Literatur

Görtz / Wedhorn : Algebraic Geometry I

Hartshorne : Algebraic Geometry

Shafarevich : Basic Algebraic Geometry 1u2

Grothendieck : EGA I – IV

Eléments de géométrie algébrique

Algebraische Geometrie I

I Prä-Varietäten

1. Einführung

Alg. Geometrie = Studium von Systemen polynomialer Gleichungen (in mehreren Unbestimmten)

Verallgemeinerung der lineare Algebra: jetzt auch höhere Potenzen X_n^m, ...

und Algebra: Polynome in mehreren Variablen!

Sei k ein (algebraisch abg.) Kp.

und $f_1, \ldots, f_n \in k[T_1, \ldots, T_n]$ gegeben.

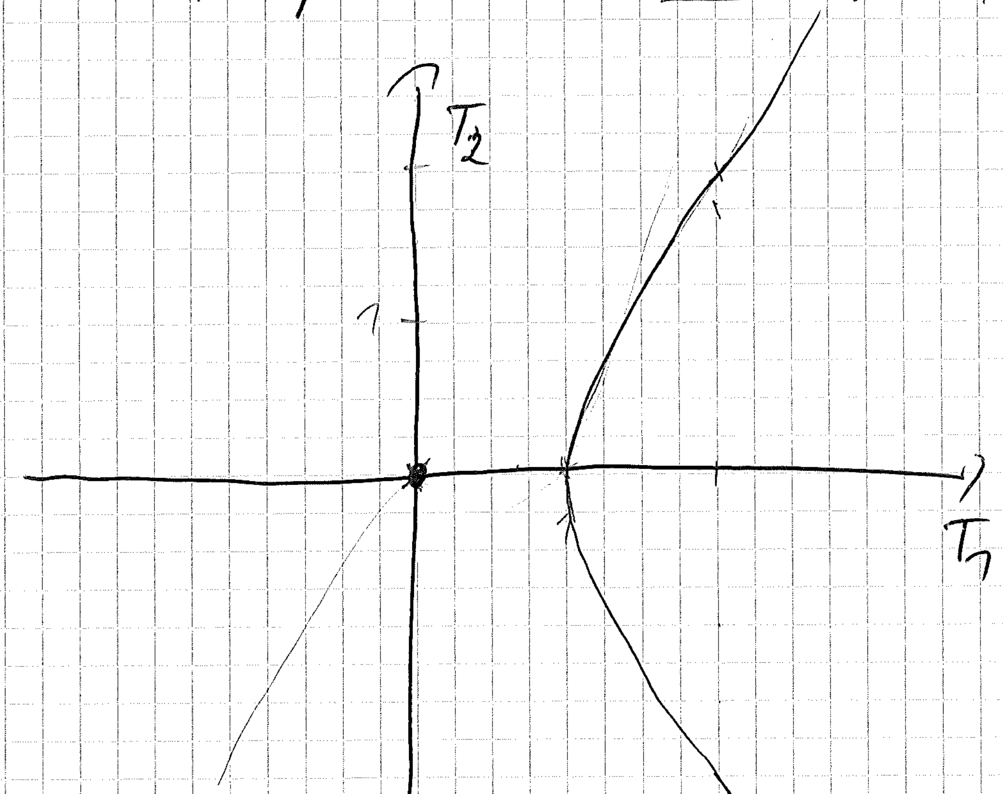
Was sind die "geometrischen Eigenschaften" der Nullstellenmenge

$$V(f_1, \ldots, f_n) = \{(t_1, \ldots, t_n) \in k^n \mid f_i(t_1, \ldots, t_n) = 0 \ \forall i\} \subseteq k^n ?$$

$T^3 - T^2$

Bsp 1. $f = T_2^2 - T_1^2(T_1 - 1) \in k[T_1, T_2]$

Nullstellenmenge für $k = \mathbb{R}$ (aber: suggestiv, nicht allg. aussagekr.)



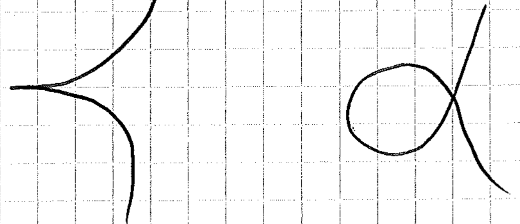
$g(T_1) = T_1^2(T_1 - 1) = T_1^3 - T_1^2$

$g'(T_1) = 3T_1^2 - 2T_1 = 0$
$= T_1(3T_1 - 2)$

$t_1 = 0, \ t_1 = \frac{2}{3}$

Dimension: 1

Glatte und singuläre Punkte: $(0,0)$ singulär, alle andern Punkte haben eine eindeutig bestimmte Tangente:



Vgl. Satz über implizite Funktionen (Analysis, Differentialgeometrie)

$V(f)$ lokal diffeomorph zu $\mathbb{R}$ (= reelle Gerade) in (x_1, x_2)

$\Longleftrightarrow$ Jacobi-Matrix $\left(\frac{\partial f}{\partial T_1}, \frac{\partial f}{\partial T_2}\right)$ hat Rang 1 in (x_1, x_2)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial T_1}, \frac{\partial f}{\partial T_2}\right) = \left(T_1(3T_1-2),\ 2T_2\right)$$

$\Longleftrightarrow$ $(x_1, x_2) \neq (0,0)$

Dies läßt sich sehr formal über bel. Grundkörpern algebraisch formulieren.

Methoden:

Komplexe Geometrie Differentialgeometrie	Alg. Geomet.
analytische Hilfsmittel	kommutative Algebra

2. Die Zariski-Topologie

Def 2 Sei $M \subset k[T_1, \dots, T_n]$ eine Teilmenge. Mit

$$V(M) = \{ (t_1, \dots, t_n) \in k^n \mid f(t_1, \dots, t_n) = 0 \ \forall f \in M \}$$

bezeichnen wir die gemeinsame Nullstelle (Verschwindungsmenge) der Elt. aus M.

[manchmal auch $V(f_i, i \in I)$ statt $V(\{f_i, i \in I\})$]

Eigenschaften

- $V(M) = V(\mathfrak{a})$, wenn $\mathfrak{a} = \langle M \rangle$ das von M erzeugte Ideal bezeichnet
- Da $k[T_1, \dots, T_n]$ noethersch (Hilbertscher Basissatz) reichen stets endl. viele $f_1, \dots, f_n \in M$:

  $V(M) = V(f_1, \dots, f_n)$

  (falls $\mathfrak{a} = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$)
- $V(\ )$ ist inklusionsumkehrend: $M' \subset M \Rightarrow V(M) \subseteq V(M')$

Satz 3. Die Mengen $V(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{a} \subset k[\underline{T}]$ ein Ideal, sind die abg. Menge einer Topologie auf k^n, der sog. Zariski-Topologie:

1. $\emptyset = V(1)$, $k^n = V(0)$

2. $\bigcap_{i\in I} V(\mathfrak{a}_i) = V\left(\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i\right)$

für bel. Familie $(\mathfrak{a}_i)$ von Idealen

3. $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ für $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset k[T]$ Ideale

~~Bew~~ **Bew.**: Übung / Afg. II ✓ 7.10.08

3. Affine algebraische Mengen

Def 4. · $\mathbb{A}^n(k)$, der affine Raum der Dimension n (über k), bezeichne k^n mit der Zariski-Top.

· Abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{A}^n(k)$ heißen affine alg. Mengen.

Bsp 5. Da $k[T]$ ein H.I.R., sind die alg. Mengen in $\mathbb{A}^1(k)$: $\emptyset$, $\mathbb{A}^1$, Menge der Form $V(f)$, $f \in k[T] \setminus k$

$\parallel$

endliche Teilmengen

($\Rightarrow$ Zariski-Top. ist nicht Hausdorffsch!)

Bsp 6. $\mathbb{A}^2(k)$ hat zumindest als alg. Mengen

· $\emptyset$, $\mathbb{A}^2$

· Einpunktige Menge $\{(x_1, x_2)\} = V(T_1 - x_1, T_2 - x_2)$

· $V(f)$, $f \in k[T_1, T_2]$ irreduzibel ferner alle endl. Vereinigungen dieser Linien

(dies sind in der Tat alle, denn später sehen wir: "irred." alg. Mengen $\longleftrightarrow$ Primideale
$k[T_1, T_2]$ hat "Krull-Dimension 2")

4. Der Hilbertsche Nullstellensatz

Theorem 7: K (nicht notwendig alg. abg.) Kp.
A endl. erzeugte K-Algebra.

Dann ist A Jacobsonsch, d.h. für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ gilt

$$\mathfrak{p} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{p} \\ \text{max. Ideal}}} \mathfrak{m}$$

Ist $\mathfrak{m} \subset A$ ein maximales Ideal, so ist die Kp-Erw.

$K \subset A/\mathfrak{m}$ endlich.

Bew (Algebra II)

Korollar 8:

(1) Sei A eine e.e. k-Algebra (k alg. abg!), $\mathfrak{m} \subset A$ ein max. Ideal. Dann ist $A/\mathfrak{m} = k$

(2) Jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset k[\underline{T}]$ hat die Form $\mathfrak{m} = (T_1 - x_1, \ldots, T_n - x_n)$ ~~für~~ mit $x_1, \ldots, x_n \in k$.

(3) Für $\mathfrak{a} \subset k[T]$ Ideal gilt

$$\operatorname{rad}(\mathfrak{a}) = \sqrt{\mathfrak{a}} \overset{(i)}{=} \bigcap_{\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} \subseteq k[T]} \mathfrak{p} \overset{(ii)}{=} \bigcap_{\substack{\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m} \subseteq k[T] \\ \text{max.}}} \mathfrak{m}$$

__Bew.__ (1) $k \to A \to A/\mathfrak{m}$ ($\overset{\text{(3.1)}}{\Rightarrow}$ ist Iso), da k keine echte Kp.-Erw. besitzt.

(2) $k[T_1, \dots, T_n] \to k[T]/\mathfrak{m} = k$, $T_i \longmapsto x_i$ $\Rightarrow \mathfrak{m} = (T_1 - x_1, \dots, T_n - x_n)$ da letztes maximal (2 Ub)

(3) (i) Algebra II, (ii) Thm $\square$

5. Korrespondenz zwischen Radikalidealen und affinen alg. Mengen

__Bem.__ $V(\mathfrak{a}) = V(\operatorname{rad} \mathfrak{a})$

$\operatorname{rad}\mathfrak{a} = \{ f \in k[T] \mid f^n \in \mathfrak{a}$ für ein $n > 0 \}$

da $f^n(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

D.h. verschiedene Ideale können dieselbe alg. Menge beschreiben.

__Def 9:__ Für eine Teilmenge $Z \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ bezeichne

$$I(Z) = \{ f \in k[T] \mid f(x) = 0 \quad \forall x \}$$

das Ideal aller auf Z verschwindenden Polynomfunktionen.

Satz 10:

(i) $\mathfrak{a} \subseteq k[T]$ Ideal $\Rightarrow$ $IV(\mathfrak{a}) = \mathrm{rad}(\mathfrak{a})$

(ii) $Z \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ Teilmenge $\Rightarrow$ $VI(Z) = \overline{Z}$, der Abschluss von Z

Bew. Abg. II, Üb.

$\mathfrak{a}$ heißt Radikalideal $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{a} = \mathrm{rad}(\mathfrak{a})$, $\Leftrightarrow$ $k[T]/\mathfrak{a}$ reduziert (keine nilpot. Elem.)

Korollar 11: ~~Die Zuordnung $Z \mapsto I(Z)$~~ Wir erhalten eine 1-1 Korrespondenz

$$\{\text{abg. Mengen} \subseteq \mathbb{A}^n(k)\} \longleftrightarrow \{\text{Radikalideale } \mathfrak{a} \subseteq k[T]\}$$

$$Z \longmapsto I(Z)$$

$$V(\mathfrak{a}) \longleftarrow\!\shortmid\ \mathfrak{a}$$

die sich zu einer 1:1-Korrespondenz

$$\{\text{Punkte in } \mathbb{A}^n(k)\} \longleftrightarrow \{\text{maximale Ideale in } k[T]\}$$

einschränkt $x = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto m_x = I(\{x\}) = \ker\big(k[T] \to k,\ T_i \mapsto x_i\big)$

6. Irreduzible top. Räume

Die folgenden top. Begriffe sind nur interessant, da $\mathbb{A}^n(k)$ $(n>0)$ kein Hausdorffscher Raum ist:

Def 12. Ein top. Raum X heißt <u>irreduzibel</u>, wenn $X \neq \emptyset$ und X sich <u>nicht</u> als Vereinigung zweier echter abg. Teilmengen darstellen läßt.

$$\left(X = A_1 \cup A_2,\ A_i \text{ abg.} \Rightarrow A_1 = X \text{ oder } A_2 = X \right)$$

$Z \subset X$ heißt irreduzibel, wenn Z mit der induzierten Top. irreduzibel ist.

Satz 13. Für ein top. Raum X sind äquiv.:

(i) X ist irreduzibel

(ii) Je zwei nicht-leere offene Teilmengen von X haben nicht-leeren Durchschnitt

(iii) Jede nichtleere <u>offene</u> Teilmenge $U \subset X$ ist dicht in X

(iv) — " — ist zusammenhängend

(v) Jede — " — ist irreduzibel.

Bew.: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) Komplementärmengen!

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) da $U \subset X$ dicht $\Leftrightarrow$ $U \cap O \neq \emptyset$ für jede offene Menge $\emptyset \neq O \subset X$

(iv) $\Rightarrow$ (ii) klar

"$\Leftarrow$": Sei U offen und unzusammenhängend

$\Rightarrow U = U_1 \dot\cup U_2$, $\underset{\neq\emptyset}{U_i} \subset \underset{\text{offen}}{U} \subset \underset{\text{offen}}{X}$ ↯ $\underset{\text{(ii)}}{U_1 \cap U_2 = \emptyset}$

(v) $\Rightarrow$ (i) klar

(iii) $\Rightarrow$ (v): Sei $\underset{\neq\emptyset}{U} \subset X$ offen, $\emptyset \neq V \underset{\text{offen}}{\subseteq} U \Rightarrow V \underset{\text{offen}}{\subseteq} X$

$\Rightarrow V$ dicht in X, insbesondere in $U \overset{\text{(ii)}\Rightarrow\text{(iii)}}{\Rightarrow} U$ irreduzibel $\square$

Lemma 14. Eine Teilmenge Y eines top. Raumes X ist genau dann irreduzibel, wenn ihr Abschluß $\overline{Y}$ dies ist.

Bew.: Y irred $\Leftrightarrow$ $\forall$ $U, V \subset X$ offen mit $U \cap Y \neq \emptyset \neq V \cap Y$

gilt $Y \cap (U \cap V) \neq \emptyset$

$\Leftrightarrow$ $\overline{Y}$ irred

da $O \cap Y \neq \emptyset \Leftrightarrow O \cap \overline{Y} \neq \emptyset$ für $O \subset X$ offen $\square$

Def 15. Eine max. irreduzible Teilmenge eines top. Raumes X heißt irreduzible Komponente von X.

Bem 16. (i) Jede irreduzible Komponente ist abgeschlossen nach Le. 14

(ii) X ist die Vereinigung seiner irreduziblen Komponenten

denn: Die Menge der irred Teilmengen von X ist induktiv geordnet: für jede aufsteigende Kette irreduzibler Teilmengen ist die Vereinigung wieder irreduzibel. (mit 13 (i) oder (ii))

Lemma v. Zorn $\Rightarrow$ Jede irreduzible Teilmenge ist in einer irred. Komponente enthalten $\Rightarrow$ jeder Punkt ... $\square$

7. Irreduzible affine algebraische Mengen

Lemma 17. Eine alg. Teilmenge $Z \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ ist genau dann irreduzibel, wenn $I(Z)$ ein Primideal ist. Insbesondere ist $\mathbb{A}^n(k)$ irreduzibel.

Bew. Z irred. $\Leftrightarrow \big(Z = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) \Rightarrow V(\mathfrak{a}) = Z$ oder $V(\mathfrak{b}) = Z \big)$

$\bigcap V(f_i) \quad \bigcap V(g_j) = \bigcap_{i,j} \big(V(f_i) \cup V(g_j)\big)$

$\Leftrightarrow$ $\forall f, g \in k[T]$ mit $V(fg) = V(f) \cup V(g) \supseteq Z$ gilt $V(f) \supseteq Z$ oder $V(g) \supseteq Z$

$VI(Z) = Z$
$IV(\mathfrak{a}) = \operatorname{rad} \mathfrak{a}$

$\Leftrightarrow$ $\forall f, g \in k[T]$ mit $fg \in IV(fg) \subseteq I(Z)$ gilt $f \in I(Z)$ oder $g \in I(Z)$

$\Leftrightarrow$ $I(Z)$ ist Primideal $\square$

Bem 18. Die Korrespondenz aus Kor. 11 schränkt sich ein zu

$\{$ irred. alg. Teilmengen $\subset \mathbb{A}^n(k) \} \leftrightarrow \{$ Primideale in $k[T] \}$.

8. Quasikompakte und Noethersche top. Räume

Def 19: Ein top. Raum X heißt a) <u>quasi-kompakt</u>, wenn jede offene Überdeckung von X eine endl. Teilüberdeckung besitzt.

(quasi deutet an, daß X i.d. Regel <u>nicht Hausdorffsch</u> ist!)

~~Definition~~ b) <u>noethersch</u>, wenn jede absteigende Kette

$$X \supseteq Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \ldots$$

abg. Teilmengen von X stationär wird.

($\Leftrightarrow$ jede aufsteigende Kette von offenen Teilmengen wird stationär)

Lemma 20: Sei X ein noeth. top. Raum

$\Rightarrow$ (i) Jede abg. Teilmenge Z von X ist noeth.

(ii) Jede offene Teilmenge U von X ist quasi-kompakt.

(iii) Jeder abg. Teilraum Z von X besitzt nur endl. viele irreduzible Komponenten.

Bew: (i) Def., da abg. Mengen in Z auch solche in X sind.

(ii) $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, U_i offen. Annahme: nicht quasi-kompakt

$\Rightarrow \exists\ I_1 \subset I_2 \subset \ldots \subset I$ endliche Teilmengen mit $V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \ldots \neq U$ für $V_j := \bigcup_{i \in I_j} U_i$ $\quad$ ↯ $\boxtimes$

(iii) nicht z.z.: Jeder noeth. Raum ist Vereinig. endl. viele irred. Teilmengen.

X noeth $\overset{\text{Zorn?}}{\Longrightarrow}$ Jede nicht-leere Menge von abg. Teilmenge von X besitzt ein minimales Elt.

A: $\emptyset \neq \mathcal{M} := \{ Z \subset X \text{ abg} \mid Z$ ist <u>nicht</u> endl. Vereinig. irred. Mengen $\}$

$\Rightarrow \exists$ minimales Elt, sagen wir Z, in $\mathcal{M}$

$\Rightarrow$ Z ist nicht irreduzibel

$\Rightarrow$ $Z = Z_1 \cup Z_2$ mit $Z_1, Z_2 \subsetneq Z$ abg.

$\overset{Z \text{ minimal}}{\Longrightarrow}$ $Z_1, Z_2 \notin \mathcal{M}$ $\Rightarrow$ $Z \notin \mathcal{M}$ ↯ ☐

<u>Satz 21.</u> Jeder abg Teilraum $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ ist noethersch.

<u>Bew</u> nur z.z.: $\mathbb{A}^n(k)$ ist noethersch.

absteigende Kette von abg Teilm. $\underset{\text{Kor. 11}}{\overset{\text{II})}{\longleftrightarrow}}$ aufsteigende Kette von (Radikal)-Ideale in $k[T]$

Letzte Kette wird stationär, da $k[T]$ noethersch (Hilbertscher Basissatz) ☐

<u>Kor 22.</u> (Primärzerlegung) Sei $\mathfrak{a} = \operatorname{rad} \mathfrak{a} \subseteq k[T]$ ein Radikalideal.

$\Rightarrow$ $\mathfrak{a}$ ist Durchschnitt von endl. vielen Primidealen, die sich paarweise nicht enthalten; diese Darstellung ist bis auf Reihenfolge eindeutig

Bew. $V(\mathfrak{a}) = \bigcup_{i=1}^{n} V(\mathfrak{b}_i)$ irred. Komponenten

$\mathfrak{a} = \mathrm{rad}(\mathfrak{a}) = I V(\mathfrak{a}) = \bigcap_{i=1}^{n} I V(\mathfrak{b}_i)$

minimale Primideale (Le. 17) $\square$

9. Morphismen von affinen algebraischen Mengen

Polynomiale Abb.

Def. 23. Seien $X \subseteq \mathbb{A}^m(k)$, $Y \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine alg. Mengen.

Ein Morphismus $X \to Y$ affiner alg. Mengen ist eine Abb $f: X \to Y$ der zugrundeliegenden Mengen, so daß $f_1, \ldots, f_n \in k[T_1, \ldots, T_m]$ ex., d.d. $\forall x \in X$ gilt:

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)).$$

Bez. $\mathrm{Hom}(X, Y)$ Menge der Mor. $X \to Y$

Bem 24. $f: X \to Y$ läßt sich immer fortsetzen zu Morph. $f: \mathbb{A}^m(k) \to \mathbb{A}^n(k)$ (aber nicht eindeutig, es sei denn $X = \mathbb{A}^m(k)$)

Komposition:
$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{A}^n & & \mathbb{A}^m & & \mathbb{A}^r \\ \cup & & \cup & & \cup \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$
Morphismen gegeben durch

$$f_1, \dots, f_m \in k[T_1, \dots, T_n] \qquad g_1, \dots, g_r \in k[T_1', \dots, T_m']$$

$$\Rightarrow \quad g(f(x)) = \Big(\underbrace{g_1(f_1(x), \dots, f_m(x))}_{h_1}, \dots, \underbrace{g_r(f_1(x), \dots, f_m(x))}_{h_r} \Big)$$

d.h. $g \circ f$ ist durch Polynome $h_i \in k[T_1, \dots, T_n]$ gegeben, d.h. $g \circ f$ ist wieder ein Morphismus affiner alg. Mengen. Wir erhalten

Kategorie affiner alg. Mengen

Bsp 25: a)
$$\begin{aligned} \mathbb{A}^1(k) &\longrightarrow V(T_2 - T_1^2) \subseteq \mathbb{A}^2(k) \\ x &\longmapsto (x^2, x) \end{aligned}$$
ist sogar Isomorphismus aff. alg. Mengen, denn Umkehrabb.
$$(x, y) \longmapsto y$$
ebenfalls ein Morphismus.

b) $\mathrm{char}(k) \neq 2$.
$$\begin{aligned} \mathbb{A}^1(k) &\longrightarrow V(T_2^2 - T_1^2(T_1 + 1)) \\ x &\longmapsto (x^2 - 1, x(x^2 - 1)) \end{aligned}$$
ist ein Morphismus, aber nicht bijektiv, da $1, -1$ beide auf $(0,0)$ abgebildet werden.

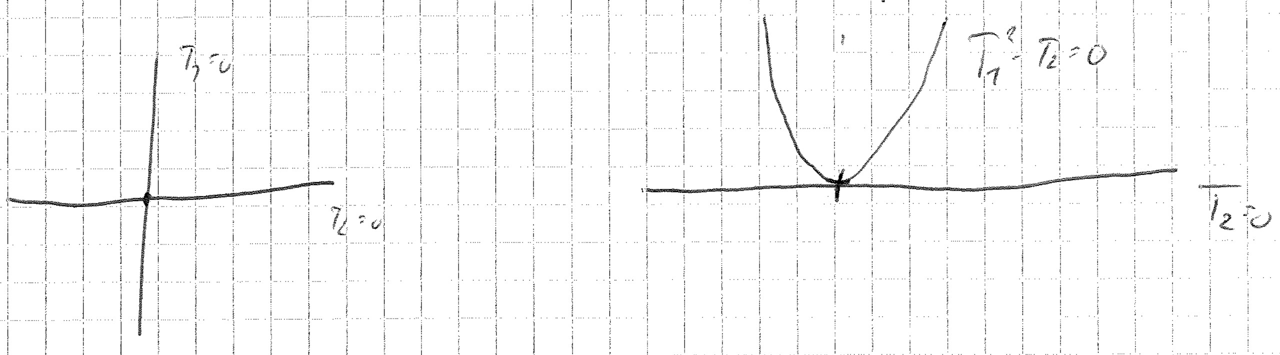
10. Unzulänglichkeiten des Begriffs der affinen alg. Menge

i) offene Teilmenge affiner alg. Menge trägt nicht in natürlicher Weise die Struktur einer affinen alg. Menge.

ii) Insbesondere können wir aff. alg. Mengen nicht entlang off. Teilmengen verkleben
(vgl. Mannigfaltigkeiten, „natürliche Operation" für geometr. Objekte)

iii) Keine Unterscheidungsmöglichkeit z.B. zwischen

$$\{(0,0)\} = V(T_1) \cap V(T_2) \quad \text{und} \quad V(T_2) \cap V(T_1^2 - T_2) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$$



obwohl „geometr. Situation" offensichtlich verschieden.

i)/ii) wird im folgenden dadurch gelöst, dass wir zu Räumen mit Funktionen übergehen und darauf verzichten, dass sich diese in einen affinen Raum $\mathbb{A}^n$ einbetten lassen.

iii) Nilpotente, später Schemata einzuführen (nützlich)

Affine alg. Mengen & Räume und Funktionen

11. Der affine Koordinatenring

Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ abg. ~~Betrachte~~ Für die ungeltesten (Def ~ Appl?)

k-Algebren-Homom.

$$k[T] \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Hom}(X, \mathbb{A}^1(k))$$
$$f \longmapsto (x \longmapsto f(x))$$

Morph. aff alg. Mengen,

wobei die Morphismen in folgender Weise eine k-Algebra bilden:

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \qquad f,g \in \mathrm{Hom}(X, \mathbb{A}^1(k))$$
$$(fg)(x) := f(x)\, g(x)$$
$$(\alpha f)(x) := \alpha f(x) \qquad \alpha \in k$$

gilt: $\mathrm{Ker}\,\varphi = I(X)$

Def 26.

$$\Gamma(X) := k[T]/I(X) \cong \mathrm{Hom}(X, \mathbb{A}^1(k))$$

heißt der <u>affine Koordinatenring</u> von X.

Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$ gilt:

$$m_x := \ker \begin{pmatrix} \Gamma(X) \longrightarrow k \\ f \longmapsto f(x) \end{pmatrix} \quad \text{Einsetzungsabb.}$$

$$= \{ f \in \Gamma(X) \mid f(x) = 0 \}$$

$$\overset{\ker(\Gamma(\mathbb{A}^n(k)) \to k)}{=} \text{Bild von } (T_1 - x_1, \dots, T_n - x_n) \text{ unter Projekt.}$$

$$\pi: k[T] = \Gamma(\mathbb{A}^n(k)) \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \Gamma(X)$$
$$f \longmapsto f|_X$$

ist ein max. Ideal in $\Gamma(X)$ mit $\Gamma(X)/m_x = k$

Für ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq \Gamma(X)$ setze

$$V(\mathfrak{a}) = \{ x \in X \mid f(x) = 0 \ \forall f \in \mathfrak{a} \} = V(\pi^{-1}(\mathfrak{a})) \cap X,$$

dies sind genau die abg. Menge X als Teilraum von $\mathbb{A}^n(k)$ mit der induzierten Topologie, die wird Zariski-Top genannt wird.

Für $f \in \Gamma(X)$ setze

$$D(f) = \{ x \in X \mid f(x) \neq 0 \} = X \setminus V(f)$$

Lemma 27. Die offenen Mengen $D(f)$, $f \in \Gamma(X)$, bilden eine Basis der Topologie, d.h.
$\forall U \subset X$ offen $\exists f_i \in \Gamma(X)$, $i \in I$, mit $U = \bigcup_{i \in I} D(f_i)$.

Bew.: $U = X \setminus V(\mathfrak{a})$ für ein $\mathfrak{a} \subset \Gamma(X)$ Ideal gegeben.
$\mathfrak{a} = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$

$\Rightarrow$ $V(\mathfrak{a}) = \bigcap_{i=1}^{n} V(f_i)$ gilt.

$$U = \bigcup_{i=1}^{n} D(f_i)$$

Es reichen also sogar endlich viele f_i! $\square$

Satz 28: Der Koordinatenring $\Gamma(X)$ einer affinen alg. Menge X ist eine endl. erz. k-Algebra, die reduziert ist (d.h. keine nilpotenten Elt. $\neq 0$ enthält). Ist ferner
X irreduzibel $\Leftrightarrow$ $\Gamma(X)$ ist integer.

Bew.: $k[T] \twoheadrightarrow \Gamma(X)$ impl. "endl. erz. k-Algebra"

$\Gamma(X)$ reduz. $\Leftrightarrow$ $I(X) = \operatorname{rad} I(X)$ (Satz 10 (i), Le. 11: $X = V(\mathfrak{a})$, $I(X) = \operatorname{rad}(\mathfrak{a})$ bzw. $\Rightarrow \operatorname{rad} I(X) = \operatorname{rad}\operatorname{rad}\mathfrak{a} = \operatorname{rad}\mathfrak{a} = I(X)$)

Le. 17
X irred $\Leftrightarrow$ $I(X)$ Primideal
$\Leftrightarrow$ $\Gamma(X) = k[T]/I(X)$ integer $\square$

✓ 14.10.08

12. Funktorielle Eigenschaften von $\Gamma(X)$

Satz 29: Für $f: X \to Y$ ein Morph. aff. alg. Mengen def

$$\Gamma(f): \underbrace{\mathrm{Hom}(Y, \mathbb{A}^1(k))}_{\Gamma(Y)} \longrightarrow \underbrace{\mathrm{Hom}(X, \mathbb{A}^1)}_{\Gamma(X)}$$

$$g \longmapsto g \circ f$$

ein Hom. von k-Algebren. Der so def. kontravariante Funktor

$$\Gamma: \{\text{aff. alg. Mengen}\} \longrightarrow \{\text{red. endl. erz. } k\text{-Alg}\}$$

liefert eine Kategorien-Äquivalenz, die durch Einschränkung eine Äquivalenz

$$\Gamma: \{\text{irred. aff. alg. Mengen}\} \longrightarrow \{\text{integre endl. erz. } k\text{-Algebren}\}$$

induziert.

Bew: $g: Y \to \mathbb{A}^1(k) \in \Gamma(Y)$ ist Morph.

$\Rightarrow g \circ f: X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} \mathbb{A}^1(k)$ ist Morph, d.h. in $\Gamma(X)$.

$\Gamma(f): \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$ ist k-Alg-Hom nach

Kompositionsregeln (nach Bem. 24) ist $\Gamma(id_X) = id_{\Gamma(X)}$.

Da ferner $\Gamma(f_2 \circ f_1) = \Gamma(f_1) \circ \Gamma(f_2)$ aus der Def. folgt, ist

Γ ein kontrav. Funktor.

Bem.: Γ ist volltreu, d.h.

$$\Gamma : \mathrm{Hom}(X,Y) \to \mathrm{Hom}(\Gamma(Y), \Gamma(X)) \text{ ist bijektiv}$$
$$f \mapsto \Gamma(f)$$

für alle aff. alg. Mengen X, Y.

Dann: konstruieren wir Umkehrabb. wie folgt:

Zu $\varphi : \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$ für $X \subseteq \mathbb{A}^n$, $Y \subseteq \mathbb{A}^m$

ex.

$$\begin{tikzcd} k[T_1', \dots, T_m'] \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[d, "\pi"] & k[T_1, \dots, T_n] \arrow[d] \\ \Gamma(Y) \arrow[r, "\varphi"] & \Gamma(X) \end{tikzcd}$$

so daß kommutiert ($\widetilde{\varphi}(T_i') :=$ beliebiges Urbild von $\varphi(\pi(T_i'))$ in $k[T]$)

Definiere $f : X \to Y$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(\widetilde{\varphi}(T_1')(x_1, \dots, x_n), \dots, \widetilde{\varphi}(T_m')(x_1, \dots, x_n)\right)$$

Bem. Γ ist essentiell surjektiv, d.h. zu jeder red. endl. erz. k-Algebra A ex. eine aff. alg. Menge X mit $A \cong \Gamma(X)$

Denn: nach Vor. $A \cong k[T]/\mathfrak{a}$ für Radikalideal $\mathfrak{a}$, können wir also $X := V(\mathfrak{a}) \subset \mathbb{A}^n(k)$ setzen.

Rest folgt aus Satz 28 $\square$

Satz 30: $X \xrightarrow{f} Y$ Morph. und
$\Gamma(Y) \xrightarrow{\Gamma f} \Gamma(X)$ Hom der Koordinatenringe

$\Rightarrow \forall x \in X: \quad \Gamma(f)^{-1}(m_x) = m_{f(y)}$

Bew.:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(Y) & \xrightarrow{\Gamma f} & \Gamma(X) \\ \| & g \longmapsto g\circ f & \| \\ Hom(Y, \mathbb{A}^1) & & Hom(X, \mathbb{A}^1) \\ \cup & & \cup \\ m_{f(x)} = \{g(f(x))=0\} & & m_x = \{f(x)=0\} \end{array}$$

$\Gamma(f)^{-1}(m_x) = \{ g \in \Gamma(Y) \mid g\circ f(x) = 0\} = m_{f(x)}$,

da $\Gamma(f)(g)(x) = g(f(x))$ ∎

13. Räume mit Funktionen

(Prototyp eines geometr. Objekts, Spezialfall eines "geringten Raumes" später)

Def 31: Sei K ein Körper nicht unbedingt alg. abg.

(1) Ein Raum mit Funktionen besteht aus den folgenden Daten

- ein top. Raum X

- eine Familie von Unter-K-Algebren

$$\mathcal{O}(U) \subseteq \mathrm{Abb}(U,K), \ \forall\, U \subseteq X \text{ offen s.d.}$$

(a) Sind $U' \subset U \subset X$ offen und $f \in \mathcal{O}(U)$,

so ist $f|_{U'} \in \mathrm{Abb}(U',K)$ in $\mathcal{O}(U')$.

(b) (Verklebungsaxiom)

Sind $U_i \subset X$, $i \in I$ offen, ist $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ und

sind $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$, $i \in I$, gegeben mit

$$f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j} \qquad \forall\, i,j \in I$$

dann ~~$(\exists_1\ f \in \mathcal{O}(U)$ mit$)$~~

ist die eindeutige Abb. $f: U \to K$ mit $f|_{U_i} = f_i$ in $\mathcal{O}(U)$ (d.h. $\exists_1 f \in \mathcal{O}(U)$ s.d. $f|_{U_i} = f_i$)

<u>Bez</u> $\mathcal{O}$ oder $\mathcal{O}_X$ bez. die o.g. Familie

$(X, \mathcal{O}_X)$ oder kurz X bez. ~~daß~~ Raum mit Fkt.

(2) Ein <u>Morphismus</u>

$$(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{g} (Y, \mathcal{O}_Y)$$

zw. <u>Räumen mit Fkt.</u> ist eine stetige Abb.

$g: X \to Y$, so dass für alle $V \subseteq Y$ offen und $f \in \mathcal{O}_Y(V)$ gilt:

$$f \circ g|_{g^{-1}(V)} : g^{-1}(V) \to K \quad \text{liegt in } \mathcal{O}_X(g^{-1}(V))$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] & Y \\
g^{-1}(V) \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r, "g|"] \arrow[d, "f \circ g|_{g^{-1}(V)}"'] & V \text{ offen} \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[d, "f"] \\
K \arrow[r, phantom, "="] & K \\
\mathcal{O}_X(g^{-1}(V)) & \mathcal{O}_Y(V) \arrow[l] \arrow[u, phantom, "\ni"]
\end{tikzcd}$$

Die Räume mit Flt. über K bilden eine Kategorie!

Def 32 (offene Unterräume mit Flt.)

Für $(X, \mathcal{O}_X)$ und $U \subset X$ offen bezeichne $(U, \mathcal{O}_{X|U})$ den Raum mit Flt gegeben durch den top. Raum U mit Flt.

$$\mathcal{O}_{X|U}(V) := \mathcal{O}_X(V) \text{ für } V \subset U \text{ offen.}$$

Ab jetzt: R. m. F. über alg. abg. k

14. Der Raum m. Fkt zu einer affinen alg. Menge

<u>Ziel:</u>

$$X \subseteq \mathbb{A}^n(k) \longmapsto (X, \mathcal{O}_X)$$

<u>irred.</u> aff. alg. Mg   Zarisk.-Top.

D.h. wir müssen Mengs-Fkt. $\mathcal{O}_X(U)$ auf U, $U \subseteq X$ off. def.

Diese werden als Teilring des Funktionenkp. $K(X)$ def.

(dazu X irred., später ~~fällt~~ bei Schemata fällt diese Einschränkg weg)

<u>Def 33.</u> $K(X) := \mathrm{Quot}(\Gamma(X))$ heißt der <u>Funktionenkp.</u> von X ($\Gamma(X)$ ist für X irred. nullteilerfrei!)

Elt $\frac{f}{g} \in K(X)$, $f, g \in \Gamma(X) = \mathrm{Hom}(X, \mathbb{A}^1)$, $g \neq 0$

kann sich zumindest als Fkt auf $D(g) \subset X$

auffassen, wenn auch nicht i.a. ~~überall~~ ganz X!

Lem 34. Gilt für $\frac{f_1}{g_1}, \frac{f_2}{g_2} \in K(X)$ $(f_i, g_i \in \Gamma(X))$

und ein offene Teilm. $\emptyset \neq U \subset D(g_1 g_2)$

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \quad \forall\, x \in U,$$

dann folgt $\quad \frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2}$ in $K(X)$

Bew. OE $\quad g_1 = g_2 = g \quad$ (sonst Erweitern!)

$\Rightarrow \quad (f_1 - f_2)(x) = 0 \quad \forall\, x \in U$

$\Rightarrow \quad U \subset V(f_1 - f_2) \subset X$ dicht, d.h. $V(f_1 - f_2) = X$

$\Rightarrow \quad f_1 - f_2 = 0 \; \square \qquad \Rightarrow f_1 - f_2 \in I(V) = I(X) = (0)$

Def 35. X irred. aff. alg. Vty, $U \subset X$ offen

$\Gamma(X)_{m_x}$ Lokalisierung von $\Gamma(X)$ bzgl. max. Ideal m_x zu $x \in X$

$$O_X(U) := \bigcap_{x \in U} \Gamma(X)_{m_x} \subset K(X)$$

für jedes $x \in U$ Darst. ... $g(x) \neq 0$

(Wenn $f \in \Gamma(X)$ bez. $\Gamma(X)_f$ die Lokal. von $\Gamma(X)$ bzgl. die mult. abg. Teilm. $\{1, f, f^2, \ldots, f^n, \ldots\}$. Dann ist

$$\Gamma(X)_{m_x} = \bigcup_{\substack{f \in \Gamma(X) \setminus m_x \\ f(x) \neq 0}} \Gamma(X)_f \subset K(X)$$

"$\supset$" klar, "$\subset$": $\frac{g}{f} \in \Gamma(X)_f$ auch

Es gilt:

(i) $\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathrm{Abb}(U,k)$ ist injektiv (Lem. 3.4)

$f \longmapsto \left(x \longmapsto f(x) := \frac{g(x)}{h(x)} \in k\right)$ + wohldef. (kürzen/erweitern)

wobei $g, h \in \Gamma(X)$ mit $h \notin m_x$ nach Def. von $\mathcal{O}_X(U)$ ex.

mit $f = \frac{g}{h}$

(ii) Für $V \subset U \subset X$ offen kommut.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(V) & \longrightarrow & \mathrm{Abb}(V,k) \\ \text{Def.!} \ \cup & & \uparrow \ \text{Einschränkungsabb.} \\ \mathcal{O}_X(U) & \longrightarrow & \mathrm{Abb}(U,k) \end{array}$$

(iii) Verklebungseigenschaft: $U = \bigcup U_i$

$$\mathcal{O}_X(U) = \bigcap_i \mathcal{O}_X(U_i) \subset K(X)$$

$f_i : U_i \to k$ def. $f : U \to k$ in

$$\begin{array}{l} \mathcal{O}_X(U_i) \ni f_i \\ \qquad \cap \ \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j) \subset K(X), \text{ d.h. } f_i = f_j \text{ in } K(X) \\ \mathcal{O}_X(U_j) \ni f_j \qquad f_i = f_j \end{array}$$

Bew.

$\Rightarrow$ $(X, \mathcal{O}_X)$ ist Raum mit Fkt.,

da der zu ind. aff. alg. Mg. gehörige Raum mit Fkt. ✓

Satz 33 Für $(X, \mathcal{O}_X)$ (zu ~~X~~ wie oben) und $f \in \Gamma(X)$

gilt:

$$\mathcal{O}_X(D(f)) = \Gamma(X)_f,$$

insbesondere $\mathcal{O}_X(X) = \Gamma(X)$.

Bew. $\Gamma(X)_f \subset \mathcal{O}_X(D(f))$ klar, da $f(x) \neq 0 \ \forall x \in D(f)$
bzw. $f \in \Gamma(X) \setminus m_x$.

Sei nun $g \in \mathcal{O}_X(D(f))$

und $\mathfrak{a} := \{h \in \Gamma(X) \mid hg \in \Gamma(X)\} \subset \Gamma(X)$ Ideal!

$g \in \Gamma(X)_f \Leftrightarrow g = \frac{h}{f^n}$ für ein n ... $f^n \in \mathfrak{a}$ für ein n

ZZ: $f \in \operatorname{rad} \mathfrak{a} = IV(\mathfrak{a})$ (Hilberts Nullstellensatz)

$\Leftarrow$ $f(x) = 0$ für alle $x \in V(\mathfrak{a})$

Ist aber $x \in X$ mit $f(x) \neq 0$, also $x \in D(f)$, so ex.

n. Vor. $f_1, f_2 \in \Gamma(X)$, $f_2 \notin m_x$ mit $g = \frac{f_1}{f_2}$, ~~$\frac{f_1}{f_2}$~~

$\Rightarrow f_2 \in \mathfrak{a} \overset{f_2(x) \neq 0}{\Longrightarrow} x \notin V(\mathfrak{a})$ $\square$

Bem 34. (ii) I. a. existieren für $f \in \mathcal{O}_X(U)$ nicht $g, h \in \Gamma(X)$ mit $f = \frac{g}{h}$ und $h(x) \neq 0 \ \forall x \in U$.

(iii) Alternative Def. von $\mathcal{O}_X$ I.

$$\mathcal{O}_X(D(f)) := \Gamma(X)_f \quad , \forall f \in \Gamma(X)$$

Da $D(f)$ Basis der Top., kann so leichter ein Raum mit Fkt. geben mit dieser Eigenschaft, s. Übung die Existenz zu zeigen —)

(iv) Alt. Def. v. $\mathcal{O}_X$ II

direkt von einer integren endl. erz. k-Algebra A ausgehend (die X bis auf Iso. festlegt), ohne dann "Koordinaten" zu wählen.

$X := \{ \mathfrak{m} \subseteq A \text{ max. Ideal} \}$

$V(\mathfrak{a}) := \{ \mathfrak{m} \subseteq A \text{ max.}, \mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{a} \}$, $\mathfrak{a} \subseteq A$ Ideal

als die abg. Mengen.

$$\mathcal{O}_X(U) := \bigcap_{\mathfrak{m} \in U} A_{\mathfrak{m}} \subset \operatorname{Quot}(A) \quad \text{für } U \subset X \text{ offen.}$$

(vgl. später Schemata).

15. Funktorialität der Konstruktion

Satz 35. $X \xrightarrow{f} Y$ eine stetige Abb. ind. aff alg. Menge

Äquiv.: (i) f ist ein Morph. aff alg. Menge

(ii) $\forall\, g \in \Gamma(Y)$ gilt $g \circ f \in \Gamma(X)$

(iii) f ist ein Morph. von Räumen mit Fkt. dl.

Für alle $U \subseteq Y$ offen und alle $g \in \mathcal{O}_Y(U)$ gilt

$$g \circ f \in \mathcal{O}_X\left(f^{-1}(U)\right).$$

Bew. (i) $\Leftrightarrow$ (ii): Satz 29

(iii) $\Rightarrow$ (ii): $U = X$ + Satz 33.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Betrachte $\varphi: \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$

$$h \mapsto h \circ f$$

Aufgrund der Verklebungsaxiom reicht es, die Bed. für U von der Form $D(g)$ zu zeigen: Es gilt

$$f^{-1}(D(g)) = \{x \in X \mid \underbrace{g(f(x))}_{\varphi(g)(x)} \neq 0\} = D(\varphi(g))$$

φ induziert

$$
\begin{array}{ccc}
\mathcal{O}_Y(D(g)) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{O}_X(D(\varphi(g))) \\
H & \longmapsto & H\circ f \\
\| & & \| \\
\Gamma(Y)_g & \longrightarrow & \Gamma(X)_{\varphi(g)} \\
\dfrac{h}{g^n} & \longmapsto & \dfrac{h\circ f}{(g\circ f)^n}
\end{array}
$$

$h\circ f \in \Gamma(X)$ n. Vor.

$\varphi(g) = g\circ f \in \Gamma(X)$ n. Vor.

$\blacksquare$

Insgesamt haben wir also

<u>Theorem 36:</u> Die obige Konstruktion definiert einen volltreuen Funktor

{irred. aff. alg. Mengen} $\longrightarrow$ {Räume mit Fkt. garben}

<u>Prävarietäten</u>

<u>Ziel:</u> Klasse der aff. alg. Mengen – aufgefaßt als Räume mit Fkt. – durch Verkleben vergrößern.

$(X, \mathcal{O}_X)$ heißt <u>zusammenhängend</u>, falls X als top. Raum zshgd ist.

~~Defin~~ vgl. Def. von Prävarietäten

Def 37: Eine affine Varietät ist ein Raum mit Fkt, der isomorph ist zu dem Raum mit Fkt einer irred. aff. alg. Menge.

Def 38: Eine Prävarietät ist ein zshgd-Raum mit Fkt $(X, \mathcal{O}_X)$, für den eine endl. Überdeckung $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ ex., s.d. $\forall\, i=1,\dots,n$

$(U_i, \mathcal{O}_{X|U_i})$ eine affine Varietät ist.

Ein Morphismus von Prävarietäten ist ein Morphismus der entsprechenden Räume mit Fkt.

Insbesondere sind also affine Varietäten Prävarietäten!

(später: Varietät = "separierte Prävarietät"

affine Varietäten sind stets separiert, daher braucht man nicht von affinen Prävarietäten zu reden!)

Ist X eine affine Varietät schreiben wir oft $\Gamma(X)$ für $\mathcal{O}_X(X)$ (vgl. Seite 33)

Unter einer <u>offenen affinen Überdeckung</u> einer Prävarietät X verstehen wir eine Familie von offenen Unterräumen mit Fkt. $U_i \subset X$, $i \in I$, die affine Varietäten sind, und so dass $X = \bigcup_i U_i$.

<u>17. Vergleich mit differenzierbaren/komplexen Mfgk.</u>

Differenz./komplexe Mannigf. beschreibt man üblicherweise via Kartenabb. mit diff./holomorphen Übergangsabb.
(hier problematisch, da offene Teile von aff. ...)
<u>jedoch:</u>

$$\{\text{diff. Mfgk.}\} \longrightarrow \{\text{Räume mit Fkt.}/\mathbb{R}\}$$
$$X \longmapsto (X, \mathcal{O}_X)$$
$$\mathcal{O}_X(U) := C^\infty(U), \quad U \subset X \text{ offen}$$

ist volltreuer ~~Fkt.~~ Funktor.

$(X, \mathcal{O}_X)$

Daher kann man diff. Mfgk. als diejenigen R. m. Fkt./$\mathbb{R}$ def., für die X Hausdorffsch ist und so daß eine off. Überd. durch solche R. m. Fkt. existiert, die iso zu in dieser Weise off. Teilmg. in $\mathbb{R}^n$ zugeordnet sind.
(Analog für <u>komplexe</u> Mfgk.!)

18. Top. Eig. von Prävarietäten

Lemma 39. Für ein top. Raum X und $U \subseteq X$ offen haben wir eine Bijektion

$$\{ Y \subseteq U \text{ irred. abg.} \} \longleftrightarrow \{ Z \subseteq X \text{ irred. abg. und } Z \cap U \neq \emptyset \}$$
$$Y \longmapsto \overline{Y} \quad (\text{Abschluss in } X)$$
$$Z \cap U \longleftarrow Z$$

Bew.: Nach Lemma 14 ist $Y \subset X$ irred $\Leftrightarrow$ $\overline{Y} \subset X$ irred

$Y \subseteq U$ abg $\Leftrightarrow \exists\, A \subset X$ abg mit $Y = U \cap A$ $\Rightarrow Y \subset \overline{Y} \subset A$
Y irred $\Rightarrow \overline{Y}$ irred. $\Rightarrow Y = U \cap \overline{Y}$

$\emptyset \neq Z \cap U \subset Z$ offen, dicht, da Z irred. (Satz 13 (v)) $\Rightarrow \overline{Z \cap U} = Z$ ☐

Satz 40: Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ eine Prävarietät

$\Rightarrow X$ noeth (insb. quasikompakt) und irreduzibel

Bew.: Sei $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ endl. offene aff. Überdeckung und

$X \supset Z_1 \supset Z_2 \ldots$

eine absteigende Kette abg. Teilmengen.

$\Rightarrow$ $U_i \supset U_i \cap Z_1 \supset U_i \cap Z_2 \supset \dots$

ist absl. Kette abg. Teilmengen in U_i

endl. Wiederholg

$\Rightarrow \exists\, N_0 \geq 0$, so dass $\forall\, i = 1, \dots, n$, $\forall\, N \geq N_0$ gilt

$$U_i \cap Z_N = U_i \cap Z_{N+1}$$

$\Rightarrow$ (Z_j) wird stationär $\left(Z_N = \bigcup U_i \cap Z_N \right)$

$\Rightarrow$ X noeth.

Nun sei $X = X_1 \cup \dots \cup X_n$ die Zerlegung in irred. Komp.

A: $n \geq 2$

$\Rightarrow \exists\, i_0 \in \{2, \dots, n\}$ mit $X_1 \cap X_{i_0} \neq \emptyset$

(Andernfalls gilt $X = \underset{\text{abg}}{X_1} \cup \underbrace{X \setminus X_1}_{\substack{= \\ X_2 \cup \dots \cup X_n \\ \text{abg.}}}$ ↯ da X zshgd)

OE $i_0 = 2$: Sei $x \in X_1 \cap X_2$, $x \in U \subset X$ off. affine Umgeb.

U irred $\Rightarrow$ $\overline{U}^{(\subset X)} \subset X_j$ für ein $j \in \{1, \dots, n\}$

jedoch: $x \in X_i \cap U \subset U$ irred und $\overline{X_i \cap U} = X_i$, $i = 1, 2$

nach Lemma 39; $\overline{U} \subset X_j$

$\Rightarrow$ $X_1, X_2 \subset X_j$ ↯ $\square$ ✓ 21.10.08

19. Offene Untervarietäten

„Offene Teilmengen von affinen Varietäten (allg. bel. Prävarietät) sind wieder Prävarietäten"!
(aber i.a. nicht affin!)

Lemma 41. X affine Var., $f \in \mathcal{O}_X(X)$, $D(f) \subseteq X$

$\Gamma(X)_f = \Gamma(X)[T]/(Tf-1)$ Lokalis. von $\Gamma(X) = \mathcal{O}_X(X)$ nach f ist integre endl. erzeugte k-Algebra

$(Y, \mathcal{O}_Y)$ dazu assoz. affine Var.

$\Rightarrow$ $(D(f), \mathcal{O}_{X|D(f)}) \cong (Y, \mathcal{O}_Y)$ als Räume m. Fkt.,

d.h. $(D(f), \mathcal{O}_{X|D(f)})$ ist affine Varietät.

Bew: $\mathcal{O}_X(D(f)) = \mathcal{O}_X(X)_f$ muss affiner Koordinatenring von $(D(f), \mathcal{O}_{X|D(f)})$ sein, wenn letzt. R. m. Fkt. affin ist.

$X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ korrespondiere zu Radikalideal $\mathfrak{a} = I(X) \subseteq k[T_1, \dots, T_n] \subset k[T_1, \dots, T_n, T_{n+1}]$

$\mathfrak{a}' := (\mathfrak{a}, fT_{n+1} - 1) \subseteq k[T_1, \dots, T_{n+1}]$

$\Rightarrow$ $\Gamma(Y) = \Gamma(X)_f = k[T_1, \dots, T_{n+1}]/\mathfrak{a}'$, d.h.
$Y \cong V(\mathfrak{a}') \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(k)$.

$$\ni \frac{1}{f(x_1,\dots,x_n)} =: y$$

$$\begin{array}{ccccc}
Y & \subset & \mathbb{A}^{n+1}(k) & & (x_1,\dots,x_n,x_{n+1}) \\
\text{Morph.} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
X & \subset & \mathbb{A}^{n}(k) & & (x_1,\dots,x_n)
\end{array}$$

induziert Bijektion $Y \xrightarrow{j} D(f)$

(Umkehrabb. $\left(x_1,\dots,x_n,\frac{1}{f(x_1,\dots,x_n)}\right) \leftarrow\!\shortmid (x_1,\dots,x_n)$)

__Bew__ j ist Isom. v. R. m. Fkt.

1) j ist stetig (als Einschr. einer stet. Abb.) $\Big\}$ j Homöomorph.

2) j ist offen:

$$j\left(D\left(\frac{g}{f^N}\right)\right) \overset{f^N \text{ Einheit}}{=} j\left(D(gf)\right) \overset{j \text{ Bijektion}}{=} D(gf)$$

$\frac{g}{f^N} \in \Gamma(X)_f = \Gamma(Y)$, $g \in \Gamma(X)$

3) j induziert $\forall g \in \Gamma(X)$ Isom.

$$\mathcal{O}_X(D(g)) \longrightarrow \Gamma(Y)_g$$

$$s \longmapsto s \circ j$$

$$\Gamma(X)_{fg}$$

$$(\Gamma(X)_f)_g = \Gamma(Y)_g$$

□

Satz 42. (X, O_X) Prävarietät, $U \subseteq X$ offen

$\Rightarrow$ $(U, O_{X|U})$ Prävarietät und

$U \hookrightarrow X$ ist Morph. von Prävarietäten

Bew: X irred. $\Rightarrow$ U zshgd

n. Vor. $X = \bigcup X_i$ affine offene Überdeckung

$\Rightarrow$ $U = \bigcup (X_i \cap U) = \bigcup_{i,j} D_{X_i}(f_{ij})$

$\bigcup (D_{X_i}(f_{ij}))$ Lem. 20

affine Varietäten nach Le. 41.

X noeth. $\Rightarrow$ U quasi-kompakt, d.h. reicht endl. Überd.

$\Rightarrow$ U Prävarietät

$U \overset{i}{\hookrightarrow} X$ stetig klar,

V $\quad$ U off

$U \cap V \subset V$

$O_{X_{|U}}(U \cap V) \ni f_{|U\cap V} := f_{|U \cap V} \Leftarrow f \in O_X(V)$

$O_{X|U}(U\cap V)$ Einschränkungsaxiom. qed

Die off. affinen Teilmengen einer Prävarietät X (= offene $U \subseteq X$ offen mit $(U, O_{X|U})$ affine Varietät) bilden Basis der Top. von X, da X durch off. affine Untervar. überdeckt wird und diese Eig. haben nach Lem. 41.

20. Funktionenkörper einer Prävarietät

Lemma + Def 43. Für eine Prävar. X sind die rat. Funktionenkp. aller nicht-leeren offenen off. Teilmengen in natürlicher Weise zueinander isomorph. Diesen Körper nennen wir den rat. Funktionenkp. von X: $K(X)$.

Bew. $\emptyset \neq U, V \subset X$ offene offene Untervar.
X irred. (n. Satz 40)
$\Rightarrow \emptyset \neq U \cap V \subset U$ offen
Def. $\mathcal{O}_X$
$$\Rightarrow \quad \mathcal{O}_X(U) \subseteq \mathcal{O}_X(U\cap V) \subset K(U) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_X(U\cap V)) = K(U)$$
" Symmetrie
$$\mathrm{Quot}(\mathcal{O}_X(U\cap V)) = K(V) \quad \square$$

Bem 44. $K(\;)$ ist nicht funktoriell:

für $X \xrightarrow{f} Y$ Morph. affiner Var. ist $\Gamma(Y) \to \Gamma(X)$ i.a. nicht injektiv, d.h. es gibt i.a. keinen $K(Y) \not\to K(X)$!

Aber jedoch: Isom. $X \to Y$ induziert $K(Y) \to K(X)$
allg. $X \to Y$ mit Bild $\subset Y$ offen ($\to$ dicht)
(speziell $X \to Y$ dominant, d.h. Bild $\subset Y$ dicht)
induzieren in funktorieller Weise Abb. $K(Y) \hookrightarrow K(X)$.

Satz 45: X Prävar., $V \subseteq U \subseteq X$ offen

$\Rightarrow$ (i) $\mathcal{O}_X(U) \subset K(X)$ k-Unteralgebra

und (ii) $\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$ ist Inklusion von Teilringen von $K(X)$

(iii) Insbesondere gilt für $U, V \subset X$ offen: $\mathcal{O}_X(U \cup V) = \mathcal{O}_X(U) \cap \mathcal{O}_X(V)$.

Bew: $\mathcal{O}(X) \ni f : X \to k \Rightarrow f^{-1}(0) \subseteq X$ abg., da

für $W \subseteq X$ off. affine Teilmenge gilt: $f^{-1}(0) \cap W = V(f|_W)$

("abg." ist lokale Eig. + W bilden Basis der Top.)

$\Rightarrow$ (ii) $\mathcal{O}(U) \hookrightarrow \mathcal{O}(V)$ injektiv für $V \subseteq U \subset X$ off.

$f \mapsto 0 \Rightarrow V \subset f^{-1}(0) \Rightarrow f^{-1}(0) = X \Rightarrow f = 0$.

W affine Varietät $\Rightarrow \mathcal{O}(W) \subset K(W)$ k-Unteralgebra

$$\begin{array}{ccc} W & & \mathcal{O}(W) \\ \cup & & \uparrow \\ U & & \mathcal{O}(U) \end{array} \Rightarrow \text{(i)}$$

(iii) Verklebungsaxiom:
$$\mathcal{O}_X(U \cup V) \to \mathcal{O}_X(U), \quad \mathcal{O}_X(U \cup V) \to \mathcal{O}_X(V)$$

$$0 \to \mathcal{O}_X(U \cup V) \to \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{O}_X(V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U \cap V) \quad \text{exakt}$$
$$f \mapsto (f|_U, f|_V) \mapsto f|_{U\cap V} - f|_{U \cap V}$$
$$(g, h) \mapsto g|_{U \cap V} - h|_{U \cap V}$$ $\square$

21. Abg. Unterprävarietäten

X Prävar., $Z \subseteq X$ abg. irred.

Ziel: $(Z, \mathcal{O}'_Z)$ R. m. Fkt. erklären

Definiere

$$\mathcal{O}'_Z(U) = \{ f \in \mathrm{Abb}(U,k) \mid \forall x \in U \ \exists x \in V_x \subseteq X \text{ off.}, g \in \mathcal{O}_X(V_x) \text{ mit } f|_{U \cap V} = g|_{U \cap V} \}$$

für $U \subseteq Z$ off.

(b.w.)

$\Rightarrow (Z, \mathcal{O}'_Z)$ Raum mit Fkt (klar!)

mit $\mathcal{O}'_X = \mathcal{O}_X$ (~~vgl. Satz 33~~ ~~Def. $\subseteq \mathcal{O}_X$~~)

$\mathcal{O}_X(U) \subseteq \mathcal{O}'_X(U)$ $(V = U, g = f)$

$\supseteq$ (V_x, g_x) induz. (U_i) $\xRightarrow{\text{Verkleb.}} f \in \mathcal{O}_X(U)$ Ausführ., vgl. unten

Lemma 46 $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ irred. aff. alg. Menge

$Z \subset X$ irred. abg.

$\Rightarrow (Z, \mathcal{O}_Z) = (Z, \mathcal{O}'_Z)$

Bez: Ab jetzt stets $\mathcal{O}_Z$ für $\mathcal{O}'_Z$!

Bew: $Z \subseteq X$ ist in beiden Fällen mit Teilraumtop. ausgestattet!

$Z \hookrightarrow X$ Morph. aff. alg. Mengen induz. Morph. $(Z, \mathcal{O}_Z) \to (X, \mathcal{O}_X)$

$\xRightarrow{\text{Def } \mathcal{O}'} f \in \mathcal{O}'_Z(U) \subseteq \mathcal{O}_Z(U)$ für $U \subseteq Z$ off.

$g \in \mathcal{O}_X(V_x) \Rightarrow g|_{Z \cap V_x} \in \mathcal{O}_Z(Z \cap V_x) \Rightarrow g|_{U \cap V_x} \in \mathcal{O}_Z(U \cap V_x) \Rightarrow f|_{U \cap V_x} = g_x|_{U \cap V_x} \in \mathcal{O}_Z(U \cap V_x) \xRightarrow{\text{Verkleb.}} f \in \mathcal{O}_Z(U)$

Sei $f \in O_Z(U)$ und $x \in U$

$\Rightarrow \exists\ h \in \Gamma(Z)$ mit $x \in D(h) \subseteq U$ und

$f|_{D(h)} = \frac{g}{h^n} \in \Gamma(Z)_h = O_Z(D(h))$ für $n \geq 0$, $g \in \Gamma(Z)$ geeignet

Wähle $g, h \in \Gamma(Z) \twoheadleftarrow \Gamma(X)$ zu $\bar{g}, \bar{h} \in \Gamma(X)$

und setze $V := D(\bar{h}) \subseteq X$

$\Rightarrow x \in V$, $\frac{\bar{g}}{\bar{h}^n} \in O_X(D(\bar{h}))$ und $f|_{U \cap V} = \frac{\bar{g}}{\bar{h}^n}\Big|_{U \cap V}$

$\Rightarrow f \in O_Z'(U)$ $\square$

<u>Korollar 47.</u> X Prävar, $Z \subseteq X$ irred abg.

$\Rightarrow (Z, O_Z)$ ist Prävarietät

<u>Bew</u> $X = \bigcup X_i$ ~~[illegible]~~ endl. affine offene Überd.

$\Rightarrow Z = \bigcup \underbrace{(Z \cap X_i)}_{= Z_i}$ und (Z_i, O_{Z_i}) ist aff Var nach Lemma $\square$

Beispiele (Projektive Raum + proj. Varietäten)

22. Homogene Polynome

Def 48 Ein Polynom $f \in k[X_0, \dots, X_n]$ heißt **homogen vom Grad d** $\in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, wenn f die Summe von Monomen vom Grad d ist.
(Insbesondere ist für jedes d das Nullpolynom homog. vom Grad d).

Bez: $k[X_0, \dots, X_n]_d$ UVR der Polynome vom Grad d.

Bem 49 Da $\# k$ unendlich ist, ist f homog. vom Grad d

$$\Leftrightarrow \quad f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d (x_0, \dots, x_n) \quad \forall\, x_0, \dots, x_n \in k,\ \lambda \in k^\times$$

Es gilt $k[X_0, \dots, X_n] = \bigoplus_{d \geq 0} k[X_0, \dots, X_n]_d$

Lemma 50: Für $i \in \{0, \dots, n\}$ und $d \geq 0$ haben wir eine bijektive k-lin. Abb.

$$\Phi_i : k[X_0, \dots, X_n]_d \xrightarrow[1:1]{\text{Dehomogenisierung}} \text{Polynome in } k[T_0, \dots, \widehat{T_i}, \dots, T_n] \text{ vom Grad} \leq d$$

$$f \longmapsto f(T_0, \dots, 1, \dots, T_n)$$

$$X_i^d\, g\left(\frac{X_1}{X_i}, \dots, \widehat{\frac{X_i}{X_i}}, \dots, \frac{X_n}{X_i}\right) \underset{\Psi_i}{\longleftarrow\!\!\shortmid} g$$

Homogenisierung

Bem: Es reicht $\psi_i \circ \phi_i = id$, $\phi_i \circ \psi_i = id$ auf Ebenen nachzurechnen, da alle Abb. k-linear □

Oft ist es nützlich,

$k[T_0, \ldots, T_i, \ldots T_n]$ mit $k\left[\frac{X_0}{X_i}, \ldots, \frac{X_i}{X_i}, \frac{X_n}{X_i}\right] \subset k(X_0, \ldots, X_n)$ Unterring

zu identifizieren.

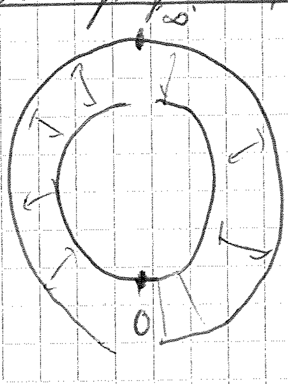
23. Def. des proj. Raumes

$X_1 = X_2 = \mathbb{A}^1$

$U_1 = U_2 = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$

$\mathbb{P}^1 (\mathbb{A}^1 \cup \infty)$

$= U_1 \cup U_2$



$U_1 \longrightarrow U_2$

$x \longmapsto \frac{1}{x}$

Verklebe X_1 und X_2 entlang $U_1 = U_2$ via $\frac{1}{x}$

also $\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i = \mathbb{A}^n \cup \mathbb{P}^{n-1} = \mathbb{A}^n \cup \mathbb{A}^{n-1} \cup \ldots \cup \mathbb{A}^1 \cup \mathbb{A}^0$

vgl. Aufg. 4, Blatt 3

Idee: $\mathbb{P}^2 \supseteq \mathbb{A}^2$ Zwei verschiedene Geraden in $\mathbb{P}^2$ schneiden sich genau in einem Punkt

Als Menge

$$\langle (x_0, \ldots, x_n) \rangle_{k\text{-lin}} \longmapsto (x_0 : \ldots : x_n)$$

$$\mathbb{P}^n(k) := \{ \text{Ursprungsgerade in } k^{n+1} \} = (k^{n+1} \setminus \{0\}) / k^{\times}$$

$\quad\quad \shortparallel$

1-dim k U-VR

Äquivalenzrelation: $(x_0, \ldots, x_n) \sim (x_0', \ldots, x_n') \iff \exists \lambda \in k^{\times}$
$x_i = \lambda x_i' \ \forall i$

Klassen $(x_0 : \ldots : x_n)$, x_i homogene Koordinaten auf $\mathbb{P}^n$

$$U_i := \{ (x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0 \} \subseteq \mathbb{P}^n(k), \ 0 \leq i \leq n$$

ist wohldefiniert! $\Rightarrow x_i = 1$

$$\mathbb{P}^n(k) = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$$

$$U_i \xrightarrow[\text{\quad}]{\cong} \mathbb{A}^n(k) \quad \text{Bijektion von Mengen} \quad \text{bzw.}$$

$$(x_0 : \ldots : x_n) \longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \widehat{\frac{x_i}{x_i}}, \ldots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

$$(x_0 : \ldots x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \ldots : x_n) \longleftarrow\!\mapsto (x_0, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_n)$$

Topologie

$U \subseteq \mathbb{P}^n$ ist offen $:\iff x_i(U \cap U_i) \subseteq \mathbb{A}^n$ offen für alle $i = 0, \ldots, n$

Beachte: $U_i \cap U_j = D(T_j) \subseteq U_i$ offen für $i \neq j$,
wenn man auf $U_i \cong \mathbb{A}^n$ die Koordinaten $T_0, \ldots, \widehat{T_i}, \ldots, T_n$ verwendet.

Dank wird $\mathbb{P}^n(k)$ zu top. Raum, da durch U_i, $0 \le i \le n$, offen gewählt wird!

<u>Reguläre Fkt. en</u>

$U \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ offen

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U) := \{ f \in Abb(U, k) \mid f|_{U \cap U_i} \in \mathcal{O}_{U_i}(U \cap U_i) \quad \forall i \in \{0, \dots, n\} \}$

(Via x_i können wir U_i als R. m. Fkt. auffassen)

Wir erhalten $\mathbb{P}^n(k) = (\mathbb{P}^n(k), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$ als Raum mit Fkt.

✓ 28.10.09

<u>Satz 57</u>: Für $U \subseteq \mathbb{P}^n$ offen gilt:

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U) = \{ f : U \to k \mid \forall x \in U$ ex. $V_x \subseteq U$ offen mit $x \in V_x$ und $g, h \in k[X_0, \dots, X_n]$ homog. vom selben Grad so dass $\forall v \in V$ $h(v) \neq 0$ und $f(v) = \frac{g(v)}{h(v)} \}$

unabhängig von Repr. ($\lambda x_0 : \dots : \lambda x_n$)

$f(\lambda v) = \frac{g(\lambda v)}{h(\lambda v)} = \frac{\lambda^d g(v)}{\lambda^d h(v)} = \frac{g(v)}{h(v)}$

<u>Bew</u>: Sei $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U)$: $\Rightarrow f|_{U \cap U_i} \in \mathcal{O}_{U_i}(U \cap U_i)$

$\Rightarrow f = \frac{\tilde g}{\tilde h}$ lokal, $\tilde g, \tilde h \in k[T_0, \dots, \hat T_i, \dots, T_n]$

$d = \max\{grad(\tilde g), grad(\tilde h)\}$ $\xrightarrow{\text{Homogenis.}}$ $g = \varphi_i^d(\tilde g)$, $h = \varphi_i^d(\tilde h)$

$f = \frac{g}{h}$

b.w.

$f \in$ rechte Seite: fixiere $i \in \{0, \dots, n\}$

lokal auf $U \cap U_i$: f von der Form $\frac{g}{h}$

$g, h \in k[X_0, \dots, X_n]_d$, d geeignet.

$$\tilde{g} = \frac{g}{X_i^d}, \quad \tilde{h} = \frac{h}{X_i^d} \in k\left[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{\widehat{X_i}}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}\right]$$

$\Rightarrow$ f lässt sich lokal d. Form $\frac{\tilde{g}}{\tilde{h}}$, $\tilde{g}, \tilde{h} \in k[T_0, \dots, \widehat{T_i}, \dots, T_n]$

$\Rightarrow$ $f|_{U \cap U_i} \in \mathcal{O}_{U_i}(U \cap U_i)$ □

<u>Korollar 52.</u> Für $i \in \{0, \dots, n\}$ beliebig ist $U_i \xrightarrow{\cong} \mathbb{A}^n(k)$ ein Isom.

$$(U_i, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n|U_i}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{A}^n(k)$$

von Prävarietäten. Insbesondere ist $\mathbb{P}^n(k)$ eine Prävarietät.

<u>Bew.</u> zz: $\forall\, U \subseteq U_i$ offen gilt

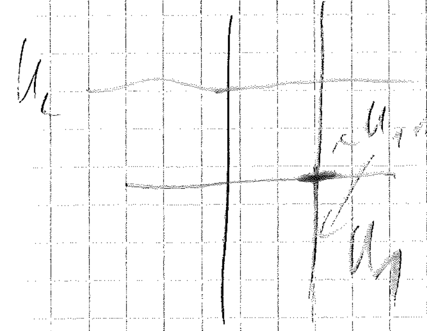
$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n|U_i}(U) = \{ f : U \to k \mid f \in \mathcal{O}_{U_i}(U) \},$$

d.h. auf rechter Seite muß Bed. nur für den Index i überprüft werden. Dies folgt aus d. Bew. des Satzes □

$$K(\mathbb{P}^n(k)) = K(U_i) = k\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)$$

$\downarrow (U_i \cap U_j)$

$$K(U_i \cap U_j) \qquad \frac{x_l}{x_i} \mapsto t_l$$



$$\| \qquad \frac{x_l}{x_j} = \frac{x_l}{x_i} \cdot \frac{x_i}{x_j} \qquad \frac{x_i}{x_j} \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)^{\times}$$

$$K(U_i \cap U_j)$$

$$\cong$$

$$K(U_j) = k\left(\frac{x_0}{x_j}, \dots, \frac{x_n}{x_j}\right) \qquad j = 0$$

$$(1, t_1, \dots, t_n)$$

<u>Satz 53.</u>

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(\mathbb{P}^n(k)) = k$$

Insbesondere ist $\mathbb{P}^n$ für $n \geq 1$ keine affine Varietät.
(da die k-Algebra k zu $\mathbb{A}^0(k) = \{pt\}$ als aff. Varietät entspricht!)

<u>Bew.</u> $k \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(\mathbb{P}^n(k))$ konstante Fkt. klar!

Nach Satz 45: $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mathbb{P}^n) = \bigcap_{i=0}^{n} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U_i) \subset K(\mathbb{P}^n(k))$

obige Identifikation $\Rightarrow$ Bew. $= \bigcap k[t_1, \dots, \hat{t}_i, \dots, t_n] \;\Big|\; K(U_0) = k(t_1, \dots, t_n)$
$= k$

$\square$

24 Projektive Varietät

Def 54. (Abg.) Unterprävarietät eines proj. Raumes $\mathbb{P}^n(k)$ heißen <u>projektive Varietäten</u>

Vorsicht: für $x = (x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n$, $f \in k[X_0, \ldots, X_n]$ ist $f(x_0, \ldots, x_n)$ nicht wohldef., da von Repräsentant abh., d.h. f kann nicht als Fkt auf $\mathbb{P}^n$ aufgefasst werden.

Für <u>homogene</u> Polynome $f_1, \ldots, f_m \in k[X_0, \ldots, X_n]$ (nicht notwendig vom selben Grad) können wir dennoch die Verschwindungsmenge

$$V_+(f_1, \ldots, f_m) \underset{\text{def}}{=} \{(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid f_j(x_0, \ldots, x_n) = 0 \ \forall j\}$$

Da $V_+(f_1, \ldots, f_m) \cap U_i = V(\Phi_i(f_1), \ldots, \Phi_i(f_m))$

ist $V_+(\ \ )$ abg. in $\mathbb{P}^n$

Ist $V_+(f_1, \ldots, f_m)$ irred., so erhalten wir also eine projektive Varietät. In der Tat erhält man alle proj. Var. auf diese Weise

Satz 55: Sei $Z \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ eine alg. Untervarietät. Dann ex. homogene Polynome $f_1, \ldots, f_m \in k[x_0, \ldots, x_n]$, so dass

$$Z = V_+(f_1, \ldots, f_m) \quad \text{gilt.}$$

Bew: Betrachte

$$\begin{array}{c} \mathbb{A}^{n+1}(k) \\ \cup \text{ offen} \\ \mathbb{A}^{n+1}(k) \setminus \{0\} \xrightarrow{\ f\ } \mathbb{P}^n(k) \\ (x_0, \ldots, x_n) \longmapsto (x_0 : \ldots : x_n) \end{array}$$

$f|_{f^{-1}(U_i)} : f^{-1}(U_i) \to U_i$ ist Morph. von Varietäten. $\forall i$

$\Rightarrow$ f ist Morph. von Varietäten.

Für $\emptyset \neq Z \subseteq \mathbb{P}^n$ alg. setze $Y := f^{-1}(Z) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(k) \setminus \{0\}$

$\overline{Y} = Y \cup \{0\}$ Abschluss von Y in $\mathbb{A}^{n+1}(k)$ warum?
Übungsaufgabe!

$\mathfrak{a} := I(\overline{Y}) \subseteq k[x_0, \ldots, x_n]$

Beh: $\mathfrak{a}$ wird von homog. Polynomen erzeugt.

d.h. $g = \sum_d g_d$ Zerlegung in homog. Bestandteile und $\forall d$

$\overline{Y}$ ist Vereinigung von Ursprungsgeraden in k^{n+1},

d.h. $\forall\ \lambda \in k^*$ gilt:

$$g(x_0, \ldots, x_n) = 0 \iff g(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = 0$$

Ann: nicht alle g_d liegen in $\mathfrak{a}$.

$\Rightarrow \exists\ (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^{n+1}(k)$, so dass

$$g(x_0, \ldots, x_n) = 0, \text{ aber } g_d(x_0, \ldots, x_n) \neq 0$$

$$\Rightarrow 0 \neq \sum g_d(x_0, \ldots, x_n)\, T^d \in k[T]$$

$\exists\ \lambda \in k^*$ mit

$\Rightarrow$

$$0 \neq \sum_d g_d(x_0, \ldots, x_n)\, \lambda^d = \sum_d g_d(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n)$$

$$= g(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = 0 \quad \lightning$$

$\Rightarrow \mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_m)$, f_i homogen

$\Rightarrow Z = V_+(f_1, \ldots, f_m)$ ⓐ

letztes Mal: $k[X_0,\dots,X_n] = \bigoplus k[X_0,\dots,X_n]_d$ als grad. Algebra, (7)

$\mathbb{P}^n(k) = (k^{n+1}\setminus\{0\})/k^\times$. $U_i \subseteq \mathbb{P}^n$: $U_i : x_i \neq 0 \cong \mathbb{A}^n_k$

liefert off. Überd. von $\mathbb{P}^n$. $U \subset \mathbb{P}^n$ offen $\Leftrightarrow$ $U \cap U_i$ offen f.a. U_i

$\Rightarrow (U_i)_{0\le i\le n}$ ist offene Überdeckung von $\mathbb{P}^n$. (*)

reguläre Fn? $U \subseteq \mathbb{P}^n$ offen: $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U) = \{ f \in \mathrm{Abb}(U,k) \mid \forall i \in \{0,\dots,n\}: f|_{U\cap U_i} \in \mathcal{O}_{U_i}(U\cap U_i)\}$.

Klar: definiert wegen (*) einen Raum von Fn, ~~[illegible]~~ $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$

Satz 51 Sei $U \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ offen. Dann:

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(U) = \{ f: U \to k \mid \forall x \in U\ \exists V \subseteq U$ offen mit $x \in V$ und $g, h \in k[X_0,\dots,X_n]$ homogen vom selben Grad, sodass $f(v) = \frac{g(v)}{h(v)}\ \forall v \in V\}$.

Bew. Sei $f \in$ links, $\Rightarrow f|_{U\cap U_i} \in \mathcal{O}_{U_i}(U\cap U_i)$: $f = \frac{\tilde g}{\tilde h} \in k[T_0,\dots,\hat T_i,\dots,T_n]$

Homogenisieren bzgl. T_i ~~[illegible]~~ ($\tilde g \mapsto X_i^{\deg \tilde g}\, \tilde g(\frac{X_0}{X_i},\dots,\frac{X_n}{X_i})$, $\tilde h$ analog)

Multipl. mit Potenz von T_i liefert die gew. Form.

Sei $f \in$ rechts: Sei $i \in \{0,\dots,n\}$. lokal auf $U\cap U_i$ hat f die Form $\frac{g}{h}$, $\in k[X_0,\dots,X_n]_d$ $\tilde g := \frac{g}{X_i^d}$, $\tilde h = \frac{h}{X_i^d} \in k[\frac{X_0}{X_i},\dots,\widehat{\frac{X_i}{X_i}},\dots,\frac{X_n}{X_i}]$

$\Rightarrow f$ hat lokal die Form $\frac{\tilde g}{\tilde h}$ mit $\tilde g, \tilde h \in k[T_0,\dots,T_n]$ ~~T_0~~

also $f|_{U\cap U_i} \in \mathcal{O}_{U_i}(U\cap U_i)$ □

Kor 52 Sei $i \in \{0,\dots,n\}$. Bij $U_i \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n(k)$ liefert Iso.

$(U_i, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}|_{U_i}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n(k)$ v. Räumen mit Fn. $\Rightarrow \mathbb{P}^n(k)$ Prävar.

Bew. z.z.: $U \subseteq U_i$ offen: $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(U) = \{ f: U \to k \mid f \in \mathcal{O}_{U_i}(U)\}$.

also nur bei i nachzuprüfen: Nach Beweis des Satzes klar. □

Funktionenkp. von $\mathbb{P}^n(k)$: nach Def (vgl. Lk / Def ^{269}) der Fn kp. ~~[illegible]~~ $k(U_i) = k(\frac{X_0}{X_i},\dots,\frac{X_n}{X_i})$ von U_i, sowie $k(U_i) \cong k(U_i \cap U_j) \subseteq k(U_j)$ gegeben durch

$$\frac{X_\ell}{X_i} \longmapsto \frac{X_\ell}{X_j}\frac{X_i}{X_j} = \frac{X_\ell}{X_j}.$$

Damit

$U_i \cap U_j \ni (x_0:\dots:x_n)$, $(\frac{x_0}{x_j},\dots,\widehat{\ },\dots,\frac{x_n}{x_j}) \longmapsto (\frac{x_0}{x_i},\dots,\widehat{\ },\dots,\frac{x_n}{x_i})$

Satz 53 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(\mathbb{P}^n(k)) = k$. Speziell: $\mathbb{P}^n(k)$ $n \geq 1$ kein affine Vz.

($n=0$: $\mathbb{P}^0$ Punkt und k als reg. Fn.)

Bew. $k \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{P}^n(k))$ klar. (Konstante Fn. Nach Satz 45:

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mathbb{P}^n) = \bigcap \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U_i) \subseteq k(\mathbb{P}^n(k))$

$= \bigcap k[T_1,\dots,\hat T_i,\dots,T_n]$ durch obige Identifikat. in $k(U_i), k(U_j)$

$= k$. □

24 Projektive Varietäten

(2)

Def 54. Abgeschlossene Unterprävarietäten des projektiven Raums $\mathbb{P}^n$ heißen <u>projektive Varietäten</u>.

Vorsicht: für $x = (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n$, $f \in k[X_0, \dots, X_n]$ ist $f(x_0, \dots, x_n)$ i.a. nicht wohldef., d.h. f kann nicht als Fn auf $\mathbb{P}^n$ aufgefasst werden. Für homogene Polynome $f_1, \dots, f_m$ (nicht notw. vom selben Grad) können wir dennoch die Verschwindungsmenge $V_+(f_1, \dots, f_m) = \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid f_j(\dots) = 0 \ \forall j\}$ def.

Da $V_+(f_1, \dots, f_m) \cap U_i = V(\phi_i(f_1), \dots, \phi_i(f_m))$ ist $V_+(\dots)$ abg. in $\mathbb{P}^n$. Ist $V_+(f_1, \dots, f_m)$ irred, so also projektive Varietät.

Umgekehrt gilt:

Satz 55. Sei $Z \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ ~~abgeschl.~~ proj. Varietät. Dann ex. homogene Polynome $f_1, \dots, f_m \in k[X_0, \dots, X_n]$ mit $Z = V_+(f_1, \dots, f_m)$.

Bew. Betrachte

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^{n+1}(k) & & \\ \cup\!\!| & & \\ \mathbb{A}^{n+1}(k) \setminus \{0\} & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^n(k) \\ (x_0, \dots, x_n) & \longmapsto & (x_0 : \dots : x_n) \end{array}$$

(surj., aber nicht injektiv) (Urbilder von Punkten in $\mathbb{P}^n(k)$ sind Ursprungsgerade in $\mathbb{A}^{n+1}$)

$\forall i$ ist die Einschränkung $f|_{f^{-1}(U_i)} \to U_i$ ein Morphismus von Prävarietäten (vgl z.B. Üblatt 3 A2) $\Rightarrow$ f ist selbst Morph. von Prävarietäten. Sei also $Z \subseteq \mathbb{P}$ abg., $Z \neq \emptyset$. $Y = f^{-1}(Z) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(k) \setminus \{0\}$ und $\bar{Y} = Y \cup \{0\}$ Abschluß v. Y in $\mathbb{A}^{n+1}(k)$.

(Denn: Y abg. in $\mathbb{A}^{n+1}$, Vereinigung v. Ursprungsgeraden ohne 0. G eine solche $\Rightarrow$ $\bar{G} \subseteq \bar{Y}$ also 0 dabei, mehr nicht wg $\cap$-Formel;)

Sei $\mathfrak{a} = I(\bar{Y})$ in $k[X_0, \dots, X_n]$. <u>Beh.</u> $\mathfrak{a}$ wird v. homogenen Polynomen erzeugt. Sei also $g \in \mathfrak{a}$, $g = \sum_d g_d$ Zerl. in homog. Best.

z.z.: $g_d \in \mathfrak{a}$. $\bar{Y}$ Vereinigung v. Ursprungsgeraden in k^{n+1},

$\forall \lambda \in k^\times$: $g(x_0, \dots, x_n) = 0 \Leftrightarrow g(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = 0$.

Ang., $\exists g_d \notin \mathfrak{a}$: $\exists (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^{n+1}$ mit $g(x_0, \dots, x_n) = 0$,

$g_d(x_0, \dots, x_n) \neq 0 \Rightarrow \sum g_d(x_0, \dots, x_n) T^d \in k[T]$ nicht das Nullpolyn.

$\Rightarrow \exists \lambda \in k^\times$: $0 \neq \sum g_d(x_0, \dots, x_n) \lambda^d = \sum g_d(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = g(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = 0$

↯. $\Rightarrow \exists f_1, \dots, f_m$ homogen mit $\mathfrak{a} = (f_1, \dots, f_m)$ $\Rightarrow$

$Z = V_+(f_1, \dots, f_m)$

□

Nach Satz 51 und Lemma 46 folgt: ③

Ist X eine projektive Varietät, $U \subseteq X$ offen:

$\mathcal{O}_X(U) = \{ f : U \to k \mid \forall x \in U \; \exists \; V \subseteq U$ offen mit $x \in V$, $g, h \in k[X_0, \dots, X_n]$ homogen vom gleichen Grad mit $h(v) \neq 0$, $f(v) = \frac{g(v)}{h(v)} \; \forall v \in V \}$. vgl. $V \subseteq \mathbb{K}^n$ offen

Insbes. gilt

Prop 56 Seien $V \subseteq \mathbb{P}^m_k$, $W \subseteq \mathbb{P}^n_k$ projektive Varietäten, und $\phi : V \to W$ eine Abb.. Dann ist ϕ ein Morphismus genau dann, wenn zu jedem $x \in V$ eine offene Umg. $U_x \subseteq V$ ~~ex.~~ und homogene Polyn. $f_0, \dots, f_n \in k[X_0, \dots, X_m]$ vom gleichen Grad ex. mit

$\phi(y) = (f_0(y) : \dots : f_n(y)) \; \forall y \in U_x$.

Bew.: "$\Rightarrow$": ü., "$\Leftarrow$": z.z.: i) ϕ stetig, ii) $\forall \; W' \subseteq W$ offen, $g \in \mathcal{O}_W(W')$ ist $g \circ \phi \in \mathcal{O}_V(\phi^{-1}(W'))$. i) ϕ stetig: Sei $Z \subseteq W$ abg., o.E. $Z = V(g) \cap W$ f. ein hom. Polyn. g. $\Rightarrow \phi^{-1}(Z) = V(g \circ \phi) \cap V$

Auf U_x $(x \in V)$ ist $g \circ \phi$ als homog. Polynom in $X_0, \dots, X_n$ gegeben

$\Rightarrow V(g \circ f) \cap U_x = f^{-1}(Z) \cap U_x$ ist abg. in $U_x \; \forall x \Rightarrow$

$f^{-1}(Z)$ ist abg. in V

ii) Sei $x \in \phi^{-1}(W')$, $y = \phi(x) \in W' \Rightarrow \exists$ Umg (offen) U_y in W' mit $g = \frac{p}{q}$ auf U_y und Umg U_x von x in $\phi^{-1}(W')$ mit $\phi = (f_0 : \dots : f_n) \Rightarrow \phi$ auch v. dieser Gestalt auf $U_x \cap \phi^{-1}(U_y)$

$\Rightarrow f_i = g \circ \phi \in \mathcal{O}_V(\underbrace{U_x \cap \phi^{-1}(U_y)}_{U_0}) \rightsquigarrow \exists$ off. Überd. U_i, fn. f_i von $\phi^{-1}(W')$ mit $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j} \Rightarrow \exists! f \in \mathcal{O}_V(\phi^{-1}(W'))$ und $f = g \circ \phi$ auf $\phi^{-1}(W')$.

30.10.08

25. Koordinatenwechsel im projektiven Raum.

Sei $A = (a_{ij})_{i,j=0,\dots,n} \in Gl_{n+1}(k)$ invert. $A: k^{n+1} \to k^{n+1}$

bildet Ursprungsgerade auf Ursprungsgeraden ab $(A(\lambda x_0,\dots,\lambda x_n)^T = \lambda A(x_0,\dots,x_n)^T$

$\Rightarrow$ Abb. $\mathbb{P}^n(k) \to \mathbb{P}^n(k)$: explizit

$(x_0 : \dots : x_n) \mapsto (\sum_{i=0}^n a_{0i} x_i : \dots : \sum_{i=0}^n a_{ni} x_i)$ ist nach obigem Morph.

von Prävarietäten, bez. φ_A. Für $A, B \in Gl_{n+1}(k)$: $\varphi_{AB} = \varphi_A \varphi_B$.

$\Rightarrow \varphi_A$ Isom. (Koordinatenwechsel von $\mathbb{P}^n(k)$)

Ist $Aut(\mathbb{P}^n(k))$ Gruppe der Autom. von $\mathbb{P}^n(k)$, $A \mapsto \varphi_A$

Gruppenhom.: $\varphi: Gl_{n+1}(k) \to Aut(\mathbb{P}^n(k))$, $\ker\varphi = Z = \{\lambda E_{n+1} \mid \lambda \in k^\times\}$.

Später: φ surjektiv, also isom. $\mathbb{P}Gl_{n+1}(k) = Gl_{n+1}/Z \xrightarrow{\sim} Aut(\mathbb{P}^n(k))$.

(*)

26. Lineare Unterräume des projektiven Raums

Sei $\varphi: k^{m+1} \to k^{n+1}$ inj. Hom. v. k-VR, bildet Ursprungsgeraden

auf solche ab (da $\operatorname{Im}\varphi \cong k^{m+1}$, "$\varphi \in Gl_{m+1}$") $\Rightarrow$ inj. Abb.

~~i~~ $i: \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^n$ Morphismus, sogar Isom. mit abg. Untervarietät:

Ist $A = (a_{ij}) \in Mat_{e\times(n+1)}$ mit $\ker A = \operatorname{Im}\varphi$, $f_i = \sum a_{ij} X_j \in k[X_0,\dots,X_n]$

$\Rightarrow \mathbb{P}^m \cong V_+(f_1,\dots,f_e) \subset$ Abgeschlossene UV dieser Form heißen

linear. $m = 1$: Geraden, $m = 2$: Ebenen. $m = n-1$ allg. Hyperebene.

Dim: m des lin. Unterraums. (*)$_2$

Sind $p \neq q \in \mathbb{P}^n(k)$ so ex. Gerade in $\mathbb{P}^n(k)$, die p, q enthält:

p, q entsprechen Ursprungsgeraden, ex. genau eine Ebene, die diese

enthält, dieser entspricht eine Gerade

Analog: zwei Geraden in $\mathbb{P}^2(k)$ schneiden sich in einem Punkt.

(*)$_2$ Bsp. $\mathbb{P}^1(k) \hookrightarrow \mathbb{P}^2(k)$, $(k^2 \hookrightarrow k^2$, $x \mapsto (x, 0))$, $A \in k^{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$\ker A = \operatorname{Im}\varphi = \mathbb{P}^1$, $f_1 = X_0$ def. Untervar. in $\mathbb{P}^2 \cong$ zu $\mathbb{P}^1$.

(*) $n = 2$: $PGL_2(\mathbb{C})$ sind Möbiustrafos (d.h. Autom. von $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$).

$\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$, $[z:w] \mapsto [az+bw : cz+dw] \longleftrightarrow z \mapsto \frac{(az+b)}{(cz+d)}$

25. Koordinatenwechsel im $\mathbb{P}^n$

$A = (a_{ij}) \in Gl_{n+1}(k)$ induziert linear Abb.

$$k^{n+1} \longrightarrow k^{n+1},$$

die Ursprungsgeraden in solche überführt (und die) Äquivalenzrelation respektiert, wir erhalten also eine Abb.

$$\mathbb{P}^n(k) \xrightarrow{\varphi_A} \mathbb{P}^n(k)$$

$$(x_0 : \ldots : x_n) \longmapsto \left(\sum_{i=0}^n a_{0i} x_i : \ldots : \sum_{i=0}^n a_{ni} x_i\right),$$

der nach Prop. 56 ein Morph. von Prävar. ist.

Offensichtlich gilt für $A, B \in Gl_{n+1}(k)$: $\varphi_{AB} = \varphi_A \circ \varphi_B$,

d.h. φ_A ist insbesondere ein Isom., der ~~der~~

<u>der durch A beschriebene Koordinatenwechsel von $\mathbb{P}^n(k)$</u>

genannt wird.

$Aut(\mathbb{P}^n(k))$ Gruppe der Automorph. von $\mathbb{P}^n(k)$

$\rightarrow$ $\varphi : GL_{n+1}(k) \longrightarrow Aut(\mathbb{P}^n(k))$ Gruppenhom.

mit Z: Kern $\varphi = \{\lambda E_{n+1},\ \lambda \in k^\times\}$ der Untergruppe der

Skalarmatrizen:

später φ ist injektiv, d.h. induziert Isom.

$$PGL_{n+1}(k) := \frac{GL_{n+1}(k)}{Z} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n(k))$$

$Z \cong k^\times$

projektive lineare Gruppe

Möbiustransformationen

Bsp. $n=2$, $PGL_2(\mathbb{C}) = \{\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1, (z:w) \mapsto (az+bw : cz+dw)\} \longleftrightarrow z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$

26. Lineare Unterräume von $\mathbb{P}^n$

Sei $\varphi: k^{m+1} \to k^{n+1}$ inj. Hom von k-VR,

induziert, da φ (1-d. U-VR) = 1-d. U-VR, eine injektive Abb

$$i: \mathbb{P}^m(k) \hookrightarrow \mathbb{P}^n(k),$$

die ein Morph. von Varr. ist. (wird Bsp 56).

Das Bild von i ist eine alg. Untervarietät von $\mathbb{P}^n(k)$:

Ist Bild $A = (a_{ij}) \in M_{e\times(n+1)}(k)$ mit $\mathrm{im}\,\varphi = \mathrm{Ker}(A: k^{n+1} \to k^e)$

und $f_i = \sum_{j=0}^{n} a_{ij} X_j \in k[X_0, \ldots, X_n]$, so identifiziert

i $\mathbb{P}^m(k)$ mit $V_+(f_1, \ldots, f_e)$

($i: \mathbb{P}^m(k) \to V_+(f_1, \ldots, f_e)$ ist Isom. von Varr.!)

(Umkehrabb. von $\varphi^{-1}: \varphi(k^{m+1}) \to k^{m+1}$ induziert!)

z.B. $\mathbb{P}^m = V_+(\underbrace{x_{m+1}, \dots, x_n}_{}) \subseteq \mathbb{P}^n$

Solche Unterprävar. heißen <u>lineare Unterräume</u> (der Dim. m)

$m = 0$: Punkte
$m = 1$: Geraden
$m = 2$: Ebenen
$m = n-1$: Hyperebenen in $\mathbb{P}^n(k)$

- Zu zwei Punkten $p \neq q \in \mathbb{P}^n(k)$ ex. genau eine Gerade $\overline{pq}$ in $\mathbb{P}^n(k)$, die p und q enthält, da zu zwei versch. Ursprungsgeraden in k^{n+1} genau eine Ebene ($\subseteq k^{n+1}$) ex., die beide Geraden enthält.

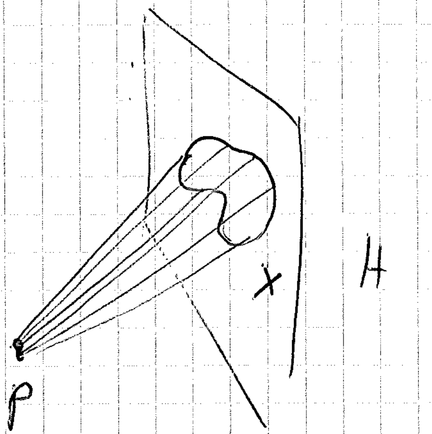
- Je zwei versch. Geraden in $\mathbb{P}^2(k)$ schneiden sich in genau einem Punkt, da Geraden in $\mathbb{P}^2$ Ebenen in k^3 entsprechen und zwei versch. Ebenen sich genau in einer Geraden, d.h. ein Punkt in $\mathbb{P}^2$, schneiden. ($\dim E_1 \cap E_2 = -\underbrace{\dim E_1 + E_2}_{3} + \underbrace{\dim E_1}_{2} - \underbrace{\dim E_2}_{2} = 1$)

(später Verallgemeinerung: <u>Satz von Bézout</u> für proj. Unterprävar. $V_+(f)$, $\operatorname{grad} f \geq 1$)

27. Kegel

$H \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ Hyperebene, $p \in \mathbb{P}^n(k) \setminus H$

$X \subseteq H$ alg. Unterpräv.



$$\overline{X,p} := \bigcup_{q \in X} \overline{qp}$$

~~heißt der durch X~~ heißt

Kegel von X über p, handelt sich um

alg. Unterpräv. in $\mathbb{P}^n(k)$:

OE $H = V_+(X_n)$ (nach Koordinatenwechsel) $\quad H \cong k^n \subset k^{n+1}$, $p \mapsto k$

$p = (0 : \dots : 1)$

Fr. $X = V_+(f_1, \dots, f_m) \subseteq \mathbb{P}^{n-1}(k) = H$, $f_i \in k[X_0, \dots, X_{n-1}]$

$\Rightarrow \overline{X,p} = V_+(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_m) \subseteq \mathbb{P}^n(k) \qquad \tilde{f}_i \in k[X_0, \dots, X_n]$

Verallgem.: Sei $\mathbb{P}^a(k) \cong \Lambda \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ linearer Unterraum

$\Psi \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ komplementärer lin. ——,

d.h. $\Lambda \cap \Psi = \emptyset$ und $\mathbb{P}^n(k)$ ist der kleinste lin. Unterraum in $\mathbb{P}^n(k)$, der Λ und Ψ enthält.

$X \subseteq \Psi$ alg. Unterpräv.

Kegel von X über Λ:

$$\overline{X,\Lambda} = \bigcup_{q \in X} \overline{q,\Lambda} \quad ,$$

wobei der von q und Λ aufgespannte lin. Unterraum $\overline{q,\Lambda}$ der kleinste lin. Unterraum ist, der q und Λ enthält.

$\overline{X,\Lambda}$ ist alg. Untervarietät von $\mathbb{P}^n(k)$ (Übg.)

($\overline{X,\Lambda}$ kann als m-fache Iteration des Kegels $\overline{X,p}$ beschrieben werden!
(in immer größeren $\mathbb{P}^n(k)$'s))

28. Quadriken

$char(k) \neq 2$ in diesem Abschnitt.

Def 57. Eine alg. Untervarietät $Q \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ von der Form $V_+(q)$, $q \in k[X_0, \ldots, X_n]_2 \setminus \{0\}$ ein nicht-triv. homogenes Polynom vom Grad 2, heißt Quadrik.

$Q = V_+(q)$, zur quadrat. Form q gehört Bilinearform
Quadrik
β auf k^{n+1},

$$\beta(v,w) = \frac{1}{2}\big(q(v+w) - q(v) - q(w)\big) \quad , \; v,w \in k^{n+1}$$

(Hauptachsentransformation. (etwa für $k=\mathbb{C}$ Buch, allg.? (noch!))
 Zu starke Aussage: $\exists$ ~~$S \in$~~ zu symm. Matrix A
 ex $S \in GL_{n+1}$ mit $B = {}^t S A S$ hat Diagonalgestalt

$\exists$ Basis von k^{n+1}, so daß Skalarprodukt in Basis

$\mathcal{B}$ die Form

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad r-1$$

hat,

d.h. die Koordinatenwechsel zur Basiswechselmatrix liefert

Isom. $\quad Q \cong V_+(X_0^2 + \ldots + X_{r-1}^2)$, $r = \mathrm{rg}\, B$

<u>Lem 58:</u> $X_0^2 + \ldots + X_{r-1}^2$ ist irred. $\Leftrightarrow$ $r > 2$

$V_+(X_0^2 + \ldots + X_{r-1}^2)$ irred. $\Leftrightarrow$ $r \neq 2$

$r = 1$: $V_+(X_0^2) = V_+(X_0)$ irred.

<u>Bew:</u> k alg. abg. $\Rightarrow$ $X_0^2 + X_1^2 = (X_0 + \sqrt{-1}X_1)(X_0 - \sqrt{-1}X_1)$

$\Leftarrow$ ✓ $\quad X_0^2 = X_0 X_0$ $\quad$ mit $\sqrt{-1} \in k$, $(\sqrt{-1})^2 = -1$.

$$X_0^2 + X_1^2 + X_3^2 = \left(\sum a_i X_i\right)\left(\sum b_i X_i\right)$$

$i = 1,2,3$ $\quad a_i b_i = 1$, $\quad a_i b_j + a_j b_i = 0$

$i \geq 3$ $\quad a_i b_i = 0$ $\quad a_i a_j^{-1} + a_j a_i^{-1} = 0$

$a_i^2 + a_j^2 = 0$

$(a_i + \sqrt{-1}a_j)(a_i - \sqrt{-1}a_j)$

$a_1 = \pm\sqrt{-1}\,a_2 = \pm(-1)\,a_3 = \pm\sqrt{-1}\,a_1$ $\quad$ ↯ $\square$

entweder durch symmetrische Zeilen- und Spalten-umformungen
oder durch folgende Basiswahl:

Wähle e_0 mit $\beta(e_0, e_0) = q(e_0) = 1$

$e_1 \in (Ke_0)^\perp = \{ v \mid \beta(e_0, e_1) = 0 \}$ mit $q(e_1) = 1$

$\vdots$

bis $q \mid (Ke_0 + \ldots + Ke_k)^\perp \equiv 0$

e_{k+1}
$|$ bel. Basisergänzung in $(Ke_0 + \ldots + Ke_k)^\perp$
e_n

Satz ~~+~~ Def 59: Ist $r \neq s$, so gilt

$$V(T_0^2 + \dots + T_{r-1}^2) \not\cong V_+(T_0^2 + \dots + T_{s-1}^2)$$

Bew: (später)

[$\exists$ Koordinatenwechsel in $\mathbb{P}^n(k)$, der beide Begr. identifiziert, dort auch die Arb. in $\mathbb{P}^n(k)$ ...]

Def(Q) Eine Quadrik $Q \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ mit $Q = V_+(T_0^2 + \dots + T_{r-1}^2)$, $r \geq 1$, habe die Dimension $n-1$ und den Rang r.

(nach Satz eindeutig!)

Kor: Zwei Quadriken Q_1 und Q_2 sind genau dann Biration. isom., wenn sie dieselbe Dim. und denselben Rang haben.

Bew: Für $Q \subset \mathbb{P}^n(k)$ berechne $K(Q)$:

OE $Q = V_+(X_0^2 + \dots + X_r^2)$

1.) $r = 0$: $\Rightarrow Q = V_+(X_0^2) = V_+(X_0) = \mathbb{P}^{n-1}(k)$: $K(Q) = k(T_1, \dots, T_{n-1})$

2.) $r \geq 1$: $U = V(1 + T_1^2 + \dots + T_r^2) \subset \mathbb{A}^n(k)$

ist nichtleere offene affine Teilmenge von Q

$\Rightarrow K(Q) = K(U) = \mathrm{Quot}(\Gamma(U)) = \mathrm{Quot}\left(k[T_1, \dots, T_n] / (1 + T_1^2 + \dots + T_r^2)\right)$

$\Rightarrow \operatorname{trdeg}_k K(Q) = n-1$ $\quad \overset{\mathbb{P}^n \supset}{\Rightarrow} Q \cong Q' \subseteq \mathbb{P}^{n'} \Rightarrow n = n'$

$\Rightarrow K(Q) \cong K(Q')$

$$k(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

$$| \; 2 \quad \text{dg.}$$

$$k(t_1^2, t_2, \ldots, t_n) \quad \subset \quad K(Q)$$

$$\shortparallel$$

$$k(t_2, \ldots, t_n)$$

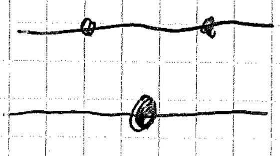
$$|$$

$$k$$

(vgl. Joe Harris, S. 34)

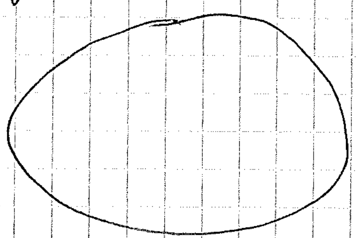
Bsp. 59. Q Quadrik in $\mathbb{P}^n$

(i) $n=1$: $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$: Rg 2: 2 Pkt. reduziert



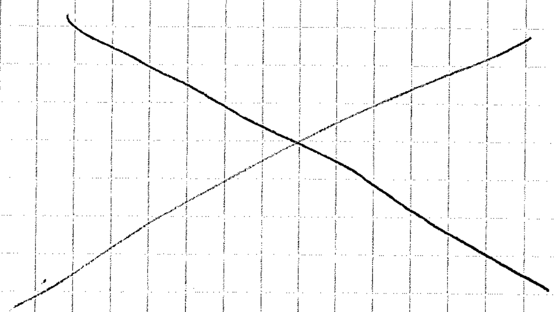
Rg 1: 1 Pkt. (doppel-Pkt)

(ii) $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$: Rg 3: $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ $x_0^2 + x_1^2 \neq -1$



smooth conic

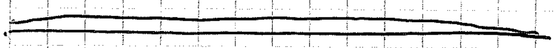
Rg 2:



2 versch. Gerade

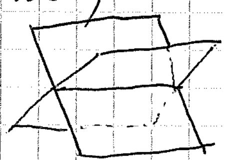
nicht irreduzibel

Rg 1



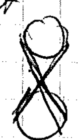
(Doppel-) Gerade

(iii) $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$: Rg 1: Doppel-Ebene (2. dim. lin. Unterraum)



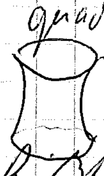
Rg 2: nicht irreduzibel

3: ←



quadric cone

4:



smooth

Die Quadrik $Q \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ heißt **glatt**, falls $r = n+1$, d.h. falls die Matrix B zu q max. Rg hat.

Dann gilt

b.w.

Falls $\mathrm{rg}(Q) \geq 3$, $\dim(Q) = d$ $\subseteq \mathbb{P}^{d+1}$, so ist

$Q \cong \overline{\hat{Q}, \Lambda}$ Kegel über einer glatten Quadrik $\hat{Q}$ der Dim. $r-2$ (d.h. $\subseteq \mathbb{P}^{r-1}$) bzgl. einem $(d-r+2)$-dim. Unterraum Λ.

<u>$r=1,2$ ausgelassen:</u>

$r=1$: $Q = V_+(X_0^2) = V_+(X_0)$ Hyperebene in $\mathbb{P}^{d+1}(k)$

Unterschied für proj. Varietät Q nicht sichtbar, jedoch in Th. der Schemata ~~nicht!~~ entscheidend!

$r=2$: $Q = V_+(X_0^2 + X_1^2)$ ~~nicht~~ reduzibel, also keine Primvar. in unserem Sinne

~~aber~~ Einschränkung wird bei Schemata aufgehoben!

$$Q = V_+(X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_{r-1}^2) \subseteq \mathbb{P}^{d+1} \qquad r \leq d+2$$

$$\hat{Q} = V_+(X_0^2 + \ldots + X_{r-1}^2) \subseteq \mathbb{P}^{r-1} \qquad \text{glatt}$$

$$\Lambda \cong \mathbb{P}^{d+1-r} = V_+(X_0, \ldots, X_{r-1}) \subseteq \mathbb{P}^{d+1}$$

$$Q = \overline{\hat{Q}, \Lambda}$$