ALGUNOS EJERCICIOS DE REDES BAYESIANAS

1. Tenemos dos sobres: en el “bueno” hay dos bolas negras, dos bolas rojas y un billete de 10 euros. En el “malo” hay dos bolas negras y una bola roja.

a. Alguien elige un sobre al azar y te lo ofrece. ¿Cuánto deberías pagar como mucho por él?
b. Antes de decidir, se te permite ver una de las bolas que contiene el sobre. Coges una al azar y ves que es negra. ¿Cuánto deberías pagar como mucho, en este caso?
c. ¿Y si fuese roja?

Nota: Para resolver las anteriores cuestiones, construye la red bayesiana asociada al problema y calcula las inferencias sobre ella.

2. Tenemos 3 monedas trucadas (llamémoslas a,b,c). Dichas monedas sacan cara en el 20%, 60% y 80% de los casos, respectivamente. Elegimos aleatoriamente una moneda y la lanzamos tres veces.

a. Construye la red bayesiana asociada.
b. Suponiendo que hemos sacado cara en el primer lanzamiento, cara en el segundo y cruz en el tercero, calcula la probabilidad de haber elegido cada una de las monedas.

3. Supón que en una central nuclear tenemos las cinco siguientes variables aleatorias:

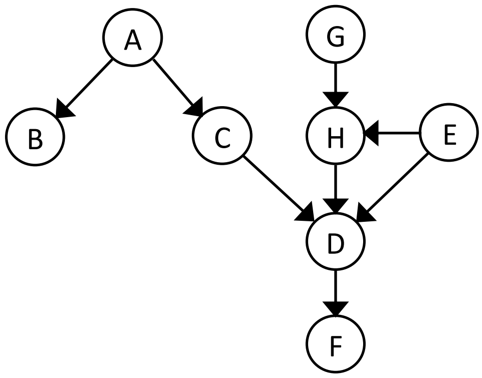
IN: El indicador muestra temperatura normal (si no, es alta)
TN: La temperatura del núcleo es normal (si no, es alta)
ID: El indicador está defectuoso
AD: La alarma está defectuosa
AS: La alarma suena

Sabemos, además, que si la alarma funciona correctamente, sonará cuando el indicador muestre una temperatura alta. Si no funciona correctamente, no sonará nunca. Por otra parte, si el indicador funciona correctamente, mostrará la temperatura correcta del núcleo con mayor probabilidad que si no funciona correctamente.

Determinar una red bayesiana (sólo nodos y arcos, no es necesario especificar las tablas de probabilidad) que sea compatible con las relaciones entre las variables del sistema.

4. Determinar la estructura de una red bayesiana para el siguiente problema: un granjero quiere determinar si una vaca está preñada (variable *P*) después de una inseminación artificial. Para ello dispone de tres tests. El primero de ellos es una ecografía (variable *E*) y los otros dos son un test de sangre (variable *S*) y uno de orina (variable *O*). Se supone que los dos últimos tests se basan en el nivel hormonal de la vaca (variable *H*) que puede ser alto o bajo y que, a su vez, depende de si la vaca está realmente preñada. Existe un tipo raro de sangre (variable *T*) que hace que el resultado del test de sangre sea siempre positivo con independencia de si la vaca está preñada o no. Para descartar esta situación, el granjero también realiza un test para comprobar el tipo de sangre (variable *TT*).

5. Considera la siguiente red bayesiana:



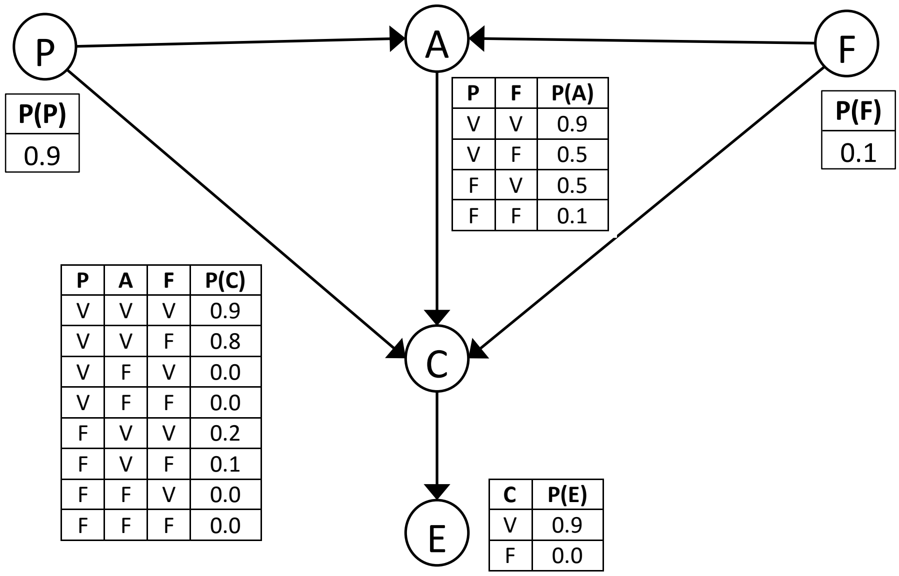
a. ¿Cuántas probabilidades en total tendría la distribución conjunta si las 8 variables A,B,C,D,E,F,G,H son booleanas, y no conociésemos ninguna relación de independencia o independencia condicional entre ellas?

b. Ahora considera que conocemos las relaciones de independencia entre dichas variables booleanas indicadas en la red de la figura, ¿cuántas probabilidades en total deberíamos definir para construir la red?

c. ¿Cuáles de las siguientes independencias se cumplen dada la estructura de la red? Utiliza el criterio de D-separación. También puedes utilizar la condición de Markov cuando esto sea suficiente.
   - ¿B y E son independientes?
   - ¿B y E son independientes, si conocemos el valor de D?
   - ¿B y E son independientes, si conocemos el valor de F?
   - ¿B y E son independientes, si conocemos el valor de C?
   - ¿ $P(C|F) = P(C)$?
   - ¿ $P(B|C,A) = P(B|A)$?
   - ¿ $P(H|F,D) = P(H|D)$?
   - ¿ $P(C|H,F) = P(C|G,H,F)$?

6. Determinar la estructura de una red bayesiana para el siguiente problema: he instalado una alarma en mi casa que puede activarse (variable *A*) porque un intruso entre para robar (variable *R*) o haya un seísmo (variable *S*), que son bastante frecuentes en la zona en la que vivo. Si suena la alarma, tengo un vecino que suele avisar a mi teléfono móvil (variable *L*), pero hay veces que mi vecino no está (variable *P*) y no me llama aunque suene la alarma. También es un vecino un poco bromista y puede llamar sin que haya sonado la alarma (sea *B* la variable que determina si el vecino es serio o está bromeando). En caso de que haya un seísmo existe una probabilidad alta de que sea anunciado en la emisora de radio local (variable *N*). No siempre escucho dicha emisora (la variable *E* representa si la estoy escuchando), pero si me llama mi vecino, trato de escucharla para descartar que haya habido un seísmo. Sea *C* la variable que representa que conozco que hay un seísmo por escucharlo en la radio.

7. Considera la siguiente red bayesiana, en donde P indica “Político comete corrupción”, F indica “Fiscal amigo de la oposición”, A indica “Acusado”, C indica “Culpable” y E indica “Encarcelado”:



P(P)
0.9

P(F)
0.1

P	F	P(A)
V	V	0.9
V	F	0.5
F	V	0.5
F	F	0.1

P	A	F	P(C)
V	V	V	0.9
V	V	F	0.8
V	F	V	0.0
V	F	F	0.0
F	V	V	0.2
F	V	F	0.1
F	F	V	0.0
F	F	F	0.0

C	P(E)
V	0.9
F	0.0

a. Calcula P(P,A,¬F,C,E)

b. Calcula la probabilidad de que alguien sea encarcelado, sabiendo que es un político corrupto, es acusado y el fiscal es amigo de la oposición.

c. ¿Cuáles de las siguientes independencias se cumplen dada la estructura de la red? Utiliza el criterio de D-separación. También puedes utilizar la condición de Markov cuando esto sea suficiente.

- ¿P y F son independientes?
- ¿P y F son independientes, si conocemos el valor de E?
- ¿ P(P,A) = P(P)P(A) ?
- ¿ P(E|C) = P(E|C,A) ?
- ¿ P(F|C,P,A) = P(F|C,P,A,E) ?

d. Una “independencia específica del contexto” significa que una variable aleatoria es independiente de algunos de sus padres, fijando determinados valores de sus otros padres. Además de las relaciones de independencia condicional dadas por la estructura del grafo, ¿qué independencias específicas del contexto existen en esta red bayesiana?

e. Si quisieras añadir la variable aleatoria “Indultado”, ¿cómo lo harías? Indultado significa que la persona sigue siendo culpable, pero se le ha perdonado el cumplimiento de la pena.

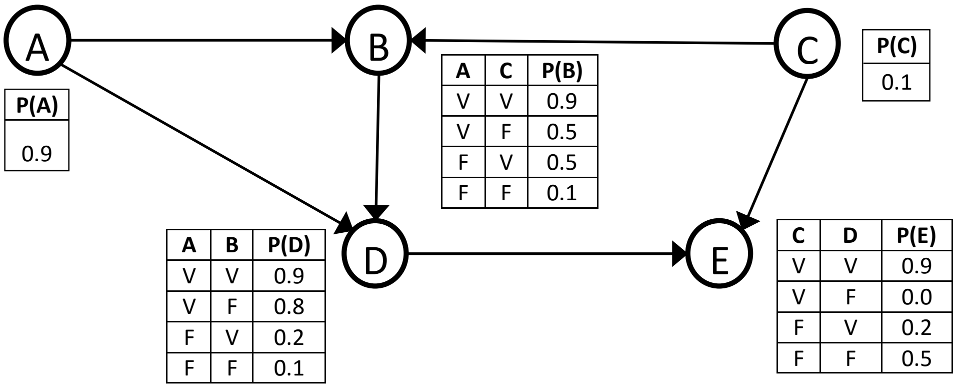
f. Supón que quieres calcular P(E|A,F) utilizando el método de ponderación de la verosimilitud. Explica cómo construirías una posible muestra, y qué peso le asignarías a dicha muestra.

8. Un determinado defecto genético (variable *G*) puede producir dos enfermedades (variables *E*1, *E*2). En presencia de dicho defecto, las enfermedades se manifiestan con una determinada probabilidad, pero no existe ninguna relación entre los mecanismos que dan lugar a las enfermedades: el hecho de que una se manifieste no hace a la otra más o menos probable. Existen tres posibles síntomas asociados a las enfermedades (*S*1, *S*2, *S*3). Los síntomas *S*1 y *S*2 se asocian a la enfermedad *E*1 y los síntomas *S*2 y *S*3 a la enfermedad *E*2. En la enfermedad *E*1 la presencia del síntoma *S*1 hace al síntoma *S*2 más probable. En la enfermedad *E*2 la presencia de uno de los síntomas no cambia la probabilidad de aparición del otro síntoma. Existe una prueba de laboratorio (*P*), cuyo resultado depende de forma conjunta de la presencia o ausencia de ambas enfermedades, pero tiene comportamiento distinto en hombres y mujeres (variable *T*). Se supone que *T* no tiene relación directa con ninguna otra variable del problema.

a) Determinar la estructura de una red bayesiana para el problema descrito.

b) Indicar cuántos valores de probabilidad deberíamos especificar en total para construir la red bayesiana.

9. (Pregunta del examen de Enero 2015) Considera la siguiente red bayesiana:



P(A)
0.9

A	C	P(B)
V	V	0.9
V	F	0.5
F	V	0.5
F	F	0.1

P(C)
0.1

A	B	P(D)
V	V	0.9
V	F	0.8
F	V	0.2
F	F	0.1

C	D	P(E)
V	V	0.9
V	F	0.0
F	V	0.2
F	F	0.5

a. Calcula P(¬A,¬B,¬C,D,E)
b. Calcula P(¬B,¬C,D,E)
c. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones se cumplen, dada la estructura de la red? No es suficiente decir sí o no, debes razonar la respuesta.
   - P(A,C) = P(A)P(C)
   - P(D|B) = P(D|B,A)
d. Supón que quieres calcular P(¬B,¬C,E | D), pero no de forma exacta sino de forma aproximada, mediante el algoritmo estándar de muestreo. Explica brevemente cómo tendrías que proceder.

Nota: En los apartados a) y b) no es necesario dar el resultado final exacto, es suficiente con dejar indicadas las operaciones necesarias, por ejemplo 0,4 × 0,5 + 0,9 × 0,2 × 0,1 + 0,4 × 0,9.

10. (Pregunta del examen de Mayo 2015) Tenemos una enfermedad que queremos diagnosticar, y tres máquinas tales que cada una realiza un determinado test a un paciente. El resultado de dichos test puede ser positivo o negativo, y sabemos que los resultados de los test son condicionalmente independientes conocido si se tiene o no se tiene la enfermedad.

La enfermedad es más común en los fumadores (la tienen con probabilidad 0.005) que entre los no fumadores (la tienen con probabilidad 0.00001).

Por otra parte, sabemos que la probabilidad de que un individuo cualquiera sea fumador es de 0.3. Si las máquinas funcionan bien, las probabilidades de que los test den positivo según se tenga o no la enfermedad son las siguientes:

	Test 1 positivo	Test 2 positivo	Test 3 positivo
Enfermo	0.9	0.8	0.75
No enfermo	0.2	0.05	0.06

Por desgracia, las máquinas no son perfectas, sino que cada una de las máquinas funciona incorrectamente con probabilidad 0.001, y en ese caso devuelve positivo o negativo de forma aleatoria en su correspondiente test.

En esta pregunta se pide determinar una red bayesiana, con sus tablas de probabilidad, para representar el conocimiento anterior sobre el problema de diagnóstico de la enfermedad. Si en alguna tabla de probabilidad te hiciese falta algún dato no especificado en el enunciado del problema, puedes poner cualquier valor que consideres razonable.

Nota: En el examen de Junio 2015 la pregunta era exactamente igual pero en lugar de 3 máquinas era una única máquina la que realizaba las 3 pruebas. ¿Cómo cambiaría la red bayesiana en este caso?

11. Tenemos un canal de información con dos transmisores. La entrada a los dos es la misma: variable X con valores 0 o 1. Las salidas de los transmisores ($S1$ y $S2$) serán el mismo valor de entrada si funcionan correctamente o, en el caso de que no funcionen correctamente, su salida será aleatoria. Las variables $C1$ y $C2$ representan el comportamiento de estos dos transmisores, respectivamente (con valor 0 si funcionan de forma incorrecta y 1 si es correcta). El comportamiento de los dos transmisores depende del estado de la fuente de alimentación (F). Esta puede estar en dos situaciones: calidad alta (1) y calidad baja (0). En el caso de calidad baja, hay una mayor probabilidad de comportamiento incorrecto en ambos casos. No hay ninguna otra influencia común sobre las variables $C1$ y $C2$. Existe un dispositivo que mira las salidas de ambos transmisores y produce un valor Sf. Cuando $S1 = S2$, entonces Sf coincide con ambos valores. Cuando $S1 \neq S2$, entonces Sf toma el valor e. Finalmente, existe una variable (T) que comprueba el funcionamiento del sistema. Si $Sf = X$, entonces $T = 1$ (funcionó correctamente). Si $Sf = e$, entonces $T = 2$ (error detectado). Si $Sf \neq e$ y $Sf \neq X$, entonces $T = 0$ (error no detectado).

a) Determinar una red bayesiana (sólo nodos y arcos, no es necesario especificar las tablas de probabilidad) que sea compatible con las relaciones entre las variables del sistema.
b) Escribir la tabla de probabilidad para el nodo $S1$ de tal forma que sea compatible con los datos anteriores.