x) \to K\}$

Bew: Umgekehrt $(x, \iota) \mapsto \mathrm{Spec}(k) \xrightarrow{\mathrm{Spec}\,\iota} \mathrm{Spec}\,k(x) \xrightarrow{i_x} X$ $\square$

6. Verkleben von Schemata und disjunkte Vereinigung.

Def 8 Ein Verklebe-Datum von Schemata besteht aus: einer Indexmenge I • ein Schema $\mathcal{U}_i$ für $i \in I$ • einer offenen Unterschemata $\mathcal{U}_{ij} \subset \mathcal{U}$ $\forall i,j \in I$ • einem Iso $\mathcal{U}_{ij} \xrightarrow[\sim]{\varphi_{ji}} \mathcal{U}_{ji}$ $\forall (i,j) \in I \times I$, sodass

a) $\mathcal{U}_{ii} = \mathcal{U}_i$ $\forall i \in I$

b) (Kozykel-Bed) $\varphi_{kj} \circ \varphi_{ji} = \varphi_{ki}$ auf $\mathcal{U}_{ij} \cap \mathcal{U}_{ik}$ $\forall i,j,k \in I$

hier (b) soll implizit gelten:

$\varphi_{ji}(\mathcal{U}_{ij} \cap \mathcal{U}_{ik}) \subset \mathcal{U}_{jk}$

$i = j = k \Rightarrow \varphi_{ii} = \mathrm{id}_{\mathcal{U}_i}$, $\varphi_{ij}^{-1} = \varphi_{ji}$ und

$\varphi_{ji} : \mathcal{U}_{ij} \cap \mathcal{U}_{ik} \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}_{ji} \cap \mathcal{U}_{jk}$

Prop 9 Zu einem Verklebe-Datum ex Schemata X mit Morph. $\psi_i : \mathcal{U}_i \to X$, sd.

- $\forall i \in I$ ψ_i induziert Iso von $\mathcal{U}_i$ auf offene Unterschemata von X
- $X = \bigcup_i \psi_i(\mathcal{U})$
- $\psi_i(\mathcal{U}_i) \cap \psi_j(\mathcal{U}_j) = \psi_i(\mathcal{U}_{ij}) = \psi_j(\mathcal{U}_{ji})$ $\forall i,j \in I$

$(X, \psi_{i \in I})$ ist eindeutig bis auf eindeutigen Isom bestimmt.

Zusammen ~~$\psi_j \circ \varphi_{ji} = \psi_i$~~ mit Prop 5 folgt UE:

$\psi_j \circ \varphi_{ji} = \psi_i$ auf U_i, und ist $(T, \xi_i : U_i \to T)$ mit

ξ_i induziert Iso $U_i \xrightarrow{\sim} \xi_i$ offene Unter $\subseteq T$

$\xi_j \circ \varphi_{ji} = \xi_i$ auf U_i $\forall i,j \in I$ $\Rightarrow \exists_1 \xi : X \to T$ mit

$\xi \circ \psi_i = \xi_i$ $\forall i \in I$ $[\Rightarrow$ Eindeutigkeit von Prop 9$]$