Assignment Submission 1.1

Gianluca Scarpellini - 807541 - g.scarpellini1[at]disco.unimib.it

28 dicembre 2019

Indice

1 Definizione del task

Il task di questa prima consegna è definire l'equazione di trasformazione dallo stato *al tempo t-1* $\overline{x}_{t-1}$ allo stato al tempo corrente di un robot **2D** che si muove su un piano. Del robot sono noti due punti, rispettivamente $P_1^R = (0, 0, 0)$ e $P_2^R = (d, 0, 0)$, definiti rispetto al sistema di riferimento del robot stesso, e la distanza tra le ruote l.

Nel presente documento, individuo come stato del sistema la pose del robot **nel piano** rispetto al mondo, definita in equazione 1.

$$\underline{x}_t := \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ \theta_t \end{bmatrix} \tag{1}$$

La pose **nel piano** di un oggetto rigido rispetto un sistema di riferimento può essere espressa come una matrice di roto-traslazione 3x3 in coordinate omogenee. In equazione 2 riporto la definizione di cui sopra.

$$\underline{T}_{R_t}^{w} := \begin{bmatrix} \cos\theta_t & \sin\theta_t & x_t \\ -\sin\theta_t & \cos\theta_t & y_t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Posso scomporre il problema in due sotto-problemi di difficoltà ridotta: si tratta difatti di definire una roto-traslazione di **transizione** dal tempo $t-1$ al tempo t, $\underline{T}_{R_{t-1}}^{R_t}$, che è successivamente applicata alla pose del robot al tempo precedente. In equazione 3 riporto la sequenza di passaggi che mi permettono di definire la funzione di stato **f**.

$$\underline{T}_{R_t}^{w} := \underline{T}_{R_{t-1}}^{w} \underline{T}_{R_t}^{R_{t-1}} \tag{3}$$

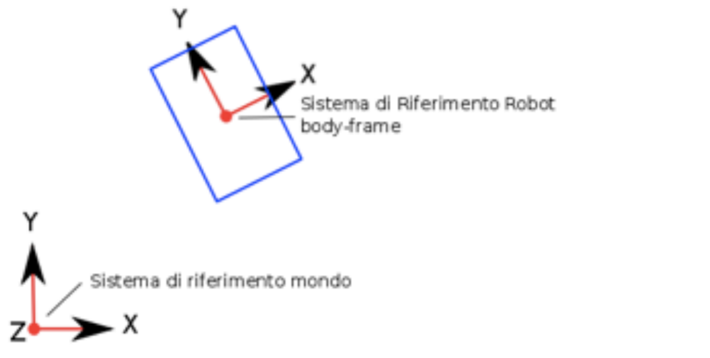

Figura 1: Pose del robot rispetto al mondo

In sezione 2.1 procedo definendo il modello di transizione del robot detto **modello odometrico**, e quindi definisco la roto-traslazione $\underline{T}_{R_t}^{R_{t-1}}$ date le letture (rumorose) di movimento delle ruote del robot stesso. Infine, in sezione 2.2 procedo sviluppando l'equazione di stato che sarà impiegata nello sviluppo del filtro di Kalman.

2 Equazioni e sviluppi

2.1 Modello odometrico

Modelliamo uno step di movimento del robot applicando il **modello odometrico**. L'input del sistema di controllo del robot è la *lunghezza* degli archi di movimento delle ruote: il robot si muoverà applicando una certa rotazione; tale misura rappresenta $\underline{u}$ nell'equazione 4. Il *movimento* viene modellato applicando la trasformazione al **Centro di Istantanea Rotazione** (equazione 5). Nelle equazioni 4 e 6 sviluppo i passaggi necessari per definire la **roto-traslazione** di uno step, indicata con $\underline{T}_{R_{t-1}}^{R_t}$.

$$r := \frac{l s_{\mathrm{dx}}}{s_{\mathrm{sx}} - s_{\mathrm{dx}}} \text{ e } \alpha := \frac{s_{\mathrm{sx}} - s_{\mathrm{dx}}}{l} \text{ , dato } \underline{u} = \begin{bmatrix} s_{\mathrm{sx}} \\ s_{\mathrm{dx}} \end{bmatrix} \text{ e noto } l \tag{4}$$

In figura 2 è riportata la tripletta di passaggi necessari per valutare il movimento del robot.

$$\underline{T}_{R_t}^{R_{t-1}} := \underline{T}_{\mathrm{CIR}_{t-1}}^{R_{t-1}} \underline{T}_{\mathrm{CIR}_t}^{\mathrm{CIR}_{t-1}} \underline{T}_{R_t}^{\mathrm{CIR}_t} \tag{5}$$

Da cui consegue:

$$\underline{T}_{R_t}^{R_{t-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -r - l/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & r + l/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

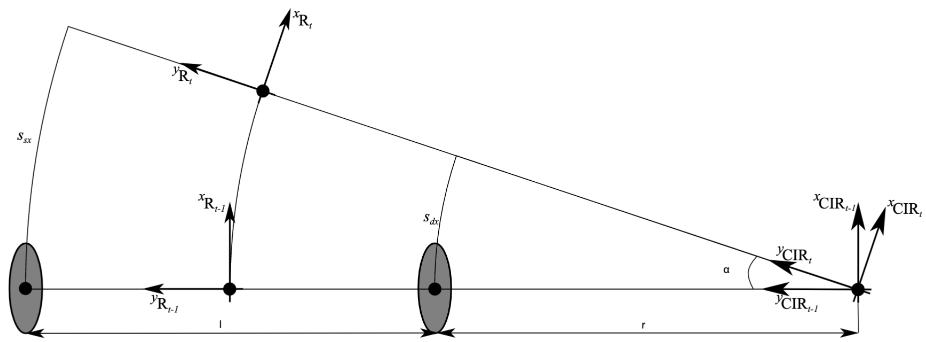

Figura 2: $\underline{T}_{R_{t-1}}^{R_t}$ in funzione del CIR

Se $s_{\text{sx}} = s_{\text{dx}}$ ne consegue che il movimento è puramente rettilineo, e la definizione della roto-traslazione di step si semplifica in una traslazione (equazione 7).

$$\underline{T}_{R_t}^{R_{t-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & s_{\text{sx}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Data una pose iniziale $\underline{T}_{R_0}^{w}$, è possibile computare ricorsivamente la roto-traslazione in equazione 3 quale sequenza di applicazioni di roto-traslazioni $\underline{T}_{R_t}^{R_{t-1}}$.

2.2 Funzione di stato

Dato lo stato al tempo precedente $\underline{x}_{t-1}$ e i valori di misura (rumorosi) al tempo corrente $\underline{u}_t$ è ora possibile computare la roto-traslazione del sistema robot rispetto al sistema mondo al tempo corrente: si ricava la roto-traslazione al tempo precedente (equazione 2); si ricava la roto-traslazione dello step corrente (equazioni 4 e 6); infine, si ottiene $\underline{T}_{R_w}^{R_t}$ (equazione 3). Ne consegue la definizione della funzione di stato in equazione 8, che restituisce un vettore di stato $\underline{x}_t$ costruendolo in funzione dei punti precedenti.

$$f(\underline{x}_{t-1}, \underline{u}) = \begin{bmatrix} \underline{T}_{R_t}^{w}(1,3) \\ \underline{T}_{R_t}^{w}(2,3) \\ \theta_{t-1} + \alpha \end{bmatrix} \tag{8}$$

Da cui consegue, in correlazione al tipo di movimento del robot:

- *Rettilineo*, se l'arco di spostamento per ambo le ruote è uguale:

$$f(\underline{x}_{t-1}, \underline{u}) = \begin{bmatrix} x_{t-1} + s_{\text{sx}} \cos\theta_{t-1} \\ y_{t-1} - s_{\text{sx}} \sin\theta_{t-1} \\ \theta_{t-1} + \alpha \end{bmatrix}$$

- *Rotatorio*, altrimenti:

$$f(\underline{x}_{t-1}, \underline{u}) = \begin{bmatrix} x_{t-1} - \sin\theta_{t-1}[\frac{l}{2} + r - \cos\alpha(\frac{l}{2} + r)] + \cos\theta_{t-1}\sin\alpha(\frac{l}{2} + r) \\ y_{t-1} - \cos\theta_{t-1}[\frac{l}{2} + r - \cos\alpha(\frac{l}{2} + r)] - \sin\alpha\sin\theta_{t-1}(\frac{l}{2} + r) \\ \theta_{t-1} + \alpha \end{bmatrix}$$