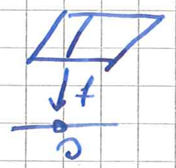
Alggeo 1, V, 23.01.2019

## 3. Fasern von Morphismen

Ziel
$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \\ S \ni s \end{tikzcd} \qquad f^{-1}(s) \text{ als Schema}$$



kappa

Def 18: Für den kanonische Morph $\mathrm{spec}(\kappa(s))$ nennen wir
$$X_s := X \otimes_S k(s)$$
die Faser von $f$ über $s$, ein $k(s)$-Schema

Prop 14 $\Rightarrow$

$$\begin{tikzcd} X_s \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & S \otimes_S X \arrow[r, "q = id_X"] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}\, k(s) \arrow[r, "\text{canon.}"'] & S \arrow[r, "id_S"'] & S \end{tikzcd}$$

besagt $X_s \cong f^{-1}(s)$ $\approx$ Homöomorph Bild(canon.), d.h. wir können

$f^{-1}(s)$ als Schema auffassen.

Denkweise: $\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"] \\ S \end{tikzcd}$ $\cong$ Familie von $k(s)$-Schemata $X_s$ parametrisiert durch Punkt in $S$

Bsp 19: $k$ alg. abg

$X(k) := \{(u,t,s) \in \mathbb{A}^3(k),\ ut = s\}$

Da $UT - S \in k[U,T,S]$ irreduzibel ist, ist $X(k)$ eine affine Varietät $\longleftrightarrow$ $X = \mathrm{Spec}\left(k[U,T,S]/(UT-S)\right)$ ganz $k$-Schema

$S = \mathbb{A}^1(k)$, $X \longrightarrow S$, $(u,t,s) \longmapsto s$ Projektion

$s \in \mathbb{A}^1(k)$, $X_s := \mathrm{Spec}\, A_s$, $A_s = k[U,T,S]/(UT-S) \otimes_{k[S]} k[S]/(S-s)$
$$= k[U,T]/(UT-s)$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] \\ S \end{tikzcd}$$ definiere Familie $X_s$ von $S$-Schemata, s.d.

$X_s$ reduzibel, da $UT - s \in k[U,T]$ reduzibel für $s=0$

$X_s$ irred. für $s \neq 0$ → s — irred $s \neq 0$

Lemma 20:

$$\begin{tikzcd}
 & & X \times_S Y \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & & \\
 & x \in X \arrow[dr, "f"'] & & Y \ni y \arrow[dl, "g"] & \\
\operatorname{Spec} \kappa(x) \arrow[ur, "\xi"] & & S & & \operatorname{Spec} \kappa(y) \arrow[ul, "\eta"']
\end{tikzcd}$$

Dann: (1) $\exists\ z \in X \times_S Y$ mit $p(z) = x,\ q(z) = y \iff f(x) = g(x)$

(2) Gelte (1), ~~$Z := \operatorname{Spec}(\kappa(x) \otimes_{\kappa(s)} \kappa(y)) \longrightarrow X \times_S Y$~~

$s := f(x) = g(y)$

$\Rightarrow \zeta := \xi \times_S \eta : Z = \operatorname{Spec}(\kappa(x) \otimes_{\kappa(s)} \kappa(y)) \longrightarrow X \times_S Y$

ist Homöo von $Z$ auf Teilraum $\zeta(Z) = p^{-1}(x) \cap q^{-1}(y)$

Bew:

$$p^{-1}(x) \times_{(X \times_S Y)} q^{-1}(y) = Z$$

$$\begin{tikzcd}
 & & Z \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & p^{-1}(x) \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, "\Diamond"] & & q^{-1}(y) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\operatorname{Spec} \kappa(x) \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, "\square"] & & X \times_S Y \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, "\square"] \arrow[d, phantom, "\square"] & & \operatorname{Spec} \kappa(y) \arrow[dl] \\
 & X \arrow[dr] & {} & Y \arrow[dl] & \\
 & & S & &
\end{tikzcd}$$

AlgGeo1, V, 23.01.2019

Wende Prop 14 (2x) an

$\Rightarrow g'^{-1}(z) = i^{-1}(p^{-1}(x)) = g^{-1}(y) \cap p^{-1}(x)$ $\square$

## 8. Eigenschaften von Schematamorphismen

Sprechweise 21: $\mathbb{P}$ Eig von Morph von Schemata

(1) $\mathbb{P}$ heißt lokal im Ziel, falls für alle Morph $f$ und alle offen Überdeckung $S = \bigcup_j S_j$ gilt:

$X \xrightarrow{f} S$ erfüllt $\mathbb{P} \Leftrightarrow f|_{f^{-1}(S_j)} : f^{-1}(S_j) \to S_j$ erfüllt $\mathbb{P}$ $\forall j$

(2) • lokal in der Quelle, falls für alle $f: X \to Y$, alle offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ gilt:

$f$ erfüllt $\mathbb{P} \Leftrightarrow f|_{U_i} : U_i \to Y$ erfüllt $\mathbb{P}$ $\forall i \in I$

Def: Ein Morphismus $X \xrightarrow{f} Y$ von Schemata heißt (treu) flach, falls $\forall x \in X$ die Abb.

$\mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ (treu-) flach ist

Prop 22 Die folgende Eigenschaft von Schemata-Morph sind:

(1) stabil unter "$\circ$": injektiv, surj, bijektiv, homöo, flach treuflach, offen, abg, $\emptyset$ Immersion

(2) stabil unter Basiswechsel: surj, offen/abg/$\emptyset$ Immersion, flach, treuflach.

(3) lokal bzgl Ziel: surj, bij, homöo, offen/abg.

(4) lokal bzgl der Quelle: offen, flach

Bew: (1), (3), (4) klar

(2) Fall (offen/abg) Immersionen wird in Abschnitt 9 weiter behandelt.

Lemma 20 $\Rightarrow$ Surj stabil unter Basiswechsel:

$$\begin{array}{ccccc} X \times_S Y & \xrightarrow{g} & Y & & y \\ & & & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & S & & s \\ \exists x & \longmapsto & & & s \end{array}$$

$\Rightarrow \exists z \in X \times_S Y$ mit $g(z) = y$ ✓

$X \to S$ (treu)flach und $S' \to S$ bel.

(3), (4) OE $X = \operatorname{Spec} A$, $S = \operatorname{Spec} R$, $S' = \operatorname{Spec} R'$

$A$ (treu)flache $R$-Algebra

$\Rightarrow A \otimes_R R'$ (treu)flache $R'$-Algebra, d.h. $f_{(S')}$ ist (treu)flach

$(A \otimes_R R') \otimes_{R'} M \cong A \otimes_R M$

Kor 23 Die folg. Eigenschaft sind stabil unter "σ" Basiswechsel und lokal bzgl Ziel:

"universell inj", "univ. bij", "univ. homöo", "univ. offen"

"univ abg."

AlgGeo 1, V, 23.01.2019

## 9. Urbilder und Schema-theoret.-Durchschnitte von Unterschemata

$$\begin{tikzcd} Z \times_Y X \arrow[r] \arrow[d, "i_{(X)}"'] & Z \arrow[d, "i"] \\ X \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

$i$ Immersion $\overset{\text{Prop 14}}{\Rightarrow}$ $i_{(X)}$ ist surj auf Halme Homöomorph auf lokal abg. TM

$f^{-1}(Z)$, genauer $f^{-1}(i/Z)$

d.h. $i_{(X)}$ Immersion: Fasse ~~Z~~ $Z \times_Y X$ als Unterschema von $X$ auf, das Urbild von $Z$ unter $f$

Bem (i) Ist $Z \subset Y$ offenes Unterschema, so auch $f^{-1}(Z) \subset X$

(ii) $Z = V(\mathfrak{p})$ abg — " —, so auch $f^{-1}(Z)$ —"—

$\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_Y$ Idealgabe, Bild $(f^{-1}(\mathfrak{p}) \to f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X) = V(f^{-1}(\mathfrak{p})\mathcal{O}_X)$

d.h. $i_* \mathcal{O}_Z \cong \mathcal{O}_Y/\mathfrak{p}$

Spezialfall: Durchschnitt von 2 Unterschemata

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "i"] \\ Z \arrow[r, "j"] & X \end{tikzcd}$$

$Y \cap Z := Y \times_X Z = i^{-1}(Z) = j^{-1}(Y)$ heißt (Schema-theoret.) Durchschnitt von $Y$ und $Z$ in $X$.

UE (aus UE Faserprodukt)

Ein Morph. $T \xrightarrow{h} X$ faktorisiert durch $Y \cap Z$ $\Leftrightarrow$ $h$ faktorisiert durch $Y$ und $Z$

Sind $Y = V(\mathfrak{p})$, $Z = V(\mathfrak{q})$ abg. Unterschema, so folgt

$V(\mathfrak{p}) + V(\mathfrak{q}) = V(\mathfrak{p} + \mathfrak{q})$

$A/\mathfrak{p} \otimes_A A/\mathfrak{q} \cong A/\mathfrak{q}+\mathfrak{p}$

Bsp $f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_s \in R[X_0, \dots, X_n]$ homogen Poly.

$\Rightarrow$ $V_+(f_1, \dots, f_r) \cap V_+(g_1, \dots, g_s)$

$= V_+(f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_s) \subset \mathbb{P}^n_R$

# 10. Affine / Proj. Räume ü. bel Basen

$\mathbb{A}^n := \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}$, $S$ bel Schema

$\mathbb{A}^n_S := \cancel{\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}}\ \mathbb{A}^n \times_{\mathbb{Z}} S$, affin Raum derselb Dim n über S

$\mathbb{P}^n_S := \mathbb{P}^n \times_{\mathbb{Z}} S$ proj' Raum der selb Dim n über S

$S = \operatorname{Spec} R$ affin: $\mathbb{A}^n_S = \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[T_1,\dots,T_n] \otimes_{\mathbb{Z}} R) = \operatorname{Spec}(R[T_1,\dots,T_n])$

$= \mathbb{A}^n_R$ wie zuvor!

$\mathbb{P}^n_S = \mathbb{P}^n_R$ Analog.

$\mathbb{A}^n_S \times_S S' = \mathbb{A}^n \times_{\mathbb{Z}} S \times_S S' = \mathbb{A}^n_{S'}$

$\mathbb{P}^n_S \times_S S' \cong \mathbb{P}^n_S$

für bel Basiswech $S' \longrightarrow S$

$X$ bel. Schema, $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \operatorname{Hom}_{Ring}(\mathbb{Z}[T], \Gamma(X, \mathcal{O}_X))$

$= \operatorname{Hom}_{Sch}(X, \mathbb{A}^1)$

$\varphi(T) \longleftarrow\!\shortmid\ \varphi$

$X$ S-Schemes $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \operatorname{Hom}_{S\text{-}Sch}(X, \mathbb{A}^1_S)$

AlgGeo 1, V, 23.01.2019

## 11. Diagonal, Graph, und Kern in bel Kat.

$S \in \mathcal{C}$ Kat mit bel. Faserprodukten, $X, T \in \mathcal{C}/_S$, $X_S(T)$ Menge der S-Morph.

Def 24. Der Morph, $X \xrightarrow{u} S$

(1) $\Delta_{X/S} := \Delta_u := (id_X, id_X) : X \longrightarrow X \times_S X$

heißt Diagonale(r Morphismus) von X über S

(2) $X \xrightarrow{f} Y \in Morph/_S$. Der Morph.

$\Gamma_f := (id_X, f)_S : X \longrightarrow X \times_S Y$

heißt der Graph(morphismus) von f

(3) $X \xrightarrow{f,g} Y \in Morph/_S$. Ein S-Monomor $i : K \to X$ heißt (Differenzen)Kern von f und g, falls für alle $T \in \mathcal{C}/_S$ die Abb. $i(T) : K_S(T) \longrightarrow X_S(T)$ injektiv ist mit $Bild(i(T)) = \{x \in X_S(T) \mid f(T)(x) = g(T)(x)\}$

Bez $K(f,g)_S$ oder $Ker(f,g)$, $i$ "kanonisch"

mit andern Worten $Kern(f,g)$ separiert den Funktor

$$\begin{aligned} \mathcal{C}/_S &\longrightarrow Sch \\ T &\longmapsto \{x \in X_S(T) \mid f(T)(x) = g(T)(x)\}. \end{aligned}$$