27 Kegel

Sei $H \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ Hyperebene, $p \in \mathbb{P}^n(k)\backslash H$, $X \subseteq H$ abgeschlossene Unterprävarietät.

$$\overline{X,p} := \bigcup_{q \in X} \overline{qp}$$

heißt **Kegel von** X **über** p, es handelt sich um einen abgeschlossenen Untervarietät von $\mathbb{P}^n(k)$. Ohne Einschränkung:$H = V_+(X_n)$, $p = (0 : \cdots : 1)$ (nach Koordinatenwechsel: $H \cong k^n \oplus p \cong k\} = k^{n+1}$.) Für

$$X = V_+(f_1, \ldots, f_m) \subseteq \mathbb{P}^{n-1}(k) = H, \quad f_i \in k[X_0, \ldots, X_{n-1}]$$
$$\Rightarrow X, p = V_+(\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_m) \subseteq \mathbb{P}^n(k), \quad \tilde{f}_i \in k[X_0, \ldots, X_n]$$

Verallgemeinerung. Sei $\mathbb{P}^n(k) \cong \Lambda \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ linearer Unterraum, $\psi \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ komplementärer linearer Unterraum, d.h. $\Lambda \cap \psi = \emptyset$ und $\mathbb{P}^n(k)$ ist der bekannte lineare Unterraum von $\mathbb{P}^n(k)$, der Λ und ψ enthält. $X \subseteq \psi$ abgeschlossene Unterprävarietät.

Kegel von X **über** Λ: $\overline{X, \Lambda} = \bigcup_{q \in X} \overline{q, \Lambda}$, wobei der von q und Λ aufgespannte lineare Unterraum $\overline{q, \Lambda}$ der kleinste Unterraum sei, der q und Λ enthält.

28 Quadriken

Sei $\operatorname{char}(k) \neq 2$ in diesem Abschnitt.

Definition 60 (orig. 57)**.** Eine abgeschlossene Unterprävarietät $Q \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ von der Form $V_+(q)$, $q \in k[X_0, \ldots, X_n]_2 \backslash \{0\}$ heißt **Quadrik**.

$$Q = V_+(q)$$

Zur quadratischen Form q gehört eine Bilinearform β auf k^{n+1},

$$\beta(v, w) := \frac{1}{2}(q(v + w) - q(v) - q(w)), \quad v, w \in k^{n+1}$$

Es gibt eine Basis von k^{n+1}, sodass die Strukturmatrix B von β die Gestalt

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

hat, d.h. Koordinatenwechsel zur Basiswechselmatrix liefert einen Isomorphismus

$$Q \xrightarrow{\cong} V_+(X_0^2 + \cdots + X_{r-1}^2), \quad r = \mathrm{rg}\, B$$

Lemma 61 (orig. 58)**.**

Proposition 62 (orig. 59)**.** *Ist $r \neq s$, so sind $V_+(T_0^2 + \cdots + T_{r-1}^2)$ und $V_+(T_0^2 + \cdots + T_{s-1}^2)$ nicht isomorph.*

Proof. (später: Es gibt keinen Koordinatenwechsel von $\mathbb{P}^n(k)$, der beide Mengen identifiziert, damit auch kein Automorphismus in $\mathbb{P}^n(k)$.)

Definition 63. Eine Quadrik $Q \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ mit $Q \cong V_+(T_0^2 + \cdots + T_{r-1}^2)$, $r \geq 1$, habe die Dimension $n-1$ und Rang r. (nach Satz eindeutig!)

□

Index