Resumos de PE

Gonçalo Rua

2023

1 Noções de Probabilidade

1.1 Definições

Uma experiência diz-se *aleatória* se:

- todos os possíveis resultados são conhecidos à partida
- o resulto concreto de uma experiência não é conhecido à partida

Espaço Amostral (Ω) - conjunto de todos os possíveis resultados de uma experiência aleatória

Acontecimento - dada uma experiência aleatória E com espaço de resultados Ω, acontecimento (ou evento) é um subconjunto de Ω

$\mathcal{A}$ - dada E, com espaço Ω, $\mathcal{A}$ é o conjunto de todos os acontecimentos possíveis de Ω

1.2 Interpretação de Laplace

(ex) Na experiência E_1, a probabilidade do acontecimento $A = \{\text{sair face par}\}$ é dada por $P(A) = \frac{3}{6} = 0.5$.

1.3 Interpretação frequencista

A probabilidade de uma acontecimento A é o limite da frequência relativa da ocorrência de A numa longa sucessão de experiências realizadas sob as mesmas condições.

$$\text{(ex) } P(A) = \lim_{n\to\infty} f_n(A) = \frac{1}{2}$$

1.4 Interpretação subjetivista

A probabilidade de A é uma medidade pessoal (entre 0 e 1) do grau de crença sobre a ocorrência de A.

1.5 Axiomática

- Axioma 1: $P(A) \geq 0$, $\forall A \in \mathcal{A}$ (acontecimentos possíveis de Ω)
- Axioma 2: $P(\Omega) = 1$
- Axioma 3: Para qualquer sequência de acontecimentos disjuntos 2 a 2 $A_1, \ldots, A_n$ tem-se $P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$, $n = 2, 3, \ldots$

Espaço de probabilidade - (Ω, A, P)
Espaço mensurável de acontecimentos - $(\Omega, \mathcal{A})$

1.6 Teoremas decorrentes

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(\emptyset) = 0$
- $A \subset B \implies P(A) \leq P(B)$ e $P(B - A) = P(B) - P(A)$
- $P(A) \leq 1$
- $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

1.7 Probabilidade condicional ($P(A)$ se B aconteceu)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Axiomática

- Axioma 1: $P(A|B) \geq 0$, $\forall$ acontecimento A
- Axioma 2: $P(\Omega|B) = 1$
- Axioma 3: Para acontecimentos disjuntos $A_1, \ldots, A_n$, $P(\cup_{i=1}^{n} A_i|B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i|B)$, $n = 1, 2, \ldots$

Teoremas decorrentes

- $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$
- $P(\emptyset|B) = 0$
- $P(A|B) \leq 1$
- $A_1 \subset A_2 \implies P(A_1|B)$, $P(A_2 - A_1|B) = P(A_2|B) - P(A_1|B)$
- $P(A_2 - A_1|B) = P(A_2|B) - P(A_2 \cap A_1|B)$
- $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1 \cap A_2|B)$

Teorema da probabilidade composta

$$P(\cap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)P(A_2|A_1)\dots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Teorema da probabilidade total

Partição do espaço de resultados Ω:

- $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j = 1, \dots, n$
- $\cup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

Se B um acontecimento de um espaço de resultados Ω e $A_1, \dots, A_n$ uma partição de Ω:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$$

Teorema de Bayes

Se B um acontecimento de um espaço de resultados Ω, $P(B) > 0$ e $A_1, \dots, A_n$ uma partição de Ω, $\forall i = 1, \dots, n$:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)}$$

Acontecimentos independentes

Dois acontecimentos A e B, de um mesmo espaço de resultados Ω são independentes se:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Propriedades

- Todo o acontecimento é independente de $\emptyset$ e Ω
- Se A e B independentes, $P(A|B) = P(A)$, se $P(B) > 0$ e $P(B|A) = P(B)$, se $P(A) > 0$
- Se A e B independentes, $\bar{A}$ e B, A e $\bar{B}$ e $\bar{A}$ e $\bar{B}$ também são
- A e B são condicionalmente independentes a C se $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$
- A, B e C são completamente independentes se $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, $P(A \cap C) = P(A)P(C)$, $P(B \cap C) = P(B)P(C)$ e $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$

2 Variáveis aleatórias