AG 1, V 14. 30.11.2018

zu (1) Sei $s = a \in A$ d.d. $0 = \frac{a}{1} \in A_{f_i}$ $\forall i \in I$

I endl. $\Rightarrow \exists n \geq 1$ d.h. $f_i^n a = 0$ $\forall i \in I$

$\overset{(2)}{\Rightarrow}$ $a = \left(\sum_{i \in I} b_i f_i^n\right) a = 0$

zu (2): $s_i = \frac{a_i}{f_i^n}$ für n geeignet, unabh. von $i \in I$ (endl!)

nach Voraussetzung $\frac{a_i}{f_i^n} = \frac{a_j}{f_j^n} \in A_{f_i f_j}$ $D(f_i) \cap D(f_j) = D(f_i f_j)$

$\Rightarrow \exists m \geq 1$ d.h. $(f_i f_j)^m (f_j^n a_i - f_i^n a_j) = 0$ $\forall i,j$

$\frac{a_i}{f_i^n} = \frac{f_i^m a_i}{f_i^{n+m}} =: \frac{a_i'}{f_i^{n'}}$ $n' = n+m$

$\rightsquigarrow$ $f_j^{n'} a_i' = f_i^{n'} a_j' \underset{\text{Umbenennen von Variablen}}{\overset{\text{neu}}{=}} f_j^n a_i \overset{(*)}{=} f_i^n a_j$ ☺

$s := \sum_{j \in I} b_j a_j \in A$ $((2)) \Rightarrow$ $\cancel{f_i^n s = f_i^n \sum b_j a}$

$\Rightarrow$ $f_i^n s = f_i^n \sum b_j a_j = \cancel{\$} \sum b_j (f_i^n a_j)$

$\overset{(*)}{=} \sum b_j f_j^n a_i = a_i$

$\Rightarrow$ $\frac{s}{1} = \frac{a_i}{f_i^n} = s_i$ $\boxed{\equiv}$

AG 1, V15, 06.12.2018

11 Der Funktor $A \mapsto (\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$

Def. 34 Ein lokal geringt Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt affines Schema, falls ein Ring A ex. d.d.

$$(X, \mathcal{O}_X) \underset{\text{gerinh Räum}}{\overset{\text{lokal}}{\cong}} (\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$$

Ein Morphisumus affine Schmata ist ein ~~lo~~ Morph. lokal ger. Raume

Bez. Aff Kat der affine Schmata

$A \xrightarrow{\varphi} B$ Ringhom

$\operatorname{Spec} B \xrightarrow{a\varphi} \operatorname{Spec} A$ stetige Abb.

$\overset{\shortparallel}{X} \xrightarrow{f} \overset{\shortparallel}{Y}$

Ziel: Def $(f, f^b): X \to Y$ mit $f := {}^a\varphi$ Morph von ~~gerin~~ lokal geringt Räume und

$$f^b_{\operatorname{Spec} A} = \varphi : A = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(\operatorname{Spec} A) \longrightarrow f_* \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}(\operatorname{Spec} A) = B$$

Dazu: Es gilt $f^{-1}(D(s)) = D(\varphi(s))$ (Prop §10) Definiere

$f^b_{D(s)} : \mathcal{O}_Y(D(s)) = A_s \longrightarrow B_{\varphi(s)} = f_* \mathcal{O}_X(D(s))$ als die von φ induzierte Abb., f^b ist kompatibel mit $res^{D(s)}_{D(t)}$

$\overset{\text{Basis}}{\Longrightarrow}$ $f^b : \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_* \mathcal{O}_X$ Hom von Ringgarbe

für $s = 1$ erhalten wir $f^b_{\operatorname{Spec} A} = \varphi$!

Für $x \in X$ gilt: $f^\#: \mathcal{O}_{Y, f(x)} = A_{\varphi^{-1}(p_x) = p_{f(x)}} \longrightarrow B_{p_x} = \mathcal{O}_{X,x}$

$$\begin{tikzcd} A_{\varphi^{-1}(p_x)} \arrow[r] & B_{p_x} \\ A \arrow[u] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[ur, phantom, "\equiv"] & B \arrow[u] \end{tikzcd}$$

ist von φ induzierte, $f^\#_x$ ist lokal:

$$\varphi(\varphi^{-1}(p_x)) \subset p_x$$

Bez: ${}^a\varphi$ für $\operatorname{Spec}(\varphi) = (f, f^b)$, ${}^a(\psi \circ \varphi) = {}^a\varphi \circ {}^a\psi$

Spec: Ring $\longrightarrow$ Aff kontravariant Funktor

Γ: Aff $\longrightarrow$ Ring $(X, \mathcal{O}_X) \longmapsto \Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X(X)$

AG 1. V15 06.12.2018

$(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{O}_Y) \longmapsto \Gamma(f) = f_Y^\flat : \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_Y(Y)$

$\downarrow$

$(f_* \mathcal{O}_X)(Y) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$

Theorem 35: Spec und Γ def. Anti-Äquivalenz zwischen Kat. der Ringe und der Kat. der ~~#~~ aff. Schemata

Bew.: Spec ist essentiell surj. per Def. $\Gamma \circ \mathrm{Spec}$ ist iso zu id_{Ringe} nach Konstruktion

z.z. $\mathrm{Hom}_{\text{Ringe}}(A, B) \underset{\Gamma}{\overset{\mathrm{Spec}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Hom}_{Aff}(\mathrm{Spec}\, B, \mathrm{Spec}\, A)$

und zueinander invers, fehlt die Verkettung $\mathrm{Spec} \circ \Gamma = id_{Aff}$:

Sei $f \in \mathrm{Hom}_{Aff}(\mathrm{Spec}\, B, \mathrm{Spec}\, A)$, $\varphi := \Gamma(f)$, ${}^a\varphi = f$

Für $\mathfrak{p}_x \in \mathrm{Spec}\, B = X$ ist $f_x^\flat$ der eindeutig bestimmte Ringhom., der

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f^\flat_{\mathrm{Spec} A} = \Gamma(f) = \varphi} & B & \supset & i_B^{-1}(\mathfrak{p}_x B_{\mathfrak{p}_x}) = \mathfrak{p}_x \\ \downarrow i_A & = & \downarrow i_B & & \\ A_{\mathfrak{p}_{f(x)}} & \xrightarrow[f_x^\flat \text{ lokal}]{} & B_{\mathfrak{p}_x} & \underset{\max}{\supset} & \mathfrak{p}_x B_{\mathfrak{p}_x} \end{array} \quad (*)$$

~~kommutiert nach~~

$\mathfrak{p}_{f(x)} A_{\mathfrak{p}_{f(x)}} \supseteq (f_x^\flat)^{-1}(\mathfrak{p}_x B_{\mathfrak{p}_x}) = \mathfrak{p}_{f(x)} A_{\mathfrak{p}_{f(x)}}$

$\mathfrak{p}_{f(x)} = i_A^{-1}(\mathfrak{p}_{f(x)} A_{\mathfrak{p}_{f(x)}}) \subset A$

$f_x^\flat$ lokal $\Rightarrow f_x^\flat(\mathfrak{p}_{f(x)} A_{\mathfrak{p}_{f(x)}}) \subset \mathfrak{p}_x B_{\mathfrak{p}_x}$

$\Rightarrow {}^a\varphi = f$ als stetige Abb.

Wg. $(*)$ nach auch $({}^a\varphi)_x^\flat$ als Diagramm $(*)$ kommutiert $\forall x \in X$

Prop. $\Rightarrow ({}^a\varphi)^\flat = f^\flat$

$\square$

12. Bsp

Bsp 36 (Integritätsbereiche) A integer, $k = \mathrm{Quot}(A)$

$X = \mathrm{Spec}\, A$ $\quad \eta = (0)$ $\quad \overline{\{\eta\}} = \mathrm{Spec}\, X$, d.h. jede nichtleere offene Menge $\mathcal{U} \subset X$ enthält η $\Rightarrow$ $\mathcal{O}_{X,\eta} = A_{(0)} = k$

$\mathcal{O}_X(D(f)) = A_f \subset k$

$\mathcal{U} \subset X$ bel. offene. $\Rightarrow$ $\mathcal{O}_X(\mathcal{U}) = \varprojlim_{D(f) \subset \mathcal{U}} \underbrace{\mathcal{O}_X(D(f))}_{A_f}$

$$= \bigcap_{\substack{f \in A \\ D(f) \subset \mathcal{U}}} A_f \subseteq k$$

$A_f = \bigcap_{\mathfrak{p} \in D(f)} A_{\mathfrak{p}}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{O}_X(\mathcal{U}) = \bigcap_{x \in \mathcal{U}} \mathcal{O}_{X,x}$

wie Bew in Satz 137

Bsp 37 (Prinzipal offene Unterschemata affiner Schemata)

$X = \mathrm{Spec}\, A$, $f \in A$, Sei $j : \mathrm{Spec}\, A_f \to \mathrm{Spec}\, A$ induziert von $A \to A_f$

$\Rightarrow j : \mathrm{Spec}\, A_f \to D(f)$ Homöomorphismus (Prop 12) $x \in D(f)$

$j_x^\#$ ist kanon Abb $A_{\mathfrak{p}_x} \xrightarrow{\cong} (A_f)_{\mathfrak{p}_x A_f}$

$\Rightarrow (j, j^\#)$ Induziert Iso $\mathrm{Spec}\, A \cong (D(f), \mathcal{O}_X|_{D(f)})$

Bsp 38 (Abgeschlossene Unterschemata von affinen Schemata)

$\mathfrak{a} \in A$ Ideal, Sei $i : \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a}) \to \mathrm{Spec}\, A =: X$ von $A \to A/\mathfrak{a}$ induziert Prop 11 $\xrightarrow{\cong} V(\mathfrak{a})$

$\overline{\mathfrak{p}}_x$ ist Bild von $\mathfrak{p}_x$ in $A/\mathfrak{a}$

$i_x^\flat$ ist kanonische Abb. $A_{\mathfrak{p}_x} \to (A/\mathfrak{a})_{\overline{\mathfrak{p}}_x}$

($\neq 0$, falls $x \in V(\mathfrak{a}) \Rightarrow \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_x$)

Schreibe kurz $V(\mathfrak{a})$ für den lokal geringten Raum

$(V(\mathfrak{a}), i_*(\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, A/\mathfrak{a}})|_{V(\mathfrak{a})}) \xleftarrow[i]{\cong} \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})$

AG1, V15 5.12.2018

$(i_x \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}})|_{V(\mathfrak{a})} \xrightarrow{\sim} i_x \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}}$ da $x \in V(\mathfrak{a})$

$(\qquad)_x = (\quad - \quad)_x$

Bsp 39, $\mathfrak{b} \subset B$ Ideal

$V(\mathfrak{b}^n) = V(\mathfrak{b}) \subset \operatorname{Spec} B$ als abg. TM hängt nicht von $n \geq 1$ ab, aber $\operatorname{Spec}(B/\mathfrak{b}^n) = V(\mathfrak{b}^n)$ als affines Schema sehr wohl!

etwa: $B = k[T]$, $\mathfrak{b} = (T)$ k alg. abg. K

Abg Pkt von $\mathbb{A}^1_k := \operatorname{Spec}(k[T]) \longleftrightarrow k$

$\mathfrak{b} \longleftrightarrow 0$

κ Kappa

$A = k[T]/(T^n)$, $X = \operatorname{Spec} A = \{x\} : \mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_{X,x} = A$, $\kappa(x) = k$

$0 \neq \mathfrak{m}_x = (T \bmod T^n)$
$n > 1$

$X \subset \mathbb{A}^1$ abg. Unterschema, in einem Pkt konzentriert

$B = k[T]$ k-Algebra von Fktionen auf $\mathbb{A}^1$

$\downarrow$ Einschränkungen auf $X \subset \mathbb{A}^1$

$k[T]/(T^n)$

$n = 1$ $k[T]/(T^n) = k$, $f \longmapsto f(0)$

$n > 1$ $k[T]/(T^n) \neq k$ $f \longmapsto$ Taylor Entwicklung von f
um 0 der Länge $n-1$

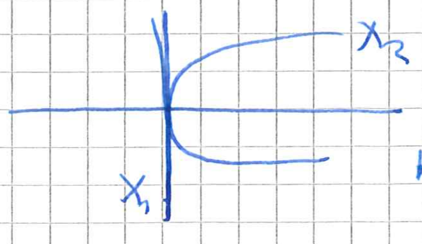
$\{x\} \subset \mathbb{A}^1$ hat "infinitesimale Ausdehnung der Länge $n-1$ in $\mathbb{A}^1_k$"

$\mathbb{A}^2_k := \operatorname{Spec}(k[T,U]) \hat{=} \{(u,t) \mid u,t \in k\} = k^2$

$\mathfrak{a}_1 = (U)$ ~~$\mathfrak{a}_2 = (U - T)$~~ $\mathfrak{a}_2 = (U - T^n)$

$X_1 \hat{=} \{(u,t) \in \mathbb{A}^2(k) \mid u = 0\}$, $X_2 \hat{=} \{(u,t) \in \mathbb{A}^2(k) \mid u = t^n\}$

$X_1 \cap X_2 = \{(0,0)\}$ als Menge.



aber für $n > 1$ treffen sich beide Mengen ~~mit~~ nicht transversal!

( )

Als affines Schema wird später der $\cap$ als $\operatorname{Spec}\left(\mathbb{Z}[T,U]/(a_1+a_2)\right)$ def.
$\cong \mathbb{Z}[T]/(T^?)$

also eine präzise Beschreibung als Durchschnitt!