

Primeira Prova - Semestre 2016.1 - 17/08/2016

Nome: Jonathan Continho Luz de Oliveira

8,6  
10,0 ful

**Observação:** prova individual, sem consulta

Para as questões 1 e 2, considere que:

- o arquivo tem 11 registros;
- a primeira função de hashing é  $h_1(chave) = chave \bmod 11$ , ou seja, retorna o resto da divisão do valor da chave por 11;
- a segunda função de hashing é  $h_2(chave) = \lfloor chave/11 \rfloor$ , ou seja, o quociente inteiro da divisão do valor da chave por 11. Caso este quociente seja zero, considere que o valor da função é 1.

### Questões

1. Seja a seguinte sequência de chaves:

15, 24, 13, 26, 37, 27, 16, 38, 21, 4

70 é menor

Qual é o estado final do arquivo, após a inserção de registros com a sequência de chaves acima, considerando os seguintes métodos:

(a) (1.0) LISCH (*Late Insertion Standard Coalesced Hashing*)

(b) (1.0) Encadeamento calculado (*Computed Chaining*)

(c) (1.5) Árvore Binária

2. (1.5) Calcule o número médio de acessos a posições do arquivo para cada um dos métodos da questão anterior (considerando a sequência de chaves dada). (a) cpm

3. (1.0) Utilizando o algoritmo de Cichelli, encontre uma função de *hashing* perfeita para o conjunto de palavras abaixo:

bala, bolo, carro, cão, livro

Considere que o maior valor a ser utilizado para a função  $T$  é 3. É uma função de hashing perfeita mínima? Justifique.

4. (1.0) O que é uma *coleção universal de funções de hashing*?

5. (1.0) Em sala de aula foi apresentado um esquema para se gerar *hashing* perfeito com base em uma coleção universal de funções de *hashing* (método de *hashing* perfeito apresentado no livro de Cormen et al.). Qual é a importância de se utilizar uma coleção universal de funções de *hashing* neste esquema?

6. (2.0) Considere  $n$  chaves  $c_1, c_2, \dots, c_n$  armazenadas em um arquivo, em ordem crescente, de tal forma que a diferença entre quaisquer duas chaves consecutivas é a mesma. Ou seja,  $c_{i+1} - c_i = k$ ,  $1 \leq i < n$ , para alguma constante positiva  $k$ . Prove que é necessário apenas um acesso a arquivo para encontrar qualquer uma das chaves, quando busca por interpolação é utilizada.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 10,2930,40 \rightarrow 0,10,2930 \end{array}$$

$$l=1, n=m$$

$$A[1], A[m]$$

$$1 + \frac{(x - A[1]) \cdot (m-1)}{(A[m] - A[1])}$$

$$A[i] = A[1] + \left( A[m] - A[1] \right) \cdot \frac{(i-1)}{n-1}$$

15, 24, 13, 26, 37, 27, 16, 38, 21, 4

(a) LISCH:

0	4	
1	4	
2	4	10
3	10	21
4	5	9
5	27	7
6	38	
7	16	6
8	37	1
9	26	8
10	13	3

$$\begin{aligned}
 h_1(15) &= 4 \\
 h_1(24) &= 2 \\
 h_1(13) &= 2 \\
 h_1(26) &= 4 \\
 h_1(37) &= 4 \\
 h_1(27) &= 5 \\
 h_1(16) &= 5 \\
 h_1(38) &= 5 \\
 h_1(21) &= 10 \\
 h_1(4) &= 4
 \end{aligned}$$

0.9  
4

(b) Encaleamento calculado:

0	4	
1	16	2
2	24	2
3	38	2
4	15	1
5	26	1
6	13	
7	37	1
8	21	2
9		
10	27	1

$$h_1(15) = 4$$

$$h_1(24) = 2$$

$$h_1(13) = 2$$

$$\hookrightarrow h_2(24) = 2 \Rightarrow \text{nai } \uparrow 4 > 2 \text{ saltos}$$

4<sup>0.5</sup>

$$h_1(26) = 4$$

$$\hookrightarrow h_2(15) = 1 \Rightarrow \text{nai } \uparrow 5 > 1 \text{ salto}$$

$$h_1(37) = 4$$

$$\hookrightarrow h_2(15) = 1, 1 \text{ salto} \Rightarrow \text{nai } \uparrow 15$$

$$h_2(26) = 2 \Rightarrow \text{nai } \uparrow 17 > 1 \text{ salto}$$

$$h_1(27) = 5$$

$$\hookrightarrow h_2(26) = 1, 1 \text{ salto} \Rightarrow \text{nai } \uparrow 17$$

$$h_2(37) = 3 \Rightarrow \text{nai } \uparrow 10 > 1 \text{ salto}$$

$$h_1(16) = 5$$

$$\hookrightarrow h_2(26) = 2, 1 \text{ salto} \Rightarrow \text{nai } \uparrow 17$$

$$h_2(37) = 3, 1 \text{ salto} \Rightarrow \text{nai } \uparrow 10$$

$$h_2(27) = 2 \Rightarrow \text{nai } \uparrow 1 > 1 \text{ salto}$$

$$h_1(38) = 5$$

$$\hookrightarrow \dots \text{nai } \uparrow 1, h_1(16) = 1 \Rightarrow \text{nai } \uparrow 2 > 2 \text{ saltos}$$

nai  $\uparrow 3$

(Continua...)

$$h_1(21) = 10$$

$$\hookrightarrow \dots \text{nai } \uparrow 2$$

$$h_2(38) = 3$$

$$\Rightarrow \text{nai } \uparrow 5 > 2$$

$$\text{nai } \uparrow 8 > 2$$

$$h_1(4) = 4$$

$$\hookrightarrow \dots \text{nai } \uparrow 8$$

$$h_2(21) = 2$$

$$\Rightarrow \text{nai } \uparrow 10 > 2$$

$$\text{nai } \uparrow 8 > 2$$

$$\dots \text{nai } \uparrow 0 > 2$$

Formatram contínuo Lmz de Qmergy - 214715611

①

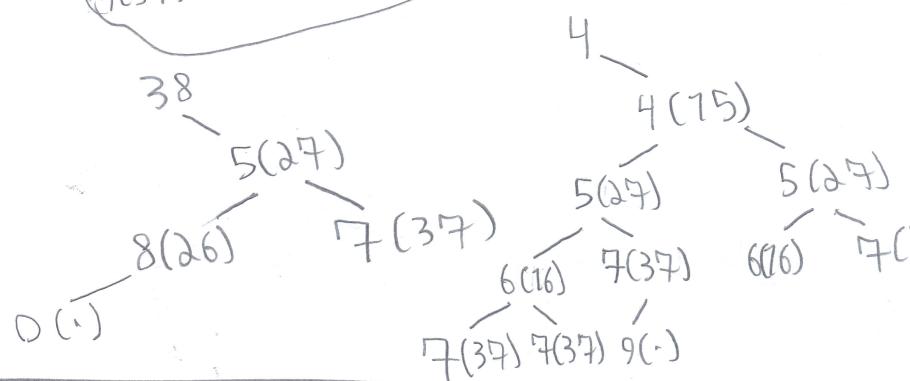
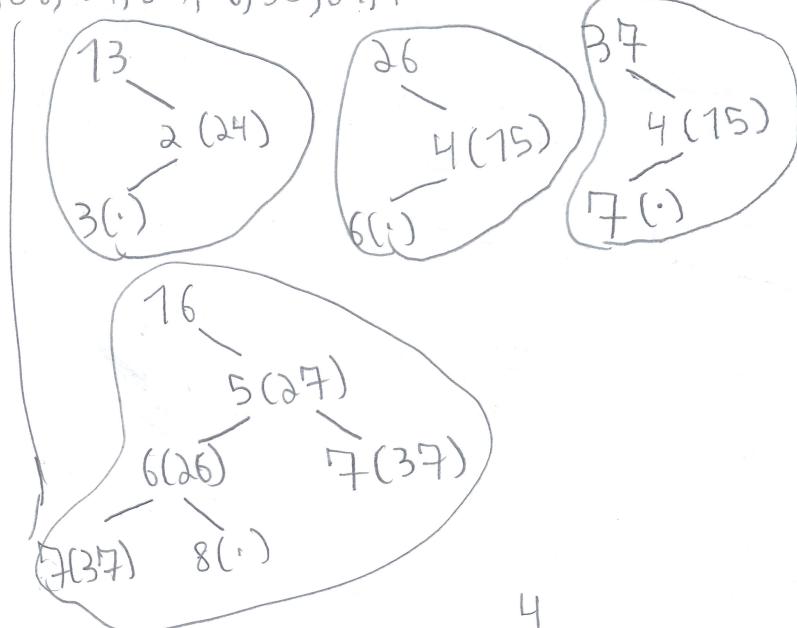
15, 24, 13, 26, 37, 27, 16, 38, 21, 4

(c)
0 38
1
2 24
3 13
4 15
5 27 4
6 16
7 37
8 26
9 27
10 21

$$\begin{aligned}h_1(15) &= 4 \\h_1(24) &= 2 \\h_1(13) &= 2 \\h_1(26) &= 4 \\h_1(37) &= 4 \\h_1(27) &= 5 \\h_1(16) &= 5 \\h_1(38) &= 5 \\h_1(21) &= 10 \\h_1(4) &= 4\end{aligned}$$

✓

②



(a) 15  $\Rightarrow$  1 aéreo  
 24  $\Rightarrow$  1 aéreo  
 13  $\Rightarrow$  2 aéreos  
 26  $\Rightarrow$  2 aéreos  
 37  $\Rightarrow$  3 aéreos  
 27  $\Rightarrow$  1 aéreo  
 16  $\Rightarrow$  2 aéreos  
 38  $\Rightarrow$  3 aéreos  
 21  $\Rightarrow$  2 aéreos  
 4  $\Rightarrow$  4 aéreos

(b) 15  $\Rightarrow$  1 aéreo  
 24  $\Rightarrow$  1 aéreo  
 13  $\Rightarrow$  2 aéreos  
 26  $\Rightarrow$  2 aéreos  
 37  $\Rightarrow$  3 aéreos  
 27  $\Rightarrow$  3 aéreos  
 16  $\Rightarrow$  4 aéreos  
 38  $\Rightarrow$  5 aéreos  
 21  $\Rightarrow$  9 aéreos  
 ?  
 ?

$C^{0,3}$  Considerando sue  
reperto P1 a  
quartas 1

$$\text{Média: } \frac{21}{10} = 2,1$$

$C^{0,1}$

Considerando  
sua reposta de  
quartas 1

(c) 15  $\Rightarrow$  1 aéreo

24  $\Rightarrow$  1 aéreo

13  $\Rightarrow$  1 aéreo ?

26  $\Rightarrow$  2 aéreos ?

37  $\Rightarrow$  2 aéreos ?

27  $\Rightarrow$  0 aéreos ?

16  $\Rightarrow$  2 aéreos

38  $\Rightarrow$  0 aéreos ?

21  $\Rightarrow$  1 aéreo

4  $\Rightarrow$  2 aéreos

$$\text{Média: } \frac{26}{10} = 2,6$$

$C^{0,1}$

$$\text{Média: } \frac{16}{10} = 1,6$$

$C^{0,2}$

④ Uma família  $H$  de funções de hashing é dita universal se, para quaisquer chaves  $x \neq y$ , se for escolhida aleatoriamente uma função  $\gamma \in H$ ,  $\Pr[\gamma(x) = \gamma(y)] \leq 1/m^2$ , onde  $m$  é a quantidade de valores possíveis para o hash.

⑤ É importante o uso de uma coleção universal para assegurar que:

- no primeiro nível, as chaves entram relativamente bem distribuídas (isto é, não existem buckets com uma quantidade muito grande de chaves devido a colisões) - do contrário o uso total de memória pode não ser  $O(m)$
- no segundo nível, seja encontrada uma função de hashing sem colisões.

⑥ O uso de uma coleção universal permite que esses dois critérios sejam atendidos através de múltiplas tentativas, com as propriedades de uma coleção universal implicando que, com alta probabilidade, o número de tentativas até se obter sucesso seja baixo.

⑦ Em uma lista com diferença constante entre as chaves consecutivas:

$$A[i] = A[1] + (A[m] - A[1]) \frac{(i-1)}{m-1} \quad \begin{array}{l} \text{para } m \geq 2 \\ \text{e } i \text{ de } 1 \text{ a } m \end{array}$$

Em uma lista por intercalação, a regra é inicialmente  $l=1$  e  $m=m$ . Aplicando esses valores para obter o primeiro índice a ser alocado, temos:

$$l = 1 + (x - A[1]) \frac{(m-1)}{(A[m] - A[l])} = 1 + (x - A[1]) \frac{(m-1)}{(A[m] - A[1])}$$

$$\therefore l = 1 + (x - A[1]) \frac{(m-1)}{(A[m] - A[1])}$$

Aplicando na fórmula para

o  $i$ -ésimo ítem:

$$A[i] = A[1] + (A[m] - A[1]) \frac{(x - A[1])^{(m-1)}}{(A[m] - A[1])} = x$$

Palavra	Valor	Frequências	Reordenando
bala	3	$b = 2$	earno
bolo	6	$a = 1$	eão
carro	6	$\theta = 4$	bolo
eão	6	$e = 2$	livro
livro	5	$l = 1$	bala

$$T(e) = 0$$

$$T(\theta) = 0$$

$$T(l) = 0$$

$$T(\ell) = \emptyset \neq 1$$

$$T(a) = \emptyset \neq \emptyset \neq 3$$

$\checkmark 1^{\circ}$

$$n(\text{carro}) = 5 + 0 + 0 = 5$$

$$n(\text{eão}) = 3 + 0 + 0 = 3$$

$$n(\text{bolo}) = 4 + 0 + 0 = 4$$

$$n(\text{livro}) = 5 + 1 + 0 = 6$$

$$n(\text{bala}) = 4 + 0 + 3 = 7$$

$$\text{hash}(w_1 \dots w_m) = m + T(w_1) + T(w_m)$$

A função obtida é uma função de hashing perfeita mínima. A função obtida é uma função de hashing perfeita mínima. A função obtida é uma função de hashing perfeita mínima. A função obtida é uma função de hashing perfeita mínima. A função obtida é uma função de hashing perfeita mínima.

$$\{3, 4, 5, 6, 7\} \text{ (é mínima).}$$