Resumos de TC

Gonçalo Rua

2023

1 Conceitos Básicos

1.1 Definições

- Alfabeto (Σ) - conjunto finito não-vazio (de símbolos)
- Palavra - sequência finita de elementos de Σ
- Σ^* - conjunto de todas as palavras com símbolos de Σ
- Palavra vazia (ϵ) - pertence a Σ^* para todo o alfabeto Σ
- Linguagem (L) - qualquer conjunto $L \subset \Sigma^*$

1.1.1 Nota

Num alfabeto Σ com n elementos, o número de palavras de tamanho k é n^k.

1.2 Operações sobre palavras

Sendo ω a palavra 1101 e σ a palavra 010:

- Reversão (ω^R) - 1011
- Concatenação ($\omega.\sigma$) - 1101010 ($\omega.\epsilon = \epsilon.\omega = \omega$)
- $\omega^n = \begin{cases} \epsilon, & \text{se } n = 0 \\ \omega.\omega^n - 1, & \text{c.c.} \end{cases}$
- Comprimento da palavra ω ($|\omega|$) - 4
- n-ésimo símbolo da palavra ω (ω_n)

1.3 Operações sobre linguagens

- Linguagem complementar de L ($\bar{L}$) - $\Sigma^* \backslash L$
- Conjunto de toas as linguages sobre Σ ($\mathcal{L}^\Sigma$)
- Concatenação ($L_1.L_2$) - $\{uv : u \in L_1, v \in L_2\}$, assumindo que $L_1, L_2 \in \mathcal{L}^\Sigma$
- Fecho de Kleene da linguagem L (L^*) - $\{u_1.u_2.\ldots.u_n : n \in \mathbb{N}_0, u_1, u_2, \ldots, u_n \in L\}$

2 Autómatos

2.1 Autómatos Finitos Determinísticos (AFD)

Um AFD é um conjunto $(\Sigma, \mathbf{Q}, q_{in}, F, \delta)$:

- Σ - alfabeto
- $\mathbf{Q}$ - conjunto finito não vazio de estados
- $q_{in} \in \mathbf{Q}$ - estado inicial
- $F \subset \mathbf{Q}$ - conjunto de estados finais
- $\delta : \mathbf{Q} \times \Sigma \to \mathbf{Q}$ - função de transição

Cada AFD define uma linguagem sobre o seu alfabeto Σ.

2.1.1 Autómatos totais

Um autómato é *total* se a função de transição em cada estado estiver definida para todas as letras. Caso não seja total podemos convertê-lo em total:

1. adicionar um estado não final q'
2. estender a função de transição tal que $\delta(q, a) = q'$ para todo o par $(q, a) \in \mathbf{Q} \times \Sigma$ que a função de transição não fosse definida
3. definir $\delta(q', a) = q'$, para todo o $a \in \Sigma$

2.1.2 Função de transição estendida

$$\delta^*(q, w) = \begin{cases} q, & \text{se } w = \epsilon \\ \delta^*(\delta(q, a), w'), & \text{se } w = a.w' \end{cases}$$

2.1.3 Linguagem reconhecida e linguagem regular

Uma palavra $w \in \Sigma^*$ é aceite por um autómato se $\delta^*(q_{in}, w) \in F$.
O conjunto de palavras aceites por um autómato chama-se *linguagem reconhecida* por esse autómato:

$$L(D) = \{w \in \Sigma^* : \delta^*(q_{in}, w) \in F\}$$

Uma linguagem L diz-se *regular* se existe um AFD D tal que $L(D) = L$. Denota-se por $\mathcal{REG}^\Sigma$ o conjunto de todas as linguagens regulares com alfabeto Σ.

2.2 Autómatos Finitos Não Determinísticos (AFND)

Um AFND é um conjunto $(\Sigma, \mathbf{Q}, q_{in}, F, \delta)$:

- Σ - alfabeto
- $\mathbf{Q}$ - conjunto finito de estados
- $q_{in} \in \mathbf{Q}$ - estado inicial
- $F \subset \mathbf{Q}$ - conjunto de estados finais
- $\delta : Q \times \Sigma \to \wp(Q)$ - função de transição

2.2.1 Conjunto das partes (de S)

$\wp(S)$ representa o conjunto dos subconjuntos do conjunto S.

$$\text{(ex) } \wp(\{0,1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$$

O tamanho do conjunto $\wp(S)$ é 2^n, sendo n o tamanho do conjunto S.

2.2.2 AFND com trasições-ϵ

Um AFND$^\epsilon$ é um AFND em que a sua função de transição tem domínio $Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\})$.

2.2.3 Fecho-ϵ

O fecho-ϵ do estado $q \in \mathbf{Q}$ é o conjunto $q^\epsilon \subset \mathbf{Q}$ tal que:

- $q \in q^\epsilon$
- $q' \in q^\epsilon \implies \delta(q', \epsilon) \subset q^\epsilon$

2.2.4 Função de transição estendida

$$\delta^*(q, w) = \begin{cases} q^\epsilon & \text{se } w = \epsilon \\ \cup_{q' \in q^\epsilon} (\cup_{q'' \in \delta(q', a)} \delta^*(q'', w')) & \text{se } w = a.w' \end{cases}$$

2.3 Conversão de AFNDs em AFDs

Todas as linguagens reconhecidas por AFNDs são regulares (existe um AFD que as reconhece).

2.3.1 Remoção de transições-ϵ

Dado um AFND $A = (\Sigma, \mathbf{Q}, q_in, F, \delta)$, temos que o AFND $A' = (\Sigma, (Q), q_in, F', \delta')$ é-lhe equivalente se:

1. Se podermos alcançar um estado final através de um movimento-ϵ, podemos considerar esse estado como sendo final:
$$F' = \{q \in Q : q^\epsilon \cap F \neq \emptyset\}$$
2. Para cada estado $q \in \mathbf{Q}$ vamos ver que estados conseguimos alcançar usando apenas a letra $a \in \Sigma$. O conjunto de estados que conseguimos alcançar só com a corresponde ao resultado de aplicar a a todos os estados em q^ϵ e depois tirar o fecho-ϵ do resultado:
$$\delta' : \mathbf{Q} \times \Sigma \to \wp(\mathbf{Q}) \text{ é tal que } \delta'(q, a) = \bigcup_{q' \in q^\epsilon} (\bigcup_{q'' \in \delta(q', a)} q''^\epsilon) \text{ para cada } q \in \mathbf{Q} \text{ e } a \in Sigma$$

2.3.2 Passar de AFND para AFD

Depois de removermos as transições-ϵ podemos passar o AFND para AFD.
Dado um AFND $A = (\Sigma, \mathbf{Q}, q_in, F, \delta)$, temos que o AFD $D = (\Sigma, \wp(\mathbf{Q}), q_in, F', \delta')$ é-lhe equivalente se:

1. $F' = \{\mathbf{C} \subset \mathbf{Q} : \mathbf{C} \cap F \neq \emptyset\}$
2. $\delta' : \wp(\mathbf{Q}) \times \Sigma \to \wp(\mathbf{Q})$ é tal que $\delta'(\mathbf{C}, a) = \bigcup_{q \in \mathbf{C}} \delta(q, a)$ para cada $\mathbf{C} \subset \mathbf{Q}$ e $a \in \Sigma$

2.4 Lema de Pumping (ou da bombagem)

Se $L \subset \Sigma^*$ é uma linguagem regular, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que, se $w \in L$ é uma palavra com $|w| \geq k$ então $w = w_1 w_2 w_3$ em que $w_1, w_2, w_3 \in \Sigma^*$ são tais que:

- $w_2 \neq \epsilon$
- $|w_1.w_2| \leq k$
- $w_1.w_2^t.w_3 \in L$ para cada $t \in \mathbb{N}_0$

2.5 Autómatos de Pilha (AP)

Um AP é um tuplo $P = (\Sigma, \Gamma, \mathbf{Q}, q_i n, F, \delta)$:

- Σ - alfabeto
- Γ - alfabeto auxiliar
- $\mathbf{Q}$ - conjunto finito não vazio de estados
- $q_i n \in \mathbf{Q}$ - estado inicial
- $F \subset \mathbf{Q}$ - conjunto de estados finais
- $\delta : \mathbf{Q} \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times (\Gamma \cup \{\epsilon\}) \to \wp(\mathbf{Q} \times (\Gamma \cup \{\epsilon\}))$

Simplificando, um AP é um AFND ao qual se adiciona uma *stack*, em que cada transição podemos adicionar e remover um símbolo do alfabeto auxiliar Γ (incluindo símbolos vazios).
Linguagens reconhecidas por APs denominam-se *linguagens independentes do contexto* ($\mathcal{IND}^{\Sigma}$).

2.5.1 Lema de Pumping para Linguagens Independentes do Contexto

Se $L \subset \Sigma^*$ é uma linguagem independente do contexto, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que, se $w \in L$ é uma palavra com $|w| \geq k$ então $w = w_1 w_2 w_3 w_4 w_5$ em que $w_1, w_2, w_3 \in \Sigma^*$ são tais que:

- $w_2 w_4 \neq \epsilon$, ou seja $w_2 \neq \epsilon \vee w_4 \neq \epsilon$
- $|w_2.w_3.w_4| \leq k$
- $w_1 w_2^i w_3 w_4^i w_5 \in L$ para qualquer $i \in \mathbb{N}_0$