13 Räume mit Funktionen

(Prototyp eines geometrischen Objektes, Spezialfall eines "geringten Raumes" später.) Sei K ein nicht notwendig algebraisch abgeschlossenen Körper.

Definition 31.

(i) Ein **Raum mit Funktionen** besteht aus den folgenden Daten:

- ein topologischer Raum X;
- eine Familie von Unter-K-Algebren

$$\mathcal{O}(U) \subseteq \mathrm{Abb}(U, K), \quad \forall U \subseteq X \text{ offen } d.d$$

1. Sind $U' \subset U \subset X$ offen und $f \in \mathcal{O}(U)$ so ist $f|_{U'} \in \mathrm{Abb}(U', K)$ in $\mathcal{O}(U')$.
2. (**Verklebungsaxiom**) Sind $U_i \subset X$ offen, $i \in I$, ist $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, und sind $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$, $i \in I$ gegeben mit

$$f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j} \quad \forall i, j \in I$$

dann ist die eindeutige Abbildung

$$f : U \to K \text{ mit } f|_{U_i} = f_i$$

in $\mathcal{O}(U)$, bzw. $\exists_1 f \in \mathcal{O}(U)$ mit $f|_{U_i} = f_i$.

Bezeichne $\mathcal{O}$ oder $\mathcal{O}_X$ der oben genannten Familie $(X, \mathcal{O}_X)$, oder kurz bezeichne X den Raum mit Funktionen.

(ii) Ein **Morphismus** $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ von Räumen von Funktionen ist eine stetige Abbildung $g : X \to Y$, so dass für alle $V \subseteq Y$ offen und $f \in \mathcal{O}_Y$ gilt:

$$f \circ g|_{g^{-1}(V)} : g^{-1}(V) \to K$$

liegt in $\mathcal{O}_X(g^{-1}(V))$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] & Y \\
g^1(V) \arrow[u, hook] \arrow[r, "g|"] \arrow[d, "f \circ g|_{f^{-1}(V)}"'] & V \arrow[u, hook, "\text{offen}"'] \arrow[d, "f"] \\
K \arrow[r, equal] & K
\end{tikzcd}$$

Die Räume von Funktionen über K bilden eine Kategorie.

Definition 32 (offene Unterräume von Funktionen)**.** Für $(X, \mathcal{O}_X)$ und $U \subset X$ offen bezeichne $(U, \mathcal{O}_{X|_U})$ den Raum mit Funktionen gegeben durch den topologischen Raum U mit Funktionen $\mathcal{O}_{X|_U}(V) := \mathcal{O}_X(V)$ für $V \underset{\text{offen}}{\subset} U \subset X$.

Ab jetzt betrachten wir Räume von Funktionen über k algebraisch abgeschlossen.