Mathématiques actuarielles IARD-1
ACT-2005
Notes de cours

Gabriel Crépeault-Cauchon
Nicholas Langevin

7 octobre 2018

Table des matières

Résumé

Ce document résume les notes de cours prises en classe dans le cours de Mathématiques actuarielles IARD-1, ainsi que des notions prises du livre *LOSS MODELS - From Data to Decisions, 4th edition*.

Chapitre 3

Quantités des distributions à connaître

3.1 Moments

Raw moments On représente le k^e moment par μ_k', soit

$$\mu_k' = E\left[X^k\right] \tag{3.1}$$

Moments centraux Le k^e moment central est représenté par

$$\mu_k = E\left[(X-\mu)^k\right] \tag{3.2}$$

Exemple 3.1.1 Quelques exemples de moments centraux

La variance est le 2^e moment central :

$$Var(X) = \mu_2 = E\left[(X-\mu)^2\right]$$

Le 3^e moment centré, qui est utilisé pour calculer le coefficient d'asymétrie :

$$\mu_3 = E\left[(X-\mu)^3\right]$$

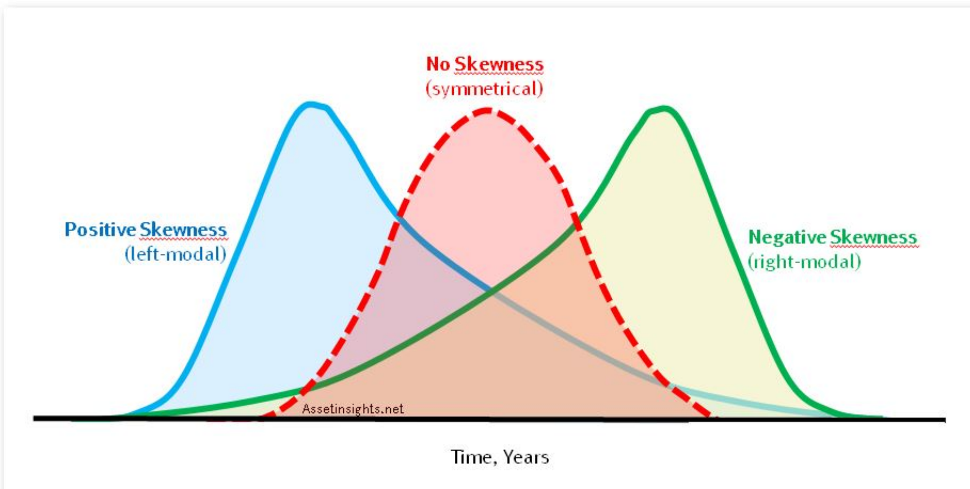
Coefficient de variation

$$CV = \frac{\sigma}{E[X]} \tag{3.3}$$

Coefficient d'asymétrie Le coefficient d'asymétrie, aussi appelé *skewness*, est défini par

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \tag{3.4}$$

Soit le 3ᵉ moment standarisé. Si $S_k = 0$, alors la distribution tend vers une loi normale, telle qu'on le voit sur la figure ci-dessous :



Coefficient d'applatissement Le coefficient d'applatissement, aussi appelé *Kurtosis*, se définit par

$$\text{Kurtosis} = \frac{\mu_4}{\sigma^4} \tag{3.5}$$

Cette quantité permet de mesurer l'épaisseur de l'aile (*tail*) de la distribution. Si $E\left[z^4\right] = 3$, alors la distribution tend vers une loi normale $N(\mu, \sigma^2)$.

Mean Excess Loss On définit la variable aléatoire Y^P, qui représente le montant de perte en excès d'un déductible d, sachant que la perte est au delà de ce montant. On peut définir l'espérance des coûts de cette variable alétaoire :

$$e(d) = E\left[Y^P\right] = E[X - d | X \geq d] = \frac{\int_d^\infty S_X(x)}{S_X(d)} \tag{3.6}$$

Note : cette variable est dite tronquée à gauche et *shifted*. On entend parfois aussi *Per-payment*

Left censored and shifted variable Soit la v.a. Y^L, qui représente le montant payé par l'assureur *par perte*. La variable est donc dite *censurée à gauche et shifted*. On peut aussi en calculer l'espérance :

$$E\left[Y^L\right] = E\left[(X-d)_+\right] = \int_d^\infty (x-d) f_X(x) dx \tag{3.7}$$

De plus, on peut facilement déduire la relation suivante :

$$E\left[(X-d)_+\right] = e(d)(1-F_X(d))$$

Limited Loss Variable Finalement, on peut définir la variable Y, qui représente le paiement de l'assureur avec une limite de u à la police. Son espérance est définie par

$$E\left[X \wedge u\right] = \int_0^u f_X(x) dx \tag{3.8}$$

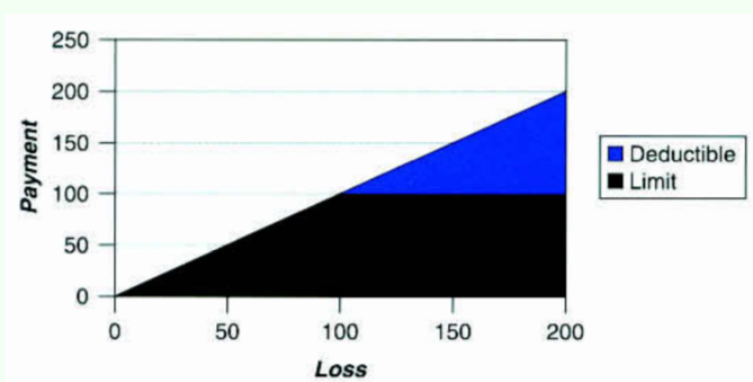
À l'aide d'intégration par partie, on peut trouver la forme suivante :

$$E\left[X \wedge u\right] = \int_0^u S_X(x) dx$$

La v.a. Y est dite *censurée à droite et shifted*

Exemple 3.1.2 lien entre le déductible et la limite

On peut faire le lien entre le déductible et la limite :



3.4 Queue de distribution

3.4.1 Classification selon les moments

- On peut déterminer si une distribution a une *heavy-tail* en vérifiant si ses moments existent.
- On peut aussi comparer des distributions entre-eux en utilisant des quantités standarisées, telles que le Coefficient de variation, le coefficient d'asymétrie (*skewness*) ou encore le coefficient d'applatissement (*Kurtosis*)

3.4.2 Classification selon les comportements limites des ailes de distribution

- On peut faire le ratio de deux distributions avec leurs fonction de survie ($S(x)$) ou leur fonction f de densité pour vérifier laquelle des 2 a la plus grosse aile de distribution (*tail*).

1. Sois $f_1(x)$ une fonction tels que les 3 premiers moment existe : $E[x^4] = \infty$
2. Sois $f_2(x)$ une fonction tels que les 2 premiers moment existe : $E[x^2] = \infty$

Alors,

$$\lim_{x\to\infty} r(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \begin{cases} \infty, \; f_1(x) \text{a une aile plus lourde que} f_2(x) \\ 0, \; f_2(x) \text{a une aile plus lourde que} f_1(x) \end{cases}$$

Exemple 3.4.1

Sois $f_{x_1}(x_1) \sim pareto(\alpha, \theta)$ et $f_{x_2}(x_2) \sim gamma(\alpha, \lambda)$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} r(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{f_{x_1}(x_1)}{f_{x_2}(x_2)} \\ &= \frac{\frac{\alpha\theta^\alpha}{(x+\theta)^{\alpha+1}}}{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}} \\ &= C \frac{e^{-\lambda x}}{x^{\alpha-1}(x+\theta)^{\alpha+1}} \\ &= \infty \end{aligned}$$

La pareto a une queue plus lourde que la gamma

3.4.3 Classification basée sur la fonction de Hazard

Définition 3.4.1 *Hazard rate function*

La fonction de hazard (aussi appelée force de mortalité ($\mu(x)$) ou le failure rate ($\lambda(x)$), est définie par

$$h_X(x) = \frac{f_X(x)}{S_X(x)} \tag{3.9}$$

On peut aussi exprimer la fonction $h_X(x)$ comme

$$h_X(x) = -\ln(S_X(x))$$

Soit une distribution ayant fonction de densité $f_X(x)$ et fonction de hazard $h_X(x)$. Alors,

- Si $h(x) \nearrow$, *light-tailed*
- Si $h(x) \searrow$, *heavy-tailed*
- Note : on peut aussi comparer les distributions entre-elles : si une distribution voit son $h_1(x)$ augmenter plus rapidement que l'autre (i.e. $h_2(x)$), alors la deuxième distribution a une aile de distribution plus lourde.

Chapitre 8

Fréquence et sévérité avec modifications aux contrats

8.2 Déductibles

8.2.1 Ordinary deductible

Définition

Soit un contrat d'assurance avec déductible d. Lors d'une perte, l'assureur va payer tout montant en excédent du montant d. Alors, pour la variable *per-payment*,

$$Y^L = (X-d)_+ = \begin{cases} 0 & ,X \leq d \\ X-d & ,X > d \end{cases} \tag{8.1}$$

$$Y^P = (X-d)_+ = \begin{cases} \text{Non-défini} & ,X \leq d \\ X-d & ,X > d \end{cases} \tag{8.2}$$

Fonctions reliées

Et on peut aussi déduire toutes les fonctions qui y sont reliées :

$$f_{Y^P}(y) = \frac{f_X(y+d)}{S_X(d)}$$

$$S_{Y^P}(y) = \frac{S_X(y+d)}{S_X(d)}$$

$$F_{Y^P}(y) = \frac{F_X(y+d) - F_X(d)}{S_X(d)}$$

$$h_{Y^P}(y) = h_X(y+d)$$

Pour la v.a. Y^L *per-loss* [1],

$$f_{Y^L}(y) = f_X(y+d)$$

$$S_{Y^L}(y) = S_X(y+d)$$

$$F_{Y^L}(y) = F_X(y+d)$$

Espérance

$$E\left[Y^L\right] = E\left[(X-d)_+\right] = E\left[X\right] - E\left[X \wedge d\right] \tag{8.3}$$

$$E\left[Y^P\right] = \frac{E\left[(X-d)_+\right]}{S_X(d)} = \frac{E\left[X\right] - E\left[X \wedge d\right]}{S_X(d)} \tag{8.4}$$

1. Il est à noter que la fonction de Hazard n'est pas définie à 0.

Cette espérance s'appelle la prime *Stop-Loss*, et elle est définie par

$$\begin{aligned}
E[Y] &= E\left[(X-d)_+\right] \\
&= \int_d^\infty (x-d)f(x)dx \\
&= \underbrace{\int_d^\infty xf(x)dx}_{\text{Intégration par partie}} -d\int_d^\infty f(x)dx \\
&= -xS(x)\Big|_d^\infty + \int_d^\infty S(x)dx - sS(d) \\
&= 0\cancel{+S(d)} + \int_d^\infty S(x)dx \cancel{-S(d)} \\
&= \int_d^\infty S(x)dx
\end{aligned}$$

8.2.2 Franchise deductible

Définitions

Lorsque la perte dépasse le déductible franchise de montant d, l'assureur assume l'entièreté des coûts [2]. Pour la v.a. Y^L, on a

$$Y^L = \begin{cases} 0 & ,X \leq d \\ X & ,X > d \end{cases}$$

Pour la v.a. Y^P,

$$Y^P = \begin{cases} \text{non-défini} & X \leq d \\ X & ,X > d \end{cases} \tag{8.5}$$

Fonctions reliées

Les fonctions de la v.a. Y^L sont

$$f_{Y^L}(y) = \begin{cases} F_X(d) & ,y = 0 \\ f_X(y) & ,y > 0 \end{cases}$$

2. On voit plus souvent ce type de déductible dans un contexte d'invalidité : si on est absent plus d'un certain nombre de jours du travail, on se fait rembourser toutes ses absences en salaire.

$$F_{Y^L}(y) = \begin{cases} F_X(d) & ,0 < y \leq d \\ F_X(y) & ,y \geq d \end{cases}$$

$$S_{Y^L}(y) = \begin{cases} S_X(d) & ,0 < y \leq d \\ S_X(x) & ,y > d \end{cases}$$

$$h_{Y^L}(y) = \begin{cases} h_X(d) & ,0 < y \leq d \\ h_X(x) & ,y > d \end{cases}$$

Pour la fonction Y^P (*per-payment*),

$$f_{Y^P}(y) = \frac{f_X(d)}{S_X(d)}$$

$$F_{Y^P}(y) = \begin{cases} F_X(d) & ,y = 0 \\ F_X(d) & ,0 < y \leq d \\ \frac{F_X(y)-F_X(d)}{S_X(d)} & ,y > d \end{cases}$$

$$S_{Y^P}(y) = \begin{cases} 1 & ,0 \leq y \leq d \\ \frac{S_X(y)}{S_X(d)} & ,y > d \end{cases}$$

$$h_{Y^P}(y) = \begin{cases} 0 & ,0 < y \leq d \\ h_X(y) & ,y > d \end{cases}$$

Espérance

$$E\left[Y^L\right] = E\left[(X-d)_+^F\right] = E\left[X\right] - E\left[X \wedge d\right] + dS_X(d) \tag{8.6}$$

$$E\left[Y^P\right] = E\left[(X-d)_+^F\right] = \frac{E\left[X\right] - E\left[X \wedge d\right]}{S_X(d)} + d \tag{8.7}$$

8.3 Loss Elimination Ratio

Définition 8.3.1 Loss Eliminating Ratio

Le Loss Eliminating Ratio (LER), nous permet d'obtenir le pourcentage de perte qu'on ne paiera pas grâce au déductible d :

$$LER = \frac{E[X] - E[(X-d)_+]}{E[X]}$$

Mais on sait que

$$E[(X-d)_+] = E[X] - E[X \wedge d]$$

Alors,

$$LER = \frac{E[X \wedge d]}{E[X]} \tag{8.8}$$

Note sur l'inflation Il arrive en exercice qu'on nous demande de comparer ce ratio avec et sans inflation. Soit un contrat avec r % d'inflation. Alors, on peut trouver $E[(X-d)_+]$ qui tient compte de cette inflation :

$$E\left[(X-d)_+^I\right] = (1+r)\left(E[X] - E\left[X \wedge \frac{d}{1_r}\right]\right)$$

Démonstration.

$$E[Y] = (1+r)\int_{\frac{d}{1+r}}^{\infty} x f_X(x)dx - d\int_{\frac{d}{1+r}}^{\infty} f_X(x)dx$$

En ajoutant un terme,

$$= \underbrace{(1+r)\int_0^{\frac{d}{1+r}} x f_X(x)dx + \int_{\frac{d}{1+r}}^{\infty} x f_X(x)dx}_{E[X]} - \underbrace{\int_0^{\frac{d}{1+r}} x f_X(x)dx - \frac{d}{1+r}\int_{\frac{d}{1+r}}^{\infty} f_X(x)dx}_{E\left[X \wedge \frac{d}{1+r}\right]}$$

$$= E[X] - E\left[X \wedge \frac{d}{1+r}\right]$$

□

8.4 Policy Limits

8.4.1 Définitions

Soit un contrat d'assurance où il est conclu que l'assureur débourse un maximum de u dans le montant de la perte. Ce type de modification au contrat créé une v.a. *censurée à droite*, i.e. le montant déboursé est maximisé à u. On définit Y comme étant

$$Y = \begin{cases} X & ,X \leq u \\ u & ,Y > u \end{cases} \tag{8.9}$$

8.4.2 Fonctions reliées

On peut déduire les fonctions reliées suivantes :

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(y) & ,y < u \\ S_X(u) & ,y = u \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X(y) & ,y \leq u \\ 1 & ,y > u \end{cases}$$

Note sur l'inflation Si on a r % d'inflation, alors

$$E[X \wedge u] = (1+r)E\left[X \wedge \frac{u}{1+r}\right]$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} E[Y] &= \int_0^{\frac{u}{1+r}} (1+r)xf_X(x)dx + u\int_{\frac{u}{1+r}}^{\infty} f_X(x)dx \\ &= (1+r)\int_0^{\frac{d}{1+r}} ff_X(x)dx + sS_X\left(\frac{u}{1+r}\right) \\ &= (1+r)\left(\int_0^{\frac{u}{1+r}} xf_X(x)dx + \frac{u}{1+r}S_X\left(\frac{u}{1+r}\right)\right) \\ &= (1+r)E\left[X \wedge \frac{u}{1+r}\right] \end{aligned}$$

□

8.5 Coassurance, déductible et limites

Définitions

Le livre nous donne une fonction de perte qui englobe 4 éléments en même temps : l'inflation, les déductibles, la coassurance [3] et les limites de police. Pour la v.a. Y^L,

$$Y^L = \begin{cases} 0 & , x < \frac{d}{1+r} \\ \alpha\Big((1+r)x - d\Big) & , \frac{d}{1+r} \leq x < \frac{u}{1+r} \\ \alpha(u-d) & , x \geq \frac{u}{1+r} \end{cases} \tag{8.10}$$

et pour Y^P,

$$Y^L = \begin{cases} \text{Non-défini} & , x < \frac{d}{1+r} \\ \alpha\Big((1+r)x - d\Big) & , \frac{d}{1+r} \leq x < \frac{u}{1+r} \\ \alpha(u-d) & , x \geq \frac{u}{1+r} \end{cases} \tag{8.11}$$

Espérance

$$E\left[Y^L\right] = \alpha(1+r)\left(E\left[X \wedge \frac{u}{1+r}\right] - E\left[X \wedge \frac{d}{1+r}\right]\right) \tag{8.12}$$

$$E\left[Y^P\right] = \frac{E\left[Y^L\right]}{S_X\left(\frac{d}{1+r}\right)} \tag{8.13}$$

$$\begin{aligned} E[Y] &= \int_{\frac{d}{1+r}}^{\frac{u}{1+r}} ((1+r)x - d) f_X(x) dx + \int_{\frac{u}{1+r}}^{\infty} (u-d) f_X(x) dx \\ &= (1+r)\left(E\left[X \wedge \frac{u}{1+r}\right] - E\left[X \wedge \frac{d}{1+r}\right]\right) \end{aligned}$$

3. Dans ce type de contrat, la compagnie paie une proportion α de la perte, et le $(1-\alpha)$ restant est assumé par le titulaire de la police.

Chapitre 11

Estimation de données complètes

11.2 Estimation de données complètes

11.2.1 Estimation de la fonction de répartition empirique

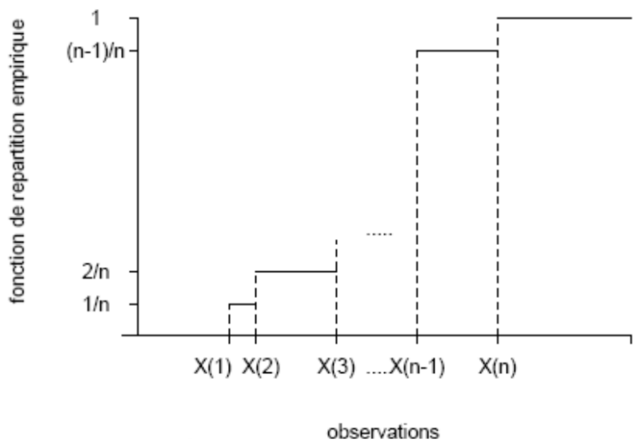
On cherche à estimer $F(t)$ ou $S(t)$, lorsque nos données sont complètes (i.e. $x_1,...,x_n$ qui sont *iid*). Alors, l'estimateur non paramétrique pour $F(t)$:

$$F_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{x_i \leq t\}} \tag{11.1}$$

où $\mathbb{1}_{\{.\}}$ représente une fonction indicatrice.
$F_x(t)$ aura donc la forme suivante :

$$F_n(t) = \begin{cases} 0 & ,t < x_{(1)} \\ \frac{1}{n} & ,x_{(1)} \leq t < x_{(2)} \\ \frac{2}{n} & ,x_{(2)} \leq t < x_{(3)} \\ \dots & \\ 1 & ,t \geq x_{(n)} \end{cases} \tag{11.2}$$

où $t \in [0, x_{(n)}]$.



Remarques

(1) Lorsque $F_n(t) \to F(t)$, alors

(2) Puisqu'on a

$$\sum_{i=1}^{n} 1_{[x_i \leq t]} \sim Bin(n, \Pr(X \leq t))$$

Alors,

$$\begin{aligned}
E\left[F_n(t)\right] &= \frac{1}{n} nF(t) \\
&= F(t) \quad \text{(C'est un estimateur sans biais)} \\
Var\left(F_n(t)\right) &= \frac{1}{n^2} nF(t)S(t) \\
&= \frac{F(t)S(t)}{n} \\
&\underset{n\to\infty}{=} 0
\end{aligned}$$

11.2.2 *Cumulative hazard-rate function*

On utilise cette fonctoin pour pouvoir réussir à estimer la fonction de densité et le *hazard rate* empirique. En effet, puisque la distribution empirique est discrète, on ne peut pas dériver $F_n(x)$ pour obtenir $f_n(x)$ et $h_n(x)$. La fonction de hazard cumulative se définit par

$$H_X(x) = -\ln S_X(x) \tag{11.3}$$

11.2.3 Notation à utiliser pour la distribution empirique

- $y_1 < y_2 < ... < y_k$: les k valeurs uniques qui apparaissent dans l'échantillon de n. **Note :** $k \leq n$.
- s_j : nombre de fois que l'observation y_j est observée dans l'échantillon. On a

$$\sum_{j=1}^{k} s_j = 1$$

- r_j : nombre d'observations qui sont plus grandes ou égales à y_j. On a

$$r_j = \sum_{i=j}^{k} s_i$$

- Avec cette nouvelle notation, on peut ré-écrire la fonction de répartition empirique :

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & ,x < y \\ 1 - \frac{r_j}{n} & ,y_{j-1} \leq x \leq y_j \quad j = 2, ..., k \\ 1 & ,x \geq y_k \end{cases} \tag{11.4}$$

11.2.4 Estimateur de Nelson Åalen

Pour pouvoir estimer la *Cumulative hazard-rate function*, on doit utiliser un estimateur qui se base sur la notation utilisée à la sous-section précédente, soit le *Nelson Åalen estimate* :

$$\hat{H}(x) = \begin{cases} 0 & ,x < y_1 \\ \sum_{i=1}^{j-1} \frac{s_i}{r_i} & ,y_{j-1} \leq x \leq y_j \quad j = 2, ..., k \\ \sum_{i=1}^{k} \frac{s_i}{r_i} & ,x \geq y_k \end{cases} \tag{11.5}$$

11.3 Distribution empirique avec données groupées

11.3.1 Fonction OGIVE

CETTE MATIÈRE NE SERA PAS TESTÉE À L'EXAMEN intra A2018

Dans certains contextes, on a n données qui sont groupées en intervalles. La fonction OGIVE permet d'interpoler entre 2 points c_{j-1} et c_j.

$$c_{j-1} \leq x \leq c_j$$
$$F_n(c_{j-1}) \leq F_n(x) \leq F_n(c_j)$$

On peut déterminer la valeur empirique de $F_n(x)$ aux bornes des classes, avec

$$F_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^{j} n_i}{n}$$

où n_i est le nombre d'observations qui sont entre c_{j-1} et c_j. Toutefois, pour les valeurs entre deux bornes $c_0 < c_1 < \ldots < c_k$, il faut approximer avec la fonction OGIV ci-dessous :

$$F_n^{\text{OGIVE}}(x) = \frac{c_j - x}{c_j - c_{j-1}} F_n(c_j - 1) + \frac{x - c_{j-1}}{c_j - c_{j-1}} F_n(c_j) \tag{11.6}$$

Remarques

(1) Si $x = c_{j-1}$,

$$F_n(c_{j-1}) = F_n^{\text{OGIVE}}(c_{j-1})$$

(2) Si $x = c_j$,

$$F_n(c_j) = F_n^{\text{OGIVE}}(c_j)$$

(3) En dérivant (11.6), on obtient

$$
\begin{aligned}
f_n(x) &= \frac{\partial}{\partial x} F_x(x) \\
&= \frac{1}{c_j - c_{j-1}} F_x(c_j) - \frac{1}{c_j - c_{j-1}} F_n(c_{j-1}) \\
&= \frac{F_n(c_j) - F_n(c_{j-1})}{c_j - c_{j-1}}
\end{aligned}
\tag{11.7}
$$

Chapitre 12

Estimation de données modifiées

12.1 Point estimation

12.1.1 Définitions importante

Un vocabulaire spécifique aux données modifiées est utilisé, soit

Définition	*Terme anglais*	Explication
Tronquée à gauche	*left truncated at d*	si la valeur observée est plus basse dque d, elle n'est pas enregistrée
Tronquée à droite	*right truncated at u*	si la valeur observée est plus grande que u, elle n'est pas enregistrée
Censurée à gauche	*left censured at d*	si la valeur observée est plus basse que d, on indique d dans les données modifiées
Censurée à droite	*right censored at u*	si la valeur observée est plus grande que u, on indique u dans les données modifiées

Note : Il arrive aussi que les données soient *shifted at d*, ce qui veut dire qu'on soustrait d aux données (souvent en présence d'un déductible).

Notation

- $y_1 < y_2 < ... < y_k$: les k valeurs uniques qui apparaissent dans l'échantillon.
- x_j : la j^e données non-censurée qui apparait dans l'échantillon
- d_j : le montant auquel x_j est tronquée. Si il n'y a pas de troncage, alors $d_j = 0$.
- u_j : la j ^{e} données censurée qui apparait dans l'échantillon.
- r_j : nombre d'observations qui sont plus grandes ou égales à y_j (*risk set*)

$$r_j = \# \text{ of } x_i + \# \text{ of } u_i - (\# \text{ of } d_i \geq y_j)$$

- s_i : nombre de décès au temps i.

Estimateur de Kaplan-Meier

Cet estimateur est une version modifiée de l'estimateur de Nelson-Åalen vu à la section 11.2.4. Avec l'information des données et en utilisant la notation vue à la sous-section précédente, on peut estimer la fonction de survie empirique :

$$\hat{S}_n(t) = \begin{cases} 1 & ,0 \leq t < y_1 \\ \prod_{i=1}^{j-1} \left(\frac{r_i - s_i}{r_i}\right) & ,y_{j-1} \leq t < y_j \quad j = 2, \ldots, k \\ \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{r_i - s_i}{r_i}\right) & t \geq y_k \end{cases} \tag{12.1}$$

12.2 Espérance, Variance et et intervalle d'estimation

Contexte

On s'intéresse à l'espérance et la variance de la fonction de survie S_n, qui suite une binomiale (i.e. $S_n(x) \sim Bin(n, S(x))$. Si on connaissait $S(x)$, on pourrait facilement déduire l'espérance et la variance avec les formules qu'on connaît. Toutefois, puisqu'on cherche souvent à estimer $S(x)$, il faudra aussi estimer l'espérance et la variance.
Section à compléter