Ejercicios de Redes Bayesianas

11 de octubre de 2023

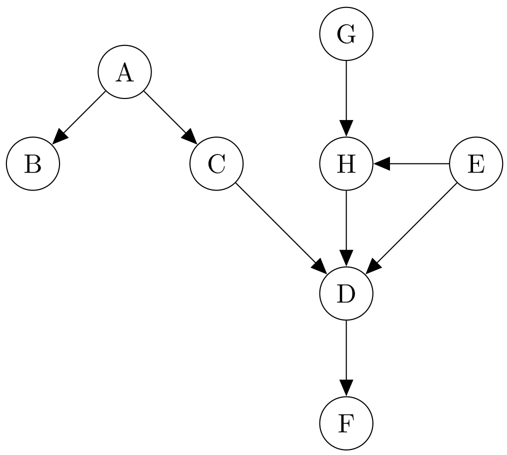
Ejercicio1. Tenemos 3 monedas trucadas (llamémoslas a,b,c). Dichas monedas sacan cara en el 20 %, 60 % y 80 % de los casos, respectivamente. Elegimos aleatoriamente una moneda y la lanzamos tres veces.

1. Construye la red bayesiana asociada.
2. Suponiendo que hemos sacado cara en el primer lanzamiento, cara en el segundo y cruz en el tercero, calcula la probabilidad de haber elegido cada una de las monedas.

Ejercicio2. Representa el grafo de la red bayesiana de acuerdo con el siguiente conocimiento del dominio:

Las variables A, B y C son dependientes por pares, pero A y C son independientes conocida B. También las variables D y E son independientes dada B, pero E y C son independientes de forma marginal. Las variables D y F son dependientes, pero dejan de serlo cuando se conoce la variable G.

Ejercicio3. Considera la siguiente red bayesiana:



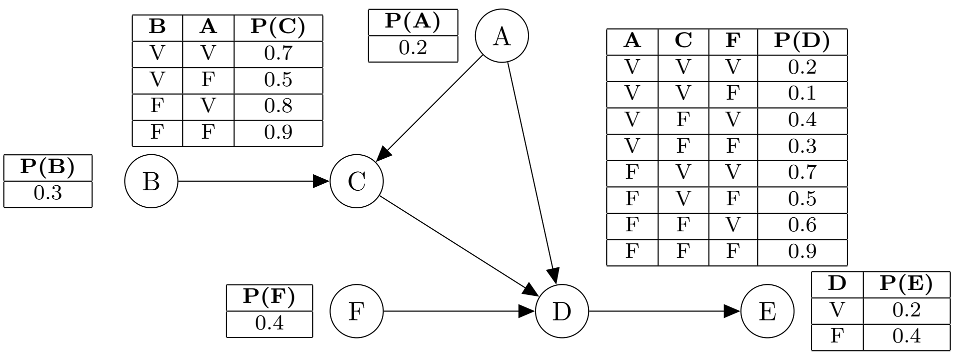
1. ¿Cuántas probabilidades en total tendría la distribución conjunta si las 8 variables A, B, C, D, E, F, G, H son booleanas, y no conociésemos ninguna relación de independencia o independencia condicional entre ellas?
2. Ahora considera que conocemos las relaciones de independencia entre dichas variables booleanas indicadas en la red de la figura, ¿cuántas probabilidades en total deberíamos definir para construir la red?

3. ¿Cuáles de las siguientes independencias se cumplen dada la estructura de la red? Utiliza el criterio de D-separación. También puedes utilizar la condición de Markov cuando esto sea suficiente.
   - ¿B y E son independientes?
   - ¿B y E son independientes, si conocemos el valor de D?
   - ¿B y E son independientes, si conocemos el valor de F?
   - ¿B y E son independientes, si conocemos el valor de C?
   - ¿ $P(C|F) = P(C)$?
   - ¿ $P(B|C, A) = P(B|A)$?
   - ¿ $P(H|F, D) = P(H|D)$?
   - ¿ $P(C|H, F) = P(C|G, H, F)$?

Ejercicio4. Un determinado defecto genético (variable G) puede producir dos enfermedades (variables $E1$, $E2$). En presencia de dicho defecto, las enfermedades se manifiestan con una determinada probabilidad, pero no existe ninguna relación entre los mecanismos que dan lugar a las enfermedades: el hecho de que una se manifieste no hace a la otra más o menos probable. Existen tres posibles síntomas asociados a las enfermedades ($S1$, $S2$, $S3$). Los síntomas $S1$ y $S2$ se asocian a la enfermedad $E1$ y los síntomas $S2$ y $S3$ a la enfermedad $E2$. En la enfermedad $E1$ la presencia del síntoma $S1$ hace al síntoma $S2$ más probable. En la enfermedad $E2$ la presencia de uno de los síntomas no cambia la probabilidad de aparición del otro síntoma. Existe una prueba de laboratorio (P), cuyo resultado depende de forma conjunta de la presencia o ausencia de ambas enfermedades, pero tiene comportamiento distinto en hombres y mujeres (variable T). Se supone que T no tiene relación directa con ninguna otra variable del problema.

1. Determinar la estructura de una red bayesiana para el problema descrito.
2. Indicar cuántos valores de probabilidad deberíamos especificar en total para construir la red bayesiana.

Ejercicio5. Considera la siguiente red bayesiana:



P(A)
0.2

P(B)
0.3

P(F)
0.4

B	A	P(C)
V	V	0.7
V	F	0.5
F	V	0.8
F	F	0.9

A	C	F	P(D)
V	V	V	0.2
V	V	F	0.1
V	F	V	0.4
V	F	F	0.3
F	V	V	0.7
F	V	F	0.5
F	F	V	0.6
F	F	F	0.9

D	P(E)
V	0.2
F	0.4

1. Calcula $P(\neg A, \neg B, \neg C, D, E, F)$
2. ¿Cuáles de las siguientes independencias se cumplen dada la estructura de la red? Debes razonar la respuesta utilizando el criterio de D-separación. También puedes utilizar la condición de Markov si ésta fuese suficiente.

- ¿B y E son independientes, si conocemos el valor de D?
- ¿B y F son independientes, si conocemos el valor de C y E?

3. Supón que quieres calcular $P(B|A, \neg D)$ utilizando el método de ponderación de la verosimilitud. Construye paso a paso una posible muestra, e indica qué peso le asignarías a dicha muestra.

Ejercicio6. En una determinada red bayesiana compuesta por 5 variables A, B, C, D y E, queremos calcular la probabilidad $P(A, \neg B|C)$ mediante el método del muestreo estocástico estándar. Para ello, hemos realizado 8 muestras aleatorias, cuyos valores resumimos en la siguiente tabla. Indica cuál sería el resultado final de dicha probabilidad, utilizando únicamente las muestras realizadas.

A	**B**	**C**	**D**	**E**
V	V	F	F	V
V	F	V	F	V
V	F	F	F	F
V	V	F	V	V
F	V	F	F	V
V	V	V	F	F
F	F	F	V	F
F	V	V	F	V

Ejercicio7. Tenemos dos urnas: en la urna A hay dos bolas verdes y tres bolas azules. En la urna B hay tres bolas verdes y una bola azul. Alguien elige una urna al azar, saca una bola también al azar y resulta que es verde. Luego saca otra bola (sin devolver a la urna la primera bola que sacó) y resulta que también es verde. ¿Cuál es la probabilidad de que sea la urna A?

Ejercicio8. En el concurso *¿Hay trato?* al concursante se le ofrece abrir una de las tres puertas misteriosas. Detrás de una de ellas está el premio y detrás de las otras dos nada, el concursante ganará lo que hay en la puerta que abre. Evidentemente, el organizador del concurso elige en que puerta coloca el premio, pero el concursante no puede saberlo. Después de que el concursante elige la puerta que quiere abrir, pero antes de abrirla, el presentador abre otra de las puerta, obviamente no la del premio, y ofrece al concursante cambiar de opción.

En general, ¿será más ventajoso cambiar la opción inicial o mantenerla? Diseña la red bayesiana que modela este escenario y calcula la probabilidad de ganar el premio si se cambia de puerta cuando el concursante ha elegido la primera puerta y el presentador abre la puerta 2.