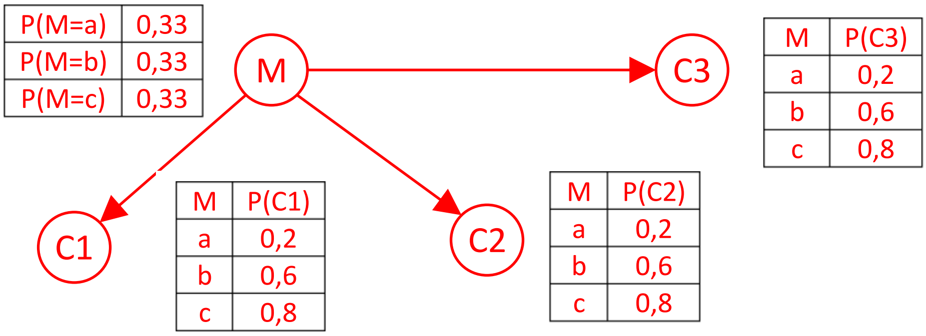
ALGUNOS EJERCICIOS DE REDES BAYESIANAS (SOLUCIONES)

1. Tenemos 3 monedas trucadas (llamémoslas a,b,c). Dichas monedas sacan cara en el 20%, 60% y 80% de los casos, respectivamente. Elegimos aleatoriamente una moneda y la lanzamos tres veces.

a. Construye la red bayesiana asociada.

Solución:



M=Moneda elegida, C1=Cara en la primera tirada, C2=Cara en la segunda tirada, C3=Cara en la tercera tirada

b. Suponiendo que hemos sacado cara en el primer lanzamiento, cara en el segundo y cruz en el tercero, calcula la probabilidad de haber elegido cada una de las monedas.

Solución:

P(M=a | C1 y C2 y ¬C3) =
= P(M=a y C1 y C2 y ¬C3) / P(C1 y C2 y ¬C3) =
= P(M=a y C1 y C2 y ¬C3) / (P(M=a y C1 y C2 y ¬C3) + P(M=b y C1 y C2 y ¬C3) + P(M=c y C1 y C2 y ¬C3))

P(M=a y C1 y C2 y ¬C3) = P(M=a) * P(C1|M=a) * P(C2|M=a) * P(¬C3|M=a) = 0,33 * 0,2 * 0,2 * (1-0,2) = 0,01067
P(M=b y C1 y C2 y ¬C3) = P(M=b) * P(C1|M=b) * P(C2|M=b) * P(¬C3|M=b) = 0,33 * 0,6 * 0,6 * (1-0,6) = 0,04800
P(M=c y C1 y C2 y ¬C3) = P(M=c) * P(C1|M=c) * P(C2|M=c) * P(¬C3|M=c) = 0,33 * 0,8 * 0,8 * (1-0,8) = 0.04267

P(M=a | C1 y C2 y ¬C3) = 0,0106667 / (0,0106667+0,048+0.0426667) = **0,10526**

La probabilidad de haber elegido la moneda 'a' es de 0,10526.

Para la probabilidad de la moneda b y c los cálculos serían similares. De hecho ya tenemos todos los cálculos necesarios para poder calcularlas (obsérvese que el denominador es idéntico, y el numerador es una probabilidad que ya tuvimos que calcular para el caso de la moneda a).

P(M=b | C1 y C2 y ¬C3) = … = 0,04800 / 0,10133 = **0,47368**

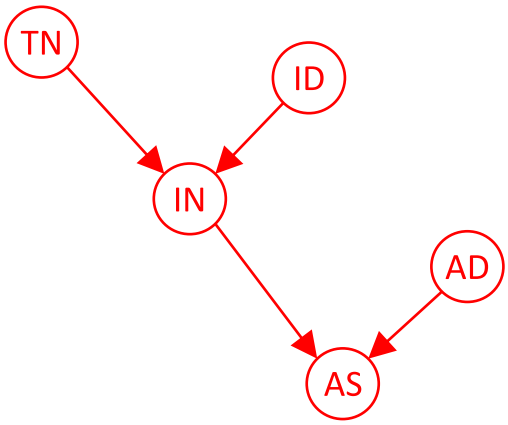
P(M=c | C1 y C2 y ¬C3) = … = 0.04267 / 0, 10133 = **0,42105**

2. Supón que en una central nuclear tenemos las cinco siguientes variables aleatorias:
   IN: El indicador muestra temperatura normal (si no, es alta)
   TN: La temperatura del núcleo es normal (si no, es alta)
   ID: El indicador está defectuoso
   AD: La alarma está defectuosa
   AS: La alarma suena

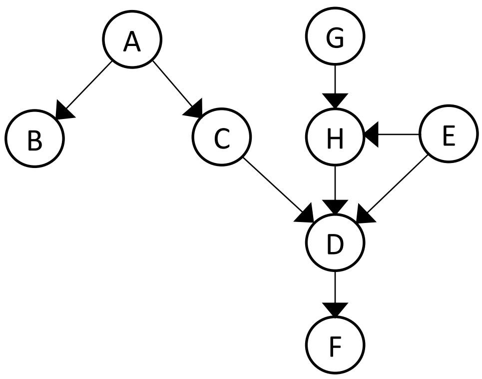
   Sabemos, además, que si la alarma funciona correctamente, sonará cuando el indicador muestre una temperatura alta. Si no funciona correctamente, no sonará nunca. Por otra parte, si el indicador funciona correctamente, mostrará la temperatura correcta del núcleo con mayor probabilidad que si no funciona correctamente.

   Determinar una red bayesiana (sólo nodos y arcos, no es necesario especificar las tablas de probabilidad) que sea compatible con las relaciones entre las variables del sistema.

   Solución:



3. Considera la siguiente red bayesiana:



   a. ¿Cuántas probabilidades en total tendría la distribución conjunta si las 8 variables A,B,C,D,E,F,G,H son booleanas, y no conociésemos ninguna relación de independencia o independencia condicional entre ellas?

Solución: si no conocemos ninguna relación de independencia entre las 8 variables, debemos definir un total de 2 elevado a 8, es decir 256 valores de probabilidad.

b. Ahora considera que conocemos las relaciones de independencia entre dichas variables booleanas indicadas en la red de la figura, ¿cuántas probabilidades en total deberíamos definir para construir la red?

Solución: sería 1 valor para cada nodo sin padres, 2 valores para cada nodo con 1 padre, 4 valores para cada nodo con 2 padres, 8 valores para cada nodo con 3 padres, etc. Por lo tanto, en este caso tendríamos que especificar un total de 21 valores de probabilidad.

c. ¿Cuáles de las siguientes independencias se cumplen dada la estructura de la red? Utiliza el criterio de D-separación. También puedes utilizar la condición de Markov cuando esto sea suficiente.

- ¿B y E son independientes?
  Solución:
  Camino B-A-C-D-H-E: bloqueado en D
  Camino B-A-C-D-E: bloqueado en D
  Todos los posibles caminos están bloqueados, luego son independientes.

- ¿B y E son independientes, si conocemos el valor de D?
  Solución:
  Camino B-A-C-D-H-E: no bloqueado
  Hemos encontrado un camino no bloqueado, luego no son independientes.

- ¿B y E son independientes, si conocemos el valor de F?
  Solución:
  Camino B-A-C-D-H-E: no bloqueado
  Hemos encontrado un camino no bloqueado, luego no son independientes.

- ¿B y E son independientes, si conocemos el valor de C?
  Solución:
  Camino B-A-C-D-H-E: bloqueado en C
  Camino B-A-C-D-E: bloqueado en C
  Todos los posibles caminos están bloqueados, luego son independientes.

- ¿ P(C|F) = P(C) ?
  Solución:
  Nos están preguntando si C y F son independientes.
  Camino C-D-F: no bloqueado
  Hemos encontrado un camino no bloqueado, luego no son independientes.

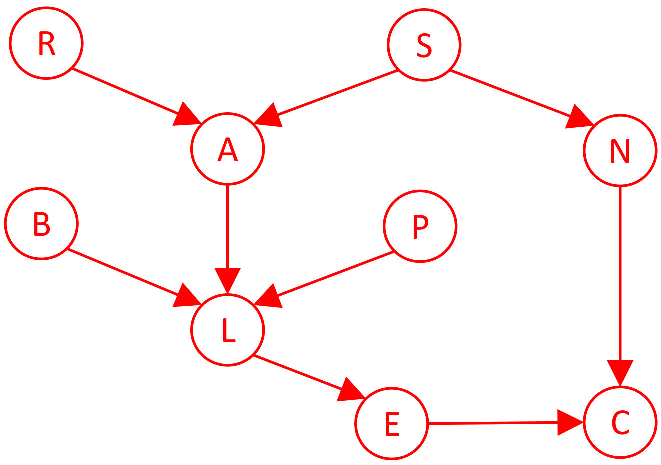
- ¿ P(B|C,A) = P(B|A) ?
  Solución:
  Nos están preguntando si B y C son independientes, conociendo A.
  Camino B-A-C: bloqueado en A
  Todos los posibles caminos están bloqueados, luego son independientes.
  También se podría probar con la condición de Markov, viendo que dados los valores de los padres de B (o sea A), B es independiente de todos sus no-descendientes (lo que incluye a C).

- ¿ P(H|F,D) = P(H|D) ?
  Solución:
  Nos están preguntando si H y F son independientes, conociendo D.
  Camino H-D-F: bloqueado en D
  Camino H-E-D-F: bloqueado en D
  Todos los posibles caminos están bloqueados, luego son independientes.
  También se podría probar con la condición de Markov, viendo que dados los valores de los padres de F (o sea D), F es independiente de todos sus no-descendientes (lo que incluye a H).

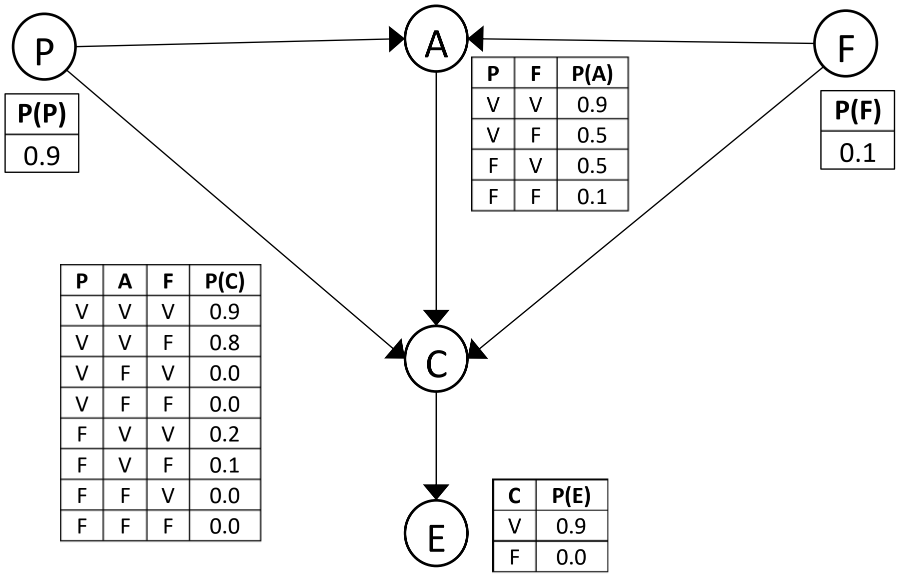
- ¿ P(C|H,F) = P(C|G,H,F) ?
  Solución:
  Nos están preguntando si C y G son independientes, conociendo H y F.
  Camino C-D-H-G: bloqueado en H
  Camino C-D-E-H-G: no bloqueado
  Hemos encontrado un camino no bloqueado, luego no son independientes.

4. Determinar la estructura de una red bayesiana para el siguiente problema: he instalado una alarma en mi casa que puede activarse (variable *A*) porque un intruso entre para robar (variable *R*) o haya un seísmo (variable *S*), que son bastante frecuentes en la zona en la que vivo. Si suena la alarma, tengo un vecino que suele avisar a mi teléfono móvil (variable *L*), pero hay veces que mi vecino no está (variable *P*) y no me llama aunque suene la alarma. También es un vecino un poco bromista y puede llamar sin que haya sonado la alarma (sea *B* la variable que determina si el vecino es serio o está bromeando). En caso de que haya un seísmo existe una probabilidad alta de que sea anunciado en la emisora de radio local (variable *N*). No siempre escucho dicha emisora (la variable *E* representa si la estoy escuchando), pero si me llama mi vecino, trato de escucharla para descartar que haya habido un seísmo. Sea *C* la variable que representa que conozco que hay un seísmo por escucharlo en la radio.

Solución:



5. Considera la siguiente red bayesiana, en donde P indica "Político comete corrupción", F indica "Fiscal amigo de la oposición", A indica "Acusado", C indica "Culpable" y E indica "Encarcelado":



P(P)
0.9

P(F)
0.1

P	F	P(A)
V	V	0.9
V	F	0.5
F	V	0.5
F	F	0.1

P	A	F	P(C)
V	V	V	0.9
V	V	F	0.8
V	F	V	0.0
V	F	F	0.0
F	V	V	0.2
F	V	F	0.1
F	F	V	0.0
F	F	F	0.0

C	P(E)
V	0.9
F	0.0

a. Calcula P(P,A,¬F,C,E)

Solución: P(P,A,¬F,C,E) = P(P) * P(A|P,¬F) * P(¬F) * P(C|P,A,¬F) * P(E|C) = 0,9 * 0,5 * (1-0,1) * 0,8 * 0,9 = **0,2916**

b. Calcula la probabilidad de que alguien sea encarcelado, sabiendo que es un político corrupto, es acusado y el fiscal es amigo de la oposición.

Solución: P(E|P,A,F) = P(E,P,A,F) / P(P,A,F) = P(E,P,A,F) / P(E,P,A,F) + P(¬E,P,A,F)

P(E,P,A,F) = P(E,P,A,F,C) + P(E,P,A,F,¬C) = P(E|C) * P(P) * P(A|P,F) * P(F) * P(C|P,A,F) + P(E|¬C) * P(P) * P(A|P,F) * P(F) * P(¬C|P,A,F) = 0,9 * 0,9 * 0,9 * 0,1 * 0,9 + 0,0 * 0,9 * 0,9 * 0,1 * (1-0,9) = 0,06561 + 0,0 = 0,06561

P(¬E,P,A,F) = P(¬E,P,A,F,C) + P(¬E,P,A,F,¬C) = P(¬E|C) * P(P) * P(A|P,F) * P(F) * P(C|P,A,F) + P(¬E|¬C) * P(P) * P(A|P,F) * P(F) * P(¬C|P,A,F) = (1-0,9) * 0,9 * 0,9 * 0,1 * 0,9 + (1-0,0) * 0,9 * 0,9 * 0,1 * (1-0,9) = 0.00729 + 0,0081 = 0,01539

P(E|P,A,F) = 0,06561 / 0,06561 + 0,01539 = **0,81**

c. ¿Cuáles de las siguientes independencias se cumplen dada la estructura de la red? Utiliza el criterio de D-separación. También puedes utilizar la condición de Markov cuando esto sea suficiente.

- ¿P y F son independientes?
  Solución:
  Camino P-A-F: bloqueado en A
  Camino P-C-F: bloqueado en C
  Camino P-A-C-F: bloqueado en C
  Camino P-C-A-F: bloqueado en C
  Como todos los posibles caminos están bloqueados, son independientes.
  También es sencillo verlo con la condición de Markov: dados los padres de P (no tiene), podemos decir que P es independiente de todos sus no-descendientes (lo que incluye a F).

- ¿P y F son independientes, si conocemos el valor de E?
  Solución:
  Camino P-A-F: no bloqueado
  Hemos encontrado un camino no bloqueado, luego no son independientes.

- ¿ P(P,A) = P(P)P(A) ?
  Solucion:
  Nos están preguntando si P es independiente de A. Claramente no son independientes (una flecha conecta directamente P con A, lo que indica que P tiene influencia directa sobre A).

- ¿ P(E|C) = P(E|C,A) ?
  Solución:
  Nos están preguntando si E y A son independientes, conociendo C.
  Con la condición de Markov, vemos que, dados los padres de E (o sea C), E es independiente de todos sus no-descendientes (lo que incluye a A).
  También se puede probar con el criterio de D-separación:
  Camino E-C-P-A: bloqueado en C.
  Camino E-C-A: bloqueado en C.
  Camino E-C-F-A: bloqueado en C.
  Como todos los posibles caminos están bloqueados, E y A son independientes.

- ¿ P(F|C,P,A) = P(F|C,P,A,E) ?
  Solución:
  Nos están preguntando si F es independiente de E, conociendo C, P y A.
  Camino E-C-F: bloqueado en C.
  Camino E-C-A-F: bloqueado en C y en A.
  Camino E-C-P-A-F: bloqueado en C y en P.

Como todos los posibles caminos están bloqueados, F y E son independientes.

d. Si quisieras añadir la variable aleatoria "Indultado", ¿cómo lo harías? Indultado significa que la persona sigue siendo culpable, pero se le ha perdonado el cumplimiento de la pena.
Solución: Claramente, "culpable" debe tener influencia en "indultado" (es decir, una flecha desde culpable hasta indultado), ya que para que alguien sea indultado debe haber sido declarado culpable. Por otra parte, "indultado" debe tener influencia sobre "encarcelado" (es decir, una flecha desde indultado hasta encarcelado), ya que si se le indulta no va a la cárcel. En principio, no parece que "indultado" tenga relación con las demás variables de la red bayesiana.

e. Supón que quieres calcular P(E|A,F) utilizando el método de ponderación de la verosimilitud. Explica cómo construirías una posible muestra, y qué peso le asignarías a dicha muestra.
Solución: P(E|A,F) = P(E,A,F) / P(A,F). Por lo tanto, deberíamos generar un gran número de muestras (el número dependerá de la precisión que deseemos). Nótese que todas las muestras generadas con el método de ponderación de la verosimilitud van a cumplir A y F. Sumaremos el peso de todas las muestras generadas (llamemos Nc a ese número), y sumaremos el peso de todas las muestras generadas que cumplan E (llamemos Ns a ese número). Entonces, Ns/Nc será una aproximación de P(E|A,F).

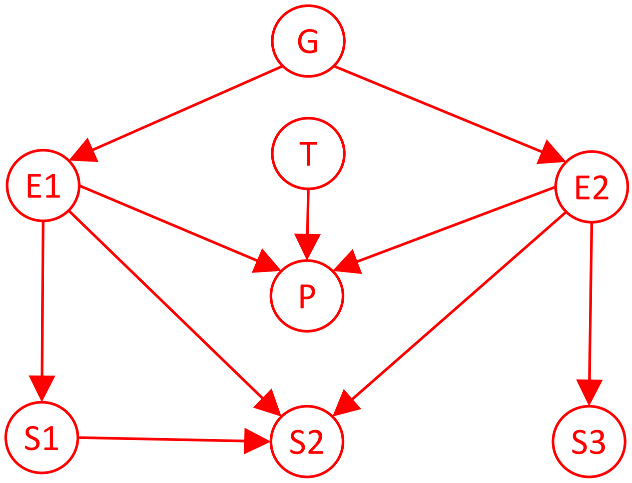
Una de las muestras se podría generar de la siguiente forma:
1. Un posible orden topológico de la red sería: P,F,A,C,E
2. P: se elige aleatoriamente P=V con probabilidad 0,9. Supongamos que nos sale P=V.
3. F: se elige obligatoriamente F=V. El peso cambia, pasando de w=1 a w=1*0,1=0,1
4. A: se elige obligatoriamente A=V. El peso cambia, pasando de w=0,1 a w=0,1*0,9=0,09
5. C: se elige aleatoriamente C=V con probabilidad 0,9. Supongamos que nos sale C=V.
6. E: se elige aleatoriamente E=V con probabilidad 0,9. Supongamos que nos sale E=V.

Finalmente, esta muestra es {P=V, F=V, A=V, C=V, E=V} con un peso w=0,09.

6. Un determinado defecto genético (variable *G*) puede producir dos enfermedades (variables *E*1, *E*2). En presencia de dicho defecto, las enfermedades se manifiestan con una determinada probabilidad, pero no existe ninguna relación entre los mecanismos que dan lugar a las enfermedades: el hecho de que una se manifieste no hace a la otra más o menos probable. Existen tres posibles síntomas asociados a las enfermedades (*S*1, *S*2, *S*3). Los síntomas *S*1 y *S*2 se asocian a la enfermedad *E*1 y los síntomas *S*2 y *S*3 a la enfermedad *E*2. En la enfermedad *E*1 la presencia del síntoma *S*1 hace al síntoma *S*2 más probable. En la enfermedad *E*2 la presencia de uno de los síntomas no cambia la probabilidad de aparición del otro síntoma. Existe una prueba de laboratorio (*P*), cuyo resultado depende de forma conjunta de la presencia o ausencia de ambas enfermedades, pero tiene comportamiento distinto en hombres y mujeres (variable *T*). Se supone que *T* no tiene relación directa con ninguna otra variable del problema.

a) Determinar la estructura de una red bayesiana para el problema descrito.

Solución:



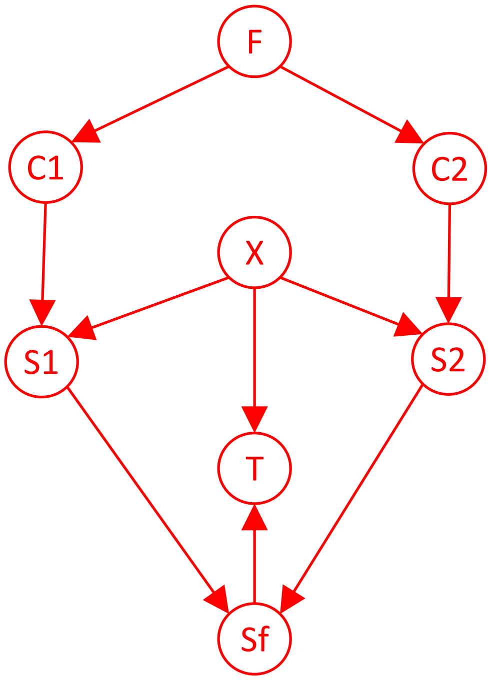
b) Indicar cuántos valores de probabilidad deberíamos especificar en total para construir la red bayesiana.

Solución: sería 1 valor para cada nodo sin padres, 2 valores para cada nodo con 1 padre, 4 valores para cada nodo con 2 padres, 8 valores para cada nodo con 3 padres, etc. Por lo tanto, en este caso tendríamos que especificar un total de 26 valores de probabilidad.

7. Tenemos un canal de información con dos transmisores. La entrada a los dos es la misma: variable *X* con valores 0 o 1. Las salidas de los transmisores (*S*1 y *S*2) serán el mismo valor de entrada si funcionan correctamente o, en el caso de que no funcionen correctamente, su salida será aleatoria. Las variables *C*1 y *C*2 representan el comportamiento de estos dos transmisores, respectivamente (con valor 0 si funcionan de forma incorrecta y 1 si es correcta). El comportamiento de los dos transmisores depende del estado de la fuente de alimentación (*F*). Esta puede estar en dos situaciones: calidad alta (1) y calidad baja (0). En el caso de calidad baja, hay una mayor probabilidad de comportamiento incorrecto en ambos casos. No hay ninguna otra influencia común sobre las variables *C*1 y *C*2. Existe un dispositivo que mira las salidas de ambos transmisores y produce un valor *Sf*. Cuando *S*1 = *S*2, entonces *Sf* coincide con ambos valores. Cuando *S*1 ≠ *S*2, entonces *Sf* toma el valor *e*. Finalmente, existe una variable (*T*) que comprueba el funcionamiento del sistema. Si *Sf* = *X*, entonces *T* = 1 (funcionó correctamente). Si *Sf* = *e*, entonces *T* = 2 (error detectado). Si *Sf* ≠ *e* y *Sf* ≠ *X*, entonces *T* = 0 (error no detectado).

a) Determinar una red bayesiana (sólo nodos y arcos, no es necesario especificar las tablas de probabilidad) que sea compatible con las relaciones entre las variables del sistema.

Solución:

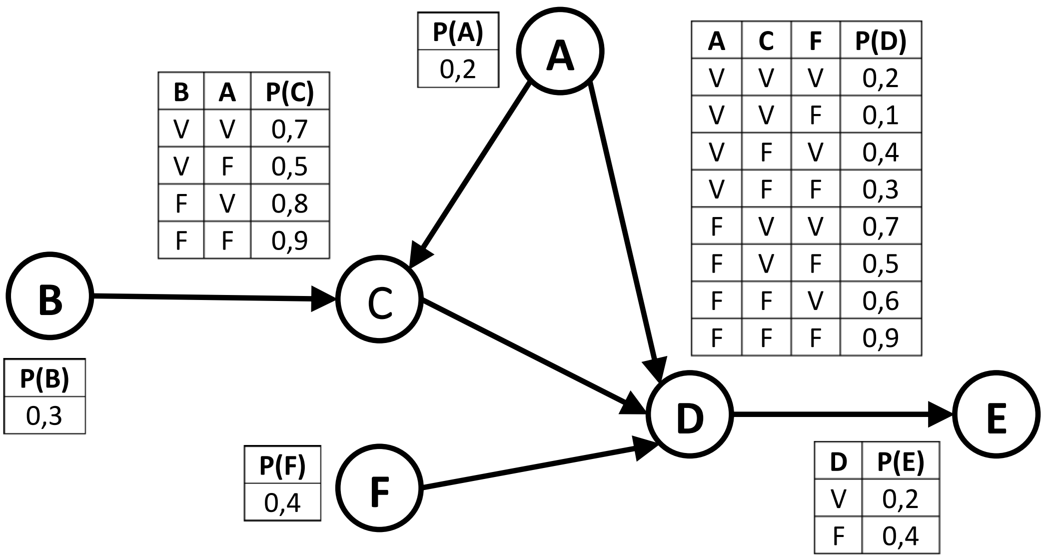


b) Escribir la tabla de probabilidad para el nodo *S*1 de tal forma que sea compatible con los datos anteriores.

Solución:

C1	X	P(S1)
V	V	1
V	F	0
F	V	0,5
F	F	0,5

8. (Pregunta del examen de Enero 2016) Considera la siguiente red bayesiana:



P(A)
0,2

B	A	P(C)
V	V	0,7
V	F	0,5
F	V	0,8
F	F	0,9

A	C	F	P(D)
V	V	V	0,2
V	V	F	0,1
V	F	V	0,4
V	F	F	0,3
F	V	V	0,7
F	V	F	0,5
F	F	V	0,6
F	F	F	0,9

P(B)
0,3

P(F)
0,4

D	P(E)
V	0,2
F	0,4

a) Calcula P(¬A,¬B,¬C,D,E,F)

Solución:
P(¬A,¬B,¬C,D,E,F) = P(¬A) * P(¬B) * P(¬C|¬A,¬B) * P(D|¬A,¬C,F) * P(E|D) * P(F) = 0,8 * 0,7 * 0,1 * 0,6 * 0,2 * 0,4 = 0,002688

b) ¿Cuáles de las siguientes independencias se cumplen dada la estructura de la red? Debes razonar la respuesta utilizando el criterio de D-separación. También puedes utilizar la condición de Markov si ésta fuese suficiente.

- ¿B y E son independientes, si conocemos el valor de D?

Solución:
Aplicamos el criterio de D-Separación:

Camino B-C-D-E: bloqueado en D
Camino B-C-A-D-E: bloqueado en D

Como todos los posibles caminos están bloqueados, sí que son independientes.

También se podría probar con la condición de Markov. Conocemos el valor de los padres de E (y de ningún otro nodo de la red), luego podemos decir que E es independiente de todos sus no-descendientes (lo que incluye a B).

- ¿B y F son independientes, si conocemos el valor de C y E?

Solución:
Aplicamos el criterio de D-Separación:

Camino B-C-D-F: bloqueado en C
Camino B-C-A-D-F: no bloqueado.

Hemos encontrado un camino no bloqueado, luego no son independientes.

En este caso la condición de Markov no es suficiente para determinar la independencia.

c) Supón que quieres calcular P(B|A,¬D) utilizando el método de ponderación de la verosimilitud. Construye paso a paso una posible muestra, e indica qué peso le asignarías a dicha muestra.

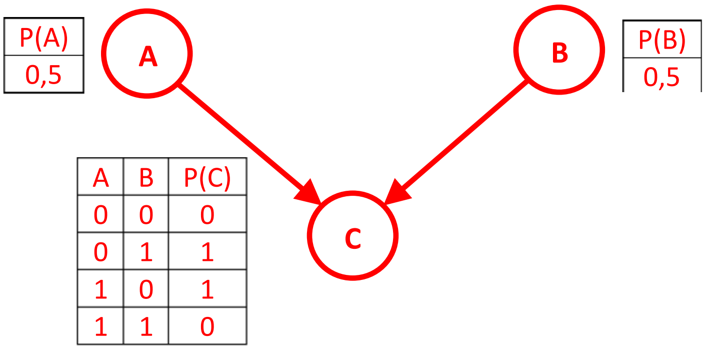
Solución:
El primer paso es determinar un orden topológico de las variables, por ejemplo: B, A, F, C, D, E. La muestra empieza teniendo un peso w=1.

B: será verdadero aleatoriamente con prob. 0,3. Supongamos que sale B=V.
A: será verdadero obligatoriamente. El nuevo peso será w = 1*0,2 = 0,2.
F: será verdadero aleatoriamente con prob. 0,4. Supongamos que sale F=F.
C: será verdadero aleatoriamente con prob. 0,7. Supongamos que sale C=V.
D: será falso obligatoriamente. El nuevo peso será w = 0,2 * 0,9 = 0,18.
E: será verdadero aleatoriamente con prob. 0,4. Supongamos que sale E=V.

Entonces, la posible muestra final que hemos generado es {B=V, A=V, F=F, C=V, D=F, E=V} y su peso es w = 0,18.

9. (Pregunta del examen de Mayo 2016) Considera el siguiente problema: Tenemos tres variables booleanas A, B y C que pueden valer 0 o 1, y se cumple la siguiente relación entre las variables: C=XOR(A, B) (es decir, que C=(A+B) mod 2). A priori, se eligen aleatoriamente los valores para A y para B. Dibuja una red bayesiana que represente este problema, con sus correspondientes tablas de probabilidad condicionada.

Solución:



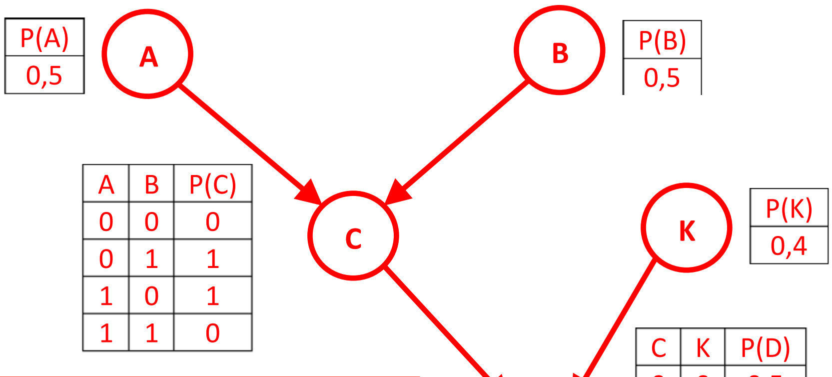
P(A)
0,5

P(B)
0,5

A	B	P(C)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- Ampliación del apartado anterior: estamos enseñándole informática a un mono y queremos comprobar si se sabe la función XOR. Para ello, le damos al mono los valores de A y de B y el mono responde cuál piensa que es el resultado de XOR(A, B). La respuesta del mono es la variable D. Lo ideal sería que D fuese igual que C. Pero puede ser diferente, o bien porque el mono no se sepa la función XOR, o bien porque se la sabe pero se ha equivocado al pulsar el botón. La variable K=1 indica que el mono conoce la función XOR, y si no la conoce es K=0. Si el mono conoce la función XOR, responderá correctamente el 99% de las veces. Por el contrario, si no la conoce, el mono responderá de forma aleatoria. Supón que, a priori, la probabilidad de que el mono conozca la función XOR es de 0,4. Amplia la red bayesiana del apartado anterior (con sus correspondientes tablas de probabilidad condicionada) para representar este problema. Si para alguna tabla necesitas alguna probabilidad no especificada en este enunciado, puedes proponer cualquier valor que consideres razonable.

Solución:



P(A)
0,5

P(B)
0,5

A	B	P(C)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

P(K)
0,4

C	K	P(D)
0	0	0,5
0	1	0,01
1	0	0,5
1	1	0,99

Otra posible solución correcta sería hacer que los padres de D fuesen A, B y K. Pero así la tabla de probabilidad saldría más larga.

10. (Pregunta del examen de Mayo 2016) En una determinada red bayesiana compuesta por 5 variables A, B, C, D y E, queremos calcular la probabilidad P(A, ¬B | C) mediante el método del muestreo estocástico estándar. Para ello, hemos realizado 8 muestras aleatorias, cuyos valores resumimos en la siguiente tabla. Indica cuál sería el resultado final de dicha probabilidad, utilizando únicamente las muestras realizadas.

A	B	C	D	E
V	V	F	F	V
V	F	V	F	V
V	F	F	F	F
V	V	F	V	V
F	V	F	F	V
V	V	V	F	F
F	F	F	V	F
F	V	V	F	V

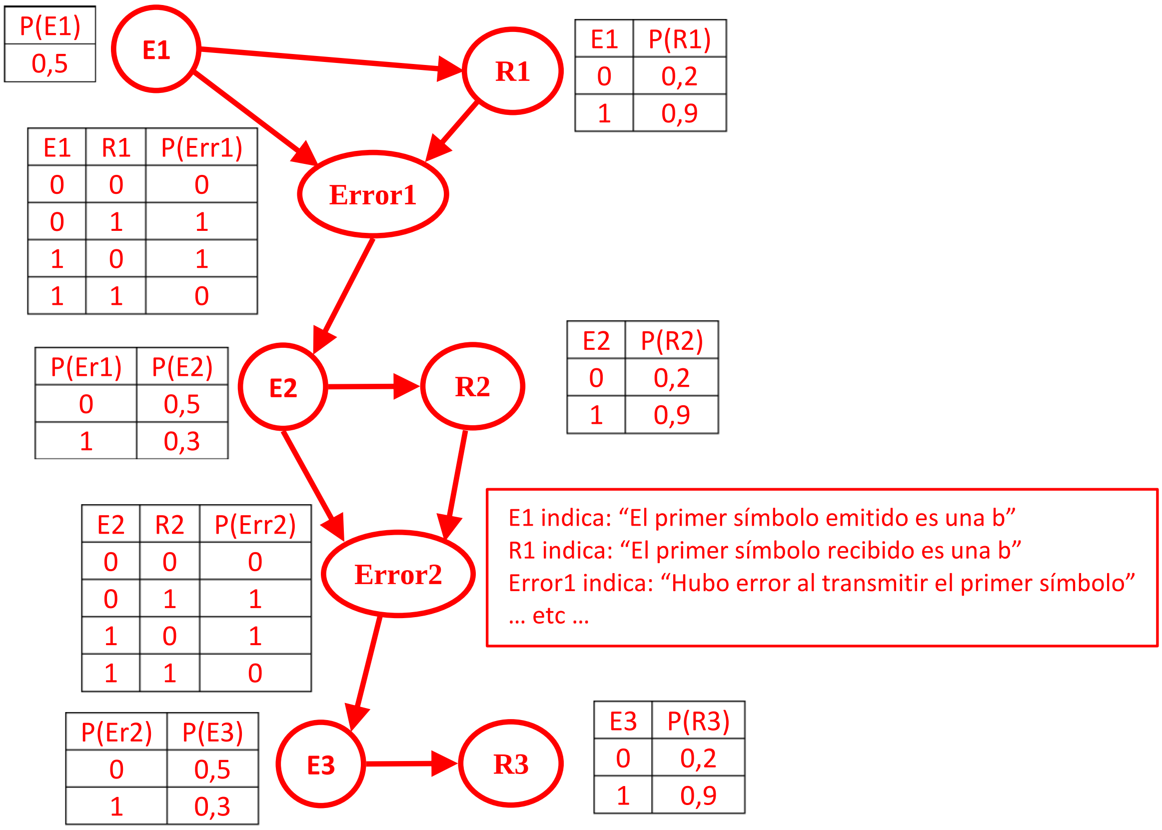
Solución:

Sabemos que P(A, ¬B | C) = P(A, ¬B, C) / P(C). En el muestreo estocástico estándar, simplemente se trataría de contar cuántas muestras cumplen A y ¬B y C (hay 1 que cumple eso), y dividir ese número por el número de muestras que cumplen C (hay 3). Por tanto, el resultado final es 1/3.

11. (Pregunta del examen de Julio 2016)

a) Considerar el problema de transmitir palabras de longitud 3 del alfabeto A={a,b} sobre un canal de transmisión. Las palabras se transmiten símbolo a símbolo. La transmisión tiene ruido y algunas veces no se recibe el símbolo emitido. Si se emite una 'a' se recibe una 'a' con probabilidad 0.8 y una 'b' con probabilidad 0.2. Si se emite una 'b' se recibe una 'b' con probabilidad 0.9 y una 'a' con probabilidad 0.1. La probabilidad de error en la recepción solo depende del símbolo emitido y no de la presencia de error en cualquier otro símbolo. Por otra parte, las palabras emitidas no son completamente aleatorias: el primer símbolo sí que es aleatorio, pero el segundo y el tercero dependen de si hubo algún error en la transmisión del símbolo que lo precede (se entiende que hubo un error si el símbolo recibido fue diferente al símbolo emitido) de la siguiente forma: si hubo un error en la transmisión del símbolo anterior entonces se emitirá una 'a' con probabilidad 0.7 y una 'b' con probabilidad 0.3. Si no hubo un error en la transmisión del símbolo anterior, entonces el símbolo emitido será aleatorio. Dibuja una red bayesiana que represente este problema, con sus correspondientes tablas de probabilidad condicionada. Si para alguna tabla necesitas alguna probabilidad no especificada en este enunciado, puedes proponer cualquier valor que consideres razonable.

Solución:



P(E1)
0,5

E1	P(R1)
0	0,2
1	0,9

E1	R1	P(Err1)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

P(Er1)	P(E2)
0	0,5
1	0,3

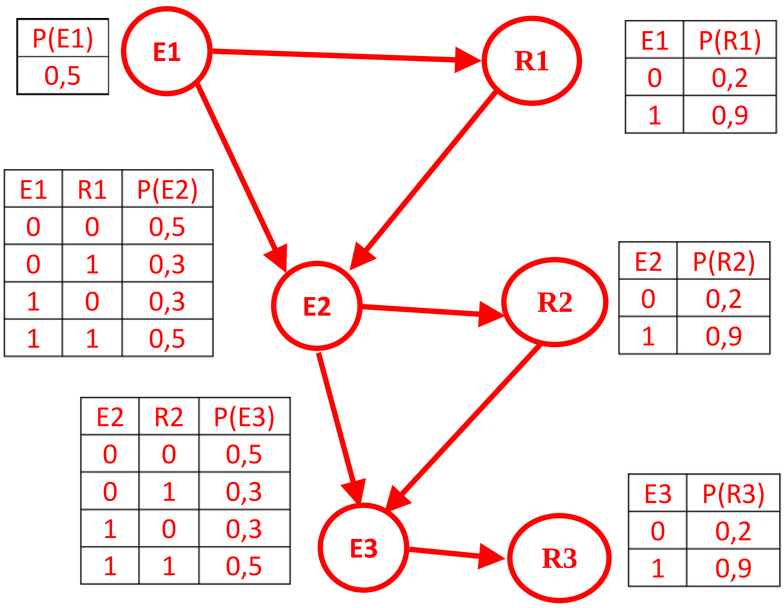
E2	P(R2)
0	0,2
1	0,9

E2	R2	P(Err2)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

P(Er2)	P(E3)
0	0,5
1	0,3

E3	P(R3)
0	0,2
1	0,9

Otra posible solución:



P(E1)
0,5

E1	P(R1)
0	0,2
1	0,9

E1	R1	P(E2)
0	0	0,5
0	1	0,3
1	0	0,3
1	1	0,5

E2	P(R2)
0	0,2
1	0,9

E2	R2	P(E3)
0	0	0,5
0	1	0,3
1	0	0,3
1	1	0,5

E3	P(R3)
0	0,2
1	0,9

b) En la red bayesiana que hayas construido en el apartado a), **razona** si se cumplen o no las siguientes independencias, dada la estructura de la red:

- ¿Son independientes el primer símbolo emitido y el tercer símbolo recibido?

  Solución: No son independientes, ya que hay un camino directo que los une (E1-Error1-E2-Error2-E3-R3) y dicho camino no está bloqueado en ningún nodo, según el criterio de D-separación.

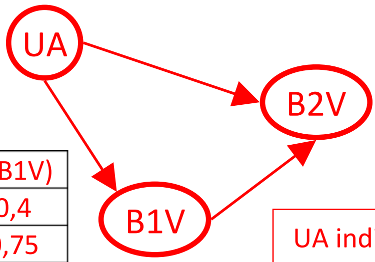
- ¿Son independientes el primer símbolo emitido y el tercer símbolo recibido, si conocemos el valor del segundo símbolo emitido?
  Solución: En este caso sí que son independientes, ya que el nodo E2 está observado, y dicho nodo bloquea todos los posibles caminos que hay entre E1 y R3, según el criterio de D-separación.

12. (Pregunta del examen de Diciembre 2016) Tenemos dos urnas: en la urna A hay dos bolas verdes y tres bolas azules. En la urna B hay tres bolas verdes y una bola azul. Alguien elige una urna al azar, saca una bola al azar y resulta que es verde. Luego saca otra bola (sin devolver a la urna la primera bola que sacó) y resulta que también es verde. ¿Cuál es la probabilidad de que sea la urna A?

Notas: Para resolver el ejercicio, construye la red bayesiana asociada al problema y calcula la inferencia sobre ella. Hacer bien la red bayesiana cuenta 0,5 puntos y hacer bien los cálculos correspondientes cuenta 0,5 puntos. Si no dispones de calculadora puedes dejar los cálculos indicados (por ejemplo 0,25 + 0,5 / 0,25 + 0,8).

Solución:

P(UA)
0,5



UA	B1V	P(B2V)
V	V	0,25
V	F	0,5
F	V	0,667
F	F	1

UA	P(B1V)
V	0,4
F	0,75

UA indica "La urna elegida es la urna A"

B1V indica "La 1ª bola sacada es verde"

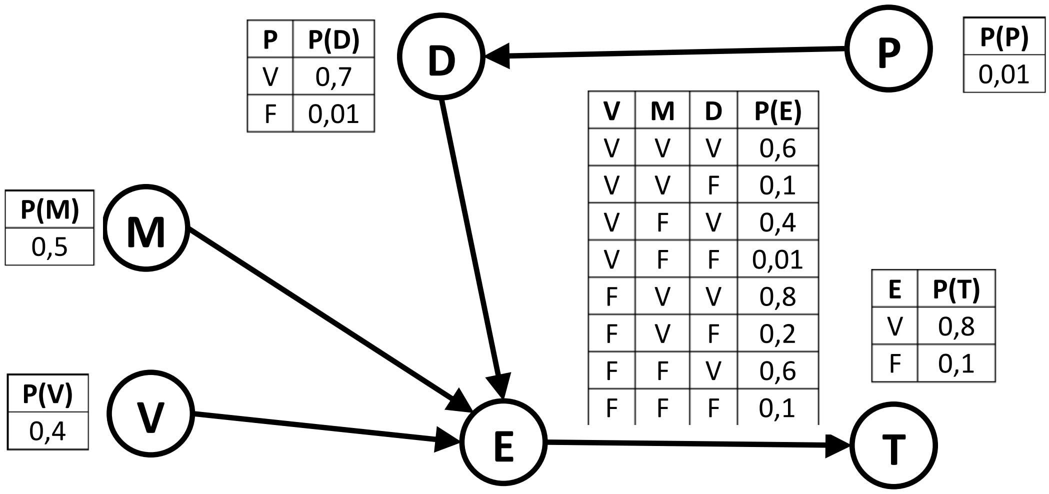
$$P(UA|B1V,B2V) = \frac{P(UA,B1V,B2V)}{P(B1V,B2V)} = \frac{P(UA,B1V,B2V)}{P(UA,B1V,B2V) + P(\sim UA,B1V,B2V)} =$$

$$= \frac{0{,}05}{0{,}05 + 0{,}25} = \mathbf{0,167}$$

$$P(UA,B1V,B2V) = P(UA) * P(B1V|UA) * P(B2V|UA,B1V) = 0{,}5 * 0{,}4 * 0{,}25 = 0{,}05$$

$$P(\sim UA,B1V,B2V) = P(\sim UA) * P(B1V|\sim UA) * P(B2V|\sim UA,B1V) = 0{,}5 * 0{,}75 * 0{,}667 = 0{,}25$$

13. (Pregunta del examen de Mayo 2017) Considera la siguiente red bayesiana, en donde hay una serie de factores que influyen en la probabilidad de tener una determinada enfermedad (variable E). Dichos factores son: que el individuo tenga hábitos de vida saludables o no (variable V), que el sexo del individuo sea masculino o no (variable M), y que el individuo tenga o no un determinado defecto genético (variable D). La variable P indica si los padres del individuo son portadores del defecto genético, lo cual influye en la probabilidad de que el individuo tenga dicho defecto. Por último la variable T representa el resultado de un test médico que determina si el individuo tiene la enfermedad.



P	P(D)
V	0,7
F	0,01

P(P)
0,01

P(M)
0,5

P(V)
0,4

V	M	D	P(E)
V	V	V	0,6
V	V	F	0,1
V	F	V	0,4
V	F	F	0,01
F	V	V	0,8
F	V	F	0,2
F	F	V	0,6
F	F	F	0,1

E	P(T)
V	0,8
F	0,1

a) Calcula P(D,¬V,P,M,T) (nota: si no tienes calculadora puedes dejar las operaciones indicadas, por ejemplo 0,3 * 0,2 + 0,5 + 0,8 * 0,3 * 0,4)

Solución:

P(D,¬V,P,M,T) = P(D,¬V,P,M,T,¬E) + P(D,¬V,P,M,T,E) = 0,000042 + 0,001344 = 0,001386

P(D,¬V,P,M,T,¬E) = P(D|P) * P(¬E|¬V,M,D) * P(¬V) * P(P) * P(M) * P(T|¬E) = 0,7 * 0,2 * 0,6 * 0,01 * 0,5 * 0,1 = 0,000042

P(D,¬V,P,M,T,E) = P(D|P) * P(E|¬V,M,D) * P(¬V) * P(P) * P(M) * P(T|E) = 0,7 * 0,8 * 0,6 * 0,01 * 0,5 * 0,8 = 0,001344

b) Dada la estructura de la red, ¿podemos decir que P y M son independientes, si conocemos el valor de T? Debes razonar la respuesta utilizando el criterio de D-separación. También puedes utilizar la condición de Markov si ésta fuese suficiente.

Solución:

Aplicamos el criterio de D-Separación, ya que en este caso la condición de Markov no es suficiente para determinar la independencia (recordad que dicha condición no se puede aplicar si conocemos el valor de algún nodo de la red aparte del de los padres de los correspondientes nodos).

El único camino es P-D-E-M y no está bloqueado (recordad que el nodo E no bloquea, debido a que conocemos el valor de un descendiente suyo). Hemos encontrado un camino no bloqueado, luego no son independientes.

c) Imagina que quieres añadir a la red la siguiente información:

- La máquina que realiza el test puede estar defectuosa (variable F), y en ese caso falla más a la hora de determinar si el individuo tiene o no tiene la enfermedad.
- La enfermedad puede producir un extraño síntoma (variable S) con una alta probabilidad, pero es poco probable que se manifieste si no se tiene esta enfermedad. Además, el síntoma aparece con más frecuencia en individuos de sexo femenino.

¿Cómo modificarías la red? Es suficiente con que indiques la nueva estructura (nodos y arcos), no hace falta que indiques ninguna tabla de probabilidad.

Solución: