5 Korrespondenz zwischen Radikalidealen und affinen algebraischen Mengen

Sei $V(\mathfrak{A}) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affin algebraische Menge, $\mathfrak{A} \subset k[\underline{T}]$. **Es gilt:**

$$V(\mathfrak{A}) = V(\operatorname{rad}\mathfrak{A})$$

mit $\operatorname{rad}\mathfrak{A} = \{f \in k[\underline{T}] \mid f^n \in \mathfrak{A} \text{ für } n > 0\}$, da

$$f^n(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0,$$

d.h. verschiedene Ideale können dieselbe algebraische Menge beschreiben.

Definition 9. Für eine Teilmenge $Z \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ bezeichne

$$I(Z) = \{f \in k[\underline{T}] \mid f(x) = 0 \ \forall x \in Z\}$$

das Ideal aller auf Z verschwindenden Polynomfunktionen.

Satz 10.

(i) Sei $\mathfrak{A} \subset k[\underline{T}]$ Ideal. Dann ist $I(V(\mathfrak{A})) = \operatorname{rad}(\mathfrak{A})$.

(ii) Sei $Z \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ Teilmenge. Dann ist $V(I(Z)) = \overline{Z}$, der Abschluss von Z.

Beweis. Übungsblatt 2. □

$\mathfrak{A}$ heißt **Radikalideal**, wenn $\mathfrak{A} = \operatorname{rad}(\mathfrak{A})$, oder äquivalent wenn $k[\underline{T}]/\mathfrak{A}$ *reduziert* ist, d.h. keine nilpotente Elemente hat.

Korollar 11. *Wir erhalten eine 1-1 Korrespondenz*

$$\begin{aligned} \{\textit{abg. Mengen } \subseteq \mathbb{A}^n\} &\leftrightarrow \{\textit{Radikalideale } \mathfrak{A} \subset k[\underline{T}]\} \\ Z &\mapsto I(Z) \\ V(\mathfrak{A}) &\leftarrow\!\shortmid \mathfrak{A} \end{aligned}$$

die sich zu einer 1-1 Korrespondenz

$$\begin{aligned} \{\textit{Punkte in } \mathbb{A}^n\} &\leftrightarrow \{\textit{max. Ideale in } k[\underline{T}]\} \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \mathfrak{m}_x \begin{aligned}[t] &= I(\{x\}) \\ &= \ker(k[\underline{T}] \to k,\ T_i \mapsto x_i) \end{aligned} \end{aligned}$$

einschränkt.