14 Der Raum mit Funktionen zu einer affin algebraischen Menge

Ziel. $X \subseteq \mathbb{A}^n(k) \mapsto (X, \mathcal{O}_X)$ als irreduzibele affine algebraische Menge bzw. Zariski-Topologie. D.h. wir müssen Mengen von Funktionen $\mathcal{O}_X(U)$ auf U, $U \subset X$ offen, definieren. Diese werden als Teilmengen des Funktionenkörpers $K(X)$ definiert (dazu X irreduzibel, später bei Schemata fällt diese Bedingung weg!)

Definition 33. $K(X) := \mathrm{Quot}(\Gamma(X))$ heißt **Funktionenkörper** von X. ($\Gamma(X)$ ist für X irreduzibel nullteilerfrei.)

Elemente $\frac{f}{g} \in K(X)$, $f, g \in \Gamma(X) = \hom(X, \mathbb{A}^1(k))$, $g \neq 0$ lassen sich zumindest als Funktion auf der offenen Menge $\mathcal{D}(g) \subset X$ auffassen, wenn auch nicht i.A. auf ganz X.

Lemma 34. *Gilt für* $\frac{f_1}{g_1}, \frac{f_2}{g_2} \in K(X)$, $f_i, g_i \in \Gamma(X)$, *und einer offenen Teilmenge* $\emptyset \neq U \subset \mathcal{D}(g_1 g_2)$

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \qquad \forall x \in U,$$

dann folgt $\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2}$ *in* $K(X)$.

Beweis. Sei ohne Einschränkung der Allgemeinheit $g_1 = g_2 = g$. (Sonst Erweitern!)
$\Rightarrow (f_1 - f_2)(x) = 0 \ \forall x \in U$.
$\Rightarrow \emptyset \neq U \subset V(f_1 - f_2) \subset X$ dicht, d.h. $V(f_1 - f_2) = X$.
$f_1 - f_2 \in IV(f_1 - f_2) = I(X) \equiv (0)$ in $\Gamma(X)$
$\Rightarrow f_1 - f_2 = 0$. □

Definition 35. Sei X eine irreduzibele affine algebraische Menge, $U \subset X$ offen. Sei $\Gamma(X)_{\mathfrak{m}_x}$ Lokalisierung von $\Gamma(X)$ bzgl. das maximale Ideal $\mathfrak{m}_x$ in $x \in X$.

$$\mathcal{O}_X(U) := \bigcap_{x \in U} \Gamma(X)_{\mathfrak{m}_x} \subset K(X)$$

d.h. für jedes $x \in U$ lässt sich $f \in \mathcal{O}_X(U)$ schreiben als $\frac{h}{g}$ mit $g(x) \neq 0$.

Wenn $f \in \Gamma(X)$ bezeichne $\Gamma(X)_f$ die Lokalisierung von $\Gamma(X)$ bzgl. der multiplikativ abgeschlossenen Teilmenge $\{1, f, f^2, \ldots, f^n \ldots\}$. Dann lässt sich

$$\Gamma(X)_{\mathfrak{m}_x} = \bigcup_{f \in \Gamma(X) \setminus \mathfrak{m}_x} \Gamma(X)_f \subset K(X)$$

schreiben. "$\supset$" klar, "$\subset$" $\frac{g}{f}$ mit $f(x) \neq 0$ d.h. $f \notin \mathfrak{m}_x \Rightarrow \frac{g}{f} \in \Gamma(X)_f$.

Es gilt:

(i) Für $V \subset U \subset X$ offen kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X(V) \arrow[r, hook] & \mathrm{Abb}(V,k) \\ \mathcal{O}_X(U) \arrow[r, hook] \arrow[u, hook] & \mathrm{Abb}(U,k) \arrow[u, "\text{Einschränkungsabb.}"'] \end{tikzcd}$$

mit $\mathcal{O}_X(U) \subset \mathcal{O}_X(V)$ nach Definition.

(ii) $\mathcal{O}_X(U) \to \mathrm{Abb}(U,k)$, $f \mapsto (x \mapsto f(x) := \frac{g(x)}{f(x)} \in k)$ ist injektiv (Lemma 34) und wohldefiniert (kürzen/Erweitern), wobei $g, h \in \Gamma(X)$ mit $h \notin \mathfrak{m}_x$ mit $f = \frac{g}{h}$ nach Definition von $\mathcal{O}_X(U)$ existiert.

(iii) **Verklebungseigenschaft.** Sei $U = \bigcup_{i \in I} U_i$. Nach Definition ist

$$\mathcal{O}_X(U) = \bigcap_i \mathcal{O}_X(U_i) \subset K(X)$$
$$\ni f : U \to k \qquad \ni f_i : U_i \to k$$

[Diagramm fehlt]. $\Rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ ist Raum mit Funktionen, **der zur irreduziblen affin algebraische Menge gehörige Raum von Funktionen.**

Satz 36 (orig. 33)**.** *Für $(X, \mathcal{O}_X)$ zu X wie oben und $f \in \Gamma(X)$ gilt:*

$$\mathcal{O}_X(D(f)) = \Gamma(X)_f,$$

insbesondere $\mathcal{O}_X(X) = \Gamma(X)$.

Beweis. $\Gamma(X) \subset \mathcal{D}(f)$ klar, da $f(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathcal{D}(f)$ bzw. $f \in P(X) \backslash \mathfrak{m}_x$.

Sei nun g in $\mathcal{O}_X(\mathcal{D}(f))$ gegeben, $(*)$ und $\mathfrak{A} := \{h \in \Gamma(X) \mid hg \in \Gamma(X)\} \subset \Gamma(X)$ Ideal.

Dazu: $g \in \Gamma(X)_g$

$\Leftrightarrow g = \frac{k}{g^n}$ für ein n und $k \in \Gamma(X)$

$\Leftrightarrow f^n \in \mathfrak{A}$ für ein n.

d.h. zu zeigen: $f \in \mathrm{rad}(\mathfrak{A}) = IV(\mathfrak{A})$ (Hilbertsche Nullstellensatz)

$\Leftrightarrow f(x) = 0 \ \forall x \in V(\mathfrak{A})$

Ist dazu $x \in X$ mit $f(x) \neq 0$, wo $x \in \mathcal{D}(f)$, so existiert nach Voraussetzung $(*)$ $f_1, f_2 \in \Gamma(X)$, $f_2 \notin \mathfrak{m}_x$ mit $g = \frac{f_1}{f_2}$

$\Rightarrow f_2 \in \mathfrak{A}$. Da $f_2(x) \neq 0$:

$\Rightarrow x \notin V(\mathfrak{A})$. □

Bemerkung 37 (orig. 34).

(i) Im allgemeinen existieren für $f \in \mathcal{O}_x(U)$ **nicht** $g, h \in \Gamma(X)$ mit $f = \frac{g}{h}$ und $h(x) \neq 0 \; \forall x \in U$.

(ii) **Alternative Definition von $\mathcal{O}_X$, I.**

$$\mathcal{O}_X(\mathcal{D}(f)) := \Gamma(X)_f, \quad \forall f \in \Gamma(X).$$

Da $\mathcal{D}(f)$ Basis der Topologie ist, kann es höchstens einen Raum mit Funktionen geben mit dieser Eigenschaft, es bleibt die Existenz zu zeigen.

(iii) **Alternative Definition von $\mathcal{O}_X$, II.**

Direkt von einer integeren endlich erzeugten k-Algebra A ausgehend (die X bis auf Isomorphie festlegt), aber ohne "Koordinaten" zu wählen.

$$X := \{\mathfrak{m} \subseteq A \mid \text{max. Ideale}\}$$

Die **abgeschlossen Mengen** sind gegeben durch:

$$V(\mathfrak{A}) := \{\mathfrak{m} \subseteq A \text{ max.} \mid \mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{A}\}, \quad \mathfrak{A} \subset A \text{ Ideal.}$$

$\mathcal{O}_X(U) := \bigcap_{\mathfrak{m} \in U} A_{\mathfrak{m}} \subset \operatorname{Quot}(A)$ für $U \subset X$ offen (vgl. später Schemata).