# Mathématiques actuarielles IARD-1
# ACT-2005
# Notes de cours

Gabriel Crépeault-Cauchon
Nicholas Langevin

6 octobre 2018

# Table des matières

**Résumé**

Ce document résume les notes de cours prises en classe dans le cours de Mathématiques actuarielles IARD-1, ainsi que des notions prises du livre *LOSS MODELS - From Data to Decisions, 4th edition*.

# Chapitre 3

# Quantités des distributions à connaître

## 3.1 Moments

***Raw moments*** On représente le $k^e$ moment par $\mu_k'$, soit

$$\mu_k' = E\left[X^k\right] \tag{3.1}$$

**Moments centraux** Le $k^e$ moment central est représenté par

$$\mu_k = E\left[(X-\mu)^k\right] \tag{3.2}$$

**Exemple 3.1.1** Quelques exemples de moments centraux

La variance est le $2^e$ moment central :

$$Var(X) = \mu_2 = E\left[(X-\mu)^2\right]$$

Le $3^e$ moment centré, qui est utilisé pour calculer le coefficient d'asymétrie :

$$\mu_3 = E\left[(X-\mu)^3\right]$$

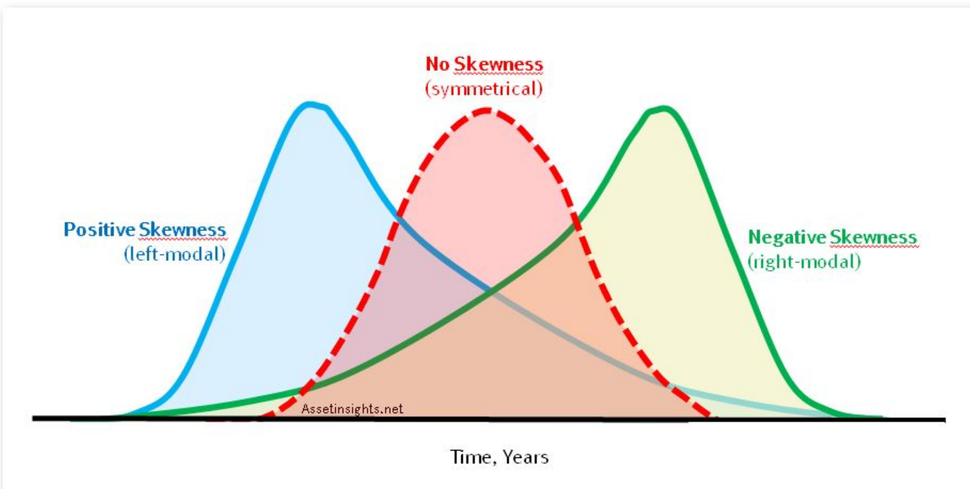
**Coefficient de variation**

$$CV = \frac{\sigma}{E[X]} \tag{3.3}$$

**Coefficient d'asymétrie** Le coefficient d'asymétrie, aussi appelé *skewness*, est défini par

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \tag{3.4}$$

Soit le 3e moment standarisé. Si $S_k = 0$, alors la distribution tend vers une loi normale, telle qu'on le voit sur la figure ci-dessous :




**Coefficient d'applatissement** Le coefficient d'applatissement, aussi appelé *Kurtosis*, se définit par

$$\text{Kurtosis} = \frac{\mu_4}{\sigma^4} \tag{3.5}$$

Cette quantité permet de mesurer l'épaisseur de l'aile (*tail*) de la distribution. Si $E\left[z^4\right] = 3$, alors la distribution tend vers une loi normale $N(\mu, \sigma^2)$.

**Mean Excess Loss** On définit la variable aléatoire $Y^P$, qui représente le montant de perte en excès d'un déductible $d$, sachant que la perte est au delà de ce montant. On peut définir l'espérance des coûts de cette variable alétaoire :

$$e(d) = E\left[Y^P\right] = E[X - d | X \geq d] = \frac{\int_d^\infty S_X(x)}{S_X(d)} \tag{3.6}$$

Note : cette variable est dite tronquée à gauche et *shifted*. On entend parfois aussi *Per-payment*

**Left censored and shifted variable** Soit la v.a. $Y^L$, qui représente le montant payé par l'assureur *par perte*. La variable est donc dite *censurée à gauche et shifted*. On peut aussi en calculer l'espérance :

$$E\left[Y^L\right] = E\left[(X-d)_+\right] = \int_d^{\infty} (x-d) f_X(x) dx \tag{3.7}$$

De plus, on peut facilement déduire la relation suivante :

$$E\left[(X-d)_+\right] = e(d)(1-F_X(d))$$

**Limited Loss Variable** Finalement, on peut définir la variable $Y$, qui représente le paiement de l'assureur avec une limite de $u$ à la police. Son espérance est définie par

$$E\left[X \wedge u\right] = \int_0^u f_X(x) dx \tag{3.8}$$

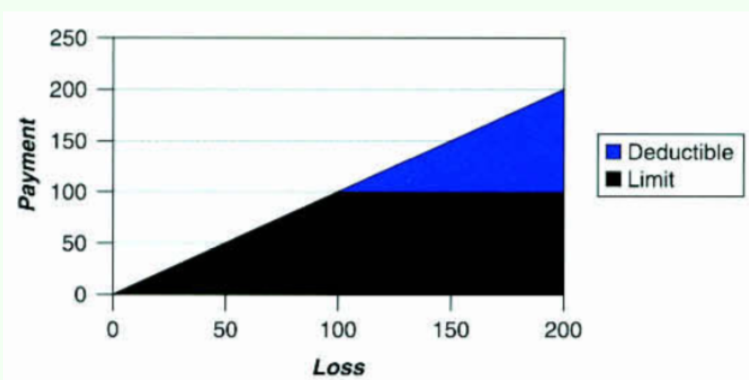
À l'aide d'intégration par partie, on peut trouver la forme suivante :

$$E\left[X \wedge u\right] = \int_0^u S_X(x) dx$$

La v.a. $Y$ est dite *censurée à droite et shifted*

**Exemple 3.1.2** lien entre le déductible et la limite

On peut faire le lien entre le déductible et la limite :



## 3.4 Queue de distribution

### 3.4.1 Classification selon les moments

- On peut déterminer si une distribution a une *heavy-tail* en vérifiant si ses moments existent.
- On peut aussi comparer des distributions entre-eux en utilisant des quantités standarisées, telles que le Coefficient de variation, le coefficient d'asymétrie (*skewness*) ou encore le coefficient d'applatissement (*Kurtosis*)

### 3.4.2 Classification selon les comportements limites des ailes de distribution

- On peut faire le ratio de deux distributions avec leurs fonction de survie ($S(x)$) ou leur fonction $f$ de densité pour vérifier laquelle des 2 a la plus grosse aile de distribution (*tail*).

1. Sois $f_1(x)$ une fonction tels que les 3 premiers moment existe : $E[x^4] = \infty$
2. Sois $f_2(x)$ une fonction tels que les 2 premiers moment existe : $E[x^2] = \infty$

Alors,

$$\lim_{x\to\infty} r(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \begin{cases} \infty, \ f_1(x) \text{a une aile plus lourde que} f_2(x) \\ 0, \ f_2(x) \text{a une aile plus lourde que} f_1(x) \end{cases}$$

**Exemple 3.4.1**

Sois $f_{x_1}(x_1) \sim pareto(\alpha, \theta)$ et $f_{x_2}(x_2) \sim gamma(\alpha, \lambda)$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} r(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{f_{x_1}(x_1)}{f_{x_2}(x_2)} \\ &= \frac{\frac{\alpha\theta^\alpha}{(x+\theta)^{\alpha+1}}}{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}} \\ &= C\frac{e^{-\lambda x}}{x^{\alpha-1}(x+\theta)^{\alpha+1}} \\ &= \infty \end{aligned}$$

La pareto a une queue plus lourde que la gamma

### 3.4.3 Classification basée sur la fonction de Hazard

**Définition 3.4.1** *Hazard rate function*

La fonction de hazard (aussi appelée force de mortalité ($\mu(x)$) ou le failure rate ($\lambda(x)$), est définie par

$$h_X(x) = \frac{f_X(x)}{S_X(x)} \tag{3.9}$$

On peut aussi exprimer la fonction $h_X(x)$ comme

$$h_X(x) = -\ln(S_X(x))$$

Soit une distribution ayant fonction de densité $f_X(x)$ et fonction de hazard $h_X(x)$. Alors,

- Si $h(x)$ $\nearrow$, *light-tailed*
- Si $h(x)$ $\searrow$, *heavy-tailed*
- Note : on peut aussi comparer les distributions entre-elles : si une distribution voit son $h_1(x)$ augmenter plus rapidement que l'autre (i.e. $h_2(x)$), alors la deuxième distribution a une aile de distribution plus lourde.

# Chapitre 8

# Fréquence et sévérité avec modifications aux contrats

## 8.2 Déductibles

### 8.2.1 Ordinary deductible

#### Définition

Soit un contrat d'assurance avec déductible $d$. Lors d'une perte, l'assureur va payer tout montant en excédent du montant $d$. Alors, pour la variable *per-payment*,

$$Y^L = (X-d)_+ = \begin{cases} 0 & ,X \leq d \\ X-d & ,X > d \end{cases} \tag{8.1}$$

$$Y^P = (X-d)_+ = \begin{cases} \text{Non-défini} & ,X \leq d \\ X-d & ,X > d \end{cases} \tag{8.2}$$

#### Fonctions reliées

Et on peut aussi déduire toutes les fonctions qui y sont reliées :

$$f_{Y^P}(y) = \frac{f_X(y+d)}{S_X(d)}$$

$$S_{Y^P}(y) = \frac{S_X(y+d)}{S_X(d)}$$

$$F_{Y^P}(y) = \frac{F_X(y+d) - F_X(d)}{S_X(d)}$$

$$h_{Y^P}(y) = h_X(y+d)$$

Pour la v.a. $Y^L$ *per-loss* [1],

$$f_{Y^L}(y) = f_X(y+d)$$

$$S_{Y^L}(y) = S_X(y+d)$$

$$F_{Y^L}(y) = F_X(y+d)$$

**Espérance**

$$E\left[Y^L\right] = E\left[(X-d)_+\right] = E\left[X\right] - E\left[X \wedge d\right] \tag{8.3}$$

$$E\left[Y^P\right] = \frac{E\left[(X-d)_+\right]}{S_X(d)} = \frac{E\left[X\right] - E\left[X \wedge d\right]}{S_X(d)} \tag{8.4}$$

1. Il est à noter que la fonction de Hazard n'est pas définie à 0.

Cette espérance s'appelle la prime *Stop-Loss*, et elle est définie par

$$\begin{aligned}
E[Y] &= E\left[(X-d)_+\right] \\
&= \int_d^\infty (x-d)f(x)dx \\
&= \underbrace{\int_d^\infty xf(x)dx}_{\text{Intégration par partie}} -d\int_d^\infty f(x)dx \\
&= -xS(x)\Big|_d^\infty + \int_d^\infty S(x)dx - sS(d) \\
&= 0 \cancel{+S(d)} + \int_d^\infty S(x)dx \cancel{-S(d)} \\
&= \int_d^\infty S(x)dx
\end{aligned}$$

### 8.2.2 Franchise deductible

#### Définitions

Lorsque la perte dépasse le déductible franchise de montant $d$, l'assureur assume l'entièreté des coûts [2]. Pour la v.a. $Y^L$, on a

$$Y^L = \begin{cases} 0 & ,X \leq d \\ X & ,X > d \end{cases}$$

Pour la v.a. $Y^P$,

$$Y^P = \begin{cases} \text{non-défini} & X \leq d \\ X & ,X > d \end{cases} \tag{8.5}$$

#### Fonctions reliées

Les fonctions de la v.a. $Y^L$ sont

$$f_{Y^L}(y) = \begin{cases} F_X(d) & ,y = 0 \\ f_X(y) & ,y > 0 \end{cases}$$

2. On voit plus souvent ce type de déductible dans un contexte d'invalidité : si on est absent plus d'un certain nombre de jours du travail, on se fait rembourser toutes ses absences en salaire.

$$F_{Y^L}(y) = \begin{cases} F_X(d) & ,0 < y \leq d \\ F_X(y) & ,y \geq d \end{cases}$$

$$S_{Y^L}(y) = \begin{cases} S_X(d) & ,0 < y \leq d \\ S_X(x) & ,y > d \end{cases}$$

$$h_{Y^L}(y) = \begin{cases} h_X(d) & ,0 < y \leq d \\ h_X(x) & ,y > d \end{cases}$$

Pour la fonction $Y^P$ (*per-payment*),

$$f_{Y^P}(y) = \frac{f_X(d)}{S_X(d)}$$

$$F_{Y^P}(y) = \begin{cases} F_X(d) & ,y = 0 \\ F_X(d) & ,0 < y \leq d \\ \frac{F_X(y) - F_X(d)}{S_X(d)} & ,y > d \end{cases}$$

$$S_{Y^P}(y) = \begin{cases} 1 & ,0 \leq y \leq d \\ \frac{S_X(y)}{S_X(d)} & ,y > d \end{cases}$$

$$h_{Y^P}(y) = \begin{cases} 0 & ,0 < y \leq d \\ h_X(y) & ,y > d \end{cases}$$

**Espérance**

$$E\left[Y^L\right] = E\left[(X-d)_+^F\right] = E\left[X\right] - E\left[X \wedge d\right] + dS_X(d) \tag{8.6}$$

$$E\left[Y^P\right] = E\left[(X-d)_+^F\right] = \frac{E\left[X\right] - E\left[X \wedge d\right]}{S_X(d)} + d \tag{8.7}$$

## 8.3 Loss Elimination Ratio

**Définition 8.3.1** Loss Eliminating Ratio

Le Loss Eliminating Ratio ($LER$), nous permet d'obtenir le pourcentage de perte qu'on ne paiera pas grâce au déductible $d$ :

$$LER = \frac{E[X] - E[(X-d)_+]}{E[X]}$$

Mais on sait que

$$E[(X-d)_+] = E[X] - E[X \wedge d]$$

Alors,

$$LER = \frac{E[X \wedge d]}{E[X]} \tag{8.8}$$

**Note sur l'inflation** Il arrive en exercice qu'on nous demande de comparer ce ratio avec et sans inflation. Soit un contrat avec $r$ % d'inflation. Alors, on peut trouver $E[(X-d)_+]$ qui tient compte de cette inflation :

$$E\left[(X-d)_+^I\right] = (1+r)\left(E[X] - E\left[X \wedge \frac{d}{1_r}\right]\right)$$

*Démonstration.*

$$E[Y] = (1+r)\int_{\frac{d}{1+r}}^{\infty} x f_X(x)dx - d\int_{\frac{d}{1+r}}^{\infty} f_X(x)dx$$

En ajoutant un terme,

$$= \underbrace{(1+r)\int_0^{\frac{d}{1+r}} x f_X(x)dx + \int_{\frac{d}{1+r}}^{\infty} x f_X(x)dx}_{E[X]} - \underbrace{\int_0^{\frac{d}{1+r}} x f_X(x)dx - \frac{d}{1+r}\int_{\frac{d}{1+r}}^{\infty} f_X(x)dx}_{E\left[X \wedge \frac{d}{1+r}\right]}$$

$$= E[X] - E\left[X \wedge \frac{d}{1+r}\right]$$

□

## 8.4 Policy Limits

### 8.4.1 Définitions

Soit un contrat d'assurance où il est conclu que l'assureur débourse un maximum de $u$ dans le montant de la perte. Ce type de modification au contrat créé une v.a. *censurée à droite*, i.e. le montant déboursé est maximisé à $u$. On définit $Y$ comme étant

$$Y = \begin{cases} X & ,X \leq u \\ u & ,Y > u \end{cases} \tag{8.9}$$

### 8.4.2 Fonctions reliées

On peut déduire les fonctions reliées suivantes :

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(y) & ,y < u \\ S_X(u) & ,y = u \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X(y) & ,y \leq u \\ 1 & ,y > u \end{cases}$$

**Note sur l'inflation** Si on a $r$ % d'inflation, alors

$$E[X \wedge u] = (1+r)E\left[X \wedge \frac{u}{1+r}\right]$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} E[Y] &= \int_0^{\frac{u}{1+r}} (1+r)xf_X(x)dx + u\int_{\frac{u}{1+r}}^{\infty} f_X(x)dx \\ &= (1+r)\int_0^{\frac{d}{1+r}} f f_X(x)dx + sS_X\left(\frac{u}{1+r}\right) \\ &= (1+r)\left(\int_0^{\frac{u}{1+r}} xf_X(x)dx + \frac{u}{1+r}S_X\left(\frac{u}{1+r}\right)\right) \\ &= (1+r)E\left[X \wedge \frac{u}{1+r}\right] \end{aligned}$$

□

## 8.5 Coassurance, déductible et limites

### Définitions

Le livre nous donne une fonction de perte qui englobe 4 éléments en même temps : l'inflation, les déductibles, la coassurance [3] et les limites de police. Pour la v.a. $Y^L$,

$$Y^L = \begin{cases} 0 & , x < \frac{d}{1+r} \\ \alpha\Big((1+r)x - d\Big) & , \frac{d}{1+r} \leq x < \frac{u}{1+r} \\ \alpha(u-d) & , x \geq \frac{u}{1+r} \end{cases} \tag{8.10}$$

et pour $Y^P$,

$$Y^L = \begin{cases} \text{Non-défini} & , x < \frac{d}{1+r} \\ \alpha\Big((1+r)x - d\Big) & , \frac{d}{1+r} \leq x < \frac{u}{1+r} \\ \alpha(u-d) & , x \geq \frac{u}{1+r} \end{cases} \tag{8.11}$$

### Espérance

$$E\left[Y^L\right] = \alpha(1+r)\left(E\left[X \wedge \frac{u}{1+r}\right] - E\left[X \wedge \frac{d}{1+r}\right]\right) \tag{8.12}$$

$$E\left[Y^P\right] = \frac{E\left[Y^L\right]}{S_X\left(\frac{d}{1+r}\right)} \tag{8.13}$$

$$\begin{aligned} E[Y] &= \int_{\frac{d}{1+r}}^{\frac{u}{1+r}} ((1+r)x - d) f_X(x) dx + \int_{\frac{u}{1+r}}^{\infty} (u-d) f_X(x) dx \\ &= (1+r)\left(E\left[X \wedge \frac{u}{1+r}\right] - E\left[X \wedge \frac{d}{1+r}\right]\right) \end{aligned}$$

3. Dans ce type de contrat, la compagnie paie une proportion $\alpha$ de la perte, et le $(1-\alpha)$ restant est assumé par le titulaire de la police.

# Chapitre 9

# Estimation non-paramétrique

**À savoir pour examen partiel**

- ✔ Loi normale
- ✔ Loi gamma
- ✔ Loi poisson
- ✔ Loi binomiale
- ✔ intégration par partie poru la loi exponentielle
- ✔ fonction densité, moyenne, variance et fgm

## 9.1 Terminologie

Pour $X_1, ..., X_n$ qui sont *iid*.
On a

$$\begin{aligned} E\left[g(X)\right] &= \int g(x) dF(x) \\ &= \int g(x) f_X(x) dx \\ &= \int g(x) F_n(x) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g(x_i) \end{aligned}$$

... est un estimateur non-paramétrique

## 9.2 Estimation de données complètes

On cherche à estimer $F(t)$ ou $S(t)$, lorsque nos données sont complètes (i.e. $x_1, \ldots, x_n$ qui sont *iid*). Alors, l'estimateur non paramétrique pour $F(t)$ :

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{[x_i \leq t]} \tag{9.1}$$

où $1_{[\cdot]}$ représente une fonction indicatrice.
$F_x(t)$ aura donc la forme suivante :

$$F_n(t) = \begin{cases} 0 & , t < x_{(1)} \\ \frac{1}{n} & , x_{(1)} \leq t < x_{(2)} \\ \frac{2}{n} & , x_{(2)} \leq t < x_{(3)} \\ \ldots & \\ 1 & , t \geq x_{(n)} \end{cases} \tag{9.2}$$

où $t \in [0, x_{(n)}]$.

**Remarques**

(1) Lorsque $F_n(t) \to F(t)$, alors

(2) Puisqu'on a

$$\sum_{i=1}^{n} 1_{[x_i \leq t]} \sim Bin(n, \Pr(X \leq t))$$

Alors,

$$\begin{aligned} E[F_n(t)] &= \frac{1}{n} n F(t) \\ &= F(t) \quad \text{(C'est un estimateur sans biais)} \\ Var(F_n(t)) &= \frac{1}{n^2} n F(t) S(t) \\ &= \frac{F(t)S(t)}{n} \\ &\underset{n \to \infty}{=} 0 \end{aligned}$$

### 9.2.1 Estimation de donnée groupées (Fonction OGIVE)

**CETTE MATIÈRE NE SERA PAS TESTÉE À L'EXAMEN**

Dans certains contextes, on a $n$ données qui sont groupées en intervalle. La fonction OGIVE permet d'interpoler entre 2 points $x_i$ et ${}_{i+1}$.

$$\begin{aligned} c_{j-1} &\leq x \leq c_j \\ F_n(c_{j-1}) &\leq F_n(x) \leq F_n(c_j) \end{aligned}$$

La formule est

$$F_n^{\text{OGIVE}}(x) = \frac{c_j - x}{c_j - c_{j-1}} F_n(c_j - 1) + \frac{x - c_{j-1}}{c_j - c_{j-1}} F_n(c_j) \tag{9.3}$$

**Remarques**

(1) Si $x = c_{j-1}$,

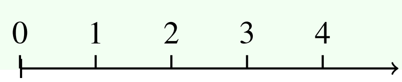
$$F_n(c_{j-1}) = F_n^{\text{OGIVE}}(c_{j-1})$$

(2) Si $x = c_j$,

$$F_n(c_j) = F_n^{\text{OGIVE}}(c_j)$$

**Exemple 9.2.1** Exemple concret

L'assureur a groupé $n = 10$ données en intervalles.



Alors,

$$
\begin{aligned}
F_n(t) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I[x_i \leq t] \\
F_n(1) &= \frac{2}{10} \\
F_n(2) &= \frac{5}{10} \\
F_n(3) &= \frac{9}{10} \\
F_n(4) &= \frac{10}{10} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

En dérivant (9.3), on obtient

$$
\begin{aligned}
f_n(x) &= \frac{\partial}{\partial x} F_x(x) \\
&= \frac{1}{c_j - c_{j-1}} F_x(c_j) - \frac{1}{c_j - c_{j-1}} F_n(c_{j-1}) \\
&= \frac{F_n(c_j) - F_n(c_{j-1})}{c_j - c_{j-1}}
\end{aligned}
\tag{9.4}
$$

## 9.3 Estimation de la fonction de survie

Soit $S_n(t)$ la fonction de survie empirique. Alors,

$$\begin{aligned} S_n(t) &= 1 - F_n(t) \\ &= \frac{n}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{x_i \leq t\}} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1 - 1_{\{x_i \leq t\}}\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{x_i > t\}} \end{aligned}$$

## 9.4 Estimateur Kaplan-Meier

## 9.5 l'approche conditionnelle pour estimer $S(t)$

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{S(t_1)}{S(t_0)} \times \frac{S(t_2)}{S(t_1)} \times \ldots \times \frac{S(t)}{S(t_{i-1}} \\ &= \frac{S(t)}{\underbrace{S(t_0)}_{1}} \\ &= S(t) \end{aligned}$$

Alors,

$$S(t) = \prod_{j \leq t} p_j \tag{9.5}$$

Ça nous suggère un autre estimateur pour $S(t)$ :

$$\hat{S}(t) = \prod_{j \leq t}(1 - \hat{q}_j) \tag{9.6}$$

Ceci est l'approche conditionnelle pour estimer $S(t)$. Et si jamais on a des données complètes, $S_n(t) = \hat{S}(t)$.

### 9.5.1 Vu en classe 5 oct.

$$\hat{S}(t) = \prod_{i \leq t} \left(1 - \frac{s_i}{r_i}\right)$$
$$S(t) = e^{-H(t)}$$

ET

$$\begin{aligned}\hat{H}(t) &= -\ln(\hat{S}(t)) \\ &= \sum_{i \leq t} -\ln\left(1 - \frac{s_i}{r_i}\right)\end{aligned}$$
$$\hat{H}_{N-A}(t) \sum_{i \leq t} \frac{s_i}{r_i}$$

où $r_i$ est le nombre de survivant au temps $i$.

**Exemple 9.5.1**

Exemple fait en classe au début du cours, ligne du temps à insérer ici.