Mathématiques actuarielles IARD-1
ACT-2005
Notes de cours

Gabriel Crépeault-Cauchon
Nicholas Langevin

25 septembre 2018

Table des matières

Résumé

Ce document résume les notes de cours prises en classe dans le cours de Mathématiques actuarielles IARD-1, ainsi que des notions prises du livre *LOSS MODELS - From Data to Decisions, 4th edition*.

Chapitre 1

Rappel sur les notions de probabilité et statistiques

1.1 Quantités à savoir

Raw moments On représente le k^{e} moment par μ_k', soit

$$\mu_k' = E\left[X^k\right] \tag{1.1}$$

Moments centraux Le k^{e} moment central est représenté par

$$\mu_k = E\left[(X-\mu)^k\right] \tag{1.2}$$

Exemple 1.1.1 Quelques exemples de moments centraux

La variance est le 2^{e} moment central :

$$Var(X) = \mu_2 = E\left[(X-\mu)^2\right]$$

Le 3^{e} moment centré, qui est utilisé pour calculer le coefficient d'asymétrie :

$$\mu_3 = E\left[(X-\mu)^3\right]$$

Coefficient d'asymétrie Le coefficient d'asymétrie, aussi appelé *skewness*, est représentée par

$$S_k = \frac{\mu_3}{\sigma^2} \tag{1.3}$$

Soit le 3ᵉ moment standarisé. Si $S_k = 0$, alors la distribution tend vers une loi normale.

Coefficient d'applatissement Le coefficient d'applatissement, aussi appelé *Kurtosis*, se définit par

$$\text{Kurtosis} = \frac{\mu_4}{\sigma^4} \tag{1.4}$$

Cette quantité permet de mesurer l'épaisseur de l'aile (*tail*) de la distribution. Si $E\left[z^4\right] = 3$, alors la distribution tend vers une loi normale $N(\mu, \sigma^2)$.

1.2 La loi normale

La fonction génératrice des moments

$$\begin{aligned} M_x(t) &= M_x(0) + \frac{M_x' t}{1!} + \frac{M_x'' t^2}{2!} + \ldots + \frac{M_x^{(n)t^n}}{n!} \\ &= 1 + \frac{E[x]t}{1!} + \frac{E[x^2]t^2}{2!} + \ldots + \frac{E[x^n]t^n}{n!} \end{aligned}$$

On pose : $c_k = \frac{E[x^n]}{n!}$ alors,

$$E[x^k] = C_k k! \tag{1.5}$$

1.3 Queue de distribution

1. Sois $f_1(x)$ une fonction tels que les 3 premiers moment existe : $E[x^4] = \infty$
2. Sois $f_2(x)$ une fonction tels que les 2 premiers moment existe : $E[x^2] = \infty$

Alors,

$$\lim_{x \to \infty} r(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \begin{cases} \infty, \, f_1(x) \text{a une aile plus lourde que} f_2(x) \\ 0, \, f_2(x) \text{a une aile plus lourde que} f_1(x) \end{cases}$$

Exemple 1.3.1

Sois $f_{x_1}(x_1) \sim pareto(\alpha, \theta)$ et $f_{x_2}(x_2) \sim gamma(\alpha, \lambda)$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} r(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{f_{x_1}(x_1)}{f_{x_2}(x_2)} \\
&= \frac{\frac{\alpha\theta^\alpha}{(x+\theta)^{\alpha+1}}}{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}} \\
&= C\frac{e^{-\lambda x}}{x^{\alpha-1}(x+\theta)^{\alpha+1}} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

La pareto a une queue plus lourde que la gamma

La fonction de hasard

$$h(x) = \frac{f(x)}{s(x)} \tag{1.6}$$

Si à partir de M, $h(x)$ est décroissante $\Leftrightarrow$ $f(x)$ décroit trop lentement, alors $f(x)$ à une aile lourde.

Chapitre 2

Types de contrats et primes

Section 8.1 à 8.5 dans le livre

Rappels d : montant du déductible
$X \sim \frac{f(x)}{S(d)}$, $f(X|X > d)$

$$\begin{aligned} Y &= g(X) \quad , X \sim f(x) \\ Y^p &= g(X) \quad , X \sim \frac{f(x)}{S(d)} \end{aligned}$$

Il va avoir

2.1 Contrat avec limite

On analyse la fonction de perte d'un contrat avec une limite supérieure u. Alors, on définit Y comme

$$\begin{aligned} Y &= (X \wedge u) \\ &= \min(X, u) \\ &= \begin{cases} x & , x \leq u \\ u & , x > u \end{cases} \end{aligned}$$

Aussi,

$$
\begin{aligned}
E[Y] &= E[\min(X,u)] \\
&= \int_0^u x f_X(x)dx + u\int_u^\infty f_X(x)dx \\
&= \int_0^u x f_X(x)dx + uS(u)
\end{aligned}
$$

2.1.1 Cas avec inflation

On a vu le contrat avec perte limitée, mais sans parler d'inflation. Supposons qu'on a le scénario <u>avec inflation</u>, où $X' = (1+r)X$ et r représente le taux d'inflation appliqué au montant de perte. Alors, il faut ajuster u pour tenir compte de l'inflation.

$$
\begin{aligned}
Y &= \begin{cases} (1+r)X & ,(1+r)X \le u \\ u & ,(1+r)X > u \end{cases} \\
&= \begin{cases} (1+r)X & ,x \le \frac{u}{1+r} \\ u & ,x > \frac{u}{1+r} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Définition 2.1.1 Prime Limited Loss sous l'inflation

$$
E\left[X' \wedge u\right] = (1+r)E\left[X \wedge \frac{u}{1+r}\right] \tag{2.1}
$$

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
E[Y] &= \int_0^{\frac{u}{1+r}} (1+r)xf_X(x)dx + u\int_{\frac{u}{1+r}}^{\infty} f_X(x)dx \\
&= (1+r)\int_0^{\frac{d}{1+r}} ff_X(x)dx + sS_X\left(\frac{u}{1+r}\right) \\
&= (1+r)\left(\int_0^{\frac{u}{1+r}} xf_X(x)dx + \frac{u}{1+r}S_X\left(\frac{u}{1+r}\right)\right) \\
&= (1+r)E\left[X \wedge \frac{u}{1+r}\right]
\end{aligned}
$$

□

2.2 Contrat avec déductible ordinaire

Soit un contrat avec perte X, où on paie 0 si $X \leq d$ et $X-d$ si $X > d$, où d est le déductible ordinaire. Alors,

$$
\begin{aligned}
&Y = (X-d)_+ \\
&Y = \max(X-d, 0) \\
&Y = \begin{cases} 0 & , X \leq d \\ X-d & , X > d \end{cases}
\end{aligned}
$$

2.2.1 Remarques

(1) X est une variable aléatoire continue

(2) mais Y est une variable aléatoire mixte, car

$$
\Pr(Y=y) = \begin{cases} F_X(d) & , y = 0 \\ f_X(y+d) & , y > 0 \end{cases}
$$

(3) La fonction de répartition de Y est définie par

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X(d) & , y = 0 \\ F_X(d) + \int_0^y f_X(u+d)du & \\ \cancel{F_X(d)} + F_X(y+d) \cancel{- F_X(d)} & \\ F_X(y_d) & y > 0 \end{cases}$$

(4) les fonctions de survie $S(y)$ et fonction de hasard $h(y)$ sont définies par

$$S_Y(y) = 1 - F_Y(y)$$
$$h(y) = \frac{f_Y(y)}{S_Y(y)}$$

(5) LA prime de ce contrat est appelée la prime *stop-loss*, qui représente l'espérance de ce contrat.

2.2.2 Prime Stop-Loss

On veut calculer l'espérance du contrat avec déductible ordinaire :

$$\begin{aligned} E[Y] &= E\left[(X-d)_+\right] \\ &= \int_d^\infty (x-d)f(x)dx \\ &= \underbrace{\int_d^\infty xf(x)dx}_{\text{Intégration par partie}} \; -d\int_d^\infty f(x)dx \\ &= -xS(x)\Big|_d^\infty + \int_d^\infty S(x)dx - sS(d) \\ &= 0 \cancel{+S(d)} + \int_d^\infty S(x)dx \cancel{-S(d)} \\ &= \int_d^\infty S(x)dx \end{aligned}$$

Définition 2.2.1 Prime Stop-Loss

On peut définir la prime Stop-Loss comme

$$E\left[(X-d)_+\right] = E\left[X\right] - E\left[X \wedge d\right] \tag{2.2}$$

Démonstration. On sait que (à compléter) □

2.2.3 Cas avec inflation

$$Y = \begin{cases} 0 & ,X' \leq d \\ X'-d & ,d' > d \end{cases}$$

où $X' = (1+r)X$. On peut travailler seulement avec le X initial :

$$Y = \begin{cases} 0 & ,x \leq \frac{d}{1+r} \\ (1+r)X-d & ,x > \frac{d}{1+r} \end{cases}$$

Et la prime *Stop-Loss*,

$$\begin{aligned} E\left[Y\right] &= \int_{\frac{d}{1+r}}^{\infty} ((1+r)x-d) f_X(x)dx \\ &= (1+r)\int_{\frac{d}{1+r}}^{\infty} x f_X(x)dx - \frac{d}{1+r}\int_{\frac{d}{1+r}}^{\infty} f_X(x)dx \end{aligned}$$

Définition 2.2.2 Prime Stop-Loss sous le scénario d'inflation

$$E\left[(X'-d)_+\right] = (1+r)\left(E\left[X\right] - E\left[X \wedge \frac{d}{1+r}\right]\right) \tag{2.3}$$

Démonstration.

$$E\left[Y\right] = (1+r)\int_{\frac{d}{1+r}}^{\infty} x f_X(x)dx - d\int_{\frac{d}{1+r}}^{\infty} f_X(x)dx$$

En ajoutant un terme,

$$= \underbrace{(1+r)\int_0^{\frac{d}{1+r}} xf_X(x)dx + \int_{\frac{d}{1+r}}^{\infty} xf_X(x)dx}_{E[X]} - \underbrace{\int_0^{\frac{d}{1+r}} xf_X(x)dx - \frac{d}{1+r}\int_{\frac{d}{1+r}}^{\infty} f_X(x)dx}_{E\left[X\wedge\frac{d}{1+r}\right]}$$

$$= E[X] - E\left[X \wedge \frac{d}{1+r}\right]$$

□

2.3 Mean Excess Loss

Le Mean Excess Loss représente la perte excédentaire à d, sachant que $X > d$. Mathématiquement,

$$Y = \begin{cases} 0 & ,x \leq d \\ X - d & ,x > d \end{cases}$$

où $X \sim \frac{f(x)}{S(d)}, x \geq d$.

2.3.1 Remarques

(1) La fonction de densité de Y est représentée par

$$\Pr\left(Y^P = y\right) = \left\{ \frac{f_X(y+d)}{S(d)} \quad ,y > 0 \right.$$

(2) Y est une v.a. continue

(3) les fonctions de survie et de hasard sont, respectivement :

$$h(y) = \frac{f_Y(y_d)}{S_Y(y+d)}$$

$$S(y) = \frac{S_X(y+d)}{S(d)}$$

(4) l'espérance de la v.a. Y^P [1] (mean excess loss) est définie par

$$\begin{aligned} e(d) &= E\left[Y^P\right] \\ &= E\left[X-d|X>d\right] \\ &= \int_d^\infty (x-d)\frac{f(x)}{S(d)}dx \end{aligned}$$

On note donc

$$e(d)S(d) = \underbrace{\int_d^\infty (x-d)f(x)dx}_{\text{Prime Stop-Loss}} \tag{2.4}$$

Définition 2.3.1 Loss Eliminating Ratio

Le Loss Eliminating Ratio (LER), nous permet d'obtenir le pourcentage de perte qu'on ne paiera pas grâce au déductible d :

$$ELR = \frac{E\left[X\right]-E\left[(X-d)_+\right]}{E\left[X\right]}$$

Mais on sait que

$$E\left[(X-d)_+\right] = E\left[X\right]-E\left[X\wedge d\right]$$

Alors,

$$ELR = \frac{E\left[X\wedge d\right]}{E\left[X\right]} \tag{2.5}$$

2.4 Contrat avec Déductible franchise

Soit Y le contrat qui a un déductible franchise. Dans ce type de contrat, on va payer l'intégralité de la perte, lorsque celle-ci dépassera un déductible. Mathéma-

1. Le P en exposant signifie *per pay*, qui indique que Y est conditionnée sur X.

tiquement,

$$Y = \begin{cases} 0 & ,X \leq d \\ X & ,X > d \end{cases}$$

Caractéristiques

(1) La fonction de densité est définie par

$$f_Y(y) = \begin{cases} F_X(d) & ,y = 0 \\ f_X(y) & ,y > 0 \end{cases}$$

(2) La fonction de répartition de ce contrat est

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X(d) & ,y = 0 \\ F_X(d) & ,0 < y \leq d \\ \frac{F_X(y)-F_X(d)}{S_X(d)} & ,y > d \end{cases}$$

2.5 Contrat avec déductible ordinaire et limite sous l'inflation

On peut combiner les contrats vu plus tôt, comme c'est le cas ici : ce contrat prévoit un déductible ordinaire d ainsi qu'une limite au contrat u. De plus, on s'intéresse au scénario sous l'inflation.Alors,

$$Y = \begin{cases} 0 & ,X \leq \frac{d}{1+r} \\ (1+r)X - d & ,\frac{d}{1+r} \leq X \leq \frac{u}{1+r} \\ u = d & ,X > \frac{u}{1+r} \end{cases}$$

Et l'espérance est

Définition 2.5.1 Prime d'un contrat avec déductible d et limite u

$$E[Y] = (1+r)\left(E\left[X \wedge \frac{u}{1+r}\right] - E\left[X \wedge \frac{d}{1+r}\right]\right) \tag{2.6}$$

Démonstration. On va utiliser $Y = Y_1 - Y_2$ pour prouver (2.6). On définit Y_1 et Y_2 :

$$Y_1 = \begin{cases} 0 & ,X \leq \frac{d}{1+r} \\ (1+r)X - d & ,X > \frac{d}{1+r} \end{cases}$$
$$Y_2 = \begin{cases} 0 & ,X \leq \frac{u}{1+r} \\ (1+r)X - u & ,X > \frac{u}{1+r} \end{cases}$$

On connait leur espérance respective,

$$\begin{aligned} E\left[Y_1\right] &= (1+r)\left(E\left[X\right] - E\left[X \wedge \frac{d}{1+r}\right]\right) \\ E\left[Y_2\right] &= (1+r)\left(E\left[X\right] - E\left[X \wedge \frac{u}{1+r}\right]\right) \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} E\left[Y\right] &= E\left[Y_1\right] - E\left[Y_2\right] \\ &= (1+r)\left(E\left[X \wedge \frac{u}{1+r}\right] - E\left[X \wedge \frac{d}{1+r}\right]\right) \end{aligned}$$

□

$$\begin{aligned} E\left[Y\right] &= \int_{\frac{d}{1+r}}^{\frac{u}{1+r}} ((1+r)x - d) f_X(x) dx + \int_{\frac{u}{1+r}}^{\infty} (u-d) f_X(x) dx \\ &= (1+r)\left(E\left[X \wedge \frac{u}{1+r}\right] - E\left[X \wedge \frac{d}{1+r}\right]\right) \end{aligned}$$

2.6 Co-assurance

Soit α le pourcentage de co-assurance.

$$Y = \begin{cases} 0 & ,X \leq d \\ X - d & ,X > d \end{cases}$$

$$Y^C = \begin{cases} 0 & ,X \leq d \\ \alpha(X-d) & ,X > d \end{cases}$$

Alors,

$$E\left[Y^C\right] = \alpha E\left[Y\right] \tag{2.7}$$