Partial Differential Equations

戈孔明

更新：2020 年 9 月 2 日

由于学识有限，本文缺点和错误在所难免，欢迎批评指正，如有雷同，纯属巧合。

联系方式：gkm0120@163.com

1 偏微分方程解答

例 1.1 介绍双曲抛物椭圆方程的形式与特点.

Solution. 1. 弦振动 (双曲)

$$
\begin{aligned}
\text{一维}: & u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t) \\
\text{二维}: & u_{tt} - a^2 (u_{xx} + u_{yy}) = f(x,y,t) \\
\text{三维}: & u_{tt} - a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = f(x,y,z,t)
\end{aligned} \tag{1}
$$

2. 热传导 (抛物)

$$
\begin{aligned}
\text{一维}: & u_{t} - a^2 u_{xx} = f(x,t) \\
\text{二维}: & u_{t} - a^2 (u_{xx} + u_{yy}) = f(x,y,t) \\
\text{三维}: & u_{t} - a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = f(x,y,z,t)
\end{aligned} \tag{2}
$$

3.1 Laplace 方程 (椭圆)

$$
\begin{aligned}
\text{一维}: & a^2 u_{xx} = 0 \\
\text{二维}: & a^2 (u_{xx} + u_{yy}) = 0 \\
\text{三维}: & a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0
\end{aligned} \tag{3}
$$

3.2 Possion 方程 (椭圆)

$$\begin{aligned} &\text{一维}: a^2u_{xx} = f(x,t) \\ &\text{二维}: a^2(u_{xx}+u_{yy}) = f(x,y,t) \\ &\text{三维}: a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}) = f(x,y,z,t) \end{aligned} \tag{4}$$

例 1.2 用分离变量法求初边值问题.

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = \cos\frac{\pi}{2}x, \quad u_t|_{t=0} = \cos\frac{3\pi}{2}x, \quad 0 \le x \le l, \\ x|_{x=0} = 0, \quad x|_{x=l} = 0, \quad t \ge 0. \end{cases}$$

Solution. 设解为 $u(x,t) = X(x)T(t)$，则

$$T''X(x) - a^2X''(x)T(t) = 0,$$

于是

$$\frac{X''}{X(x)} = \frac{T''}{a^2T(t)} = -\lambda. \quad \text{(Constant)}$$

即

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, , \tag{5}$$

$$T''(x) + \lambda a^2 T(t) = 0, \tag{6}$$

由边界条件可知

$$X'(0)T(t)=0,\quad X(l)T(t)=0.$$

于是

$$X'(0)=X(l)=0, \tag{7}$$

下面解特征值问题(5), (6),

情形 1. $\lambda<0$，则(5)的通解为：

$$X(x)=c_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

其中 c_1,c_2 是任意常数，要使它满足边界条件 $X(0)=X(l)=0$，就必须有

$$\begin{cases}c_1+c_2=0,\\ c_1e^{\sqrt{-\lambda}t}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}t}=0.\end{cases}$$

由于其系数行列式

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\ e^{\sqrt{-\lambda}t} & e^{-\sqrt{-\lambda}t}\end{vmatrix}\neq 0$$

因此 c_1 和 c_2 必须同时为零，从而 $X(x)\equiv 0$. 此时特征值问题(5),(7)只有平凡解.

情形 2. $\lambda=0$，方程 $X''(x)+\lambda X(x)=0$ 的通解为

$$X(x)=c_1+c_2x,$$

由边界条件 $X(0)=X'(l)=0$，得

$$c_1=0, c_1+c_2 l=0.$$

所以 $c_1=c_2=0$，从而 $X(x)\equiv 0$. 此时该特征值问题(5),(7) 只有平凡解.

情形 3. $\lambda>0$，则(5)的通解为：

$$X(x)=c_1\cos\sqrt{\lambda}x+c_2\sin\sqrt{\lambda}x.$$

代入边界条件得

$$c_2=0, \quad c_1\cos\sqrt{\lambda}=0,$$

于是特征值为

$$\lambda_k=(k+\frac{1}{2})^2\pi^2, \quad k=0,1,\cdots$$

对应的特征函数为

$$X_k(x)=a_k\cos(k+\frac{1}{2})\pi x, \quad k=0,1,\cdots$$

对特征值 λ_k，解方程(6)得：

$$T_k(t)=b_k\cos(k+\frac{1}{2})\pi at+c_k\sin(k+\frac{1}{2})\pi at.$$

于是

$$u_k(x,t)=\left(A_k\cos(k+\frac{1}{2})\pi at+B_k\sin(k+\frac{1}{2})\pi at\right)\cos(k+\frac{1}{2})\pi x, \quad k=0,1,\cdots$$

作级数

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(A_k\cos(k+\frac{1}{2})\pi at+B_k\sin(k+\frac{1}{2})\pi at\right)\cos(k+\frac{1}{2})\pi x$$

代入初始条件，得

$$\sum_{k=0}^{\infty}A_k\cos(k+\frac{1}{2})\pi x=\cos\frac{1}{2}\pi x,\quad \sum_{k=0}^{\infty}B_k(k+\frac{1}{2})\pi a\cos(k+\frac{1}{2})\pi x=\cos\frac{3}{2}\pi x.$$

$$\Rightarrow A_0=1,A_1=A_2=\cdots=0,\quad B_0=0,B_1=\frac{2}{3\pi a},B_2=B_3=\cdots=0.$$

所以解为：

$$u(x,t)=\cos\frac{\pi at}{2}\cos\frac{\pi x}{2}+\frac{2}{3\pi a}\sin\frac{3\pi at}{2}\cos\frac{3\pi x}{2}.$$

例 1.3 求解下列定解问题

$$\begin{cases}u_{xx}+2cosxu_{xy}-sin^2xu_{yy}=0, & -\infty<x<\infty,y>sinx,\\ u|_{y=sinx}=\varphi(x),u_y|_{y=sinx}=\psi(x), & -\infty<x<\infty\end{cases}$$

Solution. 特征方程为

$$0=dy^2-2\cos xdxdy-\sin^2xdx^2=[dy-(\cos x-1)dx][dy-(\cos x+1)dx]$$

而

$$y-\sin x+x=C_1\text{或}y-\sin x-x=C_2.$$

作自变量变换

$$\xi = y - \sin x + x \text{或} \eta = y - \sin x - x,$$

则原方程化为

$$u_{\xi\eta} = 0 \Rightarrow u = f(\xi) + g(\eta) = f(y - \sin x + x) + g(y - \sin x - x).$$

又由初始条件，

$$f(x) + g(-x) = \varphi(x),$$

$$f'(x) + g'(-x) = \phi(x),$$

$$f(x) - g(-x) = \int_0^x \phi(t)dt + C,$$

$$f(x) = \frac{1}{2}[\varphi(x) + \int_0^x \phi(t)dt + C],$$

$$g(x) = \frac{1}{2}[\varphi(-x) + \int_{-x}^0 \phi(t)dt - C],$$

$$u(x,y) = \frac{1}{2}[\varphi(y - \sin x + x) + \varphi(-y + \sin x + x)] + \frac{1}{2}\int_{-y+\sin x+x}^{y-\sin x+x} \phi(t)dt.$$

例 1.4 不详

Solution. 部分指数函数积分表

$$\int e^{cx}dx=\frac{1}{c}e^{cx},\quad \int a^{cx}dx=\frac{1}{cIna}a^{cx}\quad (a>0,a\neq 1)$$

$$\int xe^{cx}dx=\frac{e^{cx}}{c^2}(cx-1),\quad \int x^2e^{cx}dx=e^{cx}\left(\frac{x^2}{c}-\frac{2x}{c^2}+\frac{2}{c^3}\right)$$

$$\int x^ne^{cx}dx=\frac{1}{c}x^ne^{cx}-\frac{n}{c}\int x^{n-1}e^{cx}dx,\quad \int xe^{cx^2}dx=\frac{1}{2c}e^{cx^2}$$

$$\int e^{cx}sinbxdx=\frac{e^{cx}}{c^2+b^2}(csinbx-bcosbx),\quad \int e^{cx}cosbxdx=\frac{e^{cx}}{c^2+b^2}(ccosbx+bsinbx)$$

例 1.5 求方程

$$x^2u_{xx}-2xyu_{xy}+y^2u_{yy}+xu_x+yu_y=0 \tag{8}$$

的通解.

Solution. 特征方程为

$$x^2dy^2-2xydxdy+y^2dx^2=0$$

其中 $a=x^2,b=-xy,c=y^2$，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}=-\frac{y}{x}$$

进而

$$xy=c.\quad (c为常数)$$

令 $\xi = xy, \eta = y$，则

$$u_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x = y u_\xi,$$

$$u_{xx} = (y u_\xi)_\xi \cdot \xi_x + (y u_\xi)_\eta \cdot \eta_x = y^2 u_{\xi\xi},$$

$$u_y = u_\xi \cdot \xi_y + u_\eta \cdot \eta_y = x u_\xi + u_\eta,$$

$$u_{yy} = (x u_\xi + u_\eta)_\xi \cdot \xi_y + (x u_\xi + u_\eta)_\eta \cdot \eta_y = x^2 u_{\xi\xi} + 2x u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$

$$u_{xy} = (x u_\xi + u_\eta)_\xi \cdot \xi_x + (x u_\xi + u_\eta)_\xi \cdot \eta_x = xy u_{\xi\xi} + y u_{\xi\eta}.$$

代入(8)有

$$y^2 u_{\eta\eta} + 2xy u_\xi + y u_\eta = 0,$$

化简得

$$\eta^2 u_{\eta\eta} + 2\xi u_\xi + \eta u_\eta = 0.$$