Mathématiques actuarielles IARD-1
ACT-2005
Notes de cours

Gabriel Crépeault-Cauchon
Nicholas Langevin

19 septembre 2018

Table des matières

Résumé

Ce document résume les notes de cours prises en classe dans le cours de Mathématiques actuarielles IARD-1, ainsi que des notions prises du livre *LOSS MODELS - From Data to Decisions, 4th edition*.

Chapitre 1

Rappel sur les notions de probabilité et statistiques

1.1 Quantités à savoir

Raw moments On représente le k^{e} moment par μ_k', soit

$$\mu_k' = E\left[X^k\right] \tag{1.1}$$

Moments centraux Le k^{e} moment central est représenté par

$$\mu_k = E\left[(X-\mu)^k\right] \tag{1.2}$$

Exemple 1.1.1 Quelques exemples de moments centraux

La variance est le 2^{e} moment central :

$$Var(X) = \mu_2 = E\left[(X-\mu)^2\right]$$

Le 3^{e} moment centré, qui est utilisé pour calculer le coefficient d'asymétrie :

$$\mu_3 = E\left[(X-\mu)^3\right]$$

Coefficient d'asymétrie Le coefficient d'asymétrie, aussi appelé *skewness*, est représentée par

$$S_k = \frac{\mu_3}{\sigma^2} \tag{1.3}$$

Soit le 3ᵉ moment standarisé. Si $S_k = 0$, alors la distribution tend vers une loi normale.

Coefficient d'applatissement Le coefficient d'applatissement, aussi appelé *Kurtosis*, se définit par

$$\text{Kurtosis} = \frac{\mu_4}{\sigma^4} \tag{1.4}$$

Cette quantité permet de mesurer l'épaisseur de l'aile (*tail*) de la distribution. Si $E\left[z^4\right] = 3$, alors la distribution tend vers une loi normale $N(\mu, \sigma^2)$.

1.2 La loi normale

La fonction génératrice des moments

$$\begin{aligned} M_x(t) &= M_x(0) + \frac{M_x' t}{1!} + \frac{M_x'' t^2}{2!} + \ldots + \frac{M_x^{(n)t^n}}{n!} \\ &= 1 + \frac{E[x]t}{1!} + \frac{E[x^2]t^2}{2!} + \ldots + \frac{E[x^n]t^n}{n!} \end{aligned}$$

On pose : $c_k = \frac{E[x^n]}{n!}$ alors,

$$E[x^k] = C_k k! \tag{1.5}$$

1.3 Queue de distribution

1. Sois $f_1(x)$ une fonction tels que les 3 premiers moment existe : $E[x^4] = \infty$
2. Sois $f_2(x)$ une fonction tels que les 2 premiers moment existe : $E[x^2] = \infty$

Alors,

$$\lim_{x \to \infty} r(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \begin{cases} \infty, f_1(x) \text{a une aile plus lourde que} f_2(x) \\ 0, f_2(x) \text{a une aile plus lourde que} f_1(x) \end{cases}$$

Exemple 1.3.1

Sois $f_{x_1}(x_1) \sim pareto(\alpha, \theta)$ et $f_{x_2}(x_2) \sim gamma(\alpha, \lambda)$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \infty} r(x) &= \lim_{x \to \infty} \frac{f_{x_1}(x_1)}{f_{x_2}(x_2)} \\
&= \frac{\frac{\alpha \theta^{\alpha}}{(x+\theta)^{\alpha+1}}}{\lambda^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}} \\
&= C \frac{e^{-\lambda x}}{x^{\alpha-1}(x+\theta)^{\alpha+1}} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

La pareto a une queue plus lourde que la gamma

La fonction de hasard

$$h(x) = \frac{f(x)}{s(x)} \tag{1.6}$$

Si à partir de M, $h(x)$ est décroissante $\Leftrightarrow$ $f(x)$ décroit trop lentement, alors $f(x)$ à une aile lourde.