AG 1, V 12, 23.11.2018

3. Zu Prägarben assoziierte Garben

Prop + Def ~~Prop~~ 26: $\mathcal{F}$ Prägarbe auf X. Dann ex. ein Garbe $\tilde{\mathcal{F}}$ zusammen mit einem Morph von Prägarben

$i_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \tilde{\mathcal{F}}$, sodass gilt

$$\mathrm{Mor}_{PSh(X)}(\mathcal{F}, \nu\mathcal{G}) \cong \mathrm{Mor}_{Sh(X)}(\tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{G})$$

$\nu : Sh(X) \to PSh(X)$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i_{\mathcal{F}}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \mathcal{G} \\ \tilde{\mathcal{F}} \arrow[ur, "\exists!\, \tilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Dadurch ist $(\tilde{\mathcal{F}}, i_{\mathcal{F}})$ ist eindeut. bis auf eind. Iso bestimmt

Ferner gilt (1) $i_{\mathcal{F},x} : \mathcal{F}_x \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{F}}_x$ bij. $\forall x \in X$

(2) Für jede Prägabe $\mathcal{G}$ auf X, und viel Morph $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ex. genau ein Mor $\tilde{\varphi} : \tilde{\mathcal{F}} \to \tilde{\mathcal{G}}$, sd.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "i_{\mathcal{F}}"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \tilde{\mathcal{F}} \arrow[d, "\tilde{\varphi}"] \\ \mathcal{G} \arrow[r, "i_{\mathcal{F}}"] & \tilde{\mathcal{G}} \end{tikzcd}$$

kommut.

D.h. $\mathcal{F} \mapsto \tilde{\mathcal{F}}$ ist Funktor $PSH(X) \to SH(X)$, links adj. zum Vergissfunktor,

$\tilde{\mathcal{F}}$ heißt die von $\mathcal{F}$ assoz. Garbe / Vergarbung von $\mathcal{F}$

Bew: $\tilde{\mathcal{F}}(U) := \left\{ (s_x) = \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall x \in U, \exists x \in W \subseteq U \\ \text{und } t \in \mathcal{F}(W) \text{ mit} \\ s_y = t_y \; \forall y \in W \end{array} \right\}$

„kenn die lokale Schnittbeding. $\mathcal{F}$ nicht" (Sh2) erzwingt dies

$U \subset V$

$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathcal{F}}(V) \arrow[r, "res^V_U"] \arrow[d, phantom, "\cap" rotate] & \tilde{\mathcal{F}}(U) \arrow[d, phantom, "\cap"] \\ \prod_{x \in V} \mathcal{F}_x \arrow[r] & \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \end{tikzcd}$$

AG1 V13, 28. 11. 2018

Freitag: ~~Semin~~ SRB!

~~Bew)~~

Bew (Prop 26) $\mathcal{F}$ Prägabe $\longmapsto \tilde{\mathcal{F}}$ Garbe, $\mathcal{U} \subset X$ offen

$\mathcal{F}_x \cong \tilde{\mathcal{F}}_x$

$\tilde{\mathcal{F}}(\mathcal{U}) = \{ (s_x) \in \prod_{x \in \mathcal{U}} \tilde{\mathcal{F}}_x : \forall x \in \mathcal{U} \; \exists x \in W \subset \mathcal{U}$ offen und

$t \in \mathcal{F}(W)$ mit $s_w = t_w \; \forall w \in W \}$

$\tilde{\mathcal{F}}$ ist Garbe: ~~Se~~ $\mathcal{U} = \bigcup \mathcal{U}_i$

(Sh1) $s = (s_x)_{x \in \mathcal{U}}, s' = (s'_x)_{x \in \mathcal{U}} \in \tilde{\mathcal{F}}(\mathcal{U})$ mit

$(s_x)_{x \in \mathcal{U}_i} = s|_{\mathcal{U}_i} = s'|_{\mathcal{U}_i} = (s'_x)_{x \in \mathcal{U}_i} \Rightarrow s_x = s'_x \; \forall x \in \mathcal{U}_i$

$\Rightarrow s_x = s'_x \; \forall x \in \mathcal{U}$, d.h. $\mathcal{U} = \bigcup \mathcal{U}_i \Rightarrow s = s'$ ✓

(Sh2) Seien $s_i = (\cancel{s_{ix}})_x\ (s_{ix})_{x \in \mathcal{U}_i} \in \tilde{\mathcal{F}}(\mathcal{U}_i)$ $s_i|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j} = s_j|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j}$

mit $s_{ix} \overset{(*)}{=} s_{jx} \quad \forall x \in \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$

gesucht $s_i = (s_x)_{x \in \mathcal{U}} \in \tilde{\mathcal{F}}(\mathcal{U})$ mit $s_x := s_{ix}$ für ein/alle $x \in \mathcal{U}_i$

(Wohl-def wg (*))

s besteht aus Keimen, die lokal Schnitte sind, d.h. die s_i

diese Eigenschaft haben!

Def von $i_{\mathcal{F}}$: $\forall \mathcal{U} \subset X$ offen $\mathcal{F}(\mathcal{U}) \xrightarrow{i_{\mathcal{F}}} \tilde{\mathcal{F}}(\mathcal{U})$

$s \longmapsto (s_x)_{x \in \mathcal{U}}$

Da $\tilde{\mathcal{F}} = \lim_{x \in V} \tilde{\mathcal{F}}(V) \longrightarrow \mathcal{F}_x$ ist $i_{\mathcal{F},x}$ und bijektiv

$[(s_y)_{y \in W}] \longmapsto s_x$

ist $i_{\mathcal{F},x}$ ~~und~~ auch bijektiv $x \in V, s \in \mathcal{F}(V)$

$\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}$ Prägabe-Morph. $\xrightarrow{\lim_{x \in V}}$ $\mathcal{F}_x \xrightarrow{\varphi_x} \mathcal{G}_x$

Def von $\tilde{\varphi}$: $\tilde{\mathcal{F}}(\mathcal{U}) \longrightarrow \tilde{\mathcal{G}}(\mathcal{U})$

$(s_x)_{x \in \mathcal{U}} \longmapsto (\varphi_x(s_x))_{x \in \mathcal{U}}$

r

AG 1, V13, 28.11.2018

Diag. (2)
$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "i_F"] \arrow[d, "\varphi"] & \tilde{\mathcal{F}} \arrow[d, "\tilde{\varphi}"] \\ \mathcal{G} \arrow[r, "i_G"] & \tilde{\mathcal{G}} \end{tikzcd}$$
kommut + $\tilde{\varphi}$ ist eindeutig.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}_x \arrow[r, "\cong", "i_{F,x}"'] \arrow[d, "\varphi_x"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \tilde{\mathcal{F}}_x \arrow[d, "\tilde{\varphi}_x"] \\ \mathcal{G}_x \arrow[r, "\cong", "i_{G,x}"'] & \tilde{\mathcal{G}}_x \end{tikzcd}$$
kommutiert nach Konstruktion.

Sei $\tilde{\varphi}': \tilde{\mathcal{F}} \to \tilde{\mathcal{G}}$ die das obere Diag kommutieren lasst

$\tilde{\varphi}'_x \underset{\text{Prop 23.2(b)}}{\Longrightarrow} \tilde{\varphi}_x = \tilde{\varphi}'_x \underset{\text{Prop 23.2(b)}}{\Longrightarrow} \tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}'$!

Sei $\mathcal{G}$ zusätzliche Garbe $\Rightarrow i_G: v\mathcal{G} \to v\tilde{\mathcal{G}}$ $\quad$ v.: Vergiss-Funktor

ist ein Isom wg (1) und Prop 23.2 (a), dieser Isomorph betrachten wir als Identifizierung, d.h.

$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathcal{F}} \arrow[dr, "\tilde{\varphi}"] & \\ \mathcal{F} \arrow[u, "i_F"] \arrow[r] & \mathcal{G} \end{tikzcd}$$
$\Rightarrow$ UVE

Eindeutigkeit von $\tilde{\mathcal{F}}$, formaler Unsinn $\square$

War: Falls $\mathcal{F}$ Prägarbe von Ring, R-Mod., R-Alg $\Rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$ Garbe —— " ——

Bsp: E Menge, Prägarbe $\mathcal{F}$ mit $\mathcal{F}(\mathcal{U}) = E$ $\forall \mathcal{U} \in \mathcal{O}uv_X$

$res^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}} = id_E$ "konstante Prägarbe"

$\Rightarrow \tilde{\mathcal{F}}(\mathcal{U}) = \{$ Menge der lokal konstante Fkt: $\mathcal{U} \to E\}$

$\tilde{\mathcal{F}}$ heißt die konstante Garbe mit Werten in E

Bez. $\underline{E}$, $\underline{E}_X$

Bew: $\tilde{\mathcal{F}}(\mathcal{U}) \longrightarrow \{\mathcal{U} \to E$ konstante Abb.$\}$

$s = (s_x)_{x\in\mathcal{U}} \in \prod_{x\in\mathcal{U}} E \longmapsto (x \longmapsto s_x)$

lokal $s_x = t \in E$

$(f(x))_{x\in\mathcal{U}} \longleftarrow\!\shortmid f: \mathcal{U} \to E$

$\mathcal{F}_x = \varinjlim \mathcal{F}(\mathcal{U}) = E$

8. Direktes und Inverses Bild von Garben

$X \xrightarrow{f} Y$ stetig Abb top. Räume $\mathcal{F}$ Prägarbe auf X

Ziel $f_* \mathcal{F}$ Prägarbe auf ~~Z~~ Y, das direkte Bild von $\mathcal{F}$ unter f

$$(f_* \mathcal{F})(V) := \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \text{ mit res Abb von } \mathcal{F}$$

$$\begin{tikzcd} f_* : PSh(X) \arrow[r] & PSh(Y) \\ \mathcal{F} \arrow[d, "\varphi"] \arrow[r, mapsto] & f_* \mathcal{F} \arrow[d, "f_*(\varphi)"] \\ \mathcal{G} & f_* \mathcal{G} \end{tikzcd}$$

ist Funktor, via $(f_* \varphi)_V = \varphi_{f^{-1}(V)}$

Bem 28

(1) $\mathcal{F}$ Garbe auf $X \Rightarrow f_* \mathcal{F}$ Garbe auf X, d.h.

$f_* : Sh(X) \to Sh(Y)$

(2) Ist $g : Y \to Z$ weitere stetige Abb top. Räume, so ex ei offensichtl. Iso

$$g_*(f_* \mathcal{F}) = (g \circ f)_*(\mathcal{F}) \text{ funktoriell in } \mathcal{F}$$

Nun sei $\mathcal{G}$ Prägarbe auf Y, ~~Z~~

Ziel $f^+ \mathcal{G}$ Prägarbe auf X

$f^{-1}\mathcal{G} := f^{+}\mathcal{G}$ Garbe auf X, Inverse Bild auf $\mathcal{G}$ unter f

via $(f^+ \mathcal{G})(U) := \varinjlim_{Y \supseteq V \supseteq f(U)} \mathcal{G}(V)$ mit induzierte res-Abb

Warnung $\mathcal{G}$ Garbe auf $Y \not\Rightarrow f^{-1}\mathcal{G}$ Garbe auf X

Falls $X \xhookrightarrow{f} Y$ Inklusion $\mathcal{G}|_X := f^{-1}\mathcal{G}$

Ist $X \xhookrightarrow{f} Y$ offen stimmt $\mathcal{G}|_X$ mit der Einschränkung ~~auf~~ aus Bsp 19 überein (cofinales Obj.)

$$f^{-1} : PSh(Y) \to Sh(X) \quad \text{Funktor}$$

AG1, V13 28.11.2018

$g: Y \to Z$, $\mathcal{H}$ Prägarbe auf Z, $U \subset X$ offen

$Z \underset{o}{\supset} W \supset g(f(U)) \iff W \supset g(V)$ für ein $f(U) \subset V \underset{o}{\subset} Y$

$$\overset{\lim \lim = \lim}{\Longrightarrow} f^{+}(g^{+}\mathcal{H}) = (g \circ f)^{+}\mathcal{H} \qquad (*)$$

$$\Rightarrow \underline{f^{-1}(g^{-1}(\mathcal{H})) = (g \circ f)^{-1}\mathcal{H}}$$

$i: \{x\} \hookrightarrow X$ Inklusion, $\mathcal{F}$ Prägarbe auf X

$\Rightarrow i^{-1}\mathcal{F} = \mathcal{F}_x$ (der Halm) ~~von x~~ per Def!

$\overset{(*)}{\Rightarrow} (f^{-1}\mathcal{G})_x = \mathcal{G}_{f(x)}$

Prop 29: Für $X \xrightarrow{f} Y$ stetig sind die Funktoren f_* und f^{-1} zueinander adjungiert, d.h. für $\mathcal{F}$ Garbe auf X, $\mathcal{G}$ Prägarbe auf Y ex. Bijektion

$$\mathrm{Hom}_{Sh(X)}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \overset{\cong}{\longleftrightarrow} \mathrm{Hom}_{PSh(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

$$\varphi \longmapsto \varphi^\flat$$

$$\psi^\sharp \longleftarrow\!\shortmid \psi$$

funktoriell in $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$

Bew: $f^{-1}\mathcal{G} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}$ Morph von Garben auf X, $t \in \mathcal{G}(V)$, $V \subset Y$ offen

$$\mathcal{G}(V) \to \underbrace{f^{+}\mathcal{G}(f^{-1}(V))}_{= \lim\limits_{Y \supset W \supset f(f^{-1}(V)) \subset V} \mathcal{G}(W)} \xrightarrow[i_{f^+\mathcal{G}}]{} f^{-1}\mathcal{G}(f^{-1}(V)) \xrightarrow[\varphi_{f^{-1}(V)}]{} \mathcal{F}(f^{-1}(V)) = f_*\mathcal{F}(V)$$

$$t \longmapsto \varphi^\flat_V(t)$$

def $\varphi^\flat$

Definition von $\psi^\sharp$: wir definieren $\psi^\sharp: f^{+}\mathcal{G} \to \mathcal{F}$, welches dann $\psi^\sharp: f^{-1}\mathcal{G} \to \mathcal{F}$ induziert. $U \subset X$ offen, $s \in f^{+}\mathcal{G}(U)$, $s = [(V, s_V)]$

$V \supset f(U)$, $s_V \in \mathcal{G}(V)$

$f^{-1}(V) \supset U$

$$\Rightarrow \psi_V(s_V) \in f_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

$$\downarrow \text{res}$$

$$\psi^\sharp_U(s) \in \mathcal{F}(V)$$

Überprüfe $\phi^{\flat\sharp} = \phi$, $\psi^{\sharp\flat} = \psi$ + Funktorialität $\square$

Def + Prop 29: verallgemein nicht zu (Prä) garben von Ringen, R-Moduln, R-Algebren

Beschreibung von $\mathcal{G}_{f(x)} \to \cancel{f^{-1}(\mathcal{G})_x}$ $(f^{-1}\mathcal{G})_x \to \mathcal{F}_x$, $x \in X$

$f(x) \in \mathcal{U} \underset{\text{offen}}{\subseteq} Y$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}(\mathcal{U}) \arrow[r, "\varphi^\flat_{\mathcal{U}}"] \arrow[d, dashed] & \mathcal{F}(f^{-1}(\mathcal{U})) \arrow[r] & \mathcal{F}_x \\ \mathcal{G}_{f(x)} \arrow[urr] & & \end{tikzcd}$$

$\varinjlim_{\mathcal{U}}$