23 Definition des projektiven Raumes

Sei $X_1 = X_2 = \mathbb{A}^1$, $\tilde{U}_1 \subseteq X_1 = \tilde{U}_2 \subseteq X_2 = \mathbb{A}\backslash\{0\}$.

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1 &\xrightarrow{\sim} \tilde{U}_2 \\ x &\longmapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Verkleben von X_1 und X_2 entlang $\tilde{U}_1$ und $\tilde{U}_2$

$$\mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 \cup \{\infty\} = U_1 \cup U_2.$$

Allgemein:

$$\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i = \mathbb{A}^n \cup \mathbb{P}^{n-1} = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{A}^1 \sqcup \mathbb{A}^0$$

Idee: $\mathbb{P}^2 \supseteq \mathbb{A}^2$: Zwei verschiedene Geraden in $\mathbb{P}^2$ schneiden sich genau in einem Punkt. **Als Menge**:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^n(k) :&= \{\text{Ursprungsgeraden in } k^{n+1}\} = \{\text{1-dim. } k\text{-UVR}\} \\ &= (k^{n+1}\backslash\{0\})/k^\times \end{aligned}$$

Repräsentanten dieser Klasse entsprechen:

$$\langle (x_0, \dots x_n) \rangle_{k\text{-linear}} \longleftarrow (x_0 : \dots : x_n)$$

Äquivalenzrelation:

$$(x_0, \dots, x_n) \sim (x'_0, \dots, x'_n) \Leftrightarrow \exists \lambda \in k^\times \text{ mit } x_i = \lambda x'_i \ \forall i.$$

Bezeichne Klassen $(x_0 : \dots : x_n)$, x_i **homogene** Koordinaten auf $\mathbb{P}^n$

$$U_i := \{(x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^n(k), \ 0 \leq i \leq n$$

ist wohldefiniert $\Leftrightarrow x_i = 1$.

$$\mathbb{P}^n(k) = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$$

Einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} U_i &\xrightarrow[\chi_i]{\cong} \mathbb{A}^n(k) \\ (x_0 : \ldots : x_n) &\longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{\hat{x}_i}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right) \\ (t_0 : \cdots t_{i-1} : 1 : t_{i+1} : \cdots t_n) &\longleftarrow (t_0, \ldots, \hat{t}_i, \ldots, t_n) \end{aligned}$$

$U \subseteq \mathbb{P}^n$ ist genau dann offen, wenn $\kappa_i(U \cap U_i) \subseteq \mathbb{A}^n$ offen ist. Beachte: der Durchschnitt

$$U_i \cap U_j = \mathcal{D}(T_j) \subseteq U_i \text{ offen, } i \neq j$$

wenn auf $U_i \cong \mathbb{A}^n$ die Koordinaten $T_0, \ldots, \hat{T}_i, \ldots, T_n$ verwendet werden. Damit wird $\mathbb{P}^n(k)$ zu einem topologischen Raum, der durch die U_i, $0 \leq i \leq n$, offen überdeckt wird.

23.1 Reguläre Funktionen

Sei $U \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ eine beliebige offene Teilmenge. Die regularären Funktionen auf U sind

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U) = \{f \in \mathrm{Abb}(U, k) \mid f|_{U \cap U_i} \in \mathcal{O}_{U_i}(U \cap U_i)\} \qquad \forall i \in \{0, \ldots, n\}$$

Dabei ist implizit verstanden, dass wir via κ_i die U_i als Raum mit Funktionen auffassen. Dabei erhalten wir insgesamt:

$$\mathbb{P}^n(k) = (\mathbb{P}^n(k), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$$

als Raum mit Funktionen.

Proposition 54 (orig 51)**.** *Für $U \subseteq \mathbb{P}^n$ offen gilt: $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U) = \{f : U \to k \mid \forall x \in U\colon$ existiert $x \in V \subseteq U$ offen und $g, h \in k[X_0, \ldots, X_n]$ homogen vom selben Grad, d.d. $\forall v \in V\colon h(v) \neq 0$ und $f(v) = \frac{g(v)}{h(v)}.\}$*

Wohldefiniertheit: Sei $V = (x_0 : \ldots : x_n)$.

$$f(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = \frac{g(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n)}{h(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n)} = \frac{\lambda^d g(x_0, \ldots, x_n)}{\lambda^d h(x_0, \ldots, x_n)} = f(x_0, \ldots, x_n)$$

Proof.

„$\subseteq$“ Sei $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U)$. Dann ist $f|_{U \cap U_i} \in \mathcal{O}_{U_i}(U \cap U_i)$. Es folgt:

$$f = \frac{\tilde{g}}{\tilde{h}},\ \tilde{g}, \tilde{h} \in k[T_0, \ldots, \hat{T}_i, \ldots, T_n]$$

Definiere $d := \max\{\deg(\tilde{g}), \deg(\tilde{h})\}$. Homogenisiere:

$$g := \psi_i^d(\tilde{g}),\ h := \psi_i^d(\tilde{h})$$

$\Rightarrow f = \frac{g}{h}$ lokal.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\tilde{g}}{\tilde{h}}(\chi_i(x)) \\
f((x_0 : \cdots : x_n)) &= \frac{\tilde{g}\left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{\hat{x}_i}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right)}{\tilde{h}\left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{\hat{x}_i}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right)} \\
&= \frac{x_i^d \tilde{g}()}{x_i^d \tilde{h}()} \\
&= \frac{\psi_i^d(\tilde{g})()}{\psi_i^d(\tilde{h})()} = \frac{g}{h}((x_0 : \cdots : x_n))
\end{aligned}$$

„$\supseteq$“ Sei f in der rechten Menge: fixiere $i \in \{0, \ldots, n\}$ lokal auf $U \cap U_i$ mit f nach Voraussetzung in der Form $\frac{g}{h}$, $g, h \in k[X_0, \ldots, X_n]_d$, d geeignet. Definiere:

$$\tilde{g}_i := \frac{g}{X_i^d},\ \tilde{h} := \frac{h}{X_i^d} \in k\left[\frac{X_0}{X_i}, \ldots \frac{\hat{X}_i}{X_i}, \ldots, \frac{X_n}{X_i}\right]$$

$\Rightarrow f$ ist lokal der Form: $\frac{\tilde{g}}{\tilde{h}}$, $\tilde{g}$,$\tilde{h} \in k[T_0, \ldots, \hat{T}_i, \ldots T_n]$.

$\Rightarrow f|_{U \cap U_i} \in \mathcal{O}_{U_i}(U \cap U_i)$.

□

Corollary 55 (orig. 52)**.** *Für $i \in \{0, \ldots, n\}$ induziert*

$$U : \xrightarrow[\cong]{\chi_i} \mathbb{A}^n(k)$$

einen Isomorphismus

$$(U_i, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n|_{U_i}}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{A}^n(k)$$

von Räumen mit Funktionen. Insbesondere ist $\mathbb{P}^n(k)$ eine Prävarietät.

Proof. Zu zeigen: $\forall U \subset U_i$ offen gilt:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(U) = \mathcal{O}_{U_i}(U) = \{f : U \to k \mid f \in \mathcal{O}_{U_i}(U)\}$$

d.h. auf der rechten Seite muss die Bedingung nur für das fixierte i überprüft werden. Dies folgt aus den Beweis des Satzes. □

Damit identifizieren die Funktionenkörper

$$K(\mathbb{P}^n(k)) = K(U_i) = k\left(\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}\right)$$

Proposition 56 (orig. 53)**.** $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(\mathbb{P}^n(k)) = k$. *Insbesondere ist* $\mathbb{P}^n$ *für* $n \geq 1$ ***keine*** *affine Varietät. (Da der* k*-Algebra* k *ja* $\mathbb{A}^0(k) = \{pt\}$ *als affine Varietät entspricht.)*

Proof. $k \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(\mathbb{P}^n(k))$ konstante Funktionen klar. Nach Satz 45 (iii) gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mathbb{P}^n) &= \bigcap_{i=0}^{n} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U_i) \subset K(\mathbb{P}^n(k)) \\ &= \bigcap_{i=0}^{n} k[t_0, \dots, \hat{t}_i, \dots, t_n] = k\end{aligned}$$

□