

Mathématiques actuarielles IARD-1
ACT-2005
Notes de cours

Gabriel Crépeault-Cauchon
Nicholas Langevin

6 octobre 2018

Table des matières

1	Rappel sur les notions de probabilité et statistiques	1
1.1	Quantités à savoir	1
1.2	La loi normale	2
1.3	Queue de distribution	3
2	Types de contrats et primes	4
2.1	Contrat avec limite	5
2.1.1	Cas avec inflation	5
2.2	Contrat avec déductible ordinaire	6
2.2.1	Remarques	6
2.2.2	Prime Stop-Loss	7
2.2.3	Cas avec inflation	8
2.3	Mean Excess Loss	9
2.3.1	Remarques	9
2.4	Contrat avec Déductible franchise	10
2.5	Contrat avec déductible ordinaire et limite sous l'inflation	11
2.6	Co-assurance	12
2.7	Cas général	12
3	Estimation non-paramétrique	13
3.1	Terminologie	13
3.2	Estimation de données complètes	14
3.2.1	Estimation de donnée groupées (Fonction OGIVE)	15
3.3	Estimation de la fonction de survie	17
3.4	Estimateur Kaplan-Meier	17
3.5	l'approche conditionnelle pour estimer $S(t)$	17
3.5.1	Vu en classe 5 oct.	18

Résumé

Ce document résume les notes de cours prises en classe dans le cours de Mathématiques actuarielles IARD-1, ainsi que des notions prises du livre *LOSS MODELS - From Data to Decisions*, 4th edition.

Chapitre 1

Rappel sur les notions de probabilité et statistiques

1.1 Quantités à savoir

Raw moments On représente le k^{e} moment par μ'_k , soit

$$\mu'_k = E[X^k] \quad (1.1)$$

Moments centraux Le k^{e} moment central est représenté par

$$\mu_k = E[(X - \mu)^k] \quad (1.2)$$

Exemple 1.1.1 Quelques exemples de moments centraux



La variance est le 2^e moment central :

$$\text{Var}(X) = \mu_2 = E[(X - \mu)^2]$$

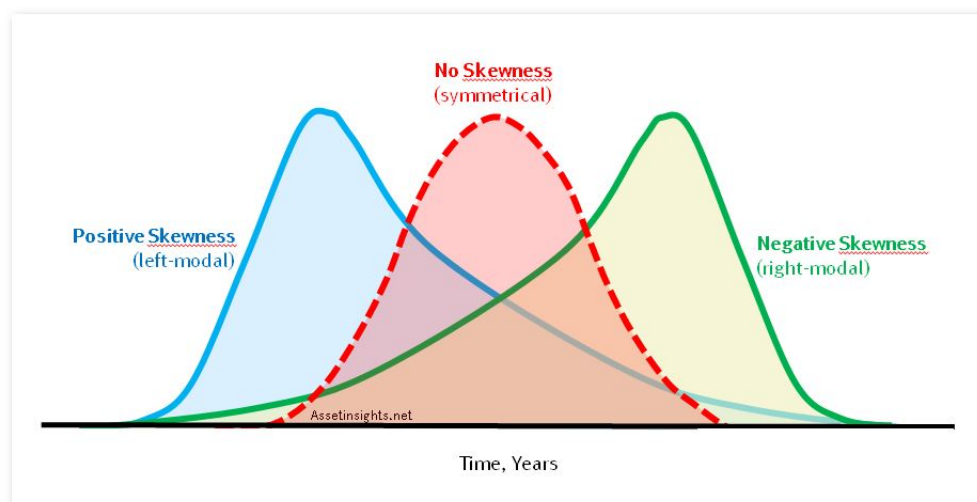
Le 3^e moment centré, qui est utilisé pour calculer le coefficient d'asymétrie :

$$\mu_3 = E[(X - \mu)^3]$$

Coefficient d'asymétrie Le coefficient d'asymétrie, aussi appelé *skewness*, est représentée par

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \quad (1.3)$$

Soit le 3^e moment standardisé. Si $S_k = 0$, alors la distribution tend vers une loi normale, telle qu'on le voit sur la figure ci-dessous :



Coefficient d'aplatissement Le coefficient d'aplatissement, aussi appelé *Kurtosis*, se définit par

$$\text{Kurtosis} = \frac{\mu_4}{\sigma^4} \quad (1.4)$$

Cette quantité permet de mesurer l'épaisseur de l'aile (*tail*) de la distribution. Si $E[z^4] = 3$, alors la distribution tend vers une loi normale $N(\mu, \sigma^2)$.

1.2 La loi normale

La fonction génératrice des moments

$$\begin{aligned} M_x(t) &= M_x(0) + \frac{M'_x t}{1!} + \frac{M''_x t^2}{2!} + \dots + \frac{M_x^{(n)} t^n}{n!} \\ &= 1 + \frac{E[x]t}{1!} + \frac{E[x^2]t^2}{2!} + \dots + \frac{E[x^n]t^n}{n!} \end{aligned}$$

On pose : $c_k = \frac{E[x^n]}{n!}$ alors,

$$E[x^k] = C_k k! \quad (1.5)$$

1.3 Queue de distribution

1. Sois $f_1(x)$ une fonction tels que les 3 premiers moment existe : $E[x^4] = \infty$
2. Sois $f_2(x)$ une fonction tels que les 2 premiers moment existe : $E[x^2] = \infty$

Alors,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} r(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \begin{cases} \infty, & f_1(x) \text{ a une aile plus lourde que } f_2(x) \\ 0, & f_2(x) \text{ a une aile plus lourde que } f_1(x) \end{cases}$$

Exemple 1.3.1

Sois $f_{x_1}(x_1) \sim \text{pareto}(\alpha, \theta)$ et $f_{x_2}(x_2) \sim \text{gamma}(\alpha, \lambda)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} r(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_{x_1}(x_1)}{f_{x_2}(x_2)} \\ &= \frac{\alpha \theta^\alpha}{(x+\theta)^{\alpha+1}} \\ &= \frac{\lambda \alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda x}} \\ &= C \frac{x^{\alpha-1}}{(x+\theta)^{\alpha+1}} \\ &= \infty \end{aligned}$$

La pareto a une queue plus lourde que la gamma

La fonction de hasard

$$h(x) = \frac{f(x)}{s(x)} \quad (1.6)$$

Si à partir de M, $h(x)$ est décroissante $\Leftrightarrow f(x)$ décroît trop lentement, alors $f(x)$ à une aile lourde.

Chapitre 2

Types de contrats et primes

Dans cette section ¹, on définit deux nouvelles variables

Définition 2.0.1 *Per-Loss Variable*



Soit X le montant des dommages d'une réclamation. On peut définir Y^L comme le montant payé par l'assureur lors de toute perte. Mathématiquement,

$$Y^L = g(X) \quad , Y^L \sim f_X(x) \quad (2.1)$$

Définition 2.0.2 *Per-Payment variable*



Cette variable se définit plutôt comme le montant qui sera payé par l'assureur (i.e le montant de la perte, sachant qu'il y aura un paiement). Alors,

$$Y^P = g(X) \quad , Y^P \sim \frac{f_X(x)}{S_X(x)} \quad (2.2)$$

Y^P n'a donc pas de probabilité définie à $y = 0$ (puisque ce n'est pas possible, sachant que x est assez grand pour qu'il y ait un paiement).

1. Section 8.1 à 8.5 dans le livre

2.1 Contrat avec limite

On analyse la fonction de perte d'un contrat avec une limite supérieure u . Alors, on définit Y comme

$$Y = (X \wedge u) = \min(X, u) = \begin{cases} x & , x \leq u \\ u & , x > u \end{cases} \quad (2.3)$$

Aussi,

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[\min(X, u)] \\ &= \int_0^u x f_X(x) dx + u \int_u^\infty f_X(x) dx \\ &= \int_0^u x f_X(x) dx + u S(u) \end{aligned}$$

2.1.1 Cas avec inflation

On a vu le contrat avec perte limitée, mais sans parler d'inflation. Supposons qu'on a le scénario avec inflation, où $X' = (1+r)X$ et r représente le taux d'inflation appliqué au montant de perte. Alors, il faut ajuster u pour tenir compte de l'inflation.

$$\begin{aligned} Y &= \begin{cases} (1+r)X & , (1+r)X \leq u \\ u & , (1+r)X > u \end{cases} \\ &= \begin{cases} (1+r)X & , x \leq \frac{u}{1+r} \\ u & , x > \frac{u}{1+r} \end{cases} \end{aligned}$$

Définition 2.1.1 Prime Limited Loss sous l'inflation



$$E[X' \wedge u] = (1+r)E\left[X \wedge \frac{u}{1+r}\right] \quad (2.4)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
E[Y] &= \int_0^{\frac{u}{1+r}} (1+r)x f_X(x) dx + u \int_{\frac{u}{1+r}}^{\infty} f_X(x) dx \\
&= (1+r) \int_0^{\frac{u}{1+r}} x f_X(x) dx + u S_X\left(\frac{u}{1+r}\right) \\
&= (1+r) \left(\int_0^{\frac{u}{1+r}} x f_X(x) dx + \frac{u}{1+r} S_X\left(\frac{u}{1+r}\right) \right) \\
&= (1+r) E\left[X \wedge \frac{u}{1+r}\right]
\end{aligned}$$

□

2.2 Contrat avec déductible ordinaire

Soit un contrat avec perte X , où on paie 0 si $X \leq d$ et $X - d$ si $X > d$, où d est le déductible ordinaire. Alors,

$$Y = (X - d)_+ = \max(X - d, 0) = \begin{cases} 0 & , X \leq d \\ X - d & , X > d \end{cases} \quad (2.5)$$

2.2.1 Remarques

- (1) X est une variable aléatoire continue
- (2) mais Y^L est une variable aléatoire mixte, car

$$\Pr(Y^L = y) = \begin{cases} F_X(d) & , y = 0 \\ f_X(y + d) & , y > 0 \end{cases}$$

- (3) La fonction de répartition de Y^L est définie par

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X(d) & , y = 0 \\ F_X(d) + \int_0^y f_X(u + d) du & \\ \cancel{F_X(d)} + F_X(y + d) - \cancel{F_X(d)} & \\ F_X(y + d) & y > 0 \end{cases}$$

(4) les fonctions de survie $S(y)$ et fonction de hasard $h(y)$ sont définies par

$$S_Y(y) = 1 - F_Y(y)$$

$$h(y) = \frac{f_Y(y)}{S_Y(y)}$$

(5) La prime de ce contrat est appelée la prime *stop-loss*, qui représente l'espérance de ce contrat.

2.2.2 Prime Stop-Loss

On veut calculer l'espérance du contrat avec déductible ordinaire :

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[(X - d)_+] \\ &= \int_d^\infty (x - d)f(x)dx \\ &= \underbrace{\int_d^\infty xf(x)dx}_{\text{Intégration par partie}} - d \int_d^\infty f(x)dx \\ &= -xS(x) \Big|_d^\infty + \int_d^\infty S(x)dx - dS(d) \\ &= 0 + S(d) + \int_d^\infty S(x)dx - S(d) \\ &= \int_d^\infty S(x)dx \end{aligned}$$

Définition 2.2.1 Prime Stop-Loss



On peut définir la prime Stop-Loss comme

$$E[(X - d)_+] = E[X] - E[X \wedge d] \quad (2.6)$$

Démonstration. À compléter



2.2.3 Cas avec inflation

$$Y = \begin{cases} 0 & , X' \leq d \\ X' - d & , d' > d \end{cases}$$

où $X' = (1+r)X$. On peut travailler seulement avec le X initial :

$$Y = \begin{cases} 0 & , x \leq \frac{d}{1+r} \\ (1+r)X - d & , x > \frac{d}{1+r} \end{cases}$$

Et la prime *Stop-Loss*,

$$\begin{aligned} E[Y] &= \int_{\frac{d}{1+r}}^{\infty} ((1+r)x - d) f_X(x) dx \\ &= (1+r) \int_{\frac{d}{1+r}}^{\infty} x f_X(x) dx - \frac{d}{1+r} \int_{\frac{d}{1+r}}^{\infty} f_X(x) dx \end{aligned}$$

Définition 2.2.2 Prime Stop-Loss sous le scénario d'inflation



$$E[(X' - d)_+] = (1+r) \left(E[X] - E\left[X \wedge \frac{d}{1+r}\right] \right) \quad (2.7)$$

Démonstration.

$$E[Y] = (1+r) \int_{\frac{d}{1+r}}^{\infty} x f_X(x) dx - d \int_{\frac{d}{1+r}}^{\infty} f_X(x) dx$$

En ajoutant un terme,

$$\begin{aligned} &= (1+r) \underbrace{\int_0^{\frac{d}{1+r}} x f_X(x) dx}_{E[X]} + \int_{\frac{d}{1+r}}^{\infty} x f_X(x) dx - \underbrace{\int_0^{\frac{d}{1+r}} x f_X(x) dx}_{E[X \wedge \frac{d}{1+r}]} - \frac{d}{1+r} \int_{\frac{d}{1+r}}^{\infty} f_X(x) dx \\ &= E[X] - E\left[X \wedge \frac{d}{1+r}\right] \end{aligned}$$

□

2.3 Mean Excess Loss

Le Mean Excess Loss représente la perte excédentaire à d , sachant que $X > d$. Mathématiquement,

$$Y = \begin{cases} 0 & , x \leq d \\ X - d & , x > d \end{cases}$$

où $X \sim \frac{f(x)}{S(d)}, x \geq d$.

2.3.1 Remarques

(1) La fonction de densité de Y est représentée par

$$\Pr(Y^P = y) = \begin{cases} \frac{f_X(y+d)}{S(d)} & , y > 0 \end{cases}$$

(2) Y est une v.a. continue

(3) les fonctions de survie et de hasard sont, respectivement :

$$h(y) = \frac{f_Y(y_d)}{S_Y(y+d)}$$

$$S(y) = \frac{S_X(y+d)}{S(d)}$$

(4) l'espérance de la v.a. Y^P (mean excess loss) est définie par

$$\begin{aligned} e(d) &= E[Y^P] \\ &= E[X - d | X > d] \\ &= \int_d^\infty (x - d) \frac{f(x)}{S(d)} dx \end{aligned}$$

On note donc

$$e(d)S(d) = \underbrace{\int_d^\infty (x - d)f(x)dx}_{\text{Pure Excess Loss}} \quad (2.8)$$

2. Le P en exposant signifie *per pay*, qui indique que Y est conditionnée sur X .

Définition 2.3.1 Loss Eliminating Ratio



Le Loss Eliminating Ratio (*LER*), nous permet d'obtenir le pourcentage de perte qu'on ne paiera pas grâce au déductible d :

$$ELR = \frac{E[X] - E[(X - d)_+]}{E[X]}$$

Mais on sait que

$$E[(X - d)_+] = E[X] - E[X \wedge d]$$

Alors,

$$ELR = \frac{E[X \wedge d]}{E[X]} \quad (2.9)$$

2.4 Contrat avec Déductible franchise

Soit Y le contrat qui a un déductible franchise. Dans ce type de contrat, on va payer l'intégralité de la perte, lorsque celle-ci dépassera un déductible. Mathématiquement,

$$Y = \begin{cases} 0 & , X \leq d \\ X & , X > d \end{cases}$$

Caractéristiques

(1) La fonction de densité est définie par

$$f_Y(y) = \begin{cases} F_X(d) & , y = 0 \\ f_X(y) & , y > 0 \end{cases}$$

(2) La fonction de répartition de ce contrat est

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X(d) & , y = 0 \\ F_X(d) & , 0 < y \leq d \\ \frac{F_X(y) - F_X(d)}{S_X(d)} & , y > d \end{cases}$$

2.5 Contrat avec déductible ordinaire et limite sous l'inflation

On peut combiner les contrats vu plus tôt, comme c'est le cas ici : ce contrat prévoit un déductible ordinaire d ainsi qu'une limite au contrat u . De plus, on s'intéresse au scénario sous l'inflation. Alors,

$$Y = \begin{cases} 0 & , X \leq \frac{d}{1+r} \\ (1+r)X - d & , \frac{d}{1+r} \leq X \leq \frac{u}{1+r} \\ u = d & , X > \frac{u}{1+r} \end{cases}$$

Et l'espérance est

Définition 2.5.1 Prime d'un contrat avec déductible d et limite u 

$$E[Y] = (1+r) \left(E \left[X \wedge \frac{u}{1+r} \right] - E \left[X \wedge \frac{d}{1+r} \right] \right) \quad (2.10)$$

Démonstration. On va utiliser $Y = Y_1 - Y_2$ pour prouver (2.10). On définit Y_1 et Y_2 :

$$Y_1 = \begin{cases} 0 & , X \leq \frac{d}{1+r} \\ (1+r)X - d & , X > \frac{d}{1+r} \end{cases}$$

$$Y_2 = \begin{cases} 0 & , X \leq \frac{u}{1+r} \\ (1+r)X - u & , X > \frac{u}{1+r} \end{cases}$$

On connaît leur espérance respective,

$$E[Y_1] = (1+r) \left(E[X] - E \left[X \wedge \frac{d}{1+r} \right] \right)$$

$$E[Y_2] = (1+r) \left(E[X] - E \left[X \wedge \frac{u}{1+r} \right] \right)$$

Alors,

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[Y_1] - E[Y_2] \\ &= (1+r) \left(E \left[X \wedge \frac{u}{1+r} \right] - E \left[X \wedge \frac{d}{1+r} \right] \right) \end{aligned}$$

□

$$\begin{aligned}
E[Y] &= \int_{\frac{d}{1+r}}^{\frac{u}{1+r}} ((1+r)x - d) f_X(x) dx + \int_{\frac{u}{1+r}}^{\infty} (u - d) f_X(x) dx \\
&= (1+r) \left(E \left[X \wedge \frac{u}{1+r} \right] - E \left[X \wedge \frac{d}{1+r} \right] \right)
\end{aligned}$$

2.6 Co-assurance

Soit α le pourcentage de co-assurance.

$$Y = \begin{cases} 0 & , X \leq d \\ X - d & , X > d \end{cases}$$

$$Y^C = \begin{cases} 0 & , X \leq d \\ \alpha(X - d) & , X > d \end{cases}$$

Alors,

$$E[Y^C] = \alpha E[Y] \quad (2.11)$$

2.7 Cas général

Voici une formule générale, avec un déductible d , un taux d'inflation r , un pourcentage de coassurance de α et une limite de u :

$$Y^L = \begin{cases} 0 & , x \leq \frac{d}{1+r} \\ \alpha \left((1+r)x - d \right) & , \frac{d}{1+r} \leq x \leq \frac{u}{1+r} \\ \alpha(u - d) & , x > \frac{u}{1+r} \end{cases} \quad (2.12)$$

Chapitre 3

Estimation non-paramétrique

À savoir pour examen partiel

- ✓ Loi normale
- ✓ Loi gamma
- ✓ Loi poisson
- ✓ Loi binomiale
- ✓ intégration par partie pour la loi exponentielle
- ✓ fonction densité, moyenne, variance et fgm

3.1 Terminologie

Pour X_1, \dots, X_n qui sont *iid*.

On a

$$\begin{aligned} E[g(X)] &= \int g(x) dF(x) \\ &= \int g(x) f_X(x) dx \\ &= \int g(x) F_n(x) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i) \end{aligned}$$

... est un estimateur non-paramétrique

3.2 Estimation de données complètes

On cherche à estimer $F(t)$ ou $S(t)$, lorsque nos données sont complètes (i.e. x_1, \dots, x_n qui sont *iid*). Alors, l'estimateur non paramétrique pour $F(t)$:

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{[x_i \leq t]} \quad (3.1)$$

où $1_{[\cdot]}$ représente une fonction indicatrice.
 $F_n(t)$ aura donc la forme suivante :

$$F_n(t) = \begin{cases} 0 & , t < x_{(1)} \\ \frac{1}{n} & , x_{(1)} \leq t < x_{(2)} \\ \frac{2}{n} & , x_{(2)} \leq t < x_{(3)} \\ \dots & \\ 1 & , t \geq x_{(n)} \end{cases} \quad (3.2)$$

où $t \in [0, x_{(n)}]$.

Remarques

- (1) Lorsque $F_n(t) \rightarrow F(t)$, alors
- (2) Puisqu'on a

$$\sum_{i=1}^n 1_{[x_i \leq t]} \sim \text{Bin}(n, \Pr(X \leq t))$$

Alors,

$$\begin{aligned} E[F_n(t)] &= \frac{1}{n} n F(t) \\ &= F(t) \quad (\text{C'est un estimateur sans biais}) \\ \text{Var}(F_n(t)) &= \frac{1}{n^2} n F(t) S(t) \\ &= \frac{F(t) S(t)}{n} \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{=} 0 \end{aligned}$$

3.2.1 Estimation de donnée groupées (Fonction OGIVE)

CETTE MATIÈRE NE SERA PAS TESTÉE À L'EXAMEN

Dans certains contextes, on a n données qui sont groupées en intervalle. La fonction OGIVE permet d'interpoler entre 2 points x_i et x_{i+1} .

$$\begin{aligned} c_{j-1} &\leq x \leq c_j \\ F_n(c_{j-1}) &\leq F_n(x) \leq F_n(c_j) \end{aligned}$$

La formule est

$$F_n^{\text{OGIVE}}(x) = \frac{c_j - x}{c_j - c_{j-1}} F_n(c_{j-1}) + \frac{x - c_{j-1}}{c_j - c_{j-1}} F_n(c_j) \quad (3.3)$$

Remarques

(1) Si $x = c_{j-1}$,

$$F_n(c_{j-1}) = F_n^{\text{OGIVE}}(c_{j-1})$$

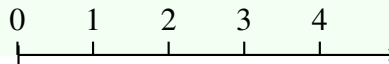
(2) Si $x = c_j$,

$$F_n(c_j) = F_n^{\text{OGIVE}}(c_j)$$

Exemple 3.2.1 Exemple concret



L'assureur a groupé $n = 10$ données en intervalles.



Alors,

$$\begin{aligned}F_n(t) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I[x_i \leq t] \\F_n(1) &= \frac{2}{10} \\F_n(2) &= \frac{5}{10} \\F_n(3) &= \frac{9}{10} \\F_n(4) &= \frac{10}{10} \\&= 1\end{aligned}$$

En dérivant (3.3), on obtient

$$\begin{aligned}f_n(x) &= \frac{\partial}{\partial x} F_n(x) \\&= \frac{1}{c_j - c_{j-1}} F_n(c_j) - \frac{1}{c_j - c_{j-1}} F_n(c_{j-1}) \\&= \frac{F_n(c_j) - F_n(c_{j-1})}{c_j - c_{j-1}}\end{aligned}\tag{3.4}$$

3.3 Estimation de la fonction de survie

Soit $S_n(t)$ la fonction de survie empirique. Alors,

$$\begin{aligned} S_n(t) &= 1 - F_n(t) \\ &= \frac{n}{n} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{x_i \leq t\}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 - 1_{\{x_i \leq t\}}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{x_i > t\}} \end{aligned}$$

3.4 Estimateur Kaplan-Meier

3.5 l'approche conditionnelle pour estimer $S(t)$

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{S(t_1)}{S(t_0)} \times \frac{S(t_2)}{S(t_1)} \times \dots \times \frac{S(t)}{S(t_{i-1})} \\ &= \underbrace{\frac{S(t)}{S(t_0)}}_1 \\ &= S(t) \end{aligned}$$

Alors,

$$S(t) = \prod_{j \leq t} p_j \quad (3.5)$$

Ça nous suggère un autre estimateur pour $S(t)$:

$$\hat{S}(t) = \prod_{j \leq t} (1 - \hat{q}_j) \quad (3.6)$$

Ceci est l'approche conditionnelle pour estimer $S(t)$. Et si jamais on a des données complètes, $S_n(t) = \hat{S}(t)$.

3.5.1 Vu en classe 5 oct.

$$\hat{S}(t) = \prod_{i \leq t} \left(1 - \frac{s_i}{r_i}\right)$$
$$S(t) = e^{-H(t)}$$

ET

$$\begin{aligned}\hat{H}(t) &= -\ln(\hat{S}(t)) \\ &= \sum_{i \leq t} -\ln\left(1 - \frac{s_i}{r_i}\right) \\ \hat{H}_{N-A}(t) &= \sum_{i \leq t} \frac{s_i}{r_i}\end{aligned}$$

où r_i est le nombre de survivant au temps i .

Exemple 3.5.1

Exemple fait en classe au début du cours, ligne du temps à insérer ici.