Affine algebraische Mengen als Räume von Funktionen

11 Der affine Koordinatenring

Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ abgeschlossen. Für den surjektiven (Def. von Morphismen) k-Algebren-Homomorphismus

$$\begin{aligned} k[\underline{T}] &\xrightarrow{\varphi} \hom(X, \mathbb{A}^1(k)) \\ f &\mapsto (x \mapsto f(x)), \end{aligned}$$

wobei die Morphismen in folgende Weise eine k-Algebra bilden:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &:= f(x) + g(x) \\ (fg)(x) &:= f(x)g(x) \\ (\alpha f)(x) &:= \alpha f(x) \end{aligned}$$

mit $f, g \in \hom(X, \mathbb{A}^1(k))$, $\alpha \in k$, gilt:

$$\ker \varphi = I(X).$$

Definition 26. $\Gamma(X) := k[\underline{T}]/I(X) \cong_{k-\mathrm{Alg}} \hom(X, \mathbb{A}^1(k))$ heißt der **affine Koordinatenring** von X.

Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_x :=\ & \ker(\Gamma(X) \twoheadrightarrow k,\ f \mapsto f(x)) \\ =\ & \{f \in \Gamma(X) \mid f(x) = 0\} \\ =\ & \pi((T_1 - x_1, \ldots, T_n - x_n)) \\ =\ & \ker(\Gamma(\mathbb{A}^n(k)) \twoheadrightarrow k) \end{aligned}$$

unter der Projektion $\pi : k[\underline{T}] = \Gamma(\mathbb{A}^n(k)) \twoheadrightarrow \Gamma(X)$. Es ist $\mathfrak{m}_x$ ein maximales Ideal von $\Gamma(X)$ mit $\Gamma(X)/\mathfrak{m}_x \cong k$. Für ein Ideal $\mathfrak{a} \trianglelefteq \Gamma(X)$ sei

$$V(\mathfrak{a}) := \{x \in X \mid f(x) = 0\ \forall f \in \mathfrak{a}\} = V(\pi^{-1}(\mathfrak{a})) \cap X.$$

Dies sind genau die abgeschlossenen Mengen von X als Teilraum von $\mathbb{A}^n(k)$ mit der induzierten Topologie, diese wird auch **Zariski-Topologie** genannt. Für $f \in \Gamma(X)$ setze:

$$D_X(f) := D(f) := \{x \in X \mid f(x) \neq 0\} = X \setminus V(f).$$

Lemma 27. *Die offenen Mengen $D(f)$, $f \in \Gamma(X)$, bilden eine Basis der Topologie von X, d.h.*

$$\forall U \subseteq X \text{ offen } \exists f_i \in \Gamma(X),\, i \in I \quad \text{mit } U = \bigcup_{i \in I} D(f_i)$$

Beweis. $U = X \backslash V(\mathfrak{a})$ für ein $\mathfrak{a} \trianglelefteq \Gamma(X)$, $\mathfrak{a} = \langle f_1, \ldots, f_n \rangle_{\Gamma(X)}$. Wegen

$$V(\mathfrak{a}) = \bigcap_{i=1}^{n} V(f_i) \quad \Rightarrow \quad U = \bigcup_{i=1}^{n} D(f_i)$$

Es reichen also sogar endlich viele $f_i \in \Gamma(X)$! □

Satz 28. *Der Koordinatenring $\Gamma(X)$ einer affinen algebraischen Menge X ist eine endlich erzeugte k-Algebra, die reduziert ist (d.h. keine nilpotenten Elemente $\neq 0$ enthält). Ferner ist X irreduzibel genau dann, wenn $\Gamma(X)$ integer ist.*

Beweis. $k[\underline{T}] \twoheadrightarrow \Gamma(X)$ impliziert, dass $\Gamma(X)$ als k-Algebra endlich erzeugte ist. Es gilt:

$$\Gamma(X) \text{ irreduzibel } \Leftrightarrow I(X) = \operatorname{rad} I(X).$$

Denn mit Satz 10.ii) und Korollar 11 folgt:

$$X = V(\mathfrak{a}) : \; I(X) = \operatorname{rad} \mathfrak{a}$$
$$\Rightarrow \operatorname{rad} I(X) = \operatorname{rad} \operatorname{rad} \mathfrak{a} = \operatorname{rad} \mathfrak{a} = I(X).$$

Mit Lemma 17 folgt: X irreduzibel
$\Leftrightarrow I(X)$ prim
$\Leftrightarrow \Gamma(X) = k[\underline{T}]/I(X)$ integer. □