14 Der Raum mit Funktionen zu einer affin-algebraischen Menge

Ziel. Wir wollen jeder irreduziblen affin algebraischen Menge $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ einen Raum mit Funktionen $(X, \mathcal{O}_X)$ zuordnen. D.h. wir müssen Mengen von Funktionen $\mathcal{O}_X(U) \leq \mathrm{Abb}(U, k)$, $U \subseteq X$ offen, definieren. Diese werden als Teilmengen des Funktionenkörpers $K(X)$ definiert (dazu X irreduzibel, später bei Schemata fällt diese Bedingung weg!)

Definition 33. Für eine irreduzible, affin-algebraische Menge X heißt $K(X) := \mathrm{Quot}(\Gamma(X))$ **Funktionenkörper** von X.

Elemente $\frac{f}{g} \in K(X)$, $f, g \in \Gamma(X) = \hom(X, \mathbb{A}^1(k))$, $g \neq 0$ lassen sich zumindest als Funktion auf der offenen Menge $D(g) \subseteq X$ auffassen, wenn auch i.A. nicht auf ganz X.

Lemma 34. *Gilt für* $\frac{f_1}{g_1}, \frac{f_2}{g_2} \in K(X)$, $f_i, g_i \in \Gamma(X)$, *und einer offenen Teilmenge* $\emptyset \neq U \subseteq D(g_1 g_2)$

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \qquad \forall x \in U,$$

dann folgt $\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2}$ *in* $K(X)$.

Beweis. Sei ohne Einschränkung der Allgemeinheit $g_1 = g_2 = g$. (Sonst Erweitern!)
$\Rightarrow (f_1 - f_2)(x) = 0 \ \forall x \in U$.
$\Rightarrow \emptyset \neq U \subseteq V(f_1 - f_2) \subseteq X$ dicht, d.h. $V(f_1 - f_2) = X$.
$f_1 - f_2 \in I()V(f_1 - f_2)) = I(X) \equiv (0)$ in $\Gamma(X)$
$\Rightarrow f_1 - f_2 = 0$. □

Definition 35. Sei X eine irreduzible affin-algebraische Menge, $U \subseteq X$ offen. Für $x \in X$ bezeichne $\Gamma(X)_{\mathfrak{m}_x}$ die Lokalisierung von $\Gamma(X)$ an der multiplikativ abgeschlossenen Menge $S := \Gamma(X) \setminus \mathfrak{m}_x$.

$$\mathcal{O}_X(U) := \bigcap_{x \in U} \Gamma(X)_{\mathfrak{m}_x} \subseteq K(X)$$

d.h. für jedes $x \in U$ lässt sich $f \in \mathcal{O}_X(U)$ schreiben als $\frac{h}{g} \in K(X)$ mit $g(x) \neq 0$.

Für $f \in \Gamma(X)$ bezeichne $\Gamma(X)_f$ die Lokalisierung von $\Gamma(X)$ an der multiplikativ abgeschlossenen Menge $\{1, f, f^2, \ldots, f^n \ldots\}$. Dann lässt sich

$$\Gamma(X)_{\mathfrak{m}_x} = \bigcup_{f \in \Gamma(X) \setminus \mathfrak{m}_x} \Gamma(X)_f \subseteq K(X)$$

schreiben. "$\supseteq$": klar, "$\subseteq$": $\frac{g}{f}$ mit $f(x) \neq 0$ d.h. $f \notin \mathfrak{m}_x \Rightarrow \frac{g}{f} \in \Gamma(X)_f$.

Es gilt:

(i) Für $V \subseteq U \subseteq X$ offen kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X(V) \arrow[r, hook] & \mathrm{Abb}(V,k) \\ \mathcal{O}_X(U) \arrow[r, hook] \arrow[u, hook] & \mathrm{Abb}(U,k) \arrow[u, "\text{Einschränkungsabb.}"'] \end{tikzcd}$$

mit $\mathcal{O}_X(U) \hookrightarrow \mathcal{O}_X(V), f \mapsto f|_V$ nach Definition.

(ii) $\mathcal{O}_X(U) \to \mathrm{Abb}(U,k)$, $f \mapsto (x \mapsto f(x) := \frac{g(x)}{f(x)} \in k)$ ist injektiv (Lemma 34) und wohldefiniert (kürzen/erweitern), wobei $g, h \in \Gamma(X)$ mit $h \notin \mathfrak{m}_x$ mit $f = \frac{g}{h}$ nach Definition von $\mathcal{O}_X(U)$ existiert.

(iii) **Verklebungseigenschaft.** Sei $U = \bigcup_{i \in I} U_i$. Nach Definition ist

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(U) = & \bigcap_i \mathcal{O}_X(U_i) \subseteq K(X) \\ \ni f : U \to k & \ni f_i : U_i \to k \end{array}$$

[Diagramm fehlt]. $(X, \mathcal{O}_X)$ ist Raum mit Funktionen, **der zur irreduziblen affin algebraische Menge assoziierte Raum von Funktionen**.

Satz 36 (orig. 33)**.** *Für $(X, \mathcal{O}_X)$ zu X wie oben und $f \in \Gamma(X)$ gilt:*

$$\mathcal{O}_X(D(f)) = \Gamma(X)_f,$$

insbesondere $\mathcal{O}_X(X) = \Gamma(X)$.

Beweis. $\Gamma(X)_f \subseteq \mathcal{O}_X(D(f))$ klar, da $f(x) \neq 0 \ \forall x \in D(f)$ bzw. $f \in \Gamma(X) \setminus \mathfrak{m}_x$.

Sei nun g in $\mathcal{O}_X(D(f))$ gegeben, $(*)$ und $\mathfrak{a} := \{h \in \Gamma(X) \mid hg \in \Gamma(X)\} \trianglelefteq \Gamma(X)$.

Dann gilt: $g \in \Gamma(X)_f$

$\Leftrightarrow g = \frac{k}{f^n}$ für ein n und $k \in \Gamma(X)$

$\Leftrightarrow f^n \in \mathfrak{a}$ für ein n.

d.h. zu zeigen: $f \in \mathrm{rad}(\mathfrak{a}) = I(V(\mathfrak{a}))$ (Hilbertscher Nullstellensatz)

$\Leftrightarrow f(x) = 0 \ \forall x \in V(\mathfrak{a})$

Ist dazu $x \in X$ mit $f(x) \neq 0$, also $x \in D(f)$, so existieren wegen $g \in \mathcal{O}_X(D(f))$ Funktionen $f_1, f_2 \in \Gamma(X)$, $f_2 \notin \mathfrak{m}_x$ mit $g = \frac{f_1}{f_2}$, also gilt $f_2 \in \mathfrak{a}$.

Da $f_2(x) \neq 0$ folgt weiter $x \notin V(\mathfrak{a})$. $\square$

Bemerkung 37 (orig. 34).

(i) Im Allgemeinen existieren für $f \in \mathcal{O}_x(U)$ **nicht notwendigerweise** $g, h \in \Gamma(X)$ mit $f = \frac{g}{h}$ und $h(x) \neq 0\ \forall x \in U$.

(ii) **Alternative Definition von $\mathcal{O}_X$, I.**

$$\mathcal{O}_X(D(f)) := \Gamma(X)_f, \quad \forall f \in \Gamma(X).$$

Da $(D(f))_{f \in \Gamma(X)}$ Basis der Topologie bildet, kann es höchstens einen Raum mit Funktionen mit dieser Eigenschaft geben, es bleibt die Existenz zu zeigen.

(iii) **Alternative Definition von $\mathcal{O}_X$, II.**

Direkt von einer integeren endlich erzeugten k-Algebra A ausgehend (die X bis auf Isomorphie festlegt), aber ohne "Koordinaten" zu wählen.

$$X := \{\mathfrak{m} \trianglelefteq A \mid \ \mathfrak{m} \text{ ist max. Ideal}\}$$

Die **abgeschlossenen Mengen** sind gegeben durch:

$$V(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{m} \in X \mid \mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{a}\}, \quad \mathfrak{a} \trianglelefteq A \text{ Ideal.}$$

$\mathcal{O}_X(U) := \bigcap_{\mathfrak{m} \in U} A_{\mathfrak{m}} \subseteq \mathrm{Quot}(A)$ für $U \subseteq X$ offen (vgl. später Schemata).