## Beispiele (Projektiver Raum und projektive Varietäten)

## 22 Homogene Polynome

**Definition 51** (orig. 48). Ein Polynom  $f \in k[X_0, ..., X_n]$  heißt **homogen vom Grad**  $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , wenn f die Summe von Monomen von Grad d ist. (Insbesondere ist für jedes d das Nullpolynom homogen von Grad d.)

Bezeichne  $k[X_0,\ldots,X_n]_d$  der Untervektorraum der Polynome vom Grad d.

Remark 52 (orig. 49). Da #k unendlich ist, ist f homogen vom Grad d.

$$\Leftrightarrow f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, \dots, x_n) \ \forall x_0, \dots, x_n \in k, \ \lambda \in k^{\times}.$$

Es gilt:  $k[X_0, \dots X_n] = \bigoplus_{d \ge 0} k[X_0, \dots, X_n]_d$ .

**Lemma 53** (orig. 50). Für  $i \in \{0, ..., n\}$  und  $d \ge 0$  haben wir bijektive k-lineare Abbildungen

$$k[X_0, \dots, X_n]_d \longrightarrow Polynome \ in \ k[T_0, \dots, \hat{T}_i, \dots, T_n] \ v. \ Grad \le d$$

$$f \stackrel{\Phi_i^d}{\longmapsto} f(T_0, \dots, \underbrace{1}_i, \dots, T_n)$$

$$X_i^d g\left(\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{\hat{X}_i}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}\right) \stackrel{\Psi_i^d}{\longleftrightarrow} g$$

Dehomogenisierung bzw. Homogenisierung.

*Proof.* Es reicht,  $\Psi_i^d \circ \Phi_i^d = \mathrm{id}$ ,  $\Phi_i^d \circ \Psi_i^d = \mathrm{id}$  auf Monomen nachzurechnen, da alle Abbildungen k-linear sind.

Oft ist es nützlich,

$$k[T_0,\ldots,\hat{T}_i,\ldots,T_n]$$
 mit

mit 
$$k\left[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{\hat{X}_i}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}\right] \subset k(X_0, \dots, X_n).$$