

Affine algebraische Mengen als Räume von Funktionen

11 Der affine Koordinatensatz

Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ abgeschlossen. Für den surjektiven (Def. von Morphismen) k -Algebren-Homomorphismus

$$\begin{aligned} k[I] &\xrightarrow{\varphi} \text{hom}(X, \mathbb{A}^1(k)) \\ f &\mapsto (x \mapsto f(x)), \end{aligned}$$

wobei die Morphismen in folgende Weise eine k -Algebra bilden:

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &:= f(x) + g(x) \\ (fg)(x) &:= f(x)g(x) \\ (\alpha f)(x) &:= \alpha f(x) \end{aligned}$$

mit $f, g \in \text{hom}(X, \mathbb{A}^1(k))$, $\alpha \in k$. Es gilt:

$$\ker \varphi = I(X)$$

Definition 26. $\Gamma(X) := k[I]/I(X) \cong \text{hom}(X, \mathbb{A}^1(k))$ heißt der **affine Koordinatenring** von X .

Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_x &:= \ker(\Gamma(X) \rightarrow k, f \mapsto f(x)) \\ &= \{f \in \Gamma(X) \mid f(x) = 0\} \\ &= \text{Bild von } (T_1 - x_1, \dots, T_n - x_n) \\ &= \ker(\Gamma(\mathbb{A}^n(k)) \rightarrow k) \end{aligned}$$

unter der Projektion $\pi : k[\underline{T}] = \Gamma(\mathbb{A}^n(k)) \rightarrow \Gamma(X)$. Es ist \mathfrak{m}_x ein maximales Ideal von $\Gamma(X)$ mit $\Gamma(X)/\mathfrak{m}_x = k$. Für ein Ideal $\mathfrak{A} \subset \Gamma(X)$ setze

$$V(\mathfrak{A}) = \{x \in X \mid f(x) = 0 \ \forall f \in \mathfrak{A}\} = V(\pi^{-1}(\mathfrak{A})) \cap X.$$

Dies sind genau die abgeschlossenen Mengen von X als Teilraum in $\mathbb{A}^n(k)$ mit der induzierten Topologie, diese wird auch **Zariski-Topologie** genannt. Für $f \in \Gamma(X)$ setze:

$$D(f) := \{x \in X \mid f(x) \neq 0\} = X \setminus V(f).$$

Lemma 27. *Die offenen Mengen $D(f)$, $f \in \Gamma(X)$, bilden eine Basis der Topologie, d.h.*

$$\forall U \subset X \text{ offen } \exists f_i \in \Gamma(X), i \in I, \quad \text{mit } U = \bigcup_{i \in I} D(f_i)$$

Beweis. $U = X \setminus V(\mathfrak{A})$ für ein $\mathfrak{A} \subset \Gamma(X)$, $\mathfrak{A} = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$. Wegen

$$V(\mathfrak{A}) = \bigcap_{i=1}^n V(f_i) \quad \Rightarrow \quad U = \bigcup_{i=1}^n D(f_i)$$

Es reichen also sogar endlich viele f_i ! □

Satz 28. *Der Koordinatenring $\Gamma(X)$ einer affinen algebraischen Menge X ist eine endlich erzeugte k -Algebra, die reduziert ist (d.h. keine nilpotenten Elemente $\neq 0$ enthält). Ferner ist X irreduzibel genau dann, wenn $\Gamma(X)$ integer ist.*

Beweis. $k[\underline{T}] \twoheadrightarrow \Gamma(X)$ impliziert “endlich erzeugte k -Algebra”. Es ist:

$$\Gamma(X) \text{ irreduzibel} \Leftrightarrow I(X) = \text{rad } I(X).$$

Denn mit Satz 10.ii) und Korollar 11 folgt:

$$\begin{aligned} X = V(\mathfrak{A}) : I(X) &= \text{rad } \mathfrak{A} \\ \Rightarrow \text{rad } I(X) &= \text{rad } \text{rad } \mathfrak{A} = \text{rad } \mathfrak{A} = I(X). \end{aligned}$$

Mit Lemma 17 folgt: X irreduzibel

$$\Leftrightarrow I(X) \text{ Primideal.}$$

$$\Leftrightarrow \Gamma(X) = k[\underline{T}]/I(X). \quad \square$$