UEC 代数勉強会 第 4 回 問題

9trap

uec19 情報理工学域 II 類 P1

ファイル分けた都合上、問題のナンバリングが合ってません．
ごめん．

Problem 0.0.1 (参考書 問 2.2). S_3 の左移動による置換表現を求めよ．

教科書の乗積表の元に番号つけるだけ．

Problem 0.0.2 (参考書 問 2.3). $g \sim h \Leftrightarrow h^{-1}g \in H$ で定められた関係が同値関係であることを示せ．

すでにやった．

Problem 0.0.3 (参考書 問 2.4). S_3 の各元の位数を求めよ .

e は当然 1.

互換である $(1,2),(2,3),(3,1)$ は 2.

他 $(1,2,3),(1,3,2)$ は循環シフトだから 3.

Problem 0.0.4 (参考書 問 2.5). 群 G の元 x の位数が 12 のとき、$x^k(1 \leq k \leq 12)$ の位数を求めよ.

k が 12 の約数であれば $12/k$ で、そうでなければ 12.

Problem 0.0.5 (参考書 問 2.6). S_4 において、

$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ とする .

1. a の位数を求めよ .

2. $x^m = a$ となるような x と m は $x = a$ と $m = 1$ 以外に存在するか ?

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

だから、$a^4 = e$. よって a の位数は 4.

また、上の事実から自明に $a^5 = a$.

Problem 0.0.6 (参考書 問 2.7). S_3 の元 $a = (1,2,3)$ と $b = (1,2)$ を生成元として取ったときの基本関係式を示せ．また、S_4, A_4 の生成元と基本関係式をそれぞれ 1 組あたえよ．

a, b に関する基本関係式は

$$\begin{aligned} a^3 &= e \\ b^2 &= e \\ a^{-1}b &= ba \end{aligned}$$

の 3 つ．

$$S_4 = \langle (1,2), (1,2,3,4) \rangle$$

$a = (1,2), b = (1,2,3,4)$ とすると、

$$\begin{aligned} a^2 &= e \\ b^4 &= e \\ (ab)^3 &= e \end{aligned}$$

$$A_4 = \langle (1,2)(3,4), (1,2,3) \rangle$$

$a = (1,2)(3,4), b = (1,2,3)$ とすると、

$$\begin{aligned} a^2 &= e \\ b^3 &= e \\ (ab)^3 &= e \end{aligned}$$

置換群 (順列) に関する面白いこと

https://deltam.blogspot.com/2019/12/permutationgenerator.html

Problem 0.0.7 (参考書 問 2.8). 位数 15 の巡回群の生成元となりうる元はいくつあるか？

参考書 系 2.11 より 10 こ．

Problem 0.0.8 (参考書 問 2.9). 位数 24 の巡回群の部分群をすべてあげよ．

生成元の 1 つを g とする．$\left\{e, g^2, g^4, \ldots, g^{22}\right\}$, $\left\{e, g^3, g^6, \ldots, g^{21}\right\}$, $\left\{e, g^4, g^8, \ldots, g^{20}\right\}$, $\left\{e, g^6, g^{12}, g^{18}\right\}$, $\left\{e, g^{12}\right\}$ が部分群．

Problem 0.0.9 (参考書 問 2.10).

1. 群 G の 2 つの部分巡回群の共通部分は巡回群となることを示せ．

2. 位数が互いに素な 2 つの巡回部分群の共通部分は単位元だけであることを示せ．

2 つの巡回群を H_1, H_2 とする .

H_1, H_2 は群だから、どちらも e を含む . よって、$e \in H_1 \cap H_2$.

$H_1 \cap H_2$ が単位元のみの集合であるとき、これは巡回群である . また、$H_1 \cap H_2$ が単位元以外を含むとき、$H_1 = \langle h_1 \rangle, H_2 = \langle h_2 \rangle$ で a_1 を $h_1^{a_1} \in H_2$ となる最小の正の整数とする . このとき $h_1^{a_1}$ は h_2 の累乗と一致するため a_2 を $h_2^{a_2} = h_1^{a_1}$ とする .

また、$h_1^{ka_1+r} \in H_2 (k \in \mathbb{N}, 0 < r < a)$ を仮定すると、$h_1^{ka_1+r} = h_2^{ka_2} h_1^r \in H_2$. よって、$h_1^r \in H_2$ となるが、これは a_1 を $h_1^{a_1} \in H_2$ となる最小の正の整数とする仮定に反する . よって帰謬法から H_2 に属するすべての h_1 の累乗は $h_1^{ka_1}$ で表せる .

以上より、$h_1^{a_1}$ が $H_1 \cap H_2$ の生成元となる .

位数が互いに素な 2 つの巡回部分群を H_1, H_2 とおく．

1. から $H_1 \cap H_2$ は巡回群である．また、 参考書 系 2.8 から $\left|H_1 \cap H_2\right|$ は $\left|H_1\right|$ の約数でもあり $\left|H_2\right|$ の約数でもある．しかし、$gcd\left(\left|H_1\right|, \left|H_2\right|\right) = 1$ より $H_1 \cap H_2$ の元は 1 個である．

よって $H_1 \cap H_2 = \{e\}$.

Problem 0.0.10 (参考書 問 3.1). 二面体群 D_3, D_4, D_5, D_6 の置換群による表現を求めよ .

$$
\begin{aligned}
e &\mapsto e \\
\sigma &\mapsto (1,3,2)\circ(4,5,6) \\
\sigma^2 &\mapsto (1,2,3)\circ(4,6,5) \\
\tau &\mapsto (1,4)\circ(2,5)\circ(3,6) \\
\tau\sigma &\mapsto (1,3,2)\circ(4,5,6)\circ(1,4)\circ(2,5)\circ(3,6) \\
\tau\sigma^2 &\mapsto (1,2,3)\circ(4,6,5)\circ(1,4)\circ(2,5)\circ(3,6)
\end{aligned}
$$

あとはめんどくさいだけです．