

Modellazione e confronto di endoreattori a propellente liquido

(Saturn V, Ariane 5, Falcon Heavy)

Jacopo Ferro, Daniele Gottardini, Davide Guerra, Tommaso Guidetti
Pietro Innocenzi, Lorenzo Lucarelli, Ahmed Marzouk

Maggio 2020



POLITECNICO
MILANO 1863

Prova finale Propulsione Aerospaziale A.A. 2019-2020

Indice

1	Presentazione	3
1.1	Obiettivi	3
1.2	Lanciatori spaziali	3
2	Modellazione di un endoreattore a liquido	5
2.1	Problema	5
2.2	Utilizzo del software CEA	6
2.3	Svolgimento	7
2.3.1	Parametri propulsivi	7
2.3.2	Parametri camera di combustione	9
2.3.3	Piastra di iniezione	9
2.3.4	Turbopompe	10
2.3.5	Perdite di carico	13
2.3.6	Ugello a campana	14
2.4	Modellazione semplificata dei booster a solido	18
3	Risoluzione numerica del modello	20
3.1	Costruzione di un grafo del problema	20
3.2	Vantaggi di un modello a grafo	21
3.3	Implementazione	21
3.3.1	Codice sorgente	22
4	Validazione del modello	23
5	Confronti e commenti dei risultati ottenuti	27
5.1	Spinta	27
5.2	Impulso specifico	29
5.3	Coefficiente di spinta	31
5.4	Dimensioni motori e parametri	32
5.5	Prodotti di combustione	33
6	Lista dettagliata dei parametri	35

1 Presentazione

L'ingegneria ci ha sempre affascinato. Modelli, equazioni e teorie hanno portato, grazie all'osservazione della natura, alla realizzazione di opere che hanno cambiato, continuano a cambiare e cambieranno sempre le nostre vite. Ognuno di noi si è sempre ispirato a progetti che hanno reso grande l'umanità e che hanno ispirato generazioni di ragazzi come noi. Per questo motivo abbiamo scelto come oggetto del nostro elaborato i seguenti lanciatori spaziali:

- Saturn V
- Ariane 5
- Falcon Heavy

1.1 Obiettivi

Sulla scelta di tali sistemi è pesato anche il fatto che siano tutti endoreattori a propellente liquido progettati in diversi decenni. Ciò permette di analizzare come si sono evoluti i parametri di prestazione e di dimensionamento per effetto della continua crescita tecnologica avvenuta nell'ultimo secolo.

In particolare è stato elaborato un modello di endoreattore a propellente liquido che racchiude i punti focali degli impianti: serbatoi, turbopompe, ciclo a generatore di gas, camera di combustione e ugello a campana. Verranno discusse le ipotesi e le situazioni in cui tale modello è valido, per poi analizzare le differenze e le similitudini tra i parametri dei diversi motori degli stadi.

1.2 Lanciatori spaziali

Saturn V Il Saturn V è il lanciatore delle missioni Apollo della NASA che ha portato gli occhi di tutta l'umanità puntati verso il cielo nello stesso momento, accompagnando gli astronauti sulla Luna.

Il suo sviluppo è iniziato alla fine degli anni Cinquanta, il lancio inaugurale è avvenuto nel 1967 ed è stato ritirato dal servizio nel 1973. Si tratta di un endoreattore a tre stadi con configurazione e tipo di motori differenti. Il primo stadio è composto da 5 motori F-1 disposti a croce con ossigeno liquido (LOX) come ossidante e cherosene RP-1 come combustibile. Il secondo stadio montava 5 motori J-2, meno potenti del precedente, con ossidante LOX e combustibile idrogeno liquido (LH_2). Infine il terzo stadio presentava un solo motore J-2. Il Saturn V, dovendo raggiungere la Luna, aveva bisogno di molto propellente. Di conseguenza è il lanciatore più pesante e di dimensioni maggiori rispetto agli altri due in esame. Ha portato a termine con successo 12 missioni su 13, portando l'uomo sulla Luna e aprendo la strada per future missioni con equipaggio umano su Marte.

Ariane 5 L'Ariane 5 è il lanciatore spaziale attualmente utilizzato dall'Agenzia Spaziale Europea (ESA). Esso è impiegato per missioni di vario genere. Tra queste si ricorda la missione Rosetta in cui il Politecnico di Milano ha dato il proprio contributo. I primi due lanci avvenuti nel 1996 e 1997 furono rispettivamente un fallimento e un parziale fallimento, ma dal 1998 ad oggi ha portato a termine con successo 95 missioni, arrivando così al suo ultimo anno di servizio. Nel 2020 è previsto infatti il lancio inaugurale del nuovo Ariane 6. Gli stadi di questo endoreattore sono due, con motore Vulcain 2 per il primo stadio e HM7B

per il secondo, entrambi con ossidante LOX e combustibile LH_2 ; inoltre dispone di due booster P241 a propellente solido (combustibile Al, ossidante NH_4ClO_4 , legante HTPB). L'Ariane 5¹ ha subito cambi di configurazione degli stadi per poter soddisfare le diverse richieste delle varie missioni, dimostrando una notevole versatilità.

Falcon Heavy Il Falcon Heavy è un lanciatore progettato dalla SpaceX che raccoglie l'eredità del Saturn V e punta a portare l'uomo su Marte, grazie al suo visionario fondatore. SpaceX si differenzia da ESA e NASA, avendo deciso di produrre da sé tutti i componenti dei propri lanciatori. Ciò porta a vantaggi in termini di costi e di progettazione in quanto non si adatta il progetto del lanciatore in base alla disponibilità sul mercato dei componenti, ma si producono componenti “ad hoc” per poter ottenere le migliori prestazioni possibili. SpaceX ha voluto recuperare l'idea del riutilizzo dei componenti, grazie alla quale è possibile ridurre i costi delle varie missioni. I due booster, ciascuno dei quali con 9 motori Merlin 1D+ a propellente liquido LOX e cherosene RP-1, accompagnano il Core Stage composto anch'esso da 9 motori Merlin 1D+. Il secondo stadio ha invece un motore Merlin 1D+ Vacuum.



Figura 1: Da sinistra: Saturn V, Ariane 5, Falcon Heavy

¹Nel nostro elaborato ci riferiamo sempre alla configurazione ECA

2 Modellazione di un endoreattore a liquido

2.1 Problema

L'obiettivo è il confronto tra endoreattori realmente esistenti tramite un modello unico e approssimato, che si basa sul ciclo a generatore di gas per trasportare combustibile e ossidante dai serbatoi alla camera di combustione. Volendo ottenere dei valori più simili possibile ai parametri e alle dimensioni dei motori dei lanciatori considerati, le specifiche utilizzate sono quelle reali, trovate nella letteratura di riferimento, oppure valori tipici. Le specifiche dei lanciatori spaziali prese in considerazione sono le seguenti:

Dati di Input								
Variabile	Simbolo	u.m.	Vulcain II	HM7B	Merlin 1D+	Merlin 1D+ vac	F-1	J-2
Rapporto delle aree	ε	—	58.2	83.1	16	165	16	27.5
Pressione camera combustione	p_c	MPa	11.5	3.7	11	11	7	5.26
Spinta a quota nominale	F_n	kN	1360	62.2	845	934	6770	1010
Pressione a quota nominale	p_n	Pa	0	0	1.01e+05	0	1.013e+05	0
Densità combustibile	ρ_f	kg/m^3	70.9	70.9	810	810	808	70.9
Densità ossidante	ρ_{ox}	kg/m^3	1140	1140	1410	1410	1143	1140
Rapporto miscela camera di combustione	r	—	6.1	5	2.36	2.37	2.27	5
Lunghezza caratteristica	L^*	m	0.78	0.78	1.02	1.02	1.27	0.78
Pressione serbatoio combustibile	$p_{tank,f}$	MPa	0.23	0.23	0.345	0.345	0.167	0.228
Pressione serbatoio ossidante	$p_{tank,ox}$	MPa	0.27	0.27	0.345	0.345	0.131	0.272
Angolo per ugello ²	θ_n	rad	0.524	0.524	0.489	0.593	0.454	0.524
Angolo per ugello	θ_e	rad	0.131	0.131	0.166	0.122	0.166	0.148
Fattore di correzione velocità	η_{2D}	—	0.988	0.99	0.987	0.99	0.986	0.9875

Tabella 1

Le ipotesi di lavoro durante l'espansione in ugello sono:

- Frozen Equilibrium (i.e. nessuna trasformazione chimica)
- Flusso monodimensionale
- Flusso stazionario
- Flusso adiabatico
- Flusso isoentropico

Si vogliono calcolare i parametri propulsivi più importanti e, se presente, la loro dipendenza dalla quota:

- Spinta F
- Impulso specifico I_s
- Impulso specifico volumetrico I_v
- Impulso specifico totale I_{tot}
- Coefficiente di spinta c_f
- Velocità all'efflusso u_e
- Velocità caratteristica c^*

² θ_n e θ_e sono definiti in Figura 4

Per farlo ci si riferisce ad intervalli tipici di missione:

Intervalli tipici di funzionamento degli stadi ³							
Lanciatore	Stadio	Tipo	N. motori	t. in.[s]	t. fin.[s]	z. in.[km]	z. fin.[km]
Ariane 5	Boosters	solido	2	0	140	0	66.7
	Core Stage	liquido	1	0	540	0	157.7
	Second Stage	liquido	1	540	1485	157.7	250
F. Heavy	Boosters	liquido	18	0	162	0	62
	Core Stage	liquido	9	0	282	0	92
	Stage II	liquido	1	282	679	92	250
Saturn V	F-1 I stadio	liquido	5	0	151	0	65
	J-2 II stadio	liquido	5	151	518	65	175
	J-2 III stadio	liquido	1	518	674	175	185
	J-2 riaccensione	liquido	1	674	1010	185	250

Tabella 2

Si provvederà al dimensionamento preliminare dei seguenti componenti del sistema:

- Serbatoi di ossidante e combustibile
- Ciclo a generatore di gas
- Testata di iniezione
- Camera di combustione
- Ugello a campana

2.2 Utilizzo del software CEA

Per modellare i processi chimici in camera di combustione e nel generatore di gas è stato fatto uso del software CEA (Chemical Equilibrium with Applications), sviluppato dalla NASA. Avendo impostato il software per risolvere problemi del tipo *Rocket Problem*, vengono specificati i seguenti dati di input:

- Ossidante
- Combustibile
- Rapporto di miscela r
- Pressione in camera di combustione p_c
- Rapporto delle aree ε

Viene applicata poi la seguente configurazione:

- Infinite area combustor

³Le ultime 4 colonne rappresentano, in ordine, gli istanti temporali di accensione e spegnimento degli stadi e le quote iniziali e finali di funzionamento. La quota finale più alta (250km) non corrisponde alla realtà, è stato scelto un unico valore per tutti i lanciatori in modo da migliorarne il confronto tramite dei grafici

- Frozen equilibrium (Throat)

Una volta eseguito il software, sono stati utilizzati nel modello i seguenti dati di output:

- Rapporto calori specifici dei prodotti di combustione γ
- Massa molare dei prodotti di combustione M_m
- Temperatura in camera di combustione T_c
- Calore specifico a pressione costante dei prodotti di combustione c_p

Inoltre è stato ricavato l'elenco dei prodotti di combustione in frazioni molari, di cui sarà discusso in seguito.

2.3 Svolgimento

2.3.1 Parametri propulsivi

Conoscendo la costante universale dei gas R_u e la massa molare media dei prodotti di combustione M_m , si può calcolare la costante specifica dei prodotti di combustione R :

$$R = \frac{R_u}{M_m} \quad (1)$$

La funzione di Vandekerckhove Γ è ricavata dalla conoscenza del rapporto dei calori specifici dei prodotti di combustione γ :

$$\Gamma = \sqrt{\gamma \cdot \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}} \quad (2)$$

È possibile calcolare la velocità caratteristica c^* , parametro di merito della camera di combustione:

$$c^* = \frac{\sqrt{R \cdot T_c}}{\Gamma} \quad (3)$$

Per esprimere la velocità all'efflusso è necessario conoscere la pressione all'efflusso p_e . Essa può essere ricavata, attraverso metodi numerici, conoscendo il rapporto delle aree $\varepsilon = \frac{A_e}{A_t}$, dove A_e è l'area di efflusso e A_t è l'area di gola dell'ugello, poichè ε e p_e sono legate dalla seguente relazione:

$$\frac{1}{\varepsilon} = \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \cdot \left(\frac{p_e}{p_c} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{p_e}{p_c} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \quad (4)$$

Avendo ipotizzato un flusso isoentropico, a calori specifici costanti e senza reazioni chimiche, si può calcolare la velocità ideale all'efflusso, utilizzando il fattore correttivo di velocità η_{2D} per tenere conto della non perfetta forma a campana dell'ugello (si veda 2.3.6):

$$u_e = \eta_{2D} \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{R_u}{M_m} \cdot T_c \cdot \left[1 - \left(\frac{p_e}{p_c} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} \quad (5)$$

Considerando il modello di aria standard è possibile trovare la quota di adattamento z_e come quota alla quale si ha una pressione pari a p_e . E' calcolato poi il coefficiente di spinta c_f al variare della pressione atmosferica esterna p_a con l'espressione:

$$c_f(p_a) = \eta_{2D} \cdot \sqrt{\frac{2\gamma^2}{\gamma-1} \cdot \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} + \frac{p_e - p_a}{p_c} \cdot \frac{A_e}{A_t} \quad (6)$$

Si ricava combinando l'espressione della spinta, la definizione di coefficiente di spinta e di rapporto delle aree, la seguente espressione che rappresenta la portata di propellente:

$$\dot{m}_p = \frac{F(z_n)}{u_e + \frac{\varepsilon u_e}{p_c c_f(p_n)} \cdot (p_e - p_n)} \quad (7)$$

dove p_n è la pressione alla quota z_n .

Si possono ricavare le sezioni e i diametri di gola e di efflusso come:

$$A_t = \frac{\dot{m}_p \cdot u_e}{p_c \cdot c_f(p_e)} \quad D_t = \sqrt{\frac{4A_t}{\pi}} \quad (8)$$

$$A_e = \varepsilon \cdot A_t \quad D_e = \sqrt{\frac{4A_e}{\pi}} \quad (9)$$

A questo punto, si può calcolare la spinta al variare della pressione esterna p_a (e quindi della quota):

$$F(p_a) = \dot{m}_p u_e + A_e (p_e - p_a) \quad (10)$$

Ricordando la definizione del rapporto di miscela $r = \frac{\dot{m}_{ox}}{\dot{m}_f}$, si può calcolare la portata massica di ossidante \dot{m}_{ox} e la portata massica di combustibile \dot{m}_f :

$$\dot{m}_f = \frac{\dot{m}_p}{r + 1} \quad (11)$$

$$\dot{m}_{ox} = r \cdot \dot{m}_f \quad (12)$$

e di conseguenza la massa e il volume di combustibile M_f , V_f e di ossidante M_{ox} , V_{ox} :

$$M_f = \dot{m}_f \cdot t_b \cdot k_s \quad M_{ox} = \dot{m}_{ox} \cdot t_b \cdot k_s \quad (13)$$

$$V_f = \frac{M_f}{\rho_f} \quad V_{ox} = \frac{M_{ox}}{\rho_{ox}} \quad (14)$$

dove k_s è un coefficiente di sicurezza, tipicamente attorno a 1.05, $t_b = t_{fin} - t_{in}$. (Tabella 2), ρ_f e ρ_{ox} sono le densità del combustibile e dell'ossidante rispettivamente (*Sutton et al.*).

L'impulso specifico e l'impulso specifico totale al variare della quota sono calcolati con le rispettive definizioni:

$$I_s(p_a) = \frac{F}{\dot{m}_p \cdot g_0} \quad (15)$$

$$I_{tot} = I_s \cdot (M_f + M_{ox}) \cdot g_0 \quad (16)$$

dove g_0 è il valore dell'accelerazione di gravità al livello del mare.

Introducendo un valore di densità del propellente come media delle densità del combustibile e dell'ossidante, $\rho_{avg} = \frac{M_f + M_{ox}}{V_f + V_{ox}}$, si può calcolare l'impulso specifico volumetrico I_v :

$$I_v = \rho_{avg} \cdot I_s \quad (17)$$

2.3.2 Parametri camera di combustione

Si consideri un endoreattore a liquido. Si ricava la velocità in camera di combustione u_c :

$$u_c = Ma_c \cdot \sqrt{\gamma_c \cdot R_c \cdot T_c} \quad (18)$$

dove Ma_c è il numero di Mach in camera di combustione (tipicamente pari a 0.2) e γ_c , R_c sono rispettivamente il rapporto dei calori specifici e la costante specifica dei gas in camera di combustione, ottenuti tramite il software CEA (Chemical Equilibrium with Applications).

Dopo aver calcolato la densità dei gas in camera di combustione come $\rho_c = \frac{p_c}{R_c \cdot T_c}$, è possibile ricavare la sezione e il diametro della camera di combustione:

$$A_c = \frac{\dot{m}_p}{\rho_c \cdot u_c} \quad D_c = \sqrt{\frac{4A_c}{\pi}} \quad (19)$$

Ora, si ricava da *Huzel and Huang* il valore di L^* che rappresenta la lunghezza necessaria della camera, affinché avvenga la combustione, se avesse una sezione pari alla sezione di gola dell'ugello. Conoscendo A_t , si ricava il volume V_c e la lunghezza L_c della camera di combustione:

$$V_c = L^* \cdot A_t \quad L_c = \frac{V_c}{A_c} \quad (20)$$

2.3.3 Piastra di iniezione

Le perdite di carico del fluido dovute al passaggio attraverso la piastra di iniezione sono stimabili, quando il motore non è accelerato, come $\Delta p_{inj} = 0.2p_c$ (*Humble et al.*). Considerando un foro del tipo *short-tube with rounded entrance* con coefficiente di efflusso $C_d = 0.88$ (*Sutton et al.*), si calcola l'area totale dei fori necessaria per ossidante, A_{thox} e combustibile, A_{thf} :

$$A_{thox} = \frac{\dot{m}_{ox}}{C_d \cdot \sqrt{2\rho_{ox} \cdot \Delta p_{inj}}} \quad A_{thf} = \frac{\dot{m}_f}{C_d \cdot \sqrt{2\rho_f \cdot \Delta p_{inj}}} \quad (21)$$

Ora, ipotizzando che un foro abbia diametro pari a 1 mm e quindi area pari a $A_{1h} = \frac{\pi}{4}$, si calcola il numero di fori necessari. Il numero di fori per combustibile n_{hf} e ossidante n_{hox} , sono imposti uguali, pertanto il numero effettivo di fori per ciascuna linea, n_h , sarà il minimo tra i due numeri ottenuti:

$$n_h = \left[\min \left(n_{hf} = \frac{A_{thf}}{A_{1h}}, n_{hox} = \frac{A_{thox}}{A_{1h}} \right) \right] \quad (22)$$

Si calcolano dunque le sezioni e i diametri dei fori per combustibile, A_{1hf} , D_{1hf} e ossidante, A_{1hox} , D_{1hox} :

$$A_{1hf} = \frac{A_{thf}}{n_h} \quad D_{1hf} = \sqrt{\frac{4A_{1hf}}{\pi}} \quad (23)$$

$$A_{1hox} = \frac{A_{thox}}{n_h} \quad D_{1hox} = \sqrt{\frac{4A_{1hox}}{\pi}} \quad (24)$$

Le velocità con cui combustibile e ossidante arrivano alla piastra di iniezione, rispettivamente u_f e u_{ox} , sono espresse nel seguente modo:

$$u_f = C_d \cdot \sqrt{\frac{2\Delta p_{inj}}{\rho_f}} \quad u_{ox} = C_d \cdot \sqrt{\frac{2\Delta p_{inj}}{\rho_{ox}}} \quad (25)$$

È possibile ricavare l'angolo α_f con il quale il combustibile deve impattare con l'ossidante affinché il propellente entri in camera di combustione parallelamente alle sue pareti ($\delta = 0$, Figura 2). Tramite l'equazione di conservazione della quantità di moto applicata alla situazione in figura è possibile ricavare:

$$\alpha_f = \arcsin \left(\frac{\dot{m}_{ox} \cdot u_{ox}}{\dot{m}_f \cdot u_f} \cdot \sin(\alpha_{ox}) \right) \quad (26)$$

dove α_{ox} è l'angolo con cui l'ossidante arriva alla piastra di iniezione, pari generalmente a 30° .

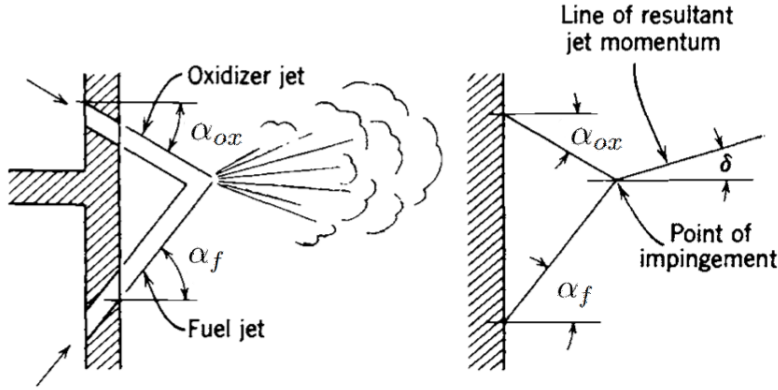
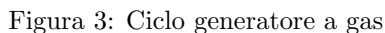


Figura 2: Angoli di iniezione

2.3.4 Turbopompe

Per analizzare il processo che porta l'ossidante e il combustibile dai rispettivi serbatoi alla piastra di iniezione è stato scelto il ciclo generatore di gas raffigurato in figura 3. Si tratta infatti di una configurazione tipica per molti lanciatori a propellente liquido e può essere applicato ai tre endoreattori scelti per un'analisi preliminare.



Si consideri inizialmente la turbina a gas. Il processo ideale di espansione è isoentropico, perciò la temperatura ideale all'uscita della turbina è:

con Π rapporto di compressione. Temperature e pressioni riportate sono quantità totali. Per rappresentare un processo reale è necessario introdurre un rendimento isoentropico:

Da cui si ricava la temperatura in uscita dalla turbina in funzione del rapporto di compressione:

La potenza ottenuta dalla turbina, tenendo conto di un rendimento meccanico η_{mech} è:

11

Dove la differenza tra le temperature si ottiene dalla relazione:

$$T_1 - T_2 = T_1 \cdot \eta_{is} \cdot \left(1 - \Pi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right) \quad (31)$$

La portata di gas combusti che entra in turbina è ottenuta dalla somma delle portate di ossidante e combustibile spillate (bleded) dalle rispettive valvole. Queste sono legate da un rapporto di miscela massico, relativo al generatore di gas:

$$r_{gg} = \frac{\dot{m}_{bl,ox}}{\dot{m}_{bl,f}} \quad (32)$$

Si può quindi scrivere che la portata massica in turbina è data da:

$$\dot{m}_{out} = \dot{m}_{bl,ox} + \dot{m}_{bl,f} = \dot{m}_{bl,f} \cdot (1 + r_{gg}) = \rho_f Q_{bl,f} \cdot (1 + r_{gg}) \quad (33)$$

Quindi, la potenza della turbina è data dalla seguente relazione:

$$W_T = \rho_f Q_{bl,f} \cdot (1 + r_{gg}) \cdot \eta_{mech} \cdot \eta_{is} \cdot c_p \cdot T_1 \cdot \left(1 - \Pi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right) \quad (34)$$

La potenza richiesta da ciascuna pompa, rispettivamente per combustibile e ossidante, è data da:

$$W_{p,f} = \frac{1}{\eta_{p,f}} Q_{tot,f} \cdot \Delta p_{p,f} \quad (35)$$

$$W_{p,ox} = \frac{1}{\eta_{p,ox}} Q_{tot,ox} \cdot \Delta p_{p,ox} \quad (36)$$

Dove è stato introdotto un rendimento per ciascuna pompa.

$\Delta p_{p,f}$ e $\Delta p_{p,ox}$ sono le pressioni conferite dalla pompa, rispettivamente, a combustibile e ossidante. Tali pressioni sono determinabili da un calcolo delle perdite di carico nel sistema, come mostrato nel paragrafo successivo. La portata totale è la somma tra quella spillata per il ciclo generatore di gas e quella che effettivamente viene pompata in camera di combustione:

$$Q_{tot,f} = Q_{cc,f} + Q_{bl,f} \quad (37)$$

$$Q_{tot,ox} = Q_{cc,ox} + Q_{bl,ox} \quad (38)$$

La turbina alimenta entrambe le pompe, da cui la seguente relazione:

$$W_T = W_{p,f} + W_{p,ox} \quad (39)$$

Sostituendo i valori delle potenze ottenute precedentemente, introducendo dei rapporti massici e volumetrici tra ossidante e combustibile ed effettuando qualche semplice passaggio algebrico, si ottiene infine la portata di combustibile da spillare:

$$Q_{bl,f} = \frac{\left(\frac{\Delta p_{p,f}}{\eta_{p,f}} + \phi_{cc} \frac{\Delta p_{p,ox}}{\eta_{p,ox}}\right) Q_{cc,f}}{\rho_f (1 + r_{gg}) \eta_{mech} \eta_{is} c_p T_1 \left(1 - \Pi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right) - \left(\frac{\Delta p_{p,f}}{\eta_{p,f}} + \phi_{gg} \frac{\Delta p_{p,ox}}{\eta_{p,ox}}\right)} \quad (40)$$

Da cui si può ottenere, dalla definizione di r_{gg} , anche la portata di ossidante da spillare. I rapporti massici e volumetrici riportati nella formula sono i seguenti:

$$\phi_{gg} = r_{gg} \cdot \frac{\rho_f}{\rho_{ox}} \quad (41)$$

$$r_{cc} = \frac{\dot{m}_{cc,ox}}{\dot{m}_{cc,f}} \quad (42)$$

$$\phi_{cc} = r_{cc} \cdot \frac{\rho_f}{\rho_{ox}} \quad (43)$$

Per le seguenti variabili sono stati utilizzati valori tipici (*Ernst et al.*):

- $\eta_{p,f} = \begin{cases} 0.75 & \text{per } LH_2 \\ 0.8 & \text{per RP-1} \end{cases}$
- $\eta_{p,ox} = 0.8$
- $\eta_{mech} = 0.975$
- $\eta_{is} = 0.7$
- $\Pi = \frac{1}{20}$
- $r_{gg} = 1$

A questo punto, è illustrato come sono stati ricavati i valori di pressione conferiti dalle pompe.

2.3.5 Perdite di carico

Dai serbatoi alla piastra di iniezione i fluidi diminuiscono la loro pressione a causa delle perdite di carico. Per un'analisi preliminare di nostro interesse sono state trovate in letteratura delle stime delle varie perdite di carico, che si hanno in un ciclo a generatore di gas, espresse come frazioni della pressione in camera di combustione:

- $\Delta p_{feed} = 0.1p_c$ (*Kesaev et al.*): perdite di carico distribuite nella linea di mandata
- $\Delta p_{hex} = 0.15p_c$ (*Humble et al.*): perdite di carico distribuite nello scambiatore di calore
- $\Delta p_{valves} = 0.15p_c$ (*Kesaev et al.*): perdite di carico concentrate dovute alla presenza di valvole
- $\Delta p_{inj} = 0.2p_c$ (*Humble et al.*): perdite di carico concentrate dovute alla piastra di iniezione

Le differenze di pressione che la pompa del combustibile $\Delta p_{p,f}$ e quella dell'ossidante $\Delta p_{p,ox}$, dovranno fornire sono quindi:

$$\Delta p_{p,f} = p_c + \Delta p_{feed,f} + \Delta p_{hex,f} + \Delta p_{valves,f} + \Delta p_{inj,f} - p_{tank,f} \quad (44)$$

$$\Delta p_{p,ox} = p_c + \Delta p_{feed,ox} + \Delta p_{valves,ox} + \Delta p_{inj,ox} - p_{tank,ox} \quad (45)$$

2.3.6 Ugello a campana

L'espansione all'interno di un ugello a campana risulta molto più efficiente rispetto a quella di un ugello conico di pari ε e lunghezza, poichè le sue pareti sono disegnate per minimizzare le perdite di divergenza. Il cambio di direzione di un flusso supersonico in un condotto può avvenire solo tramite onde di espansione oblique attraverso le quali si ha un incremento di velocità, un cambio di direzione e un calo di pressione e temperatura, provocando così minime perdite di energia.

Nella configurazione a campana, queste espansioni sono particolarmente concentrate tra la sezione di gola e il punto di inflessione N, dove la sezione del condotto incrementa molto velocemente. Tra il punto N, punto di flesso, e la sezione di efflusso si ha invece un progressivo rallentamento nella crescita dell'area rispetto al tratto precedente, che permette comunque ulteriori onde di espansione. Quando il flusso subisce il cambio di direzione in corrispondenza del punto di flesso si formano deboli onde d'urto oblique che deviano la direzione del flusso e ne decrementano la velocità. Ognuna di queste onde provoca inoltre una perdita di energia, ma con la configurazione a campana è possibile minimizzare le perdite bilanciando le onde di compressione con quelle di espansione.

Per il dimensionamento dell'ugello a campana è stato implementato il metodo di Rao (Figura 4), sviluppato dall'omonimo ingegnere aerospaziale americano Gadicharla V.R. Rao.

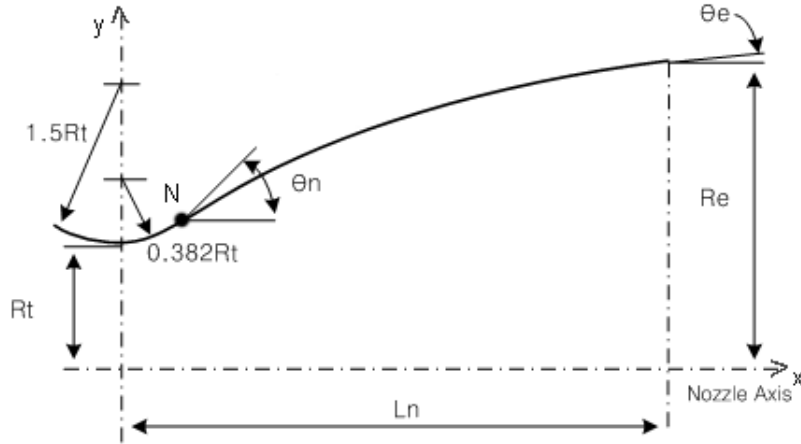


Figura 4: Ugello modello Rao

Definito come R_t il raggio di gola, vengono tracciati due archi di circonferenza: il primo, con un raggio di $1.5 \cdot R_t$, è disegnato da θ_i (Figura 5) fino alla gola a -90° ; il secondo, con un raggio di $0.382 \cdot R_t$, è disegnato da -90° fino al punto di flesso. I due archi sono poi congiunti ad una curva che si prolunga fino alla sezione di uscita dell'ugello. Quest'ultima è definita da un angolo iniziale divergente parabolico θ_n e un angolo finale divergente parabolico θ_e . Nell'implementazione di tale modello, Rao considerò come riferimento un ugello conico con un angolo di semiapertura di 15° . Da questo modello, sfruttando la forma a campana andò a ridurre, a parità di ε , la lunghezza secondo valori percentuali, cercando di mantenere, se non addirittura migliorare, l'efficienza in termini di spinta ed impulso specifico dell'ugello di partenza. Ottenne così vari casi di ugello di lunghezza L_n , calcolabile come una percentuale dell'ugello conico a pari ε . Solitamente le percentuali più utilizzate sono tra il 70% e l'85%, variabili a seconda che si voglia ottimizzare il peso o l'efficienza propulsiva. Sotto il 70%

la perdita di energia dovuta a onde d'urto oblique diventa non trascurabile, motivo per cui raramente si usano ugelli più corti. Nel caso di nostro interesse è stato considerato un ugello all'80%. Calcolata la lunghezza dell'ugello conico come:

$$L_{n,conico} = \frac{(\sqrt{\varepsilon} - 1) \cdot R_t}{\tan(15)} \quad (46)$$

la lunghezza dell'ugello a campana risulta quindi:

$$L_n = 0.8 \cdot \frac{(\sqrt{\varepsilon} - 1) \cdot R_t}{\tan(15)} \quad (47)$$

mentre il raggio della sezione d'uscita dell'ugello R_e :

$$R_e = \sqrt{\varepsilon} \cdot R_t \quad (48)$$

In corrispondenza della zona di gola dell'ugello, le equazioni degli archi circolari possono essere definite trigonometricamente prendendo un sistema di riferimento cartesiano con origine il centro della sezione di gola. In particolare si può dire che per il primo arco:

$$x = 1.5 \cdot R_t \cos(\theta) \quad (49)$$

$$y = 1.5 \cdot R_t \sin(\theta) + 1.5R_t + R_t \quad (50)$$

$$\theta_i \leq \theta \leq -90^\circ \quad (51)$$

L'angolo θ_i viene calcolato in funzione del raccordo fra camera di combustione e condotto convergente. Adottando una soluzione come in figura 5 l'angolo θ_i deve rispettare 3 condizioni:

- avere un valore minimo per cui sia geometricamente possibile creare un raccordo, ovvero il valore di angolo per cui il diametro di inizio convergente corrisponda al diametro della camera di combustione
- essere sufficientemente alto per garantire un raggio di curvatura del raccordo maggiore di un valore fissato, rendendo la giuntura con la camera di combustione adeguatamente “morbida”
- avere un valore minimo che limiti la pendenza massima del tratto convergente

Ottenuti i valori associati a queste 3 condizioni, si utilizza quello che soddisfa il vincolo più restrittivo.

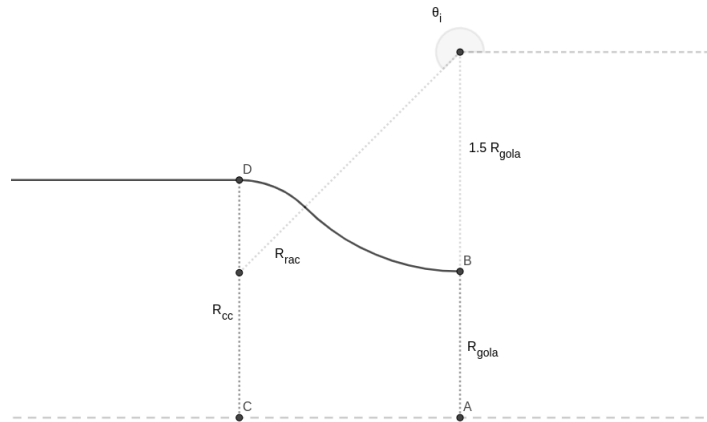


Figura 5: Raccordo fra convergente e camera di combustione

Gli angoli iniziale e finale del divergente, rispettivamente θ_n e θ_e , possono essere stimati facendo riferimento alla figura 6 che li mette in funzione di ε , parametrizzato sulla percentuale di lunghezza dell'ugello L_n .

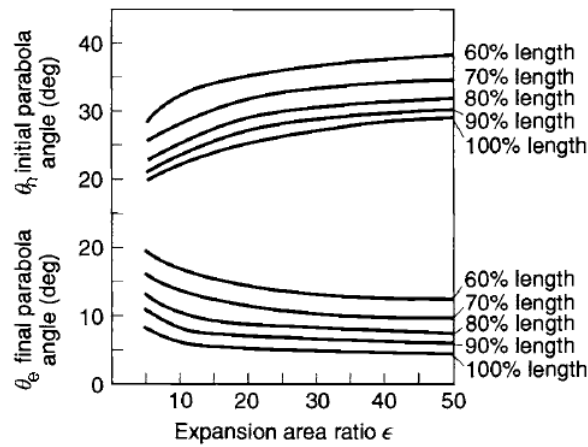


Figura 6: (i dati per valori di ε maggiori di 50 sono stati estrapolati)

Per il secondo arco:

$$x = 0.382 \cdot R_t \cos(\theta) \quad (52)$$

$$y = 0.382 \cdot R_t \sin(\theta) + 0.382 \cdot R_t + R_t \quad (53)$$

$$-90^\circ \leq \theta \leq (\theta_n - 90^\circ) \quad (54)$$

La campana è dimensionata attraverso una curva di Bézier quadratica⁴:

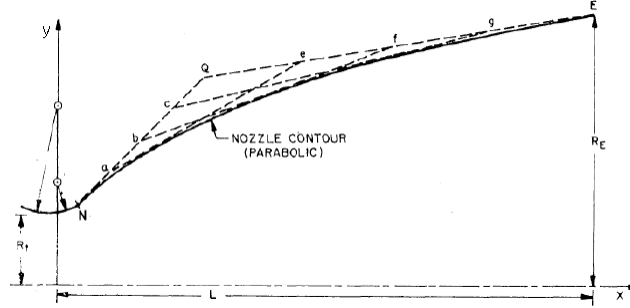


Figura 7: Costruzione modello di Bézier

$$x(t) = (1 - t)^2 N_x + 2(1 - t)t \cdot Q_x + t^2 E_x \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (55)$$

$$y(t) = (1 - t)^2 N_y + 2(1 - t)t \cdot Q_y + t^2 E_y \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (56)$$

La curva di Beziere è descritta dalle equazioni $x(t)$ e $y(t)$ che definiscono il percorso tracciato dalla curva dati i punti N , Q ed E , mentre a , b , c ed e , f , g costituiscono i punti di controllo di essa (si veda Figura 7).

In particolare, le coordinate di N sono ricavabili dalle equazioni (52) e (53) scegliendo un angolo $(\theta_n - 90^\circ)$, perciò:

$$N_x = 0.382 \cdot R_t \cos(\theta) \quad (57)$$

$$N_y = 0.382 \cdot R_t \sin(\theta) + 0.382 \cdot R_t + R_t \quad (58)$$

Le coordinate di E sono ricavabili dalle equazioni (47) e (48):

$$E_x = 0.8 \frac{(\sqrt{\varepsilon} - 1) \cdot R_t}{\tan(15)} \quad (59)$$

$$E_y = \sqrt{\varepsilon} \cdot R_t \quad (60)$$

Il punto Q è l'intersezione delle rette nel piano:

$$NQ : y_1(x) = m_1 x + C_1 \quad QE : y_2(x) = m_2 x + C_2 \quad (61)$$

con coefficienti angolari:

$$m_1 = \tan(\theta_n) \quad m_2 = \tan(\theta_e) \quad (62)$$

e intercette:

$$C_1 = N_y - m_1 N_x \quad C_2 = E_y - m_2 E_x \quad (63)$$

⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Bézier_curve

Le coordinate di Q sono dunque:

$$Q_x = \frac{(C_2 - C_1)}{m_1 - m_2} \quad (64)$$

$$Q_y = \frac{(m_1 C_2 - m_2 C_1)}{m_1 - m_2} \quad (65)$$

Il fattore correttivo η_{2D} , è stato ricavato dal grafico in figura 8 (*Sutton et al.*). Si può notare che l'efficienza dell'ugello aumenta all'aumentare della percentuale di lunghezza considerata e del rapporto delle aree ε .

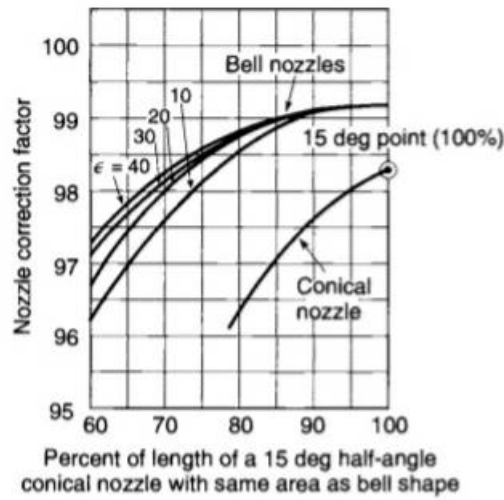


Figura 8: Fattore correttivo in funzione della lunghezza percentuale parametrizzato su ε

Nel nostro modello sono state necessariamente trascurate particolari specifiche di progetto dei lanciatori reali presi in esame. Un esempio è la possibilità dell'Ariane 5 di montare sul motore del suo primo stadio Vulcain II un ugello a doppia campana, che combina un ugello a bassa ε per basse quote e uno ad alta ε per alte quote, quest'ultimo preso come dato del nostro problema. Un ugello a doppia campana si adatta meglio a un motore funzionante in un ampio intervallo di quote, (come nel caso del Vulcain II) e risulta in grado di ottimizzare la spinta a fronte di una maggiore complessità del componente.

2.4 Modellazione semplificata dei booster a solido

La trattazione proposta considera lo studio e il confronto di endoreattori a liquido. La spinta del primo stadio dell'Ariane 5 è anche fornita da due booster a propellente solido (Combustibile Al, Ossidante NH_4ClO_4 , legante HTPB). Risulta necessaria quindi una modellazione, se pur semplice, di tale sistema per ricavare alcuni parametri propulsivi. I dati di input sono:

- Spinta nel vuoto F_{vac}
- Impulso specifico nel vuoto $I_{s,vac}$
- Impulso specifico al livello del mare $I_{s,sl}$

Si approssima la portata massica costante. Conoscendo la spinta e l'impulso specifico nel vuoto essa può essere calcolata secondo la formula:

$$\dot{m}_p = \frac{F_{vac}}{I_{s,vac} \cdot g_0} \quad (66)$$

Conoscendo la portata massica e i dati di input, si può ottenere l'impulso specifico in funzione di una generica pressione esterna e quindi di una generica quota:

$$I_s(p_e) = I_{s,sl} + \frac{I_{s,vac} - I_{s,sl}}{p_{sl}} \cdot (p_{sl} - p_e) \quad (67)$$

Analogamente, è possibile ottenere un'espressione della spinta:

$$F(p_e) = I_s(p_e) \cdot g_0 \cdot \dot{m}_p \quad (68)$$

3 Risoluzione numerica del modello

Una volta definito l'intero modello matematico in grado di ottenere tutti i parametri e i dimensionamenti prestabiliti, si è presentato il problema di dover calcolare il valore di oltre 100 variabili (per un totale di quasi 150 fra dati di input e variabili ausiliarie). L'approccio iniziale è stato quello di dividersi in sottogruppi per scrivere dei blocchi di codice Matlab® specializzati in alcuni aspetti del modello, per poi unire le varie parti e creare un "codice unificato". Tuttavia, superata questa fase (utile a comprendere la validità e il comportamento del modello) è stato ritenuto che un codice di questo tipo fosse poco leggibile e poco adattabile a diverse condizioni di utilizzo. È nata l'idea interessante di sperimentare una strategia diversa, ovvero modellizzare il problema facendo uso della teoria dei grafi⁵.

Premessa La struttura del modello matematico in uso implica inevitabilmente che il calcolo di tutte le variabili venga eseguito in un ordine preciso, in modo che ad una generica istruzione i del codice, tutte le variabili necessarie per passare all'istruzione $i + 1$ abbiano un valore assegnato. Questo non è veramente un problema, visto che fa parte della natura intrinseca del modello, ma quando il numero di variabili in gioco è molto alto nascono problemi di flessibilità, visto che un'eventuale modifica consistente di una parte del modello richiederebbe, con molta probabilità, un refactoring oneroso del codice.

3.1 Costruzione di un grafo del problema

L'utilizzo di grafi (insieme di nodi collegati da archi) per rappresentare questa tipologia di problema risulta particolarmente di facile intuizione, specialmente da un punto di vista grafico. L'intuizione è quella di associare un nodo ad ogni possibile variabile del modello e di collegare l'insieme dei nodi con una serie di archi per indicare le relazioni fra di essi. Si può chiarire meglio con un esempio.

Esempio Si considerino 4 variabili di un modello matematico A, B, C, D , ove A e D sono dati di input, mentre B è una funzione di A e D , e C è una funzione di A e B . Si può scrivere una lista di associazioni variabile-funzione basata sulle caratteristiche del modello:

$$\begin{aligned} A &\mapsto a_0 \\ B &\mapsto b(A, D) \\ C &\mapsto c(A, B) \\ D &\mapsto d_0 \end{aligned}$$

Da una lista simile è possibile definire le *dipendenze* di ogni variabile, ovvero le variabili necessarie al calcolo di essa. Questa scrittura permette di creare in modo iterativo, e quindi *automatizzabile*, un grafo orientato⁶, generando un nodo per ogni variabile della lista e collegandolo con un arco a ciascuna delle sue dipendenze (Figura 9).

⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Graph_theory

⁶https://en.wikipedia.org/wiki/Directed_graph

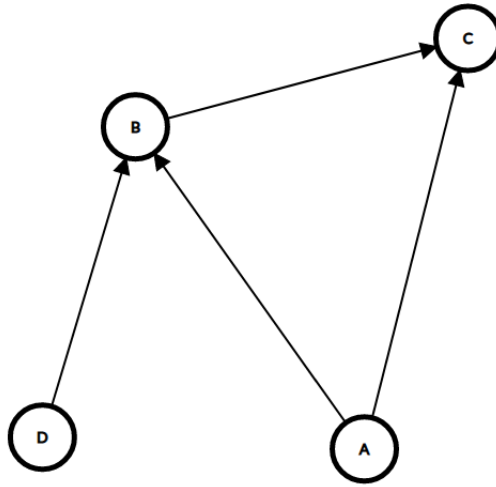


Figura 9: Grafo esemplificativo

3.2 Vantaggi di un modello a grafo

Questo tipo di rappresentazione permette di progettare un algoritmo estremamente flessibile, in quanto:

- non è necessario che i nodi vengano aggiunti in ordine di calcolo
- è possibile calcolare il valore di un qualsiasi nodo limitandosi all’analisi ricorsiva di tutte le sue dipendenze
- è sufficiente valutare solo i nodi strettamente necessari al calcolo delle variabili di output *richieste*, aumentando l’efficienza del calcolo e la leggibilità dei risultati
- la modifica di una variabile del modello richiede l’aggiornamento di un solo nodo, lasciando inalterato il resto del grafo

3.3 Implementazione

Per la risoluzione del modello usando una rappresentazione a grafo è stato sviluppato un algoritmo ricorsivo “ad hoc” per questa relazione con tutte le implementazioni necessarie ad ottenere i vantaggi prima elencati. Dopodichè è stato implementato in linguaggio Python⁷ scrivendo un software unificato full-featured, comprensivo di caricamento automatico dei dati dei vari propulsori, esecuzione automatica del CEA⁸ e di generazione automatica di grafici e tabelle comparative (utilizzati ampiamente nelle prossime sezioni).

⁷<https://www.python.org/>

⁸<https://rocketcea.readthedocs.io/en/latest/>

Risultato La complessità del grafo ottenuto dall'intero modello ha un impatto visivo evidente, come si può vedere in figura 10. Risulta quindi chiara l'utilità di una rappresentazione di questo tipo vista la complessità del problema.



Figura 10: Grafo del modello completo

3.3.1 Codice sorgente

È stato pensato di condividere pubblicamente il codice sorgente del nostro software, in modo che chiunque possa scaricarlo, eseguirlo e modificarlo liberamente. La pagina del progetto è accessibile all'indirizzo <https://github.com/gottardini/liquidrocket>

4 Validazione del modello

Una volta ottenuti i risultati dall'algoritmo risolutivo è necessario validarli, ovvero confrontarli con le caratteristiche reali degli endoreattori in oggetto. In questo modo si può vedere se il modello effettivamente si avvicina alla realtà. Come si nota dai successivi grafici⁹ a barre, dove si confrontano i valori reali trovati in letteratura con i valori calcolati dall'algoritmo, complessivamente si può affermare che il modello funziona soddisfacentemente, con piccole differenze dovute alle ipotesi introdotte.

Il parametro più rappresentativo in propulsione spaziale è l'impulso specifico (Figura 11), il quale calcolato alla quota nominale (valore di progetto a una quota specifica) risulta leggermente più alto di quello reale. Questo perchè la portata massica di propellente ottenuta è leggermente minore di quella reale (Equazione 15).

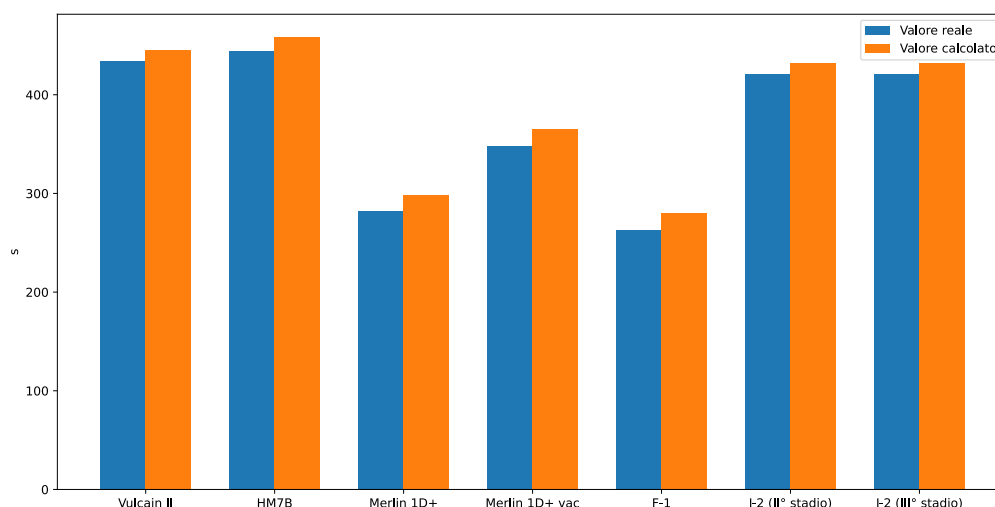


Figura 11: Confronto fra gli impulsi specifici nominali

Il difetto di portata massica (Figura 12) è dovuto al fatto che l'espansione nell'ugello è modellata come isoentropica e quindi la conversione di entalpia in energia cinetica è più efficiente del caso reale, in cui servirà incrementare il valore di portata massica per ottenere la stessa spinta. Ciò porta anche ad un aumento dell'area di gola (Equazione 8) e di conseguenza ad un maggiore diametro di efflusso reale (Figura 13).

⁹sono presenti solo i motori per cui abbiamo trovato corrispondenze in letteratura

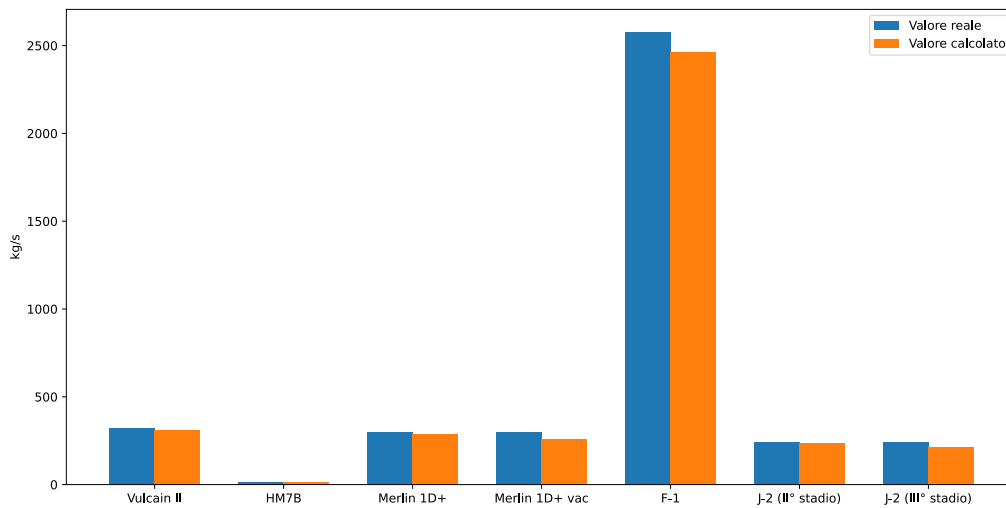


Figura 12: Confronto fra le portate massiche di propellente

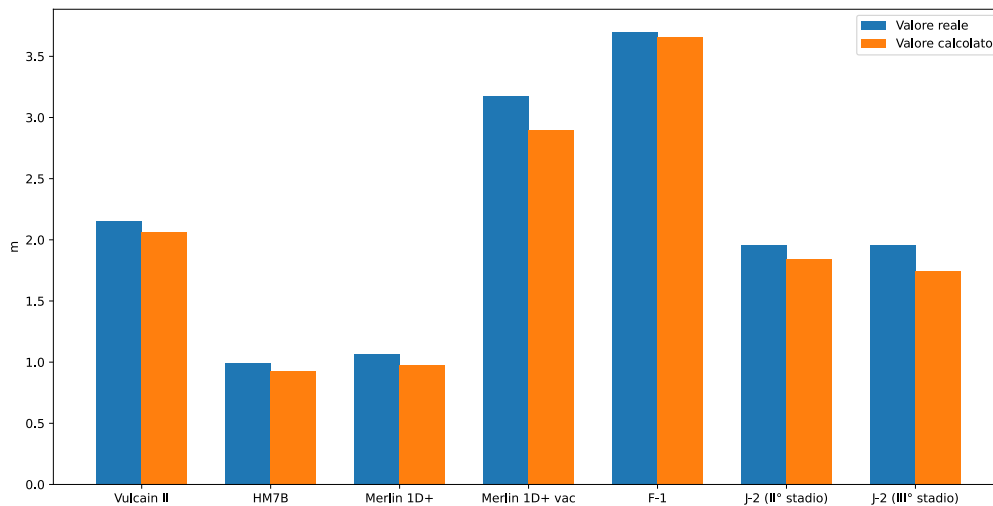


Figura 13: Confronto fra i diametri di efflusso

L'algoritmo che calcola il comportamento delle turbopompe porta a valori necessariamente più approssimativi, in quanto è stato generalizzato un impianto uguale per tutti gli endoreattori. Nonostante ciò il risultato è soddisfacente per Ariane 5 e Saturn V (endoreattori dei quali è possibile trovare un riscontro reale). Ciò può far pensare ad una buona approssimazione anche per quanto riguarda i valori del Falcon Heavy di SpaceX, di cui non sono reperibili informazioni dettagliate.

Per evidenziare le caratteristiche degli impianti vengono riportati gli andamenti delle potenze delle turbopompe per il combustibile (Figura 14) e per l'ossidante (Figura 15).

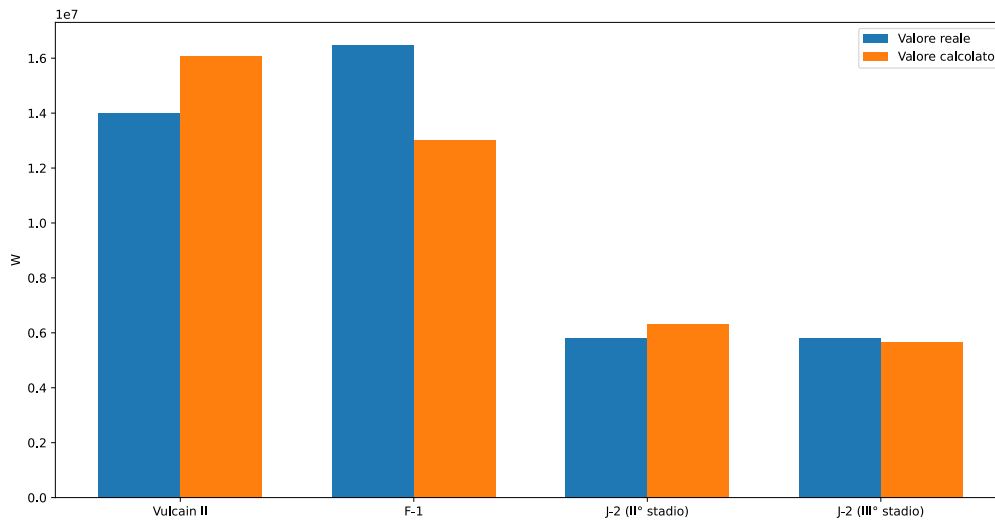


Figura 14: Confronto fra le potenze delle turbopompe per il combustibile

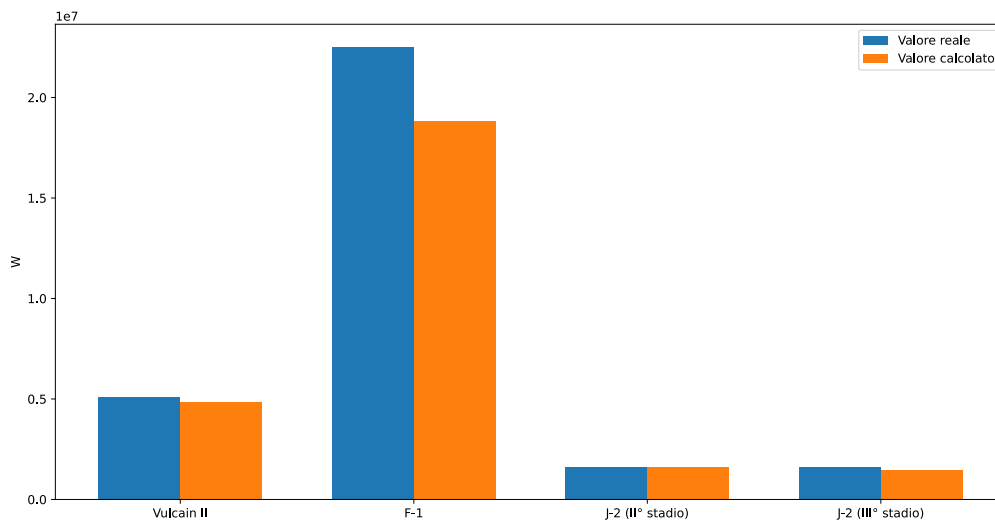


Figura 15: Confronto fra le potenze delle turbopompe per l'ossidante

L'errore commesso dal modello per le turbopompe del motore F-1 del Saturn V è più accentuato perchè, essendo lo stadio con dimensioni maggiori, avrà conseguentemente perdite di carico più consistenti di quelle considerate nel modello (si veda 2.3.5); di conseguenza le turbopompe necessiteranno di più potenza per poter erogare la portata richiesta.

Le lunghezze dei motori invece sono state calcolate nel modello come somma della lunghezza della camera di combustione e dei tratti convergente e divergente dell'ugello. Si può constatare come la lunghezza dei motori coincida con buona approssimazione con la realtà (Figura 16). Tenendo conto del fatto che nella realtà il motore è composto da più parti oltre

a quelle già citate (come impianto di alimentazione), il valore reale sarà maggiore a quello calcolato.

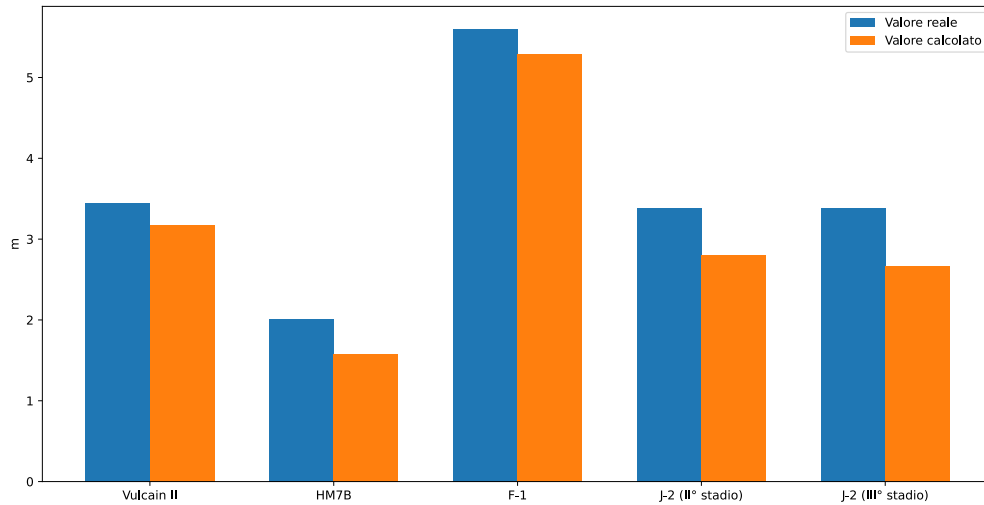


Figura 16: Confronto fra le lunghezze dei motori

Per quanto riguarda infine la lunghezza dell'ugello, la parte convergente è relativamente corta, i valori pertanto coincidono con buona approssimazione al risultato ottenuto. D'altra parte, la lunghezza della campana calcolata dal modello (si veda 2.3.6) è pressochè coincidente ai valori reali (in particolare del Saturn V, gli unici dei quali si ha un riscontro reale) (Figura 17).

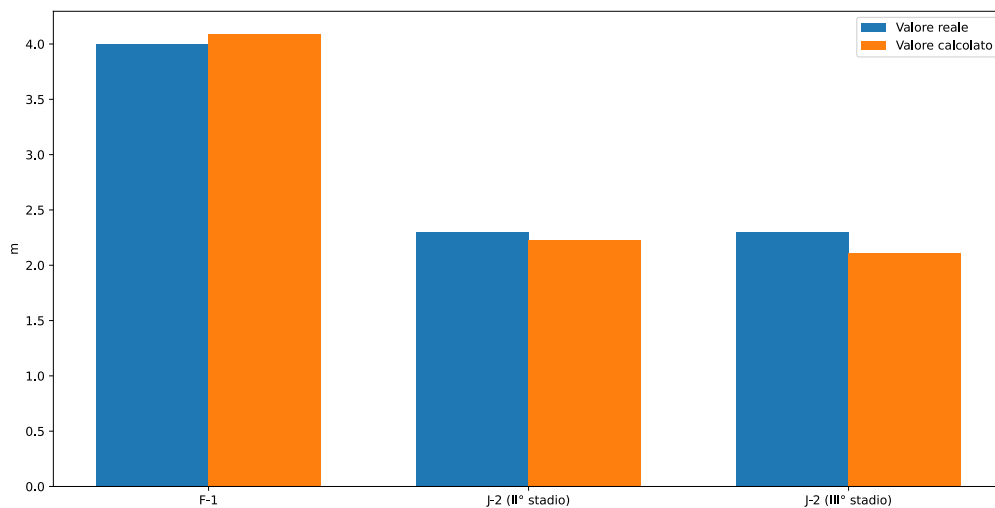


Figura 17: Confronto fra le lunghezze delle campane, Saturn V

5 Confronti e commenti dei risultati ottenuti

Sono calcolati i parametri propulsivi per poterli confrontare:

Parametri propulsivi calcolati analiticamente							
Variabile	Unità di misura	Vulcain II	HM7B	Merlin 1D+	Merlin 1D+ vac	F-1	J-2
$I_s(vac.)$	s	445.6	458.6	324.8	365.7	324	432.6
$I_v(vac.)$	$s \cdot kg/m^3$	1.626e+05	1.488e+05	3.753e+05	4.228e+05	3.287e+05	1.404e+05
u_e	m/s	4165	4315	2960	3459	2943	4013
$c_f(vac.)$	—	1.966	1.98	1.817	2.05	1.812	1.868
c^*	m/s	2228	2276	1752	1752	1745	2278
$F(vac.)$	N	1.36e+06	6.22e+04	9.202e+05	9.34e+05	7.833e+06	1.01e+06

Tabella 3

In tabella sono riportati i parametri costanti o presi a determinate condizioni. Sarà graficato l'andamento dei parametri che risentono dell'effetto della variazione di pressione ambiente, dopo aver considerato intervalli tipici di quote (Tabella 2). In tali intervalli sono stati ricavati i grafici di spinta, impulso specifico e coefficiente di spinta al variare della quota; infine verranno mostrate le dimensioni dei motori e analizzati i prodotti di combustione.

5.1 Spinta

Il primo stadio del Saturn V genera la spinta maggiore (Figura 18): questo perchè la spinta è funzione della portata massica di propellente (10) che, come si vede in figura 12, è nettamente maggiore rispetto agli altri stadi. Per poter elaborare tale portata massica le dimensioni del motore F-1 sono molto più grandi rispetto a quelle degli altri sistemi (Figura 24).

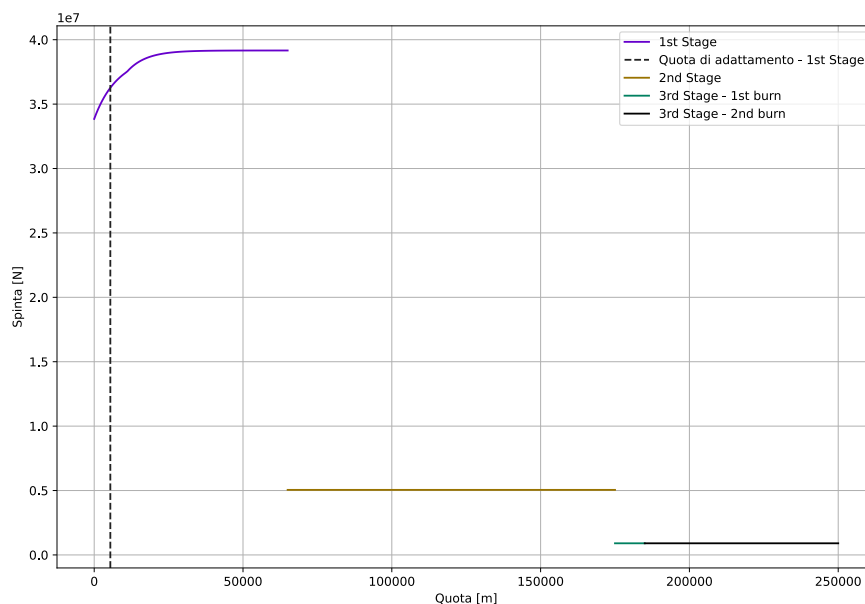


Figura 18: Spinta in funzione della quota - Saturn V

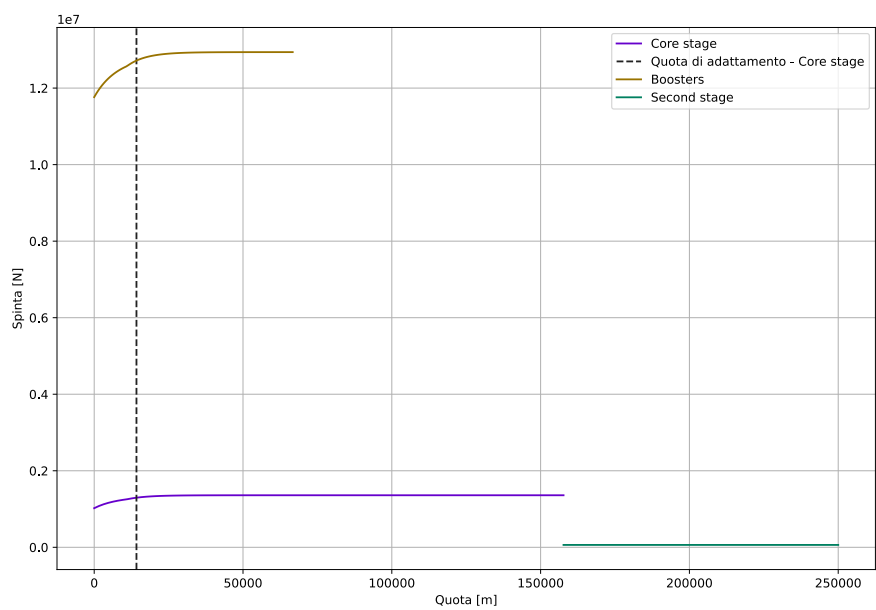


Figura 19: Spinta in funzione della quota - Ariane 5 ECA

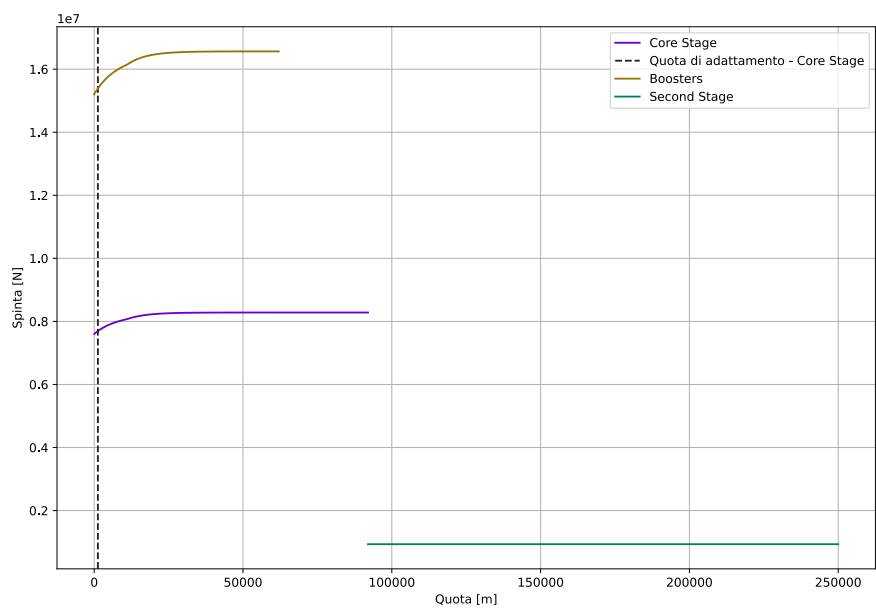


Figura 20: Spinta in funzione della quota - Falcon Heavy

I primi stadi di Ariane 5 e Falcon Heavy utilizzano una configurazione diversa rispetto al Saturn V, ovvero utilizzano dei booster ausiliari che presentano spinta maggiore rispetto al Core Stage. Nel caso del Falcon Heavy la spinta generata dai booster è doppia rispetto a quella generata dal Core Stage, poichè ogni booster ha una configurazione di motori uguale a quella del Core stage. Nel caso dell'Ariane 5 la differenza tra booster e Core Stage è ancora più evidente, poichè i due booster sono a propellente solido e forniscono quindi una spinta nettamente maggiore. Nei grafici considerati dunque, per ottenere il valore di spinta totale, bisogna sommare la spinta dei booster e del Core Stage negli intervalli di quota di funzionamento. Complessivamente, comunque, il primo stadio del Saturn V mantiene il primato di lanciatore con spinta maggiore anche per quanto riguarda gli stadi più avanzati degli altri due endoreattori. Tali differenze dipendono dalla natura della missione: portare equipaggio umano sulla Luna, anzichè satelliti o sonde, richiede necessariamente più peso e ciò si traduce in maggiore apporto di spinta.

A parte per i primi stadi, in cui la spinta aumenta evidentemente all'aumentare della quota, dal secondo stadio in poi la spinta tende al valore di spinta nel vuoto con incrementi molto più contenuti. Tale andamento deriva dalle formule barometriche¹⁰ e dalla dipendenza della spinta dalla pressione (equazione 10).

Nei grafici è presente l'indicazione della quota di adattamento dei primi stadi e non dei successivi. Questo perchè gli stadi più avanzati hanno un ugello adattato a quote più basse di quelle in cui operano, pertanto sarebbe risultato poco utile indicarle, ma avrebbe anzi ridotto la chiarezza dei grafici. Il motivo per cui le singole quote di adattamento non sono comprese negli intervalli di funzionamento degli stadi superiori è dovuto al fatto che la pressione ambiente esterna è troppo bassa per adattare l'ugello e contemporaneamente mantenere dimensioni realizzabili. Le quote di adattamento dei primi stadi sono invece relativamente basse perchè si vuole assicurare che i motori lavorino nella condizione ottima durante le fasi iniziali della missione. Così, nella bassa atmosfera, dove gli effetti della gravità e della resistenza aerodinamica sono maggiori, si ha la condizione in cui la spinta è ottima.

5.2 Impulso specifico

L'impulso specifico indica quanta portata massica di propellente è necessaria a generare la spinta:

$$I_{sp} = \frac{F}{\dot{m}_p \cdot g_0} \quad (69)$$

Più l'impulso specifico è alto, minori saranno le spese e maggiori i guadagni ricavabili dal più alto carico pagante che può essere imbarcato. Con un impulso specifico maggiore infatti, a parità di spinta, servirà meno combustibile da consumare e da caricare a bordo, i serbatoi potranno essere più piccoli e i carichi paganti maggiori. Occorrerà comunque sempre un compromesso per la scelta dei propellenti, tenendo in considerazione le loro caratteristiche e costo specifico e le varie configurazioni operative.

¹⁰https://en.wikipedia.org/wiki/Barometric_formula

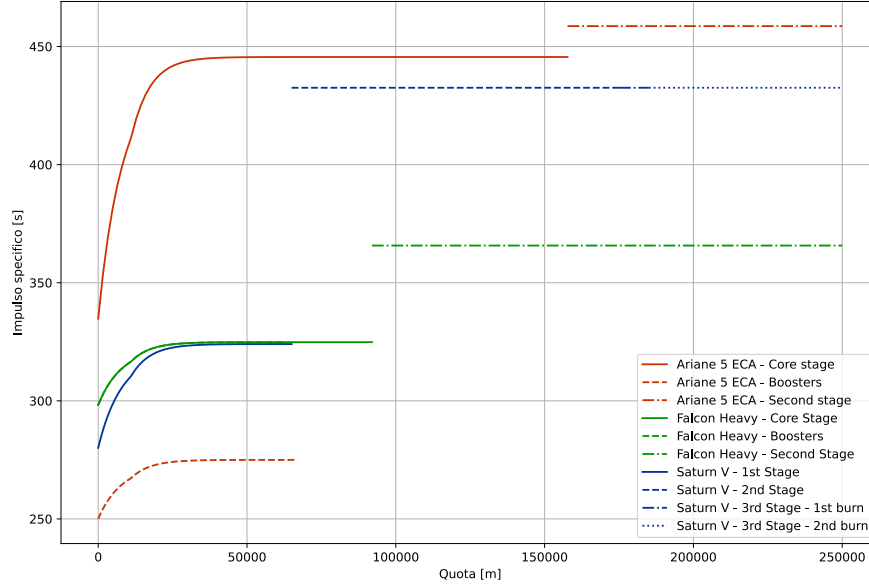


Figura 21: Impulso Specifico in funzione della quota

Il cherosene RP-1 è preferito nei primi stadi, dove i serbatoi hanno dimensioni maggiori, in quanto è più stabile a temperatura e pressione ambiente, più denso e meno costoso. D'altra parte l'idrogeno liquido LH_2 garantisce impulsi specifici maggiori e più alto potere calorifico, che lo rende migliore anche come liquido per raffreddare l'ugello. La scelta di combustibile porta a differenti processi di combustione che vengono confrontati dalla velocità caratteristica c^* . Essa è tanto più grande quanto più la camera di combustione risulta efficiente nella conversione dei processi termochimici. Come è evidenziato nella tabella 3 i motori con LH_2 hanno c^* maggiore di quelli con RP-1, notiamo dunque che LH_2 è anche più efficiente in termini di conversione dell'energia in camera di combustione rispetto a RP-1. L'impulso specifico volumetrico I_v dipende anch'esso dalla scelta del combustibile, si ottengono valori maggiori per i motori con RP-1 che ha densità maggiore di quella dell'idrogeno liquido.

Possiamo vedere in figura 21 che il primo stadio dell'Ariane 5 ha impulso specifico I_s maggiore. Ciò è dato dal fatto che utilizza come combustibile LH_2 , al contrario di Falcon Heavy e Saturn V che utilizzano RP-1. Il primo stadio dell'Ariane 5 presenta inoltre due booster ausiliari con basso impulso specifico in quanto sono a propellente solido.

Il Falcon Heavy utilizza RP-1 in tutti gli stadi in quanto l'azienda SpaceX ha come obiettivo principale quello di limitare i costi dei viaggi spaziali. Il secondo stadio ha quindi impulso specifico minore rispetto agli stadi superiori degli altri lanciatori che utilizzano LH_2 .

Il Saturn V ha impulsi specifici minori, anche a parità di combustibile, nonostante abbia spinte maggiori. Infatti per calcolare I_s si rapportano alte spinte e alte portate di propellente, che nel caso di Saturn V sono enormi, soprattutto per l'F-1.

5.3 Coefficiente di spinta

Il coefficiente di spinta indica l'incremento di spinta dovuto al tratto divergente dell'ugello. Si calcola come:

$$c_f = \frac{F}{p_c \cdot A_t} \quad (70)$$

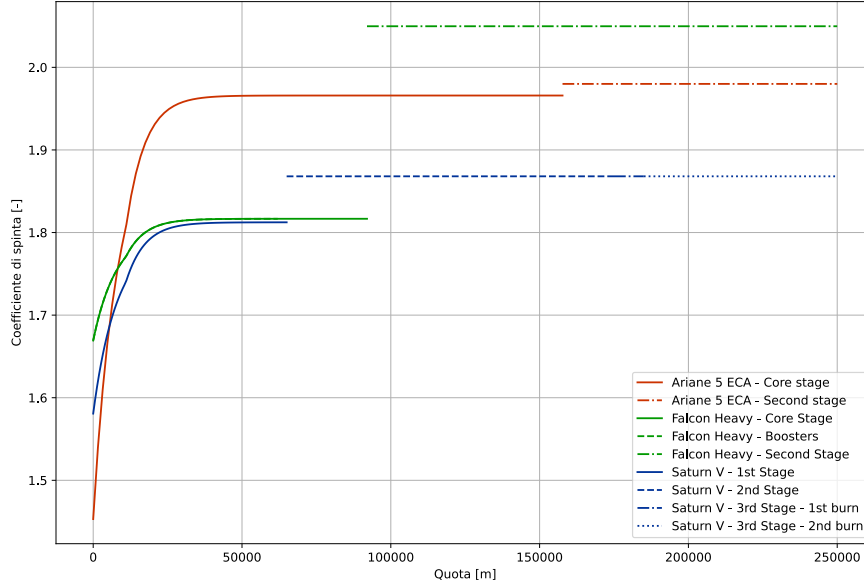


Figura 22: Coefficiente di spinta al variare della quota

Un alto coefficiente di spinta rappresenta un ugello ben progettato, in grado di incrementare la spinta nel tratto divergente rispetto alla spinta statica ($p_c \cdot A_t$).

Si può notare che gli stadi finali hanno coefficienti di spinta più elevati. Ciò è dovuto al fatto che, alle loro quote di funzionamento la pressione ambiente è molto bassa, perciò gli ugelli sono tipicamente progettati con un rapporto delle aree maggiore, in quanto non si rischia mai la sovraespansione ($p_e > p_a$). Si nota infatti una correlazione tra rapporto delle aree dell'ugello e coefficiente di spinta: un ugello che può espandere di più riesce ad aumentare di più la spinta. Il motore con coefficiente di spinta più alto è il Merlin 1D+Vacuum, che possiede l'ugello con il rapporto delle aree nettamente maggiore, come si vede chiaramente in figura 24. Il coefficiente di spinta per tale motore è pari a $c_f = 2.05$: ciò significa che il tratto divergente dell'ugello raddoppia abbondantemente la spinta statica.

5.4 Dimensioni motori e parametri

Una volta calcolate le dimensioni di camera di combustione, condotto convergente e ugello a campana, sono state disegnate per intero le viste in sezione di tutti i motori analizzati in figura 23 e poi affiancati in scala in figura 24 per evidenziare graficamente le differenze dimensionali.

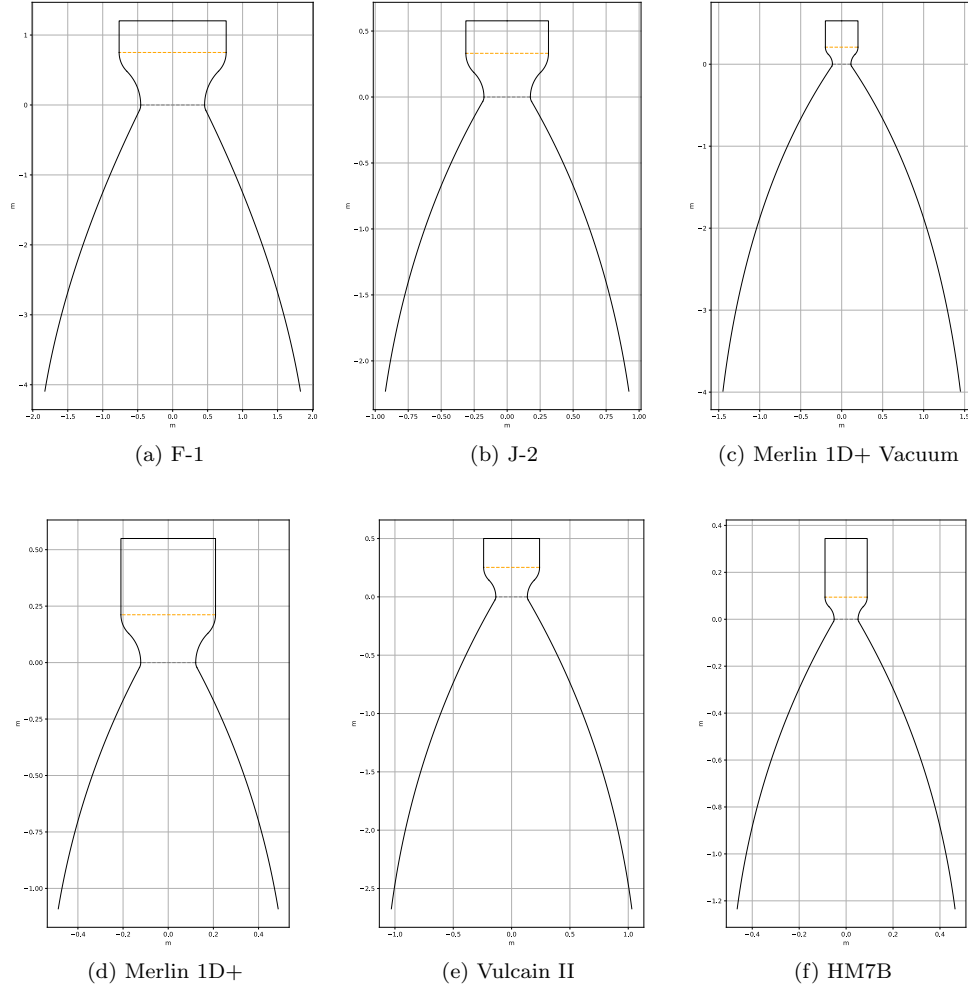


Figura 23: Dimensionamento della camera di combustione e dell'ugello dei motori

Dimensionamento dei motori							
Variabile	Unità di misura	Vulcain II	HM7B	Merlin 1D+	Merlin 1D+ vac	F-1	J-2
\dot{m}_f	<i>kg/s</i>	43.84	2.305	85.97	77.27	753.8	39.68
\dot{m}_{ox}	<i>kg/s</i>	267.4	11.52	202.9	183.1	1711	198.4
\dot{m}_p	<i>kg/s</i>	311.2	13.83	288.9	260.4	2465	238.1
\dot{M}_f	<i>kg</i>	2.485e+04	2287	2.546e+04	3.221e+04	1.193e+05	1.529e+04
\dot{M}_{ox}	<i>kg</i>	1.516e+05	1.143e+04	6.007e+04	7.634e+04	2.707e+05	7.646e+04
D_e	<i>m</i>	2.061	0.9284	0.9738	2.897	3.654	1.845
D_t	<i>m</i>	0.2702	0.1018	0.2434	0.2255	0.9135	0.3519
T_c	<i>K</i>	3353	3029	3455	3460	3357	3048
D_c	<i>m</i>	0.4796	0.1799	0.4189	0.3978	1.531	0.6261
L_c	<i>m</i>	0.2476	0.25	0.3377	0.3214	0.4524	0.2463
$W_{p,f}$	<i>MW</i>	16.08	0.2523	2.326	2.091	13.02	6.31
$W_{p,ox}$	<i>MW</i>	4.868	0.06467	2.826	2.551	18.84	1.611
L_{bell}	<i>m</i>	2.674	1.234	1.09	3.988	4.091	2.229

Tabella 4

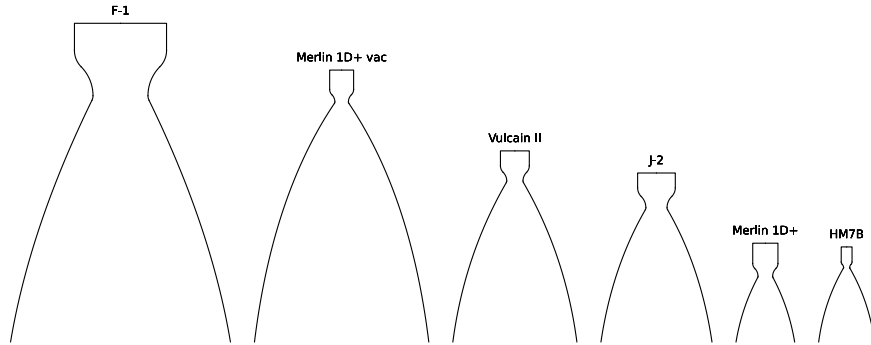


Figura 24: Motori a confronto

5.5 Prodotti di combustione

Grazie all'utilizzo del software CEA, nelle ipotesi di lavoro già citate, si sono potuti trovare i prodotti di combustione. Questi sono differenti per le due diverse scelte di combustibile.

Combustibile: LH2
Ossidante: LOX

Saturn V J-2 2nd & 3rd Stage
MOLE FRACTIONS

*H	0.02002	*H2	0.36091	H2O	0.60589
*O	0.00039	*OH	0.01252	*O2	0.00026

Ariane 5 Vulcain II Core Stage
MOLE FRACTIONS

*H	0.02485	H02	0.00002	*H2	0.23465
H20	0.70245	H202	0.00001	*0	0.00196
*OH	0.03379	*02	0.00227		

Ariane 5 HM7B 2nd Stage
MOLE FRACTIONS

*H	0.02248	*H2	0.35981	H20	0.60305
*0	0.00049	*OH	0.01385	*02	0.00032

Combustibile: RP-1
Ossidante: LOX

Saturn V F-1 1st Stage
MOLE FRACTIONS

*CO	0.37147	*CO2	0.11987	COOH	0.00001
*H	0.02354	HCO	0.00002	H02	0.00001
*H2	0.12542	H20	0.32605	*0	0.00286
*OH	0.02786	*02	0.00288		

Falcon Heavy Merlin 1D+ Core Stage & Booster
MOLE FRACTIONS

*CO	0.35470	*CO2	0.13449	COOH	0.00001
*H	0.02211	HCO	0.00003	H02	0.00003
*H2	0.10878	H20	0.33868	H202	0.00001
*0	0.00366	*OH	0.03311	*02	0.00439

Falcon Heavy Merlin 1D+ Vacuum 2nd Stage
MOLE FRACTIONS

*CO	0.35276	*CO2	0.13595	COOH	0.00001
*H	0.02223	HCO	0.00003	H02	0.00003
*H2	0.10714	H20	0.33937	H202	0.00001
*0	0.00383	*OH	0.03398	*02	0.00467

Nel primo caso si hanno i motori ad idrogeno liquido che, reagendo con l'ossigeno liquido, originano prodotti di combustione che sono principalmente vapore acqueo, responsabile dell'effetto serra, e molecole di idrogeno (H_2).

L'utilizzo di un idrocarburo come il cherosene RP-1 porta, oltre ai prodotti già citati, anche alla formazione di idrocarburi incombusti (UHC), anidride carbonica (CO_2), anch'essa responsabile dell'effetto serra, e principalmente monossido di carbonio (CO). Nonostante i differenti decenni in cui gli endoreattori sono stati costruiti, si nota che le frazioni molari di agenti inquinanti hanno variazioni al di sotto del 5%; la vera differenza sta quindi nella scelta dei combustibili.

6 Lista dettagliata dei parametri

Si riportano integralmente gli output calcolati dal software per ogni motore.

Output Completo								
Variabile	Simbolo	Unità di misura	Vulcan II	HM7B	Merlin 1D+	Merlin 1D+ vac	F-1	J-2
Massa molare dei gas combusti in gola	Mm_{thrust}	$kg/kmol$	13.83	11.87	22.96	23.01	22.44	11.89
Rapporto calori specifici dei gas combusti in gola	γ_{thrust}	—	1.14	1.16	1.15	1.15	1.15	1.16
Temperatura camera di combustione	T_c	K	3352.73	3028.67	3454.67	3460.35	3356.52	3047.93
Costante dei prodotti di combustione in gola	R	$J/(kg \cdot K)$	601.08	700.71	362.10	361.38	370.45	699.25
Funzione di Vandenkercckhove	Γ	—	0.64	0.64	0.64	0.64	0.64	0.64
Pressione all'efflusso	p_e	Pa	19078.14	3727.72	87673.23	5068.00	55266.60	20415.58
Portata massica di propellente	m_p	kg/s	311.2	13.83	288.9	260.4	2465	238.1
Velocità all'efflusso	u_e	m/s	4165	4315	2960	3459	2943	4013
Velocità caratteristica	c^*	m/s	2228.15	2275.82	1752.22	1752.31	1745.30	2278.26
Massa molare dei gas in camera di combustione	Mm_c	$kg/kmol$	13.69	11.76	22.69	22.74	22.19	11.80
Costante specifica dei gas in camera di combustione	R_c	$J/(kg \cdot K)$	607.38	706.80	366.37	365.68	374.70	704.91
Numero di Mach in camera di combustione	Ma_c	—	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20
Velocità in camera di combustione	u_c	m/s	305.06	314.80	241.12	241.02	240.67	315.84
Densità dei gas in camera di combustione	ρ_c	kg/m^3	5.65	1.73	8.69	8.69	5.57	2.45
Area camera di combustione	A_c	m^2	0.18	0.03	0.14	0.12	1.84	0.31
Diametro camera di combustione	D_c	m	0.4796	0.1799	0.4189	0.3978	1.531	0.6261
Volume camera di combustione	V_c	m^3	0.04473	0.006354	0.04655	0.03994	0.8324	0.07584
Lunghezza camera di combustione	L_c	m	0.2476	0.25	0.3377	0.3214	0.4524	0.2463
Area di tutti i fori piastra combustibile	A_{thf}	mm^2	2760	255.8	1636	1471	18010	3692
Area di tutti i fori piastra ossidante	A_{thox}	mm^2	4198	318.9	2927	2643	35630	4607
Numero di fori di ciascuna linea	n_h	—	3512	326	2084	1873	22930	4701
Area di un foro-combustibile	A_{1hf}	mm^2	7.854e-01	7.846e-01	7.851e-01	7.851e-01	7.854e-01	7.854e-01
Area di un foro-ossidante	A_{1hox}	mm^2	1.195	9.783e-01	1.404	1.41	1.499	9.793e-01
Diametro di un foro-combustibile	D_{1hf}	mm	1	0.9995	0.9998	0.9998	1	1
Diametro di un foro-ossidante	D_{1hox}	mm	1.233	1.116	1.337	1.34	1.382	1.117
Velocità iniezione combustibile	u_f	m/s	224.15	127.14	64.86	64.86	51.80	151.59
Velocità iniezione ossidante	u_{ox}	m/s	55.90	31.71	49.16	49.16	43.56	37.81
Inclinazione linea iniezione combustibile	α_f	rad	0.86	0.67	1.11	1.12	1.27	0.67
c_p preburner	c_p	$J/(kg \cdot K)$	7815.94	7815.94	4068.55	4068.55	3990.19	7815.94
Temperatura preburner	T_1	K	977.48	977.48	1588.52	1588.52	1578.18	977.48
Rapporto calori specifici preburner	γ_{pb}	—	1.37	1.37	1.22	1.22	1.22	1.37
Portata massica di combustibile al motore	m_f	kg/s	43.84	2.305	85.97	77.27	753.8	39.68
Portata massica di ossidante al motore	m_{ox}	kg/s	267.4	11.52	202.9	183.1	1711	198.4
Pressione combustibile a valle della pompa	p_f^*	MPa	18.40	5.92	17.60	17.60	11.20	8.42
Pressione ossidante a valle della pompa	p_{ox}^*	MPa	16.67	5.36	15.95	15.95	10.15	7.63
Δp pompa combustibile	Δp_{pumpf}	MPa	18.17	5.69	17.25	17.25	11.03	8.19
Δp pompa ossidante	Δp_{pumpox}	MPa	16.40	5.09	15.60	15.60	10.02	7.35
Portata volumetrica di combustibile al motore	q_f	m^3/s	0.62	0.03	0.11	0.10	0.93	0.56
Portata volumetrica di ossidante al motore	q_{ox}	m^3/s	0.23	0.01	0.14	0.13	1.5	0.17
Portata volumetrica di combustibile spillato	q_{spilf}	m^3/s	4.552e-02	7.453e-04	1.703e-03	1.535e-03	1.127e-02	1.833e-02
Portata volumetrica totale di combustibile	q_{totf}	m^3/s	0.6638	0.03325	0.1078	0.09693	0.9437	0.578
Portata volumetrica di ossidante spillato	q_{spilox}	m^3/s	2.831e-03	4.635e-05	9.783e-04	8.818e-04	7.968e-03	1.14e-03
Portata volumetrica totale di ossidante	q_{totox}	m^3/s	0.2374	0.01015	0.1449	0.1308	1.505	0.1752
Portata massica di combustibile spillata	m_{spilf}	kg/s	3.23	0.05	1.38	1.24	9.11	1.30
Portata massica di ossidante spillata	m_{spilox}	kg/s	3.23	0.05	1.38	1.24	9.11	1.30
Portata massica di combustibile totale	m_{totf}	kg/s	47.06	2.358	87.35	78.51	762.5	40.98
Portata massica di ossidante totale	m_{totox}	kg/s	270.6	11.58	204.3	184.4	1720	199.7
Potenza richiesta dalla pompa di combustibile	W_{pumpf}	MW	16.08	0.2523	2.326	2.091	13.02	6.31
Potenza richiesta dalla pompa di ossidante	W_{pumpox}	MW	4.868	0.06467	2.826	2.551	18.84	1.611
Impulso specifico nominale	I_{sp}	s	445.6	458.6	298.3	365.7	280.1	432.6
Spinta a quota di adattamento	F_{ad}	kN	1296	59.68	854.9	900.6	7253	955.4
Quota di adattamento	z_{ad}	m	14201.59	24556.12	1237.59	22608.24	5419.28	13771.90
Spinta nominale	F_n	kN	1360	62.2	845	934	6770	1010
Impulso specifico a quota di adattamento	I_{sad}	s	424.7	440	301.8	352.7	300.1	409.2
Coefficiente di spinta a quota di adattamento	$c_{f_{ad}}$	—	1.847	1.877	1.667	1.954	1.662	1.739
Coefficiente di spinta nominale	c_{f_n}	—	1.966	1.98	1.67	2.05	1.581	1.868
Coefficiente di spinta nel vuoto	$c_{f_{vac}}$	—	1.966	1.98	1.817	2.05	1.812	1.868
Impulso specifico nel vuoto	$I_{sp_{vac}}$	s	445.6	458.6	324.8	365.7	324	432.6
Impulso specifico volumetrico nel vuoto	$I_{v_{vac}}$	$s \cdot kg/m^3$	1.626e+05	1.488e+05	3.753e+05	4.228e+05	3.287e+05	1.404e+05
Impulso specifico totale nel vuoto	$I_{tot_{vac}}$	$MN \cdot s$	771.1	61.72	272.5	389.3	1239	389.2
Spinta nel vuoto	F_{vac}	kN	1360	62.2	920	934	7833	1010
Sezione di gola	A_t	m^2	0.05734	0.008146	0.04655	0.03994	0.6555	0.09723
Diametro di gola	D_t	m	0.2702	0.1018	0.2434	0.2255	0.9135	0.3519
Area di efflusso	A_e	m^2	3.337	0.6769	0.7447	6.591	10.49	2.674
Diametro di efflusso	D_e	m	2.061	0.9284	0.9738	2.897	3.654	1.845
Lunghezza cono	L_{cone}	m	3.342	1.542	1.363	4.985	5.114	2.786
Lunghezza campana	L_{bell}	m	2.674	1.234	1.09	3.988	4.091	2.229
Distanza gola-cc	L_{tc}	m	0.253	0.094	0.212	0.208	0.751	0.331
Massa di combustibile	M_f	kg	2.485e+04	2287	2.546e+04	3.221e+04	1.193e+05	1.529e+04
Massa di ossidante	M_{ox}	kg	1.516e+05	1.143e+04	6.007e+04	7.634e+04	2.707e+05	7.646e+04
Volume di combustibile	V_f	m^3	350.6	32.26	31.43	39.76	147.6	215.7
Volume di ossidante	V_{ox}	m^3	133	10.03	42.61	54.14	236.9	67.07
Densità media propellente	ρ_{avg}	kg/m^3	364.9	324.5	1155	1156	1014	324.5
Lunghezza totale motore	L_{tot}	m	3.174	1.578	1.64	4.517	5.294	2.807

Tabella 5

Riferimenti

1. P. Hill, C. P. *Mechanics and Thermodynamics of Propulsion* (Pearson).
2. G.P. Sutton, O. B. *Rocket Propulsion Elements* (Wiley).
3. R.W. Humble, G. H. *Space Propulsion Analysis and Design* (McGraw Hill).
4. NASA. *Saturn V Flight Manual*
5. NASA. *J-2 Engine Fact Sheet*
6. *The Thrust Optimised Parabolic nozzle* [Online; accessed 21-April-2020]. <https://archive.org/download/thrust-optimised-parabolic-nozzle/Thrust%5C%20optimised%5C%20parabolic%5C%20nozzle.pdf>.
7. *Turbopumps systems for liquid rocket engines* [Online; accessed 21-April-2020]. <https://archive.org/details/7244552-turbopump-systems-for-liquid-rocket-engines>.
8. Kesaev KhV, A. D. *Teoria e cálculo de motores foguete a propelente líquido*.
9. Huzel & Huang. *Characteristic lengths table* [Online; accessed 21-April-2020]. <https://archive.org/details/HuzelandHuang>.
10. Ernst, R. *Liquid Rocket Analysis (LiRA): Development of a Liquid Bi-Propellant Rocket Engine Design, Analysis and Optimization Tool* <http://resolver.tudelft.nl/uuid:e2cda6d2-e3ff-4809-a62a-80c250146413>.