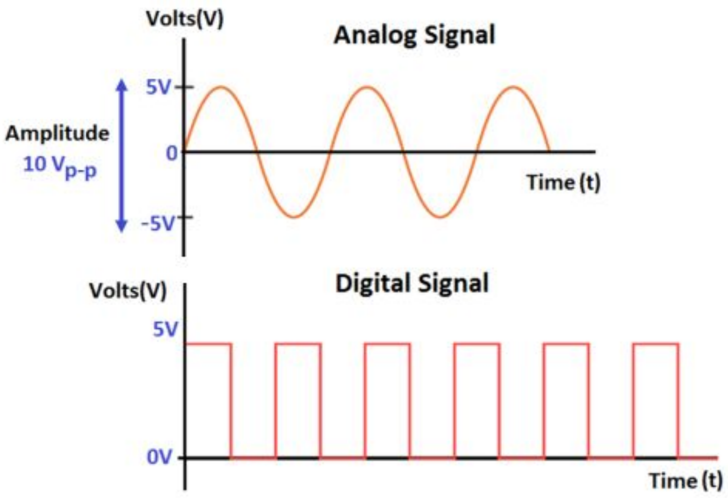
Tecniche classiche di elaborazione dei dati sensoriali

Dipartimento
di Ingegneria Chimica,
dei Materiali e della
Produzione Industriale
Università degli Studi
di Napoli Federico II

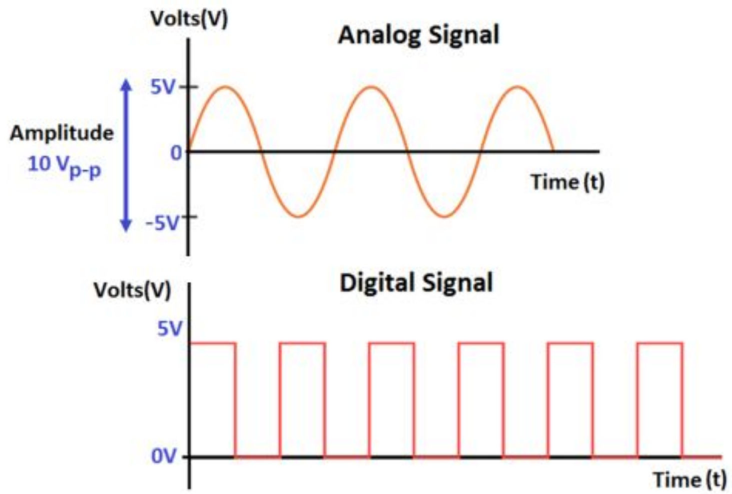
Segnali analogici e digitali (I)



I segnali possono essere classificati come:

- A tempo continuo: definiti per ogni istante di tempo
- A tempo discreto: definiti in istanti discreti di tempo, probabilmente ogni millisecondo, secondo, etc.

Segnali analogici e digitali (II)

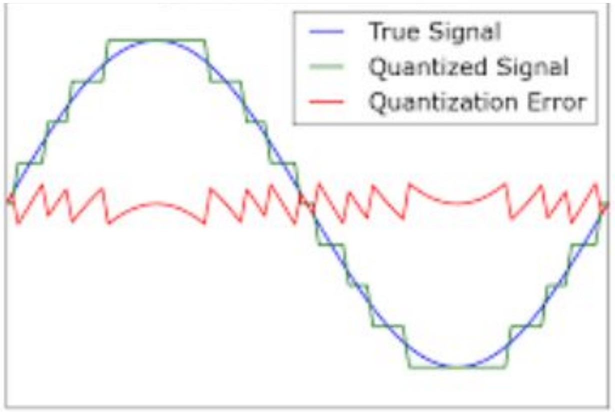


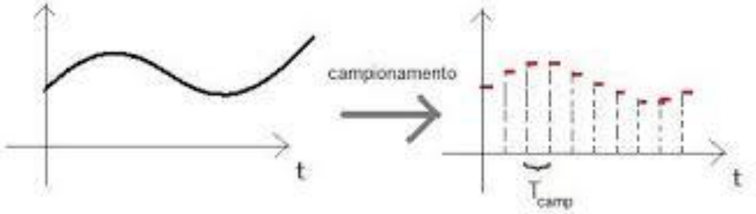
I segnali possono essere classificati come:

- A tempo continuo: definiti per ogni istante di tempo
- A tempo discreto: definiti in istanti discreti di tempo, probabilmente ogni millisecondo, secondo, etc.

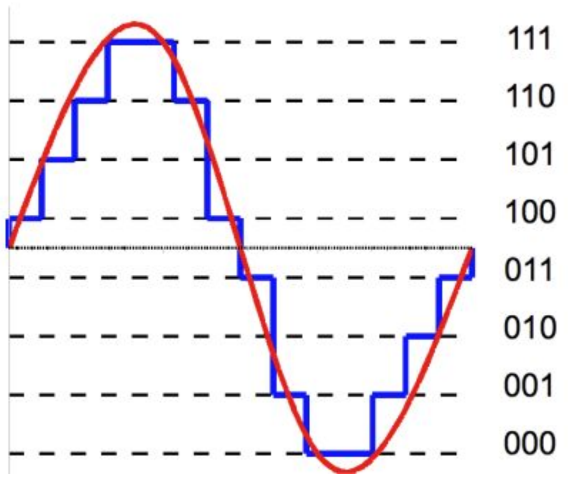
Quando I segnali analogici vengono convertiti in digitali subiscono il processo di **quantizzazion**e e **campionamento**:

- Uniforme ad intervalli discreti
- Non uniforme





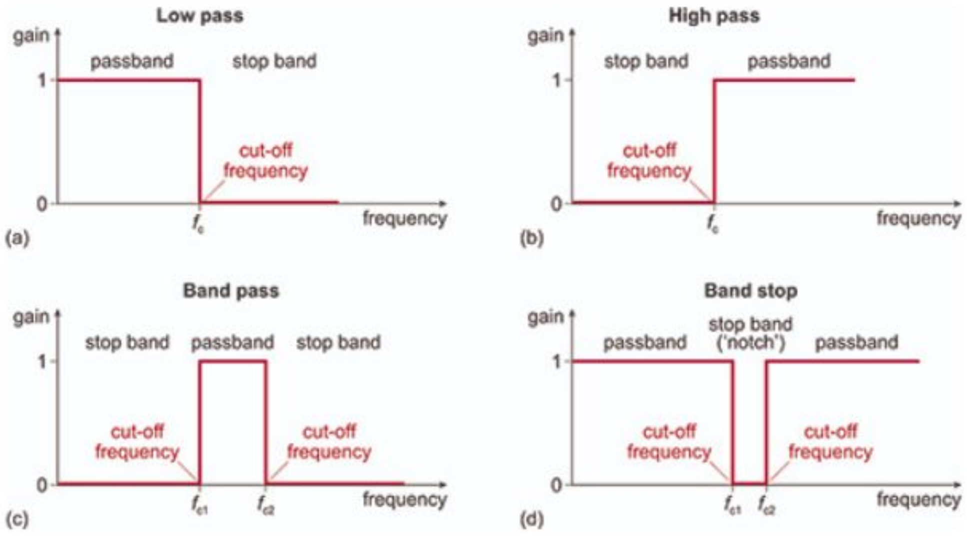
Segnali analogici e digitali (III)



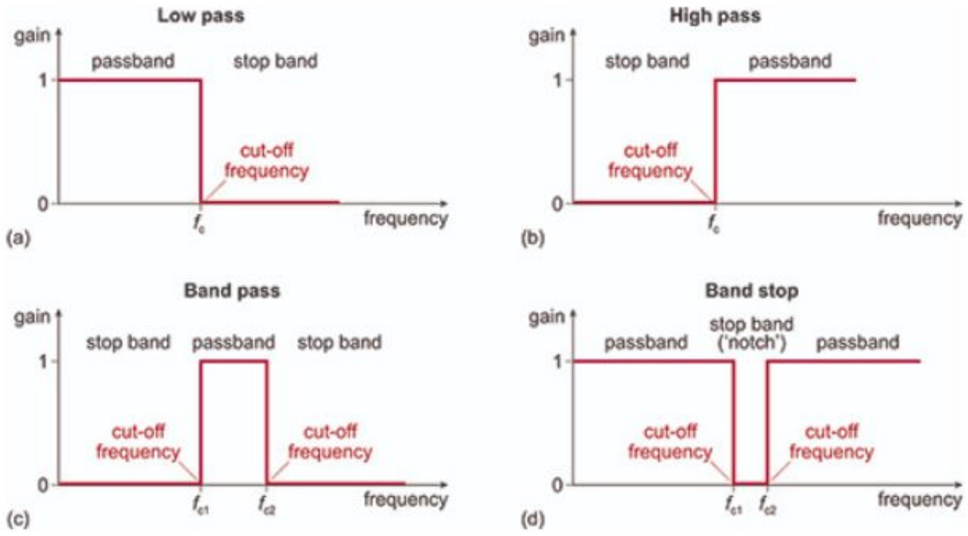
La quantizzazione è l’operazione equivalente al campionamento ma sull’asse delle y; In particolare si fà in modo che il valore del segnale possa assumere un certo numero di valori finiti

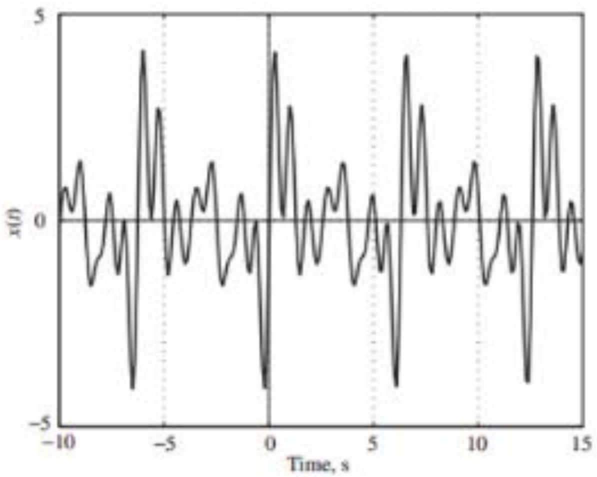
Come riportato in figura, successivamente alla fase di campionamento (asse temporale) e di quantizzazione (asse y) avviene la fase di **codifica**; La codifica è l’operazione che porta a trasformare un segnale digitale quantizzato in un flusso di bit. Nell’esempio in figura si nota una rappresentazione a 3-bit del segnale digitale.

Introduzione ai filtri (I)

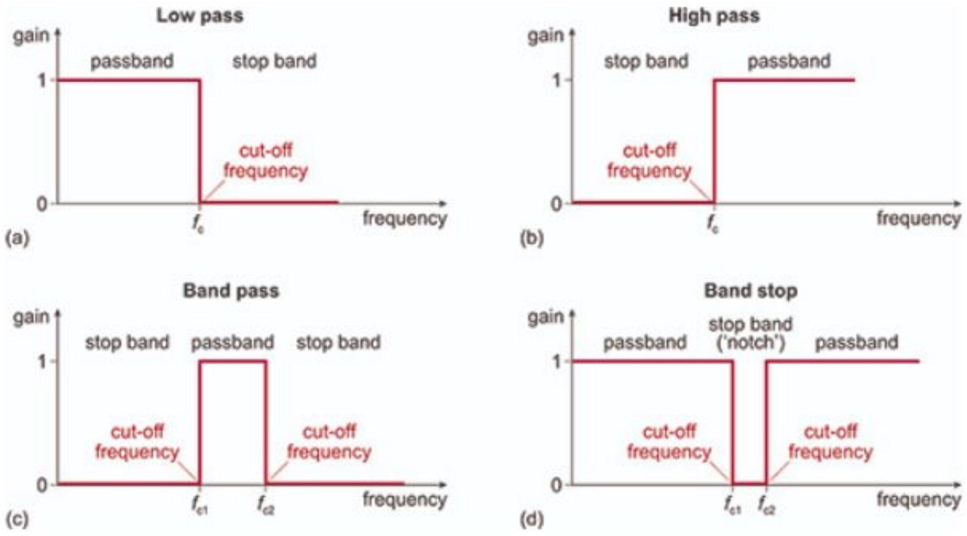


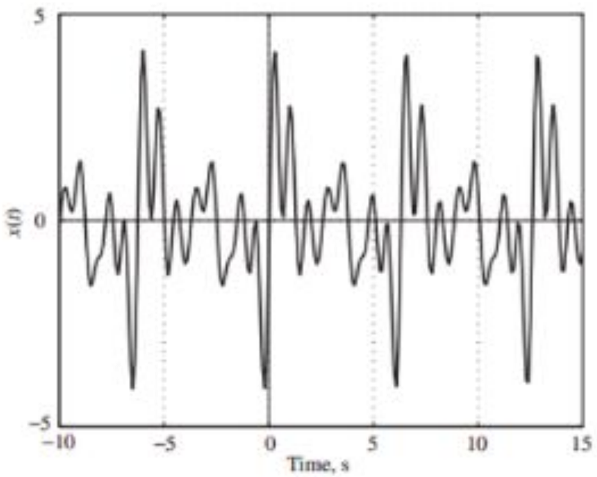
Introduzione ai filtri (II)





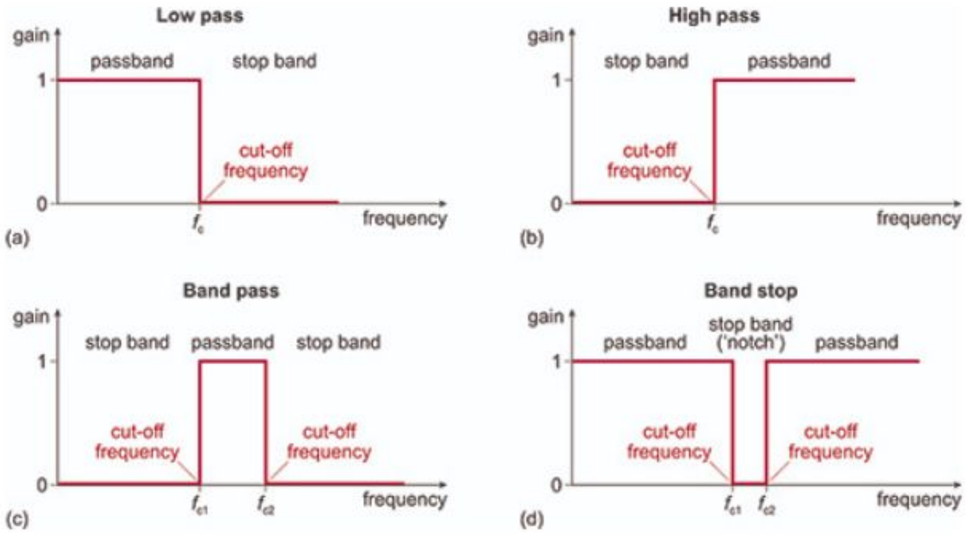
Introduzione ai filtri (III)

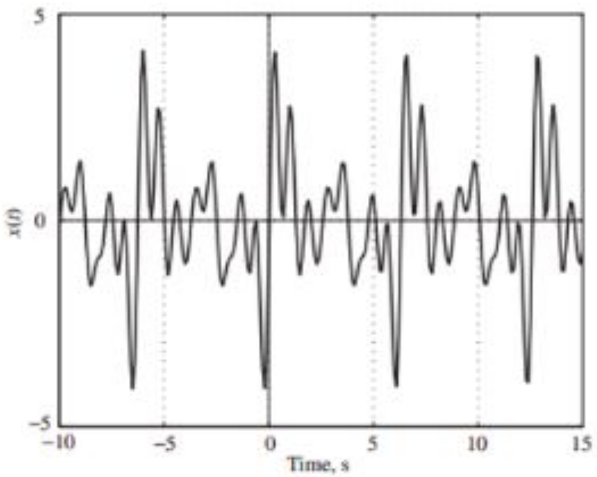




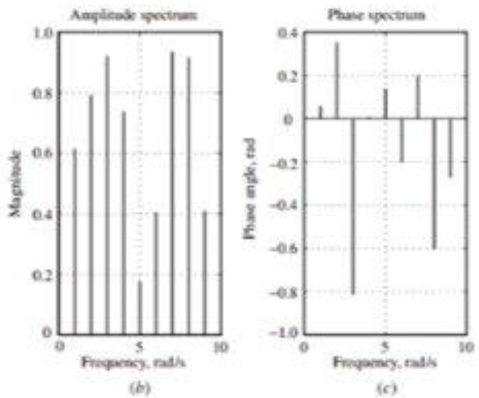
$$x(t) = \sum_{i=1}^{N} A_k sin(\omega_i(t) + \phi_i)$$

Introduzione ai filtri (IV)

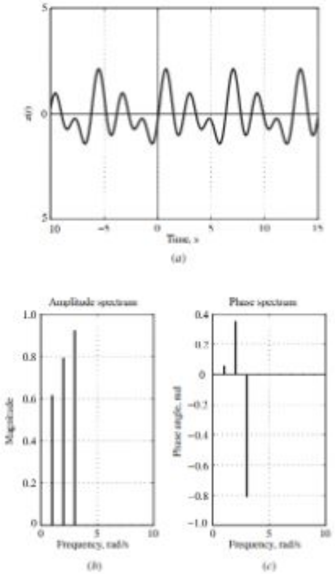




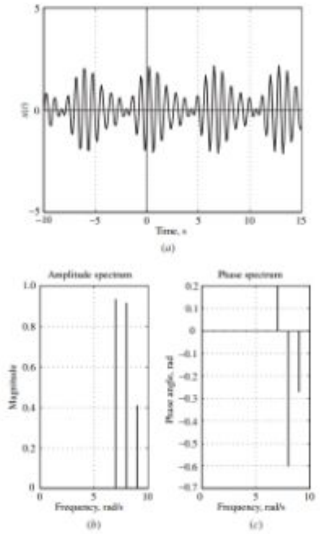
$$x(t) = \sum_{i=1}^{N} A_k sin(\omega_i(t) + \phi_i)$$



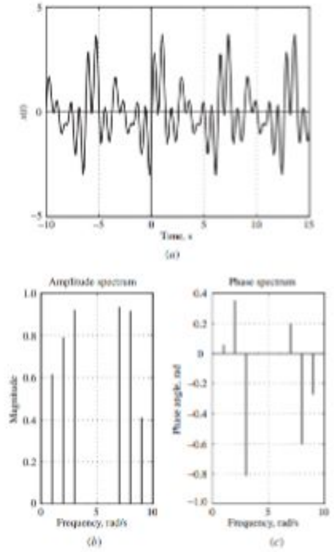
Introduzione ai filtri (V)



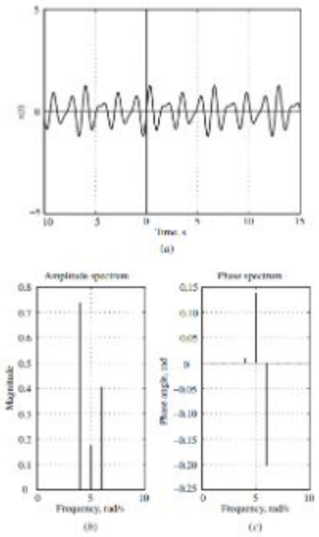
(a) Filtro passa-basso



(b) Ffiltro passa-alto

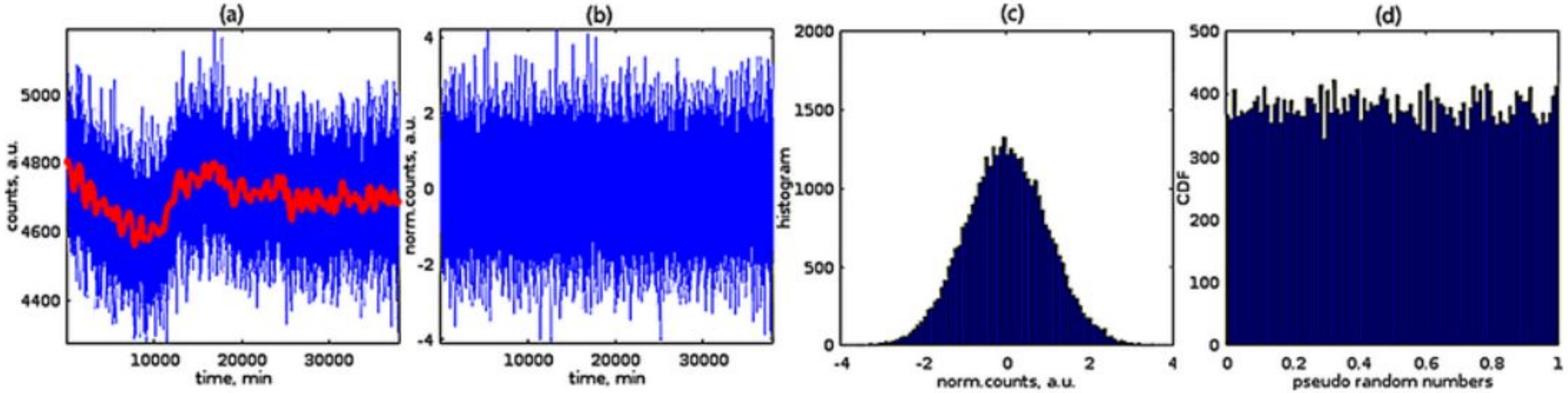


(c) Ffiltro taglia-banda



(d) Filtro passa-banda

Introduzione ai filtri (VI)



In rosso il segnale reale, b) il rumore c e d) distribuzione ed istogramma del rumore

I filtri, come i segnali, si distinguono tra analogici e digitali

- SNR: ratio between signal power and noise power
- Definition:

$$SNR = \frac{P_{signal}}{P_{noise}} = \left(\frac{A_{signal}}{A_{noise}}\right)^2$$

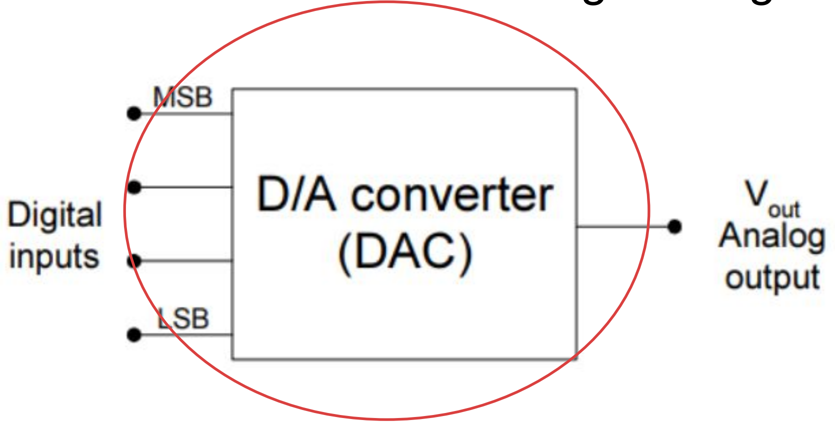
$$SNR(dB) = 10\,{}^{10}\log\left(\frac{P_{signal}}{P_{noise}}\right) = 20\,{}^{10}\log\left(\frac{A_{signal}}{A_{noise}}\right)$$

ADC e DAC (I)

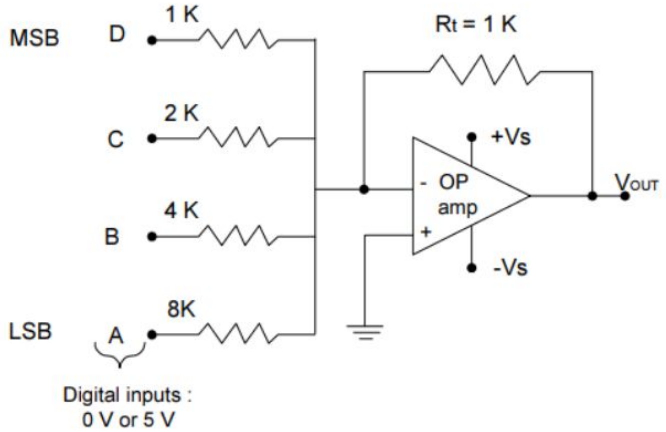
$$\frac{R_{min}}{R_t}V_{HIGH}$$

Risoluzione DAC

- Una quantità digitale avrà un valore che può essere 0 o 1, LOW o HIGH.
- MCU elaborano segnali digitali
- ADC converte un segnale analogico (es tensione 0-5V proprozionale alla quantità misurata) in digitale. Per esempio restituisce 00011001 (25) o 1000010 (66)
- Il DAC viceversa converte il segnale digitale in analogico.



4-bit DAC con uscita in tensione



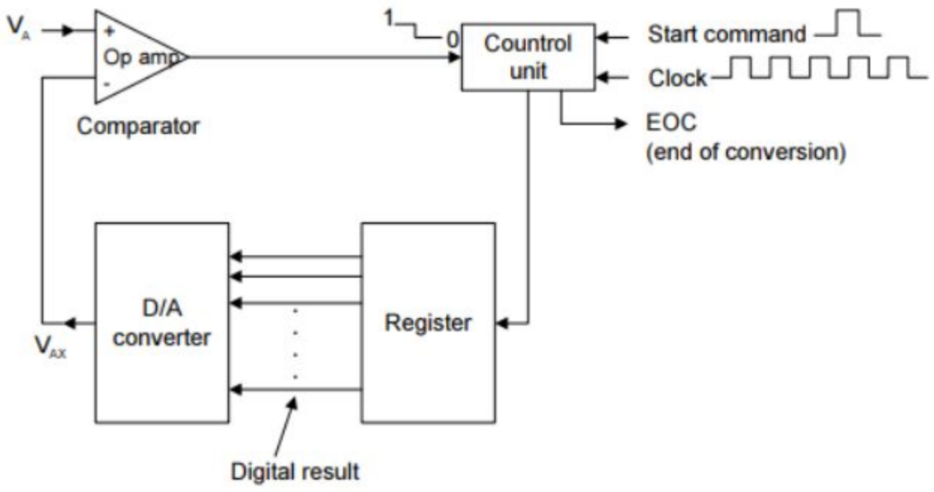
op-amp with Binary Weigthed Resistor DAC

$$V_{out} = -(\frac{R_t}{R_D}V_D + \frac{R_t}{R_B}V_C + \frac{R_t}{R_B}V_B + \frac{R_t}{R_A}V_A)$$

l'uscita per il numero 1010 (valore 10) sarà in analogico

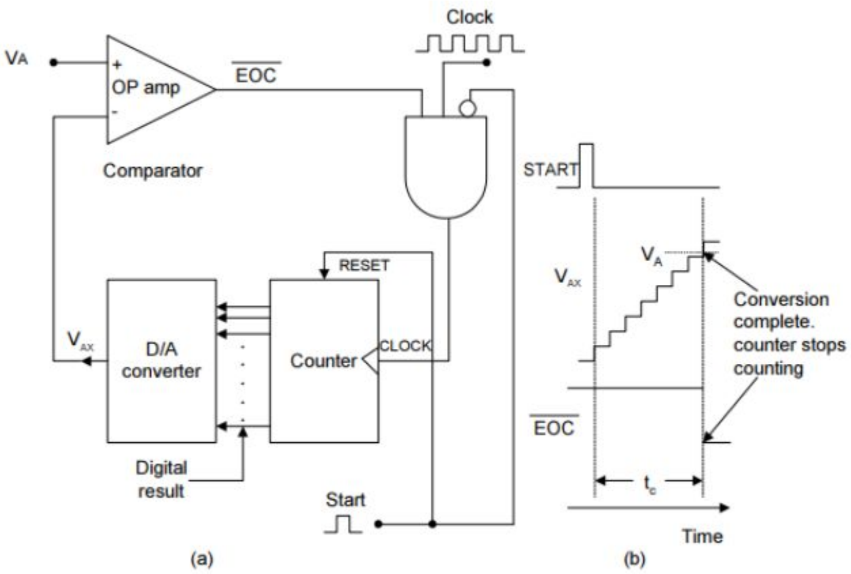
$$V_{out} = -(-5 + 0 + 0.25 * 5 + 0) = -6.25V$$

ADC e DAC (II)



- Un amplificatore operazionale prende in ingresso una tensione analogica di riferimento Va (quella che vogliamo convertire in digitale) e un’altra tensione Vax generata da un DAC
- Un controllore, inizializzato dal comando START COMMAND, genera dei numeri digitali, il DAC li converte in Vax. Il processo va avanti fintanto che Vax − Va > 0 , ossia il numero digitale in considerazione non è uguale o di poco maggiore del riferimento
- A questo punto il numero digitale salvato nel registro, al quale corrisponde la tensione analogica Vax, è una buona approssimazione di Va.

ADC e DAC (III)



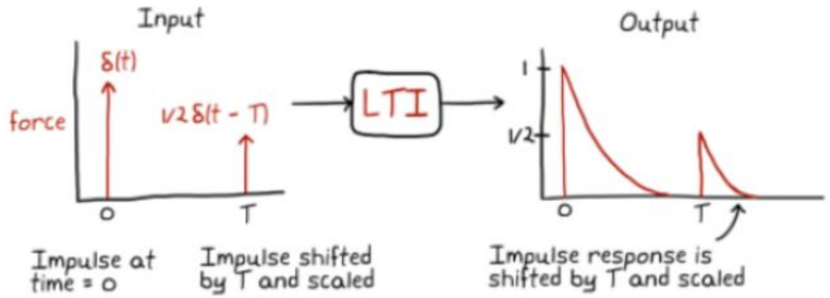
La versione più semplice di questo sistema è l'ADC a rampa, nel quale I numeri digitali generati dalla control unit sono crescenti con una determinata pendenza

- Un amplificatore operazionale prende in ingresso una tensione analogica di riferimento Va (quella che vogliamo convertire in digitale) e un'altra tensione Vax generata da un DAC
- Un controllore, inizializzato dal comando START COMMAND, genera dei numeri digitali, il DAC li converte in Vax. Il processo va avanti fintanto che Vax − Va > 0 , ossia il numero digitale in considerazione non è uguale o di poco maggiore del riferimento
- A questo punto il numero digitale salvato nel registro, al quale corrisponde la tensione analogica Vax, è una buona approssimazione di Va.

Elementi di sistemi dinamici lineari: Recap (I)

- Tutti i sistemi che cambiano il loro stato nel tempo sono chiamati sistemi dinamici. In genere un sistema dinamico è descritto da equazioni differenziali e si dice Lineare Tempo Invariante (LTI) quando i parametri concentrati che ne descrivono la dinamica o i coefficienti identificati del processo data-driven non variano nel tempo.
- Da un sistema non lineare è sempre possibile ottenerne uno linearizzato intorno a certi stati o punti di equilibrio, e lo sviluppo in serie di Taylor è lo strumento matematico più utilizzato per la linearizzazione.
- Un sistema si dice Linear Parameter Varying (LPV) quando la sua dinamica viene rappresentata come un LTI anche se i parametri che ne caratterizzano la dinamica variano nel tempo. Questi modelli si prestano bene a sistemi discreti, in quanto essendo i parametri memorizzati in una memoria è possibile farli variare in funzione delle condizioni al contorno ogni time step.

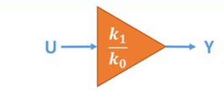
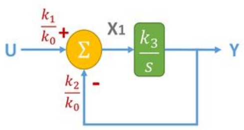
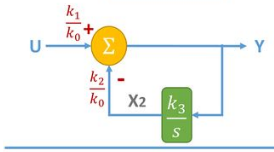
$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$



Elementi di sistemi dinamici lineari: Recap (II)

Per un sistema dinamico LTI èpossibile ottenere due tipi di rappresentazione:

- quella tramite funzioni di trasferimento nel dominio di Laplace a partire dall'equazione differenziale che descrive la dinamica del processo, ottenibile anche con modelli data-driven se si impulsa il sistema e se ne studia la rispsota e verificando che effettivamente con diversi input scalati linearmente la risposta del sistema è pressochè lineare
- quella detta dello spazio di stato, ottenuta anche questa a partire dalle equazioni differenziali.

Block Diagram	Normal Transfer Function	CRN Transfer Function
	$\frac{k_1}{k_0}$	$\frac{k_1}{s+k_0}$
	$\frac{k_1 k_3}{k_0 s + k_2 k_3}$	$\frac{k_1 k_3}{s^2 + k_0 s + k_2 k_3}$
	$\frac{k_1 s}{k_0 s + k_2 k_3}$	$\frac{k_1 s}{s^2 + k_0 s + k_2 k_3}$

- Radici numeratori **zeri**
- Radici denominatore **poli**

number	function	Laplace Transform
1.	1	$\frac{1}{s}$
2.	t	$\frac{1}{s^2}$
3.	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
4.	$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
5.	$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
6.	$y'(t)$	$sY(s) - y(0)$
7.	$y''(t)$	$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$
8.	$\delta(t-c)$	e^{-cs}
9.	$e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$

Elementi di sistemi dinamici lineari: Recap (III)

Funzione di trasferimento sistema RL

$$V = Ri + L\frac{di}{dt} \rightarrow V(s) = RI(s) + LsI(s)$$

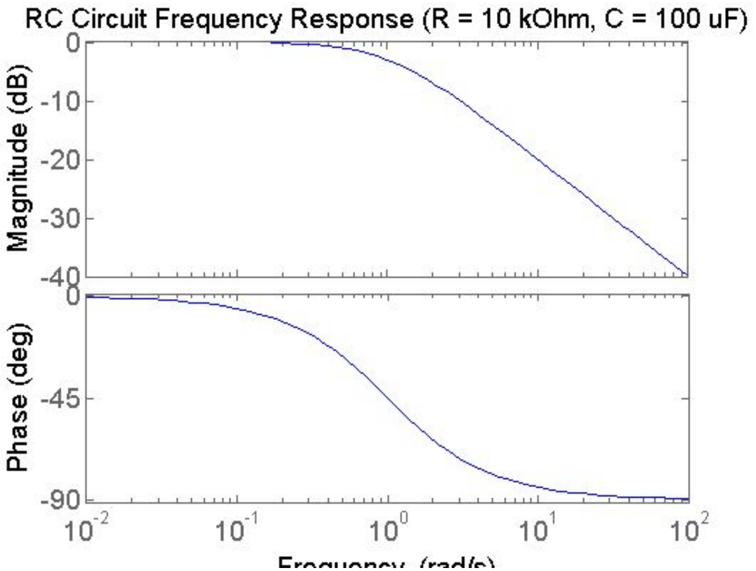
$$V(s) = I(s)[R + Ls] \rightarrow h(s) = \frac{I(s)}{V(s)} \rightarrow \frac{1}{R + Ls}$$

s= jOmega in Fourier

$$\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{R + j\omega L} \xrightarrow{L/R=\tau} K\frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

Funzione di trasferimento sistema RC

$$\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \xrightarrow{RC=\tau} K\frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

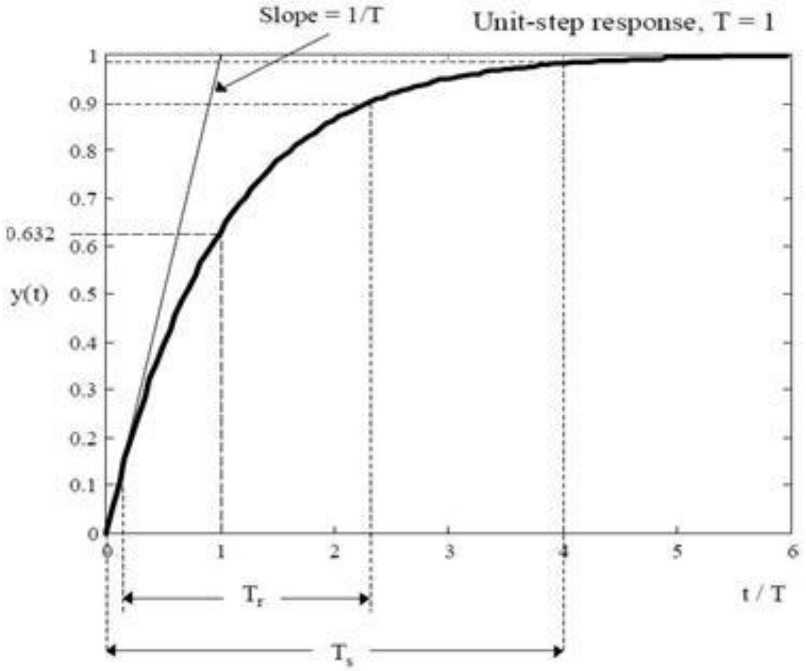


number	function	Laplace Transform
1.	1	$\frac{1}{s}$
2.	t	$\frac{1}{s^2}$
3.	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
4.	$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
5.	$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
6.	$y'(t)$	$sY(s) - y(0)$
7.	$y''(t)$	$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$
8.	$\delta(t-c)$	e^{-cs}
9.	$e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$

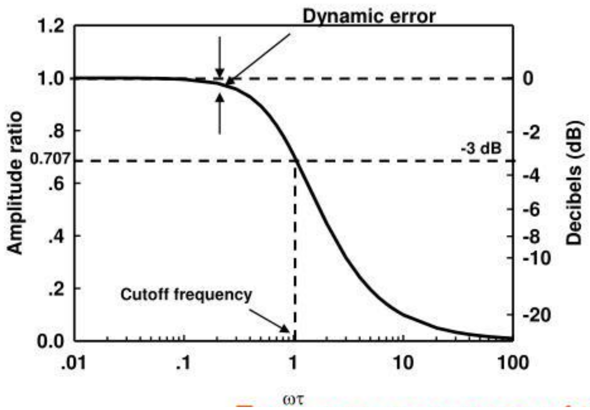
Elementi di sistemi dinamici lineari: Recap (IV)

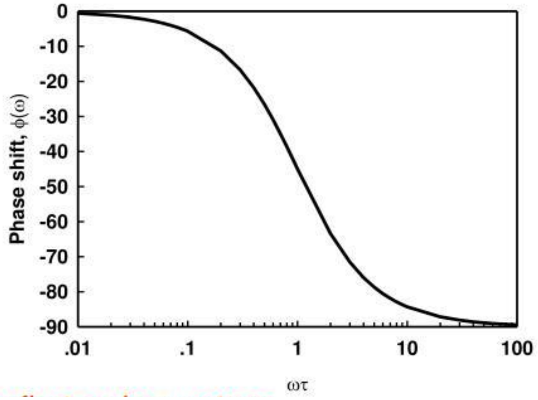
$$a\dot{y} + by = cu$$

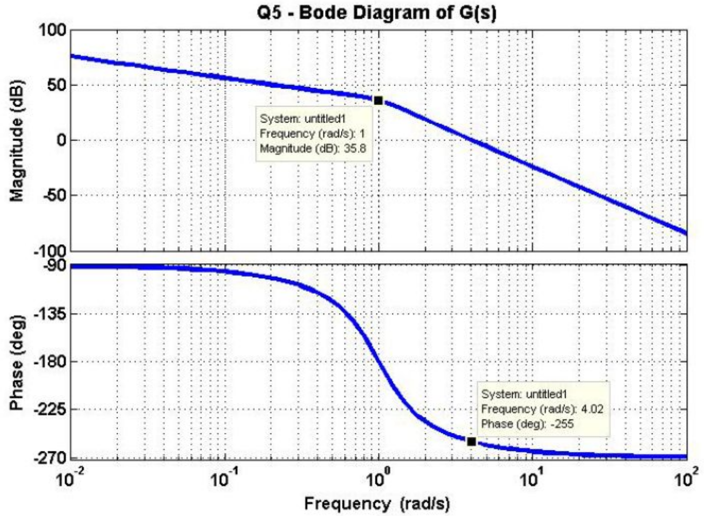
$$\dot{y} = -\frac{b}{a}y + \frac{c}{a}u$$



The amplitude ratio $M(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{(\omega\tau)^2 + 1}}$ The phase angle is $\phi(\omega) = -\tan^{-1}(\omega\tau)$



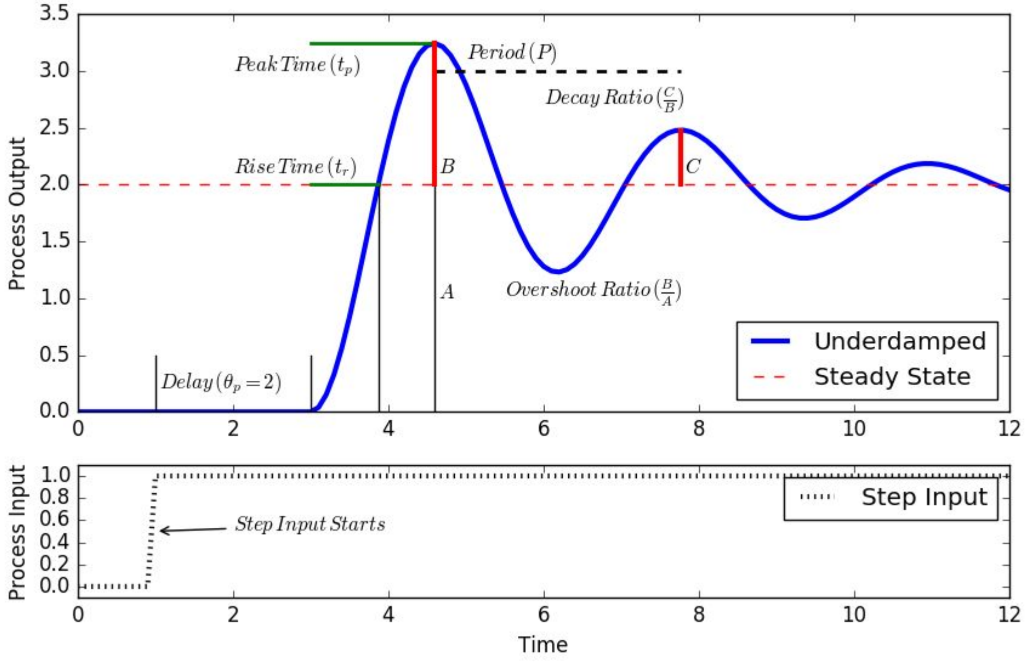


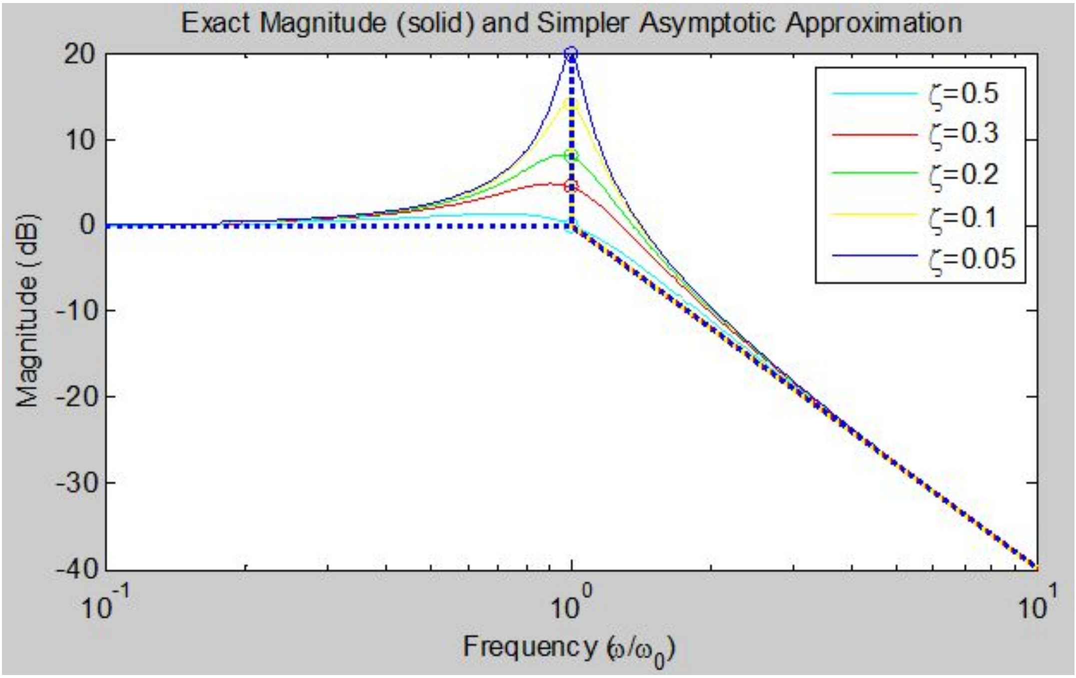


Elementi di sistemi dinamici lineari: Recap (V)

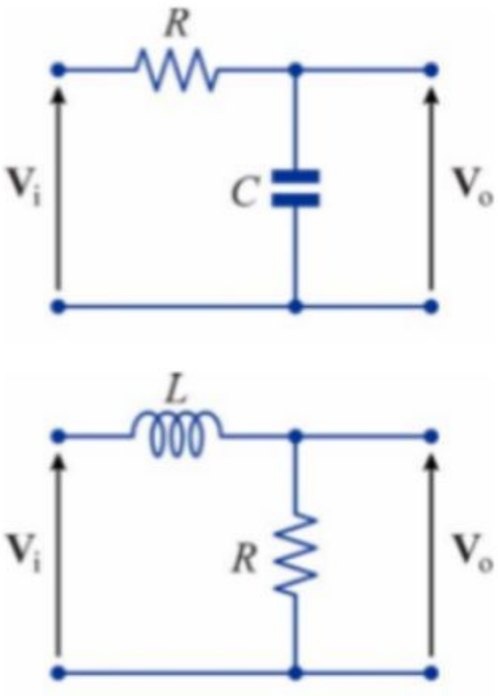
$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\zeta\omega_0\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = 0$$

$$G = \frac{K}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

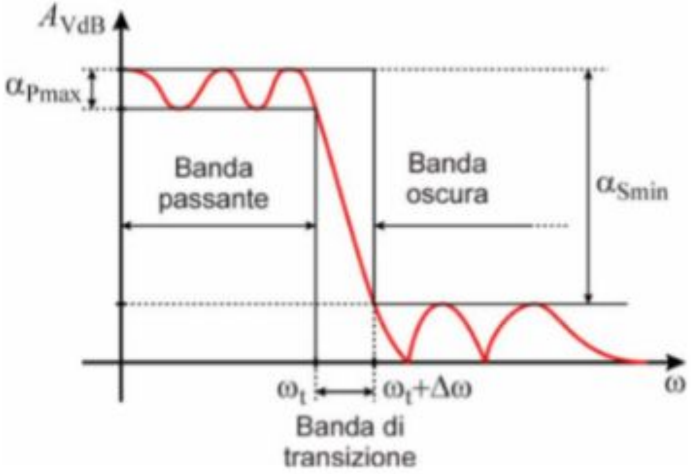




Filtri analogici (I)

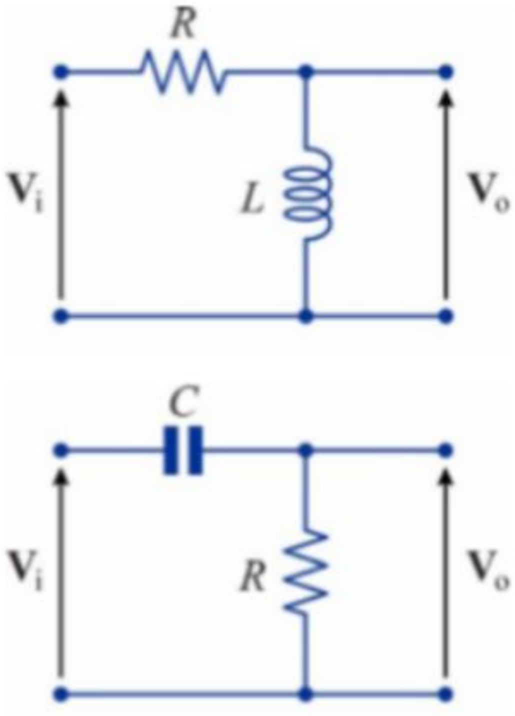


Low pass filter



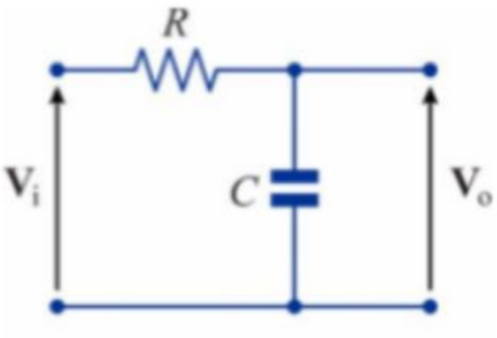
Dinamica di un filtro passa basso reale:

- La risposta in frequenza e nel tempo dipende dai parametri del circuito

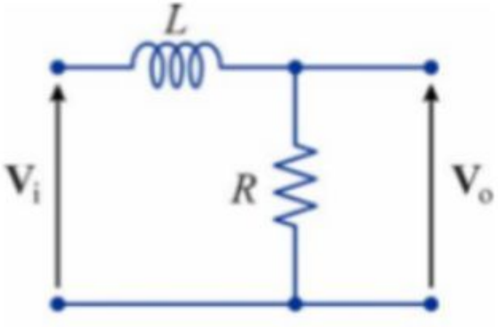


High pass filter

Filtri analogici (II)

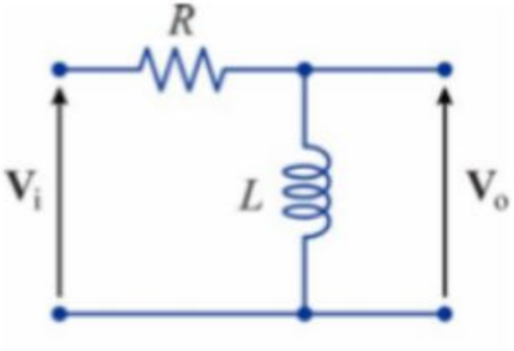


$$\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \xrightarrow{RC=\tau} K\frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

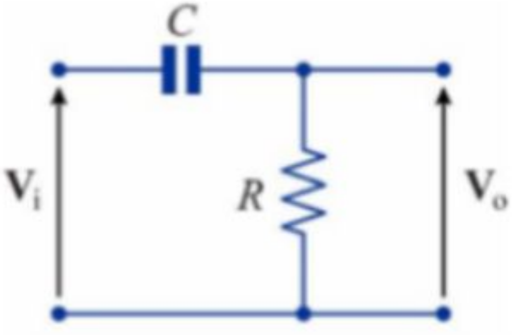


$$\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{R + j\omega L} \xrightarrow{L/R=\tau} K\frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

Low pass filter



$$\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} \xrightarrow{L/R=\tau} K\frac{j\omega}{1 + j\omega\tau}$$



$$\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} \xrightarrow{RC=\tau} K\frac{j\omega}{1 + j\omega\tau}$$

High pass filter

Passare da un filtro analogico a quello digitale (I)

La formula generale per un filtro passa-basso è: $$H(s) = K\frac{\omega_0}{\omega_0 + s}$$ Non possiede zeri

La formula generale per un filtro passa-alto è: $$H(s) = K\frac{s}{\omega_0 + s}$$ Zero nell'origine

I filtri passa-banda si ottengono a partire da sistemi del secondo ordine (RLC):

- Passa basso se non ha zeri,
- Passa alto se ha due zeri nell'origine
- Passa banda se ha uno zero nell'origine,
- Taglia banda se ha due zeri immaginari e coniugati

Passare da un filtro analogico a quello digitale (II)

$f(kT)$	$F(z)$
$\delta(t)$	1
1	$\frac{z}{z-1}$
kT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$(kT)^2$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
$(kT)^3$	$\frac{T^3 z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$
e^{-akT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
kTe^{-akT}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
a^k	$\frac{z}{z-a}$
$1-e^{-akT}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$\sin akT$	$\frac{z\sin aT}{z^2-2z\cos aT+1}$
$\cos akT$	$\frac{z(z-\cos aT)}{z^2-2z\cos aT+1}$
$e^{-akT}\sin bkT$	$\frac{e^{-aT}z\sin bT}{z^2-2e^{-aT}z\cos bT+e^{-2aT}}$
$e^{-akT}\cos bkT$	$\frac{z^2-e^{-aT}z\cos bT}{z^2-2e^{-aT}z\cos bT+e^{-2aT}}$

Applicare la trasformata z può portare a distorsioni delle bande passanti, per tale motivo si utilizza la **bilinear transform**

$$s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

$$z = \frac{1+s}{1-s}$$

Passare da un filtro analogico a quello digitale (III)

$f(kT)$	$F(z)$
$\delta(t)$	1
1	$\frac{z}{z-1}$
kT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$(kT)^2$	$\frac{T^2z(z+1)}{2(z-1)^3}$
$(kT)^3$	$\frac{T^3z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$
e^{-akT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
kTe^{-akT}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
a^k	$\frac{z}{z-a}$
$1-e^{-akT}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$\sin akT$	$\frac{z\sin aT}{z^2-2z\cos aT+1}$
$\cos akT$	$\frac{z(z-\cos aT)}{z^2-2z\cos aT+1}$
$e^{-akT}\sin bkT$	$\frac{e^{-aT}z\sin bT}{z^2-2e^{-aT}z\cos bT+e^{-2aT}}$
$e^{-akT}\cos bkT$	$\frac{z^2-e^{-aT}z\cos bT}{z^2-2e^{-aT}z\cos bT+e^{-2aT}}$

Applicare la trasformata z può portare a distorsioni delle bande passanti, per tale motivo si utilizza la **bilinear transform**

$$s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} \qquad z = \frac{1+s}{1-s}$$

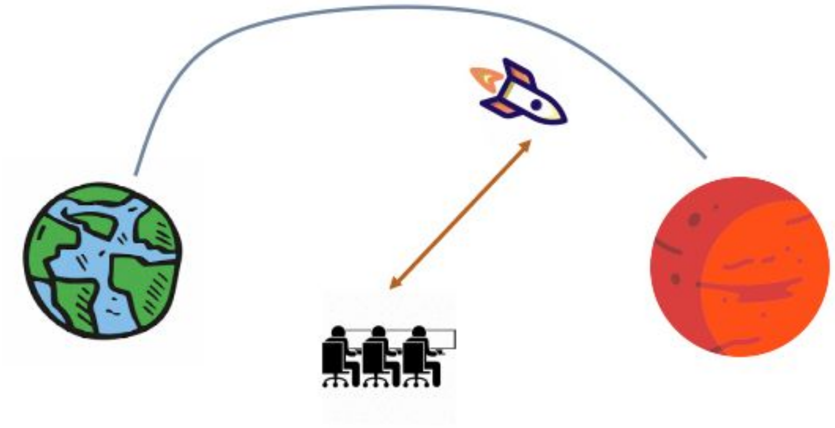
$$H(z) = K\frac{1}{1+RC(\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1_T})} \to K\frac{1+z^{-1}}{1+\frac{2RC}{T}+(1-\frac{2RC}{T})z^{-1}}$$

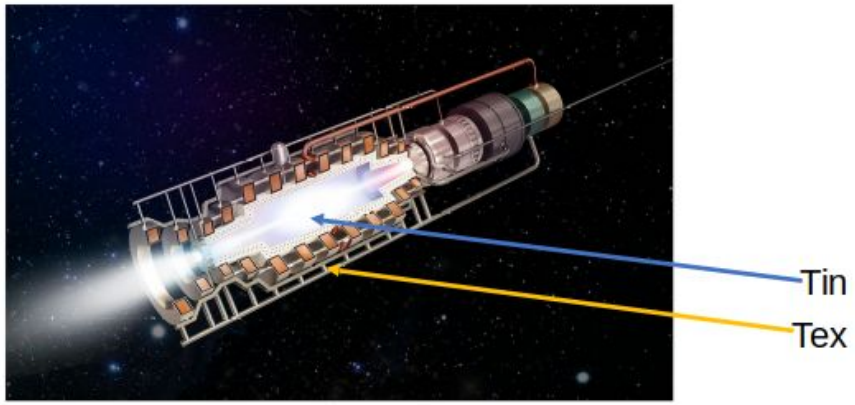
Filtro di Kalman (I)

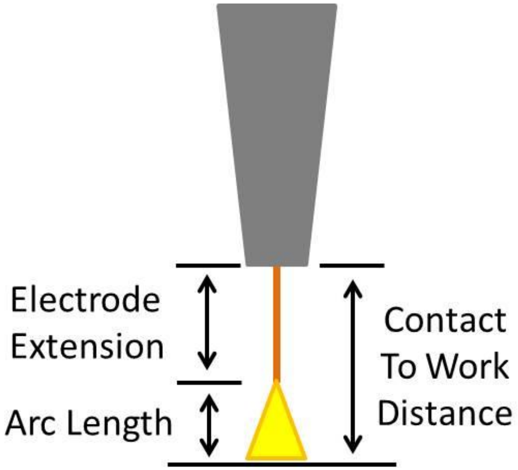
- Il filtro di Kalman è un algoritmo di stima ottima per sistemi temporali lineari invarianti
- Applicazioni comuni: sistemi di guida e navigazione, elaborazione e controllo dei segnali
- Viene utilizzato quando:
  - Le variabili di interesse possono essere misurate solo indirettamente
  - Le misure sono disponibili da vari sensori ma potrebbero essere soggette a rumore

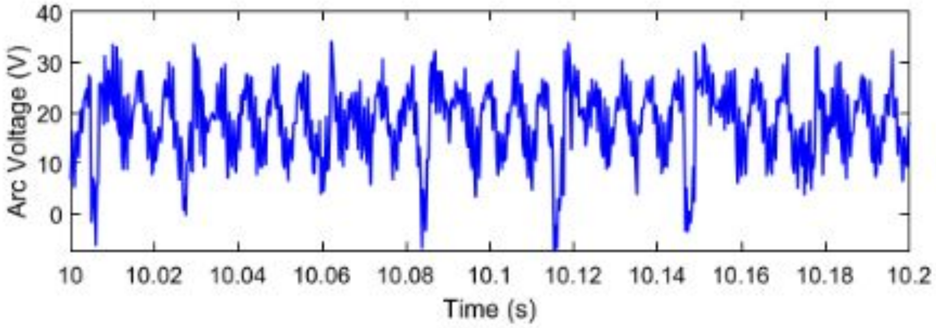
Ideato da Rudolf Kalman nel 1960

Filtro di Kalman (II)



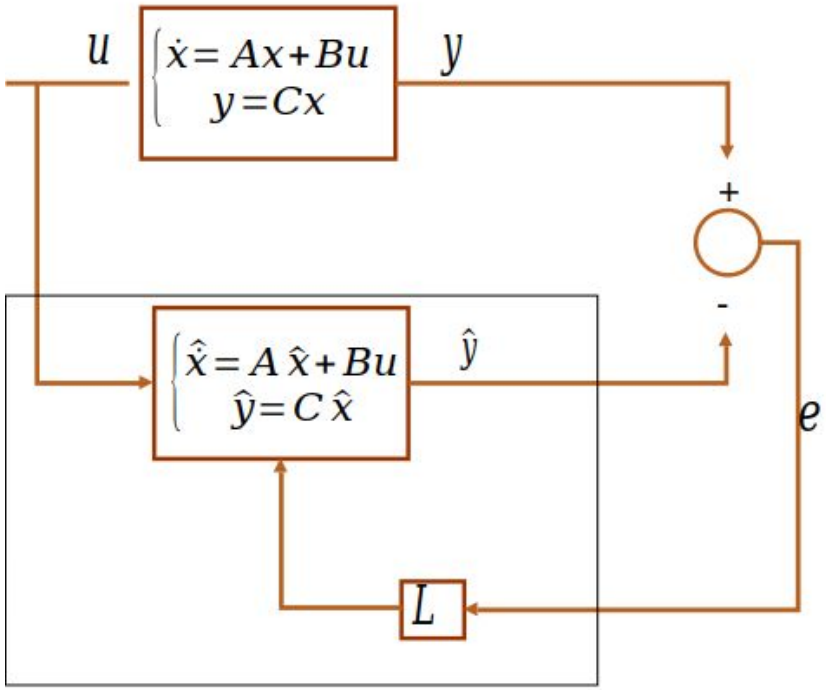






Filtro di Kalman (III)

L'osservatore di stato è un sistema dinamico che fornisce una stima dello stato interno di un sistema a partire dalla misurazione dell'input e dell'output del sistema reale.



State observer

La dinamica dell'ossservatore può essere scritta come:

$$\dot{\hat{x}} = A\,\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \text{ observer dynamics}$$

$$\dot{\hat{x}} = A\,\hat{x} + Bu + L(y - C\,\hat{x}) \to (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$$

La dinamica dell'errore di stima:

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - (A - LC)\hat{x} - Bu - Ly =$$
$$= (A - LC)x - (A - LC)\,\hat{x} \to (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\mathbf{e}$$

$$\dot{e} = (A - LC)e \text{ error dynamics}$$

L'osservatore di stato è difinito a partire dal modello del sistema da osservare e dalla conoscenza della matrice L, da cui dipende la dinamica dell'errore di stima. (**Osservatore di Luenberger)**

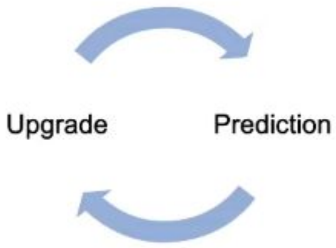
Filtro di Kalman (IV)

- Kalman risponde alla domanda: Come scegliere in maniera ottima la matrice L?
- Consideriamo un sistema dinamico in cui introduciamo il concetto di incertezza attraverso le matrici Q ed R, considerando il processo affetto da **white noise**

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Qw(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) + Rv(k) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} E[v] = E[w] = 0 \\ E[vv^T] = \mathrm{r}, \quad E[ww^T] = q\,, E[vw^T] = n \end{array}$$

- Vogliamo trovare la matrice K che minimizza la covarianza dell'errore di stima:

$$P = E[(x - \hat{x})(x - \hat{x})^T]$$



Prediction

1. Inizialization:

$$P_0, x_0, Q, R$$

2. Model prediction

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

3. Covariance upgrade

$$P(k+1) = AP(k)A^T + Q$$

Upgrade

4. Kalman gain

$$K(k+1) = P(k)C^T(CP(k)C^T + R)^{-1}$$

5. Correction

$$\hat{x}(k+1) = x(k+1) + K(k+1)[y(k+1) - Cx(k+1)]$$

6. Covariance upgrade

$$P(k+1) = (1 - K(k)C)P(k+1)$$

Filtro di Kalman (IV)

```python
"""
Kalman filter algorithm

x=state of system
P=covariance matrix
A=dynamics matrix
u=control cmd
Z=measurment matrix
R=noise covariance matrix of measures
Q=noise covariance matrix of model
"""
import numpy as np

def LinearKF(A,x,H,Q,R,P,Z,x,u=0):
    for n in range(Z.shape[0]):
        #Prediction step
        x=np.array(A,x)+u
        P=np.dot(np.dot(A,P),A.T)+Q

        #Measurment update
        y=Z-(np.dot(H,x))
        s=np.dot(np.dot(H,P),H.T)+R
        K=np.dot(np.dot(P,H.T),np.linalg.inv(s))

        x=x+np.dot(K,y)
        I=np.identity(A.shape[0])
        P=np.dot((I-np.dot(K,H)),P)

    return x,P
```

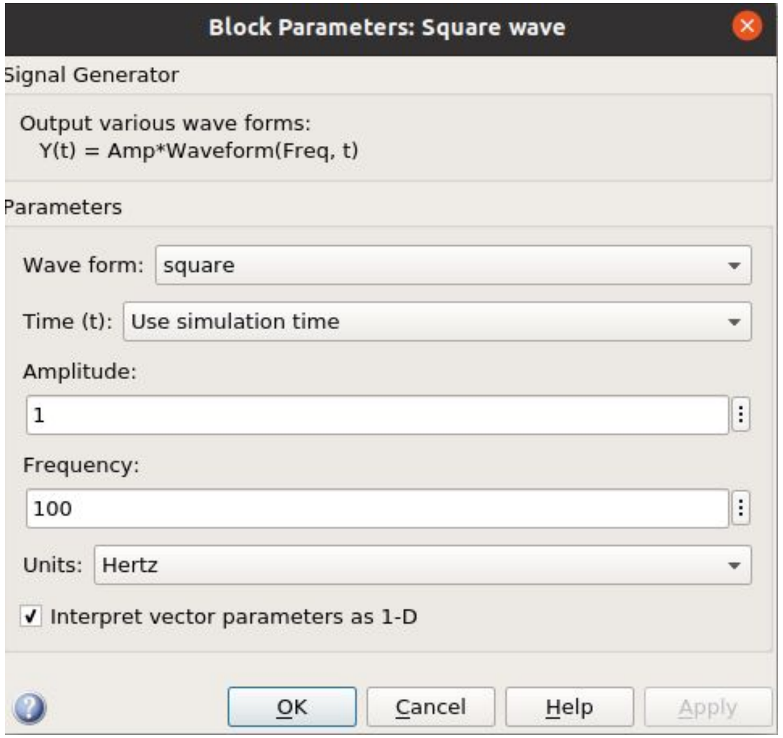
KF with OOP: https://github.com/zziz/kalman-filter

Esercitazioni

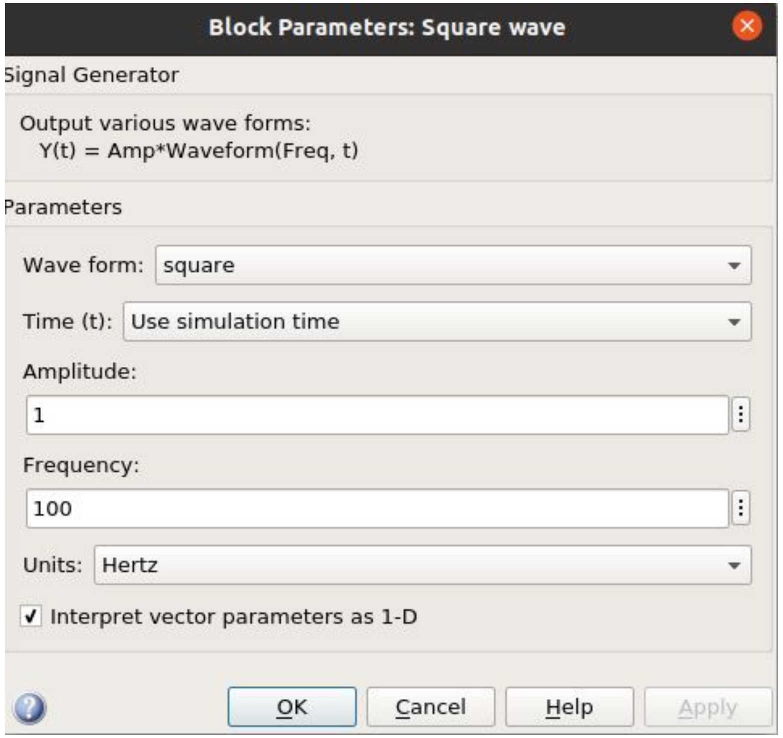
Dipartimento
di Ingegneria Chimica,
dei Materiali e della
Produzione Industriale
Università degli Studi
di Napoli Federico II

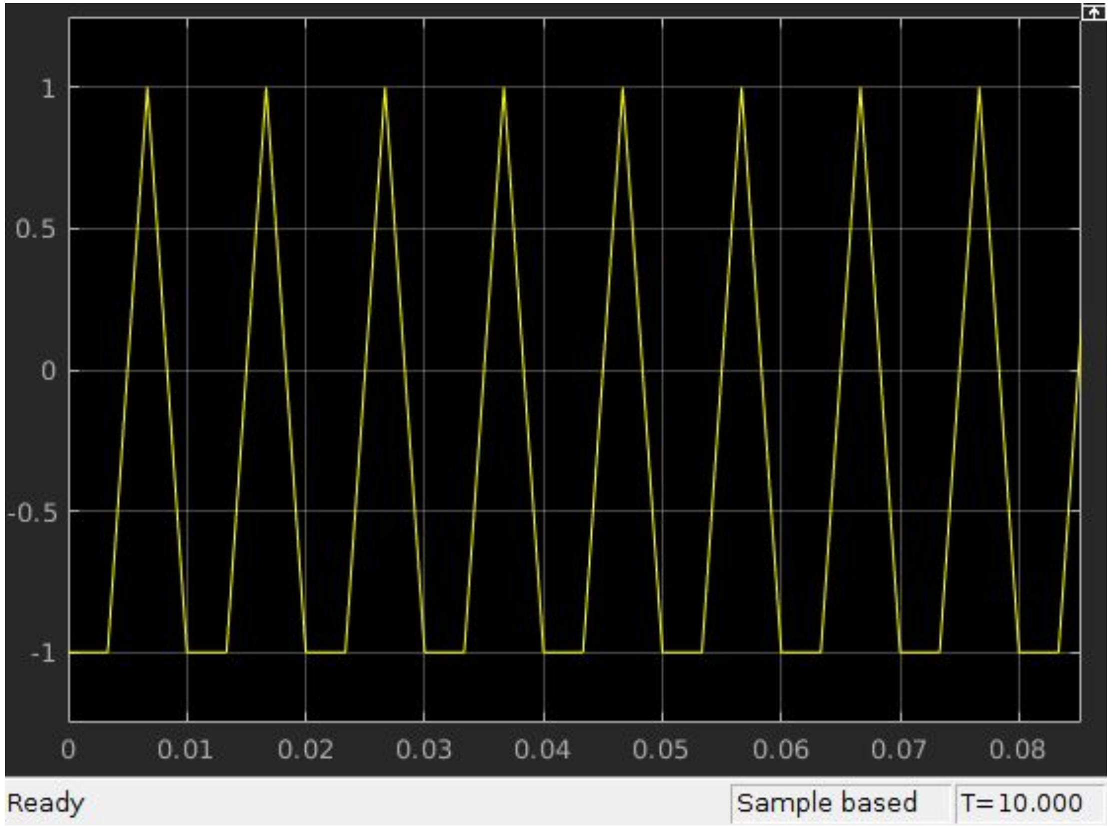

SIMULINK®
Spectral Analysis
Design & Build Digital Filters

Esercitazione 1 : Tempo di campionamento

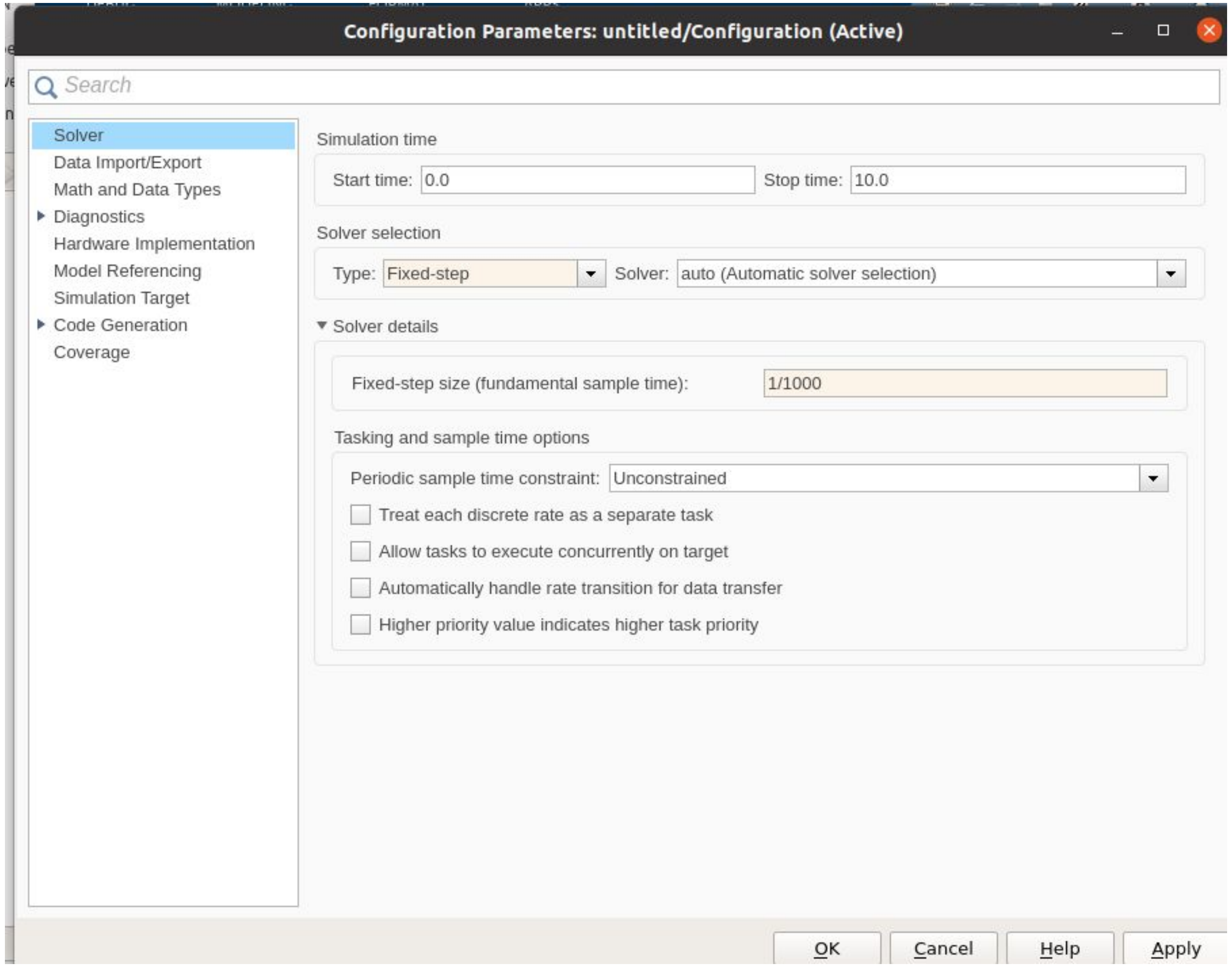


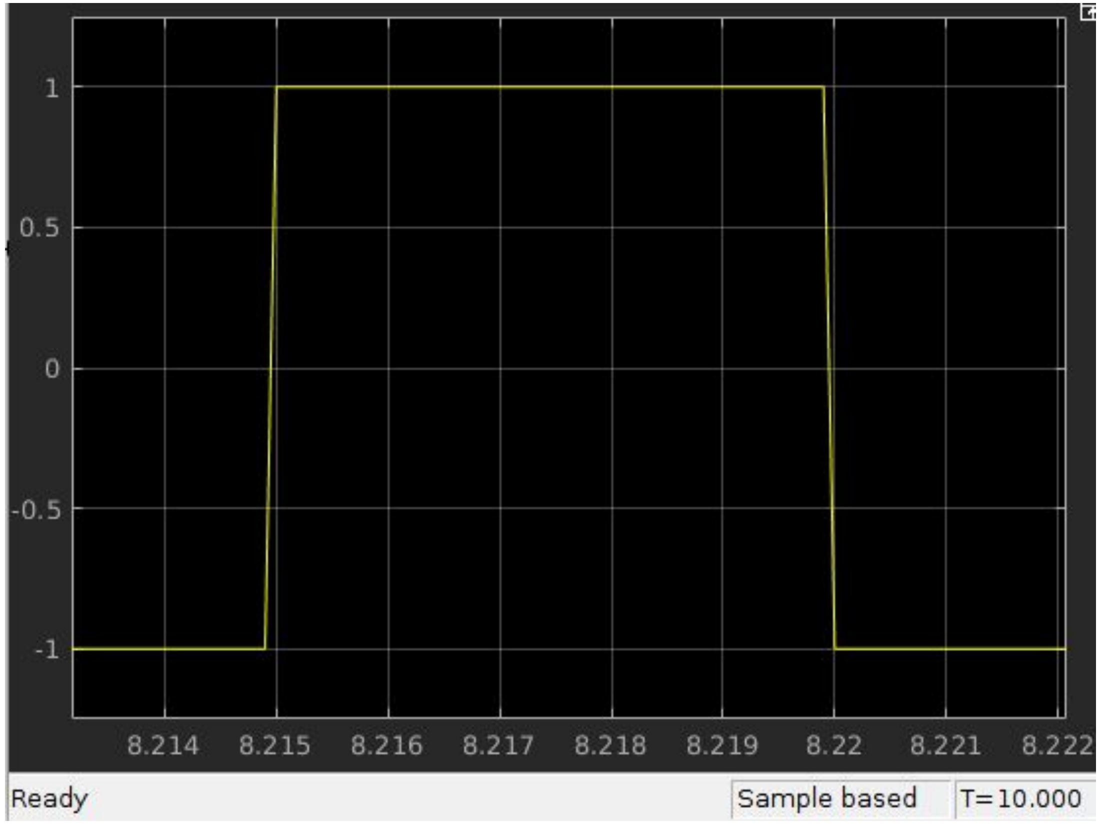
Esercitazione 1 : Tempo di campionamento



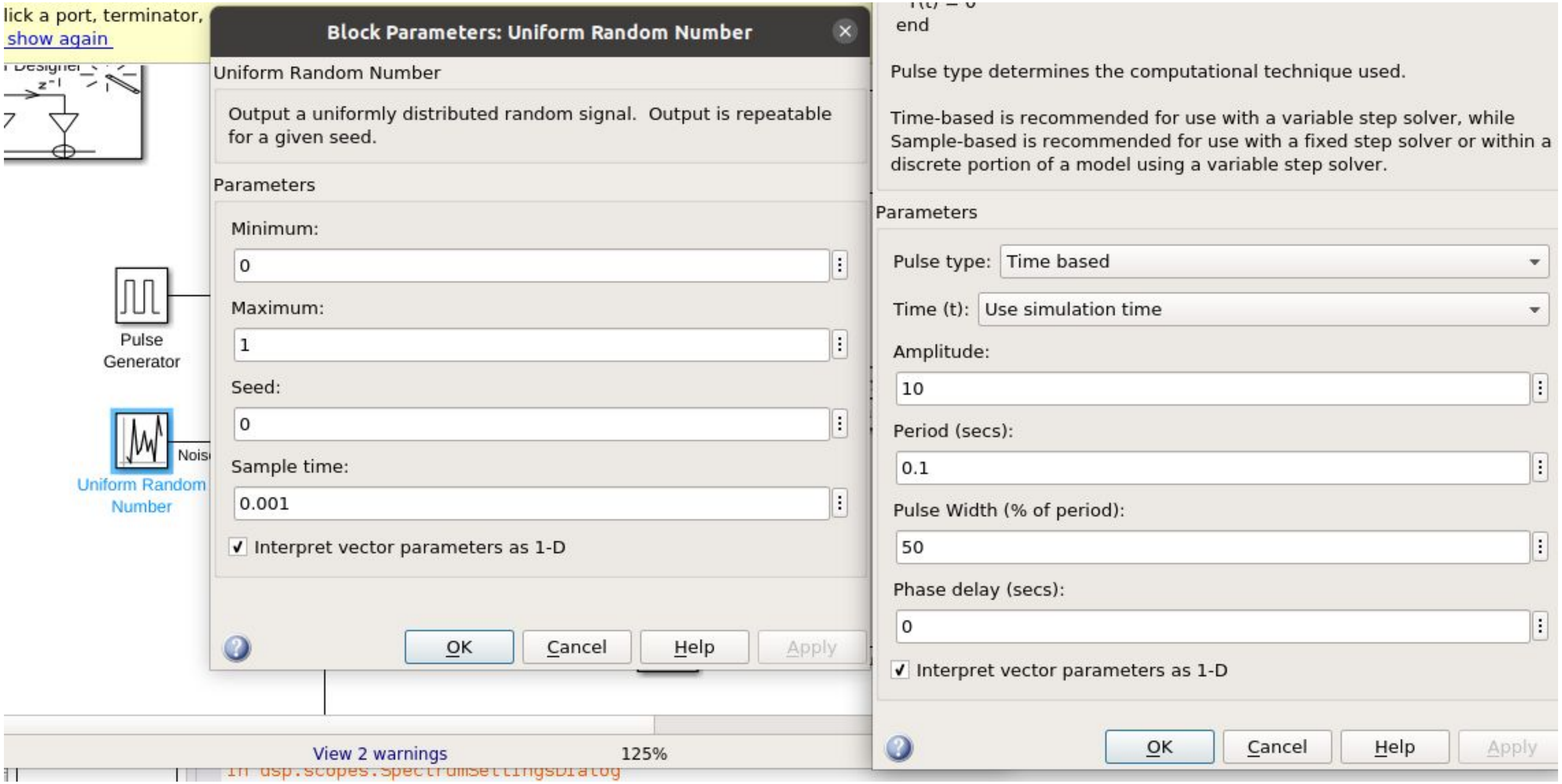


Esercitazione 1 : Tempo di campionamento

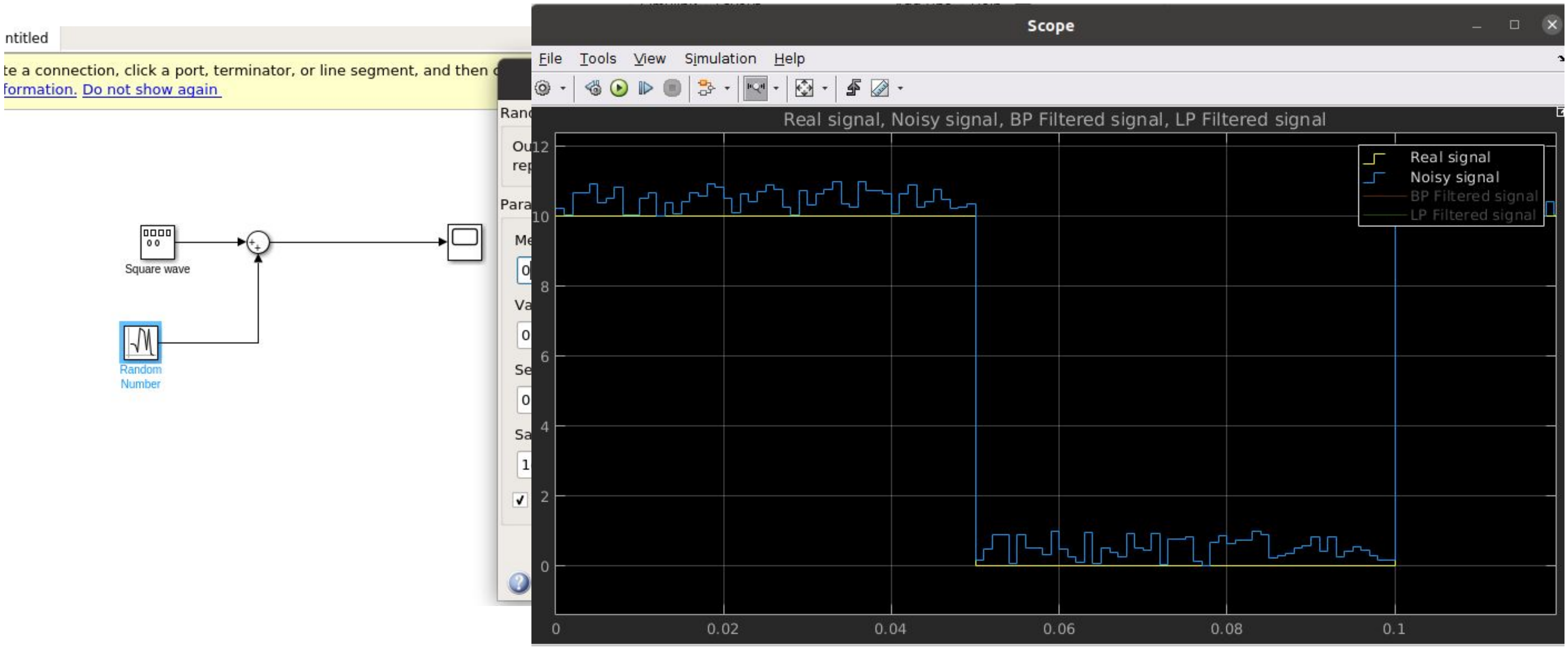




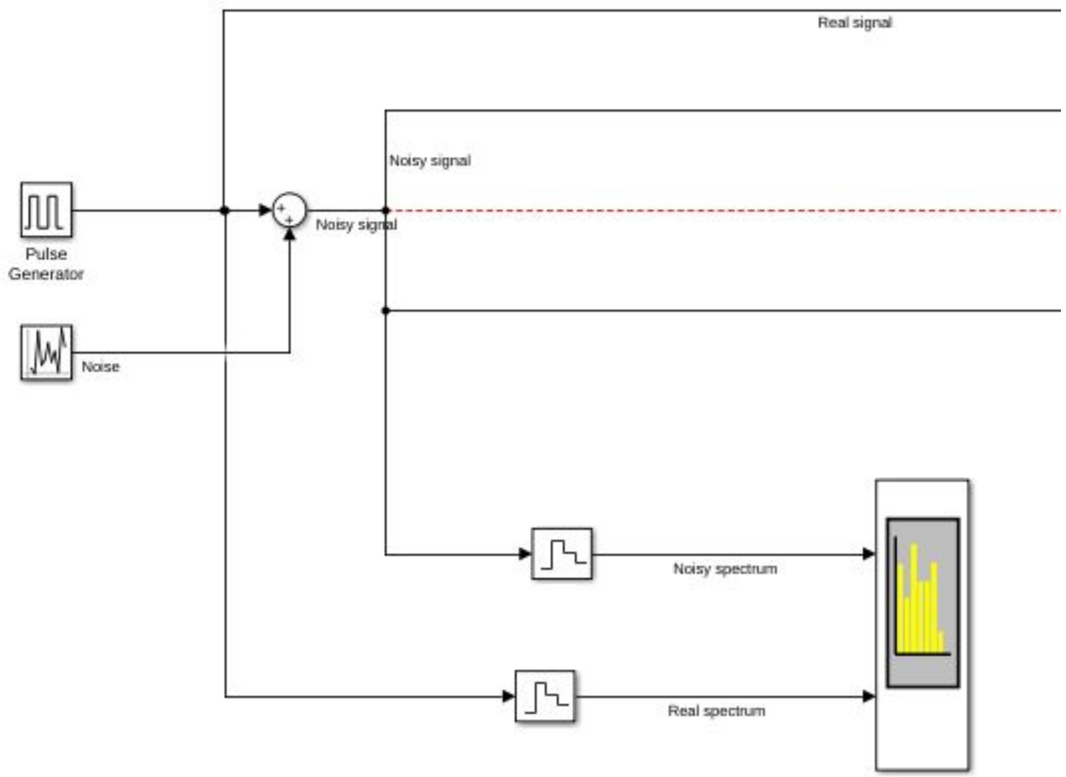
Esercitazione 1 : Noisy signal



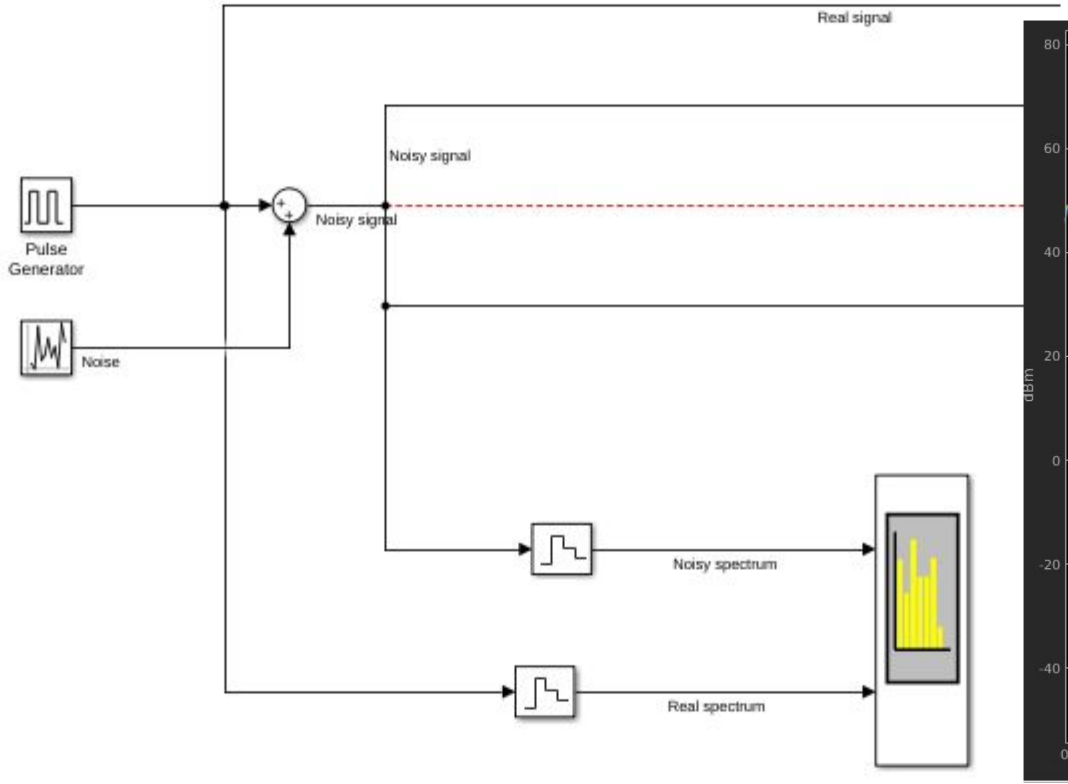
Esercitazione 1 : Noisy signal

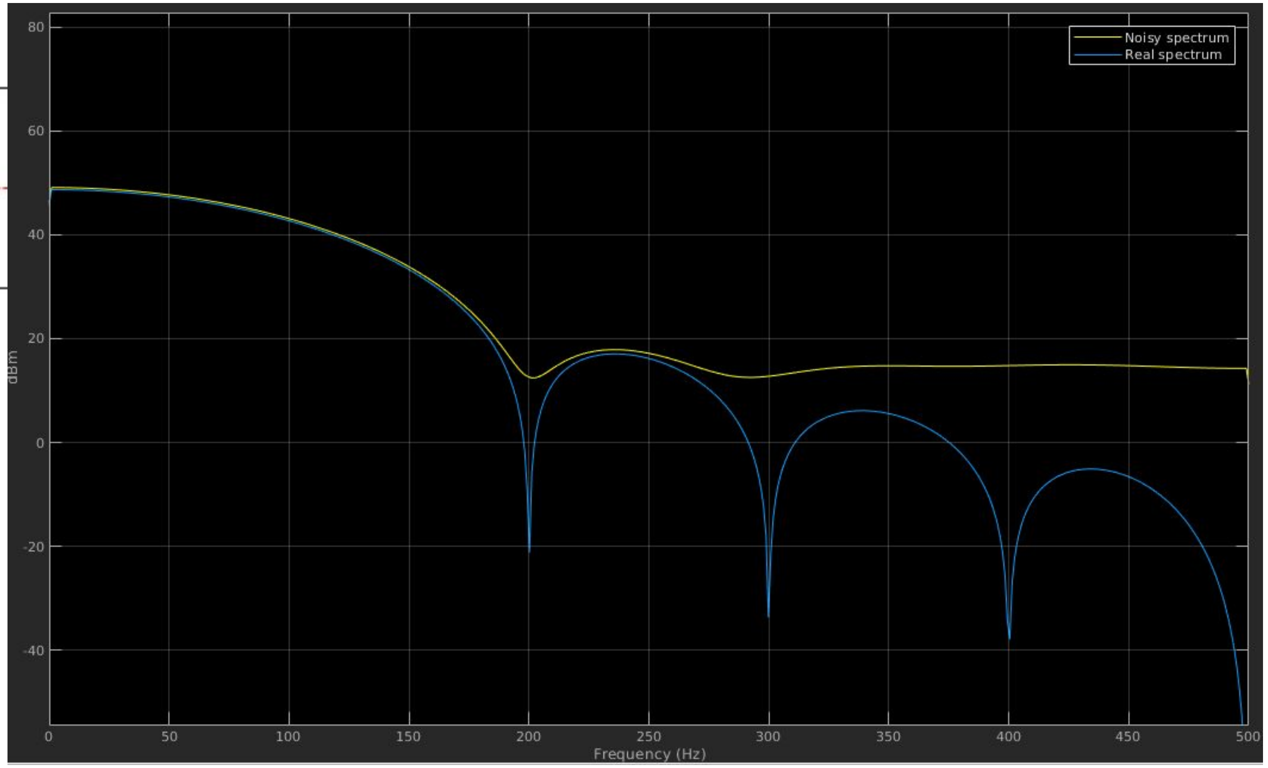


Esercitazione 1 : Dimensionamento filtro

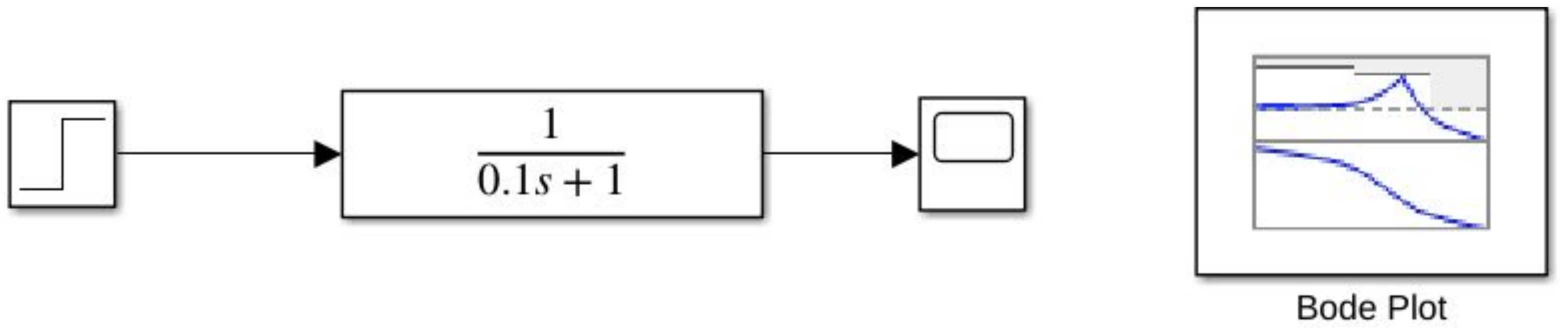


Esercitazione 1 : Dimensionamento filtro

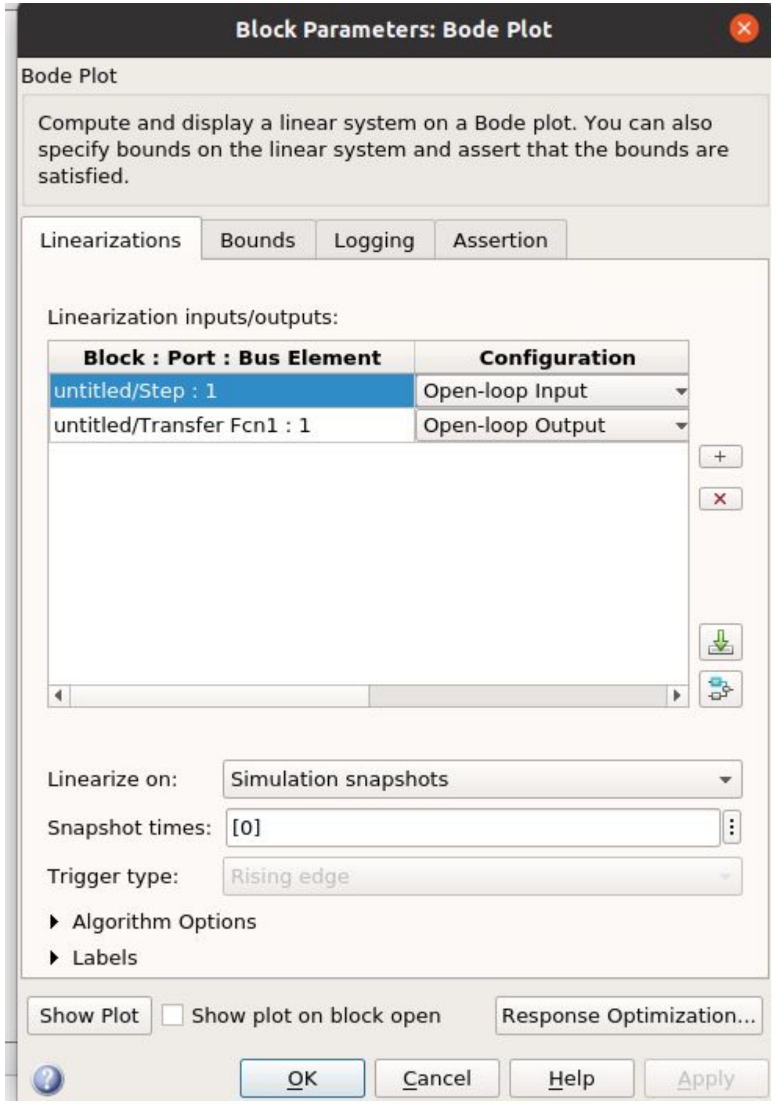




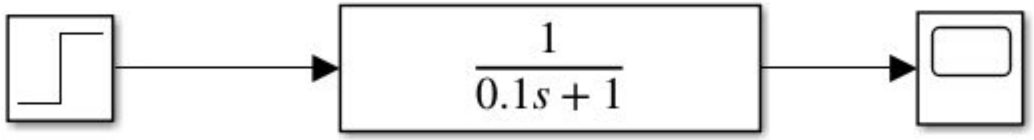
Esercitazione 1 : Dimensionamento filtro

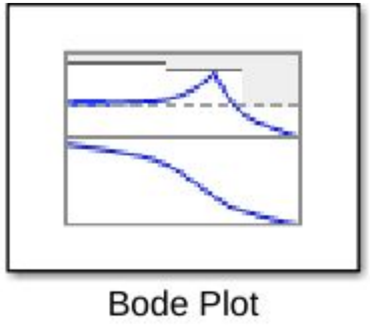


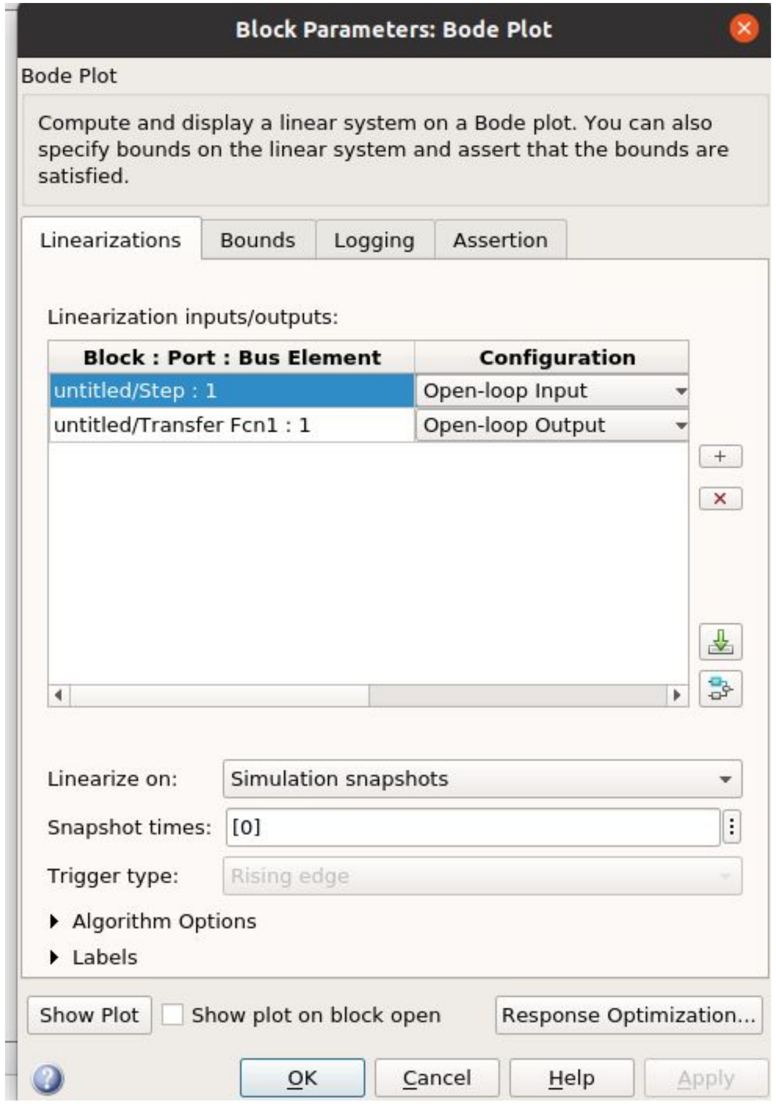
- Premi su +
- Clicca sulla freccia nel modello simulink



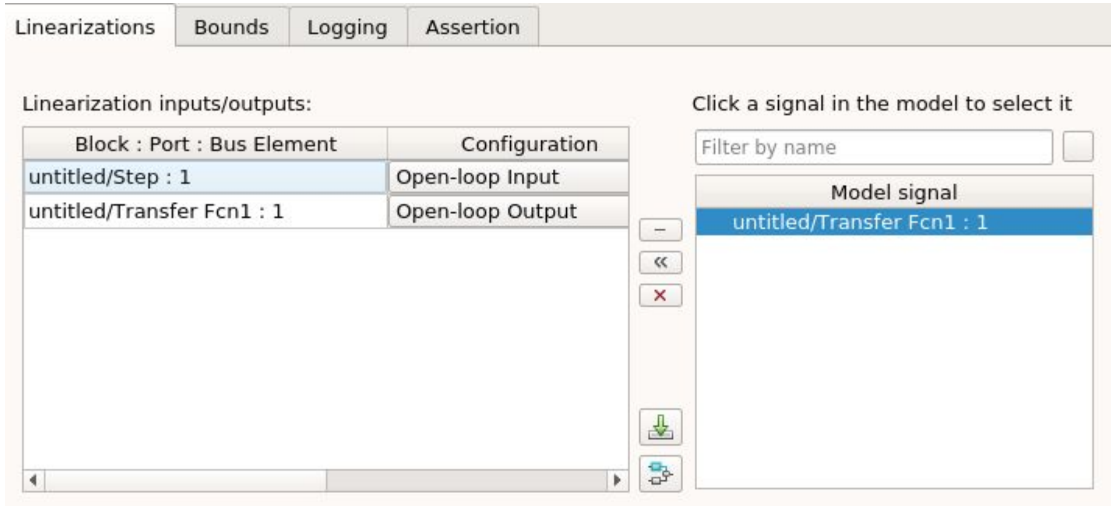
Esercitazione 1 : Dimensionamento filtro



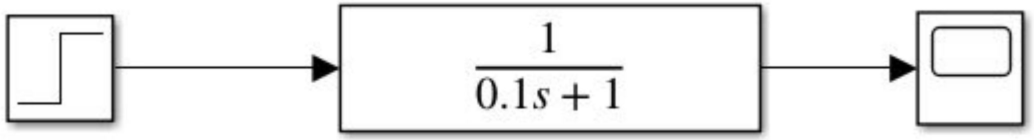


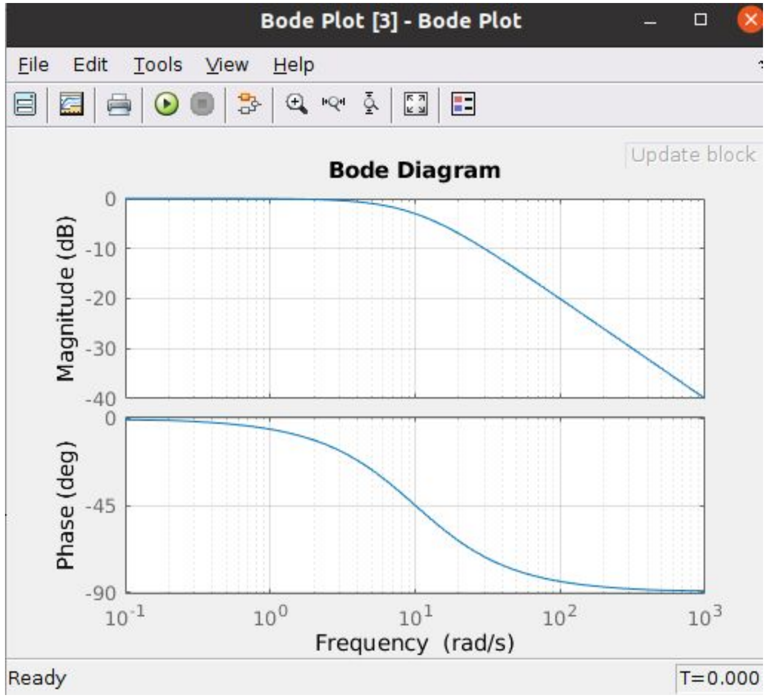


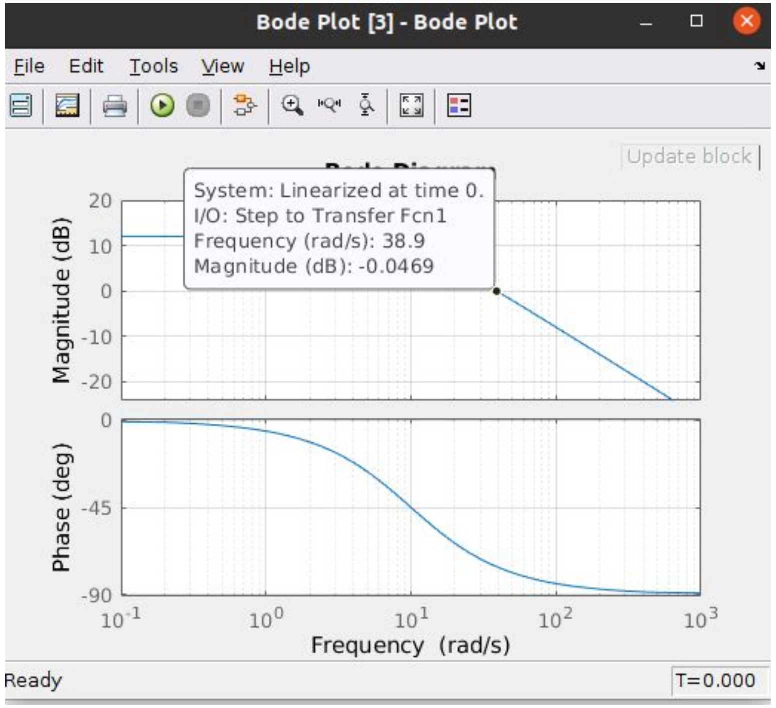
- Premi su +
- Clicca sulla freccia nel modello simulink
- Porta segnale nel box sx
- Configuration:
  - Input
  - Output
  - altri…



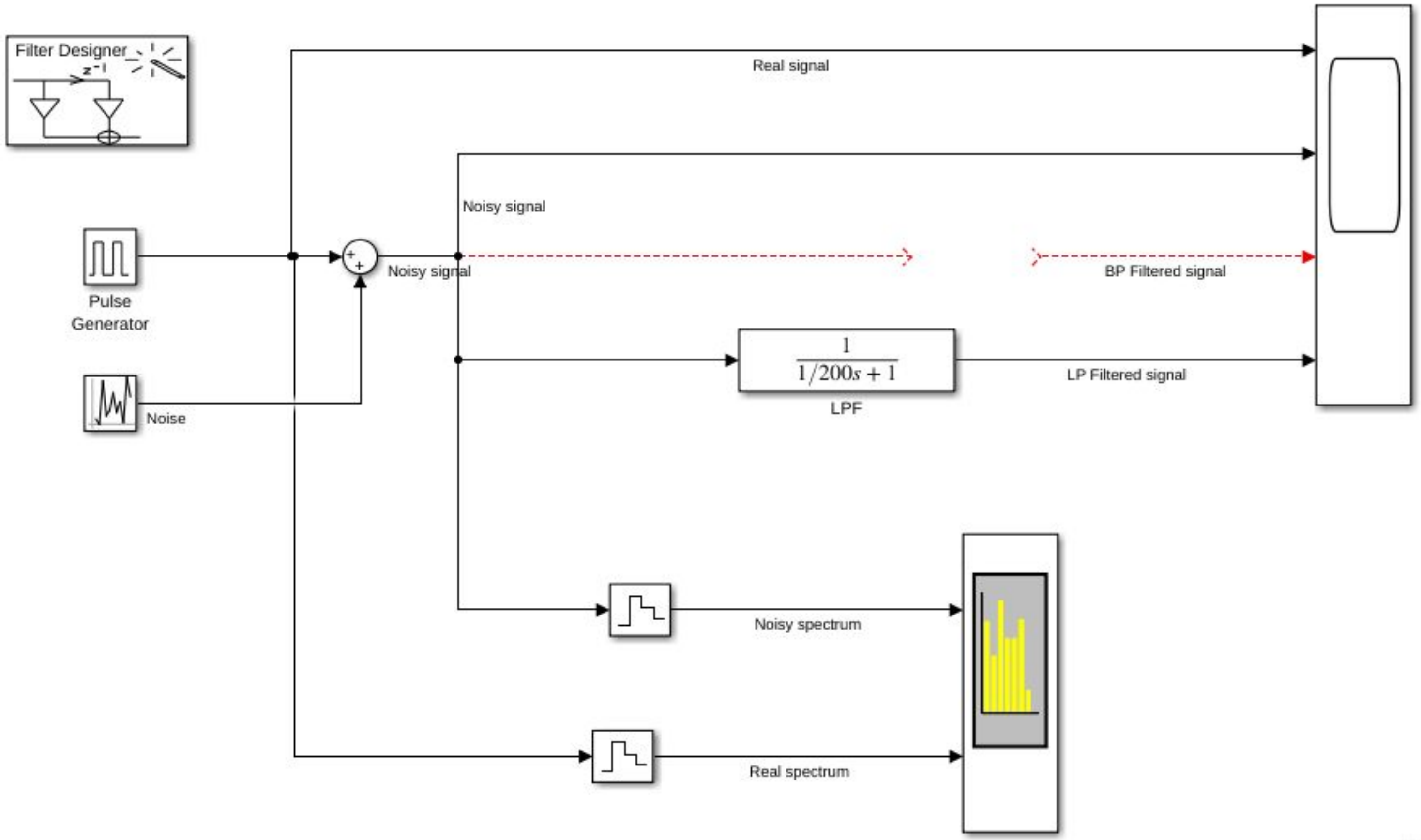
Esercitazione 1 : Dimensionamento filtro



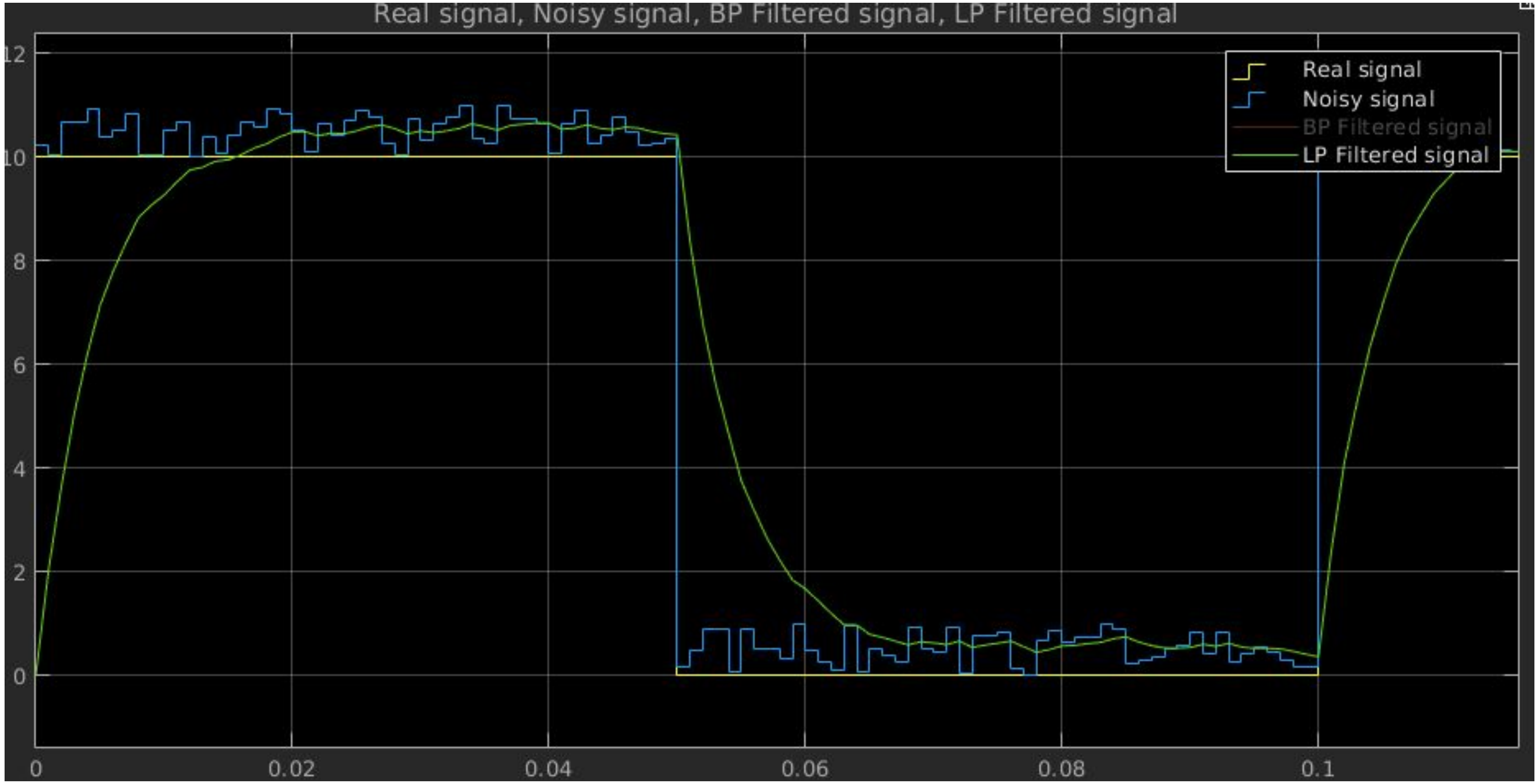




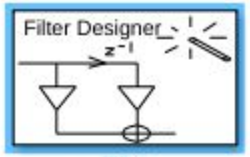
Esercitazione 1 : Dimensionamento filtro



Esercitazione 1 : Tempo di campionamento

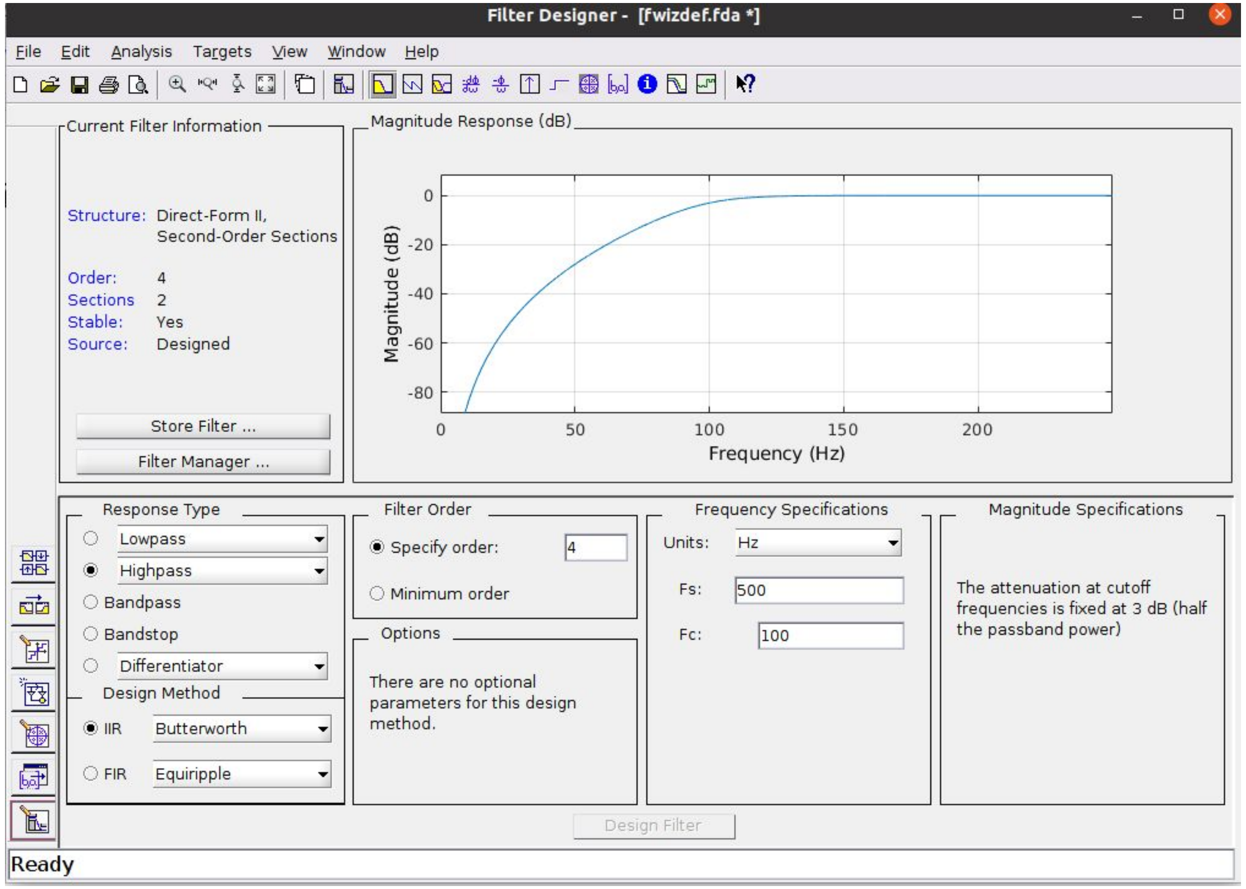


Esercitazione 1 : Tempo di campionamento

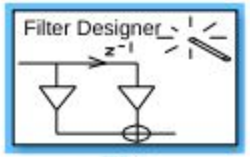


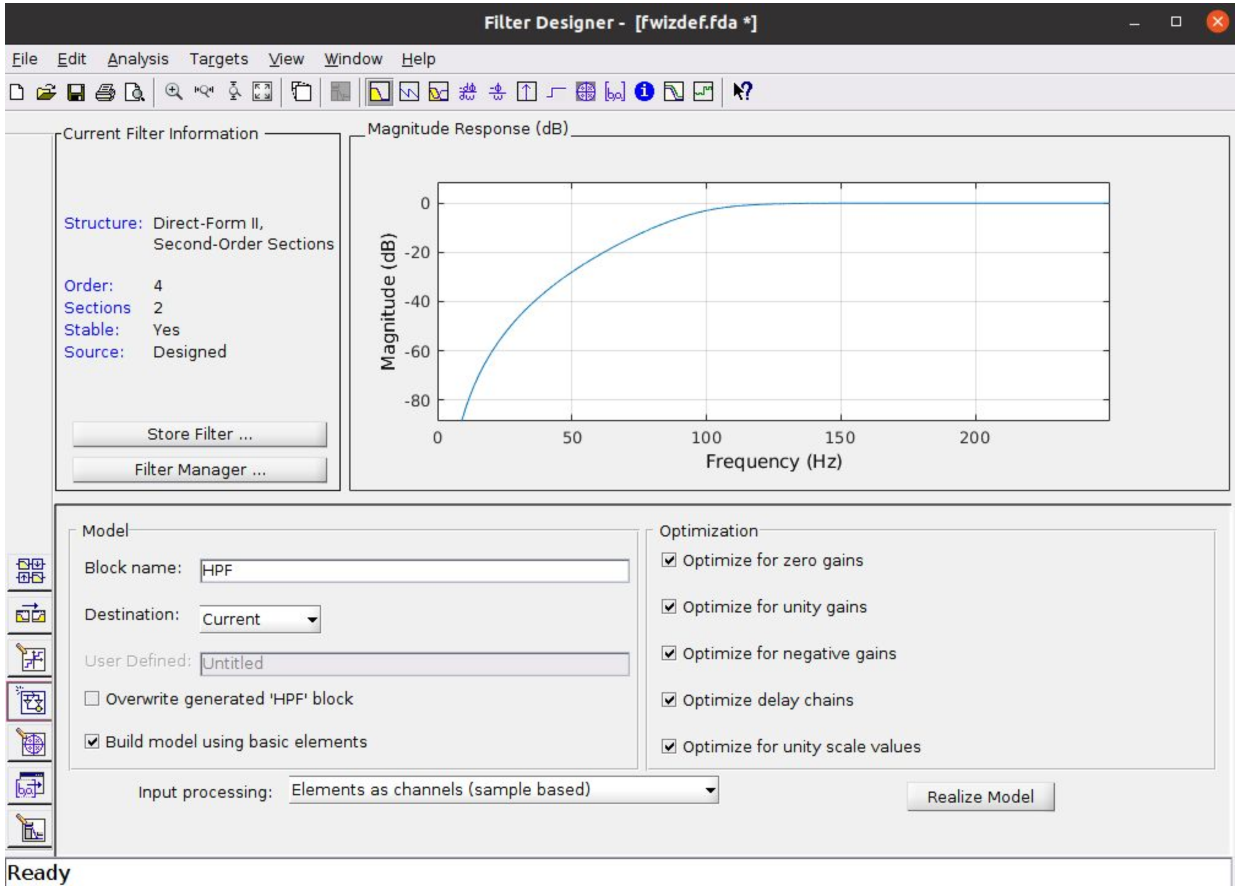
Filter
Realization
Wizard

Esercitazione 1 : Tempo di campionamento

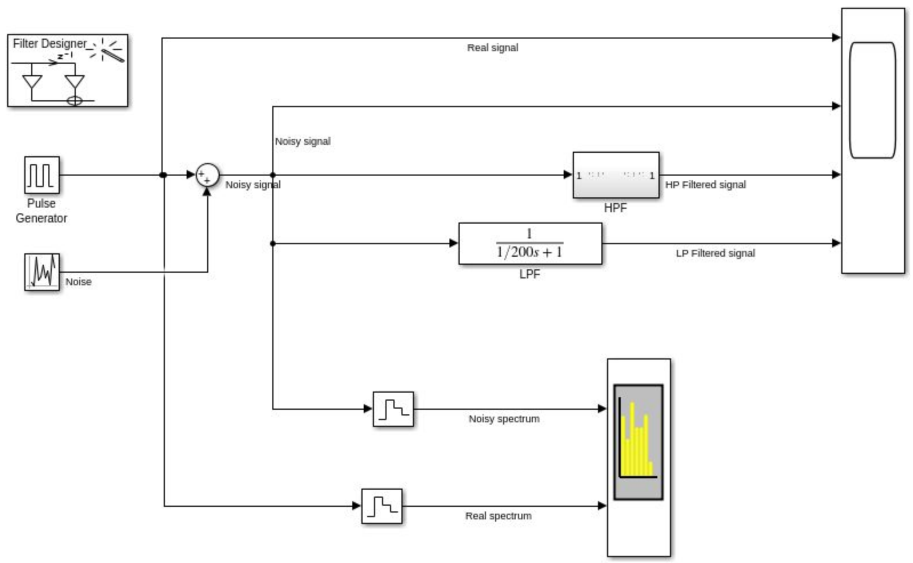


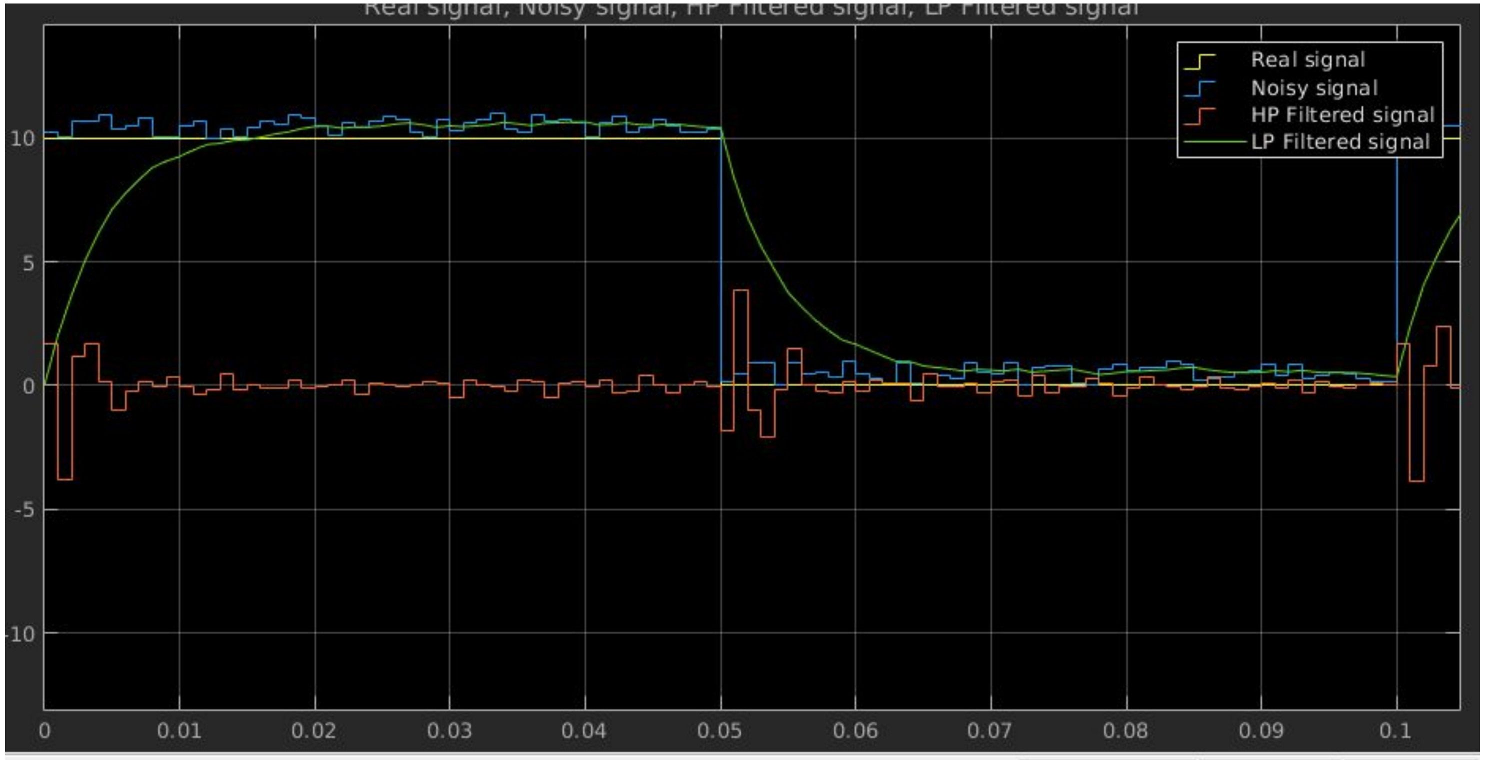
Esercitazione 1 : Tempo di campionamento



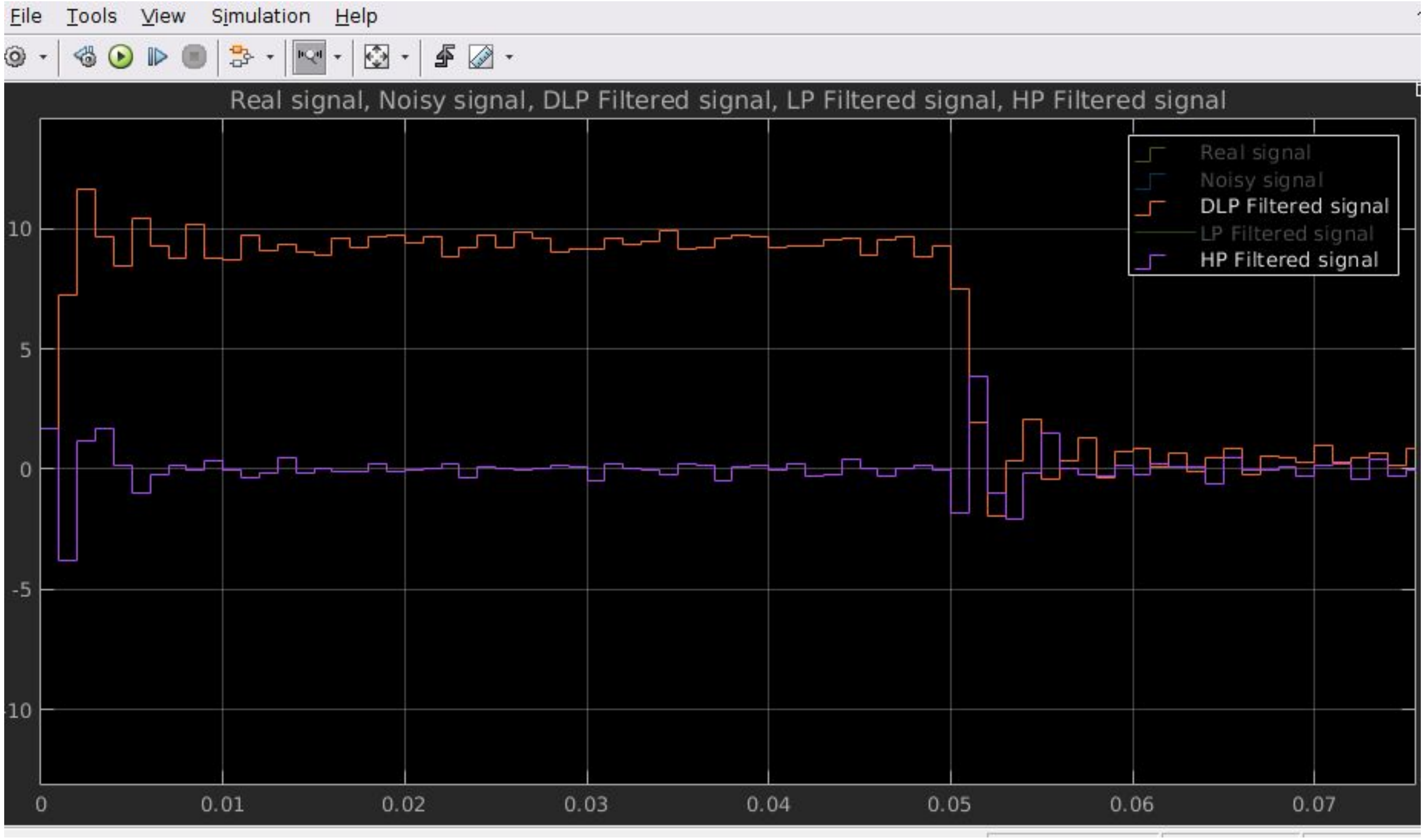


Esercitazione 1 : Tempo di campionamento

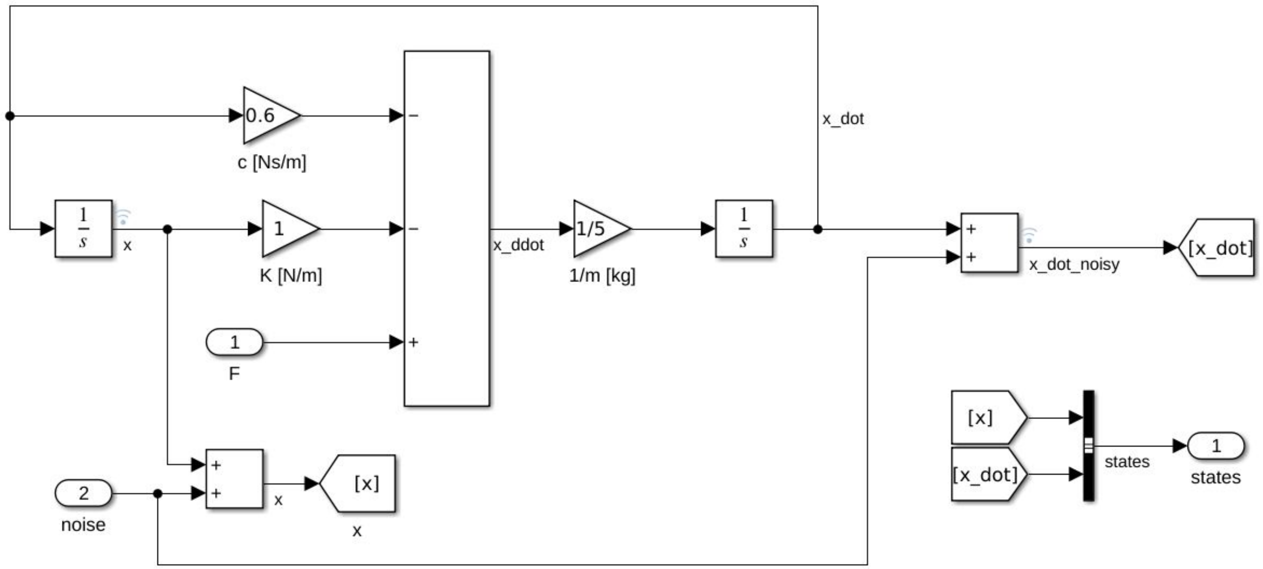


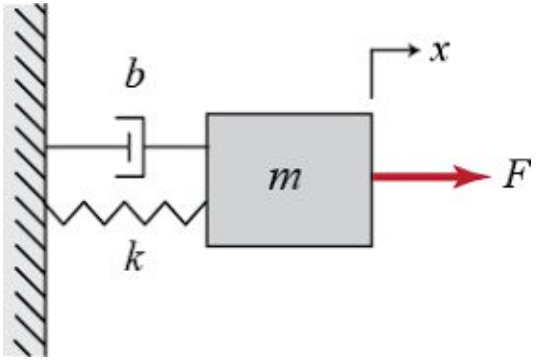


Esercitazione 1 : Tempo di campionamento

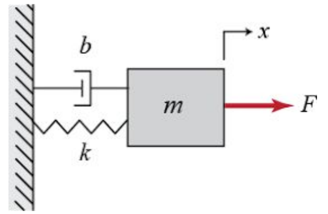


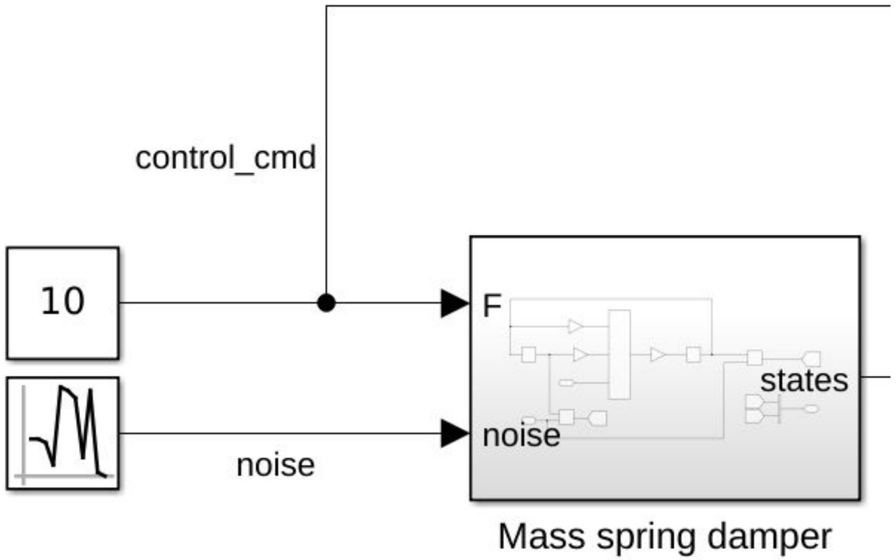
Esercitazione 2 : Kalman filter design per sistema MMS

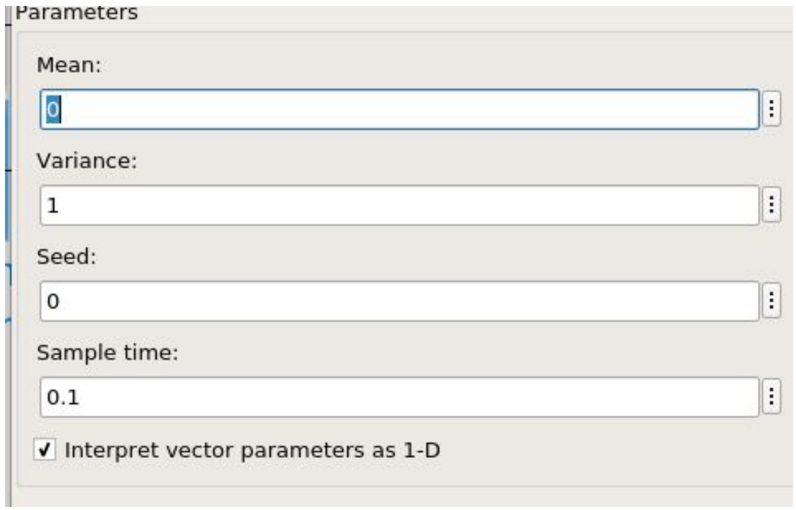




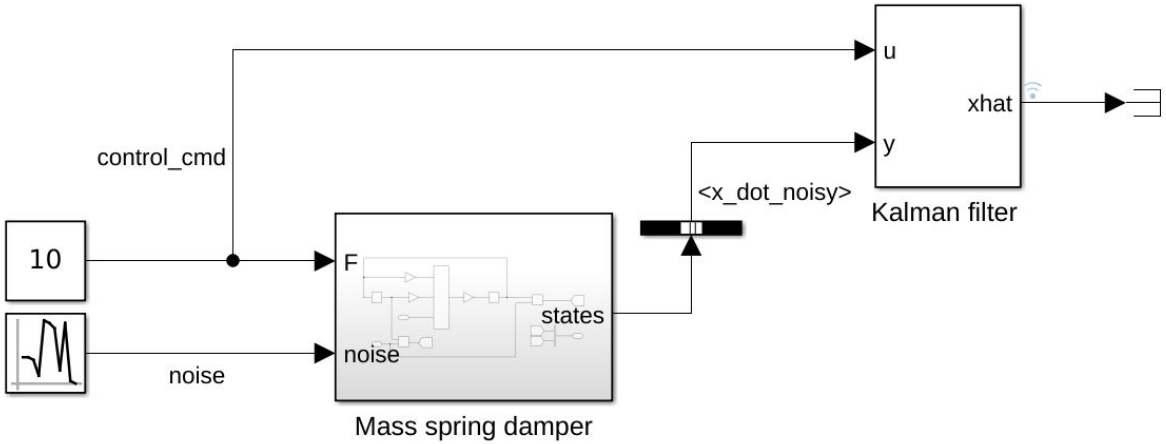
Esercitazione 2 : Kalman filter design per sistema MMS

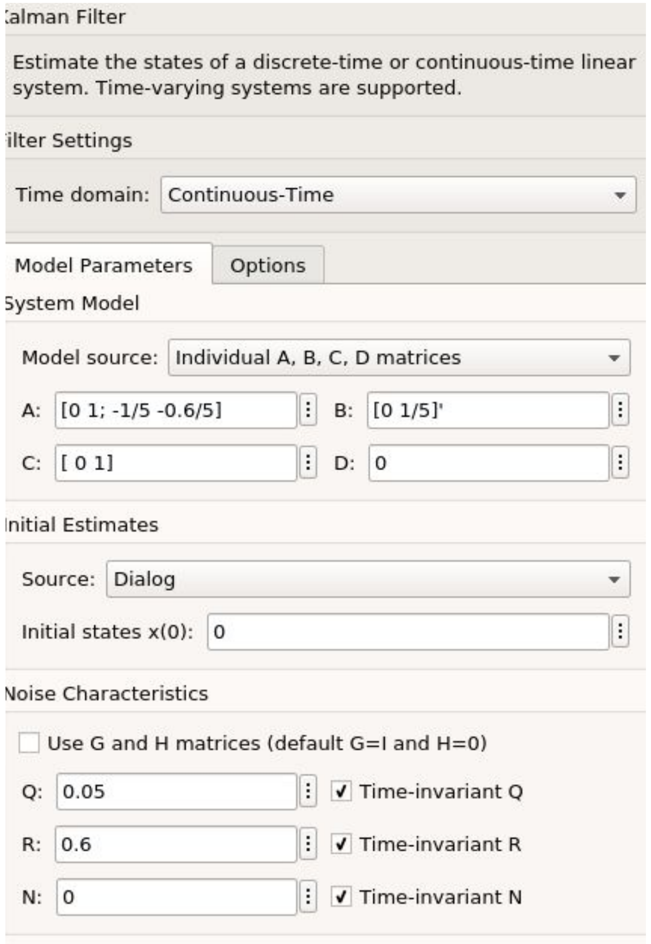


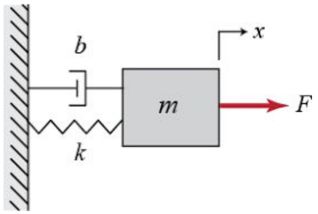




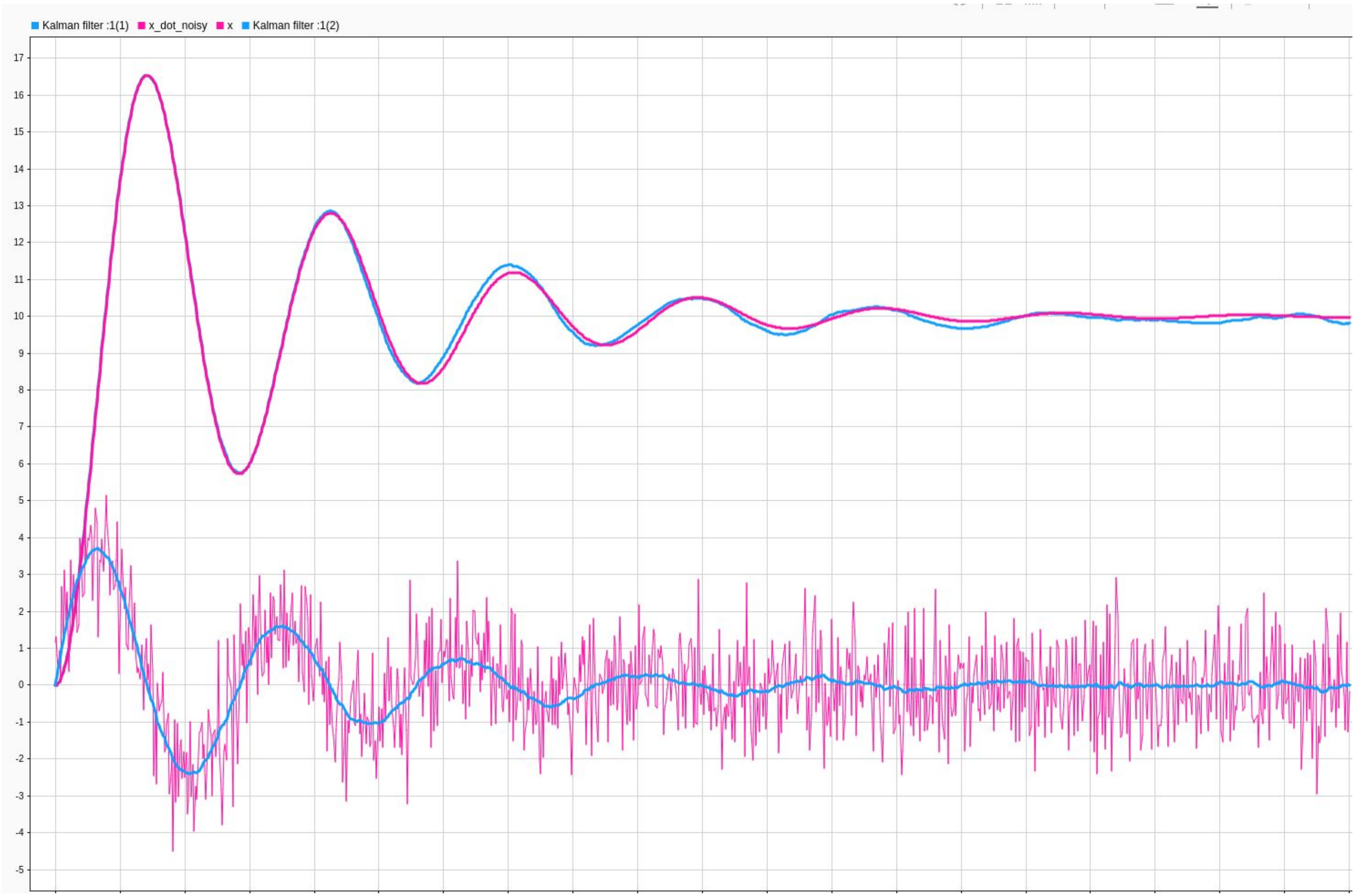
Esercitazione 2 : Kalman filter design per sistema MMS

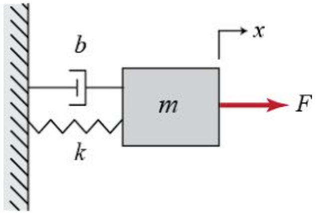






Esercitazione 2 : Kalman filter design per sistema MMS





Esercitazione per casa

- Sviluppare un modello di sistema RL
  - Con equazioni differenziali
  - Nello spazio di stato
  - tau = 1e-3

- Sviluppare un filtro di Kalman e/o passa basso/alto per pulire il segnale rumoroso con le seguenti caratteristiche:
  - media = 0.1
  - var = 1
  - sample time = 1e-4