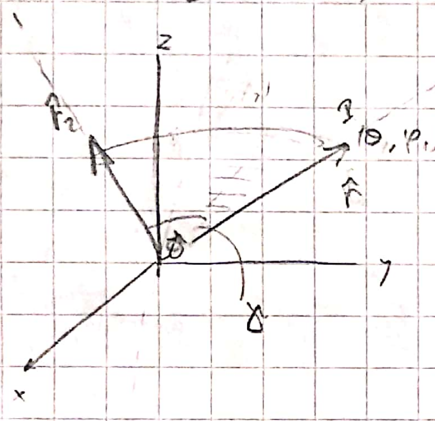
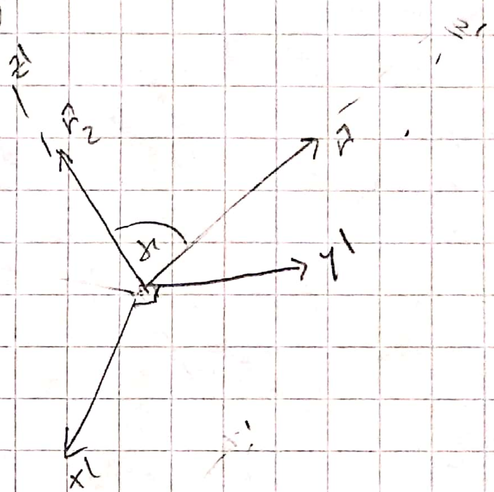
Teorema de adición de armónicos esféricos

$$P_n(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2n+1}\sum_{m=-n}^{n} (-1)^m\, Y_n^{m}(\theta_1,\varphi_1)\, Y_n^{-m}(\theta_2,\varphi_2) \qquad (*)$$

donde (θ_1,φ_1), (θ_2,φ_2) y γ están relacionados por

$$\cos\gamma = \cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)$$





Primero:

$$\hat{r}_1 = \sin\theta_1\cos\varphi_1\,\hat{x} + \sin\theta_1\sin\varphi_1\,\hat{y} + \cos\theta_1\,\hat{z}$$
$$\hat{r}_2 = \sin\theta_2\cos\varphi_2\,\hat{x} + \sin\theta_2\sin\varphi_2\,\hat{y} + \cos\theta_2\,\hat{z}$$

$$\begin{aligned}\cos\gamma = \hat{r}_1\cdot\hat{r}_2 &= \sin\theta_1\cos\varphi_1\sin\theta_2\cos\varphi_2 + \sin\theta_1\sin\varphi_1\sin\theta_2\sin\varphi_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2\\ &= \sin\theta_1\sin\theta_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + \cos\theta_1\cos\theta_2\\ &= \sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) + \cos\theta_1\cos\theta_2 \quad \checkmark\end{aligned}$$

(*) es equivalente a

$$P_n(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2n+1}\sum_{m=-n}^{n} Y_n^{m}(\theta_1,\varphi_1)\, Y_n^{m*}(\theta_2,\varphi_2)$$

No daremos una prueba aquí ya que es más conveniente probarlo usando resultados de la teoría de grupos. (Ver Hassani p 865)