UEC 代数勉強会 03 回目

raygo

Sep 28, 2021

準同型写像

群の準同型写像の定義

群 G, H に対し，写像 $\phi : G \to H$ が群の**準同型写像**であるとは次の条件が成り立つことを言う．

$$\forall x, y \in G, \phi(x \circ y) = \phi(x) \circ \phi(y) \tag{1}$$

つまり，演算と準同型写像の順序は交換可能であることを指す．

準同型写像

準同型写像の例 1

加群 Z に対し，写像 $\phi : Z \to Z$ の $\phi(x) = 2x$ と定義すると，ϕ は準同型写像である．

$$\phi(5+13) = \phi(18) = 36 \tag{2}$$

$$\phi(5) + \phi(13) = 10 + 26 = 36 \tag{3}$$

準同型写像

準同型写像の例 2

n 次の正方行列 A にその行列式 $\det A$ は，一般線形群 $GL(n, \boldsymbol{R})$ から乗法群 $\boldsymbol{R}^{\times}$ への準同型写像である．

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B \tag{4}$$

より明らかである．

準同型写像

環と体の準同型写像

二つの環 (体)A, B に対して，写像 $\phi : A \to B$ が群の**準同型写像**であるとは次の条件が成り立つことを言う．

$$\forall x, y \in A, \phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y) \land \phi(xy) = \phi(x)\phi(y) \tag{5}$$

準同型写像

補題 1.13

準同型写像が逆写像をもつとき，逆写像も準同型である．

証) 準同型写像 $\phi : A \to B$ とすると，定義より，

$$\forall a, b \in A, \phi(a \circ b) = \phi(a) \circ \phi(b) \tag{6}$$

ただし，$\phi(a), \phi(b) \in B$ である．このとき，逆写像 ϕ^{-1} が存在するから，$\alpha := \phi(a), \beta := \phi(b)$ とすると，

$$\phi(a \circ b) = \phi(a) \circ \phi(b) \tag{7}$$

$$\phi(\phi^{-1}\alpha \circ \phi^{-1}\beta) = \phi(\phi^{-1}\alpha) \circ \phi(\phi^{-1}\beta) \tag{8}$$

$$\phi(\phi^{-1}\alpha \circ \phi^{-1}\beta) = \alpha \circ \beta \tag{9}$$

$$\phi^{-1}(\phi(\phi^{-1}\alpha \circ \phi^{-1}\beta)) = \phi^{-1}(\alpha \circ \beta) \tag{10}$$

$$\phi^{-1}\alpha \circ \phi^{-1}\beta = \phi^{-1}(\alpha \circ \beta) \tag{11}$$

より逆写像も準同型写像である．

準同型写像

同型写像

準同型写像が全単射であるとき**同型写像**．また，同型写像が存在するとき，その二つの代数系 A, B を**同型**といい，$A \cong B$ と記す．

n 次元ベクトル空間は n 次数ベクトルと同型とかだったはず……．

準同型写像

問 1.19

次の群の中で互いに同型なペアをすべて見出せ．
加法群：$\boldsymbol{Z}, n\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$
乗法群：$\boldsymbol{Q}^\times, \boldsymbol{R}^\times, \boldsymbol{R}^+, \boldsymbol{C}^\times$, 絶対値 1 の複素数の全体

問 1.22

2 次整数ベクトル $\boldsymbol{Z}^2$ と次の群が同型であることを示せ．
(1) 有理数の部分集合 $\{2^m 3^n | m, n \in \boldsymbol{Z}\}$ が乗法に関して成す群．
(2) 実数の部分集合 $\{a + b\sqrt{2} | a, b \in \boldsymbol{Z}\}$ が和に関して成す群．

(2) の集合を $\boldsymbol{Z}[\sqrt{2}]$ で表す．

準同型写像の性質

群の準同型写像の性質

群の準同型写像 ϕ は次の性質を示す．

$$\phi(e) = e \tag{12}$$

$$\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-}1 \tag{13}$$

準同型写像の性質

環の準同型写像の性質

環の準同型写像 ϕ は次の性質を示す．

$$\phi(0) = 0 \tag{14}$$
$$\phi(-x) = -\phi(x) \tag{15}$$

つまり，加群と同じ性質を持つ．乗法に関しては，単位元を持つとは限らず，単位元を持っていたとしても，逆元を持たなければ導出することが出来ない．
$\phi(1) = 1$ また，x の逆元が存在するとき，

$$\phi(x^{-1}) = \phi(x)^-1 \tag{16}$$

が成り立つ．

おそらく，$\phi(e) = e \iff \phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}$ だと思う．

準同型写像の性質

環の準同型写像の性質

体の準同型写像 $\phi : K \to L$ が存在するとき，写像はすべて零元に写すか，K の乗法の単位元を L の乗法の単位元に写し，単射である．

$\forall x \in K, x \neq 0 \to \phi(x) \neq 0$ のとき，単射であるから，$|K| = |L|$ のときは全単射である．つまり K, L は同型である．

像と核

準同型写像の像と核

代数系の準同型写像 $\phi : A \to B$ について，像 $\mathrm{Im}\,\phi$ は B の部分代数系．核 $\mathrm{Ker}\,\phi$ は A の部分代数系である．

証明は，閉じていることは部分集合であることから明らか．単位元と逆元を持つことは先ほどまでの議論で明らかである．

像と核

準同型写像の像と核

代数系の準同型写像 $\phi : A \to B$ が全単射となるためには，その核が単位元 (零元) であることが必要十分である．

群の定義法

乗積法

乗積法とは群の公理を満たすように有限群の元と演算の対応表を用いて定義する方法である．

1. 単位元の性質を満たしていること
2. 任意の行と列ですべての元が現れること
3. 結合法則を満たすこと

群の定義法

基本関係式による定義

生成元と関係式によって群を定義することが出来る．生成元を固定したときの必要最低限の関係式を基本関係式という．すっきり定義出来るが，性質を探るのが難しいとされる．(普通は生成元を最小とするようなもので定義する)

対称群に関する復習

置換を表現する群を**対称群** S_n といい，その部分群を**置換群**という．一般に表記は以下のとおりである．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \tag{17}$$

また，**巡回置換**と**互換**は以下のような感じで定義される．

$$(2,4,3,1,5) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \tag{18}$$

$$(2,5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \tag{19}$$

置換群

巡回置換

任意の置換は互いに素な巡回置換に分解できる.

置換先をなぞればいいだけである.

置換群

互換

任意の置換は互換に分解できる．

任意の数列がソート可能であることを指す．

互換の偶奇

互換に分解したとき，互換の数の偶奇が定まる．

この置換 σ を互換に分解したとき，偶数個のとき 1，奇数のとき-1 となるように $\operatorname{sgn}\sigma$ と定義し，行列式の定義に使用した．