Beispiele (Projektiver Raum und projektive Varietäten)

22 Homogene Polynome

Definition 51 (orig. 48)**.** Ein Polynom $f \in k[X_0, \dots, X_n]$ heißt **homogen vom Grad** $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, wenn f die Summe von Monomen von Grad d ist. (Insbesondere ist für jedes d das Nullpolynom homogen von Grad d.)

Bezeichne $k[X_0, \dots, X_n]_d$ der Untervektorraum der Polynome vom Grad d.

Remark 52 (orig. 49). Da $\#k$ unendlich ist, ist f homogen vom Grad d.

$\Leftrightarrow f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, \dots, x_n)\ \forall x_0, \dots, x_n \in k,\ \lambda \in k^\times$.

Es gilt: $k[X_0, \dots X_n] = \bigoplus_{d \geq 0} k[X_0, \dots, X_n]_d$.

Lemma 53 (orig. 50)**.** *Für* $i \in \{0, \dots, n\}$ *und* $d \geq 0$ *haben wir bijektive* k*-lineare Abbildungen*

$$k[X_0, \dots, X_n]_d \longrightarrow \textit{Polynome in } k[T_0, \dots, \hat{T}_i, \dots, T_n] \textit{ v. Grad } \leq d$$

$$f \overset{\Phi_i^d}{\longmapsto} f(T_0, \dots, \underbrace{1}_{i}, \dots, T_n)$$

$$X_i^d g\left(\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{\hat{X}_i}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}\right) \overset{\Psi_i^d}{\longleftarrow\!\shortmid} g$$

Dehomogenisierung *bzw.* ***Homogenisierung.***

Proof. Es reicht, $\Psi_i^d \circ \Phi_i^d = \mathrm{id}$, $\Phi_i^d \circ \Psi_i^d = \mathrm{id}$ auf Monomen nachzurechnen, da alle Abbildungen k-linear sind. ◻

Oft ist es nützlich,

$$k[T_0, \dots, \hat{T}_i, \dots, T_n] \text{ mit}$$

mit $k\left[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{\hat{X}_i}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}\right] \underset{\text{Unterring}}{\subset} k(X_0, \dots, X_n)$.