

# Resumos de PE

Gonçalo Rua

February 28, 2023

## 1 Noções de Probabilidade

### Definições

- Uma experiência diz-se **aleatória** se:
  - todos os possíveis resultados são conhecidos à partida
  - o resultado concreto de uma experiência não é conhecido à partida
- **Espaço Amostral** ( $\Omega$ ) - conjunto de todos os possíveis resultados de uma experiência aleatória
- **Acontecimento** - dada uma experiência aleatória  $E$  com espaço de resultados  $\Omega$ , acontecimento (ou evento) é um subconjunto de  $\Omega$
- $\underline{A}$  - dada  $E$ , com espaço  $\Omega$ ,  $\underline{A}$  é o conjunto de todos os acontecimentos possíveis de  $\Omega$

### Interpretação de Laplace

(ex) Na experiência  $E_1$ , a probabilidade do acontecimento  $A = \{\text{sair face par}\}$  é dada por  $P(A) = \frac{3}{6} = 0.5$ .

### Interpretação frequencista

A probabilidade de um acontecimento  $A$  é o limite da frequência relativa da ocorrência de  $A$  numa longa sucessão de experiências realizadas sob as mesmas condições.

$$(\text{ex}) P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(A) = \frac{1}{2}$$

### Interpretação subjetivista

A probabilidade de  $A$  é uma medida pessoal (entre 0 e 1) do grau de crença sobre a ocorrência de  $A$ .

### Axiomática

- Axioma 1:  $P(A) \geq 0, \forall A \in \underline{A}$  (acontecimentos possíveis de  $\Omega$ )
- Axioma 2:  $P(\Omega) = 1$
- Axioma 3: Para qualquer sequência de acontecimentos disjuntos 2 a 2  $A_1, \dots, A_n$  tem-se  $P(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i), n = 2, 3, \dots$

**Espaço de probabilidade** -  $(\Omega, A, P)$

**Espaço mensurável de acontecimentos** -  $(\Omega, \underline{A})$

### Teoremas decorrentes

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(\emptyset) = 0$
- $A \subset B \implies P(A) \leq P(B)$  e  $P(B - A) = P(B) - P(A)$
- $P(A) \leq 1$
- $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

### Probabilidade condicional ( $P(A)$ se $B$ aconteceu)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

### Axiomática

- Axioma 1:  $P(A|B) \geq 0, \forall$  acontecimento  $A$
- Axioma 2:  $P(\Omega|B) = 1$
- Axioma 3: Para acontecimentos disjuntos  $A_1, \dots, A_n, P(\cup_{i=1}^n A_i|B) = \sum_{i=1}^n P(A_i|B), n = 1, 2, \dots$

### Teoremas decorrentes

- $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$
- $P(\emptyset|B) = 0$
- $P(A|B) \leq 1$
- $A_1 \subset A_2 \implies P(A_1|B), P(A_2 - A_1|B) = P(A_2|B) - P(A_1|B)$
- $P(A_2 - A_1|B) = P(A_2|B) - P(A_2 \cap A_1|B)$
- $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1 \cap A_2|B)$

**Teorema da probabilidade composta**

$$P(\cap_{i=1}^n A_i) = P(A_1)P(A_2|A_1) \dots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

**Teorema da probabilidade total**

*Partição* do espaço de resultados  $\Omega$ :

- $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j = 1, \dots, n$
- $\cup_{i=1}^n A_i = \Omega$

Se  $B$  um acontecimento de um espaço de resultados  $\Omega$  e  $A_1, \dots, A_n$  uma partição de  $\Omega$ :

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$$

**Teorema de Bayes**

Se  $B$  um acontecimento de um espaço de resultados  $\Omega$ ,  $P(B) > 0$  e  $A_1, \dots, A_n$  uma partição de  $\Omega$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ :

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^n P(A_j)P(B|A_j)}$$

**Acontecimentos independentes**