

$$\text{Abbildung 1: } T_2^2 = T_1^2(T_1 - 1) = T_1^3 - T_1^2$$

1 Einführung

Algebraische Geometrie kann man verstehen, als das Studium von Systemen polynomialer Gleichungen (in mehreren Variablen). Damit ist die algebraische Geometrie eine Verallgemeinerung der **linearen Algebra**, also statt X auch X^n , und auch der **Algebra**, durch Polynome in *mehreren* Variablen.

Frage. Seien k ein (algebraisch abgeschlossener) Körper, und $f_1, \dots, f_m \in k[T_1, \dots, T_n]$ gegeben. Was sind die “geometrischen Eigenschaften” der Nullstellenmenge

$$V(f_1, \dots, f_m) := \{(t_1, \dots, t_n) \in k^n \mid f_i(t_1, \dots, t_n) = 0 \ \forall i\}$$

Beispiel 1. Sei $f = T_2^2 - T_1^2(T_1 - 1) \in k[T_1, T_2]$. Die Nullstellenmenge für $k = \mathbb{R}$ (*aber*: trügerisch, da \mathbb{R} nicht algebraisch abgeschlossen!) ist gegeben durch:

- Dimension 1
- $(0, 0)$ ist singulärer Punkt
- Alle anderen Punkte besitzen eine eindeutig bestimmte Tangente

Abbildung 2: Spitze und Doppelpunkt

Vergleiche mit dem **Satz über implizite Funktionen**: (Analysis, Differentialgeometrie)

$V(f)$ ist lokal diffeomorph zu \mathbb{R} (= reelle Gerade) im Punkt (x_1, x_2) genau dann, wenn die Jacobi-Matrix

$$\left(\frac{\partial f}{\partial T_1}, \frac{\partial f}{\partial T_2} \right) = (T_1(3T_1 - 2), 2T_2)$$

Rang 1 in (x_1, x_2) hat. Das ist äquivalent dazu, dass $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$. Dies lässt sich rein formal über beliebigen Grundkörpern **algebraisch** formulieren.

Methoden. GAGA - Géometrie algébrique, géometrie analytique (Serre)

Komplexe Geometrie (\mathbb{C}), Differentialgeometrie (\mathbb{R})	Algebraische Geometrie
Analytische Hilfsmittel	Kommutative Algebra