15 Funktorialität der Konstruktion

Satz 38 (orig. 35)**.** *Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen irreduzibler affiner algebraischen Mengen. Es sind äquivalent:*

(i) *f ist ein Morphismus affiner algebraischen Mengen.*

(ii) *$\forall g \in \Gamma(Y)$ gilt $g \circ f \in \Gamma(X)$.*

(iii) *f ist ein von Räumen von Funktionen, d.h. für alle $U \subseteq Y$ offen und alle $g \in \mathcal{O}_Y(U)$ gilt $g \circ f \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$.*

Beweis.

- *(i)* $\Leftrightarrow$ *(ii)*

  Satz 29.

- *(iii)* $\Rightarrow$ *(ii)*

  $U := Y$ + Satz 33.

- *(ii)* $\Rightarrow$ *(iii)*

  Betrachte $\varphi : \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$, $h \mapsto h \circ f$. Aufgrund des Verklebungsaxioms reicht es, die Bedingung für U von der Form $\mathcal{D}(g)$ zu zeigen: Es gilt:

$$f^{-1}(\mathcal{D}(g)) = \{x \in X \mid \underbrace{g(f(x))}_{=\varphi(g)(x)} \neq 0\} = \mathcal{D}(\varphi(g))$$

  Deswegen induziert φ:

$$\begin{array}{rcl} H & \longmapsto & H \circ f \\ \mathcal{O}_Y(\mathcal{D}(g)) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(D(\varphi(g))) \\ & \shortparallel & \\ \Gamma(Y)_g & \longrightarrow & \Gamma(X)_{\varphi(g)} \\ \dfrac{h}{g} & \longmapsto & \dfrac{h \circ f}{(g \circ f)^n} \end{array}$$

  mit $h \circ f \in \Gamma(X)$ nach Voraussetzung und $\varphi(g) = g \circ f \in \Gamma(X)$ nach Voraussetzung.

Insgesamt haben wir: □

Theorem 39 (orig. 36)**.** *Die obige Konstruktion definiert einen volltreuen Funktor*

$$\{\textit{irred. aff. abg. Mengen über } k\} \to \{\textit{Räume mit Funktionen über } k\}$$