

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

ALGORITMOS Y COMPUTACIÓN

# Job Shop Scheduling

*Sergio García Prado*

Seguimiento del trabajo en:  
[github.com/garciparedes/Job-Shop-Scheduling-NP-Complete](https://github.com/garciparedes/Job-Shop-Scheduling-NP-Complete)

December 27, 2015

## Contents

# 1 Introducción

## 1.1 Definición del problema

Job Shop Scheduling es un problema de optimización que se estudia en Ciencias de la Computación e Investigación de Operaciones. Ahora describiremos el problema y el objetivo que se pretende conseguir:

Supongamos que tenemos  $n$  trabajos a realizar, los cuales denotamos como  $J_i$  tal que  $1 \leq i \leq n$  cada uno de distinta duración. También tenemos  $r$  máquinas con las que realizar los trabajos que denotaremos por  $M_j$  tal que  $1 \leq j \leq r$ . Cada una de estas es la encargada de realizar una operación concreta necesaria para finalizar cada uno de los trabajos. A cada una de estas operaciones las denotaremos por  $O_{ji}$  que representa la operación que se debe realizar en la máquina  $M_j$  del trabajo  $J_i$  y tienen un tiempo de procesamiento de  $p_{ij}$ . El orden de ejecución de las operaciones en las máquinas se designa como  $v_i$ .

En Job Shop Scheduling el orden de las operaciones necesarias para completar el  $i$ -ésimo trabajo importa y no se puede modificar.

El objetivo será tratar de minimizar al máximo posible el tiempo necesario para completar todas las operaciones. Para ello trataremos el problema como de decisión, es decir, buscaremos la respuesta la siguiente pregunta:

**¿Se pueden resolver los  $i$  trabajos a partir de las  $j$  máquinas en un tiempo menor o igual que  $r$ ?**

## 1.2 Open Shop, Job Shop y Flow Shop

Estos problemas tres problemas son muy similares entre si, ya que todos están referidos a la planificación de trabajos en más de una máquina.

- **Open Shop:** El orden de realización de las operaciones **no** importa.
- **Job Shop:** El orden de realización de las operaciones importa.
- **Flow Shop:** Cada trabajo tiene exactamente una operación por cada máquina, y todos los trabajos siguen el mismo orden de operaciones.

Hoy en día Job Shop Scheduling es presentado como un problema online, lo que quiere decir que cuando le llega un nuevo trabajo, el algoritmo debe devolver una decisión antes de conocer el próximo trabajo. A pesar de que la formulación actual sea como un problema online para el análisis de reducción no se tendrá en cuenta este caso, es decir, supondremos que conocemos a priori todos los trabajos que planificar (problema offline).

## 2 Reducción

Para demostrar que el problema Job Shop Scheduling pertenece a la clase NP-Complete nos basaremos en unos problemas cuya pertenencia a dicha clase ya está demostrada, por lo cual nos bastará demostrar que JobShop se puede reducir a estos.

El método que utilizaremos será reducción polinómica, lo que quiere decir que tendremos que conseguir demostrar que existe un método de la clase P que permita transformar nuestro problema a un problema de la clase NP-Complete. Con esto se consigue que si se consiguiera demostrar que un problema de la clase NP-Complete pertenece también a la clase P, todos los problemas de la clase NP-Complete quedarían sistemáticamente demostrados como pertenecientes a la clase P por transitividad.

### 2.1 Partición

**Partición** es un problema NP-completo, que visto como un problema de decisión, consiste en decidir si, dado un multiconjunto (conjunto en el cual cada miembro del mismo tiene asociada una multiplicidad) de números enteros, puede éste ser particionado en dos "mitades" tal que sumando los elementos de cada una, ambas den como resultado la misma suma.

Más precisamente, dado un multiconjunto S de enteros: ¿existe alguna forma de particionar S en dos subconjuntos S1 y S2, tal que la suma de los elementos en S1 sea igual que la suma de los elementos en S2?

La solución con programación dinámica existente para resolver el problema de suma de subconjuntos, utilizando tiempo pseudo-polinómico, también es aplicable al problema de partición.

**Tiempo Pseudo-Polinómico:** un algoritmo numérico se ejecuta en tiempo pseudo-polinómico si su tiempo de ejecución es polinómico en el valor numérico de la entrada, pudiendo ser este valor exponencial en el largo de la entrada, es decir, en el número de dígitos que la conforman. Los problemas NP-completos con algoritmos que se ejecutan en tiempo pseudo-polinómico se denominan NP-completos débiles. Un problema NP-completo se denomina NP-completo fuerte si se puede demostrar que no puede ser resuelto por algoritmos pseudo-polinómicos, salvo que se cumpla que  $P=NP$ .

### 2.2 3 - Partición

**3-Partición** es un problema NP-completo, que consiste en decidir si dado un multiconjunto S de  $n = 3m$  enteros positivos, puede ser particionado en m subconjuntos S1, S2, ..., Sm tal que la suma de sus elementos sea la misma.

Lo interesante del problema 3-Partición es que sigue siendo NP-completo incluso cuando los enteros de  $S$  están acotados por un polinomio en  $n$ . En otras palabras, el problema permanece al conjunto de problemas NP-completo incluso cuando la representación de los números en el argumento de entrada es unaria (representación mediante la repetición de un único símbolo). Es decir, el problema de la 3-partición es NP-completo en sentido estricto o estrictamente NP-completo. Esta propiedad, y en la 3-partición en general, es útil en muchas simplificaciones donde los números están representados de forma natural en unario.

Este problema fue demostrado por primera vez por Garey y Johnson mediante una solución de búsqueda 3-dimensional.

### 2.3 Problema de la Mochila

El problema de la mochila es un problema de optimización combinatoria, es decir, que busca la mejor solución entre un conjunto de posibles soluciones a un problema. Modela una situación análoga al llenar una mochila, incapaz de soportar más de un peso determinado, con todo o parte de un conjunto de objetos, cada uno con un peso y valor específicos. Los objetos colocados en la mochila deben maximizar el valor total sin exceder el peso máximo. Este problema pertenece a la clase NP-Complete como demostró Richard Karp en 1972. Enunciado matemáticamente se puede expresar como:

Dados  $n$  enteros positivos denotados como  $a_i$  tales que  $1 < i < t$  y otro entero  $b$ , ¿existe un subconjunto  $S \in T = \{1, \dots, t\}$  tal que  $\sum_{i \in S} a_i = b$ ?

### 2.4 Job Shop

Ya está demostrado que los casos particulares más simples pertenecen a P con crecimiento asintótico de  $O(m^2)$  para 2 trabajos y  $m$  máquinas y  $O(n \log n)$  para  $n$  trabajos de no más de 2 operaciones cada uno y 2 máquinas.

Ahora demostraremos que este problema pertenece a la clase NP-Complete para los casos siguientes reduciéndolos al Problema de la Mochila, que ya conocemos que pertenece a la clase NP-Complete:

1.  $n$  trabajos de no más de 3 operaciones cada uno en 2 máquinas
2.  $n$  trabajos de no más de 2 operaciones cada uno en 3 máquinas

**Reducción de 1:**

$$n = t + 1 \tag{1}$$

$$v_i = (M_1), p_{i1} = a_i (i \in T) \tag{2}$$

$$v_n = (M_2, M_1, M_2), p_{n1} = b, p_{n2} = 1, p_{n3} = A - b \tag{3}$$

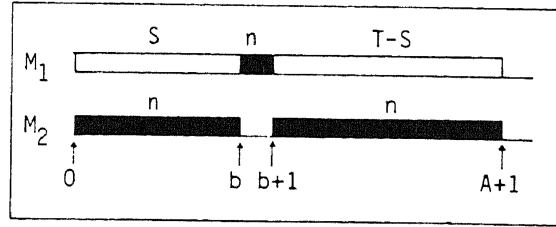
$$y = A + 1 \tag{4}$$

Si el problema de la mochila tiene solución, entonces existe una planificación con tiempo total de ejecución igual a  $y$ , como se ilustra en la figura 1. Si el Problema de la Mochila no tiene solución entonces  $\sum_{i \in S} a_i - b = c \neq 0$  para cada  $S \in T$ , por lo que tenemos un orden de procesamiento  $(\{J_i | i \in S\}, J_n, \{J_i | i \in T - S\})$  en  $M_i$  que:

$$c > 0 \implies \text{TiempoTotal} \geq \sum_{i \in S} p_{i1} + p_{n2} + p_{n3} = A + c + 1 > y \quad (5)$$

$$c < 0 \implies \text{TiempoTotal} \geq p_{n1} + p_{n2} + \sum_{i \in T-S} p_{i1} = A - c + 1 > y \quad (6)$$

Con esto se muestra que el Problema de la Mochila tiene solución solo si  $n$  trabajos de no más de 3 operaciones cada uno en 2 máquinas tienen solución con valor menor o igual que  $y$ .



## Reducción de 2:

$$n = t + 2 \quad (7)$$

$$v_i = (M_1, M_3), p_{i1} = a_i (i \in T) \quad (8)$$

$$v_{n-1} = (M_2, M_1), p_{n-1,1} = b, p_{n-1,2} = 2(A - b) \quad (9)$$

$$v_n = (M_2, M_3), p_{n1} = 2b, p_{n2} = A - b \quad (10)$$

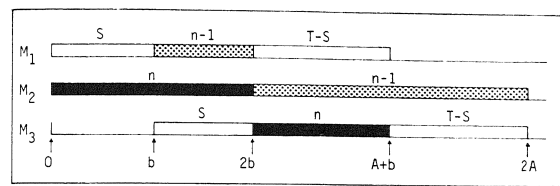
$$y = 2A \quad (11)$$

Si el problema de la mochila tiene solución, entonces existe una planificación con tiempo total de ejecución igual a  $y$ . Si el Problema de la Mochila no tiene solución entonces  $\sum_{i \in S} a_i - b = c \neq 0$  para cada  $S \in T$ , por lo que tenemos un orden de procesamiento  $(\{J_i | i \in S\}, J_{n-1}, \{J_i | i \in T - S\})$  en  $M_i$  que:

$$c > 0 \implies \text{TiempoTotal} \geq \sum_{i \in S} p_{i1} + p_{n-1,1} + p_{n-1,2} = 2A + c > y \quad (12)$$

$$c < 0 \implies \text{TiempoTotal} \geq \min\left\{\sum_{i \in S} p_{i1} + p_{n-1,1} + 1, p_{n1}\right\} + p_{n2} + \sum_{i \in T-S} p_{i2} = 2A + 1 > y \quad (13)$$

lo que completa la prueba de equivalencia.



### 3 Bibliografía

-