6 Irreduzibele topologische Räume

Die folgenden topologische Begriffe sind nur interessant, da $\mathbb{A}^n(k)$ $(n > 0)$ kein Hausdorff'scher Raum ist.

Definition 12. Ein topologischer Raum X heißt **irreduzibel**, wenn $X \neq \emptyset$ und X sich *nicht* als Vereinigung zweier echter abgeschlossenen Teilmengen darstellen lässt, d.h

$$X = A_1 \cup A_2,\ A_i \text{ abg.} \quad \Rightarrow \quad A_1 = X \text{ oder } A_2 = X.$$

$Z \subset X$ heißt irreduzibel, falls Z mit der induzierten Topologie irreduzibel ist.

Satz 13. *Für einen topologischen Raum X sind äquivalent:*

(i) X ist irreduzibel.

(ii) Je zwei nichtleere offenen Teilmengen von X haben nicht-leeren Durchschnitt.

(iii) Jede nichtleere offene Teilmenge $U \subset X$ ist dicht in X.

(iv) Jede nichtleere offene Teilmenge $U \subset X$ ist zusammenhängend.

(v) Jede nichtleere offene Teilmenge $U \subset X$ ist irreduzibel.

Beweis.

- *(i)* $\Leftrightarrow$ *(ii)*

  Komplementsmengen.

- *(ii)* $\Leftrightarrow$ *(iii)*

  Es ist: $U \subset X$ dicht $\Leftrightarrow U \cap O \neq \emptyset$ für jedes offene $\emptyset \neq O \subset X$.

- *(iii)* $\Rightarrow$ *(iv)*

  Klar.

- *(iv)* $\Rightarrow$ *(iii)*

  Sei $\emptyset \neq U$ offen und zusammenhängend. Es folgt:

  $$U = U_1 \sqcup U_2, \qquad \emptyset \neq U_i \underset{\text{offen}}{\subset} U \underset{\text{offen}}{\subset} X$$

  Damit ist $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, ein Widerspruch zu (iii).

- *(v)* $\Rightarrow$ *(i)*

  Klar. $(U = X)$

- $(iii) \Rightarrow (v)$

  Sei $\emptyset \neq U \underset{\text{offen}}{\subset} X$. Ist $\emptyset \neq V \underset{\text{offen}}{\subset} U$, so ist $V \underset{\text{offen}}{\subseteq} X$. Es folgt: V ist dicht in X und irreduzibel in U. Mit $(iii) \Rightarrow (i)$ folgt, dass U irreduzibel ist.

$\square$

Lemma 14. *Eine Teilmenge Y ist genau dann irreduzibel, wenn ihr Abschluss $\overline{Y}$ dies ist.*

Beweis. Y irreduzibel.
$\Leftrightarrow \forall U, V \subset X$ offen mit $U \cap Y \neq \emptyset \neq V \cap Y$, gilt $Y \cap (U \cap V) \neq \emptyset$.
$\Leftrightarrow \overline{Y}$ irreduzibel. $\square$

Definition 15. Eine maximale irreduzibele Teilmenge eines topologischen Raumes X heißt **irreduzibele Komponente** von X.

Bemerkung 16.

(i) Jede irreduzibele Komponente ist abgeschlossen nach Lemma 14.

(ii) X ist Vereinigung seiner irreduzibelen Komponenten, *denn*:

die Menge der irreduzibelen Teilmengen von X ist **induktiv geordnet**: für jede aufsteigende Kette irreduzibeler Teilmengen ist die Vereinigung wieder irreduzibel. (Satz 13 (ii)). Mit dem **Lemma von Zorn** folgt: Jede irreduzibele Teilmenge ist in einer irreduzibelen Komponente enthalten. Damit ist jeder Punkt in einer irreduzibelen Komponente enthalten.