

Mathématiques actuarielles IARD-1  
ACT-2005  
Notes de cours

Gabriel Crépeault-Cauchon  
Nicholas Langevin

4 octobre 2018

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Rappel sur les notions de probabilité et statistiques</b>	<b>1</b>
1.1	Quantités à savoir . . . . .	1
1.2	La loi normale . . . . .	2
1.3	Queue de distribution . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Types de contrats et primes</b>	<b>4</b>
2.1	Contrat avec limite . . . . .	5
2.1.1	Cas avec inflation . . . . .	5
2.2	Contrat avec déductible ordinaire . . . . .	6
2.2.1	Remarques . . . . .	6
2.2.2	Prime Stop-Loss . . . . .	7
2.2.3	Cas avec inflation . . . . .	8
2.3	Mean Excess Loss . . . . .	9
2.3.1	Remarques . . . . .	9
2.4	Contrat avec Déductible franchise . . . . .	10
2.5	Contrat avec déductible ordinaire et limite sous l'inflation . . . . .	11
2.6	Co-assurance . . . . .	12
2.7	Cas général . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Estimation non-paramétrique</b>	<b>13</b>
3.1	Terminologie . . . . .	13
3.2	Estimation de données complètes . . . . .	14
3.2.1	Estimation de donnée groupées (Fonction OGIVE) . . . . .	15
3.3	Estimation de la fonction de survie . . . . .	17
3.4	Estimateur Kaplan-Meier . . . . .	17
3.5	l'approche conditionnelle pour estimer $S(t)$ . . . . .	17

## **Résumé**

Ce document résume les notes de cours prises en classe dans le cours de Mathématiques actuarielles IARD-1, ainsi que des notions prises du livre *LOSS MODELS - From Data to Decisions*, 4<sup>th</sup> edition.

# Chapitre 1

## Rappel sur les notions de probabilité et statistiques

### 1.1 Quantités à savoir

**Raw moments** On représente le  $k^{\text{e}}$  moment par  $\mu'_k$ , soit

$$\mu'_k = E[X^k] \quad (1.1)$$

**Moments centraux** Le  $k^{\text{e}}$  moment central est représenté par

$$\mu_k = E[(X - \mu)^k] \quad (1.2)$$

#### Exemple 1.1.1 Quelques exemples de moments centraux



La variance est le 2<sup>e</sup> moment central :

$$\text{Var}(X) = \mu_2 = E[(X - \mu)^2]$$

Le 3<sup>e</sup> moment centré, qui est utilisé pour calculer le coefficient d'asymétrie :

$$\mu_3 = E[(X - \mu)^3]$$

**Coefficient d'asymétrie** Le coefficient d'asymétrie, aussi appelé *skewness*, est représentée par

$$S_k = \frac{\mu_3}{\sigma^2} \quad (1.3)$$

Soit le 3<sup>e</sup> moment standardisé. Si  $S_k = 0$ , alors la distribution tend vers une loi normale.

**Coefficient d'applatissage** Le coefficient d'applatissage, aussi appelé *Kurtosis*, se définit par

$$\text{Kurtosis} = \frac{\mu_4}{\sigma^4} \quad (1.4)$$

Cette quantité permet de mesurer l'épaisseur de l'aile (*tail*) de la distribution. Si  $E[z^4] = 3$ , alors la distribution tend vers une loi normale  $N(\mu, \sigma^2)$ .

## 1.2 La loi normale

**La fonction génératrice des moments**

$$\begin{aligned} M_x(t) &= M_x(0) + \frac{M'_x t}{1!} + \frac{M''_x t^2}{2!} + \dots + \frac{M_x^{(n)} t^n}{n!} \\ &= 1 + \frac{E[x]t}{1!} + \frac{E[x^2]t^2}{2!} + \dots + \frac{E[x^n]t^n}{n!} \end{aligned}$$

On pose :  $c_k = \frac{E[x^k]}{k!}$  alors,

$$E[x^k] = C_k k! \quad (1.5)$$

## 1.3 Queue de distribution

1. Sois  $f_1(x)$  une fonction tels que les 3 premiers moment existe :  $E[x^4] = \infty$
2. Sois  $f_2(x)$  une fonction tels que les 2 premiers moment existe :  $E[x^2] = \infty$

Alors,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} r(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \begin{cases} \infty, & f_1(x) \text{ a une aile plus lourde que } f_2(x) \\ 0, & f_2(x) \text{ a une aile plus lourde que } f_1(x) \end{cases}$$

### Exemple 1.3.1

Sois  $f_{x_1}(x_1) \sim \text{pareto}(\alpha, \theta)$  et  $f_{x_2}(x_2) \sim \text{gamma}(\alpha, \lambda)$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} r(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_{x_1}(x_1)}{f_{x_2}(x_2)} \\ &= \frac{\frac{\alpha \theta^\alpha}{(x+\theta)^{\alpha+1}}}{\lambda x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}} \\ &= C \frac{e^{-\lambda x}}{x^{\alpha-1} (x+\theta)^{\alpha+1}} \\ &= \infty\end{aligned}$$

La pareto a une queue plus lourde que la gamma

### La fonction de hasard

$$h(x) = \frac{f(x)}{s(x)} \quad (1.6)$$

Si à partir de M,  $h(x)$  est décroissante  $\Leftrightarrow f(x)$  décroît trop lentement, alors  $f(x)$  à une aile lourde.

## Chapitre 2

### Types de contrats et primes

Dans cette section <sup>1</sup>, on définit deux nouvelles variables

#### Définition 2.0.1 *Per-Loss Variable*



Soit  $X$  le montant des dommages d'une réclamation. On peut définir  $Y^L$  comme le montant payé par l'assureur lors de toute perte. Mathématiquement,

$$Y^L = g(X) \quad , Y^L \sim f_X(x) \quad (2.1)$$

#### Définition 2.0.2 *Per-Payment variable*



Cette variable se définit plutôt comme le montant qui sera payé par l'assureur (i.e le montant de la perte, sachant qu'il y aura un paiement). Alors,

$$Y^P = g(X) \quad , Y^P \sim \frac{f_X(x)}{S_X(x)} \quad (2.2)$$

$Y^P$  n'a donc pas de probabilité définie à  $y = 0$  (puisque ce n'est pas possible, sachant que  $x$  est assez grand pour qu'il y ait un paiement).

---

1. Section 8.1 à 8.5 dans le livre

## 2.1 Contrat avec limite

On analyse la fonction de perte d'un contrat avec une limite supérieure  $u$ . Alors, on définit  $Y$  comme

$$Y = (X \wedge u) = \min(X, u) = \begin{cases} x & , x \leq u \\ u & , x > u \end{cases} \quad (2.3)$$

Aussi,

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[\min(X, u)] \\ &= \int_0^u x f_X(x) dx + u \int_u^\infty f_X(x) dx \\ &= \int_0^u x f_X(x) dx + u S(u) \end{aligned}$$

### 2.1.1 Cas avec inflation

On a vu le contrat avec perte limitée, mais sans parler d'inflation. Supposons qu'on a le scénario avec inflation, où  $X' = (1+r)X$  et  $r$  représente le taux d'inflation appliqué au montant de perte. Alors, il faut ajuster  $u$  pour tenir compte de l'inflation.

$$\begin{aligned} Y &= \begin{cases} (1+r)X & , (1+r)X \leq u \\ u & , (1+r)X > u \end{cases} \\ &= \begin{cases} (1+r)X & , x \leq \frac{u}{1+r} \\ u & , x > \frac{u}{1+r} \end{cases} \end{aligned}$$

**Définition 2.1.1** Prime Limited Loss sous l'inflation



$$E[X' \wedge u] = (1+r)E\left[X \wedge \frac{u}{1+r}\right] \quad (2.4)$$



*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
E[Y] &= \int_0^{\frac{u}{1+r}} (1+r)x f_X(x) dx + u \int_{\frac{u}{1+r}}^{\infty} f_X(x) dx \\
&= (1+r) \int_0^{\frac{u}{1+r}} x f_X(x) dx + u S_X\left(\frac{u}{1+r}\right) \\
&= (1+r) \left( \int_0^{\frac{u}{1+r}} x f_X(x) dx + \frac{u}{1+r} S_X\left(\frac{u}{1+r}\right) \right) \\
&= (1+r) E\left[X \wedge \frac{u}{1+r}\right]
\end{aligned}$$

□

## 2.2 Contrat avec déductible ordinaire

Soit un contrat avec perte  $X$ , où on paie 0 si  $X \leq d$  et  $X - d$  si  $X > d$ , où  $d$  est le déductible ordinaire. Alors,

$$Y = (X - d)_+ = \max(X - d, 0) = \begin{cases} 0 & , X \leq d \\ X - d & , X > d \end{cases} \quad (2.5)$$

### 2.2.1 Remarques

- (1)  $X$  est une variable aléatoire continue
- (2) mais  $Y^L$  est une variable aléatoire mixte, car

$$\Pr(Y^L = y) = \begin{cases} F_X(d) & , y = 0 \\ f_X(y + d) & , y > 0 \end{cases}$$

- (3) La fonction de répartition de  $Y^L$  est définie par

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X(d) & , y = 0 \\ F_X(d) + \int_0^y f_X(u + d) du & \\ \cancel{F_X(d)} + F_X(y + d) - \cancel{F_X(d)} & \\ F_X(y + d) & y > 0 \end{cases}$$

(4) les fonctions de survie  $S(y)$  et fonction de hasard  $h(y)$  sont définies par

$$S_Y(y) = 1 - F_Y(y)$$

$$h(y) = \frac{f_Y(y)}{S_Y(y)}$$

(5) La prime de ce contrat est appelée la prime *stop-loss*, qui représente l'espérance de ce contrat.

## 2.2.2 Prime Stop-Loss

On veut calculer l'espérance du contrat avec déductible ordinaire :

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[(X - d)_+] \\ &= \int_d^\infty (x - d)f(x)dx \\ &= \underbrace{\int_d^\infty xf(x)dx}_{\text{Intégration par partie}} - d \int_d^\infty f(x)dx \\ &= -xS(x) \Big|_d^\infty + \int_d^\infty S(x)dx - dS(d) \\ &= 0 + S(d) + \int_d^\infty S(x)dx - S(d) \\ &= \int_d^\infty S(x)dx \end{aligned}$$

### Définition 2.2.1 Prime Stop-Loss



On peut définir la prime Stop-Loss comme

$$E[(X - d)_+] = E[X] - E[X \wedge d] \quad (2.6)$$

*Démonstration.* À compléter



### 2.2.3 Cas avec inflation

$$Y = \begin{cases} 0 & , X' \leq d \\ X' - d & , d' > d \end{cases}$$

où  $X' = (1+r)X$ . On peut travailler seulement avec le  $X$  initial :

$$Y = \begin{cases} 0 & , x \leq \frac{d}{1+r} \\ (1+r)X - d & , x > \frac{d}{1+r} \end{cases}$$

Et la prime *Stop-Loss*,

$$\begin{aligned} E[Y] &= \int_{\frac{d}{1+r}}^{\infty} ((1+r)x - d) f_X(x) dx \\ &= (1+r) \int_{\frac{d}{1+r}}^{\infty} x f_X(x) dx - \frac{d}{1+r} \int_{\frac{d}{1+r}}^{\infty} f_X(x) dx \end{aligned}$$

**Définition 2.2.2** Prime Stop-Loss sous le scénario d'inflation



$$E[(X' - d)_+] = (1+r) \left( E[X] - E\left[X \wedge \frac{d}{1+r}\right] \right) \quad (2.7)$$

*Démonstration.*

$$E[Y] = (1+r) \int_{\frac{d}{1+r}}^{\infty} x f_X(x) dx - d \int_{\frac{d}{1+r}}^{\infty} f_X(x) dx$$

En ajoutant un terme,

$$\begin{aligned} &= (1+r) \underbrace{\int_0^{\frac{d}{1+r}} x f_X(x) dx}_{E[X]} + \int_{\frac{d}{1+r}}^{\infty} x f_X(x) dx - \underbrace{\int_0^{\frac{d}{1+r}} x f_X(x) dx}_{E\left[X \wedge \frac{d}{1+r}\right]} - \frac{d}{1+r} \int_{\frac{d}{1+r}}^{\infty} f_X(x) dx \\ &= E[X] - E\left[X \wedge \frac{d}{1+r}\right] \end{aligned}$$

□

## 2.3 Mean Excess Loss

Le Mean Excess Loss représente la perte excédentaire à  $d$ , sachant que  $X > d$ .  
Mathématiquement,

$$Y = \begin{cases} 0 & , x \leq d \\ X - d & , x > d \end{cases}$$

où  $X \sim \frac{f(x)}{S(d)}, x \geq d$ .

### 2.3.1 Remarques

(1) La fonction de densité de  $Y$  est représentée par

$$\Pr(Y^P = y) = \begin{cases} \frac{f_X(y+d)}{S(d)} & , y > 0 \end{cases}$$

(2)  $Y$  est une v.a. continue

(3) les fonctions de survie et de hasard sont, respectivement :

$$h(y) = \frac{f_Y(y_d)}{S_Y(y+d)}$$

$$S(y) = \frac{S_X(y+d)}{S(d)}$$

(4) l'espérance de la v.a.  $Y^P$  (mean excess loss) est définie par

$$\begin{aligned} e(d) &= E[Y^P] \\ &= E[X - d | X > d] \\ &= \int_d^\infty (x - d) \frac{f(x)}{S(d)} dx \end{aligned}$$

On note donc

$$e(d)S(d) = \underbrace{\int_d^\infty (x - d)f(x)dx}_{\text{Pure Excess Loss}} \quad (2.8)$$

---

2. Le  $P$  en exposant signifie *per pay*, qui indique que  $Y$  est conditionnée sur  $X$ .

### Définition 2.3.1 Loss Eliminating Ratio



Le Loss Eliminating Ratio (*LER*), nous permet d'obtenir le pourcentage de perte qu'on ne paiera pas grâce au déductible  $d$  :

$$ELR = \frac{E[X] - E[(X - d)_+]}{E[X]}$$

Mais on sait que

$$E[(X - d)_+] = E[X] - E[X \wedge d]$$

Alors,

$$ELR = \frac{E[X \wedge d]}{E[X]} \quad (2.9)$$

## 2.4 Contrat avec Déductible franchise

Soit  $Y$  le contrat qui a un déductible franchise. Dans ce type de contrat, on va payer l'intégralité de la perte, lorsque celle-ci dépassera un déductible. Mathématiquement,

$$Y = \begin{cases} 0 & , X \leq d \\ X & , X > d \end{cases}$$

### Caractéristiques

(1) La fonction de densité est définie par

$$f_Y(y) = \begin{cases} F_X(d) & , y = 0 \\ f_X(y) & , y > 0 \end{cases}$$

(2) La fonction de répartition de ce contrat est

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X(d) & , y = 0 \\ F_X(d) & , 0 < y \leq d \\ \frac{F_X(y) - F_X(d)}{S_X(d)} & , y > d \end{cases}$$

## 2.5 Contrat avec déductible ordinaire et limite sous l'inflation

On peut combiner les contrats vu plus tôt, comme c'est le cas ici : ce contrat prévoit un déductible ordinaire  $d$  ainsi qu'une limite au contrat  $u$ . De plus, on s'intéresse au scénario sous l'inflation. Alors,

$$Y = \begin{cases} 0 & , X \leq \frac{d}{1+r} \\ (1+r)X - d & , \frac{d}{1+r} \leq X \leq \frac{u}{1+r} \\ u = d & , X > \frac{u}{1+r} \end{cases}$$

Et l'espérance est

**Définition 2.5.1** Prime d'un contrat avec déductible  $d$  et limite  $u$  

$$E[Y] = (1+r) \left( E \left[ X \wedge \frac{u}{1+r} \right] - E \left[ X \wedge \frac{d}{1+r} \right] \right) \quad (2.10)$$

*Démonstration.* On va utiliser  $Y = Y_1 - Y_2$  pour prouver (2.10). On définit  $Y_1$  et  $Y_2$  :

$$Y_1 = \begin{cases} 0 & , X \leq \frac{d}{1+r} \\ (1+r)X - d & , X > \frac{d}{1+r} \end{cases}$$

$$Y_2 = \begin{cases} 0 & , X \leq \frac{u}{1+r} \\ (1+r)X - u & , X > \frac{u}{1+r} \end{cases}$$

On connaît leur espérance respective,

$$E[Y_1] = (1+r) \left( E[X] - E \left[ X \wedge \frac{d}{1+r} \right] \right)$$

$$E[Y_2] = (1+r) \left( E[X] - E \left[ X \wedge \frac{u}{1+r} \right] \right)$$

Alors,

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[Y_1] - E[Y_2] \\ &= (1+r) \left( E \left[ X \wedge \frac{u}{1+r} \right] - E \left[ X \wedge \frac{d}{1+r} \right] \right) \end{aligned}$$

□

$$\begin{aligned}
E[Y] &= \int_{\frac{d}{1+r}}^{\frac{u}{1+r}} ((1+r)x - d) f_X(x) dx + \int_{\frac{u}{1+r}}^{\infty} (u - d) f_X(x) dx \\
&= (1+r) \left( E \left[ X \wedge \frac{u}{1+r} \right] - E \left[ X \wedge \frac{d}{1+r} \right] \right)
\end{aligned}$$

## 2.6 Co-assurance

Soit  $\alpha$  le pourcentage de co-assurance.

$$Y = \begin{cases} 0 & , X \leq d \\ X - d & , X > d \end{cases}$$

$$Y^C = \begin{cases} 0 & , X \leq d \\ \alpha(X - d) & , X > d \end{cases}$$

Alors,

$$E[Y^C] = \alpha E[Y] \quad (2.11)$$

## 2.7 Cas général

Voici une formule générale, avec un déductible  $d$ , un taux d'inflation  $r$ , un pourcentage de coassurance de  $\alpha$  et une limite de  $u$  :

$$Y^L = \begin{cases} 0 & , x \leq \frac{d}{1+r} \\ \alpha \left( (1+r)x - d \right) & , \frac{d}{1+r} \leq x \leq \frac{u}{1+r} \\ \alpha(u - d) & , x > \frac{u}{1+r} \end{cases} \quad (2.12)$$

# Chapitre 3

## Estimation non-paramétrique

À savoir pour examen partiel

- ✓ Loi normale
- ✓ Loi gamma
- ✓ Loi poisson
- ✓ Loi binomiale
- ✓ intégration par partie pour la loi exponentielle
- ✓ fonction densité, moyenne, variance et fgm

### 3.1 Terminologie

Pour  $X_1, \dots, X_n$  qui sont *iid*.

On a

$$\begin{aligned} E[g(X)] &= \int g(x) dF(x) \\ &= \int g(x) f_X(x) dx \\ &= \int g(x) F_n(x) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i) \end{aligned}$$

... est un estimateur non-paramétrique



## 3.2 Estimation de données complètes

On cherche à estimer  $F(t)$  ou  $S(t)$ , lorsque nos données sont complètes (i.e.  $x_1, \dots, x_n$  qui sont *iid*). Alors, l'estimateur non paramétrique pour  $F(t)$  :

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{[x_i \leq t]} \quad (3.1)$$

où  $1_{[\cdot]}$  représente une fonction indicatrice.

$F_n(t)$  aura donc la forme suivante :

$$F_n(t) = \begin{cases} 0 & , t < x_{(1)} \\ \frac{1}{n} & , x_{(1)} \leq t < x_{(2)} \\ \frac{2}{n} & , x_{(2)} \leq t < x_{(3)} \\ \dots & \\ 1 & , t \geq x_{(n)} \end{cases} \quad (3.2)$$

où  $t \in [0, x_{(n)}]$ .

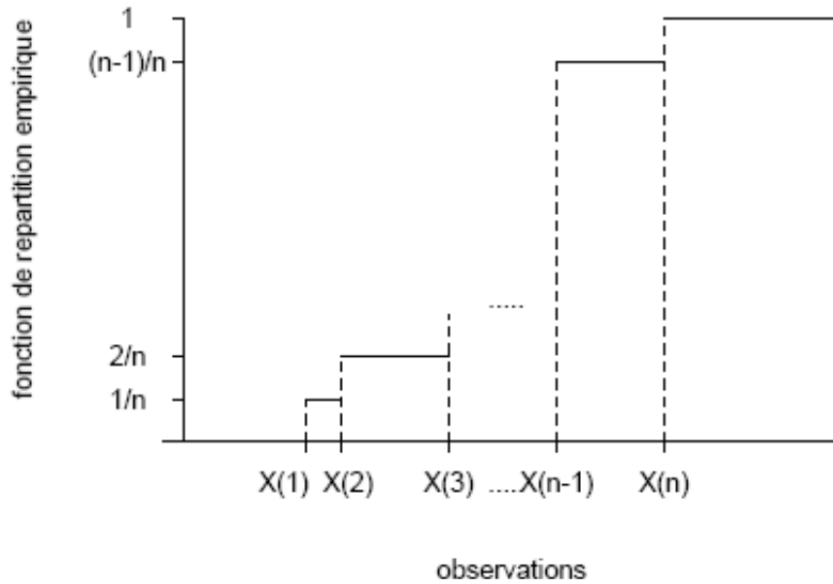


FIGURE 3.1 – Fonction de répartition empirique

<sup>1</sup>[https://pmb.univ-saida.dz/buscopac/doc\\_num.php?explnum\\_id=142](https://pmb.univ-saida.dz/buscopac/doc_num.php?explnum_id=142)

### Remarques

- (1) Lorsque  $F_n(t) \rightarrow F(t)$ , alors
- (2) Puisqu'on a

$$\sum_{i=1}^n 1_{[x_i \leq t]} \sim \text{Bin}(n, \Pr(X \leq t))$$

Alors,

$$\begin{aligned} E[F_n(t)] &= \frac{1}{n} n F(t) \\ &= F(t) \quad (\text{C'est un estimateur sans biais}) \\ \text{Var}(F_n(t)) &= \frac{1}{n^2} n F(t) S(t) \\ &= \frac{F(t) S(t)}{n} \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{=} 0 \end{aligned}$$

### 3.2.1 Estimation de donnée groupées (Fonction OGIVE)

#### **CETTE MATIÈRE NE SERA PAS TESTÉE À L'EXAMEN**

Dans certains contextes, on a  $n$  données qui sont groupées en intervalle. La fonction OGIVE permet d'interpoler entre 2 points  $x_i$  et  $x_{i+1}$ .

$$\begin{aligned} c_{j-1} &\leq x \leq c_j \\ F_n(c_{j-1}) &\leq F_n(x) \leq F_n(c_j) \end{aligned}$$

La formule est

$$F_n^{\text{OGIVE}}(x) = \frac{c_j - x}{c_j - c_{j-1}} F_n(c_{j-1}) + \frac{x - c_{j-1}}{c_j - c_{j-1}} F_n(c_j) \quad (3.3)$$

### Remarques

- (1) Si  $x = c_{j-1}$ ,

$$F_n(c_{j-1}) = F_n^{\text{OGIVE}}(c_{j-1})$$

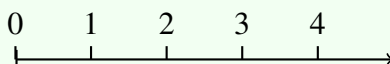
(2) Si  $x = c_j$ ,

$$F_n(c_j) = F_n^{\text{OGIVE}}(c_j)$$

### Exemple 3.2.1 Exemple concret



L'assureur a groupé  $n = 10$  données en intervalles.



Alors,

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I[x_i \leq t]$$

$$F_n(1) = \frac{2}{10}$$

$$F_n(2) = \frac{5}{10}$$

$$F_n(3) = \frac{9}{10}$$

$$F_n(4) = \frac{10}{10}$$

$$= 1$$

En dérivant (3.3), on obtient

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{\partial}{\partial x} F_n(x) \\ &= \frac{1}{c_j - c_{j-1}} F_n(c_j) - \frac{1}{c_j - c_{j-1}} F_n(c_{j-1}) \\ &= \frac{F_n(c_j) - F_n(c_{j-1})}{c_j - c_{j-1}} \end{aligned}$$

(3.4)

### 3.3 Estimation de la fonction de survie

Soit  $S_n(t)$  la fonction de survie empirique. Alors,

$$\begin{aligned} S_n(t) &= 1 - F_n(t) \\ &= \frac{n}{n} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{x_i \leq t\}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 - 1_{\{x_i \leq t\}}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{x_i > t\}} \end{aligned}$$

### 3.4 Estimateur Kaplan-Meier

### 3.5 l'approche conditionnelle pour estimer $S(t)$

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{S(t_1)}{S(t_0)} \times \frac{S(t_2)}{S(t_1)} \times \dots \times \frac{S(t)}{S(t_{i-1})} \\ &= \underbrace{\frac{S(t)}{S(t_0)}}_1 \\ &= S(t) \end{aligned}$$

Alors,

$$S(t) = \prod_{j \leq t} p_j \quad (3.5)$$

Ça nous suggère un autre estimateur pour  $S(t)$  :

$$\hat{S}(t) = \prod_{j \leq t} (1 - \hat{q}_j) \quad (3.6)$$

Ceci est l'approche conditionnelle pour estimer  $S(t)$ . Et si jamais on a des données complètes,  $S_n(t) = \hat{S}(t)$ .