

Mathématiques actuarielles IARD-1  
ACT-2005  
Notes de cours

Gabriel Crépeault-Cauchon  
Nicholas Langevin

19 septembre 2018

# **Table des matières**

## **Résumé**

Ce document résume les notes de cours prises en classe dans le cours de Mathématiques actuarielles IARD-1, ainsi que des notions prises du livre *LOSS MODELS - From Data to Decisions*, 4<sup>th</sup> edition.

# Chapitre 1

## Rappel sur les notions de probabilité et statistiques

### 1.1 Quantités à savoir

**Raw moments** On représente le  $k^{\text{e}}$  moment par  $\mu'_k$ , soit

$$\mu'_k = E[X^k] \quad (1.1)$$

**Moments centraux** Le  $k^{\text{e}}$  moment central est représenté par

$$\mu_k = E[(X - \mu)^k] \quad (1.2)$$

#### Exemple 1.1.1 Quelques exemples de moments centraux



La variance est le 2<sup>e</sup> moment central :

$$\text{Var}(X) = \mu_2 = E[(X - \mu)^2]$$

Le 3<sup>e</sup> moment centré, qui est utilisé pour calculer le coefficient d'asymétrie :

$$\mu_3 = E[(X - \mu)^3]$$

**Coefficient d'asymétrie** Le coefficient d'asymétrie, aussi appelé *skewness*, est représentée par

$$S_k = \frac{\mu_3}{\sigma^2} \quad (1.3)$$

Soit le 3<sup>e</sup> moment standardisé. Si  $S_k = 0$ , alors la distribution tend vers une loi normale.

**Coefficient d'applatissage** Le coefficient d'applatissage, aussi appelé *Kurtosis*, se définit par

$$\text{Kurtosis} = \frac{\mu_4}{\sigma^4} \quad (1.4)$$

Cette quantité permet de mesurer l'épaisseur de l'aile (*tail*) de la distribution. Si  $E[z^4] = 3$ , alors la distribution tend vers une loi normale  $N(\mu, \sigma^2)$ .

## 1.2 La loi normale

**La fonction génératrice des moments**

$$\begin{aligned} M_x(t) &= M_x(0) + \frac{M'_x t}{1!} + \frac{M''_x t^2}{2!} + \dots + \frac{M_x^{(n)} t^n}{n!} \\ &= 1 + \frac{E[x]t}{1!} + \frac{E[x^2]t^2}{2!} + \dots + \frac{E[x^n]t^n}{n!} \end{aligned}$$

On pose :  $c_k = \frac{E[x^k]}{k!}$  alors,

$$E[x^k] = C_k k! \quad (1.5)$$

## 1.3 Queue de distribution

1. Sois  $f_1(x)$  une fonction tels que les 3 premiers moment existe :  $E[x^4] = \infty$
2. Sois  $f_2(x)$  une fonction tels que les 2 premiers moment existe :  $E[x^2] = \infty$

Alors,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} r(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \begin{cases} \infty, & f_1(x) \text{ a une aile plus lourde que } f_2(x) \\ 0, & f_2(x) \text{ a une aile plus lourde que } f_1(x) \end{cases}$$

### Exemple 1.3.1

Sois  $f_{x_1}(x_1) \sim \text{pareto}(\alpha, \theta)$  et  $f_{x_2}(x_2) \sim \text{gamma}(\alpha, \lambda)$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} r(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_{x_1}(x_1)}{f_{x_2}(x_2)} \\ &= \frac{\frac{\alpha \theta^\alpha}{(x+\theta)^{\alpha+1}}}{\lambda x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}} \\ &= C \frac{e^{-\lambda x}}{x^{\alpha-1} (x+\theta)^{\alpha+1}} \\ &= \infty\end{aligned}$$

La pareto a une queue plus lourde que la gamma

### La fonction de hasard

$$h(x) = \frac{f(x)}{s(x)} \quad (1.6)$$

Si à partir de M,  $h(x)$  est décroissante  $\Leftrightarrow f(x)$  décroît trop lentement, alors  $f(x)$  à une aile lourde.