UEC 代数勉強会

bokuroro

December 25, 2020

群の定義

1. 結合法則　$\forall a, b, c \in G$ に対し、$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
2. 単位元の存在 $\exists e \in G$　s.t. $\forall a \in G$ に対し、$a \circ e = e \circ a = a$
   このような e を単位元と呼ぶ.
3. 逆元の存在 $\forall a \in G$ に対し、$\exists b \in G$　s.t. $a \circ b = b \circ a = e$
   このような b を a の逆元と呼び、a^{-1} で表す.

二項演算が定義されていることが前提となっている.
また、交換則 $a \circ b = b \circ a$ が成り立つものを可換群または Abel 群と呼ぶ.

群の例

変換群

定義は参考書参照

写像 $f, g, h \in G : X \to X$ を考えたとき、$x \in X$ として、

$$
\begin{aligned}
((h \circ g) \circ f)(x) &= (h \circ g)(f(x)) \\
&= (h \circ g)(f(x)) \\
&= h(g(f(x))) \\
&= h((g \circ f)(x)) \\
&= (h \circ (g \circ f))(x)
\end{aligned}
$$

よって結合則成立.

まぁこんなの考えなくてもほぼ自明ですが.

恒等写像 $\mathrm{id}(x) = x$ が存在すること、逆元が存在することは、写像が全単射より自明ですね.

群の例

対称群

要するに n 個のものの置換の群である.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

と書いたら、対称群 S_3 の元で $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 3$ に置き換わることを表す.
巡回置換、$(1, 2, 3)$ と互換については参考書参照. 任意の置換は互いに素(交わらない) 巡回置換に分解でき、いくつかの互換に分解できる.
積についてはこの先出てくるので演習問題にしておきます.

いろいろ定義

定義 1.2

群の元の総数のことを群の位数 (order) と呼ぶ.

- 位数が有限 $\rightarrow$ 有限群
- 位数が無限 $\rightarrow$ 無限群

また、

- 連続パラメータで依存する $\rightarrow$ 連続群
- それ以外 $\rightarrow$ 離散群

と呼ぶ.

環の定義

環の定義

集合 A に 2 つの二項演算 $(+, \cdot)$ が定義されていて、次の性質を持つ.

1. $(A, +)$ は可換群をなす.
2. 乗法 $\cdot$ は結合法則 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ を満たす.
3. 2 つの演算は分配法則を満たす.
   $\forall a, b, c \in A$ に対し、$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

勘違いしやすいが、必ずしも乗法の単位元を持つ必要はない.

行列環

n 次正方行列の全体が行列の和と積を演算として成り立つ環、行列環 $M(n, \mathbb{R})$ がある. 加法の単位元はゼロ行列 O、乗法の単位元は単位行列 E である.
成分を任意の環としても、再び環となる.