15 Funktorialität der Konstruktion

Satz 38 (orig. 35). *Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen irreduziblen affin-algebraischen Mengen. Es sind äquivalent:*

(i) f ist ein Morphismus affin-algebraischer Mengen.

(ii) $\forall g \in \Gamma(Y)$ gilt $g \circ f \in \Gamma(X)$.

(iii) f ist ein Morphismus von Räumen von Funktionen, d.h. für alle $U \subseteq Y$ offen und alle $g \in \mathcal{O}_Y(U)$ gilt $g \circ f \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$.

Beweis.

- *(i)* $\Leftrightarrow$ *(ii)*

  Folgt aus Satz 29.

- *(iii)* $\Rightarrow$ *(ii)*

  $U := Y$ und Satz 36.

- *(ii)* $\Rightarrow$ *(iii)*

  Betrachte $\Gamma(f) : \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$, $h \mapsto h \circ f$. Aufgrund des Verklebungsaxioms reicht es, die Bedingung für U von der Form $D(g)$ zu zeigen; hier gilt:

  $$f^{-1}(D(g)) = \{x \in X \mid \underbrace{g(f(x))}_{=\Gamma(f)(g)(x)} \neq 0\} = D(g \circ f)$$

  Deswegen induziert $\Gamma(f)$:

  $$\begin{array}{rcl} h & \longmapsto & h \circ f \\ \mathcal{O}_Y(D(g)) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(D(g \circ f)) \\ \shortparallel & & \\ \Gamma(Y)_g & \longrightarrow & \Gamma(X)_{g \circ f} \\ \dfrac{h}{g^n} & \longmapsto & \dfrac{h \circ f}{(g \circ f)^n} \end{array}$$

  mit $h \circ f, g \circ f \in \Gamma(X)$ nach Voraussetzung.

$\square$

Insgesamt erhalten wir:

Theorem 39 (orig. 36)**.** *Die obige Konstruktion definiert einen volltreuen Funktor*

$$\{\textit{irreduzible aff. alg. Mengen über } k\} \to \{\textit{Räume mit Funktionen über } k\}.$$