25 Koordinatenwechsen in $\mathbb{P}^n$

$A = (a_{ij}) \in GL_{n+1}(k)$ eine invertierbare $k^{n+1} \to k^{n+1}$ lineare Abbildung, die Ursprungsgeraden in solche überführt, bzw. die Äquivalenzrelation respektiert. Wir erhalten Abbildungen:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^n(k) &\xrightarrow{\phi_A} \mathbb{P}^n(k) \\ (x_0 : \ldots : x_n) &\longmapsto \left(\sum_{i=0}^{n} a_{0_i} x_i : \cdots : \sum_{i=0}^{n} a_{n_i} x_i \right), \end{aligned}$$

die nach Satz 56 ein Morphismus von Prävarietäten ist. Offensichtlich gilt für $A, B \in GL_{n+1}(k)$:

$$\varphi_{A \cdot B} = \varphi_A \circ \varphi_B$$

d.h. φ_A ist insbesondere wieder ein Isomorphismus, **der durch A bestimmte Koordinatenwechsel des** $\mathbb{P}^n(k)$. *Bezeichne* $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n(k))$ die Gruppe der Automorphismen von $\mathbb{P}^n(k)$. Es folgt:

$$\varphi_- : GL_{n+1}(k) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n(k))$$

ist ein Gruppenhomomorphismus mit

$$Z := \ker \varphi = \{\lambda E_{n+1},\ \lambda \in k^\times\}$$

die Untergruppe der Skalarmatrizen. *Später*:

$$PGL_{n+1}(k) := GL_{n+1}(k)/Z \twoheadrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n(k)), \quad Z \cong k^\times$$

die **projektive lineare Gruppe**.

Example. Sei $n = 1$. Es ist

$$\begin{aligned} PGL_2(\mathbb{C}) &= \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\ (z : w) & \mapsto (az + bw, cz + dw) \end{array} \right\} \\ &\leftrightarrow \text{Möbiustransformationen } z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \end{aligned}$$