II Das Ringspektrum

Prävar. sind Verklebungen affiner Varietäten

$\Updownarrow$

k alg. abg.

integre e.e. k-Algebren

Pkte $\hat{=}$ max. Idealen

Ziel: Schemata sind Verklebungen affiner Schemata

$\Updownarrow$

(kommutat.) Ringe

Pkte $\hat{=}$ Primidealen

Ziel: $A \xmapsto{\text{Funktor}} (\operatorname{Spec}(A), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$

Ring — top. Raum — "Garbe von Funkt."

(nicht k-Algebra oder bel. Körper!)

~~statt~~ verallg. Schnitten v. Fkt. bei R. v. Fkt.

($\varphi: A \to B$
$\varphi^{-1}(m)$ nicht max. i.a.
solche Ringe zu wenig max. Ideale!)

Das Ringspektrum als top. Raum

(2.1) 1. Def von Spec(A)

A kommutativer Ring

$\mathrm{Spec}(A) := \{ \mathfrak{p} \subset A \text{ Primideal} \}$

$M \subset A$: $V(M) := \{ \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A \mid \mathfrak{p} \supset M \} = V(\langle M \rangle)$
wo $\langle M \rangle$ ein Ideal

$V(f) := V(\{f\})$ für $f \in A$

Lemma 1 $\{ \text{Ideale in } A \} \longrightarrow \{ \text{Teilmengen von } \mathrm{Spec}(A) \}$

$\mathfrak{a} \longmapsto V(\mathfrak{a})$

ist inklusionsumkehrende Abb. Es gilt

(1) $V(0) = \mathrm{Spec}(A)$, $V(1) = \emptyset$

(2) $V(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i) = V(\sum \mathfrak{a}_i) = \bigcap V(\mathfrak{a}_i)$

(3) $V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}') = V(\mathfrak{a}\mathfrak{a}') = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{a}')$

Bew. (1), (2) klar

(3) $\underset{\substack{\cup \\ \mathfrak{a}\mathfrak{a}'}}{\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}'} \overset{\Rightarrow}{\Leftarrow} \underset{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}'}{\mathfrak{p} \supset \overset{\cap}{\mathfrak{a}\mathfrak{a}'}} \overset{\text{Primideal}}{\Rightarrow} \mathfrak{p} \supset \mathfrak{a} \text{ oder } \mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}'$
$\overset{\Downarrow}{}$
$(\Leftarrow)$ $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}'$ $\square$

Def 2: Spec(A) mit der Top., deren abg. Mengen gerade die Mengen der Form $V(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{a} \subset A$ Ideal, sind, heißt <u>Primspektrum von A</u> (mit der <u>Zariski-Topologie</u>)

$x \in \mathrm{Spec}(A) \iff \mathfrak{p}_x \subset A$ Primideal

$Y \subset \mathrm{Spec}(A)$, $\quad I(Y) := \bigcap_{y \in Y} \mathfrak{q}_y$, $\quad I(-)$ ist

inklusionsumkehrend, $\quad I(\emptyset) = A$

Prop 3 $\mathfrak{a} \subset A$ Ideal, $Y \subset \mathrm{Spec}(A)$. Dann gilt

(1) $\mathrm{rad}\, I(Y) = I(Y)$

(2) $I V(\mathfrak{a}) = \mathrm{rad}(\mathfrak{a})$, $\quad V I(Y) = \overline{Y}$ (Abschluss in Spec A)

(3)
$$\{\mathfrak{a} \subset A \mid \mathrm{rad}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}\} \underset{I(\ )}{\overset{V(\ )}{\rightleftarrows}} \{\text{abg. Teilmengen } Y \text{ in Spec } A\}$$

ist 1:1-Korrespondenz.

Bew. (1) $\mathfrak{a} = \mathrm{rad}(\mathfrak{a}) \iff (f \in A, f^n \in \mathfrak{a} \Rightarrow f \in \mathfrak{a})$

Primideale erfüllen letzteres

$\Rightarrow \bigcap$ Primideale — " — ✓

$$(2) \quad \operatorname{rad}(\mathfrak{a}) = \bigcap_{\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}} \mathfrak{p} = I V(\mathfrak{a})$$

$\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$

kommutative Algebra

$$V(\mathfrak{b}) \supset Y \iff (\forall \mathfrak{p} \in Y \quad \mathfrak{p} \supset \mathfrak{b})$$

$$\iff \quad I(Y) \supset \mathfrak{b}$$

$\Rightarrow$ $V(I(Y))$ ist die kleinste abg. Teilmenge, die Y umfasst

d.h. $= \bar{Y}$

(2) $\Rightarrow$ (3) $\square$

2. Top. Eigenschaften von Spec A

$$D(f) := D_A(f) := \operatorname{Spec} A \setminus V(f) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid f \notin \mathfrak{p}\}$$

offene Teilmenge

$A \to A/\mathfrak{p}$

$f \mapsto f(\mathfrak{p}) = f \bmod \mathfrak{p} \neq 0$

Principal offene Mengen

$$D(0) = \emptyset, \quad D(1) = \operatorname{Spec}(A)$$

$= D(u) \qquad u \in A^\times$

$$D(f) \cap D(g) = D(fg)$$

Lemma 4. Für $f_i, i \in I$, $g \in A$ gilt:

$$D(g) \subset \bigcup_{i\in I} D(f_i) \iff g^n \in \mathfrak{a} = (f_i, i \in I) \text{ für } n \text{ groß genug}$$

$$\iff g \in \mathrm{rad}(\mathfrak{a})$$

Bew: $D(g) \subset \bigcup D(f_i) \iff V(g) \supset \bigcap V(f_i) = V(\mathfrak{a})$

$$\overset{\text{Prop } 3(3)}{\iff} g \in \mathrm{rad}((g)) \subset \mathrm{rad}(\mathfrak{a}) \qquad \square$$

$$g = 1 \Rightarrow \mathrm{Spec}(A) = \bigcup_{i\in I} D(f_i) \iff \sum_{i\in I} A f_i = A$$

Prop 5. Die principal offenen Mengen $D(f)$, $f \in A$ bilden eine Basis der Top. ~~für~~ zu $\mathrm{Spec}(A)$, ~~Außerdem~~ ~~an~~ sind quasikompakt, insbesondere ist $\mathrm{Spec}(A)$ quasikompakt.

Bew: Nach Lem. 1 (2)

$$V(\mathfrak{a}) = \bigcap_{f\in\mathfrak{a}} V(f) \Rightarrow \mathrm{Spec} \setminus V(\mathfrak{a}) = \bigcup_{f\in\mathfrak{a}} D(f).$$

$\Rightarrow$ Basis der Top.

Sei $D(f) \subset \bigcup_{i\in I} D(g_i) \overset{\text{Le } 4}{\Rightarrow} f^n = \sum_{i\in I} a_i g_i$, $a_i \in A$ fast alle $=0$

$\Rightarrow D(f) \subset \bigcup_{i\in J} D(g_i) \Rightarrow D(f)$ quasikompakt. $\square$ $\quad a_i = 0 \ \forall i \notin J \subset I$ endl.

Prop 6: $Y \subseteq \operatorname{Spec} A$ ist irreduzibel $\iff$ $\mathfrak{q} := I(Y) \subset A$ ist prim.

In diesem Fall ist $\{\mathfrak{q}\} \subset \overline{Y}$ dicht!

Bew: Sei Y irreduzibel und $f, g \in A$ mit $fg \in \mathfrak{q}$

$$\Rightarrow \quad Y \subset \overline{Y} = V(I(Y)) \subset V(fg) = V(f) \cup V(g)$$

$$\overset{Y \text{ irred.}}{\Rightarrow} \quad \text{OE } Y \subset V(f) \Rightarrow f \in IV(f) \subset I(Y) = \mathfrak{q}$$

$\Rightarrow \mathfrak{q}$ prim.

Sei $\mathfrak{q}$ ein Primideal

$$\overset{\text{Prop 3}}{\Rightarrow} \quad \overline{Y} = V(\mathfrak{q}) = V(I(\{\mathfrak{q}\})) = \overline{\{\mathfrak{q}\}}, \text{ d.h.}$$

$\overline{Y}$ ist der Abschluss der irred. Menge $\{\mathfrak{q}\}$ und daher irred.

$$\overset{\text{Lem. I.14}}{\Rightarrow} \quad Y \text{ auch irred., da dicht } \subset \overline{Y} \quad \square$$

Warnung: I.a. ist $\mathfrak{q}$ nicht in Y!

Kor 7:

$$\operatorname{Spec}(A) \longrightarrow \{\text{abg. irred. Teilmengen in } \operatorname{Spec}(A)\}$$
$$\mathfrak{q} \longmapsto V(\mathfrak{q}) = \overline{\{\mathfrak{q}\}}$$

ist eine Bijektion, unter der die minimalen Primideale von A den irreduziblen Komponenten von $\operatorname{Spec} A$ entsprechen.

Bew: Prop 3 + 6 $\square$

Def 8: Für einen top. Raum X heißt $\eta \in X$ ein <u>generischer Punkt</u>, falls $\overline{\{\eta\}} = X$.

Allgemein sagen wir für $x, x' \in X$, dass x eine Verallgemeinerung / Generisierung von x' ist bzw. x' eine Spezialisierung von x ist, falls $x' \in \overline{\{x\}}$

Bem 9:

(i) $\eta \in X$ ist generisch $\Leftrightarrow$ η ist Verallg. von jedem Pkt in X

(ii) Existiert ein gen. Pkt in X, so ist X als Abschluss einer irred. Menge selbst irreduzibel.

(iii) Für $X = \operatorname{Spec} A$ gilt: x' ist eine Spez. von x

$\Leftrightarrow$ $\mathfrak{p}_x \subset \mathfrak{p}_{x'}$ $\Leftrightarrow$ $V(\mathfrak{p}_{x'}) \subset V(\mathfrak{p}_x)$

$\mathfrak{p}_x \in \overline{(\mathfrak{p}_x)} \subset \overline{(\mathfrak{p}_{x'})}$

Daher hat jede <u>abg.</u> irred. Teilmenge $Y \subset \operatorname{Spec} A$ einen eindeutigen generischen Pkt.
(dies gilt nicht für bel. irred. Teilmengen $Y \subset \operatorname{Spec} A$).

3. Der Funktor $A \mapsto \operatorname{Spec} A$

Ziel: Ringe $\longrightarrow$ Top. Räume

$$A \longmapsto \operatorname{Spec}(A)$$

def kontravar. Funktor.

$\varphi: A \to B$ Ringhom.

$\quad\quad\quad\quad \cup$

$\quad\quad\quad\quad \mathfrak{q}$ Primideal

$\Rightarrow \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \subset A$ Primideal (d. $A/\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \subset B/\mathfrak{q}$ int. Bereich)

D.h. wir erhalten Abb.

$$^a\varphi = \operatorname{Spec} \varphi : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A,$$
$$\mathfrak{q} \longmapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$$

Prop 10:

(1) $\ {}^a\varphi^{-1}(V(M)) = V(\varphi(M)) \subset \operatorname{Spec} B$ für $M \subset A$ Teilmenge

insbesondere $\ {}^a\varphi^{-1}(D(f)) = D(\varphi(f))$ für $f \in A$

(2) $\ V(\varphi^{-1}(\mathfrak{b})) = \overline{{}^a\varphi(V(\mathfrak{b}))}$ für $\mathfrak{b} \subseteq B$ Ideal

Bew. (1) $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$ gilt: $\mathfrak{q} \supset \varphi(M) \iff \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \supset M$

$\mathfrak{q} \in V(\varphi(M))$ $\quad$ $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = {}^a\varphi(\mathfrak{q})$

$\mathfrak{q} \in {}^a\varphi^{-1}(V(M))$

$D(\varphi(f)) = \operatorname{Spec}(B) \setminus V(\varphi(f))$

$= \operatorname{Spec}(B) \setminus {}^a\varphi^{-1}(V(f)) = {}^a\varphi^{-1}(D(f))$ ✓

(2) $\overline{{}^a\varphi(V(b))} \overset{\text{Prop 3}}{=} V(I({}^a\varphi(V(b))))$

$I({}^a\varphi(V(b))) = \bigcap_{\mathfrak{q} \in {}^a\varphi(V(b))} \mathfrak{q} = \bigcap_{\mathfrak{q} \in V(b)} \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$

$A/\varphi^{-1}(b) \hookrightarrow B/b$

$= \varphi^{-1}(\operatorname{rad}(b)) = \operatorname{rad} \varphi^{-1}(b)$ ✓

$A \xrightarrow{\varphi} B$

$a \in \varphi^{-1}(\sqrt{0}) \iff a,\ \varphi(a)^n = 0$

OE $b = 0$, $\varphi^{-1}(b) = \ker\varphi$

$\varphi(a^n)$

$\iff a^n \in \ker(\varphi)$

$\iff a \in \operatorname{rad}(\ker\varphi)$ □

$\bigcap \varphi^{-1}(\mathfrak{n}_i) = \varphi^{-1} \bigcap (\mathfrak{n}_i)$

"$\subseteq$": $a \in A$, $\varphi(a) \in \mathfrak{n}_i \ \forall i$

$\Rightarrow \varphi(a) \in \bigcap(\mathfrak{n}_i) \Rightarrow a \in \varphi^{-1} \bigcap \mathfrak{n}_i$

"$\supseteq$": $a \in A$, $\varphi(a) \in \bigcap(\mathfrak{n}_i) \subset \mathfrak{n}_i \ \forall i$

$\Rightarrow a \in \varphi^{-1}(\mathfrak{n}_i) \ \forall i$ ✓

$V(\ )$ liefert Bel. $V(\operatorname{rad}(\varphi^{-1}(b))) = V(\varphi^{-1}(b))$

$\bigcap_{\substack{\mathfrak{q} \supset \varphi^{-1}(b) \\ \in V}} \mathfrak{q} \supset \varphi^{-1}(b)$

□

Insbesondere ist ${}^a\varphi$: Spec $B \to$ Spec A stetig,

${}^a(\psi\circ\varphi) = {}^a\varphi \circ {}^a\psi$ für ein Ringhom. $\psi : B \to A$.

ist $A \mapsto$ Spec A ein speziell kontrav. Funktor.

<u>Kor 11.</u> ${}^a\varphi$ ist dominant, d.h. Bild$({}^a\varphi) \subset$ Spec A ist dicht,

$\Leftrightarrow$ Jedes Elt. in Ker φ ist nilpotent: Ker $\varphi \subset$ rad(0)

<u>Bew:</u> $b = 0$ in (2) und Spec$(A) = V(\mathrm{rad}(0))$ □

<u>Prop 12.</u>

(1) Ist $\varphi : A \to B$ ein surj. Ringhom. mit Ker $\varphi = \mathfrak{a}$,

dann ist ${}^a\varphi$ ein Homöomorph. von Spec(B) auf $V(\mathfrak{a}) \underset{abg.}{\subset}$ Spec A.

(2) Ist S eine mult. abg. Teilm. in A und

$\varphi : A \to S^{-1}A =: B$ die canonische $\overset{\text{Lokal.}}{\text{Abb.}}$, dann

ist ${}^a\varphi$ ein Homöomorph. von Spec $S^{-1}A$ auf

$\{ \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid S \cap \mathfrak{p} = \emptyset \}$.

<u>Bew:</u> ${}^a\varphi$ inj. + Bild ist klar (kommutat. Algebra)

<u>Ferner</u> für $\mathfrak{q} \in$ Spec B gilt $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{b} \Leftrightarrow \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \supset \varphi^{-1}(\mathfrak{b})$
$\mathfrak{b} \subseteq B$ Ideal

$\Rightarrow$ ${}^a\varphi(V(\mathfrak{b})) = V(\varphi^{-1}(\mathfrak{b}))$, d.h. ${}^a\varphi$ ist abg.
$\Rightarrow$ Beh □

4. Beispiel

Spec $A = \emptyset \iff A = \{0\}$

A Kp oder Ring mit einzigem Primideal $\Rightarrow$ Spec$(A) = \{\mathfrak{q}\}$

A Artinsch $\Rightarrow$ Spec(A) endlich + diskret

Spec A = Spec$\left(A/\sqrt{0}\right)$ max. Primideal = min. Primideal

Primideal = Kp.

Bsp 13. A H.I.R (z.B. $A = \mathbb{Z}$ oder $K[X]$)

$\mathfrak{q}$ max. ideal $\Rightarrow$ $\mathfrak{q} = (\pi)$, π Primelement in A

alle Primideale sind max. oder (0)

Abg Pkt in Spec A $\longleftrightarrow$ Primelt modulo $A^\times$

$\overline{\{\eta\}}$ = Spec A für $\eta \in$ Spec A mit $\mathfrak{p}_\eta = (0)$.

$0 \neq \mathfrak{a} = (f)$

Abg Mengen Spec $A \neq V(\mathfrak{a}) = V(f) = \{(p_1), \dots, (p_r)\}$

falls $f = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ p_i pw. verschieden, $e_i \geq 1$

endliche Menge abg Pkte!

$g \neq 0 \in A$: $V(f) \cap V(g) = V(f,g) = V(d)$, $d = ggT(f,g)$

$V(f) \cup V(g) = V((f)(g)) = V(e)$, $e = kgV(f,g)$

Falls A lokaler H.I.R (= DBR) $\neq$ Kp:

Spec$(A) = \{x, \eta\}$, $\mathfrak{p}_x$ max. Ideal, $\mathfrak{p}_\eta = (0)$

$\{\eta\}$ einzige nicht-tr. offene Menge

Bsp 14: k alg. abg. Kp.

Affine Var. $\quad$ i.e. integre k-Alg.

$$V \longleftrightarrow A$$

$$V = \{\text{max. Ideal in } A\} \subseteq \underset{V(0)}{\operatorname{Spec}(A)}$$

Top. auf V ist von $\operatorname{Spec}(A)$ induziert!

Bsp 15: R H.I.R, $\neq$ Kp (vgl. Bsp 13), $A = R[T]$, $X = \operatorname{Spec}(R[T])$

R faktoriell $\overset{\text{Gauss}}{\Rightarrow}$ $R[T]$ faktoriell mit Primelt.

a) $p \in R$ prim

b) $f \in R[T]$ primitives Polynom, irred. in $\operatorname{Quot}(R)[T]$.

zu a) $p \in R$ prim $\Rightarrow R/pR$ Kp

$$\overline{\{pR[T]\}} = V(pR[T]) \underset{\text{homöo}}{\overset{\text{Bsp 12 iii)}}{\cong}} \operatorname{Spec}\big(\underbrace{R/pR[T]}_{\text{H.I.R}}\big) \quad \text{unendl. viele Elt.}$$

$\Rightarrow pR[T]$ ist nicht maximal

$$V(pR[T]) = \Big\{ (pR[T]),\ (f,p)\ ,\ f \in R[T] \text{ mit } \bar f \in R/p[T] \text{ irred.} \Big\}$$

f primitives irred. Polynom

Fall 1: Leitkoeff. von f ist Einheit in R

Division mit Rest durch f

$\Rightarrow$ $R \underset{\text{ganz}}{\subset} R[T]/fR[T]$ e.e. frei R-Modul vom Rang $\deg(f)$

Ang. $fR[T]$ max $\Rightarrow$ K_p $\Rightarrow$ R K_p $\lightning$

$\Rightarrow$ $fR[T]$ kein max. Ideal.

Fall 2: Andernfalls ist $fR[T]$ max. Ideal wenn:

R hat nur endl. viele Primel. (modulo $R^\times$)

OE $a := \prod\limits_{\substack{\text{alle Primel.}}} p \in R$, $f := aT - 1$

(Vertreter)

$\Rightarrow$ $R[T]/fR[T] \cong R[a^{-1}] = \mathrm{Quot}(R)$

$\Rightarrow$ $fR[T]$ max. Ideal.

11.11.08

Exkursion: Garben

X affin alg. Var. $\longmapsto$ $\Gamma(X) = \mathrm{Hom}(X, \mathbb{A}^1)$

legt X eindeutig fest bis auf Isom. (durch Polynome gegeben)

speziell $\quad \mathrm{Spec}\, A \longleftarrow\!\!| \quad A$

d.h. A = Fkt. auf $\mathrm{Spec}\, A$

$x \in \mathrm{Spec}\, A, \quad \kappa(x) := A_{\mathfrak{p}_x} / \mathfrak{p}_x A_{\mathfrak{p}_x}$ Restklassenring

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \in & \kappa(x) \\ \Uparrow & & \uparrow \\ f & \in & A \end{array}$$

$D(f) = \{ x \in \mathrm{Spec}\, A \mid f(x) \neq 0 \}$

Da $f(x) \in \kappa(x)$ keine Fkt. im engen Sinne, können wir nicht von System von Fkt sprechen.

Wichtigste Aspekte: Restriktion + Verkleben (wichtig für Auswertung in Pkt.) $\longrightarrow$ Garbe.

Vorstellung immer noch: Fkt. auf offenen Teilen

3. Prägarben und Garben

Def. 16: X top. Raum. (i) Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X besteht aus folgenden Daten

(a) eine Menge $\mathcal{F}(U)$ für jede offene Menge $U \subset X$

(b) für jedes Paar $U \subset V$ offener Mengen eine Restriktionsabb. $res^V_U : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$

so dass Folgendes gilt:

(1) $res^U_U = id_{\mathcal{F}(U)} \quad \forall\, U \subset X$ offen

(2) $res^W_U = res^V_U \circ res^W_V$ für $U \subset V \subset W$ offene Mengen in X

(ii) Ein Morphismus von Prägarben $\varphi : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ ist eine Familie von Abb.

$$\varphi_U : \mathcal{F}_1(U) \to \mathcal{F}_2(U), \quad U \subset X \text{ offen},$$

~~für alle~~ so dass für alle Paare $U \subset V$ offener Mengen in X

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}_1(V) \arrow[r, "\varphi_V"] \arrow[d, "res^V_U"'] & \mathcal{F}_2(V) \arrow[d, "res^V_U"] \\ \mathcal{F}_1(U) \arrow[r, "\varphi_U"] & \mathcal{F}_2(U) \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Bez: $U \subset V$, $s \in \mathcal{F}(V)$, $s|_U := \rho^V_U(s)$

Die Elt. in $\mathcal{F}(U)$ heißen <u>Schnitte von $\mathcal{F}$ über U</u>

$$\Gamma(U, \mathcal{F}) := \mathcal{F}(U)$$

<u>Alternative Beschreibung</u>

Ouv_X cat. der off. Mengen in X

$$\mathrm{Hom}(U,V) := \begin{cases} \emptyset & U \not\subset V \\ \{U \hookrightarrow V\} & U \subset V \end{cases}$$

Eine Prägarbe ist ein kontravarianter Funktor $\mathcal{F}$ von Ouv_X ~~nach~~ in die Kat. der Mengen.

Ersetzt man {Mengen} durch andere Kat. $\mathcal{C}$

(Kat. von Ringen, R-Moduln, R-algebren, R fester Ring)

erhält man <u>Prägarben mit Werten in $\mathcal{C}$</u>,

d.h. $\mathcal{F}(U) \in ob(\mathcal{C})$ $\forall U \subset X$ offen und

ρ^V_U sind Morphismen in $\mathcal{C}$.

Ein Morphismus $\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ von Prägarben in $\mathcal{C}$

ist ein Morphismus von Funktoren = natürliche Transformation.

Für $\mathcal{F}$ Prägarbe auf X,
$U \subset X$ offen
$\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von U

definiere

$$\rho: \mathcal{F}(U) \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i)$$
$$s \longmapsto (s|_{U_i})_i$$

$$\sigma: \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \longrightarrow \prod_{(i,j) \in I \times I} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$
$$(s_i)_i \longmapsto (s_i|_{U_i \cap U_j})_{(i,j)}$$

$$\sigma': \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \longrightarrow \prod_{(i,j) \in I \times I} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$
$$(s_j)_j \longmapsto (s_j|_{U_i \cap U_j})_{(i,j)}$$

__Def 17:__ Die Prägarbe $\mathcal{F}$ heißt __Garbe__, wenn für alle $U \in \mathrm{Ouv}_X$ und alle Überdeckungen (U_i) wie oben gilt:

$$(\mathrm{S}) \qquad \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\rho} \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \overset{\sigma}{\underset{\sigma'}{\rightrightarrows}} \prod_{(i,j) \in I \times I} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

ist exakt, d.h. ρ ist injektiv und

$$\mathrm{Bild}(\rho) = \{ (s_i)_i \in \prod_I \mathcal{F}(U_i) \mid \sigma((s_i)) = \sigma'((s_i)_i) \}$$

(SA) ist äquivalent zu

(SA 1) Gilt für $s, s' \in \mathcal{F}(U)$ $s|_{U_i} = s'|_{U_i}$ $\forall i$, so folgt $s = s'$

(SA 2) Zu jeder Familie $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ $\forall i,j$, ex. ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $s|_{U_i} = s_i$

(s ist nach (SA1) eindeutig!)

Ein Morphismus von Garben ist ein Morph. von Prägarben.

$Sh(X)$ Kat. der Garben auf X top. Raum

analog: Garben von abel. Gruppen
Ringen
R-Moduln
R-Alg.

Für Prägarben abelscher Gruppen (allg. mit Werten in einer abelschen Kat.) läßt sich (SA) äquivalent wie folgt ausdrücken:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \prod \mathcal{F}(U_i) \longrightarrow \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

$$s \longmapsto (s|_{U_i})_i, \quad (s_i)_i \longmapsto (s_i|_{U_i \cap U_j} - s_j|_{U_i \cap U_j})_{i,j}$$

ist exakt.

Bem 18 (i) $\mathcal{F}$ Garbe auf X $\Rightarrow$ $\mathcal{F}(\emptyset)$ einelementige Menge

(S2 für leere Überdeckung $I = \emptyset$ von $\emptyset$
$\prod_{\emptyset} = \{\emptyset\} = Abb(\emptyset, ?)$
leeres System)

(ii) $X = \{pt\}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ auf X ist eindeutig durch $\mathcal{F}(X)$ bestimmt und oft wird dann $\mathcal{F}$ mit $\mathcal{F}(X)$ identifiziert!

Bsp 19.

(1) $\mathcal{F}$ Prägarbe auf top Raum X
$U \subset X$ offen

$\Rightarrow$ $\mathcal{F}|_U$, def durch $\mathcal{F}|_U(V) := \mathcal{F}(V)$, $V \subset U$ offen
ist Prägarbe

Ist $\mathcal{F}$ Garbe, so ist $\mathcal{F}|_U$ ebenfalls Garbe,
die Einschränkung von $\mathcal{F}$ auf U

(2) X, Y top. Räume, $U \subset X$ offen
$\mathcal{F}(U) = C^0(U, Y)$ stetige Abb $U \to Y$
ρ^U_V Einschränkung von Funktionen
$\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ ist Garbe (Verkleben stetiger Abb!)

Limiten

$\underline{I}$ (gerichtete) partiell geordnete Indexmenge

(zu je zwei $k,l \in I$ $\exists\, i \in I$ mit $i \geq k,l$)

$=$ Kategorie, $Mor(i,j) = \begin{cases} i \to j & i \geq j \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$

$Ob = I$

$\mathcal{C}$ Kat.

$\mathcal{C}^I$ Funktorkat mit natürl. Transformat. als Morph.

$\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^I$ Funktor

$$\begin{array}{ccccc} A & \longmapsto & \Delta(A) = (A_i)_{i\in I} & & A_i \xrightarrow{id} A_j \quad \text{falls } i \geq j \\ \downarrow \varphi & & A_i = A \quad \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi_i \quad \downarrow \varphi_j \\ B & & \varphi_i = \varphi \quad (B)_{i\in I} & & B_i \xrightarrow{id} B_j \end{array}$$

$$Mor_{\mathcal{C}^I}(\Delta(A), \mathcal{F}) = Mor_{\mathcal{C}}(A, \varprojlim \mathcal{F}_i)$$

$$(\varprojlim \mathcal{F}_i \xrightarrow{pr_j} \mathcal{F}_j)_{j \in I} \longleftarrow id\,(\varprojlim \mathcal{F}_i \to \varprojlim \mathcal{F}_i)$$

$\mathcal{F} = (\mathcal{F}_i{}_{i\in I}, \varphi_{ij}, i \geq j)$

<u>projektiver Limes</u> des proj. / inv. Systems $\mathcal{F} \in \mathcal{C}^I$

<u>Konstruktion</u>

$$\varprojlim \mathcal{F}_i = \{ (f_i) \in \prod \mathcal{F}_i \mid \varphi_{ij}(f_i) = f_j \ \forall i \geq j \}$$

(falls $\prod \mathcal{F}_i$ in $\mathcal{C}$ existiert)

$\mathcal{C}^{I^{op}}$ Kat. d. kontravar. Funktoren $I \to \mathcal{C}$

$\Delta^{op} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{I^{op}}$

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^{I^{op}}}(\mathcal{F}, \Delta(A)) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\varinjlim \mathcal{F}_i, A)$$

Kollektion $\mathcal{F}_j \xrightarrow{i_j} \varinjlim_i \mathcal{F}_i \iff id_{\varinjlim \mathcal{F}_i}$

induktives System $\mathcal{F} \in \mathcal{C}^{I^{op}}$

direkter, Limes von $\mathcal{F} : I \to \mathcal{C}$

induktiv

Konstruktion $\varinjlim_i \mathcal{F}_i = \coprod \mathcal{F}_i / \sim$ $\qquad$ $\begin{matrix} \mathcal{F}_i & & \mathcal{F}_j \\ \cup & & \cup \\ f_i & \sim & f_j \end{matrix}$

(falls $\coprod \mathcal{F}_i$ in $\mathcal{C}$ existiert!) $\iff \exists\, k \geq i, j$ d.h.

$$\varphi_{ik}(f_i) = \varphi_{jk}(f_j)$$

Exaktheitseigenschaften

1) $\varprojlim : \mathcal{C}^I \to \mathcal{C}$ ist linksexakt (falls $\varprojlim$ ex.)

2) $\varinjlim : \mathcal{C}^{I^{op}} \to \mathcal{C}$ ist exakt, wenn I gerichtet (falls $\varinjlim$ ex.)

3) Besitzt I ein cofinales Objekt, d.h. $k \in I$ mit $k \geq i$ $\forall i \in I$, so gilt

$$\varprojlim_i \mathcal{F}_i = \mathcal{F}_k, \quad \varinjlim_i \mathcal{F}_i = \mathcal{F}_k.$$

(3) K Kp, $(X, \mathcal{O}_X)$ Raum mit Flt über K (I)

$\Rightarrow$ $\mathcal{O}_X$ Garbe von K-Algebren auf X

(4) X top Raum, $U \subset X$ offen

$\overline{\mathcal{F}}(U) = \{ f : U \to \mathbb{R} \text{ stetig}, f(U) \subseteq \mathbb{R} \text{ beschränkt} \}$

$\Rightarrow$ $\overline{\mathcal{F}}$ ist Prägarbe, aber keine Garbe!

Sei $\mathcal{B}$ eine Basis der Top. auf X. Dann gilt

$(\mathcal{B})$ für $V \subset X$ offen, $\mathcal{B}_V = \{ U \in \mathcal{B} \mid U \subset V \}$

$$\mathcal{F}(V) = \{ (s_U)_U \in \prod_{U \in \mathcal{B}_V} \mathcal{F}(U) \mid \forall\, U, U' \in \mathcal{B}_V, U' \subset U : s_U|_{U'} = s_{U'} \}$$

$$= \varprojlim_{U \in \mathcal{B}_V} \mathcal{F}(U) \qquad \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U') \quad (\text{siehe } 80\,a))$$

D.h. $\mathcal{F}$ ist auf Basis der Top schon eindeutig bestimmt.

Eine Prägarbe auf $\mathcal{B}$ ist e. kontravar. Funktor $\mathcal{F} : \mathcal{B} \to (\mathrm{Ens})$. $\mathcal{F}$ läßt sich ausdehnen zu Prägarbe $\mathcal{F}'$ auf X.

$\widetilde{\mathcal{F}}$ Garbe $\quad V \subset X$ offen, $\mathcal{B}_V = \{ U \in \mathcal{B} \mid U \subset V \}$

$$\widetilde{\mathcal{F}}(V) \to \prod_{U \in \mathcal{B}_V} \widetilde{\mathcal{F}}(U) \rightrightarrows \prod_{(U,W) \in \mathcal{B}_V \times \mathcal{B}_V} \widetilde{\mathcal{F}}(U \cap W)$$

$$(s_U)_U$$

$$\widetilde{\mathcal{F}}(V) = \{ (s_U)_U \mid s_U|_{U \cap W} = s_W|_{U \cap W} \;\; \forall\, U, W \in \mathcal{B}_V \}$$

$U, W \subset V$

$\in \widetilde{\mathcal{F}}(U \cap W)$

$(\Leftrightarrow)$ $(\mathcal{F}1)_{U \cap W}$ $\quad s_U|_T = s_W|_T \quad \forall\, T \in \mathcal{B}_{U \cap W}$

$\| \; W \in T \qquad \| \; U \in T \qquad \cap \; \mathcal{B}_V$

$s_T \qquad s_T$

$T \subset U \cap V$

$\cap$

U, V

$$= \{ (s_U)_U \mid s_U|_{U'} = s_{U'}, \; U', U \in \mathcal{B}_V, \; U' \subset U \}$$

$$= \varprojlim_{U \in \mathcal{B}_V} \widetilde{\mathcal{F}}(U) \quad \left(= \widetilde{\mathcal{F}}'(V) \right)$$

$\widetilde{\mathcal{F}}$ Prägarbe auf $\mathcal{B}$ $\qquad U \in \mathcal{B}$

$\widetilde{\mathcal{F}}'$ — " — auf X $\qquad \widetilde{\mathcal{F}}'(U) = \varprojlim_{V \in \mathcal{B}_U} \widetilde{\mathcal{F}}(V) \cong \widetilde{\mathcal{F}}(U)$

U cofinal in $\mathcal{B}_U$

$$\mathcal{F}'(U) = \varinjlim_{\substack{V\in\mathcal{B}\\ V\subset U}} \mathcal{F}(V)$$

$U'\subset U$

$$\mathcal{F}'(U) = \varinjlim_{\substack{V\in\mathcal{B}\\ V\subset U}} \mathcal{F}(V) \xrightarrow{\mathrm{pr}_W} \mathcal{F}(W) \dashrightarrow \varinjlim_{\substack{W\in\mathcal{B}\\ W\subset U'}} \mathcal{F}(W) = \mathcal{F}'(U')$$

$W\subset U'$

Ein Morphismus von Prägarben auf $\mathcal{B}$ ist wieder ein Morph. von Fall ✓

(Sei $\mathcal{B}$ abg. unter endl. $\cap$) steht erfüllt für Basis!

Prop 20: $\mathcal{F}'$ ist Garbe $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ erfüllt (G2) für alle $U\in\mathcal{B}$ und alle Überdeckungen (U_i) von U mit $U_i\in\mathcal{B}$ $\forall i$

In diesem Fall heißt $\mathcal{F}$ Garbe auf $\mathcal{B}$

$\mathcal{F}\mapsto\mathcal{F}'$ ist funktoriell;

Bew: "$\Leftarrow$" ~~Alle nach Voraussetzung~~ "$\Rightarrow$" $\mathcal{F}'(U)=\mathcal{F}(U)$ $\forall U\in\mathcal{B}$

$\varinjlim = \varprojlim$

(G1): $\mathcal{F}'(U) \hookrightarrow \prod_i \mathcal{F}'(U_i)$ $\qquad U = \bigcup U_i = \bigcup V_{ij}$

$\mathcal{F}'(U) = \varinjlim_{W\subset U, \in\mathcal{B}} \mathcal{F}(W)$, $\qquad \mathcal{F}'(U_i) = \varinjlim_{V\subset U_i, \in\mathcal{B}} \mathcal{F}(V)$

$U_i\cap W = \bigcup (V_{ij}\cap W) = \bigcup_{V\in\mathcal{B}, V\subset U_i\cap W} V$

$W = \bigcup (V_{ij}\cap W)$

$$\mathcal{F}(W) \hookrightarrow \prod_i \prod_{\substack{V\in\mathcal{B}\\ V\subset U_i\cap W}} \mathcal{F}(V)$$

$$\hookrightarrow \prod_i \mathcal{F}'(U_i\cap W)$$

$$\Rightarrow \varinjlim_{V\subset U} \mathcal{F}(V) \hookrightarrow \prod_i \varinjlim_{V\subset U} \mathcal{F}'(U_i\cap W) = \varinjlim_{V\subset U_i\cap W} \mathcal{F}(V)$$

$$\varinjlim_{V\subset U_i} \mathcal{F}(V) = \mathcal{F}'(U_i)$$

($\cap$ §15)

Bew (Prop 20)

"$\Rightarrow$": $\mathcal{F}'(U) = \mathcal{F}(U) \quad \forall U \in \mathcal{B}$

"$\Leftarrow$" Sei $U \subset X$ offen und (U_i) eine off. Überd. von U

(Sh1)

$$\mathcal{F}'(U) \hookrightarrow \prod_I \mathcal{F}'(U_i) \subset \prod_I \prod_{V \in \mathcal{B}_{U_i}} \mathcal{F}(V)$$

$\varprojlim_{W \in \mathcal{B}_U} \mathcal{F}(W)$

$$(s_W)(s'_W) \xmapsto{} (s_W)|_{U_i} = (s'_W)|_{U_i} \quad \forall i \Rightarrow s_V = s'_V \quad \forall V \in \mathcal{B}_{U_i}, i \in I$$

$s \quad s'$

Bel $s_W = s'_W \quad \forall W \in \mathcal{B}_U$, d.h. $s = s'$

denn $\mathcal{F}(W) \hookrightarrow \prod_I \prod_{V \in \mathcal{B}_{U_i \cap W}} \mathcal{F}(V)$ weg (Sh1) für $\mathcal{F}$

s_W, s'_W hab. gleich. Bild

(Sh2) $$\mathcal{F}'(U) \xrightarrow{\rho} \prod_I \mathcal{F}'(U_i) \rightarrow \prod_{I \times I} \mathcal{F}'(U_i \cap U_j)$$

$s = (s_W) \qquad (s_i)_{i \in I}$

"$\mathcal{F}'(U) \subset \ker$": $\rho(s) = \left((s_V)_{V \in \mathcal{B}_{U_i}} \right)_{i \in I}$

Sei $T \in \mathcal{B}_{U_i \cap U_j} \subset \mathcal{B}_U$, $V \in \mathcal{B}_{U_i}$, $W \in \mathcal{B}_{U_j}$

$\Rightarrow s_V|_T = s_T = s_W|_T \Rightarrow$ Bel.

-8(5)

F(U) ⊃ ... Sei $(s_i) \in \prod_I \mathcal{F}'(U_i)$ mit $\sigma((s_i)) = \sigma'((s_i))$

gesucht: $s = (s_W) \in \mathcal{F}'(U)$ mit $\rho(s) = (s_i)_{i \in I}$

(S1) für $W \subset V$: $F(W) \xrightarrow{\rho} \prod_I \prod_{V \in B_{U_i \cap W}} F(V) \xrightarrow[\sigma']{\sigma} \prod_{I \times I} \prod_{B_{U_i} \cap B_{U_j \cap W}}$

(s_i) mit $\sigma(s_i) = \sigma'(s_i)$

es existiert ein $s_W \in F(W)$, welche kompatibel (!) sind ... Bild!

6. Halme ~~Keime~~ von Garben

$x \in X$, $\mathcal{F}$ Prägarbe auf X

$\Rightarrow \left(\mathcal{F}(U), \mathrm{res}^V_U\right)_{x \in U \subset X \text{ off}}$ ist filtriertes induktives System

filtriert: $\forall\ U, V \subset X$ off. $\exists\ W \subset U, V$, $W \subset X$ off.

(setze $W = U \cap V$)

Def. 27. Der induktive Limes

$$\mathcal{F}_x := \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U)$$

heißt Halm ~~Keim~~ von $\mathcal{F}$ in x, d.h. $\mathcal{F}_x$ ist die Menge der Äquivalenzklassen von Paaren (U, s) mit $x \in U \subset X$ off., $s \in \mathcal{F}(U)$ unter der Relation

$$(U_1, s_1) \sim (U_2, s_2) :\Longleftrightarrow \exists\ x \in V \subset U_1 \cap U_2 \text{ mit } s_1|_V = s_2|_V$$

Für $U \subset X$ off. hat man eine kanonische Abb.

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}_x$$
$$s \longmapsto s_x = [(U, s)]$$

s_x heißt Keim von s in x

Ein Homom. von Prägarben $\varphi: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ auf X induziert

eine Abb
$$\varphi_x := \varinjlim_{U \ni x} \varphi_U : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$$

von Halmen in x.

<u>Bsp 22:</u> $z_0 \in X = \mathbb{C}$, $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ Garbe der holomorphen Fkt auf X

($\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U) = \{ U \to \mathbb{C} \text{ holomorph} \}$)

$(U_1, f_1) \sim (U_2, f_2) \iff f_1, f_2$ haben dieselbe Taylorentwicklung bei z_0

$$\Rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}, z_0} = \mathbb{C}\{\{z - z_0\}\} = \{ \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n \text{ mit pos. Konvergenzradius} \}$$

<u>Bsp 23:</u> X top. Raum, $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ Prägarben auf X

$\varphi, \psi: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ Homom. von Prägarben

(1) Ist $\mathcal{F}$ eine Garbe, so gilt

$\varphi_x: \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ sind injektiv $\forall x \in X$

$\iff$

$\varphi_U: \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ — " — $\forall U \subset X$ offen

(2) Sind $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Garben, dann gilt:

(a) φ_x ist bijektiv $\forall x \in X$

$$\Longleftrightarrow$$

φ_U ist bijektiv $\forall U \subset X$

(b) $\varphi = \psi \Longleftrightarrow \varphi_x = \psi_x \quad \forall x \in X$

Bew. ~~Beachte~~ Beh. für $U \subset X$ offen, ist die

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \quad \text{injektiv:}$$

$$s \longmapsto (s_x)_{x \in U}$$

denn: Es gelte für $s, t \in \mathcal{F}(U)$ $s_x = t_x \quad \forall x \in U$

$\Longrightarrow \forall x \in U \ \exists\, x \in V_x \subset_{\text{off}} U$ mit $s|_{V_x} = t|_{V_x}$

(SA1) $\Longrightarrow s = t$ auf $U = \bigcup_{x \in U} V_x$.

Wir stellen kommut. Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \\ \downarrow \varphi_U & & \downarrow \prod \varphi_x \\ \mathcal{G}(U) & \longrightarrow & \prod_{x \in U} \mathcal{G}_x \end{array}$$

, welches

"(1) $\Rightarrow$" und "2(b)".

Allgemein gilt: bei Filtr. induzierten Limes inj. Abb. ist injektiv, d.h. "(1) $\Leftarrow$".

Bei induktiven Limes surj. Abb. ist surjektiv $\Rightarrow$ "2(a) $\Leftarrow$"

Zu "2(a) $\Rightarrow$": ~~inj~~ surj. Bijektivität der φ_x $\Rightarrow$ Surjektivität der φ_U

Sei $t \in \mathcal{G}(U)$. Wähle für alle $x \in U$

$x \in U^x \subset U$ offen und $s^x \in \mathcal{F}(U^x)$ s.d. $(\varphi_{U^x}(s^x))_x = t_x$

$\Rightarrow \exists \; x \in V^x \subset U^x$ offen mit $\varphi_{V^x}(s^x|_{V^x}) = t|_{V^x}$

$\Rightarrow U = \bigcup_{x \in U} V^x$ offene Überd. + $\forall x, y \in U$ gilt

$$\varphi_{V^x \cap V^y}(s^x|_{V^x \cap V^y}) = t|_{V^x \cap V^y} = \varphi_{V^x \cap V^y}(s^y|_{V^x \cap V^y})$$

$\varphi_{V^x \cap V^y}$ injektiv

$\Rightarrow \quad s^x|_{V^x \cap V^y} = s^y|_{V^x \cap V^y}$

$\overset{(S2)}{\Rightarrow} \quad \exists \; s \in \mathcal{F}(U)$ mit $s|_{V^x} = s^x \;\; \forall x \in U$

$\Rightarrow \quad \varphi_U(s)_x = [(\varphi(s|_{V^x}), V^x)] = [(t|_{V^x}, V^x)] = t_x \quad \forall x \in U$

$\overset{(A)\text{ Bem.}}{\Rightarrow} \quad \varphi_U(s) = t$ $\square$

Def 24. Ein Morphismus $\varphi: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ von Garben heißt <u>injektiv</u> (<u>surjektiv</u>, <u>bijektiv</u>), falls

$\varphi_x: \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ injektiv (—"—, —"—) $\forall x \in X$

Bem 25. φ ist surjektiv, falls für alle

$(t, U)_{t \in \mathcal{G}(U),\, U \subset X \text{ off.}}$ eine offene Überdeckung $U = \bigcup U_i$

ex. und $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ so dass $\varphi_{U_i}(s_i) = t|_{U_i}$,

d.h. man findet stets <u>lokal</u> ein Urbild von t.
(vgl. obiger Beweis!)

<u>Warnung</u>: φ surj $\not\Rightarrow$ $\varphi_U: \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ surj. $\forall$ $U \subset X$ offen!

18.11.08

§7. Garben zu Prägarben assoziierte Garbe

Prop 26 + Def. $\mathcal{F}$ Prägarbe auf X. Dann ex. eine Garbe $\tilde{\mathcal{F}}$ zusammen mit ein Morph. von Prägarben $\iota_{\mathcal{F}}: \mathcal{F} \to \tilde{\mathcal{F}}$, so dass folgendes gilt:

$Sh_X = Sh(X)$

$PSh_X = PSh(X)$ Prägarben

$$\mathrm{Morph}_{\text{Präg}}(\mathcal{F}, \nu\mathcal{G}) \cong \mathrm{Morph}_{\text{Garb}}(\tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{G})$$

$$\varphi = \tilde{\varphi} \circ \iota_{\mathcal{F}} \longleftarrow\!\shortmid\ \tilde{\varphi}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\iota_{\mathcal{F}}"'] & \mathcal{G} \\ \tilde{\mathcal{F}} \arrow[ur, "\exists!\, \tilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

ν: Garben $\to$ Prägarben Vergissfunktor

Dadurch ist das Paar $(\tilde{\mathcal F}, i_{\mathcal F})$ eindeutig bis auf eindeutige Isom. bestimmt.

Ferner gilt:

(1) $i_{\mathcal F, x} : \mathcal F_x \xrightarrow{\cong} \tilde{\mathcal F}_x$ ist bijektiv $\forall x \in X$

(2) Für jede Prägarbe $\mathcal G$ auf X und jeden Morph. $\varphi : \mathcal F \to \mathcal G$ ex. genau ein Morph. $\tilde\varphi : \tilde{\mathcal F} \to \tilde{\mathcal G}$, so daß

$$\begin{array}{ccc} \mathcal F & \xrightarrow{i_{\mathcal F}} & \tilde{\mathcal F} \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \tilde\varphi \\ \mathcal G & \xrightarrow{i_{\mathcal G}} & \tilde{\mathcal G} \end{array}$$

kommutiert.

D.h. $\mathcal F \mapsto \tilde{\mathcal F}$ ist Funktor

$\{$Prägarben auf $X\} \to \{$Garben auf $X\}$, und zwar

linksadjungiert zum Vergißfunktor.

$\tilde{\mathcal F}$ heißt die zu $\mathcal F$ assoz. Garbe / Vergarbung von $\mathcal F$.

Bew.: $U \subset X$ offen

$\tilde{\mathcal F}(U) := \{ (s_x) \in \prod_{x \in U} \mathcal F_x \mid \forall x \in U \ \exists x \in W \subset U$ offen und $t \in \mathcal F(W)$ mit $s_w = t_w \ \forall w \in W \}$

"Keime, die lokal Schnitte sind"! SR2 erzwingt dies!

Für $U \subset V$:

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathcal{F}}(V) & \xrightarrow{res^V_U} & \hat{\mathcal{F}}(U) \\ \cap & & \cap \\ \prod_{x\in V} \mathcal{F}_x & \longrightarrow & \prod_{x\in U} \mathcal{F}_x \end{array}$$

wohldefiniert res^V_U

nat. Proj.

<u>$\hat{\mathcal{F}}$ ist Garbe:</u> $U = \bigcup U_i$

(SR1) $s = (s_x)_U$, $s' = (s'_x)_U \in \hat{\mathcal{F}}(U)$ mit $(s_x)_{x\in U_i} = s|_{U_i} = s'|_{U_i} = (s'_x)_{x\in U_i}$

$\Rightarrow s_x = s'_x \quad \forall x \in U \Rightarrow s = s'$

(SR2): Sei $s_i = (s_{ix})_{U_i} \in \hat{\mathcal{F}}(U_i)$ mit $s_{ix} = s_{jx}$ $\forall x \in U_i \cap U_j$ erfüllt $\forall i,j$ gegeben

$s := (s_x)_{x\in U}$ mit $s_x := s_{ix}$ für ein i mit $x \in U_i$

$\Rightarrow s|_{U_i} = s_i$

<u>z.z.</u> $s \in \hat{\mathcal{F}}(U)$ Keime sind lokal Schnitte, da

dies n. Vor. für alle s_i gilt!

<u>Def von $i_{\mathcal{F}}$:</u> $U \subset X$ off.

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{i_{\mathcal{F},U}} \hat{\mathcal{F}}(U)$$
$$s \longmapsto (s_x)_{x\in U}$$

D. $\hat{\mathcal{F}}_x = \varinjlim_{x\in V} \hat{\mathcal{F}}(V) \longrightarrow \mathcal{F}_x$ bijektiv,

$[(s_x)_{x\in V}] \longmapsto s_x$

$[(s_x)_{x\in V}] \longleftarrow [(s_x V)_{x\in V}]$ ist $i_{\mathcal{F},x}$ ebenfalls bijektiv!

Def. v. $\tilde{\varphi}$: $\tilde{\mathcal{F}}(U) \longrightarrow \tilde{\mathcal{G}}(U)$

$(s_x)_{x\in U} \longmapsto (\varphi_x(s_x))_{x\in U}$

Prop 23 2(b)

~~Bew.~~ Diag. in (2) kommutiert + $\tilde{\varphi}$ ist eindeutig:

$\tilde{\varphi}' : \tilde{\mathcal{F}} \to \tilde{\mathcal{G}}$ wie

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_x & \xrightarrow[\sim]{i_{\mathcal{F}_x}} & \tilde{\mathcal{F}}_x \\ \varphi_x \downarrow & \text{"}\!\!\!\!\!\!\quad & \downarrow \tilde{\varphi}'_x,\ \tilde{\varphi}_x \\ \mathcal{G}_x & \xrightarrow[\sim]{i_{\mathcal{G}_x}} & \tilde{\mathcal{G}}_x \end{array}$$

$\Rightarrow \tilde{\varphi}'_x = \tilde{\varphi}_x$

$\Rightarrow \tilde{\varphi}' = \tilde{\varphi}$

Sei $\mathcal{G}$ [illegible] Garbe

$\Rightarrow$ $i_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \to \tilde{\mathcal{G}}$ ist Isom. wegen (1) und Prop. 23 2(a),

den wir als Identifizierung betrachten, d.h.

$\tilde{\varphi} : \tilde{\mathcal{F}} \to \mathcal{G}$

Eindeutigkeit: formale Umformung □

Klar: Fkt. $\mathcal{F}$ Prägarbe von Ringen, R-Moduln, R-Algebren

$\to$ $\tilde{\mathcal{F}}$ Garbe — " — " —

Bsp 27: E Menge, $\mathcal{F}$ Prägarbe mit $\mathcal{F}(U) = E$ $\forall U$ offen, $res^V_U = id_E$

$\Rightarrow$ $\tilde{\mathcal{F}}(U) = \{$Menge der lokal konstanten Fkt $U \to E\}$

$\tilde{\mathcal{F}}$ heißt die <u>konstante Garbe mit Werten in E</u>

<u>Bez:</u> $\underline{E}$ od $\underline{E}_X$

<u>Bew:</u> $\tilde{\mathcal{F}}(U) \to \{U \to E$ lok. konst.$\}$

$s = (s_x)_{x \in U} \longmapsto x \mapsto s_x$

lokal $s_x = f_x \in E$

$\mathcal{F}_x = \varinjlim \mathcal{F}(U) = E$

$(f(x))_{x \in U} \longleftarrow f : U \to E$ ∎

8. Direktes und Inverses Bild von Garben

$f : X \to Y$ stet. Abb top. Räume.

$\mathcal{F}$ Prägarbe auf X

<u>Def:</u> $f_* \mathcal{F}$ Prägarbe auf Y, das <u>direkte Bild von $\mathcal{F}$ unter f</u>

$(f_* \mathcal{F})(V) := \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ mit res Abb von $\mathcal{F}$

~~Aufgabe~~

f_* : {Prägarben auf X} $\to$ {Prägarben auf Y}

ist Funktor: ~~tra~~ $f_*(\varphi): f_* \mathcal{F}_1 \to f_* \mathcal{F}_2$ zu $\varphi: \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$

via $f_*(\varphi)_V := \varphi_{f^{-1}(V)}$

<u>Bem. 28:</u>

(1) $\mathcal{F}$ Garbe auf X $\Rightarrow$ $f_*\mathcal{F}$ Garbe auf Y, d.h.

$$f_* : Sh(X) \to Sh(Y)$$

(2) Ist $g: Y \to Z$ weitere stetige Abb. top. Räume, so ex. ein offensichtl. Isom.

$$g_*(f_* \mathcal{F}) = (g \circ f)_*(\mathcal{F}),$$ funktoriell in $\mathcal{F}$.

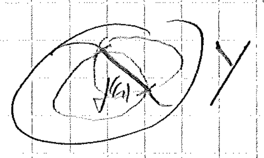
<u>Bew.</u> klar.

Nun sei $\mathcal{G}$ Prägarbe auf Y. Def.

$f^+\mathcal{G}$ Prägarbe auf X

$f^{-1}\mathcal{G} := \widetilde{f^+\mathcal{G}}$ Garbe auf X, <u>Inverses Bild von $\mathcal{G}$ unter f</u>

via $(f^+\mathcal{G})(U) := \varinjlim_{Y \underset{\text{offen}}{\supseteq} V \supseteq f(U)} \mathcal{G}(V)$ mit induzierten Res.-Abb.



Warnung: $\mathcal{G}$ Garbe$_Y$ $\not\Rightarrow$ $f^+\mathcal{G}$ Garbe auf X

Falls $X \overset{f}{\subset} Y$ Inklusion, $\mathcal{G}|_X = f^{-1}\mathcal{G}$

(z.B.) $X \overset{f}{\subset} Y$ offen, stimmt $\mathcal{G}|_X$ mit der Einschränkung aus Bsp. 19 überein (vielleicht Sequenz fast (colimitiertes Objekt.)

Problem: $f(V)$ ist nicht offen, daher Approximation durch offene Mengen.

Vgl. auch Sequenz in TCl auf alg. Untervarietät!

f^{-1}: Prägarben auf Y $\to$ Sh_X Funktor

$g: Y \to Z$ stetig, $\mathcal{H}$ Prägarbe auf Z

Für $U \subset X$ offen gilt

$Z \underset{\text{off}}{\supset} W \supset g(f(U)) \Leftrightarrow W \supset g(V)$ für ein $V \subset Y$ offen mit $V \supset f(U)$

$\lim_{\to} \lim_{\to} = \lim_{\to}$

$\Rightarrow$ $f^+(g^+\mathcal{H}) = (g\circ f)^+\mathcal{H}$ (*)

$\Rightarrow$ $f^{-1}(g^{-1}\mathcal{H}) = (g\circ f)^{-1}\mathcal{H}$

$i: \{x\} \hookrightarrow X$ Inklusion, $\mathcal{F}$ Prägarbe auf X

$\Rightarrow$ $i^{-1}\mathcal{F} = \mathcal{F}_x$ per Def!

(*)

$\Rightarrow \quad (f^{-1}\mathcal{G})_x = \mathcal{G}_{f(x)}$

Prop 29. Für $X \xrightarrow{f} Y$ stetige Abb. sind die Funktoren f_* und f^{-1} zueinander adjungiert, d.h. für $\mathcal{F}$ Garbe auf X, $\mathcal{G}$ Prägarbe auf Y ex. eine Bijektion

$$\mathrm{Hom}_{Sh_X}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \xleftrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{PreSh(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

$$\varphi \longmapsto \varphi^b$$

$$\psi^\# \longleftarrow\!\shortmid \psi,$$

funktoriell in $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$.

Bew. $f^{-1}\mathcal{G} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}$ Morph. von Garben auf X

$t \in \mathcal{G}(V)$, $V \subset Y$ offen

$$\mathcal{G}(V) \xrightarrow{?} f^+\mathcal{G}(f^{-1}(V)) \xrightarrow{i_{f^+\mathcal{G}}} f^{-1}\mathcal{G}(f^{-1}(V)) \xrightarrow{\varphi_{f^{-1}(V)}} \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \overset{Def}{=} f_*\mathcal{F}(V)$$

$$t \longmapsto [V \supset V \supset f(f^{-1}(V))] \quad \longmapsto \varphi_V^b(t)$$

def φ^b

Def von $\psi^\#$: $\mathcal{G} \xrightarrow{\psi} f_* \mathcal{F}$ Garbenmorph. auf Y

Wir def. $\psi^\#: f^+\mathcal{G} \to \mathcal{F}$ u. erhält dann $\psi^\#: f^{-1}\mathcal{G} \to \mathcal{F}$ induziert!

$U \subset X$ offen, $s \in f^+\mathcal{G}(U)$

$s = [(s_V, V)]$ $\quad V \underset{\text{offen}}{\supset} f(U)$, $s_V \in \mathcal{G}(V)$

$$\Downarrow$$

$$f^{-1}(V) \supset U$$

$\Rightarrow \psi_V(s_V) \in f_* \mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$

$$\downarrow \text{res}$$

$$\psi^\#_U(s) \in \mathcal{F}(U)$$

wd.!

Überprüfe: $\varphi^{\flat\#} = \varphi$, $\psi^{\#\flat} = \psi$ + Funktorialität $\square$

✓ 20.11.08

Def + Prop 29 verallgemeinern sich zu (Prä)Garben auf in Ringe, R-Moduln, R-Algebren!

Beschreibung von: $\mathcal{G}_{f(x)} = (f^{-1}\mathcal{G})_x \xrightarrow{\varphi_x} \mathcal{F}_x$, $x \in X$

$f(x) \in U \underset{\text{offen}}{\subseteq} Y$

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{G}(U) & \xrightarrow{\varphi^\flat_U} & \mathcal{F}(f^{-1}(U)) & \longrightarrow & \mathcal{F}_x \\ \downarrow & & & & \\ \mathcal{G}_{f(x)} & & & & \end{array}$$

$\lim\limits_{\overrightarrow{U}}$

9. lokal geringte Räume

Def 30. Ein geringter Raum ist ein Paar $(X, \mathcal{O}_X)$ bestehend aus einem top. Raum X und einer Garbe $\mathcal{O}_X$ (kommutativer) Ringe.

Ein Morphismus $(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ geringter Räume ist ein Paar $(f, f^\flat)$ bestehend aus einer stetigen Abb. $X \xrightarrow{f} Y$ und einem Homomorph.

$$\mathcal{O}_Y \xrightarrow{f^\flat} f_*\mathcal{O}_X$$

von Ringgarben auf Y.

Diese Daten ist gleichbedeutend (Bsp. 29) mit $(f, f^\sharp)$, wobei

$$f^{-1}\mathcal{O}_Y \xrightarrow{f^\sharp} \mathcal{O}_X$$

ein Garbenhom. auf X ist.

Bez.: f oder $(f, f^\flat)$ oder $(f, f^\sharp)$.

Die Komposition wird über die jeweiligen Komponenten f und $f^\flat$ erklärt, d.h. wir erhalten die Kategorie der geringten Räume.

$\mathcal{O}_X$ heißt die Strukturgarbe von X, oft schreibt man kurz X für $(X, \mathcal{O}_X)$.

Idee: $\mathcal{O}_X$ beschreibt die zulässigen Fkt. auf $U \subset X$, d.h. etwa stetige, diffbare, holomorphe etc.

Solche Fkt. auf $U \subset Y$ alle bei Zurückziehen mit f in dieselbe Klasse überführt werden, die wird formal mit $f^\flat$ zurückgestellt!

<u>Notation.</u>

A lokaler Ring

m_A max. Ideal

$\kappa(A) = A/m_A$ Restklassenkörper

Ein Hom. $\varphi : A \to B$ lokaler Ringe heißt <u>lokal</u>, falls $\varphi(m_A) \subset m_B$

$(f, f^\flat) = (f, f^\sharp) : X \to Y$ Morph. lokal geringter Räume induziert

$$f^\sharp_x : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x} \qquad \forall\, x \in X$$

wie folgt: $(f^{-1}\mathcal{O}_Y)_x = \mathcal{O}_{Y,f(x)}$ + Hom. von $f^\sharp$

oder

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Y(U) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_{Y,f(x)} = \varinjlim \mathcal{O}_Y(U) & \cdots\to & \mathcal{O}_{X,x} \end{array} \qquad f(x) \in U \subset Y \text{ offen}$$

<u>Def 37:</u> Ein <u>lokal geringter Raum</u> ist ein geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, für den $\mathcal{O}_{X,x}$ für alle $x \in X$ ein lokaler Ring ist.

Ein <u>Morph.</u> $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ <u>lokal geringter Räume</u> ist ein Morph. geringter Räume $(f, f^\flat)$, so dass

$$f_x^\# : (f^{-1}\mathcal{O}_Y)_x = \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$$

ein lokaler Ringhom ist $\forall x \in X$.

Die Komposition solcher Morph. ist automatisch wieder ein Morph. lokal geringter Räume, d.h. wir erhalten eine Unterkategorie der Kat. der geringten Räume, die i.a. <u>nicht</u> voll ist, d.h. es gibt Morph. f geringter Räume zwischen lokal geringten Räumen, die nicht lokal sind!

<u>Bez.:</u> $\mathcal{O}_{X,x}$ der lokale Ring von X in x

$\mathfrak{m}_x$ sein max. Ideal

$\kappa(x) := \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ Restklassenkörper.

$$\underset{\text{offen}}{X \supset U} \ni x : \quad \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X,x} \to \kappa(x)$$
$$f \longmapsto f(x)$$

Warum lokal geringter Raum? Heuristik: (~~im Vorlesung~~

$\mathcal{O}_X(U) \longleftrightarrow$ Fkt auf U

$\mathcal{O}_{X,x} \longleftrightarrow$ Fkt auf Umgeb. U von x

Wunsch: $f(x) \neq 0 \overset{!}{\Rightarrow} f$ ist invertierbar in kleiner Umgeb. V von x

d.h. $\mathcal{O}_{X,x} \setminus \{f \mid f(x)=0\} \subset \mathcal{O}_{X,x}^{\times}$, also $\mathcal{O}_{X,x}$ lokal

($\overset{''}{\mathfrak{m}_{X,x}}$)

Ferner: $g \in \mathcal{O}_{Y,f(x)}$ mit $g(f(x)) = 0$ sollte implizieren

$g \circ f\,(x) = 0$

$\overset{!}{\Leftrightarrow} \quad f_x^{\#}(\mathfrak{m}_{f(x)}) \subset \mathfrak{m}_x$

Bsp 32: $\mathcal{C}_X$ Garbe der $\mathbb{R}$-wertigen stetigen Fkt. auf top. R. X

$\mathcal{C}_{X,x}$ Ring der Keime $[s]$ der stetigen Fkt s in Umg. von x

Bel. $\mathfrak{m}_x = \{[s] \in \mathcal{C}_{X,x} \mid s(x) = 0\}$ ist einziges max. Ideal,

d.h. $(X, \mathcal{C}_X)$ ist lokal geringter Raum.)

denn: Sei $[s] \in \mathcal{C}_{X,x} \setminus \mathfrak{m}_x \Rightarrow s(x) \neq 0 \quad \forall s \in [s]$

$\overset{s \text{ stet}}{\Rightarrow} \exists\ x \in U \underset{\text{off}}{\subset} X$ mit $s(u) \neq 0 \ \forall u \in U$

$\Rightarrow \frac{1}{s|_u} \in \mathcal{C}_X(u)$ ex.

$\Rightarrow \mathcal{C}_{X,x} \setminus m_x = (\mathcal{C}_{X,x})^\times$ Einheitengruppe

$\mathcal{C}_{X,x} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist surj. Ringhom. mit $\ker = m_x$

$[s] \longmapsto s(x)$

$\Rightarrow \kappa(x) \cong \mathbb{R}$

$f : X \to Y$ stetig, $V \subset Y$ offen

$f^\flat_V : \mathcal{C}_Y(V) \to \mathcal{C}_X(f^{-1}(V)) = f_* \mathcal{C}_X(V)$

$h \longmapsto h \circ f$

$\Rightarrow \mathcal{C}_{Y,f(x)} \longrightarrow \mathcal{C}_{X,x}$ erfüllt $f^\flat_x(m_{f(x)}) \subset m_x$

$[h] \longmapsto [h \circ f]$

$\Rightarrow (f, f^\flat)$ ist Morph. lokal ger. Räume.

Ebenso kann man <u>Prävarietäten</u> als <u>lokal geringte Räume</u> interpretieren!

Das Ringspektrum als lokal geringter Raum

volltreuer Funktor

Ziel: Ringe $\longrightarrow$ Kat. lokal geringter Räume

$A \longmapsto (\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$

§10. Die Strukturgarbe auf Spec A

$X := \operatorname{Spec}(A)$

$\mathfrak{B} = \{ D(f) \mid f \in A \}$ Basis der Top.

Vorgehen: Def. Prägarbe $\mathcal{O}_X$ auf $\mathfrak{B}$, die Garbenaxiome bzgl. $\mathfrak{B}$ erfüllt

Wollen: $\mathcal{O}_X(X) = A$ (vgl. Prävarietät)

bzw. $\mathcal{O}_X(D(f)) = A_f$, da $i_f : A \to A_f$, $a \mapsto \frac{a}{1}$

Homöomorphismus $D(f) \to \operatorname{Spec}(A_f)$ induziert.

(„Fkt. mit möglichen Polen in $V(f)$")

1. Wohldefiniertheit: $D(f) = D(g) \Rightarrow A_f = A_g$ kanonisch

denn $D(f) \subseteq D(g) \overset{\text{Lem. 4}}{\Longleftrightarrow} \exists\, n \geq 1$ s.d. $f^n \in Ag$

$\Longleftrightarrow \frac{g}{1} \in (A_f)^\times$