20 Funktionenkörper einer Prävarietät

Definition 46 (orig. 43)**.** Für eine Prävarietät X sind die rationalen Funktionenkörper aller nichtleeren affin-offenen Teilmengen in natürlicher Weise zu einander isomorph. Diesen Körper $K(X)$ nennen wir den **rationalen Funktionenkörper**von X.

Proof. $\emptyset \neq U$, $V \subseteq X$ affine, offene Untervarietäten. Da X irreduzibel ist, gilt nach *Satz 13*:

$$\emptyset \neq U \cap V \subseteq U \text{ offen.}$$

Nach Definition von $\mathcal{O}_X$ ist

$$\mathcal{O}_X(U) \subseteq \mathcal{O}_X(U \cap V) \subseteq K(U) = \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_X(U)).$$

Das impliziert $\mathrm{Quot}(\mathcal{O}_X(U \cap V)) = K(U)$. Aus Symmetriegründen ist aber damit auch bereits $K(V) = \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_X(U \cap V))$. □

Remark 47 (orig. 44). Bildung des des Funktionenkörpers $K(\cdot)$ ist **nicht** funktoriell! Für $X \to Y$ Morphismus affiner Varietäten ist die Abbildung auf den Koordinatenringen $\Gamma(Y) \to \Gamma(X)$ i.A. **nicht** injektiv, induziert also keine Abbildung $K(Y) \hookrightarrow K(X)$.

Jedoch: Eine Isomorphie $X \xrightarrow{\sim} Y$ induziert $K(Y) \xrightarrow{\sim} K(X)$. Allgemeiner sei $X \xrightarrow{\varphi} Y$ Morphismus mit $\mathrm{im}(\varphi) \subseteq Y$ offen ($\Rightarrow$ dicht. Später: $X \xrightarrow{\varphi} Y$ **dominant**, gdw. $\mathrm{im}(\varphi) \subseteq Y$ dicht) induziert in funktioreller Weise eine Abbildung $K(Y) \hookrightarrow K(X)$.

Proposition 48 (orig. 45)**.** *Sei X eine Prävarietät, $V \subseteq U \subseteq X$ offen. Dann gilt:*

(i) $\mathcal{O}_X(U) \subseteq K(X)$ ist k-Unteralgebra.

(ii) $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$ ist Inklusion von Teilmengen des Funktionenkörpers $K(X)$.

(iii) Insbesondere gilt für $U, V \subseteq X$ offen:

$$\mathcal{O}_X(U \cup V) = \mathcal{O}_X(U) \cap \mathcal{O}_X(V).$$

Proof.

(ii) Sei $\mathcal{O}_X(X) \ni f : X \to k$. Dann ist $f^{-1}(0) \subseteq X$ abgeschlossen, da für $W \subseteq X$ affin-offen beliebig gilt, dass

$$f^{-1}(0) \cap W = V(f|_W).$$

Dazu macht man sich klar: „abgeschlossen“ ist eine lokale Eigenschaft, affin-offene W bilden eine Basis der Topologie.

$\Rightarrow \mathcal{O}_X(U) \hookrightarrow \mathcal{O}_X(V)$, $f \mapsto f|_V$ ist injektiv für $\emptyset \neq V \subseteq U \subseteq X$ offen.

$\Rightarrow V \subseteq f^{-1}(0)$
$\Rightarrow f^{-1}(0) = U$
$\Rightarrow f \equiv 0.$

(i) $U \supseteq W$ affin-offene Untervarietät.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X(W) \arrow[r, hook] & K(W) \text{ } k\text{-Algebren} \\ \mathcal{O}_X(U) \arrow[u, hook] & \end{tikzcd}$$

(iii) TODO. $\square$