19 Offene Untervarietäten

Offene Teilmengen von affinen Varietäten (und allgemeiner beliebigen Prävarietäten) sind wieder Prävarietäten. (aber i.A. nicht affin!)

Lemma 44 (orig. 41). *Sei X eine affine Varietät, $f \in \mathcal{O}_X(X)$, $D(f) \subseteq X$. Die Lokalisierung von $\Gamma(X) = \mathcal{O}_X(X)$ an f,*

$$\Gamma(X)_f = \Gamma(X)[T]/(Tf - 1)$$

ist eine integre, endlich erzeugte k-Algebra. $(Y, \mathcal{O}_Y)$ bezeichne die zugehörige affine Varietät. Dann gilt:

$$(D(f), \mathcal{O}_X|_{D(f)}) \cong (Y, \mathcal{O}_Y)$$

als Räume mit Funktionen, d.h. $(D(f), \mathcal{O}_{X|_{D(f)}})$ ist selbst affine Varietät.

Proof. $\mathcal{O}_X(D(f)) = \mathcal{O}_X(X)_f$ muss affiner Koordinatenring von $(\mathcal{D}(f), \mathcal{O}_{X|_{\mathcal{D}(f)}})$ sein, wenn letzterer Raum von Funktionen affin ist. $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ korrespondiert zu dem Radikalideal:

$$\mathfrak{a} := I(X) \trianglelefteq k[T_1, \dots, T_n] \;\subseteq\; \mathfrak{a}' := (\mathfrak{a}, fT_{n+1} - 1) \subseteq k[T_1, \dots, T_{n+1}]$$

mit Koordinatenringen:

$$\begin{aligned}
\Gamma(X) &= k[T_1, \dots, T_n]/\mathfrak{a} \\
\Gamma(Y) &= \Gamma(X)_f = (k[T_1, \dots, T_n]/\mathfrak{a})[T_{n+1}]/(T_{n+1}f - 1) \\
&\cong k[T_1, \dots, T_{n+1}]/\mathfrak{a}'
\end{aligned}$$

Für $Y = V(\mathfrak{a}') \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(k)$ induziert die Abbildung

$$\begin{tikzcd}
Y \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(k) \arrow[d, dashed] & (x_1, \dots, x_{n+1}) \arrow[d, mapsto] & T_i \\
X \subseteq \mathbb{A}^n(k) & (x_1, \dots, x_n) & T_i \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

eine Bijektion $Y \xrightarrow{j} D_X(f)$ mit Umkehrabbildung $(x_0, \dots, x_n, \frac{1}{f(x_0, \dots, x_n)}) \hookleftarrow (x_0, \dots, x_n)$

Claim. j ist Isomorphismus von Räumen mit Funktionen:

(i) j ist *stetig* (als Einschränkung einer stetigen Abbildung) ✓

(ii) j ist *offen*: Für $\frac{g}{f^n} \in \Gamma(X)_f = \Gamma(Y)$ mit $g \in \Gamma(X)$ gilt

$$\begin{aligned}
j\left(D_Y\left(\frac{g}{f^n}\right)\right) &= j\left(D_Y(gf)\right) && f \text{ Einheit} \\
&= D_X(gf) \text{ offen}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow j$ Homömorphismus.

(iii) j induziert $\forall g \in \Gamma(X)$ Isomorphismen:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X(D(fg)) &\longrightarrow \Gamma(Y)_g \\ s &\longmapsto s \circ j \end{aligned}$$

mit $\mathcal{O}_X(D(fg)) = \Gamma(X)_{fg} = \Gamma(X)_f)_g = \Gamma(Y)_g$. Mit dem Verklebungsaxiom folgt: j ist Morphismus von Räumen mit Funktionen.

$\square$

Proposition 45 (orig. 42)**.** *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ Prävarietät, $\emptyset \neq U \subseteq X$ offen. Dann ist $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ eine Prävarietät und $U \hookrightarrow X$ ist Morphismus von Prävarietäten.*

Proof. X ist irreduzibel, also folgt mit Satz 13, dass U zusammenhängend ist. Nach Voraussetzung besitzt $X = \bigcup_i X_i$ eine affine, offene Überdeckung. Es folgt:

$$U = \bigcup_i (\underbrace{X_i \cap U}_{\text{offen in } X_i}) = \bigcup_{i,j} D_{X_i}(f_{i,j})$$

und $D_{X_i}(f_{i,j})$ ist eine affine Varietät nach Lemma 44. Da X noethersch ist, folgt mit Lemma 20, dass U quasikompakt ist.

$\Rightarrow$ Es existiert eine endliche Teilüberdeckung, also ist U Prävarietät. ✓

Die kanonische Inklusion $U \overset{i}{\hookrightarrow} X$ ist sicher stetig. Für $f \in \mathcal{O}_X(V), V \subseteq X$ offen gilt mit dem Einschränkungsaxiom

$$\mathcal{O}_X|_U(U \cap V) = \mathcal{O}_X(U \cap V) \ni f \circ i = f|_{U \cap V}$$

Also ist i Morphismus von Prävarietäten. $\square$

Die offenen affinen Teilmengen einer Prävarietät X ($\hat{=} U \subseteq X$ offen mit $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ affine Varietät) bilden eine Basis der Topologie von X, da X durch offene affine Untervarietäten überdeckt wird und letzere diese Eigenschaft nach Lemma 44 haben.