# Algebraische Geometrie

Prof. Dr. Venjakob

Vorlesung 17, 19 Oktober 2018

## Literatur

- Görtz, Wedhorn. *Algebraic Geometry I*
- Hartshorne. *Algebraic Geometry*
- Shajarevich. *Basic Algebraic Geometry 1 u. 2*
- Grothendieck. *Eléments de géometrie algébrique, EGA I-IV*

### Kommutative Algebra

- Brüske, Ischebeck, Vogel. *Kommutative Algebra*
- Kunz. *Einführung in die kommutative Algebra und algebraische Geometrie*

## Inhaltsverzeichnis

**Teil I**

# Prä-Varietäten

Abbildung 1: $T_2^2 = T_1^2(T_1 - 1) = T_1^3 - T_1^2$

# 1 Einführung

**Algebraische Geometrie** kann man verstehen, als das Studium von Systemen polynomialer Gleichungen (in mehreren Variabelen). Damit ist die algebraische Geometrie eine Verallgemeinerung der **linearen Algebra**, also statt $X$ auch $X^n$, und auch der **Algebra**, durch Polynome in *mehreren* Variabelen.

**Frage.** *Sei $k$ ein (algebraisch abgeschlossener) Körper, und $f_1, \dots, f_m \in k[T_1, \dots, T_n]$ gegeben. Was sind die "geometrischen Eigenschaften" der Nullstellenmenge*

$$V(f_1, \dots, f_n) := \{(t_1, \dots, t_n) \in k^n \mid f_i(t_1, \dots, t_n) = 0 \ \forall i\}$$

**Beispiel 1.** Sei $f = T_2^2 - T_1^2(T_1 - 1) \in k[T_1, T_2]$. Die Nullstellenmenge für $k = \mathbb{R}$ (*aber:* trügerisch, da $\mathbb{R}$ nicht algebraisch abgeschlossen!) ist gegeben durch:

**Dimension 1.** Glatte und singulären Punkten: $(0, 0)$ singulär. Alle anderen Punkte verletzen eine eindeutig bestimmte Tangente.

Abbildung 2: **Spitze** und **Doppelpunkt**

Vergleiche den **Satz über implizite Funktionen**. (Analysis, Differentialgeometrie)

$V(f)$ ist lokal diffeomorph zu $\mathbb{R}$ (= reelle Gerade) im Punkt $(x_1, x_2)$ genau dann, wenn die Jacobi-Matrix

$$\left(\frac{\partial f}{\partial T_1}, \frac{\partial f}{\partial T_2}\right) = (T_1(3T_1 - 2),\ 2T_2)$$

hat Rang 1 in $(x_1, x_2)$. Das ist äquivalent dazu, dass $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$. Dies lässt sich rein formal über beliebigen Grundkörpern **algebraisch** formulieren.

**Methoden.** GAGA - Géometrie algébrique, géometrique analytique (Serre)

| | |
|---|---|
| Komplexe Geometrie ($\mathbb{C}$), Differentialgeometrie ($\mathbb{R}$) | Algebraische Geometrie |
| Analytische Hilfsmittel | Kommutative Algebra |

# 2 Die Zariski-Topologie

**Definition 2.** Sei $M \subset k[T_1, \ldots, T_n] =: k[\underline{T}]$ eine Teilmenge. Mit

$$V(M) = \{(t_1, \ldots, t_n) \in k \mid f(t_1, \ldots, t_n) = 0 \ \forall \boldsymbol{f} \in \boldsymbol{M}\}$$

bezeichnen wir die gemeinsame **Nullstellen-(Verschwindungs-)Menge** der Elemente aus $M$. (Manchmal auch $V(f_i, i \in I)$ statt $V(\{f_i, i \in I\})$.

## 2.1 Eigenschaften

- $V(M) = V(\mathfrak{A})$, wenn $\mathfrak{A} = \langle M \rangle$ das *von $M$ erzeugte Ideal* in $k[I]$ bezeichnet.
- Da $k[\underline{T}]$ noethersch (Hilbertscher Basissatz) ist, reichen stets endlich viele $f_1, \ldots, f_n \in M$:

$$V(M) = V(f_1, \ldots, f_n) \qquad \text{falls } \mathfrak{A} = \langle f_1, \ldots, f_n \rangle.$$

- $V(-)$ ist **inklusionsumkehrend**, $M' \subset M \Rightarrow V(M) \subseteq V(M')$.

**Satz 3.** *Die Mengen $V(\mathfrak{A})$, $\mathfrak{A} \subset k[\underline{T}]$ ein Ideal, sind die* ***abgeschlossenen*** *Mengen einer Topologie auf $k^n$, der sogenannten* ***Zariski-Topologie****.*

*(i)* $\emptyset = V((1))$, $k^n = V(0)$.

*(ii)* $\bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{A}_i) = V\left(\sum_{i \in I} \mathfrak{A}_i\right)$ *für beliebige Familien $(\mathfrak{A}_i)$ von Idealen.*

*(iii)* $V(\mathfrak{A}) \cup V(\mathfrak{B}) = V(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ *für $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subset k[\underline{T}]$ Ideale.*

*Beweis.* Übung / Algebra II.

$\square$

# 3 Affine algebraische Mengen

**Definition 4.**

- $\mathbb{A}^n(k)$, der affine Raum der Dimension $n$ (über $k$), bezeichne $k^n$ mit der Zariski-Topologie.
- Abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{A}^n(k)$ heißen affine abgeschlossene Mengen.

**Beispiel 5.** Da $k[T]$ ein Hauptidealring ist, sind die abgeschlossen Mengen in $\mathbb{A}^1(k)$: $\emptyset$, $\mathbb{A}^1$, Mengen der Form $V(f)$, $f \in k[T] \backslash \{k\}$ (endliche Teilmengen). Insbesondere sieht man, dass die Zariski-Topologie im Allgemeinen nicht Hausdorff ist.

**Beispiel 6.** $\mathbb{A}^2(k)$ hat zumindestens als abgeschlossene Mengen:

- $\emptyset$, $\mathbb{A}^2$;
- Einpunktige Mengen: $\{(x_1, x_2) = V(T_1 - x_1, T_2 - x_2)$;
- $V(f)$, $f \in k[T_1, T_2]$ irreduzibel.

Ferner alle endliche Vereneigungen dieser Liste. (Dies sind in der Tat alle, denn später sehen wir: “irreduzibele” abgeschlossene Mengen entsprechen den *Primidealen*, und $k[T_1, T_2]$ hat “Krull-Dimension 2”.)

# 4 Der Hilbertsche Nullstellensatz

**Satz 7.** *Sei $K$ ein (nicht notwendig algebraisch abgeschlossener) Körper, und $A$ eine endlich erzeugte $K$-Algebra. Dann ist $A$ Jacobson'sch, d.h. für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ gilt:*

$$\mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{p}} \mathfrak{m}, \quad \mathfrak{m} \text{ max. Ideale}$$

*Ist $\mathfrak{m} \subset A$ ein maximales Ideal, so ist die Körpererweiterung $K \subset A/\mathfrak{m}$ endlich.*

*Beweis.* Algebra II / kommutative Algebra. □

**Korollar 8.**

*(i) Sei $A$ eine e.e. (endlich erzeugte) $k$-Algebra ($k$ sei algebraisch abgeschlossen), $\mathfrak{m} \subseteq A$ ein maximales Ideal. Dann ist $A/\mathfrak{m} = k$.*

*(ii) Jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset k[\underline{T}]$ hat die Form $\mathfrak{m} = (T_1 - x_1, \ldots, T_n - x_n)$ mit $x_1, \ldots, x_n \in k$.*

*(iii) Für ein $k$-Ideal $\mathfrak{A} \subset k[\underline{T}]$ gilt:*

$$\operatorname{rad}(\mathfrak{A}) = \sqrt{\mathfrak{A}} \overset{(i)}{=} \bigcap_{\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{p} \subseteq k[\underline{T}]} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{m} \ max. \subseteq k[\underline{T}]} \mathfrak{m}$$

*Beweis.*

(i) $k \to A \to A/\mathfrak{m}$ ist Isomorphismus, da $k$ keine echte algebraische Körpererweiterung besteht.

(ii) Es ist

$$k[T_1, \ldots, T_n] \longrightarrow T/\mathfrak{m} = k$$
$$T_i \longmapsto x_i$$

Es folgt: $\mathfrak{m} = (T_1 - x_1, \ldots, T_n - x_n)$, da letztes bereits maximal. ($\supseteq$ klar.)

(iii) (i) Algebra II. (ii) Theorem.

□

# 5 Korrespondenz zwischen Radikalidealen und affinen algebraischen Mengen

Sei $V(\mathfrak{A}) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affin algebraische Menge, $\mathfrak{A} \subset k[\underline{T}]$. **Es gilt:**

$$V(\mathfrak{A}) = V(\operatorname{rad}\mathfrak{A})$$

mit $\operatorname{rad}\mathfrak{A} = \{f \in k[\underline{T}] \mid f^n \in \mathfrak{A} \text{ für } n > 0\}$, da

$$f^n(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0,$$

d.h. verschiedene Ideale können dieselbe algebraische Menge beschreiben.

**Definition 9.** Für eine Teilmenge $Z \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ bezeichne

$$I(Z) = \{f \in k[\underline{T}] \mid f(x) = 0 \ \forall x \in Z\}$$

das Ideal aller auf $Z$ verschwindenden Polynomfunktionen.

**Satz 10.**

*(i) Sei $\mathfrak{A} \subset k[\underline{T}]$ Ideal. Dann ist $I(V(\mathfrak{A})) = \operatorname{rad}(\mathfrak{A})$.*

*(ii) Sei $Z \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ Teilmenge. Dann ist $V(I(Z)) = \overline{Z}$, der Abschluss von $Z$.*

*Beweis.* Übungsblatt 2. □

$\mathfrak{A}$ heißt **Radikalideal**, wenn $\mathfrak{A} = \operatorname{rad}(\mathfrak{A})$, oder äquivalent wenn $k[\underline{T}]/\mathfrak{A}$ *reduziert* ist, d.h. keine nilpotente Elemente hat.

**Korollar 11.** *Wir erhalten eine 1-1 Korrespondenz*

$$\begin{aligned} \{\textit{abg. Mengen } \subseteq \mathbb{A}^n\} &\leftrightarrow \{\textit{Radikalideale } \mathfrak{A} \subset k[\underline{T}]\} \\ Z &\mapsto I(Z) \\ V(\mathfrak{A}) &\leftarrow\!\shortmid \mathfrak{A} \end{aligned}$$

*die sich zu einer 1-1 Korrespondenz*

$$\begin{aligned} \{\textit{Punkte in } \mathbb{A}^n\} &\leftrightarrow \{\textit{max. Ideale in } k[\underline{T}]\} \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \mathfrak{m}_x \begin{aligned}[t] &= I(\{x\}) \\ &= \ker(k[\underline{T}] \to k,\ T_i \mapsto x_i) \end{aligned} \end{aligned}$$

*einschränkt.*

# 6 Irreduzibele topologische Räume

Die folgenden topologische Begriffe sind nur interessant, da $\mathbb{A}^n(k)$ $(n > 0)$ kein Hausdorff'scher Raum ist.

**Definition 12.** Ein topologischer Raum $X$ heißt **irreduzibel**, wenn $X \neq \emptyset$ und $X$ sich *nicht* als Vereinigung zweier echter abgeschlossenen Teilmengen darstellen lässt, d.h

$$X = A_1 \cup A_2, \; A_i \text{ abg.} \quad \Rightarrow \quad A_1 = X \text{ oder } A_2 = X.$$

$Z \subset X$ heißt irreduzibel, falls $Z$ mit der induzierten Topologie irreduzibel ist.

**Satz 13.** *Für einen topologischen Raum $X$ sind äquivalent:*

*(i) $X$ ist irreduzibel.*

*(ii) Je zwei nichtleere offenen Teilmengen von $X$ haben nicht-leeren Durchschnitt.*

*(iii) Jede nichtleere offene Teilmenge $U \subset X$ ist dicht in $X$.*

*(iv) Jede nichtleere offene Teilmenge $U \subset X$ ist zusammenhängend.*

*(v) Jede nichtleere offene Teilmenge $U \subset X$ ist irreduzibel.*

*Beweis.*

- *(i)* $\Leftrightarrow$ *(ii)*

  Komplementsmengen.

- *(ii)* $\Leftrightarrow$ *(iii)*

  Es ist: $U \subset X$ dicht $\Leftrightarrow U \cap O \neq \emptyset$ für jedes offene $\emptyset \neq O \subset X$.

- *(iii)* $\Rightarrow$ *(iv)*

  Klar.

- *(iv)* $\Rightarrow$ *(iii)*

  Sei $\emptyset \neq U$ offen und zusammenhängend. Es folgt:

  $$U = U_1 \sqcup U_2, \qquad \emptyset \neq U_i \underset{\text{offen}}{\subset} U \underset{\text{offen}}{\subset} X$$

  Damit ist $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, ein Widerspruch zu (iii).

- *(v)* $\Rightarrow$ *(i)*

  Klar. $(U = X)$

- $(iii) \Rightarrow (v)$

  Sei $\emptyset \neq U \underset{\text{offen}}{\subset} X$. Ist $\emptyset \neq V \underset{\text{offen}}{\subset} U$, so ist $V \underset{\text{offen}}{\subseteq} X$. Es folgt: $V$ ist dicht in $X$ und irreduzibel in $U$. Mit $(iii) \Rightarrow (i)$ folgt, dass $U$ irreduzibel ist.

□

**Lemma 14.** *Eine Teilmenge $Y$ ist genau dann irreduzibel, wenn ihr Abschluss $\overline{Y}$ dies ist.*

*Beweis.* $Y$ irreduzibel.
$\Leftrightarrow \forall U, V \subset X$ offen mit $U \cap Y \neq \emptyset \neq V \cap Y$, gilt $Y \cap (U \cap V) \neq \emptyset$.
$\Leftrightarrow \overline{Y}$ irreduzibel. □

**Definition 15.** Eine maximale irreduzibele Teilmenge eines topologischen Raumes $X$ heißt **irreduzibele Komponente** von $X$.

*Bemerkung* 16.

(i) Jede irreduzibele Komponente ist abgeschlossen nach Lemma 14.

(ii) $X$ ist Vereinigung seiner irreduzibelen Komponenten, *denn*:

die Menge der irreduzibelen Teilmengen von $X$ ist **induktiv geordnet**: für jede aufsteigende Kette irreduzibeler Teilmengen ist die Vereinigung wieder irreduzibel. (Satz 13 (ii)). Mit dem **Lemma von Zorn** folgt: Jede irreduzibele Teilmenge ist in einer irreduzibelen Komponente enthalten. Damit ist jeder Punkt in einer irreduzibelen Komponente enthalten.

# 7 Irreduzibele affine algebraische Mengen

**Lemma 17.** *Eine abgeschlossene Teilmenge $Z \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ ist genau dann irreduzibel, wenn $I(Z)$ ein Primideal ist. Insbesondere ist $\mathbb{A}^n$ irreduzibel.*

*Beweis.* $Z$ irreduzibel ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}
&(Z = \underbrace{V(\mathfrak{A})}_{\bigcap V(f_i)} \cup \underbrace{V(\mathfrak{b})}_{\bigcap V(g_j)} \quad \Rightarrow \quad V(\mathfrak{A}) = Z \text{ oder } V(\mathfrak{b}) = Z). \\
&\Leftrightarrow \forall f, g \in k[\underline{T}] : \ V(fg) = V(f) \cup V(g) \supseteq Z : \ V(f) \supset Z \text{ oder } V(g) \supseteq Z. \\
(*) &\Leftrightarrow \forall f, g \in k[\underline{T}] : \ fg \in I(V(fg)) \subseteq I(Z) : \ f \in I(Z) \text{ oder } g \in I(Z). \\
&\Leftrightarrow I(Z) \text{ ist Primideal.}
\end{aligned}$$

(*): $V(I(Z)) = Z$, $I(V(\mathfrak{A})) = \mathrm{rad}(\mathfrak{A})$. □

*Bemerkung* 18. Die Korrespondenz aus Korollar 11 schränkt sich ein zu

$$\{\text{irred. abg. Teilmengen } \subseteq \mathbb{A}^n\} \overset{1:1}{\leftrightarrow} \{\text{Primideale in } k[\underline{T}]\}$$

# 8 Quasikompakte und noethersche topologische Räume

**Definition 19.** Ein topologischer Raum $X$ heißt **quasikompakt**, wenn jede offene Überdeckung von $X$ eine *endliche* Teilüberdeckung enthält. („quasi“ deutet an, dass $X$ in der Regel nicht Hausdorff'sch ist!). Er heißt **noethersch**, wenn jede absteigende Kette

$$X \supseteq Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \cdots$$

abgeschlossener Teilmengen von $X$ stationär wird ($\Leftrightarrow$ jede aufsteigende Kette offener Teilmengen wird stationär).

**Lemma 20.** *Sei $X$ ein noetherscher topologischer Raum. Dann gilt:*

*(i) Jede abgeschlossene Teilmenge $Z$ von $X$ ist noethersch.*

*(ii) Jede offene Teilmenge $U$ von $X$ ist quasikompakt.*

*(iii) Jeder abgeschlossene Teilraum $Z$ von $X$ besitzt nur endlich viele irreduzibele Komponenten.*

*Beweis.*

(i) Nach Definition, da abgeschlossene Mengen von $Z$ auch solche von $X$ sind.

(ii) $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ offen; $\mathbb{A}$ nicht quasikompakt. Dann ist $I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I$ endliche Teilmenge mit

$$V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \neq U \quad \text{für } V_j = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Widerspruch zu noethersch.

(iii) Es reicht zu zeigen: Jeder noethersche Raum ist Vereinigung endlich vieler irreduzibeler Teilmengen. Da $X$ noethersch ist, folgt mit dem *Lemma von Zorn* dass jede nicht-leere Menge von algebraischen Teilmengein in $X$ ein minimales Element besitzt.

$$\mathbb{A}: \quad \emptyset \neq \mathcal{M} := \{Z \subset X \text{ abg.} \mid Z \text{ ist } \textbf{nicht} \text{ endl. Ver. irred. Mengen}\}$$

$\Rightarrow \exists$ minimales Element, sagen wir $Z$, in $\mathcal{M}$.

$\Rightarrow Z$ ist nicht irreduzibel.

$\Rightarrow Z = Z_1 \cup Z_2$ mit $Z_1, Z_2 \subsetneq Z$ abgeschlossen.

$\Rightarrow$ ($Z$ minimal) $Z_1, Z_2 \notin \mathcal{M}$

$\Rightarrow Z \notin \mathcal{M}$. Widerspruch.

$\square$

**Satz 21.** *Jeder abgeschlossene Teilraum $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ ist noethersch.*

*Beweis.* Nach dem obigen Lemma ist nur zu zeigen, dass $\mathbb{A}^n(k)$ noethersch ist.

Absteigende Ketten abgeschlossener Teilmengen sind nach *Korollar 11* in 1-1 Korrespondenz mit aufsteigenden Ketten von (Radikal-)Ideale in $k[\underline{T}]$. Da $k[\underline{T}]$ nach dem Hilbertschen Basissatz noethersch ist, werden letzere Ketten stationär. □

**Korollar 22** (Primärzerlegung)**.** *Sei $\mathfrak{A} = \operatorname{rad}(\mathfrak{A}) \subseteq k[\underline{T}]$ ein Radikalideal. Dann gilt: $\mathfrak{A}$ ist Durchschnitt von endlich vielen Primidealen, die sich jeweils nicht enthalten; diese Darstellung ist eindeutig bis auf Reihenfolge.*

*Beweis.* $V(\mathfrak{A}) = \bigcup_{i=1}^n V(\mathfrak{b}_i)$, $\mathfrak{b}_i$ Primideal. Mit Satz 10 folgt:

$$\mathfrak{A} = \operatorname{rad}(\mathfrak{A}) = I(V(\mathfrak{A})) = \bigcap_{i=1}^{n} \underbrace{I(V(\mathfrak{b}_i))}_{\mathfrak{b}_i' \text{ max. Primideale (L. 17)}}$$

□

# 9 Morphismen von affinen algebraischen Mengen

**Definition 23.** Seien $X \subseteq \mathbb{A}^m(k)$, $Y \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine algebraische Mengen. Ein **Morphismus** $X \to Y$ affiner algebraischer Mengen ist eine Abbildung $f : X \to Y$ der zugrundeliegenden Mengen, sodass $f_1, \dots, f_n \in k[T_1, \dots, T_m]$ existieren, derart dass $\forall x \in X$ gilt:

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)).$$

*Bezeichne* dafür $\hom(X, Y)$ Menge der Morphismen $X \to Y$.

*Remark* 24. $f : X \to Y$ lässt sich immer fortsetzen zu einem Morphismus

$$f : \mathbb{A}^n(k) \to \mathbb{A}^m(k),$$

aber nicht eindeutig, es sei denn $X = \mathbb{A}^m(k)$.

**Komposition**

$$X \xrightarrow[f]{f_1,\dots,f_n \in k[T_1,\dots,T_m]} Y \xrightarrow[g]{g_1,\dots,g_r \in k[T_1',\dots,T_m']} Z$$

mit $X \subseteq \mathbb{A}^m(k)$, $Y \subseteq \mathbb{A}^n(k)$, $Z \subseteq \mathbb{A}^r(k)$. Es folgt:

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= (g_1(f_1(x), \dots, f_n(x)), \dots, g_r(f_1(x), \dots, f_n(x)) \\ &:= h_1(x), \dots, h_r(x) \end{aligned}$$

d.h. $g \circ f$ ist durch Polynome $h_i \in k[T_1, \dots, T_m]$ gegeben, d.h. $g \circ f$ ist wieder ein Morphismus affiner algebrasischer Mengen. Wir erhalten die **Kategorie affiner algebraischer Mengen**.

**Example 25.**

(i) Sei die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^1(k) &\to V(T_2 - T_1^2) \subseteq \mathbb{A}^2(k) \\ x &\mapsto (x, x^2). \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist sogar ein *Isomorphismus* affiner algebraischer Mengen, da die Umkehrabbildung

$$(x, y) \mapsto x$$

ebenfalls ein Morphismus ist.

(ii) Sei $\operatorname{char}(k) \neq 2$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^1(k) &\to V(T_2^2 - T_1^2(T_1+1)) \\ x &\mapsto (x^2-1, x(x^2-1)) \end{aligned}$$

ist ein Morphismus, aber *nicht* bijektiv, da $1, -1$ beide auf $(0,0)$ abgebildet werden.

# 10 Unzulänglichkeiten des Begriffs der affinen algebraischen Mengen

(i) Offene Teilmengen affiner algebraischer Mengen tragen nicht in natürlicher Weise die Struktur einer affinen algebraischen Menge.

(ii) Insbesondere können wir affine algebraische Mengen nicht entlang offener Teilmengen verkleben. (vgl. Mannigfaltigkeiten.)

(iii) Keine Unterscheidungsmöglichkeiten z.B. zwischen $\{(0,0)\}$, $V(T_1) \cap V(T_2)$ und $V(T_2) \cap V(T_1^2 - T_2) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$ , obwohl die "geometrische Situation" offensichtlich verschieden ist.

Um die Punkte 1 und 2 zu verbessern, wird im folgenden dadurch gelöst, dass wir zu "Räumen mit Funktionen" übergehen, und darauf verzichten, dass sich diese in einem affinen Raum $\mathbb{A}^n$ einbetten lassen.

Der Punkt 3 ist die Motivation dafür, später Schemata einzuführen. (subtiler)

**Affine algebraische Mengen als Räume von Funktionen**

# 11 Der affine Koordinatensatz

Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ abgeschlossen. Für den surjektiven (Def. von Morphismen) $k$-Algebren-Homomorphismus

$$\begin{aligned} k[I] &\xrightarrow{\varphi} \hom(X, \mathbb{A}^1(k)) \\ f &\mapsto (x \mapsto f(x)), \end{aligned}$$

wobei die Morphismen in folgende Weise eine $k$-Algebra bilden:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &:= f(x) + g(x) \\ (fg)(x) &:= f(x)g(x) \\ (\alpha f)(x) &:= \alpha f(x) \end{aligned}$$

mit $f, g \in \hom(X, \mathbb{A}^1(k))$, $\alpha \in k$. Es gilt:

$$\ker \varphi = I(X)$$

**Definition 26.** $\Gamma(X) := k[I]/I(X) \cong \hom(X, \mathbb{A}^1(k))$ heißt der **affine Koordinatenring** von $X$.

Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_x := &\ \ker(\Gamma(X) \twoheadrightarrow k,\ f \mapsto f(x)) \\ = &\ \{f \in \Gamma(X) \mid f(x) = 0\} \\ = &\ \text{Bild von } (T_1 - x_1, \ldots, T_n - x_n) \\ = &\ \ker(\Gamma(\mathbb{A}^n(k)) \twoheadrightarrow k) \end{aligned}$$

unter der Projektion $\pi : k[\underline{T}] = \Gamma(\mathbb{A}^n(k)) \twoheadrightarrow \Gamma(X)$. Es ist $\mathfrak{m}_x$ ein maximales Ideal von $\Gamma(X)$ mit $\Gamma(X)/\mathfrak{m}_x = k$. Für ein Ideal $\mathfrak{A} \subset \Gamma(X)$ setze

$$V(\mathfrak{A}) = \{x \in X \mid f(x) = 0\ \forall f \in \mathfrak{A}\} = V(\pi^{-1}(\mathfrak{A})) \cap X.$$

Dies sind genau die abgeschlossenen Mengen von $X$ als Teilraum in $\mathbb{A}^n(k)$ mit der induzierten Topologie, diese wird auch **Zariski-Topologie** genannt. Für $f \in \Gamma(X)$ setze:

$$D(f) := \{x \in X \mid f(x) \neq 0\} = X \backslash V(f).$$

**Lemma 27.** *Die offenen Mengen $D(f)$, $f \in \Gamma(X)$, bilden eine Basis der Topologie, d.h.*

$$\forall U \subset X \text{ offen } \exists f_i \in \Gamma(X),\ i \in I, \quad \text{mit } U = \bigcup_{i \in I} D(f_i)$$

*Beweis.* $U = X \backslash V(\mathfrak{A})$ für ein $\mathfrak{A} \subset \Gamma(X)$, $\mathfrak{A} = \langle f_1, \ldots, f_n \rangle$ . Wegen

$$V(\mathfrak{A}) = \bigcap_{i=1}^{n} V(f_i) \quad \Rightarrow \quad U = \bigcup_{i=1}^{n} D(f_i)$$

Es reichen also sogar endlich viele $f_i$! □

**Satz 28.** *Der Koordinatenring $\Gamma(X)$ einer affinen algebraischen Menge $X$ ist eine endlich erzeugte $k$-Algebra, die reduziert ist (d.h. keine nilpotenten Elemente $\neq 0$ enthält). Ferner ist $X$ irreduzibel genau dann, wenn $\Gamma(X)$ integer ist.*

*Beweis.* $k[\underline{T}] \twoheadrightarrow \Gamma(X)$ impliziert "endlich erzeugte $k$-Algebra". Es ist:

$$\Gamma(X) \text{ irreduzibel } \Leftrightarrow I(X) = \operatorname{rad} I(X).$$

Denn mit Satz 10.ii) und Korollar 11 folgt:

$$X = V(\mathfrak{A}) : \ I(X) = \operatorname{rad} \mathfrak{A}$$
$$\Rightarrow \operatorname{rad} I(X) = \operatorname{rad} \operatorname{rad} \mathfrak{A} = \operatorname{rad} \mathfrak{A} = I(X).$$

Mit Lemma 17 folgt: $X$ irreduzibel

$\Leftrightarrow I(X)$ Primideal.

$\Leftrightarrow \Gamma(X) = k[T]/T(X)$. □

# 12 Funktorielle Eigenschaften von $\Gamma(X)$

**Satz 29.** *Für einen Morphismus $X \xrightarrow{f} Y$ affiner algebraischer Mengen definiert*

$$\Gamma(f) : \hom(Y = \Gamma(Y), \mathbb{A}^1(k)) \to \hom(X = \Gamma(X), \mathbb{A}^1(k))$$
$$g \mapsto g \circ f$$

*ein Homomorphismus von $k$-Algebren. Der so definierte* kontravariante *Funktor*

$$\Gamma : \{\textit{affine algebraische Mengen}\} \to \{\textit{red. endl. erz. k-Alg.}\}$$

*liefert eine Kategorienäquivalenz, der durch Einschränkung eine Äquivalenz*

$$\Gamma : \{\textit{irred. aff. alg. Meng.}\} \to \{\textit{integere endl. erz. k-Alg.}\}$$

*induziert.*

*Beweis.* $Y \xrightarrow{g} \mathbb{A}^1(k) \in \Gamma(Y)$ ist Morphismus. Es folgt:

$$g \circ f : X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} \mathbb{A}^1(k)$$

ist ..., d.h. $\in \Gamma(X)$. $\Gamma(f) : \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$ ist ein $k$-Alg.-Hom. und Kompositions.... (nach Bemerkung 24) mit $\Gamma(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\Gamma(X)}$. Da ferner $\Gamma(f_1 \circ f_2) = \Gamma(f_2) \circ \Gamma(f_1)$ aus der Definition folgt, ist $\Gamma$ ein kontravarianter Funktor.

*Behauptung.* $\Gamma$ ist volltreu, d.h.

$$\Gamma : \hom(X, Y) \to \hom(\Gamma(Y), \Gamma(X))$$
$$f \mapsto \Gamma(f)$$

ist *bijektiv* für alle affinen algebraischen Mengen $X, Y$.

*Beweis.* Wir konstruieren eine Umkehrabbildung wie folgt: Zu $\varphi : \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$ für $X \subseteq \mathbb{A}^n$, $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ existiert:

$$\begin{tikzcd} k[T'_1, \ldots, T'_k] \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] \arrow[d] & k[T_1, \ldots, T_m] \arrow[d] \\ \Gamma(Y) \arrow[r] & \Gamma(X) \end{tikzcd}$$

kommutiert ($\tilde{\varphi}(T'_1) :=$ liften $\varphi(\pi(T'_i))$ in $k[\underline{T}]$). Definiere:

$$f : X \to Y$$
$$x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (\tilde{\varphi}(T'_1)(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \tilde{\varphi}(T'_n)(x_1, \ldots, x_n))$$

$\square$

*Behauptung.* $\Gamma$ ist essentiell surjektiv, d.h. zu jeder reduzierten endlich erzeugten $k$-Algebra $A$ existiert eine affine algebraische Menge $X$ mit $A \cong \Gamma(X)$.

*Beweis.* Da nach Voraussetzung $A \cong k[T]/\mathfrak{A}$ für Radikalideal $\mathfrak{A}$, können wir etwa $X := V(\mathfrak{A}) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ setzen. Der Rest folgt aus Satz 28. $\square$

$\square$

**Satz 30.** *Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus und $\Gamma(f) : \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$ der zugehörige Homomorphismus der Koordinatenringe. Dann gilt $\forall x \in X$: $\Gamma(f)^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{m}_f(x)$.*

*Beweis.* Setting:

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_{f(x)} &= \{g \mid g(f(x)) = 0\} \subset \hom(Y, \mathbb{A}^1) \\ &= \Gamma(Y) \xrightarrow{\Gamma(f)} \Gamma(X) \\ &= \hom(X, \mathbb{A}^1) \supset \{k \mid k(x)) = 0\} \\ g &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

Es ist:

$$\Gamma(f)^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \{g \in \Gamma(Y) \mid g \circ f(x) \neq 0\} = \mathfrak{m}_{f(x)},$$

da $\Gamma(f)(g)(x) = g(f(x))$. $\square$

# 13 Räume mit Funktionen

(Prototyp eines geometrischen Objektes, Spezialfall eines "geringten Raumes" später.) Sei $K$ ein nicht notwendig algebraisch abgeschlossenen Körper.

**Definition 31.**

(i) Ein **Raum mit Funktionen** besteht aus den folgenden Daten:

- ein topologischer Raum $X$;
- eine Familie von Unter-$K$-Algebren

$$\mathcal{O}(U) \subseteq \mathrm{Abb}(U, K), \quad \forall U \subseteq X \text{ offen } d.d$$

1. Sind $U' \subset U \subset X$ offen und $f \in \mathcal{O}(U)$ so ist $f|_{U'} \in \mathrm{Abb}(U', K)$ in $\mathcal{O}(U')$.
2. (**Verklebungsaxiom**) Sind $U_i \subset X$ offen, $i \in I$, ist $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, und sind $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$, $i \in I$ gegeben mit

$$f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j} \quad \forall i, j \in I$$

dann ist die eindeutige Abbildung

$$f : U \to K \text{ mit } f|_{U_i} = f_i$$

in $\mathcal{O}(U)$, bzw. $\exists_1 f \in \mathcal{O}(U)$ mit $f|_{U_i} = f_i$.

Bezeichne $\mathcal{O}$ oder $\mathcal{O}_X$ der oben genannten Familie $(X, \mathcal{O}_X)$, oder kurz bezeichne $X$ den Raum mit Funktionen.

(ii) Ein **Morphismus** $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ von Räumen von Funktionen ist eine stetige Abbildung $g : X \to Y$, so dass für alle $V \subseteq Y$ offen und $f \in \mathcal{O}_Y$ gilt:

$$f \circ g|_{g^{-1}(V)} : g^{-1}(V) \to K$$

liegt in $\mathcal{O}_X(g^{-1}(V))$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] & Y \\
g^1(V) \arrow[u, hook] \arrow[r, "g|"] \arrow[d, "f \circ g|_{f-1(V)}"'] & V \arrow[u, hook, "\text{offen}"'] \arrow[d, "f"] \\
K \arrow[r, equal] & K
\end{tikzcd}$$

Die Räume von Funktionen über $K$ bilden eine Kategorie.

**Definition 32** (offene Unterräume von Funktionen)**.** Für $(X, \mathcal{O}_X)$ und $U \subset X$ offen bezeichne $(U, \mathcal{O}_{X|_U})$ den Raum mit Funktionen gegeben durch den topologischen Raum $U$ mit Funktionen $\mathcal{O}_{X|_U}(V) := \mathcal{O}_X(V)$ für $V \underset{\text{offen}}{\subset} U \subset X$.

**Ab jetzt** betrachten wir Räume von Funktionen über $k$ algebraisch abgeschlossen.

# 14 Der Raum mit Funktionen zu einer affin algebraischen Menge

**Ziel.** $X \subseteq \mathbb{A}^n(k) \mapsto (X, \mathcal{O}_X)$ als irreduzibele affine algebraische Menge bzw. Zariski-Topologie. D.h. wir müssen Mengen von Funktionen $\mathcal{O}_X(U)$ auf $U$, $U \subset X$ offen, definieren. Diese werden als Teilmengen des Funktionenkörpers $K(X)$ definiert (dazu $X$ irreduzibel, später bei Schemata fällt diese Bedingung weg!)

**Definition 33.** $K(X) := \mathrm{Quot}(\Gamma(X))$ heißt **Funktionenkörper** von $X$. ($\Gamma(X)$ ist für $X$ irreduzibel nullteilerfrei.)

Elemente $\frac{f}{g} \in K(X)$, $f, g \in \Gamma(X) = \hom(X, \mathbb{A}^1(k))$, $g \neq 0$ lassen sich zumindest als Funktion auf der offenen Menge $\mathcal{D}(g) \subset X$ auffassen, wenn auch nicht i.A. auf ganz $X$.

**Lemma 34.** *Gilt für* $\frac{f_1}{g_1}, \frac{f_2}{g_2} \in K(X)$, $f_i, g_i \in \Gamma(X)$, *und einer offenen Teilmenge* $\emptyset \neq U \subset \mathcal{D}(g_1 g_2)$

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \qquad \forall x \in U,$$

*dann folgt* $\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2}$ *in* $K(X)$.

*Beweis.* Sei ohne Einschränkung der Allgemeinheit $g_1 = g_2 = g$. (Sonst Erweitern!)
$\Rightarrow (f_1 - f_2)(x) = 0 \ \forall x \in U$.
$\Rightarrow \emptyset \neq U \subset V(f_1 - f_2) \subset X$ dicht, d.h. $V(f_1 - f_2) = X$.
$f_1 - f_2 \in IV(f_1 - f_2) = I(X) \equiv (0)$ in $\Gamma(X)$
$\Rightarrow f_1 - f_2 = 0.$ $\square$

**Definition 35.** Sei $X$ eine irreduzibele affine algebraische Menge, $U \subset X$ offen. Sei $\Gamma(X)_{\mathfrak{m}_x}$ Lokalisierung von $\Gamma(X)$ bzgl. das maximale Ideal $\mathfrak{m}_x$ in $x \in X$.

$$\mathcal{O}_X(U) := \bigcap_{x \in U} \Gamma(X)_{\mathfrak{m}_x} \subset K(X)$$

d.h. für jedes $x \in U$ lässt sich $f \in \mathcal{O}_X(U)$ schreiben als $\frac{h}{g}$ mit $g(x) \neq 0$.

Wenn $f \in \Gamma(X)$ bezeichne $\Gamma(X)_f$ die Lokalisierung von $\Gamma(X)$ bzgl. der multiplikativ abgeschlossenen Teilmenge $\{1, f, f^2, \ldots, f^n \ldots\}$. Dann lässt sich

$$\Gamma(X)_{\mathfrak{m}_x} = \bigcup_{f \in \Gamma(X) \setminus \mathfrak{m}_x} \Gamma(X)_f \subset K(X)$$

schreiben. "$\supset$" klar, "$\subset$" $\frac{g}{f}$ mit $f(x) \neq 0$ d.h. $f \notin \mathfrak{m}_x \Rightarrow \frac{g}{f} \in \Gamma(X)_f$.

**Es gilt:**

(i) Für $V \subset U \subset X$ offen kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X(V) \arrow[r, hook] & \mathrm{Abb}(V,k) \\ \mathcal{O}_X(U) \arrow[r, hook] \arrow[u, hook] & \mathrm{Abb}(U,k) \arrow[u, "\text{Einschränkungsabb.}"'] \end{tikzcd}$$

mit $\mathcal{O}_X(U) \subset \mathcal{O}_X(V)$ nach Definition.

(ii) $\mathcal{O}_X(U) \to \mathrm{Abb}(U,k)$, $f \mapsto (x \mapsto f(x) := \frac{g(x)}{f(x)} \in k)$ ist injektiv (Lemma 34) und wohldefiniert (kürzen/Erweitern), wobei $g, h \in \Gamma(X)$ mit $h \notin \mathfrak{m}_x$ mit $f = \frac{g}{h}$ nach Definition von $\mathcal{O}_X(U)$ existiert.

(iii) **Verklebungseigenschaft.** Sei $U = \bigcup_{i \in I} U_i$. Nach Definition ist

$$\mathcal{O}_X(U) = \bigcap_i \mathcal{O}_X(U_i) \subset K(X)$$
$$\ni f : U \to k \qquad \ni f_i : U_i \to k$$

[Diagramm fehlt]. $\Rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ ist Raum mit Funktionen, **der zur irreduziblen affin algebraische Menge gehörige Raum von Funktionen.**

**Satz 36** (orig. 33)**.** *Für $(X, \mathcal{O}_X)$ zu $X$ wie oben und $f \in \Gamma(X)$ gilt:*

$$\mathcal{O}_X(D(f)) = \Gamma(X)_f,$$

*insbesondere $\mathcal{O}_X(X) = \Gamma(X)$.*

*Beweis.* $\Gamma(X) \subset \mathcal{D}(f)$ klar, da $f(x) \neq 0\ \forall x \in \mathcal{D}(f)$ bzw. $f \in P(X) \setminus \mathfrak{m}_x$.

Sei nun $g$ in $\mathcal{O}_X(\mathcal{D}(f))$ gegeben, $(*)$ und $\mathfrak{A} := \{h \in \Gamma(X) \mid hg \in \Gamma(X)\} \subset \Gamma(X)$ Ideal.

Dazu: $g \in \Gamma(X)_g$

$\Leftrightarrow g = \frac{k}{g^n}$ für ein $n$ und $k \in \Gamma(X)$

$\Leftrightarrow f^n \in \mathfrak{A}$ für ein $n$.

d.h. zu zeigen: $f \in \mathrm{rad}(\mathfrak{A}) = IV(\mathfrak{A})$ (Hilbertsche Nullstellensatz)

$\Leftrightarrow f(x) = 0\ \forall x \in V(\mathfrak{A})$

Ist dazu $x \in X$ mit $f(x) \neq 0$, wo $x \in \mathcal{D}(f)$, so existiert nach Voraussetzung $(*)$ $f_1, f_2 \in \Gamma(X)$, $f_2 \notin \mathfrak{m}_x$ mit $g = \frac{f_1}{f_2}$

$\Rightarrow f_2 \in \mathfrak{A}$. Da $f_2(x) \neq 0$:

$\Rightarrow x \notin V(\mathfrak{A})$. $\square$

*Bemerkung* 37 (orig. 34).

(i) Im allgemeinen existieren für $f \in \mathcal{O}_x(U)$ **nicht** $g, h \in \Gamma(X)$ mit $f = \frac{g}{h}$ und $h(x) \neq 0 \; \forall x \in U$.

(ii) **Alternative Definition von $\mathcal{O}_X$, I.**

$$\mathcal{O}_X(\mathcal{D}(f)) := \Gamma(X)_f, \quad \forall f \in \Gamma(X).$$

Da $\mathcal{D}(f)$ Basis der Topologie ist, kann es höchstens einen Raum mit Funktionen geben mit dieser Eigenschaft, es bleibt die Existenz zu zeigen.

(iii) **Alternative Definition von $\mathcal{O}_X$, II.**

Direkt von einer integeren endlich erzeugten $k$-Algebra $A$ ausgehend (die $X$ bis auf Isomorphie festlegt), aber ohne "Koordinaten" zu wählen.

$$X := \{\mathfrak{m} \subseteq A \mid \text{max. Ideale}\}$$

Die **abgeschlossen Mengen** sind gegeben durch:

$$V(\mathfrak{A}) := \{\mathfrak{m} \subseteq A \text{ max.} \mid \mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{A}\}, \quad \mathfrak{A} \subset A \text{ Ideal.}$$

$\mathcal{O}_X(U) := \bigcap_{\mathfrak{m} \in U} A_{\mathfrak{m}} \subset \mathrm{Quot}(A)$ für $U \subset X$ offen (vgl. später Schemata).

# 15 Funktorialität der Konstruktion

**Satz 38** (orig. 35). *Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen irreduzibler affiner algebraischen Mengen. Es sind äquivalent:*

*(i) $f$ ist ein Morphismus affiner algebraischen Mengen.*

*(ii) $\forall g \in \Gamma(Y)$ gilt $g \circ f \in \Gamma(X)$.*

*(iii) $f$ ist ein von Räumen von Funktionen, d.h. für alle $U \subseteq Y$ offen und alle $g \in \mathcal{O}_Y(U)$ gilt $g \circ f \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$.*

*Beweis.*

- *(i)* $\Leftrightarrow$ *(ii)*

  Satz 29.

- *(iii)* $\Rightarrow$ *(ii)*

  $U := Y$ + Satz 33.

- *(ii)* $\Rightarrow$ *(iii)*

  Betrachte $\varphi : \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$, $h \mapsto h \circ f$. Aufgrund des Verklebungsaxioms reicht es, die Bedingung für $U$ von der Form $\mathcal{D}(g)$ zu zeigen: Es gilt:

  $$f^{-1}(\mathcal{D}(g)) = \{x \in X \mid \underbrace{g(f(x))}_{=\varphi(g)(x)} \neq 0\} = \mathcal{D}(\varphi(g))$$

  Deswegen induziert $\varphi$:

  $$\begin{array}{rcl} H & \longmapsto & H \circ f \\ \mathcal{O}_Y(\mathcal{D}(g)) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(D(\varphi(g))) \\ \shortparallel & & \\ \Gamma(Y)_g & \longrightarrow & \Gamma(X)_{\varphi(g)} \\ \dfrac{h}{g} & \longmapsto & \dfrac{h \circ f}{(g \circ f)^n} \end{array}$$

  mit $h \circ f \in \Gamma(X)$ nach Voraussetzung und $\varphi(g) = g \circ f \in \Gamma(X)$ nach Voraussetzung.

Insgesamt haben wir: $\square$

**Theorem 39** (orig. 36). *Die obige Konstruktion definiert einen volltreuen Funktor*

$$\{\textit{irred. aff. abg. Mengen über } k\} \to \{\textit{Räume mit Funktionen über } k\}$$

# Prävarietäten

**Ziel.** Klasse der affinen abgeschlossenen Mengen, aufgefasst als Räume mit Funktionen durch Verkleben vergrößern.

$(X, \mathcal{O}_X)$ heißt **zusammenhängend**, falls $X$ als topologischer Raum zusammenhängend ist.

## 16 Definition von Prävarietäten

**Definition 40** (orig. 37)**.** Eine **affine Varietät** ist ein Raum mit Funktionen, der isomorph ist zu den Raum mit Funktionen einer irreduziblen affinen algebraischen Menge.

**Definition 41** (orig. 38)**.** Eine **Prävarietät** ist ein zusammenhängender Raum mit Funktionen $(X, \mathcal{O}_X)$, für den eine *endliche* Überdeckung $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$ existiert, d.d. $\forall i = 1, \ldots, n$ $(U_i, \mathcal{O}_{X|_{U_i}})$ eine affine Varietät ist.

Ein **Morphismus von Prävarietäten** ist ein Morphismus der entsprechenden Räume mit Funktionen. Insbesondere sind ... affine Varietäten Prävarietäten!

Ein Morphismus von Prävarietäten ist ein Morphismus der entsprechenden Räume mit Funktionen. Insbesondere sind also affine Varietäten Prävarietäten! Später sehen wir: Varietät = „separierte Prävarietät“. Affine Varietäten sind stets „separiert“, dafür braucht man wieder von „affinen Prävarietäten“ zu reden. Ist $X$ eine affine Varietät, schreiben wir oft $\Gamma(X)$ für $\mathcal{O}_x(X)$ (vgl. Satz 33).

Unter einer **offenen affinen Überdeckung** einer Prävarietät $X$ verstehen wir eine Famile von affinen Unterräumen mit Funktionen $U_i \subseteq X$, $i \in I$ die affine Varietäten sind, und so das $X = \bigcup U_i$.

# 17 Vergleich mit differenzierbaren/komplexen Mannigfaltigkeiten

**Differential/Komplexe Geometrie** Mannigfaltigkeiten werden via Kartenabbildungen mit differenzierbaren/holomorphen Übergangsabbildungen definiert (hier problematisch, da offene Teile affiner algebraischer Mengen i.A. keine solche Struktur wider besitzen.) Jedoch:

$$\begin{aligned} \{\text{diff. Mfgkt.}\} &\longrightarrow \{\text{Räume mit Fkt.}/\mathbb{R}\} \\ X &\longmapsto (X, \mathcal{O}_X) \\ &\qquad \mathcal{O}_X(U) := C^\infty(U, \mathbb{R}),\ U \subseteq X \text{ offen} \end{aligned}$$

ist ein volltreuer Funktor. Daher kann man differenzierbare Mannigfaltigkeiten auch als diejenigen Räume mit Funktionen über $\mathbb{R}$ definieren, für die $X$ Hausdorff ist, und so dass eine offene Überdeckung durch solche Räume mit Funktionen über $\mathbb{R}$ existiert, die in obiger Weise offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ zugeordnet sind. (Analog bei komplexen Mannigfaltigkeiten.)

# 18 Topologische Eigenschaften von Prävarietäten

**Lemma 42.** *Für einen topologischen Raum $X$ und $U \subseteq X$ offen haben wir eine Bijektion*

$$\begin{aligned} \{Y \subseteq U \text{ irred. abg.}\} &\longleftrightarrow \{Z \subseteq X \text{ irred. abg. mit } Z \cap U \neq \emptyset\} \\ Y &\longmapsto \overline{Y} \text{ (Abschluss in } X) \\ Z \cap U &\longleftarrow\!\shortmid Z \end{aligned}$$

*Proof.* Lemma 14: $Y \subseteq X$ irreduzibel $\Leftrightarrow \overline{Y} \subseteq X$ irreduzibel.

$Y \subseteq U$ abgeschlossen $\Leftrightarrow \exists A \subset X$ abgecshlossen: $Y = U \cap A$.

$\Rightarrow Y \subseteq \overline{Y} \subseteq A \Rightarrow Y = U \cap \overline{Y}$

$Y$ irreduzibel in $U \Rightarrow Y$ irreduzibel in $X$

$\Rightarrow$ (14) $\overline{Y}$ irreduzibel

$\Rightarrow Y \mapsto \overline{Y} \mapsto \overline{Y} \cap U = Y$. ✓

$\emptyset \neq \underbrace{Z \cap U}_{\text{irred. (S. 13v.)}} \underset{\text{offen}}{\subset} Z$ damit dicht da $Z$ irreduzibel (Satz 13.ii)

$\Rightarrow$ Abbildung $\leftarrow$ wohldefiniert

$\Rightarrow \overline{Z \cap U} = Z$ □

**Proposition 43.** *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ eine Prävarietät.*

*$\Rightarrow X$ noethersch (insbesondere quasikompakt) und irreduzibel.*

*Proof.* Sei $X = \bigcup_{i=1}^n$ endliche eff. aff. Überdeckung und $X \supseteq Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \cdots$ eine absteigende Kette abgeschlossener Teilmengen.

$\Rightarrow U_i \cap Z_1 \supseteq U_i \cap Z_2 \supseteq \cdots$

$\Rightarrow$ abgeschlossene Teilmengen in $U_i$

$\Rightarrow \forall i\ \exists n_i$: $U_i \cap Z_{n_i} = U_i \cap Z_{i+m}$. Setzen von $n := \max n_i$ liefert:

$\forall i = 1, \ldots, n\ \forall m \geq n$: $U_i \cap Z_m = U_i \cap Z_{m+1}$

$\Rightarrow (Z_i)$ wird stationär da $Z_m = \bigcup U_i \cap Z_m$.

$\Rightarrow X$ noethersch.

Zeige, $X$ ist irreduzibel:

Sei $X = X_1 \cup \cdots \cup X_n$ die Zerlegung in irreduzibele Komponenten.

$\mathbb{A}\ n \geq 2$

$\Rightarrow \exists i_0 \in \{2, \ldots, n\}$: $X_1 \cap X_{i_0} \neq \emptyset$. (Andernfalls gilt: $X = X_1 \sqcup \underbrace{X \backslash X_1}_{=X_2 \cup \cdots \cup X_n \text{ abg.}}$. Widerspruch zu $X$ zusammenhängend.)

Sei ohne Einschränkung $i_0 = 2$. Sei $x \in X_1 \cap X_2$, $x \in U \subset X$ offene affine Überdeckung (d.h. affine Varietät).

$U$ irreduzibel $\Rightarrow \overline{U}$ (Abschluss in $X$) $\subseteq X_j$ für ein $j \in \{1, \ldots, n\}$

**Jedoch**: $x \in X_i \cap U \subseteq U$ irreduzibel ist $\underbrace{\overline{X_i \cap U}}_{\subset \overline{U} \subset X_i} = X_i$, $i = 1, 2$

$\Rightarrow X_1, X_2 \subseteq X_j$. Widerspruch zu maximale Komponente. $\square$

# 19 Offene Untervarietäten

„Offene Teilmengen von affinen Varietäten (abgeschlossene beliebige Prävarietäten) sind wieder Prävarietäten“ (aber i.A. nicht affin!)

**Lemma 44** (orig. 41)**.** *Sei $X$ affine Varietät, $f \in \mathcal{O}_X(X)$, $\mathcal{D}(f) \subseteq X$. Die Lokalisierung von $\Gamma(X) = \mathcal{O}_X(X)$ in $f$,*

$$\Gamma(X)_f = \Gamma(X)[T]/(Tf-1)$$

*ist eine integere endlich erzeugte $k$-Algebra. Dabei $(Y, \mathcal{O}_Y)$ bezeichnet die zugehörige Varietät. Es folgt:*

$$(D(f), \mathcal{O}_{X|_{D(f)}}) \cong (Y, \mathcal{O}_Y)$$

*als Räume mit Funktionen, d.h. $(D(f), \mathcal{O}_{X|_{D(f)}})$ ist affine Varietät.*

*Proof.* $\mathcal{O}_X(\mathcal{D}(f)) = \mathcal{O}_X(X)_f$ muss affiner Koordinatenring von $(\mathcal{D}(f), \mathcal{O}_{X|_{\mathcal{D}(f)}})$ sein, wenn letzterer Raum von Funktionen affin ist. $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ korrespondiert zu dem Radikalideal:

$$\mathfrak{A} = I(X) \subseteq k[T_1, \ldots, T_n] \ \subset \ \mathfrak{A}' = (\mathfrak{A}, fT_{n+1} - 1) \subseteq k[T_1, \ldots, T_{n+1}]$$

mit Koordinatenringen:

$$\begin{aligned} \Gamma(X) &= k[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{A} \\ \Gamma(Y) &= \Gamma(X)_f = (k[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{A})[T_{n+1}]/(T_{n+1}f - 1) \\ &= k[T_1, \ldots, T_{n+1}]/\mathfrak{A}' \end{aligned}$$

Für $Y = V(\mathfrak{A}') \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(k)$ induziert die Abbildung

$$\begin{array}{ccccc} Y \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(k) & \quad & (x_1, \ldots, x_{n+1}) & \quad & T_i \\ \downarrow & & \downarrow & & \uparrow \\ X \subseteq \mathbb{A}^n(k) & & (x_1, \ldots, x_n) & & T_i \end{array}$$

eine Bijektion $Y \xrightarrow{j} \mathcal{D}_X(f)$ mit Umkehrabbildung $(x_0, \ldots, x_n, \frac{1}{f(x_0, \ldots, x_n})) \leftarrow\!\mathrel{\vert} (x_0, \ldots, x_n)$

*Claim.* $j$ ist Isomorphismus von Räumen mit Funktionen:

(i) $j$ ist *stetig* (als Einschränkung stetiger Funktionen) ✓

(ii) $j$ ist *offen*: $g \in \Gamma(X)$, $\Gamma(Y) = \Gamma(X)_f$, $\frac{g}{f^n} \in \Gamma(X)_f$,

$$\begin{aligned} j\left(D_Y\left(\frac{g}{f^n}\right)\right) &= j\left(\mathcal{D}_Y(gf)\right) & \qquad f \text{ Einheit} \\ &= \mathcal{D}_X(gf) \text{ offen} \end{aligned}$$

$\Rightarrow j$ Homömorphismus.

(iii) $j$ induziert $\forall g \in \Gamma(X)$ Isomorphismen:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X(\mathcal{D}(fg)) &\longrightarrow \Gamma(Y)_g \\ s &\longmapsto s \circ j \end{aligned}$$

mit $\mathcal{O}_X(\mathcal{D}(fg)) = \Gamma(X)_{fg} = (\Gamma(X)_f)_g = \Gamma(Y)_g$. Mit dem Verklebungsaxiom folgt: $j$ ist Morphismus von Raum mit Funktionen.

$\square$

**Proposition 45** (orig. 42)**.** *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ Prävarietät, $\emptyset \neq U \subseteq X$ offen. Dann ist $(U, \mathcal{O}_{X|_U})$ eine Prävarietät und $U \hookrightarrow X$ ist Morphismus von Prävarietäten.*

*Proof.* $X$ ist irreduzibel, also folgt mit Satz 13, dass $U$ zusammenhängend ist. Nach Voraussetzung ist $X = \bigcup X_i$ eine affine offene Überdeckung. Es folgt:

$$U = \bigcup_i (\underbrace{X_i \cap U}_{\text{offen in } X_i}) = \bigcup_{i,j} \mathcal{D}_{X_i}(f_{i_j})$$

und $\mathcal{D}_{X_i}(f_{i_j})$ ist eine affine Varietät nach Lemma 44. Da $X$ noethersch ist, folgt mit Lemma 20, dass $U$ quasikompakt ist.

$\Rightarrow$ Es reicht eine endliche Überdeckung.

$\Rightarrow U$ Prävarietät. ✓

Die Abbildung $\begin{matrix} U & \overset{i}{\hookrightarrow} & X \\ U \cap V & \subseteq & V \end{matrix}$ ist stetig. (Klar.) Für $f \in \mathcal{O}_X(V)$ gilt mit dem Einschränkungsaxiom

$$\mathcal{O}_{X|_U}(U \cap V) = \mathcal{O}_X(U \cap V) \ni f \circ i = f|_{U \cap V}$$

Also ist $i$ Morphismus von Prävarietäten. $\square$

Die offenen affinen Teilmengen einer Prävarietät $X$ ($\hat{=} U \subset X$ offen und $(U, \mathcal{O}_{X|_U})$ affine Varietät) bilden eine Basis der Topologie von $X$, da $X$ durch offene affine Untervarietäten überdeckt wird und letzere diese Eigenschaft haben nach Lemma 44.

# 20 Funktionenkörper einer Prävarietät

**Definition 46** (orig. 43)**.** Für eine Prävarietät $X$ sind die rationalen Funktionenkörper aller nicht-leeren affinen offenen Teilmengen in natürlicher Weise zu einander isomorph. Dieser Körper nennen wir den **rationalen Funktionenkörper** von $X$: $K(X)$.

*Proof.* $\emptyset \neq U$, $V \subset X$ affine offene Untervarietät. Da $X$ irreduzibel ist, gilt nach *Satz 40*:

$$\emptyset \neq U \cap V \subset U \text{ offen.}$$

Nach Definition von $\mathcal{O}_X$ ist

$$\mathcal{O}_X(U) \subseteq \mathcal{O}_X(U \cap V) \subset K(U) = \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_X(U)).$$

Das impliziert $\mathrm{Quot}(\mathcal{O}_X(U \cap V)) = K(U)$. Aus Symmetriegründen ist aber $K(V) = \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_X(U \cap V))$. □

*Remark* 47 (orig. 44). Das Bild $K(\ )$ des Funktionenkörpers ist **nicht** funktoriell! Für $X \xrightarrow{f} Y$ Morphismus affiner Varietäten ist die Abbildung auf den Koordinatenringen $\Gamma(Y) \to \Gamma(X)$ i.A. **nicht** injektiv, also gibt es kein $K(Y) \hookrightarrow K(X)$.

*Jedoch*: Eine Isomorphie $X \xrightarrow{\sim} Y$ induziert $K(Y) \xrightarrow{\sim} K(X)$. Allgemeiner sei $X \to Y$ Morphismus mit Bild $\subset Y$ offen ($\Rightarrow$ dicht. Später $X \to Y$ **dominant**, d.h. Bild $\subset Y$ dicht.) induziert in funktioreller Weise eine Abbildung $K(Y) \hookrightarrow K(X)$.

**Proposition 48** (orig. 45)**.** *Sei $X$ eine Prävarietät, $V \subseteq U \subseteq X$ offen. Es folgt:*

*$\mathcal{O}_X(U) \subset K(X)$ $k$-Unteralgebra.*

*$\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$ ist Inklusion von Teilmengen des Funktionenkörpers $K(X)$.*

*Insbesondere gilt für $U, V \subset X$ offen:*

$$\mathcal{O}_X(U \cup V) = \mathcal{O}_X(U) \cap \mathcal{O}_X(V).$$

*Proof.*

2. Sei $\mathcal{O}(X) \ni f : X \to k$. Dann ist $f^{-1}(0) \subseteq X$ abgeschlossen, da für $W \subseteq X$ offen affin beliebig gilt:

   $$f^{-1}(0) \cap W = V(f_{|W}).$$

   Dazu macht man sich klar: „abgeschlossen“ ist eine lokale Eigenschaft, und die $W$ bilden eine Basis der Topologie.

   $\Rightarrow \mathcal{O}(U) \hookrightarrow \mathcal{O}(V)$, $f \mapsto \sigma$ injektiv für $\emptyset \neq V \subseteq U \subset X$ offen.

   $\Rightarrow V \subset f^{-1}(0)$

$\Rightarrow f^{-1}(0) = U$

$\Rightarrow f \equiv 0.$

1. (i) $U \supset W$ offen affine Varietät. $\Rightarrow$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(W) & \hookrightarrow & K(W) \ k\text{-Varietät} \\ \uparrow & & \\ \mathcal{O}(U) & & \end{array}$$

(i) Verklebungsaxiom:

$\square$

## 21 Abgeschlossene Unterprävarietäten

Sei $X$ Prävarietät, $Z \subseteq X$ abgeschlossen irreduzibel.

**Ziel.** $(Z, \mathcal{O}'_Z)$ Raum von Funktionen erklären. Definiere dazu:

$$\mathcal{O}'_Z := \{f \in \mathrm{Abb}(U,k) \mid \forall x \in U\ \exists x \in V \subseteq X \text{ offen},\ g \in \mathcal{O}_X(V)\}$$

mit $f_{|U\cap V} = g_{|U\cap V}$ für $U \subset Z$ offen. Damit ist $(Z, \mathcal{O}'_Z)$ Raum von Funktionen (klar!) mit $\mathcal{O}'_X = \mathcal{O}_X$.

**Lemma 49** (orig. 46)**.** *$X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ irreduzible affine algebraische Menge, und $Z \subset X$ sei ein irreduzibler abgeschlossener Teil. Dann ist $(Z, \mathcal{O}_Z) = (Z, \mathcal{O}'_Z)$.*

*Bezeichne ab jetzt stets $\mathcal{O}_Z$ für $\mathcal{O}_{Z'}$.*

*Proof.* $Z \subseteq X$ ist in beiden Fällen mit der Teilraumtopologie ausgestattet! Ferner wissen wir, dass der Morphismus $Z \hookrightarrow X$ affiner algebraischer Mengen einen Morphismus $(Z, \mathcal{O}_Z) \to (X, \mathcal{O}_X)$ von Prävarietäten induziert. Nach Definition von $\mathcal{O}'$ folgt dann:

$$\mathcal{O}'_Z \subseteq \mathcal{O}_Z(U) \quad \text{für } U \subseteq Z \text{ offen.}$$

Dies gilt da:

$$\begin{aligned} &x \in V_x \subseteq X \cup V \\ &f_{|U\cap V_x} = g_{x|U\cap V_x} \in \mathcal{O}_Z(U \cap V_x) \end{aligned}$$

mit $g \in \mathcal{O}_X(V_x) \Rightarrow$ (Morphismus!) $g_{|Zcap V_x} \in \mathcal{O}_Z(Z \cap V_x)$

Verklebungsaxiom $\Rightarrow f \in \mathcal{O}_Z(U)$.

Sei $f \in \mathcal{O}_Z(U)$ und $x \in U$ beliebig. Es folgt: $\exists h \in \Gamma(Z)$ mit $x \in \mathcal{D}(h) \subseteq U$ und

$$f_{|\mathcal{D}(h)} = \frac{g}{h^n} \in \Gamma(Z)_h = \mathcal{O}_Z(\mathcal{D}(h))$$

für $h \geq 0$, $g \in \Gamma(Z)$ geeignet. Lifte $g, h \in \Gamma(Z) \twoheadleftarrow \Gamma(X)$ zu $\overline{g}, \overline{h} \in \Gamma(X)$ und setze $V := D(\overline{h}) \subseteq X$.

$\Rightarrow x \in V$, $\frac{\overline{g}}{\overline{h}^n} \in \mathcal{O}_X(\mathcal{D}(\overline{h}))$ und $f_{|U\cap V} = \frac{\overline{g}}{\overline{h}^n}|_{U\cap V}$.

$\Rightarrow f \in \mathcal{O}'_Z(U)$. □

**Corollary 50** (orig. 47)**.** *Wenn $X$ eine Prävarietät ist, und $Z \subseteq X$ irreduzibel abgeschlossen. Dann ist $(Z, \mathcal{O}_Z)$ ebenfalls eine Prävarietät.*

*Proof.* Es ist $X = \bigcup_{\text{endl.}} X_i$ endliche affine offene Überdeckung. Damit ist

$$Z = \bigcup (Z \cap X_i) := \bigcup Z_i$$

mit $(Z_i, \mathcal{O}_{Z_i})$ affine Varietät nach Lemma 46. $\square$

# Beispiele (Projektiver Raum und projektive Varietäten)

## 22 Homogene Polynome

**Definition 51** (orig. 48)**.** Ein Polynom $f \in k[X_0, \dots, X_n]$ heißt **homogen vom Grad** $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, wenn $f$ die Summe von Monomen von Grad $d$ ist. (Insbesondere ist für jedes $d$ das Nullpolynom homogen von Grad $d$.)

*Bezeichne* $k[X_0, \dots, X_n]_d$ der Untervektorraum der Polynome vom Grad $d$.

*Remark* 52 (orig. 49). Da $\#k$ unendlich ist, ist $f$ homogen vom Grad $d$.

$\Leftrightarrow f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, \dots, x_n)\ \forall x_0, \dots, x_n \in k,\ \lambda \in k^\times$.

Es gilt: $k[X_0, \dots X_n] = \bigoplus_{d \geq 0} k[X_0, \dots, X_n]_d$.

**Lemma 53** (orig. 50)**.** *Für $i \in \{0, \dots, n\}$ und $d \geq 0$ haben wir bijektive $k$-lineare Abbildungen*

$$k[X_0, \dots, X_n]_d \longrightarrow \textit{Polynome in } k[T_0, \dots, \hat{T}_i, \dots, T_n] \textit{ v. Grad } \leq d$$

$$f \xmapsto{\Phi_i^d} f(T_0, \dots, \underbrace{1}_{i}, \dots, T_n)$$

$$X_i^d g\left(\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{\hat{X}_i}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}\right) \xleftarrow{\Psi_i^d} g$$

***Dehomogenisierung*** *bzw.* ***Homogenisierung.***

*Proof.* Es reicht, $\Psi_i^d \circ \Phi_i^d = \mathrm{id}$, $\Phi_i^d \circ \Psi_i^d = \mathrm{id}$ auf Monomen nachzurechnen, da alle Abbildungen $k$-linear sind. □

Oft ist es nützlich,

$$k[T_0, \dots, \hat{T}_i, \dots, T_n] \text{ mit}$$

mit $k\left[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{\hat{X}_i}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}\right] \underset{\text{Unterring}}{\subset} k(X_0, \dots, X_n)$.

# 23 Definition des projektiven Raumes

Sei $X_1 = X_2 = \mathbb{A}^1$, $\tilde{U}_1 \subseteq X_1 = \tilde{U}_2 \subseteq X_2 = \mathbb{A}\backslash\{0\}$.

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1 &\xrightarrow{\sim} \tilde{U}_2 \\ x &\longmapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Verkleben von $X_1$ und $X_2$ entlang $\tilde{U}_1$ und $\tilde{U}_2$

$$\mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 \cup \{\infty\} = U_1 \cup U_2.$$

Allgemein:

$$\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i = \mathbb{A}^n \cup \mathbb{P}^{n-1} = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{A}^1 \sqcup \mathbb{A}^0$$

**Idee**: $\mathbb{P}^2 \supseteq \mathbb{A}^2$: Zwei verschiedene Geraden in $\mathbb{P}^2$ schneiden sich genau in einem Punkt. **Als Menge**:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^n(k) :&= \{\text{Ursprungsgeraden in } k^{n+1}\} = \{\text{1-dim. } k\text{-UVR}\} \\ &= (k^{n+1}\backslash\{0\})/k^\times \end{aligned}$$

Repräsentanten dieser Klasse entsprechen:

$$\langle(x_0, \ldots x_n)\rangle_{k\text{-linear}} \longleftarrow\!\!\!\shortmid\ (x_0 : \ldots : x_n)$$

*Äquivalenzrelation*:

$$(x_0, \ldots, x_n) \sim (x_0', \ldots, x_n') \Leftrightarrow \exists \lambda \in k^\times \text{ mit } x_i = \lambda x_i' \ \forall i.$$

**Bezeichne** Klassen $(x_0 : \ldots : x_n)$, $x_i$ **homogene** Koordinaten auf $\mathbb{P}^n$

$$U_i := \{(x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^n(k),\ 0 \leq i \leq n$$

ist wohldefiniert $\Leftrightarrow x_i = 1$.

$$\mathbb{P}^n(k) = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$$

Einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} U_i &\xrightarrow[\chi_i]{\cong} \mathbb{A}^n(k) \\ (x_0 : \ldots : x_n) &\longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{\hat{x}_i}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right) \\ (t_0 : \cdots t_{i-1} : 1 : t_{i+1} : \cdots t_n) &\longleftarrow (t_0, \ldots, \hat{t}_i, \ldots, t_n) \end{aligned}$$

$U \subseteq \mathbb{P}^n$ ist genau dann offen, wenn $\kappa_i(U \cap U_i) \subseteq \mathbb{A}^n$ offen ist. Beachte: der Durchschnitt

$$U_i \cap U_j = \mathcal{D}(T_j) \subseteq U_i \text{ offen},\ i \neq j$$

wenn auf $U_i \cong \mathbb{A}^n$ die Koordinaten $T_0, \ldots, \hat{T}_i, \ldots, T_n$ verwendet werden. Damit wird $\mathbb{P}^n(k)$ zu einem topologischen Raum, der durch die $U_i$, $0 \leq i \leq n$, offen überdeckt wird.

## 23.1 Reguläre Funktionen

Sei $U \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ eine beliebige offene Teilmenge. Die regularären Funktionen auf $U$ sind

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U) = \{f \in \mathrm{Abb}(U, k) \mid f|_{U \cap U_i} \in \mathcal{O}_{U_i}(U \cap U_i)\} \qquad \forall i \in \{0, \ldots, n\}$$

Dabei ist implizit verstanden, dass wir via $\kappa_i$ die $U_i$ als Raum mit Funktionen auffassen. Dabei erhalten wir insgesamt:

$$\mathbb{P}^n(k) = (\mathbb{P}^n(k), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$$

als Raum mit Funktionen.

**Proposition 54** (orig 51)**.** *Für $U \subseteq \mathbb{P}^n$ offen gilt: $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U) = \{f : U \to k \mid \forall x \in U\colon$ existiert $x \in V \subseteq U$ offen und $g, h \in k[X_0, \ldots, X_n]$ homogen vom selben Grad, d.d. $\forall v \in V\colon h(v) \neq 0$ und $f(v) = \frac{g(v)}{h(v)}.\}$*

Wohldefiniertheit: Sei $V = (x_0 : \ldots : x_n)$.

$$f(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = \frac{g(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n)}{h(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n)} = \frac{\lambda^d g(x_0, \ldots, x_n)}{\lambda^d h(x_0, \ldots, x_n)} = f(x_0, \ldots, x_n)$$

*Proof.*

„$\subseteq$“ Sei $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U)$. Dann ist $f|_{U \cap U_i} \in \mathcal{O}_{U_i}(U \cap U_i)$. Es folgt:

$$f = \frac{\tilde{g}}{\tilde{h}},\ \tilde{g}, \tilde{h} \in k[T_0, \ldots, \hat{T}_i, \ldots, T_n]$$

Definiere $d := \max\{\deg(\tilde{g}), \deg(\tilde{h})\}$. Homogenisiere:

$$g := \psi_i^d(\tilde{g}),\ h := \psi_i^d(\tilde{h})$$

$\Rightarrow f = \frac{g}{h}$ lokal.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\tilde{g}}{\tilde{h}}(\chi_i(x)) \\ f((x_0 : \cdots : x_n)) &= \frac{\tilde{g}\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\hat{x}_i}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)}{\tilde{h}\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\hat{x}_i}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)} \\ &= \frac{x_i^d \tilde{g}()}{x_i^d \tilde{h}()} \\ &= \frac{\psi_i^d(\tilde{g})()}{\psi_i^d(\tilde{h})()} = \frac{g}{h}((x_0 : \cdots : x_n)) \end{aligned}$$

„$\supseteq$“ Sei $f$ in der rechten Menge: fixiere $i \in \{0, \dots, n\}$ lokal auf $U \cap U_i$ mit $f$ nach Voraussetzung in der Form $\frac{g}{h}$, $g, h \in k[X_0, \dots, X_n]_d$, $d$ geignet. Definiere:

$$\tilde{g}_i := \frac{g}{X_i^d},\ \tilde{h} := \frac{h}{X_i^d} \in k\left[\frac{X_0}{X_i}, \dots \frac{\hat{X}_i}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}\right]$$

$\Rightarrow f$ ist lokal der Form: $\frac{\tilde{g}}{\tilde{h}}$, $\tilde{g}$,$\tilde{h} \in k[T_0, \dots, \hat{T}_i, \dots T_n]$.

$\Rightarrow f|_{U \cap U_i} \in \mathcal{O}_{U_i}(U \cap U_i)$.

$\square$

**Corollary 55** (orig. 52)**.** *Für $i \in \{0, \dots, n\}$ induziert*

$$U : \xrightarrow[\cong]{\chi_i} \mathbb{A}^n(k)$$

*einen Isomorphismus*

$$(U_i, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n|_{U_i}}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{A}^n(k)$$

*von Räumen mit Funktionen. Insbesondere ist $\mathbb{P}^n(k)$ eine Prävarietät.*

*Proof.* Zu zeigen: $\forall U \subset U_i$ offen gilt:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(U) = \mathcal{O}_{U_i}(U) = \{f : U \to k \mid f \in \mathcal{O}_{U_i}(U)\}$$

d.h. auf der rechten Seite muss die Bedingung nur für das fixierte $i$ überprüft werden. Dies folgt aus den Beweis des Satzes. $\square$

Damit identifizieren die Funktionenkörper

$$K(\mathbb{P}^n(k)) = K(U_i) = k\left(\frac{X_0}{X_i}, \ldots, \frac{X_n}{X_i}\right)$$

**Proposition 56** (orig. 53)**.** $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(\mathbb{P}^n(k)) = k$. *Insbesondere ist $\mathbb{P}^n$ für $n \geq 1$* ***keine*** *affine Varietät. (Da der $k$-Algebra $k$ ja $\mathbb{A}^0(k) = \{pt\}$ als affine Varietät entspricht.)*

*Proof.* $k \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(\mathbb{P}^n(k))$ konstante Funktionen klar. Nach Satz 45 (iii) gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mathbb{P}^n) &= \bigcap_{i=0}^{n} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U_i) \subset K(\mathbb{P}^n(k)) \\ &= \bigcap_{i=0}^{n} k[t_0, \ldots, \hat{t}_i, \ldots, t_n] = k \end{aligned}$$

□

# 24 Projektive Varietäten

**Definition 57** (orig. 54)**.** Abgeschlossene Unterprävarietäten eines projektiven Raumes $\mathbb{P}^n(k)$ heißen **projektive Varietäten**.

Vorsicht: für $x = (x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n$, $f \in k[X_0, \ldots, X_n]$ ist $f(x_1, \ldots, x_n)$ *nicht* wohldefiniert, da von Repräsentaten abhängig, d.h. $f$ kann *nicht* als Funktion auf $\mathbb{P}^n$ aufgefasst werden. Für *homogene* Polynome $f_1, \ldots, f_n \in k[X_0, \ldots X_n]$ (nicht notwendig vom selben Grad) können wir demnoch die Verschwindungsmengen definieren:

$$V_+(f_1, \ldots, f_n) = \{(x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid f_j(x_0, \ldots, x_n) = 0 \ \forall j\}$$

Da $V_+(f_1, \ldots, f_n) \cap U_i = V(\Phi_i(f_1), \ldots, \Phi_i(f_m))$ ist $V_+(f_1, \ldots, f_m)$ abgeschlossen in $\mathbb{P}^n$. Ist $V_+(f_1, \ldots, f_n)$ irreduzibel, so erhalten wir eine projektive Varietät. In der Tat entstehen alle projektiven Varietäten auf diese Weise.

**Proposition 58** (orig. 55)**.** *Sei $Z \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ eine projektive Varietät. Dann existieren homogene Polynome $f_1, \ldots, f_n \in k[X_0, \ldots, X_n]$, so dass*

$$Z = V_+(f_1, \ldots, f_n)$$

*gilt.*

*Proof.* Betrachte:

$f|_{f^{-1}(U_i)} : f^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i$ ist Morphismus von Prävarietäten. Dann ist $f$ selber ein Morphismus von Prävarietäten.

$$\begin{aligned} \overline{Y} &:= Y \cup \{0\} \text{ Abschluss von } Y \text{ in } \mathbb{A}^{n+1}(k) \\ \mathfrak{A} &:= I(\overline{Y}) \subseteq k[X_0, \ldots, X_n] \end{aligned}$$

Behauptung: $\mathfrak{A}$ wird von homogenen Polynomen erzeugt. *Denn:* für $g \in \mathfrak{A}$, $g = \sum_d g_d$ Zerlegung in homogene Bestandteile vom Grad $d$. $\overline{Y}$ ist Vereinigung von Ursprungsgeraden im $k^{n+1}$, d.h. $\forall \lambda \in k^\times$ gilt:

$$g(x_0, \ldots, x_n) = 0 \ \Leftrightarrow \ g(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = 0$$

Beweis durch Widerspruch. Nicht alle $g_d$ liegen in $\mathfrak{A}$.
$\Rightarrow \exists (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^{n+1}(k)$, so dass $g(x_0, \ldots, x_n) = 0$, aber $g_{d_0}(x_0, \ldots, x_n) \neq 0$.
$\Rightarrow 0 \not\equiv \sum_d g_d(x_0, \ldots, x_n) T^d \in k[T]$

$\Rightarrow (\exists \lambda \in k^\times)\ 0 \neq \sum_d g_d(x_0, \dots, x_n)\lambda^d = \sum_d g_d(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = g(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = 0$. Widerspruch.

$\Rightarrow \mathfrak{A} = (f_1, \dots, f_m)$, $f_j$ homogen.

$\Rightarrow Z = V_+(f_1, \dots, f_m)$.

$$\begin{aligned} Z \ni (x_0 : \dots : x_n) &\Leftrightarrow (\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) \in \overline{Y}\ \forall \lambda \in k^\times \text{ und } \neq 0 \\ &\Leftrightarrow f_i(x_0, \dots, x_n) = 0\ \forall 1 \leq i \leq n,\ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{P}^n \end{aligned}$$

---

$\square$

Zu Bemerkung 49

Nach Satz 51 und Definition von $\mathcal{O}'_Z$ folgt: Ist $X$ eine projektive Varietät und $U \subset X$ offen, so können wir

$\mathcal{O}_X(U) = \{f : U \to k \mid \forall x \in U\ \exists x \in V \underset{\text{offen}}{\subset} U,\ g, h \in k[X_0, \dots, X_n]$ homogen vom gleichen Grad mit $h(v) \neq 0,\ f(v) = \frac{g(v)}{h(v)},\ \forall v \in V\}$. (*)

Insbesondere gilt:

**Proposition 59** (orig. 56)**.** *Seien $V \subseteq \mathbb{P}^m(k)$, $W \subset \mathbb{P}^n(k)$ projektive Varietäten und*

$$V \subseteq \mathbb{P}^m(k) \xrightarrow{\phi} W \subseteq \mathbb{P}^n(k)$$

*eine Abbildung. Dann ist $\phi$ eine Morphismus genau dann, wenn es zu jedem $x \in V$ eine offene Menge $x \in U_x \subset V$ und homogene Polynome $f_0, \dots, f_n \subseteq k[X_0, \dots, X_m]$ vom selben Grad existiert mit*

$$\phi(y) = (f_0(y), \dots, f_n(y)) \quad \forall y \in U_x$$

*Proof.*

- "$\Rightarrow$", Übung.
- "$\Leftarrow$".

  (i) $\phi$ stetig: Sei $Z \subseteq W$ abgeschlossen. Ohne Einschränkung $Z = V_+(g) \cap W$ für ein homogenes Polynom $g$. Dann berechnet sich das Urbild

  $$\phi^{-1}(Z) = V_+(g \circ \phi) \cap V.$$

  Auf $U_x$, $x \in V$, ist $g \circ \phi$ als homogenes Polynom in $X_0, \dots, X_n$ gegeben.

  $\Rightarrow V(g \circ \phi) \cap U_x = \phi^{-1}(Z) \cap U_x$ abgeschlossen in $U_x$ für alle $x$.

  $\Rightarrow \phi^{-1}(Z) \subseteq V$ abgeschlossen.

(ii) Zu zeigen: $\forall W' \subseteq W$ offen, $g \in \mathcal{O}_W(W')$ ist $g \circ \phi \in \mathcal{O}_V(\phi^{-1}(W'))$.

$\Rightarrow$ (*) Es ex. eine offene Umgebung $W_y$ in $W'$ mit $g = \frac{h}{q}$ auf $W_y$, $h, q$ homogen vom Grad $d$.

$\Rightarrow \phi_{|U_x \cap \phi^{-1}(W_y) := \tilde{U}_x}$ ist auch von dieser Gestalt.

$\Rightarrow$ (*) $\frac{h(f_0,\ldots,f_n)}{q(f_0,\ldots,f_n)} = g \circ \phi_{|\tilde{U}_x} \in \mathcal{O}_V(\tilde{U}_x)$.

$\Rightarrow$ (Verkleben) $g \circ \phi \in \mathcal{O}_V(\phi^{-1}(V))$.

$\square$

# 25 Koordinatenwechsen in $\mathbb{P}^n$

$A = (a_{ij}) \in GL_{n+1}(k)$ eine invertierbare $k^{n+1} \to k^{n+1}$ lineare Abbildung, die Ursprungsgeraden in solche überführt, bzw. die Äquivalenzrelation respektiert. Wir erhalten Abbildungen:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^n(k) &\xrightarrow{\phi_A} \mathbb{P}^n(k) \\ (x_0 : \ldots : x_n) &\longmapsto \left( \sum_{i=0}^n a_{0_i} x_i : \cdots : \sum_{i=0}^n a_{n_i} x_i \right), \end{aligned}$$

die nach Satz 56 ein Morphismus von Prävarietäten ist. Offensichtlich gilt für $A, B \in GL_{n+1}(k)$:

$$\varphi_{A \cdot B} = \varphi_A \circ \varphi_B$$

d.h. $\varphi_A$ ist insbesondere wieder ein Isomorphismus, **der durch $A$ bestimmte Koordinatenwechsel des** $\mathbb{P}^n(k)$. *Bezeichne* $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n(k))$ die Gruppe der Automorphismen von $\mathbb{P}^n(k)$. Es folgt:

$$\varphi_- : GL_{n+1}(k) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n(k))$$

ist ein Gruppenhomomorphismus mit

$$Z := \ker \varphi = \{\lambda E_{n+1},\ \lambda \in k^\times\}$$

die Untergruppe der Skalarmatrizen. *Später*:

$$PGL_{n+1}(k) := GL_{n+1}(k)/Z \twoheadrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n(k)), \quad Z \cong k^\times$$

die **projektive lineare Gruppe**.

**Example.** Sei $n = 1$. Es ist

$$\begin{aligned} PGL_2(\mathbb{C}) &= \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\ (z : w) & \mapsto (az + bw, cz + dw) \end{array} \right\} \\ &\leftrightarrow \text{Möbiustransformationen } z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \end{aligned}$$

# 26 Lineare Unterräume von $\mathbb{P}^n$

Sei $\varphi : k^{n+1} \to k^{n+1}$ ein *injektiver* Homomorphismus von $k$-Vektorräumen. $\varphi$ induziert eine injektive Abbildung:

$$\imath : \mathbb{P}^n(k) \to \mathbb{P}^n(k)$$

der ein Morphismus von Prävarietäten ist nach Satz 56. Das Bild von $\imath$ ist eine abgeschlossene Untervarietät. Ist $A = (a_{ij}) \in M_{l\times(n+1)}$ mit $\mathrm{im}(\varphi) = \ker(k^{n+1} \xrightarrow{A} k)$ und

$$f_i := \sum_{j=0}^{n} a_{ij} X_j \in k[X_0, \ldots, X_n],$$

so identifiziert $\imath$ $\mathbb{P}^n(k)$ mit $V_+(f_1, \ldots, f_l)$. (Die Abbildung $\imath : \mathbb{P}^n(k) \to V_+(f_1, \ldots, f_l)$ ist ein Isomorphismus von Prävarietäten, mit Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : \varphi(k^{n+1}) \to k^{n+1}$ induziert.)

**Example.** $\mathbb{P}^m = V_+(X_{m+1}, \ldots, X_n) \subset \mathbb{P}^n$. Solche Unterräume heißen **lineare Unterräume** (der Dimension $m$).

$m = 0$: Punkte
$m = 1$: Geraden
$m = 2$: Ebenen
$m = n - 1$: Hyperebenen in $\mathbb{P}^n(k)$.

- Zu zwei Punkten $p \neq q \in \mathbb{P}^n(k)$ existiert genau eine gerade $\overline{pq}$ in $\mathbb{P}^n(k)$, die $p$ und $q$ enthält, da zu zwei verschiedenen Ursprungsgeraden im $k^{n+1}$ genau eine Ebene (in $k^{n+1}$) existiert, die beide Geraden enthält.

- Je zwei verschiedene Geraden in $\mathbb{P}^2(k)$ schneiden sich in genau einem Punkt, da Geraden in $\mathbb{P}^2$ Ebenen in $k^3$ entsprechen, und zwei Ebenen sich dort genau in einer Geraden, d.h. einem Punkt des $\mathbb{P}^2$, schneiden. Dimensionsformel (lineare Algebra):

$$\dim E_1 \cap E_2 = -\underbrace{\dim E_1 + E_2}_{3} + \underbrace{\dim E_1}_{2} - \underbrace{\dim E_2}_{2} = 1$$

*Später*: Verallgemeinerung: Satz von Bézout für allgemeine Unterprävarietäten $V_+(f)$.

# 27 Kegel

Sei $H \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ Hyperebene, $p \in \mathbb{P}^n(k)\backslash H$, $X \subseteq H$ abgeschlossene Unterprävarietät.

$$\overline{X,p} := \bigcup_{q \in X} \overline{qp}$$

heißt **Kegel von $X$ über** $p$, es handelt sich um einen abgeschlossenen Untervarietät von $\mathbb{P}^n(k)$. Ohne Einschränkung:$H = V_+(X_n)$, $p = (0 : \cdots : 1)$ (nach Koordinatenwechsel: $H \cong k^n \oplus p \cong k\} = k^{n+1}$.) Für

$$X = V_+(f_1, \ldots, f_m) \subseteq \mathbb{P}^{n-1}(k) = H, \quad f_i \in k[X_0, \ldots, X_{n-1}]$$
$$\Rightarrow X, p = V_+(\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_m) \subseteq \mathbb{P}^n(k), \quad \tilde{f}_i \in k[X_0, \ldots, X_n]$$

Verallgemeinerung. Sei $\mathbb{P}^n(k) \cong \Lambda \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ linearer Unterraum, $\psi \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ komplementärer linearer Unterraum, d.h. $\Lambda \cap \psi = \emptyset$ und $\mathbb{P}^n(k)$ ist der bekannte lineare Unterraum von $\mathbb{P}^n(k)$, der $\Lambda$ und $\psi$ enthält. $X \subseteq \psi$ abgeschlossene Unterprävarietät.

**Kegel von** $X$ **über** $\Lambda$: $\overline{X, \Lambda} = \bigcup_{q \in X} \overline{q, \Lambda}$, wobei der von $q$ und $\Lambda$ aufgespannte lineare Unterraum $\overline{q, \Lambda}$ der kleinste Unterraum sei, der $q$ und $\Lambda$ enthält.

# 28 Quadriken

Sei $\mathrm{char}(k) \neq 2$ in diesem Abschnitt.

**Definition 60** (orig. 57)**.** Eine abgeschlossene Unterprävarietät $Q \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ von der Form $V_+(q)$, $q \in k[X_0, \ldots, X_n]_2 \backslash \{0\}$ heißt **Quadrik**.

$$Q = V_+(q)$$

Zur quadratischen Form $q$ gehört eine Bilinearform $\beta$ auf $k^{n+1}$,

$$\beta(v, w) := \frac{1}{2}(q(v + w) - q(v) - q(w)), \quad v, w \in k^{n+1}$$

Es gibt eine Basis von $k^{n+1}$, sodass die Strukturmatrix $B$ von $\beta$ die Gestalt

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

hat, d.h. Koordinatenwechsel zur Basiswechselmatrix liefert einen Isomorphismus

$$Q \xrightarrow{\cong} V_+(X_0^2 + \cdots + X_{r-1}^2), \quad r = \operatorname{rg} B$$

**Lemma 61** (orig. 58)**.**

**Proposition 62** (orig. 59)**.** *Ist $r \neq s$, so sind $V_+(T_0^2 + \cdots + T_{r-1}^2)$ und $V_+(T_0^2 + \cdots + T_{s-1}^2)$ nicht isomorph.*

*Proof.* (später: Es gibt keinen Koordinatenwechsel von $\mathbb{P}^n(k)$, der beide Mengen identifiziert, damit auch kein Automorphismus in $\mathbb{P}^n(k)$.)

**Definition 63.** Eine Quadrik $Q \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ mit $Q \cong V_+(T_0^2 + \cdots + T_{r-1}^2)$, $r \geq 1$, habe die Dimension $n - 1$ und Rang $r$. (nach Satz eindeutig!)

□

# Index