Appunti di Logica

Sul corso di Logica Matematica del Prof. Giunchiglia,
Università degli Studi di Trento

A.A. 2018/2019

Giacomo Fabris

— 1 —

PL - Introduzione

La logica delle proposizioni (Propositional Logics -**PL**) si compone di **simboli logici** e **variabili proposizionali**. Una proposizione (formula) è composta quindi di variabili proposizionali uniti da simboli logici. La formula può essere *vera* o *falsa* a seconda dell'assegnazione delle singole variabili.

Definizione 1 (Linguaggio della PL)
Logical symbols: *(1)* $\neg$ *(2)* $\wedge$ *(3)* $\vee$ *(4)* $\supset$ *(5)* $\equiv$
PL formulas and sub-formulas

- *every logical variable* $P \in \mathrm{P}$ *is an atomic formula*
- *every atomic formula is a formula*
- *if* A *and* B *are formulas, then* $\neg A, A \wedge B, A \vee B, A \supset B, A \equiv B$ *are formulas*

Una **funzione di interpretazione** $I : P \to \{\top, \bot\}$ assegna un valore vero o falso a ciascuna variabile $P \in \mathrm{P}$.

Una funzione di interpretazione è detta **modello** di una funzione φ se le sue assegnazioni rendono il valore della funzione vero. In simboli: $I \models \varphi$.

SAT, UNSAT, VAL

- Una formula A è soddisfacibile (**SAT**) se $\exists I$ funzione di interpretazione t.c. $I \models$ A.
- Una formula A è insoddisfacibile (**SAT**) se $\nexists I$ funzione di interpretazione t.c. $I \models$ A.
- Una formula A è valida (**VALID**) se $\forall I, I \models$ A

Osservazione:
Se A è **VALID**, $\neg$A è **UNSAT**.
Se A è **SAT**, $\neg$A non è valida.
Se A non è valida, $\neg$A è **SAT**.

Se A è **UNSAT**, ¬A è **VALID**.

Conseguenza e equivalenza logica

- Una formula A è una **conseguenza logica** di un insieme di formule Γ, in simboli Γ $\models$ A sse per ogni funzione di interpretazione I che soddisfa tutte le formule di Γ, I soddisfa A.
- Due formule A, B sono **equivalenti**, in simboli A $\equiv$ B sse per ogni funzione di interpretazione I, $I(\mathrm{A}) = I(\mathrm{B})$.

Procedure di decisione

Model checking (I, φ): $I \overset{?}{\models} \varphi$ (I soddisfa φ?)

Satisfiability (φ): $\overset{?}{\exists} I | I \models \varphi$ (Esiste un modello che soddisfi φ?)

Validity (φ): $\overset{?}{\models} \varphi$ (φ è soddisfatta da qualsiasi modello?)

Logical consequence (Γ, φ): $\Gamma \overset{?}{\models} \varphi$ (Ogni modello che soddisfa Γ soddisfa anche φ?)

Formalizzazione del linguaggio naturale

- A: "It is the case that A"
- $\neg A$: "It is not the case that A"
- $A \wedge B$: "A and B", "A but B", "Although A, B", "Both A and B"
- $A \vee B$: "A or B", "Either A or B"
- $A \rightarrow B$: "If A, then B", "B if A"
- $\neg(A \vee B)$: "Neither A nor B"
- $\neg(A \wedge B)$: "It is not the case that both A and B"

— 2 —

PL - CNF & DPLL

— 3 —

PL - Tableaux

α rules

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\begin{array}{c}\phi\\ \psi\end{array}} \qquad \frac{\phi \vee \psi}{\begin{array}{c}\neg\phi\\ \neg\psi\end{array}} \qquad \frac{\neg(\phi \supset \psi)}{\begin{array}{c}\phi\\ \neg\psi\end{array}}$$

$\neg\neg$ elimination

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi}$$

β rules

$$\frac{\phi \vee \psi}{\phi \mid \psi} \qquad \frac{\neg(\phi \wedge \psi)}{\neg\phi \mid \neg\psi} \qquad \frac{\phi \supset \psi}{\neg\phi \mid \psi}$$

Branch closure

$$\frac{\begin{array}{c}\phi\\ \neg\phi\end{array}}{\mathrm{X}}$$

L'equivalenza può essere riscritta come doppia implicazione.

$$\phi \equiv \psi \iff (\phi \supset \psi) \wedge (\psi \supset \phi)$$