

Modèle d'Ising avec bruit

Monte-Carlo et simulation

Mathis Mathieu, Benjamin Pipaud, Lucas Saban

Ensaie Paris
IP Paris

Mai 2022



① Débruitage lorsque τ^2 , α et β sont connus

② τ^2 inconnu

③ α , β et τ^2 inconnus

④ References

1 Débruitage lorsque τ^2 , α et β sont connus

2 τ^2 inconnu

3 α , β et τ^2 inconnus

4 References

Cadre théorique et hypothèses

- Hypothèse d'une image de taille $n \times m$ bruitée avec bruit gaussien
- On note $(y_i)_i$ l'image bruitée, $(x_i)_i$ l'image originelle.
- On suppose $y_i|x_i \sim \mathcal{N}(x_i, \tau^2)$
- Ici, on ne traitera que d'images en noir et blanc, soit

$$\forall i, x_i \in \{0, 1\}$$

- Les $(x_i)_i$ suivent une loi d'Ising :

$$p(x) = \frac{1}{Z(\alpha, \beta)} \exp\left(\alpha \sum_i x_i + \beta \sum_{i \sim j} \mathbb{1}_{x_i=x_j}\right)$$

Débruitage avec Gibbs sampler

- Remarque sur la constante de normalisation $Z(\alpha, \beta)$
- Probabilité faisant l'objet du Gibbs sampling:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(x_i = 1 | N(x_i), Y) &= \frac{\mathbb{P}(x_i = 1 | N(x_i), Y)}{\mathbb{P}(x_i = 1 | N(x_i), Y) + \mathbb{P}(x_i = 0 | N(x_i), Y)} \\ &= \frac{\exp\left(-\frac{(y_i-1)^2}{2\sigma^2} + \alpha + \beta \sum_{i \sim j} \mathbb{1}_{x_j=1}\right)}{\exp\left(-\frac{(y_i-1)^2}{2\sigma^2} + \alpha + \beta \sum_{i \sim j} \mathbb{1}_{x_j=1}\right) + \exp\left(-\frac{y_i^2}{2\sigma^2} + \beta \sum_{i \sim j} \mathbb{1}_{x_j=0}\right)} \end{aligned}$$

Pseudo Code

Algorithm 1 Algorithme de débruitage, τ^2, α, β connus

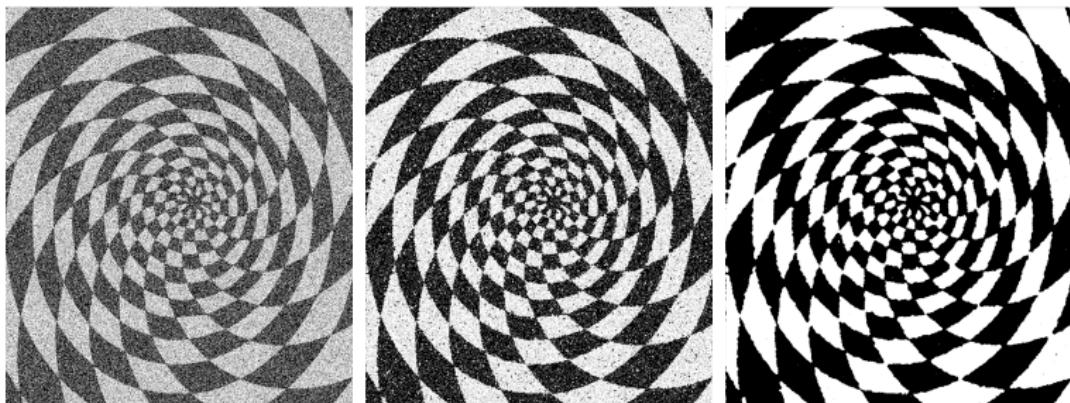
```
1:  $X \leftarrow Y.\text{copy}$ 
2:  $X_{\text{agreg}} \leftarrow Y.\text{copy}$ 
3: for i from 0 to  $N_{\text{iter}}$  do
4:   for j from 0 to  $L \times W$  do
5:      $p \leftarrow \text{sample from } \mathcal{L}(X_j | N(X_j), Y)$ 
6:      $X_j \leftarrow \text{sample from } Ber(p)$ 
7:      $X_{\text{agreg}} \leftarrow X_{\text{agreg}} + X$ 
8:   end for
9: end for
10: return  $\frac{X_{\text{agreg}}}{N_{\text{iter}}}$ 
```

Image initiale



Figure 1: Image avant bruitage

Résultats

Figure 2: Évolution du débruitage, $\alpha = 0.0$, $\beta = 1.3$

ACF

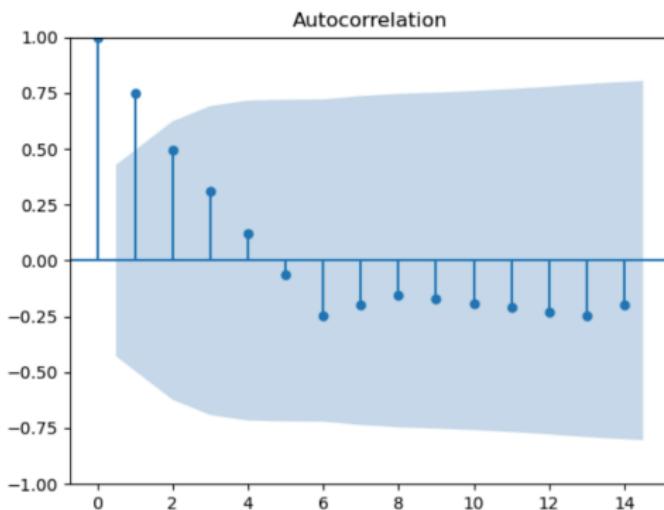


Figure 3: Analyse des fonctions de corrélations

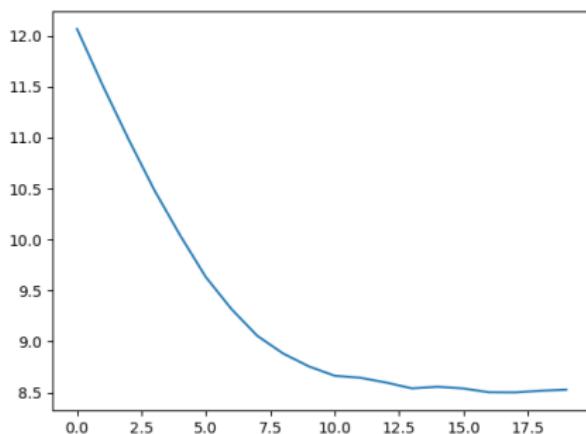
Évolution de $\log(n_{chgt})$ 

Figure 4: Décroissance du nombre de changement au cours des itérations

1 Débruitage lorsque τ^2 , α et β sont connus

2 τ^2 inconnu

3 α , β et τ^2 inconnus

4 References

Estimation de τ (1)

- On suppose maintenant que τ^2 n'est pas connu et on pose T ; la variable aléatoire dont τ^2 est une réalisation.
- Afin de déterminer τ^2 , nous allons nous placer dans le cadre bayésien. On suppose donc $Y|T \sim \prod_{i=1}^N \mathcal{N}(\mu_i, \tau^2)$ et $T \sim \Gamma^{-1}(\alpha, \beta)$.
- La loi à posteriori prend alors la forme suivante:
$$d\mathbb{P}(T = \tau^2 | Y = y) \propto d\mathbb{P}(Y = y | T = \tau^2) d\mathbb{P}(T = \tau^2)$$

Calcul de la densité à priori

- Nous avons donc :

$$\begin{aligned} d\mathbb{P}(T = \tau^2 | Y = y) &\propto \frac{\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^N(y_i - \mu_i)^2}{2\tau^2}\right)}{(2\pi\tau^2)^{N/2}} \times \frac{\beta^\alpha \exp(-\frac{\beta}{\tau^2})}{\Gamma(\alpha)\tau^{2(\alpha+1)}} \\ &\propto \left(\frac{1}{\tau^2}\right)^{\alpha + \frac{N}{2} + 1} \exp\left(-\frac{\beta + \sum_{i=1}^N(y_i - \mu_i)^2/2}{\tau^2}\right) \quad (1) \end{aligned}$$

- On reconnaît ainsi une loi Inv-Gamma($\alpha + \frac{N}{2}, \beta + \sum_{i=1}^N(y_i - \mu_i)^2/2$)
- En utilisant l'estimateur minimisant le risque quadratique et en supposant que $\alpha + \frac{N}{2} > 1$, on obtient:

$$\hat{\tau}^2 = \mathbb{E}[T = \tau^2 | Y = y] = \frac{\beta + \sum_{i=1}^N(y_i - \mu_i)^2/2}{\alpha + \frac{N}{2} - 1}$$

Contraintes

- Comme nous venons de le voir, la moyenne des échantillons devrait tendre vers la valeur de τ , à condition de bien choisir α . Cette méthode nous restreint donc dans le choix de notre loi à priori.



Figure 5: Mauvais choix de prior pour τ^2

Pseudo Code

Algorithm 2 Algorithme de débruitage, τ^2 inconnu

- 1: **for** i from 0 to N_{iter} **do**
- 2: $X \leftarrow Y.\text{copy}$
- 3: $\tau^2 \leftarrow \text{sample from } \mathcal{L}(\tau^2 | X_{-j}, Y, \alpha', \beta')$
- 4: **for** j from 0 to $L \times W$ **do**
- 5: $X_j \leftarrow \text{sample from } \mathcal{L}(X_j | X_{-j}, Y, \tau^2)$
- 6: **end for**
- 7: $\tilde{\tau}^2 \leftarrow \tilde{\tau}^2 + \tau^2$
- 8: $\tilde{X} \leftarrow \tilde{X} + X$
- 9: **end for**
- 10: **return** \tilde{X}/N_{iter} , $\tilde{\tau}/N_{iter}$

Évolution de $\log(n_{chgt})$

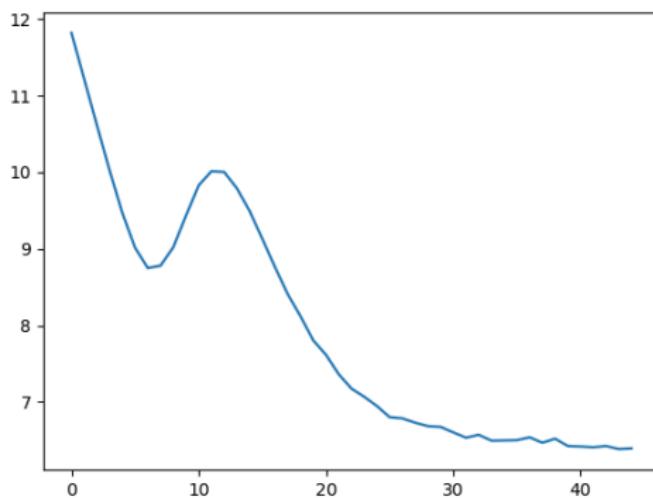


Figure 6: Convergence plus lente, burn-in autour de 40

1 Débruitage lorsque τ^2 , α et β sont connus

2 τ^2 inconnu

3 α , β et τ^2 inconnus

4 References

Recherche d'hyperpriors pour Ising(α, β)

- Supposons maintenant que les hyperparamètres de la loi d'Ising sont inconnus. Il est judicieux de choisir des hyperpriors qui soient conjugués, de manière à pouvoir en exprimer la densité conditionnellement aux autres variables aléatoires.
- Mais il faut aussi prendre en compte que la constante Z dépend de α, β

$$Z(\alpha, \beta) = \sum_{p=1}^{2^N} \exp\left(\alpha \sum_i x_i(\omega_p) + \beta \sum_{i \sim j} \mathbb{1}(x_i(\omega_p) = x_j(\omega_p))\right)$$

Pour 2^{128} , l'ordre du nombre d'atome dans l'univers (10^{78})

Solutions

Plusieurs pistes :

- Importance Sampling et GIMH (Al-Bashabsheh and Mao, Schäfer)

$$p(\alpha, \beta | X, tau^2, Y) = \hat{p}(X|\alpha, \beta)p(Y|X, \tau^2)p(\alpha, \beta) \quad (2)$$

$$\hat{p}(X|\alpha, \beta) = N^{-1} \sum_{i=1}^N \frac{p(X, z^n | \alpha, \beta)}{q(z^n)}, z_{1:N} \sim q(z) \quad (3)$$

- Formule explicite et estimation bayésienne , (Giovannelli)
- Interpolation (Smith and Smith)

Interpolation

En se basant sur l'approche à l'intégration de la thermodynamique, on peut montrer que, en modifiant légèrement le modèle :

- $Z(\beta) \propto \exp(-z(\beta))$
- où $z(\beta) = \int_0^\beta \mathbb{E}(U(x)|\beta') d\beta'$
- et $U(x) = \sum_{i \sim j} \mathbb{1}(x_i = x_j)$

Processus de calcul

① $\forall \beta_i$ réparti uniformément dans $[0, \beta_{max}]$ calculer

$$\mathbb{E}(U(x)|\beta = \beta_i) \approx \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J U(x_j)$$

$$x_j \sim \text{Ising}(\beta_i)$$

② Interpoler numériquement $\mathbb{E}(U(x)|\beta = \beta_i)$ (continue)
 $\Rightarrow z(\beta) \Rightarrow Z(\beta)$

Dans le papier de Smith and Smith, $\beta \sim \mathcal{N}$ majorée par β_{max}

1 Débruitage lorsque τ^2 , α et β sont connus2 τ^2 inconnu3 α , β et τ^2 inconnus

4 References

- A. Al-Bashabsheh and Y. Mao. On stochastic estimation of the partition function. In *2014 IEEE International Symposium on Information Theory*, pages 1504–1508, 2014. doi: 10.1109/ISIT.2014.6875084.
- J.-F. Giovannelli. Estimation of the Ising field parameter thanks to the exact partition function. In *ICIP*, pages 1441–1444, Hong-Kong, France, Sept. 2010. URL <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00669080>.
- C. Schäfer. *Monte Carlo methods for sampling high-dimensional binary vectors*. Theses, Université Paris Dauphine - Paris IX, Nov. 2012. URL <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00767163>.

D. Smith and M. Smith. Estimation of binary markov random fields using markov chain monte carlo. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 15(1):207–227, 2006. ISSN 10618600.
URL <http://www.jstor.org/stable/27594172>.

M. Xu. Ritsumeikan beamer theme. In *How to write beautiful L^AT_EX*, 2022. URL <https://www.overleaf.com/project>.

Thank You