Mathématiques actuarielles IARD-1
ACT-2005
Notes de cours

Gabriel Crépeault-Cauchon
Nicholas Langevin

4 décembre 2018

Table des matières

Résumé

Ce document résume les notes de cours prises en classe dans le cours de Mathématiques actuarielles IARD-1, ainsi que des notions prises du livre *LOSS MODELS - From Data to Decisions, 4th edition*. Il est séparé en 2 parties : la matière qui a été couverte avant et après l'examen partiel.

Le chapitre correspondant dans le *Loss Models, 4th edition* est indiqué entre parenthèse des chapitres.

De plus, ce document essaie le plus possible de suivre la numérotation des sections du *Loss Models*. C'est pourquoi il arrive parfois qu'il y ait des sauts de section.

Un aide-mémoire a été créé en lien avec cette matière. Il est disponible à l'adresse suivante : cheatsheet ACT-2005.

Finalement, il y a une section à la fin des chapitres qui indique les exercices recommandés dans le livre, intitulée **Exercices recommandés**.

Première partie

Matière pour l'examen partiel

Chapitre 1

Quelques rappels de Probabilité

La loi gamma :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

De plus, on a

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$$

et

$$\Gamma(n) = (n - 1)!$$

1.1 Fonction de survie

On a

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X] &= \int_{-\infty}^\infty x f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^\infty S_X(x) dx \end{aligned}$$

De plus,

$$f_X(x) = -\frac{\partial}{\partial x} S_X(x)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= -\frac{\partial}{\partial x} S_X(x) \\
&= -\frac{\partial}{\partial x}(1 - F_X(x)) \\
&= -(-f_X(x)) \\
&= f_X(x)
\end{aligned}$$

$\square$

Chapitre 2

Quantités des distributions à connaître (3)

2.1 Moments

Raw moments On représente le k^{e} moment par μ'_k, soit

$$\mu'_k = \mathrm{E}\left[X^k\right] \tag{2.1}$$

Moments centraux Le k^{e} moment central est représenté par

$$\mu_k = \mathrm{E}\left[(X-\mu)^k\right] \tag{2.2}$$

Exemple 2.1.1 Quelques exemples de moments centraux

La variance est le 2^{e} moment central :

$$Var(X) = \mu_2 = \mathrm{E}\left[(X-\mu)^2\right]$$

Le 3^{e} moment centré, qui est utilisé pour calculer le coefficient d'asymétrie :

$$\mu_3 = \mathrm{E}\left[(X-\mu)^3\right]$$

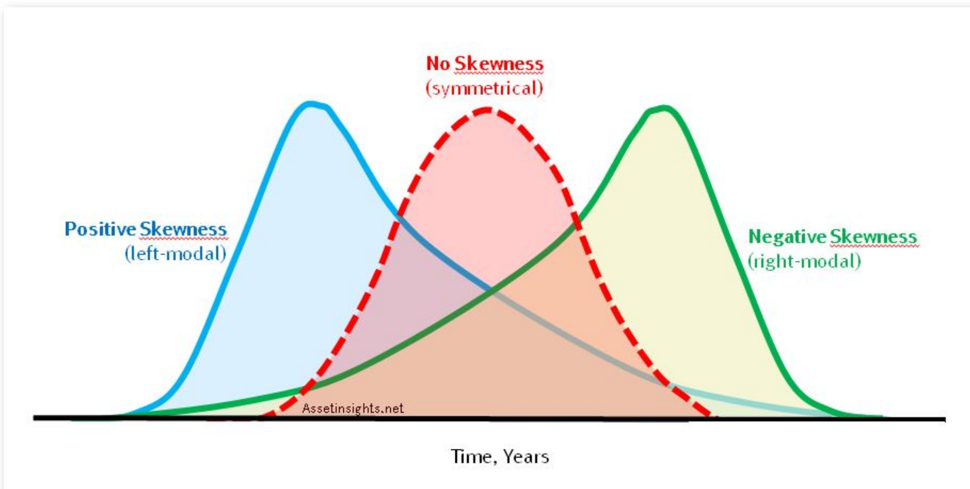
Coefficient de variation

$$CV = \frac{\sigma}{\mathrm{E}[X]} \tag{2.3}$$

Coefficient d'asymétrie Le coefficient d'asymétrie, aussi appelé *skewness*, est défini par

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \tag{2.4}$$

Soit le 3^{e} moment standarisé. Si $S_k = 0$, alors la distribution tend vers une loi normale, telle qu'on le voit sur la figure ci-dessous :



Coefficient d'applatissement Le coefficient d'applatissement, aussi appelé *Kurtosis*, se définit par

$$\text{Kurtosis} = \frac{\mu_4}{\sigma^4} \tag{2.5}$$

Cette quantité permet de mesurer l'épaisseur de l'aile (*tail*) de la distribution. Si $\mathrm{E}[z^4] = 3$, alors la distribution tend vers une loi normale $N(\mu, \sigma^2)$.

Mean Excess Loss On définit la variable aléatoire Y^P, qui représente le montant de perte en excès d'un déductible d, sachant que la perte est au delà de ce montant. On peut définir l'espérance des coûts de cette variable alétaoire :

$$e(d) = \mathrm{E}\left[Y^P\right] = \mathrm{E}\left[X - d | X \geq d\right] = \frac{\int_d^\infty S_X(x)}{S_X(d)} \tag{2.6}$$

Note : cette variable est dite tronquée à gauche et *shifted*. On entend parfois aussi *Per-payment*

Left censored and shifted variable Soit la v.a. Y^L, qui représente le montant payé par l'assureur *par perte*. La variable est donc dite *censurée à gauche et shifted*. On peut aussi en calculer l'espérance :

$$\mathrm{E}\left[Y^L\right] = \mathrm{E}\left[(X-d)_+\right] = \int_d^{\infty} (x-d) f_X(x) dx \tag{2.7}$$

De plus, on peut facilement déduire la relation suivante :

$$\mathrm{E}\left[(X-d)_+\right] = e(d)(1 - F_X(d))$$

Limited Loss Variable Finalement, on peut définir la variable Y, qui représente le paiement de l'assureur avec une limite de u à la police. Son espérance est définie par

$$\mathrm{E}\left[X \wedge u\right] = \int_0^u f_X(x) dx \tag{2.8}$$

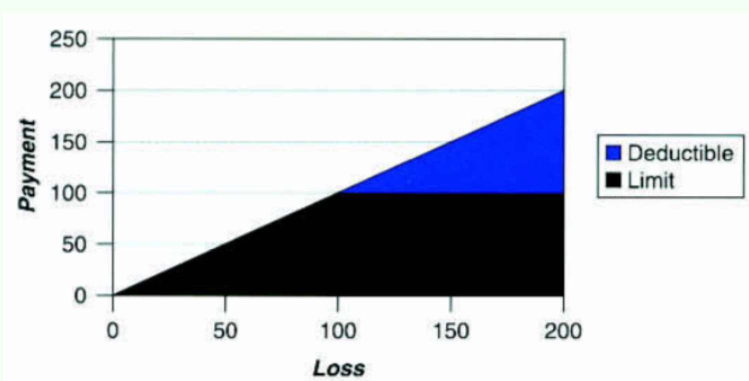
À l'aide d'intégration par partie, on peut trouver la forme suivante :

$$\mathrm{E}\left[X \wedge u\right] = \int_0^u S_X(x) dx$$

La v.a. Y est dite *censurée à droite et shifted*

Exemple 2.1.2 lien entre le déductible et la limite

On peut faire le lien entre le déductible et la limite :



2.4 Percentile

On définit le p^e quantile (*percentile* en anglais) π_p comme étant la valeur minimale que X prend tel que $F_X(\pi_p) \geq p$.

Il arrive parfois (en contexte où x est discret) que le p percentile demandé tombe dans une *marche*. Il faut alors considérer les bornes de la fonction pour déterminer quelle valeur de x correspond au quantile demandé.

2.5 Queue de distribution

2.5.1 Classification selon les moments

- On peut déterminer si une distribution a une *heavy-tail* en vérifiant si ses moments existent.
- On peut aussi comparer des distributions entre-eux en utilisant des quantités standarisées, telles que le Coefficient de variation, le coefficient d'asymétrie (*skewness*) ou encore le coefficient d'applatissement (*Kurtosis*)

2.5.2 Classification selon les comportements limites des ailes de distribution

- On peut faire le ratio de deux distributions avec leurs fonction de survie ($S(x)$) ou leur fonction f de densité pour vérifier laquelle des 2 a la plus grosse aile de distribution (*tail*).

1. Sois $f_1(x)$ une fonction tels que les 3 premiers moment existe : $E[x^4] = \infty$
2. Sois $f_2(x)$ une fonction tels que les 2 premiers moment existe : $E[x^2] = \infty$

Alors,

$$\lim_{x\to\infty} r(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \begin{cases} \infty, \; f_1(x)\text{a une aile plus lourde que} f_2(x) \\ 0, \; f_2(x)\text{a une aile plus lourde que} f_1(x) \end{cases}$$

Exemple 2.5.1

Sois $f_{x_1}(x_1) \sim pareto(\alpha, \theta)$ et $f_{x_2}(x_2) \sim gamma(\alpha, \lambda)$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} r(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{f_{x_1}(x_1)}{f_{x_2}(x_2)} \\
&= \frac{\frac{\alpha\theta^\alpha}{(x+\theta)^{\alpha+1}}}{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}} \\
&= C \frac{e^{-\lambda x}}{x^{\alpha-1}(x+\theta)^{\alpha+1}} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

La pareto a une queue plus lourde que la gamma

2.5.3 Classification basée sur la fonction de Hazard

Définition 2.5.1 *Hazard rate function*

La fonction de hazard (aussi appelée force de mortalité ($\mu(x)$) ou le failure rate ($\lambda(x)$), est définie par

$$h_X(x) = \frac{f_X(x)}{S_X(x)} \tag{2.9}$$

On peut aussi exprimer la fonction $h_X(x)$ comme

$$h_X(x) = -\ln(S_X(x))$$

Soit une distribution ayant fonction de densité $f_X(x)$ et fonction de hazard $h_X(x)$. Alors,

- Si $h(x)$ $\nearrow$, *light-tailed*
- Si $h(x)$ $\searrow$, *heavy-tailed*
- Note : on peut aussi comparer les distributions entre-elles : si une distribution voit son $h_1(x)$ augmenter plus rapidement que l'autre (i.e. $h_2(x)$), alors la deuxième distribution a une aile de distribution plus lourde.

2.6 Exercices recommandés

À compléter

Chapitre 3

Fréquence et sévérité avec modifications aux contrats (8)

3.2 Déductibles

3.2.1 Ordinary deductible

Définition

Soit un contrat d'assurance avec déductible d. Lors d'une perte, l'assureur va payer tout montant en excédent du montant d. Alors, pour la variable *per-payment*,

$$Y^L = (X-d)_+ = \begin{cases} 0 & , X \leq d \\ X-d & , X > d \end{cases} \tag{3.1}$$

$$Y^P = (X-d)_+ = \begin{cases} \text{Non-défini} & , X \leq d \\ X-d & , X > d \end{cases} \tag{3.2}$$

Fonctions reliées

Et on peut aussi déduire toutes les fonctions qui y sont reliées :

$$f_{Y^P}(y) = \frac{f_X(y+d)}{S_X(d)}$$

$$S_{Y^P}(y) = \frac{S_X(y+d)}{S_X(d)}$$

$$F_{Y^P}(y) = \frac{F_X(y+d) - F_X(d)}{S_X(d)}$$

$$h_{Y^P}(y) = h_X(y+d)$$

Pour la v.a. Y^L *per-loss*[1],

$$f_{Y^L}(y) = f_X(y+d)$$

$$S_{Y^L}(y) = S_X(y+d)$$

$$F_{Y^L}(y) = F_X(y+d)$$

Espérance

$$\mathrm{E}\left[Y^L\right] = \mathrm{E}\left[(X-d)_+\right] = \mathrm{E}\left[X\right] - \mathrm{E}\left[X \wedge d\right] \tag{3.3}$$

$$\mathrm{E}\left[Y^P\right] = \frac{\mathrm{E}\left[(X-d)_+\right]}{S_X(d)} = \frac{\mathrm{E}\left[X\right] - \mathrm{E}\left[X \wedge d\right]}{S_X(d)} \tag{3.4}$$

Cette espérance s'appelle la prime *Stop-Loss*, et elle est définie par

$$\begin{aligned} E[Y] &= \mathrm{E}\left[(X-d)_+\right] \\ &= \int_d^{\infty} (x-d) f(x) dx \\ &= \underbrace{\int_d^{\infty} x f(x) dx}_{\text{Intégration par partie}} - d \int_d^{\infty} f(x) dx \\ &= -xS(x)\Bigg|_d^{\infty} + \int_d^{\infty} S(x) dx - sS(d) \\ &= 0 \cancel{+ S(d)} + \int_d^{\infty} S(x) dx \cancel{- S(d)} \\ &= \int_d^{\infty} S(x) dx \end{aligned}$$

1. Il est à noter que la fonction de Hazard n'est pas définie à 0.

3.2.2 Franchise deductible

Définitions

Lorsque la perte dépasse le déductible franchise de montant d, l'assureur assume l'entièreté des coûts[2]. Pour la v.a. Y^L, on a

$$Y^L = \begin{cases} 0 & , X \leq d \\ X & , X > d \end{cases}$$

Pour la v.a. Y^P,

$$Y^P = \begin{cases} \text{non-défini} & X \leq d \\ X & , X > d \end{cases} \tag{3.5}$$

Fonctions reliées

Les fonctions de la v.a. Y^L sont

$$f_{Y^L}(y) = \begin{cases} F_X(d) & , y = 0 \\ f_X(y) & , y > 0 \end{cases}$$

$$F_{Y^L}(y) = \begin{cases} F_X(d) & , 0 < y \leq d \\ F_X(y) & , y \geq d \end{cases}$$

$$S_{Y^L}(y) = \begin{cases} S_X(d) & , 0 < y \leq d \\ S_X(x) & , y > d \end{cases}$$

$$h_{Y^L}(y) = \begin{cases} h_X(d) & , 0 < y \leq d \\ h_X(x) & , y > d \end{cases}$$

Pour la fonction Y^P (*per-payment*),

$$f_{Y^P}(y) = \frac{f_X(d)}{S_X(d)}$$

2. On voit plus souvent ce type de déductible dans un contexte d'invalidité : si on est absent plus d'un certain nombre de jours du travail, on se fait rembourser toutes ses absences en salaire.

$$F_{Y^P}(y) = \begin{cases} F_X(d) & , y = 0 \\ F_X(d) & , 0 < y \leq d \\ \frac{F_X(y) - F_X(d)}{S_X(d)} & , y > d \end{cases}$$

$$S_{Y^P}(y) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq y \leq d \\ \frac{S_X(y)}{S_X(d)} & , y > d \end{cases}$$

$$h_{Y^P}(y) = \begin{cases} 0 & , 0 < y \leq d \\ h_X(y) & , y > d \end{cases}$$

Espérance

$$\mathrm{E}\left[Y^L\right] = \mathrm{E}\left[(X-d)_+^F\right] = \mathrm{E}[X] - \mathrm{E}[X \wedge d] + dS_X(d) \tag{3.6}$$

$$\mathrm{E}\left[Y^P\right] = \mathrm{E}\left[(X-d)_+^F\right] = \frac{\mathrm{E}[X] - \mathrm{E}[X \wedge d]}{S_X(d)} + d \tag{3.7}$$

3.3 Loss Elimination Ratio

Définition 3.3.1 Loss Eliminating Ratio

Le Loss Eliminating Ratio (LER), nous permet d'obtenir le pourcentage de perte qu'on ne paiera pas grâce au déductible d :

$$LER = \frac{\mathrm{E}[X] - \mathrm{E}[(X-d)_+]}{\mathrm{E}[X]}$$

Mais on sait que

$$\mathrm{E}[(X-d)_+] = \mathrm{E}[X] - \mathrm{E}[X \wedge d]$$

Alors,

$$LER = \frac{\mathrm{E}[X \wedge d]}{\mathrm{E}[X]} \tag{3.8}$$

Note sur l'inflation Il arrive en exercice qu'on nous demande de comparer ce ratio avec et sans inflation. Soit un contrat avec r % d'inflation. Alors, on peut trouver $\mathrm{E}\left[(X-d)_+\right]$ qui tient compte de cette inflation :

$$\mathrm{E}\left[(X-d)_+^I\right] = (1+r)\left(\mathrm{E}\left[X\right] - \mathrm{E}\left[X \wedge \frac{d}{1_r}\right]\right)$$

Démonstration.

$$\mathrm{E}\left[Y\right] = (1+r)\int_{\frac{d}{1+r}}^{\infty} x f_X(x)dx - d\int_{\frac{d}{1+r}}^{\infty} f_X(x)dx$$

En ajoutant un terme,

$$= \underbrace{(1+r)\int_0^{\frac{d}{1+r}} x f_X(x)dx + \int_{\frac{d}{1+r}}^{\infty} x f_X(x)dx}_{\mathrm{E}[X]} - \underbrace{\int_0^{\frac{d}{1+r}} x f_X(x)dx - \frac{d}{1+r}\int_{\frac{d}{1+r}}^{\infty} f_X(x)dx}_{\mathrm{E}\left[X\wedge\frac{d}{1+r}\right]}$$

$$= \mathrm{E}\left[X\right] - \mathrm{E}\left[X \wedge \frac{d}{1+r}\right]$$

□

3.4 Policy Limits

3.4.1 Définitions

Soit un contrat d'assurance où il est conclu que l'assureur débourse un maximum de u dans le montant de la perte. Ce type de modification au contrat créé une v.a. *censurée à droite*, i.e. le montant déboursé est maximisé à u. On définit Y comme étant

$$Y = \begin{cases} X & , X \leq u \\ u & , Y > u \end{cases} \tag{3.9}$$

3.4.2 Fonctions reliées

On peut déduire les fonctions reliées suivantes :

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(y) & , y < u \\ S_X(u) & , y = u \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X(y) & , y \leq u \\ 1 & , y > u \end{cases}$$

Note sur l'inflation Si on a r % d'inflation, alors

$$\mathrm{E}\left[X \wedge u\right] = (1+r)\mathrm{E}\left[X \wedge \frac{u}{1+r}\right]$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[Y\right] &= \int_0^{\frac{u}{1+r}} (1+r)x f_X(x)dx + u\int_{\frac{u}{1+r}}^{\infty} f_X(x)dx \\
&= (1+r)\int_0^{\frac{d}{1+r}} f f_X(x)dx + sS_X\left(\frac{u}{1+r}\right) \\
&= (1+r)\left(\int_0^{\frac{u}{1+r}} x f_X(x)dx + \frac{u}{1+r}S_X\left(\frac{u}{1+r}\right)\right) \\
&= (1+r)\mathrm{E}\left[X \wedge \frac{u}{1+r}\right]
\end{aligned}$$

$\square$

3.5 Coassurance, déductible et limites

Définitions

Le livre nous donne une fonction de perte qui englobe 4 éléments en même temps : l'inflation, les déductibles, la coassurance[3] et les limites de police.

3. Dans ce type de contrat, la compagnie paie une proportion α de la perte, et le $(1-\alpha)$ restant est assumé par le titulaire de la police.

Pour la v.a. Y^L,

$$Y^L = \begin{cases} 0 & , \ x < \frac{d}{1+r} \\ \alpha\Big((1+r)x - d\Big) & , \ \frac{d}{1+r} \leq x < \frac{u}{1+r} \\ \alpha(u-d) & , \ x \geq \frac{u}{1+r} \end{cases} \tag{3.10}$$

et pour Y^P,

$$Y^L = \begin{cases} \text{Non-défini} & , \ x < \frac{d}{1+r} \\ \alpha\Big((1+r)x - d\Big) & , \ \frac{d}{1+r} \leq x < \frac{u}{1+r} \\ \alpha(u-d) & , \ x \geq \frac{u}{1+r} \end{cases} \tag{3.11}$$

Espérance

$$\mathrm{E}\left[Y^L\right] = \alpha(1+r)\left(\mathrm{E}\left[X \wedge \frac{u}{1+r}\right] - \mathrm{E}\left[X \wedge \frac{d}{1+r}\right]\right) \tag{3.12}$$

$$\mathrm{E}\left[Y^P\right] = \frac{\mathrm{E}\left[Y^L\right]}{S_X\left(\frac{d}{1+r}\right)} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[Y\right] &= \int_{\frac{d}{1+r}}^{\frac{u}{1+r}} ((1+r)x - d) f_X(x) dx + \int_{\frac{u}{1+r}}^{\infty} (u-d) f_X(x) dx \\ &= (1+r)\left(\mathrm{E}\left[X \wedge \frac{u}{1+r}\right] - \mathrm{E}\left[X \wedge \frac{d}{1+r}\right]\right) \end{aligned}$$

3.6 Exercices recommandés

À compléter

Chapitre 4

Estimation de données complètes (11)

4.2 Estimation de données complètes

4.2.1 Estimation de la fonction de répartition empirique

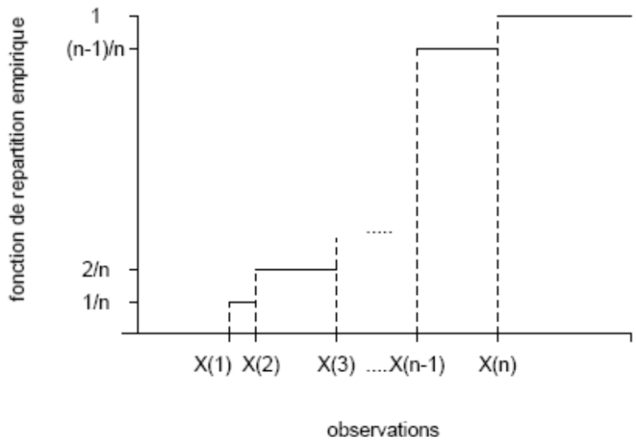
On cherche à estimer $F(t)$ ou $S(t)$, lorsque nos données sont complètes (i.e. $x_1, ..., x_n$ qui sont *iid*). Alors, l'estimateur non paramétrique pour $F(t)$:

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{x_i \leq t\}} \tag{4.1}$$

où $\mathbb{1}_{\{.\}}$ représente une fonction indicatrice.
$F_x(t)$ aura donc la forme suivante :

$$F_n(t) = \begin{cases} 0 & , t < x_{(1)} \\ \frac{1}{n} & , x_{(1)} \leq t < x_{(2)} \\ \frac{2}{n} & , x_{(2)} \leq t < x_{(3)} \\ ... & \\ 1 & , t \geq x_{(n)} \end{cases} \tag{4.2}$$

où $t \in [0, x_{(n)}]$.



Remarques

(1) Lorsque $F_n(t) \to F(t)$, alors

(2) Puisqu'on a

$$\sum_{i=1}^{n} 1_{[x_i \leq t]} \sim Bin(n, \Pr(X \leq t))$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[F_n(t)\right] &= \frac{1}{n} nF(t) \\
&= F(t) \quad \text{(C'est un estimateur sans biais)} \\
Var\left(F_n(t)\right) &= \frac{1}{n^2} nF(t)S(t) \\
&= \frac{F(t)S(t)}{n} \\
&\underset{n\to\infty}{=} 0
\end{aligned}$$

4.2.2 *Cumulative hazard-rate function*

On utilise cette fonctoin pour pouvoir réussir à estimer la fonction de densité et le *hazard rate* empirique. En effet, puisque la distribution empirique est discrète, on ne peut pas dériver $F_n(x)$ pour obtenir $f_n(x)$ et $h_n(x)$. La fonction de hazard cumulative se définit par

$$H_X(x) = -\ln S_X(x) \tag{4.3}$$

4.2.3 Notation à utiliser pour la distribution empirique

- $y_1 < y_2 < ... < y_k$: les k valeurs uniques qui apparaissent dans l'échantillon de n. **Note :** $k \leq n$.
- s_j : nombre de fois que l'observation y_j est observée dans l'échantillon. On a

$$\sum_{j=1}^{k} s_j = 1$$

- r_j : nombre d'observations qui sont plus grandes ou égales à y_j. On a

$$r_j = \sum_{i=j}^{k} s_i$$

- Avec cette nouvelle notation, on peut ré-écrire la fonction de répartition empirique :

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & , x < y \\ 1 - \frac{r_j}{n} & , y_{j-1} \leq x \leq y_j \quad j = 2, ..., k \\ 1 & , x \geq y_k \end{cases} \tag{4.4}$$

4.2.4 Estimateur de Nelson Åalen

Pour pouvoir estimer la *Cumulative hazard-rate function*, on doit utiliser un estimateur qui se base sur la notation utilisée à la sous-section précédente, soit le *Nelson Åalen estimate* :

$$\hat{H}(x) = \begin{cases} 0 & , x < y_1 \\ \sum_{i=1}^{j-1} \frac{s_i}{r_i} & , y_{j-1} \leq x \leq y_j \quad j = 2, ..., k \\ \sum_{i=1}^{k} \frac{s_i}{r_i} & , x \geq y_k \end{cases} \tag{4.5}$$

4.3 Distribution empirique avec données groupées

4.3.1 Fonction OGIVE

CETTE MATIÈRE NE SERA PAS TESTÉE À L'EXAMEN intra A2018

Dans certains contextes, on a n données qui sont groupées en intervalles. La fonction OGIVE permet d'interpoler entre 2 points c_{j-1} et c_j.

$$c_{j-1} \leq x \leq c_j$$
$$F_n(c_{j-1}) \leq F_n(x) \leq F_n(c_j)$$

On peut déterminer la valeur empirique de $F_n(x)$ aux bornes des classes, avec

$$F_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^{j} n_i}{n}$$

où n_i est le nombre d'observations qui sont entre c_{j-1} et c_j. Toutefois, pour les valeurs entre deux bornes $c_0 < c_1 < ... < c_k$, il faut approximer avec la fonction OGIVE ci-dessous :

$$F_n^{\text{OGIVE}}(x) = \frac{c_j - x}{c_j - c_{j-1}} F_n(c_j - 1) + \frac{x - c_{j-1}}{c_j - c_{j-1}} F_n(c_j) \tag{4.6}$$

Remarques

(1) Si $x = c_{j-1}$,

$$F_n(c_{j-1}) = F_n^{\text{OGIVE}}(c_{j-1})$$

(2) Si $x = c_j$,

$$F_n(c_j) = F_n^{\text{OGIVE}}(c_j)$$

(3) En dérivant (4.6), on obtient

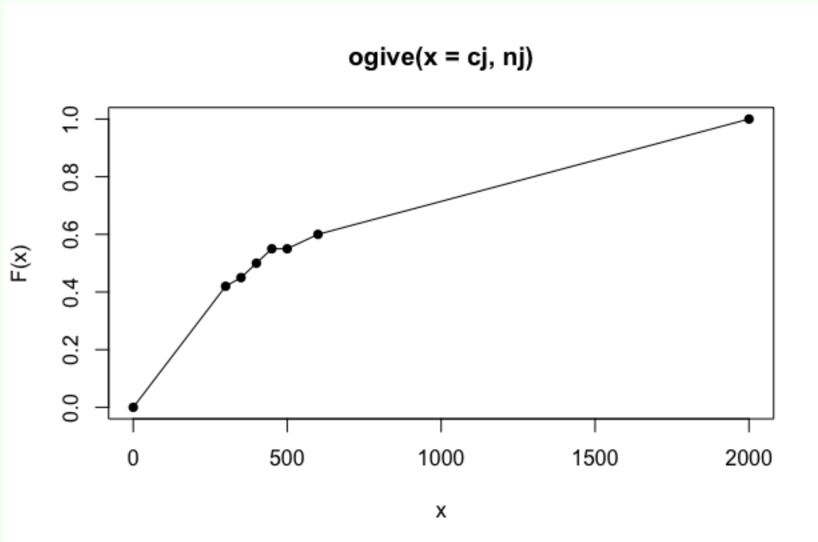
$$
\begin{aligned}
f_n(x) &= \frac{\partial}{\partial x} F_x(x) \\
&= \frac{1}{c_j - c_{j-1}} F_x(c_j) - \frac{1}{c_j - c_{j-1}} F_n(c_{j-1}) \\
&= \frac{F_n(c_j) - F_n(c_{j-1})}{c_j - c_{j-1}}
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

Exemple 4.3.1 Fonction R `ogive`

Du package actuar, on peut utiliser la fonction `ogive()` pour calculer les probabilités empiriques à des points précis de nos données lorsqu'elles sont groupées, mais aussi interpoler entre 2 valeurs :

```
## Fonction OGIVE du package actuar de Vincent Goulet
## Exemple numéro 5.2 du Loss Models
## page 68, 4e édition
library(actuar)

## On définit le vecteur cj des bornes et
## un vecteur nj des fréquences empiriques
# note : il faut forcer une borne supérieure
cj <- c(0, 300, 350, 400, 450, 500, 600, 2000)
nj <- c(42, 3, 5, 5, 0, 5, 40)

# On calcule la fonction ogive avec la fonction du même nom
Fn <- ogive(cj, nj)

y <- 500 / (1.1)^3
# On calcule la probabilité demandée
1 - Fn(y)
[1] 0.5243426

# On peut aussi faire un graphique de la
## fonction empirique OGIVE
plot(Fn)
```

Et on obtient le graphique suivant :



4.4 Exercices recommandés

À compléter

Chapitre 5

Estimation de données modifiées (12)

5.1 Point estimation

5.1.1 Définitions importante

Un vocabulaire spécifique aux données modifiées est utilisé, soit

Définition	*Terme anglais*	Explication
Tronquée à gauche	*left truncated at d*	si la valeur observée est plus basse dque d, elle n'est pas enregistrée
Tronquée à droite	*right truncated at u*	si la valeur observée est plus grande que u, elle n'est pas enregistrée
Censurée à gauche	*left censured at d*	si la valeur observée est plus basse que d, on indique d dans les données modifiées
Censurée à droite	*right censored at u*	si la valeur observée est plus grande que u, on indique u dans les données modifiées

Note : Il arrive aussi que les données soient *shifted at d*, ce qui veut dire qu'on soustrait d aux données (souvent en présence d'un déductible).

Notation

- $y_1 < y_2 < ... < y_k$: les k valeurs uniques qui apparaissent dans l'échantillon.
- x_j : la j^{e} données non-censurée qui apparait dans l'échantillon
- d_j : le montant auquel x_j est tronquée. Si il n'y a pas de troncage, alors $d_j = 0$.
- u_j : la j $^{\text{e}}$ données censurée qui apparait dans l'échantillon.
- r_j : nombre d'observations qui sont plus grandes ou égales à y_j (*risk set*)

$$r_j = \#\text{ of } x_i + \#\text{ of } u_i - (\#\text{ of } d_i \geq y_j)$$

- s_i : nombre de décès au temps i.

Estimateur de Kaplan-Meier

Cet estimateur est une version modifiée de l'estimateur de Nelson-Åalen vu à la section 4.2.4. Avec l'information des données et en utilisant la notation vue à la sous-section précédente, on peut estimer la fonction de survie empirique :

$$\hat{S}_n(t) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq t < y_1 \\ \prod_{i=1}^{j-1} \left(\frac{r_i - s_i}{r_i}\right) & , y_{j-1} \leq t < y_j \quad j = 2, ..., k \\ \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{r_i - s_i}{r_i}\right) & t \geq y_k \end{cases} \tag{5.1}$$

5.2 Espérance, Variance et et intervalle d'estimation

Contexte

On s'intéresse à l'espérance et la variance de la fonction de survie S_n, qui suite une binomiale (i.e. $S_n(x) \sim Bin(n, S(x))$. Si on connaissait $S(x)$, on pourrait facilement déduire l'espérance et la variance avec les formules qu'on connaît. Toutefois, puisqu'on cherche souvent à estimer $S(x)$, il faudra aussi estimer l'espérance et la variance.
Section à compléter

5.3 Exercices recommandés

À compléter

Deuxième partie

Matière pour l'examen final

Chapitre 6

Continuous models (5)

6.1 Multiplication par une constante

Soit X la v.a. représentant les pertes et θ un paramètre d'échelle (*scale parameter*). On peut définir la v.a. Y par

$$Y = \theta X$$

Alors,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \Pr(Y \leq y) \\ &= \Pr(\theta X \leq y) \\ &= \Pr\left(X \leq \frac{y}{\theta}\right) \\ &= F_X\left(\frac{y}{\theta}\right) \end{aligned} \tag{6.1}$$

Et on peut aussi trouver que

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{\partial}{\partial y} F_Y(y) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}\left\{F_X\left(\frac{y}{\theta}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{\theta} f_X\left(\frac{y}{\theta}\right) \end{aligned} \tag{6.2}$$

À noter Si on doit appliquer une transformation impliquant une puissance (*raising to a power*, voir section section 6.2), on applique cette dernière transformation avant d'appliquer le paramètre d'échelle θ.

6.2 Raising to a power

Soit X une v.a. représentant la perte avec une loi de probabilité quelquonque et la v.a. Y tel que

$$Y = X^{\frac{1}{\tau}}$$

avec $\tau > 0$. On peut trouver $F_Y(y)$ ainsi que $f_Y(y)$:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \Pr\left(Y \leq y\right) \\ &= \Pr\left(X^{\frac{1}{\tau}} \leq y\right) \\ &= \Pr\left(X \leq y^{\tau}\right) \\ &= F_X\left(y^{\tau}\right) \end{aligned} \tag{6.3}$$

et

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{\partial}{\partial y} F_y(y) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} F_X\left(y^{\tau}\right) \tau y^{\tau-1} f_X\left(y^{\tau}\right) \end{aligned} \tag{6.4}$$

Note On préfère toujours des paramètres positifs, donc on va ajuster les formules avec des constantes négatives dans certains cas.

Exemple 6.2.1 Notation dans le livre *Loss Models*

La notation utilisée par le livre est la suivante :

- si $\tau > 0$: *transformed*
- si $\tau = -1$: *inverse*
- si $\tau < 0$ et $\tau \neq 1$: *inverse-transformed*

6.3 Exponentiation

Soit X une v.a. représentant la perte. On définit Y comme

$$Y = \exp(X)$$

Alors, on trouve

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \Pr\left(Y \leq y\right) \\ &= \Pr\left(e^X \leq y\right) \\ &= \Pr\left(X \leq \ln y\right) \\ &= F_x(\ln y) \end{aligned} \tag{6.5}$$

et

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{\partial}{\partial y} F_Y(y) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}\left\{F_x(\ln y)\right\} \\ &= \frac{1}{y} f_X(\ln y) \end{aligned} \tag{6.6}$$

Note La loi Log-Normale est en fait une transformation exponentielle de la Loi Normale.

6.4 Lois mélanges

On peut créer des lois mélanges. En effet, il arrive qu'on ait une distribution dont l'un des paramètres est lui-même distribué aléatoirement selon une autre distribution, tel que

$$X|\Lambda \sim \text{une certaine loi}$$

$$\Lambda \sim \text{une autre loi (ou la même !)}$$

On peut trouver les fonctions de densité et de répartition de ces différentes lois :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|\Lambda}(x|\lambda) f_\Lambda(\lambda) d\lambda \tag{6.7}$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{X|\Lambda}(x|\lambda) f_\Lambda(\lambda) d\lambda \tag{6.8}$$

De plus, on peut trouver l'espérance et la variance de ces lois mélanges avec les théorèmes de l'espérance et la variance conditionnelle :

$$\mathrm{E}\left[X\right] = \mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left[X|\Lambda\right]\right] \tag{6.9}$$

$$Var(X) = \mathrm{E}\left[Var(X|\Lambda)\right] + Var\left(\mathrm{E}\left[X|\Lambda\right]\right) \tag{6.10}$$

6.5 Frailty models

Est sur le syllabus des examens professionnels, mais ne semble pas être à l'étude pour le cours IARD1 ...

Soit un paramètre $\Lambda > 0$ (*frailty random variable*) qu'on va utiliser pour trvouer la *hazard-rate* conditionnel $h_{X|\Lambda}$ tel que

$$h_{X|\Lambda}(x|\lambda) = \lambda a(x) \tag{6.11}$$

où $a(x)$ est une fonction quelquonque et la distribution de $\Lambda = \lambda$ est connu. Alors, on peut trouver la fonction de survie de $S_{X|\Lambda}(x|\lambda)$ avec des des propriétés que l'on connait :

$$\begin{aligned} S_{X|\Lambda}(x|\lambda) &= e^{-\int_0^x h_{X|\Lambda}(t|\lambda) dt} \\ &= e^{-\lambda A(x)} \\ &= M_\Lambda\left(-A(x)\right) \\ &= \mathcal{L}_\Lambda\left(A(x)\right) \end{aligned}$$

6.6 Splicing

Soit $X_1, ..., X_k$ les différentes distributions que peut prendre la v.a. X et α_i la probabilité que $X \sim X_i \quad , i = 1, 2, ..., k$. Pour $\sum_\alpha = 1$, on a donc

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha_1 f_1(x) & , c_0 < x < c_1 \\ \alpha_2 f_2(x) & , c_2 < x < c_2 \\ ... \\ \alpha_k f_1(k) & , c_{k-1} < x < c_k \end{cases}$$

Note Dans un problème, on peut soit demander de calculer la fonction de répartition à un certain point, ou encore nous demander de trouver les coefficients α_i en connaissant les différentes fonctions de répartition et les probabilités rattachées.

6.7 Exercices recommandés

Les exercices recommandés dans le *Loss Models, 4th edition* pour ce chapitre sont les suivants :

- 5.1 à 5.6
- 5.8 à 5.11
- 5.17 à 5.19

Chapitre 7

Modèle de perte aggrégée (9)

7.1 Modèle composé (fréquence-sévérité) pour les pertes aggrégées

On définit les variables aléatoires suivantes :

- S : Perte totale pour le portefeuille au complet ;
- N : Nombre de réclamations observées dans l'intervalle de temps. (**fréquence**) ;
- $X_1, ..., X_n$: Montant de perte relié à la i^{e} réclamation (**sévérité**). [1]

On a donc

$$S = X_1 + ...X_n$$

et on peut trouver diverses quantités, tel que la fonction de répartition :

$$F_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_X^{*n}(x) \Pr(N = n) \tag{7.1}$$

où $F_X^{*n} = \Pr(X_1 + ... + X_n \leq n)$.

On peut aussi obtenir la fonction gnératrice des moments :

$$\mathcal{M}_S(t) = \mathcal{P}_N(\mathcal{M}_X(t)) \tag{7.2}$$

1. Les X_i sont iid et indépendants de N.

L'espérance et la variance peuvent être obtenues avec les propriétés d'espérance et variance conditionnelle :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[S] &= \mathrm{E}[\mathrm{E}[S|N]] \\
&= \mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[X_i]\right] \\
&\overset{iid}{=} \mathrm{E}[N\mathrm{E}[X]] \\
&= \mathrm{E}[N]\,\mathrm{E}[X]
\end{aligned} \tag{7.3}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(S) &= \mathrm{Var}(\mathrm{E}[S|N]) + \mathrm{E}[\mathrm{Var}(S|N)] \\
&= \mathrm{Var}\left(\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]\right) + \mathrm{E}\left[\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right] \\
& \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[X_i]\right) + \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i)\right] \quad \text{, par indépendance des } X_i \\
&\overset{iid}{=} \mathrm{Var}(N\mathrm{E}[X]) + \mathrm{E}[N\mathrm{Var}(X)] \\
&= \mathrm{E}[X]^2\,\mathrm{Var}(N) + \mathrm{E}[N]\,\mathrm{Var}(X)
\end{aligned} \tag{7.4}$$

7.2 Exercices recommandés

Les exercices recommandés dans le *Loss Models, 4^{th} edition* pour ce chapitre sont les suivants :

- 9.34 et 9.36

Chapitre 8

Frequentist estimation (13)

8.1 Méthode des moments

On cherche à estimer les paramètres de la distribution de nos données, sachant que la distribution suit une loi quelconque.

Si on a p paramètres à estimer, alors il faudra calculer les p premiers moments empiriques de la distribution, soit

$$\hat{\mu}'_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k \tag{8.1}$$

Puis d'utiliser cette quantité empirique pour résoudre le système d'équation à p inconnus tel que $\hat{\mu'_k} = \mu'_k$.

8.2 Méthode des percentiles

Pour un rappel sur les percentiles, voir la section 2.4. Cette méthode est appelée en anglais *percentile matching estimate.*

Un peu comme la méthode des moments, on utilise une quantité qu'on peut calculer empiriquement, soit la fonction de répartition empirique, pour pouvoir résoudre le système d'équations à p variables tel que

$$F_n(\hat{\pi}_{g_i}) = g_i$$

où

- $\hat{\pi}_{g_i} = F_n^{-1}(g_i)$, $i = 1, ..., p$
- F_n : la fonction de répartition empirique [1]
- p : nombre de paramètres de la distribution à estimer.

8.2.1 Smoothed empirical estimate

Il arrive parfois que le percentile arrive entre 2 *marche* de la fonction de répartition empirique. Dans cette situation, $\hat{\pi}_g$ doit être approximé de façon linéaire avec les statistiques d'ordre :

$$\hat{\pi}_g = (1-h)X_{(j)} + hX_{(j+1)} \tag{8.2}$$

où

- $j = \lfloor (n+1)g \rfloor$ et $h = (n+1)g - j$
- $X_{(j)}$ la j^{e} statistique d'ordre de l'échantillon empirique X.

8.3 Méthode du maximum de vraisemblance

8.3.1 Données complètes

aussi appelé *Maximum log-likelihood estimator (MLE)*. On cherche à estimer le paramètre $\hat{\theta}$ en maximisant la fonction de vraisemblance [2].

Définition 8.3.1 Fonction de vraisemblance

La fonction de vraisemblance $L(\theta|x)$ est la probabilité d'obtenir un échantillon $x_1, ..., x_n$ d'une distribution $f_X(x)$ ayant le vecteur de paramètres θ. Alors,

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i; \theta) \tag{8.3}$$

On peut aussi trouver la fonction de log-vraisemblance $\ell(\theta)$ (qui est souvent plus facile à dériver) :

$$\ell(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln f_X(x_i; \theta) \tag{8.4}$$

1. L'estimation de la fonction de répartition empirique est couvert au chapitre 4.
2. Il arrive parfois que la seule façon de trouver le paramètre qui maximise $L(\theta)$ est en utilisant des méthodes numériques

Estimation du paramètre θ On détermine l'estimateur du maximum de vraisemblance (*MLE* en anglais)[3] tel qu'on maximise l'Équation 8.3. Intuitivement, on va donc trouver le paramètre θ tel que

$$\frac{\partial}{\partial\theta}L(\theta) = 0$$

Puisque la fonction de vraisemblance peut parfois être difficile à dériver, on utilise souvent la fonction de log-vraisemblance (Équation 8.4) :

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ell(\theta) = 0$$

Estimation du vecteur de paramètres $\boldsymbol{\theta}$ Si on doit estimer plusieurs paramètres pour la fonction f_X, on procède de la même façon, en dérivant partiellement la fonction de vraisemblance (ou log-vraisemblance) par rapport à chacun des paramètres et en posant ces dérivées égales à 0.

8.3.2 Données groupées

Lorsque les données sont groupées dans les intervalles $c_0 < c_1 < ... < c_k$, la fonction de vraisemblance $L(\theta)$ est différente. $X \sim Multinomiale(\mathbf{n}, \mathbf{p})$. Alors,

$$L(\theta) = \Pr(n_1, n_2, ..., n_k; \theta) = \binom{n}{n_1, ..., n_k} p_1^{n_1} ... p_k^{n_k} \tag{8.5}$$

Dans le contexte de données groupées, on a que $p_j = \Pr(X_j \in (c_{j-1}, c_j))$. Donc, la fonction de vraisemblance est

$$L(\theta) = \prod_{j=1}^{n} (F_X(c_j|\theta) - F_X(c_{j-1}|\theta))^{n_j}$$

Et la fonction de log-vraisemblance (en enlevant la constante combinatoire) est donc

$$\ell(\theta) = \sum_{j=1}^{k} n_j \ln(F_X(c_j; \theta) - F_X(c_{j-1}; \theta)) \tag{8.6}$$

3. L'abbréviation en français est MVE, mais on utilise surtout *MLE* pour Maximum likelihood estimator.

8.3.3 Données censurées

Si une donnée est censurée, on l'interprète comme une donnée groupée dont l'intervalle va jusqu'à ∞. On remplace $f_X(x_j)$ par $1 - F_X(x_j)$.

8.3.4 Données tronquées

Si une donnée est tronquée, on a 2 options :

1. On soustrait de chacune des observations le point de troncation d ;
2. **(Méthode plus souvent utilisée)** : On conditionne pour que les données sous le point de troncation d ne soient pas considérées, i.e. on remplace $f(x_j|\theta)$ par $\frac{f(x_j|\theta)}{1-F(d)}$.

8.4 Calcul de la variance et intervalle de confiance

Définition 8.4.1 Information de Fisher

$$I(\theta) = -n\mathrm{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln f_X(x;\theta)\right] = n\mathrm{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f_X(x;\theta)\right)^2\right] \tag{8.7}$$

Il existe une autre version (plus générale) :

$$I(\theta) = -\mathrm{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ell(\theta)\right] = \mathrm{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ell(\theta)\right)^2\right] \tag{8.8}$$

On peut estimer la variance des estimateurs avec

$$\hat{\mathrm{Var}}(\hat{\theta}) = I(\hat{\theta})^{-1} \tag{8.9}$$

8.4.1 Méthode delta

On peut approximer la variance d'une fonction $g(\alpha, \theta)$ avec la formule suivante :

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(g(\alpha,\theta)) = \operatorname{Var}(\alpha)\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}g(\alpha,\theta)\right)^2 + \operatorname{Var}(\theta)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}g(\alpha,\theta)\right)^2 \\ + 2\operatorname{Cov}(\alpha,\theta)\frac{\partial}{\partial\alpha}g(\alpha,\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}g(\alpha,\theta)\end{aligned} \tag{8.10}$$

8.5 Exercices recommandés

Les exercices recommandés dans le *Loss Models, 4th edition* pour ce chapitre sont les suivants :

- Méthode des moments et percentiles : 13.1 à 13.22
- *MLE* : 13.30, 13.32, 13.33, 13.37, 13.38 à 13.40, 13.45 à 13.51 et 13.54 à 13.57
- Variance et intervalle de confiance : 13.62 à 13.72
- Non-normal confidence interval : 13.74

Chapitre 9

Estimation Bayésienne (15)

9.1 Définition de l'estimateur Bayésien

Définition 9.1.1 Distribution *a priori*

Soit un paramètre θ d'une distribution quelconque. Afin de réaliser une estimation Bayésienne, on connaît *a priori* la distribution que prend le paramètre θ, qu'on dénote par $\pi(\theta)$.

Alors, notre distribution des pertes est conditionné par rapport à la valeur que θ prend (i.e. $f_{X|\Theta}$).

Définition 9.1.2 Distribution *a posteriori*

La distribution *a posteriori* nous permet de savoir avec quelle probabilité non-nulle notre paramètre θ peut prendre une certaine valeur, sachant qu'on a observé certains x, qu'on dénote comme $\pi_{\Theta|X}(\theta|x)$:

$$\pi_{\Theta|X}(\theta|x) = \frac{f_{\Theta,X}(\theta, x)}{f_X(x)} = \frac{f_{X|\Theta}(x|\theta)\pi(\theta)}{\int f_{X|\Theta}(x|\theta)\pi(\theta)d\theta} \tag{9.1}$$

L'idée est de remplacer les différentes distributions dans l'Équation 9.1, et en déduire une distribution avec une paramétrisation différente [a].

[a]. Souvent, la distribution *a posteriori* aura la même distribution que celle *a priori*, mais avec des paramètres différents.

L'estimateur Bayésien L'estimateur Bayésien est défini comme l'espérance du paramètre θ, sachant la distribution de X. En d'autres mots, on veut l'espérance de la distribution *a posteriori* :

$$\hat{\theta}_{BAYES} = \mathrm{E}\left[\Theta|X\right] \tag{9.2}$$

Propriétés de l'estimateur Voici quelques propriétés importantes de l'estimateur :

- $\hat{\theta}_{BAYES}$ est biaisé (comparativement à l'estimateur MLE qui est non-biaisé) ;
- Par contre, l'estimateur Bayésien a une plus petite variance que l'estimateur MLE. On sacrifie donc le Biais pour diminuer la variance de l'estimateur ;
- **Remarque** : Si n est grand, il peut être préférable d'utiliser l'estimateur MLE.

9.1.1 Estimation par simulation

Une fois qu'on a développé et trouver la distribution *a posteriori* de$\Theta|X$ (Équation 9.1), alors on peut facilement simuler l'estimateur Bayésien :

1.

Exemple 9.1.1 Exemple avec la Loi de Poisson

Soit $X|\Lambda \sim Pois(\Lambda)$ et $\Lambda \sim \Gamma(\alpha, \theta)$. Alors, on a la distribution *a priori* suivante :

$$\Lambda \sim \pi(\lambda) = \frac{\lambda^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}} e^{-\lambda/\theta}$$

Évidemment, on va s'attendre à ce que la distribution *a posteriori* obéisse à une loi Gamma aussi. On a (avec $c(x)$ une constante) :

$$\begin{aligned}\pi_{\Lambda|X}(\lambda|x) &= c(x)\frac{\lambda^{\alpha-1}e^{-\lambda/\theta}}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}}\frac{\lambda^{\alpha}e^{-\lambda}}{x!} \\ &= k(x)\lambda^{x+\alpha-1}e^{-\lambda\left(\frac{1}{\theta}+\lambda\right)}\end{aligned}$$

avec $c(x)$ et $k(x)$ des constantes uniquement fonction de x.

On trouve donc que $\pi_{\Lambda|X}(\lambda|x) \sim \Gamma\left(\alpha' = x+\alpha, \beta' = \left(\frac{1}{\theta}+1\right)^{-1}\right)$
Puisque l'estimateur Bayésien est l'espérance de la distribution *a posteriori*, on a

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_{BAYES} &= \mathrm{E}\left[\Lambda|X\right] \\ &= \int \lambda \cdot \pi_{\Lambda|X}(\lambda|x)d\lambda \\ &= \alpha'\beta' \\ &= (x+\alpha)\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)\end{aligned}$$

Exemple 9.1.2 Cas plus général ...

On a le modèle suivant pour X, tel que

$$f_{X_1,...,X_n|\Lambda}(x_1,...,x_n|\lambda) = \frac{\lambda^{x_1}e^{-\lambda}}{x_1!}...\frac{\lambda^{x_n}e^{-\lambda}}{x_n!}$$

Ainsi que la distriution *a priori* telle que

$$\Lambda \sim \pi(\lambda) = \frac{\lambda^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}}e^{-\lambda/\theta}$$

Alors, la distribution *a posteriori* est donc

$$\begin{aligned}f_{\Lambda|X}(\lambda|x) &= c(x)\frac{\lambda^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}}e^{-\lambda/\theta} \cdot \frac{\lambda^{x_1}e^{-\lambda}}{x_1!}...\frac{\lambda^{x_n}e^{-\lambda}}{x_n!} \\ &= k(x)\lambda^{\sum x_i+\alpha-1}e^{-\lambda/\theta}e^{-n\lambda} \\ &= k(x)\lambda^{\sum x_i+\alpha-1}e^{-\lambda\left(\frac{1}{\theta}+n\right)}\end{aligned}$$

On déduit donc que la distribution *a posteriori* obéit à une loi Gamma de paramètres $\alpha' = \sum x_1 + \alpha$ et $\beta' = \left(\frac{1}{\theta}+n\right)^{-1} = \frac{\theta}{1+n\theta}$. Alors, on déduit facilement l'estimateur Bayésien :

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}_{BAYES} &= \alpha'\beta' \\
&= \frac{\theta\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \alpha\right)}{1+n\theta} \\
&= \frac{n\theta}{1+n\theta}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right) + \frac{1}{1+n\theta}(\alpha\theta) \\
&= \frac{n\theta}{1+n\theta}\hat{\lambda}_{MLE} + \frac{1}{1+n\theta}\qquad\underbrace{(\alpha\theta)}_{\text{Moy. distr. } a\ priori}
\end{aligned}$$

Remarque On peut donc voir l'estimateur Bayésien comme une moyenne pondérée entre l'estimateur du maximum de vraisemblance et la moyenne de la distribution *a priori*. Lorsque $n \to \infty$, l'estimateur Bayésien sera semblable à l'EMV.

Exemple 9.1.3 Exemple avec la loi Normale

On prend le modèle $Y|\Theta = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \sim N\left(\theta, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, avec σ^2 connu. La densité *a priori* obéit aussi à une loi normale, telle que $\Theta \sim N(\theta_0, \sigma_0^2)$, où θ_0, σ_0^2 sont connus. On va donc s'attendre à avoir une distribution *a posteriori* qui va suivre une loi normale aussi. Alors, la distribution *a posteriori* $\pi_{\Theta|X}(\theta|x)$ peut être trouvée :

$$\pi_{\Theta|X}(\theta|x) = c(y)e^{\frac{-(y-\theta)^2}{2(\sigma^2/n)}}e^{\frac{-(\theta-\theta_0)^2}{2(\sigma_0^2}}$$

On va essayer de jumeler les 2 exposants des e, pour retrouver une certaine forme de la loi normale :

$$\frac{(y-\theta)^2}{2(\sigma^2/n)} + \frac{(\theta-\theta_0)^2}{2(\sigma_0^2} = \frac{\sigma_0^2(y-\theta)^2 + \frac{\sigma^2}{n}(\theta-\theta_0)^2}{2\frac{\sigma^2}{n}\sigma_0^2}$$

Si on développe les termes séparément :

$$\sigma_0^2(y-\theta)^2 = \sigma_0^2(y^2+\theta^2-2\theta y)$$

et

$$\frac{\sigma^2}{n}(\theta-\theta_0)^2 = \frac{\sigma^2}{n}(\theta^2+\theta_0^2-2\cdot\theta\cdot\theta_0)$$

Alors,

$$\sigma_0^2(y-\theta)^2 + \frac{\sigma^2}{n}(\theta-\theta_0)^2 = \left(\sigma_0^2+\frac{\sigma^2}{n}\right)\theta^2 - 2\left(y\sigma_0^2+\theta_0\frac{\sigma^2}{n}\right)\theta$$

Alors, la distribution *a posteriori* peut être ré-écrite comme

$$\pi_{\Theta|X}(\theta|x) = k(y)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\theta^2 - 2(\frac{y\sigma_0^2+\theta_0\frac{\sigma^2}{n}}{\sigma^2+\frac{\sigma^2}{n}}\right)\theta/\frac{\frac{\sigma^2}{n}\sigma_0^2}{\sigma_0^2+\frac{\sigma^2}{n}}\right\}$$

Si on manipule le numérateur, on trouve

$$\pi_{\Theta|X}(\theta|x) = k(y)\exp\left\{-\frac{1}{2\gamma}\left(\theta - \frac{y\sigma_0^2+\theta_0\frac{\sigma^2}{n}}{\sigma_0^2+\frac{\sigma-2}{n}}\right)^2\right\}$$

Donc

$$\pi_{\Theta|X}(\theta|x) \sim N(\mu',\sigma'=\gamma)$$

où $\mu' = \frac{y\sigma_0^2+\theta_0\frac{\sigma^2}{n}}{\sigma_0^2+\frac{\sigma^2}{n}}$. On peut aussi le ré-écrire (aussi appelé estimateur de crédibilité, sera vu en IARD2) :

$$\hat{\theta}_{BAYES} = \left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2+\frac{\sigma^2}{n}}\right)\bar{x} + \left(\frac{\sigma^2/n}{\sigma_0^2+\frac{\sigma^2}{n}}\right)\theta_0$$

9.2 Exercices recommandés

Les exercices recommandés dans le *Loss Models, 4th edition* pour ce chapitre sont les suivants :

- 15.14 a 15.18,15.21 a 15.27

.