Mathématiques actuarielles IARD-1
ACT-2005
Notes de cours

Gabriel Crépeault-Cauchon
Nicholas Langevin

16 septembre 2018

Table des matières

Résumé

Ce document résume les notes de cours prises en classe dans le cours de Mathématiques actuarielles IARD-1, ainsi que des notions prises du livre *LOSS MODELS - From Data to Decisions, 4th edition*.

Chapitre 1

Rappel sur les notions de probabilité et statistiques

Référence : Chapitre 3 du livre

1.1 les moments

Raw moments On représente le k^{e} moment par μ'_k, soit

$$\mu'_k = E\left[X^k\right] \tag{1.1}$$

Moments centraux Le k^{e} moment central est représenté par

$$\mu_k = E\left[(X-\mu)^k\right] \tag{1.2}$$

Exemple 1.1.1 Quelques exemples de moments centraux

La variance est le 2^{e} moment central :

$$Var(X) = \mu_2 = E\left[(X-\mu)^2\right]$$

Le 3^{e} moment centré, qui est utilisé pour calculer le coefficient d'asymétrie :

$$\mu_3 = E\left[(X-\mu)^3\right]$$

Coefficient d'asymétrie Le coefficient d'asymétrie, aussi appelé *skewness*, est représentée par

$$S_k = \frac{\mu_3}{\sigma^2} \tag{1.3}$$

Soit le 3e moment standari sé. Si $S_k = 0$, alors la distribution tend vers une loi normale.

Coefficient d'applatissement Le coefficient d'applatissement, aussi appelé *Kurtosis*, se définit par

$$\text{Kurtosis} = \frac{\mu_4}{\sigma^4} \tag{1.4}$$

Cette quantité permet de mesurer l'épaisseur de l'aile (*tail*) de la distribution. Si $E\left[z^4\right] = 3$, alors la distribution tend vers une loi normale $N(\mu, \sigma^2)$.

Excess Loss variable Cette variable aléatoire représente la perte $X - d$, lorsque $X > d$, i.e.

$$Y^P = X - d | X > d$$

On peut donc trouver l'espérance de cette variable aléatoire :

$$e_X(d) = E\left[Y^P\right] = E\left[X - d | X > d\right] \tag{1.5}$$

Souvent, on va voir le *mean excess loss* exprimé ainsi :

$$e_X(d) = \frac{\int_d^\infty S(x)dx}{S(d)} \tag{1.6}$$

Left censored and shifted variable Dans certaines contrats, il est prévu que l'assureur ne paiera aucune perte en dessous d'un montant d, et par la suite il va payer la différence entre la perte et ce montant. Mathématiquement,

$$Y^L = (X - d)_+ = \begin{cases} 0 & , X \leq d \\ X - d & , X > d \end{cases}$$

Encore une fois, on peut calculer l'espérance de cette variable aléatoire :

$$E\left[(X - d)_+^k\right] = e^k(d)(1 - F(d)) \tag{1.7}$$

Limited loss variable Il s'agit du contexte de limite, où la perte de l'assureur est limité à un montant u, prédéterminé à l'avance. Mathématiquement,

$$Y = X \wedge u = \begin{cases} X & ,X < u \\ u & ,X \geq u \end{cases}$$

L'espérance (*limited expected value*) est représentée par

$$E\left[(X \wedge u)^k\right] = \int_{-\infty}^{u} x^k f_X(x)dx + u^k(1 - F(u)) \tag{1.8}$$