Modèle d'Ising avec bruit

Monte-Carlo et simulation

Mathis Mathieu,Benjamin Pipaud, Lucas Saban

Ensae Paris
IP Paris

Mai 2022

Cadre théorique et hypothèses

- Hypothèse d'une image de taille $n \times m$ bruitée avec bruit gaussien
- On note $(y_i)_i$ l'image bruitée, $(x_i)_i$ l'image originelle.
- On suppose $y_i | x_i \sim \mathcal{N}(x_i, \tau^2)$
- Ici, on ne traitera que d'images en noir et blanc, soit

$$\forall i, x_i \in \{0, 1\}$$

- Les $(x_i)_i$ suivent une loi d'Ising :

$$p(x) = \frac{1}{Z(\alpha, \beta)} \exp(\alpha \sum_i x_i + \beta \sum_{i \sim j} \mathbb{1}_{x_i = x_j})$$

Débruitage avec Gibbs sampler

- Remarque sur la constante de normalisation $Z(\alpha, \beta)$
- Probabilité faisant l'objet du Gibbs sampling:

$$\mathbb{P}(x_i = 1|N(x_i), Y) = \frac{\mathbb{P}(x_i = 1|N(x_i), Y)}{\mathbb{P}(x_i = 1|N(x_i), Y) + \mathbb{P}(x_i = 0|N(x_i), Y)}$$

$$= \frac{\exp(-\frac{(y_i-1)^2}{2\sigma^2} + \alpha + \beta \sum_{i\sim j} \mathbb{1}_{x_j=1})}{\exp(-\frac{(y_i-1)^2}{2\sigma^2} + \alpha + \beta \sum_{i\sim j} \mathbb{1}_{x_j=1}) + \exp(-\frac{y_i^2}{2\sigma^2} + \beta \sum_{i\sim j} \mathbb{1}_{x_j=0})}$$

Pseudo Code

Algorithm 1 Algorithme de débruitage, τ^2, α, β connus

```
X ← Y.copy
X_agreg ← Y.copy
for i from 1 to N_iter do
    for j from 1 to L×W do
        p ← sample from 𝓛(X_j | N(X_j), Y)
        X_j ← sample from Ber(p)
        X_agreg ← X_agreg + X
    end for
end for
return X_agreg / (N_iter × L × W)
```

Image initiale

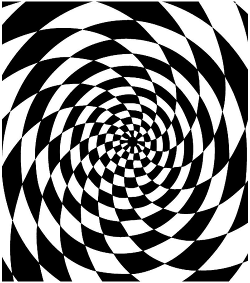

Figure 1: Image avant bruitage

Résultats

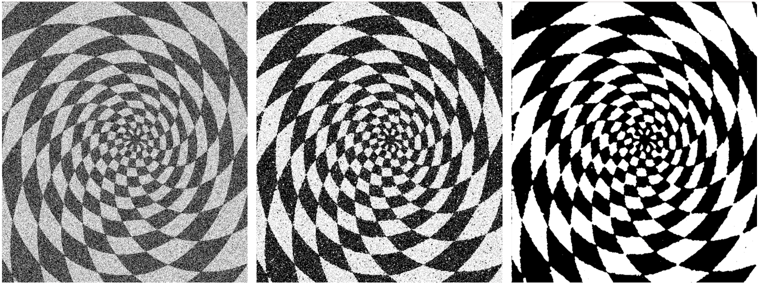

Figure 2: Évolution du débruitage, $\alpha = 0.0, \beta = 1.3$

ACF

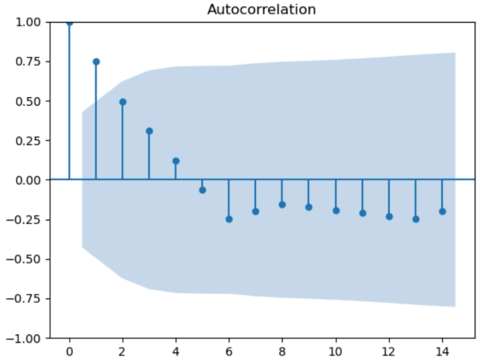

Figure 3: Analyse des fonctions de corrélations

Évolution de $log(n_{chgt})$

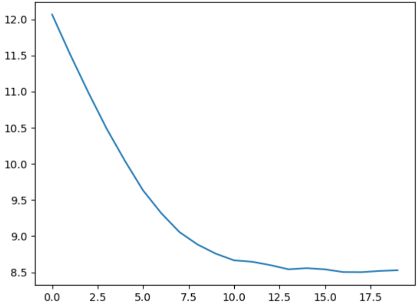

Figure 4: Décroissance du nombre de changement au cours des itérations

Estimation de τ (1)

- On suppose maintenant que τ^2 n'est pas connu et on pose T; la variable aléatoire dont τ^2 est une réalisation.
- Afin de déterminer τ^2, nous allons nous placer dans le cadre bayésien. On suppose donc $Y|T = \tau^2 \sim \prod_{i=1}^{N} \mathcal{N}(\mu_i, \tau^2)$ et $T \sim \Gamma^{-1}(\alpha, \beta)$.
- La loi à posteriori prend alors la forme suivante: $d\mathbb{P}(T = \tau^2 | Y = y) \propto d\mathbb{P}(Y = y | T = \tau^2) d\mathbb{P}(T = \tau^2)$

Calcul de la densité à priori

- Nous avons donc :

$$d\mathbb{P}(T=\tau^2|Y=y) \propto \frac{\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^N (y_i-\mu_i)^2}{2\tau^2}\right)}{(2\pi\tau^2)^{N/2}} \times \frac{\beta^\alpha \exp(-\frac{\beta}{\tau^2})}{\Gamma(\alpha)\tau^{2(\alpha+1)}}$$
$$\propto \left(\frac{1}{\tau^2}\right)^{\alpha+\frac{N}{2}+1} \exp\left(-\frac{\beta+\sum_{i=1}^N (y_i-\mu_i)^2/2}{\tau^2}\right) \quad (1)$$

- On reconnaît ainsi une loi Inv-Gamma$(\alpha+\frac{N}{2}, \beta+\sum_{i=1}^N (y_i-\mu_i)^2/2)$
- En utilisant l'estimateur minimisant le risque quadratique et en supposant que $\alpha+\frac{N}{2}>1$, on obtient:

$$\hat{\tau}^2 = \mathbb{E}[T=\tau^2|Y=y] = \frac{\beta+\sum_{i=1}^N (y_i-\mu_i)^2/2}{\alpha+\frac{N}{2}-1}$$

Contraintes

- Comme nous venons de le voir, la moyenne des échantillons devrait tendre vers la valeur de τ, à condition de bien choisir α. Cette méthode nous restreint donc dans le choix de notre loi à priori.

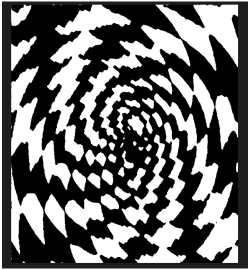

Figure 5: Mauvais choix de prior pour τ^2

Pseudo Code

Algorithm 2 Algorithme de débruitage, τ^2 inconnu

for i from 1 to N_{iter} **do**
    $X \leftarrow Y$.copy
    $\tau^2 \leftarrow$ sample from $\mathcal{L}(\tau^2 | X_{-j}, Y, \alpha', \beta')$
    for j from 1 to L×W **do**
        $X_j \leftarrow$ sample from $\mathcal{L}(X_j | X_{-j}, Y, \tau^2)$
        $\tilde{X} \leftarrow \tilde{X} + X$
    end for
    $\tilde{\tau}^2 \leftarrow \tilde{\tau}^2 + \tau^2$
end for
return $\tilde{X}/(N_{\text{iter}} \times \text{L} \times \text{W})$, $\tilde{\tau}/N_{\text{iter}}$

Évolution de $log(n_{chgt})$

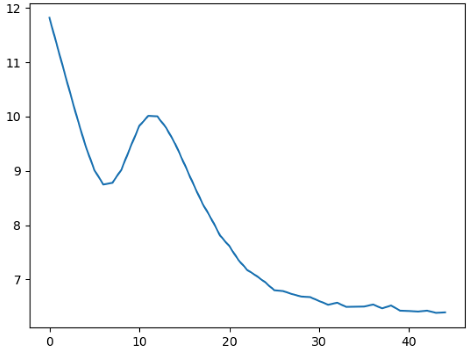

Figure 6: Convergence plus lente, burn-in autour de 40

Recherche d'hyperpriors pour Ising(α, β)

- Supposons maintenant que les hyperparamètres de la loi d'Ising sont inconnus. Il est judicieux de choisir des hyperpriors qui soient conjugués, de manière à pouvoir en exprimer la densité conditionnellement aux autres variables aléatoires.
- Mais il faut aussi prendre en compte que la constante Z dépend de α, β

$$Z(\alpha, \beta) = \sum_{p=1}^{2^N} \exp(\alpha \sum_i x_i(\omega_p) + \beta \sum_{i \sim j} \mathbb{1}(x_i(\omega_p) = x_j(\omega_p)))$$

Pour 2^{128}, l'ordre du nombre d'atome dans l'univers (10^{78})

Solutions

Plusieurs pistes :

- Importance Sampling et GIMH (Al-Bashabsheh and Mao, Schäfer)

$$p(\alpha, \beta | X, tau^2, Y) = \hat{p}(X|\alpha, \beta) p(Y|X, \tau^2) p(\alpha, \beta) \quad (2)$$

$$\hat{p}(X|\alpha, \beta) = N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \frac{p(X, z^n|\alpha, \beta)}{q(z^n)}, z_{1:N} \sim q(z) \quad (3)$$

- Formule explicite et estimation bayésienne , (Giovannelli)
- Interpolation (Smith and Smith)

Interpolation

En se basant sur l'approche à l'intégration de la thermodynamique, on peut montrer que, en modifiant légèrement le modèle :

- $Z(\beta) \propto \exp(-z(\beta))$
- où $z(\beta) = \int_0^{\beta} \mathbb{E}(U(x)|\beta')d\beta'$
- et $U(x) = \sum_{i \sim j} \mathbb{1}(x_i = x_j)$

Processus de calcul

1. $\forall \beta_i$ réparti uniformément dans$[0, \beta_{max}]$ calculer

$$\mathbb{E}(U(x)|\beta = \beta_i) \approx \frac{1}{J} \sum_{j=1}^{J} U(x_j)$$

$$x_j \sim \text{Ising}(\beta_i)$$

2. Interpoler numériquement $\mathbb{E}(U(x)|\beta = \beta_i)$ (continue) $\implies z(\beta) \implies Z(\beta)$

Dans le papier de Smith and Smith, $\beta \sim \mathcal{N}$ majorée par β_{max}

A. Al-Bashabsheh and Y. Mao. On stochastic estimation of the partition function. In *2014 IEEE International Symposium on Information Theory*, pages 1504–1508, 2014. doi: 10.1109/ISIT.2014.6875084.

J.-F. Giovannelli. Estimation of the Ising field parameter thanks to the exact partition function. In *ICIP*, pages 1441–1444, Hong-Kong, France, Sept. 2010. URL https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00669080.

C. Schäfer. *Monte Carlo methods for sampling high-dimensional binary vectors*. Theses, Université Paris Dauphine - Paris IX, Nov. 2012. URL https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00767163.

D. Smith and M. Smith. Estimation of binary markov random fields using markov chain monte carlo. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 15(1):207–227, 2006. ISSN 10618600. URL `http://www.jstor.org/stable/27594172`.

M. Xu. Ritsumeikan beamer theme. In *How to write beautiful LaTeX*, 2022. URL `https://www.overleaf.com/project`.

Thank You