Para probar (*) podemos usar el hecho que el op. de Laplace ∇^2 [es] invariante bajo rotaciones, e.d. si $\vec{x}$ y $\vec{x}'$ son coord. c/r a 2 S.C's K y K' relacionados por una rotación (general), entonces

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla'^2 = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2}$$ (ver parte de tensores !!)

en cada S.C podemos usar coord. esféricas (r,θ,φ) y (r',θ',φ'), entonces

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r^2\ ) - \frac{1}{r^2}\hat{L}^2 \quad \text{y} \quad \nabla'^2 = \frac{1}{r'^2}\frac{\partial^2}{\partial r'^2}(r'^2\ ) - \frac{1}{r'^2}\hat{L}'^2$$

y como $r=r'$ entonces $\Rightarrow$ $\hat{L}^2 = \hat{L}'^2$ o, explícita%

$$\Rightarrow -\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta'}\frac{\partial}{\partial\theta'}\left(\operatorname{sen}\theta'\frac{\partial}{\partial\theta'}\right) - \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta'}\frac{\partial^2}{\partial\varphi'^2}$$

En particular, tomamos K' como el S.C. que tiene como eje $\hat{z}'$ a $\hat{r}_2$
Entonces las coords. de $\hat{r}_2$ c/r a K' son

$$\hat{r}' = (\operatorname{sen}\theta'\cos\varphi', \operatorname{sen}\theta'\operatorname{sen}\varphi', \cos\theta') \quad ; \quad \hat{r}_2' = (0,0,1) \quad , \text{con} \ \boxed{\theta' = \gamma}$$

Como $P_n(\cos\gamma) = P_n(\cos\theta\cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta_2\cos(\varphi-\varphi_2))$ es una fn. continua (y finita) en los angulos θ y φ podemos expandir

$$P_n(\cos\gamma) = \sum_{n'=0}^{\infty}\sum_{m=-n'}^{n'} C_{n'}^{m}(\theta_2,\varphi_2)\, Y_{n'}^{m}(\theta,\varphi) \quad \ldots (1)$$