

## 18 Topologische Eigenschaften von Prävarietäten

**Lemma 42.** Für einen topologischen Raum  $X$  und  $U \subseteq X$  offen haben wir eine Bijektion

$$\begin{aligned} \{Y \subseteq U \text{ irred. abg.}\} &\longleftrightarrow \{Z \subseteq X \text{ irred. abg. mit } Z \cap U \neq \emptyset\} \\ Y &\longmapsto \overline{Y} \text{ (Abschluss in } X) \\ Z \cap U &\longleftarrow Z \end{aligned}$$

*Proof.* Lemma 14:  $Y \subseteq X$  irreduzibel  $\Leftrightarrow \overline{Y} \subseteq X$  irreduzibel.

$Y \subseteq U$  abgeschlossen  $\Leftrightarrow \exists A \subset X$  abgeschlossen:  $Y = U \cap A$ .

$\Rightarrow Y \subseteq \overline{Y} \subseteq A \Rightarrow Y = U \cap \overline{Y}$

$Y$  irreduzibel in  $U \Rightarrow Y$  irreduzibel in  $X$

$\Rightarrow$  (14)  $\overline{Y}$  irreduzibel

$\Rightarrow Y \mapsto \overline{Y} \mapsto \overline{Y} \cap U = Y$ . ✓

$\emptyset \neq \underbrace{Z \cap U}_{\substack{\text{irred. (S. 13v.)} \\ \text{offen}}} \subset Z$  damit dicht da  $Z$  irreduzibel (Satz 13.ii)

$\Rightarrow$  Abbildung  $\leftarrow$  wohldefiniert

$\Rightarrow \overline{Z \cap U} = Z$

□

**Proposition 43.** Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  eine Prävarietät.

$\Rightarrow X$  noethersch (insbesondere quasikompakt) und irreduzibel.

*Proof.* Sei  $X = \bigcup_{i=1}^n$  endliche eff. aff. Überdeckung und  $X \supseteq Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \dots$  eine absteigende Kette abgeschlossener Teilmengen.

$\Rightarrow U_i \cap Z_1 \supseteq U_i \cap Z_2 \supseteq \dots$

$\Rightarrow$  abgeschlossene Teilmengen in  $U_i$

$\Rightarrow \forall i \exists n_i: U_i \cap Z_{n_i} = U_i \cap Z_{i+m}$ . Setzen von  $n := \max n_i$  liefert:

$\forall i = 1, \dots, n \forall m \geq n: U_i \cap Z_m = U_i \cap Z_{m+1}$

$\Rightarrow (Z_i)$  wird stationär da  $Z_m = \bigcup U_i \cap Z_m$ .

$\Rightarrow X$  noethersch.

Zeige,  $X$  ist irreduzibel:

Sei  $X = X_1 \cup \dots \cup X_n$  die Zerlegung in irreduzibele Komponenten.

Ass  $n \geq 2$

$\Rightarrow \exists i_0 \in \{2, \dots, n\}: X_1 \cap X_{i_0} \neq \emptyset$ . (Andernfalls gilt:  $X = X_1 \sqcup \underbrace{X \setminus X_1}_{= X_2 \cup \dots \cup X_n \text{ abg.}}$ . Widerspruch zu

$X$  zusammenhängend.)

Sei ohne Einschränkung  $i_0 = 2$ . Sei  $x \in X_1 \cap X_2$ ,  $x \in U \subset X$  offene affine Überdeckung (d.h. affine Varietät).

$U$  irreduzibel  $\Rightarrow \overline{U}$  (Abschluss in  $X$ )  $\subseteq X_j$  für ein  $j \in \{1, \dots, n\}$

**Jedoch:**  $x \in X_i \cap U \subseteq U$  irreduzibel ist  $\underbrace{\overline{X_i \cap U}}_{\subset \overline{U} \subset X_i} = X_i, i = 1, 2$

$\Rightarrow X_1, X_2 \subseteq X_j$ . Widerspruch zu maximale Komponente.

□