UEC 代数勉強会 6 回目

窒化イットリウム

幾何学と群

三つの幾何

1. Euclid 幾何　　回転，鏡映，平行移動で不変な図形に関する幾何
2. アフィン幾何　一般線形群と平行移動で不変な図形に関する幾何
3. 射影幾何　アフィン変換と投影で不変な図形に関する幾何

幾何学と群

アフィン幾何

一般線形群による変形なので，楕円は円に変換できる．

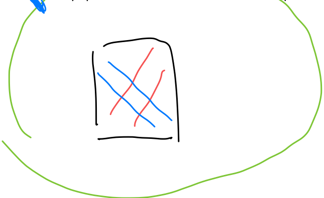
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a\cos\theta \\ b\sin\theta \end{pmatrix}$$

幾何学と群

平面射影幾何

アフィン平面に無限遠直線をくっつけた射影平面に関する幾何 (射影平面の定義の仕方は 3 通りあるらしい)

無限遠直線？
$\rightarrow$ 平行な 2 直線が交わる点を無限遠点とし，無限遠点が一直線に並んでいると考えた時，この直線を無限遠直線という．(直線は半径無限大の円と考えている？)
　参考:高校数学の美しい物語 https://manabitimes.jp/math/1190



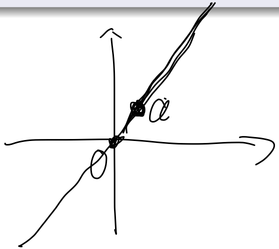
射影幾何

射影平面の点の厳密な定義 (同次座標)

0 でない 3 つの成分の組 (ξ, η, ζ) について，同値関係 $\sim$ に関する同値類

$$\{(x, y, z) \mid \exists\lambda \in \mathbb{R} - \{0\} s.t. (x, y, z) \sim (\lambda\xi, \lambda\eta, \lambda\zeta)\} \tag{1}$$

を射影平面上の点の定義とする．



射影平面上の直線

直線の式

同次座標では，直線の方程式は

$$a\xi + b\eta + c\zeta = 0 \tag{2}$$

をみたす (ξ, η, ζ) の集合が直線

という 1 次同次方程式となる．

$a, b, c \in \mathbb{R}$

点が無限遠直線上 $\Leftrightarrow \zeta = 0$
点が無限遠直線上にない, すなわちアフィン平面上にある $\Leftrightarrow \zeta \neq 0$

$\zeta \neq 0$

x

$$\underline{(\xi, \eta, \zeta)} \times \frac{1}{\zeta} = \left(\underbrace{\frac{\xi}{\zeta}, \frac{\eta}{\zeta}}, 1 \right)$$

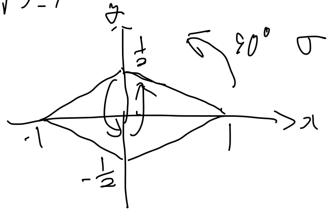
$\left(\frac{\xi}{\zeta}, \frac{\eta}{\zeta} \right) \in$ アフィン平面

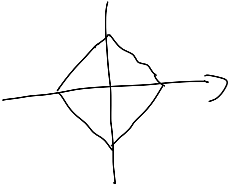
$A \in GL(3, \mathbb{R}) / \mathbb{R}^\times$

$\mathbb{R} \ni r$

$rAx \sim Ax$

問3_4





D_4

$(1, 0) \Rightarrow (0, \frac{1}{2})$

$(0, \frac{1}{2}) \Rightarrow (-1, 0)$: $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ σ

$\left(e, \tau, \tau\sigma^2, \tau\sigma, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \tau\sigma^3 \right.$

$\left[\begin{matrix} e \\ \tau \\ \tau\sigma^2 \\ \sigma^2 \\ \sigma \\ \tau\sigma \\ \sigma^3 \\ \tau\sigma^3 \end{matrix} \right.$

ひし形, ちょうほう形 → 正方形

推移的・固定群

推移的

　群の作用する集合の任意の点を任意の点に写せるような群の元が存在する時，その群は推移的 (可移) であるという．　また，n 個の任意の点の列を n 個の任意の点の列に写せる時，n 重可移であるという．

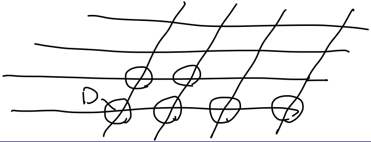
固定群

群 G が作用する集合 X の点 x に対して

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\} \tag{3}$$

を x の固定群という．これは G の部分群となる.

格子



格子

二つのベクトル ω_1, ω_2 により生成される加法群

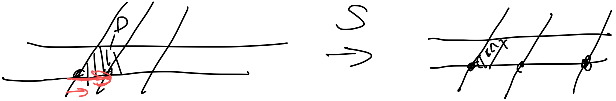
$$\Gamma = \{n_1\boldsymbol{\omega}_1 + n_2\boldsymbol{\omega}_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\} \tag{4}$$

Dを動かす群

を平面の格子と呼ぶ．

~~平面上の基本図形 D に Γ の元を作用させると繰返しの模様を描く~~．また，うまい D を取ると，繰返し模様が平面全体を隙間も重なりもなく埋め尽くすようにできる．この時の D を離散部分群 Γ の基本領域と呼ぶ．

基底の変換



同じ格子を生成する基底に変換しなければいけないので，基底変換行列は整数係数となる．二つの基底 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ を変換する行列 S, T を考える．

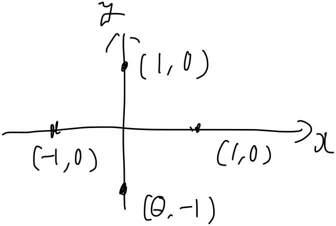
$$\mathscr{A} = \mathscr{B}S, \mathscr{B} = \mathscr{A}T \tag{5}$$

とすると，$ST = TS = E$ より，$\det T = \det S = \pm 1$ が，格子点を変えない基底の変換の必要十分条件であることがわかる．

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}$$

軌道

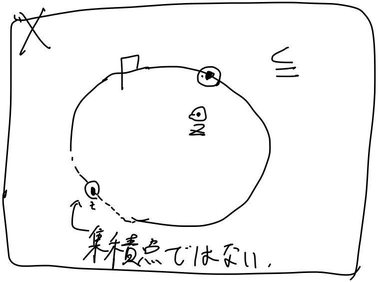
離散部分群 Γ について，平面上の一つの点の群作用による移動先全体 $\{gx \mid g \in \Gamma\}$ を Γ による軌道と呼ぶ．また，基本領域は各軌道から一つづつ代表元を選んで作った部分集合のことである．



D_4

点 x の ε近傍 $U_\varepsilon(x)$ $(\varepsilon > 0)$

S の集積点 z $\quad \forall U_\varepsilon(z),\ (U_\varepsilon(z) - \{z\}) \cap S \neq \emptyset$



$\Gamma \subset X$ が離散的

Γ が X の中に集積点をもたない.

$(X - \Gamma)$

Γ の集積点 $\not\subset X - \Gamma$

例 0 は $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ の集積点.

離散について (時間があれば)

$S = \mathbb{R}$

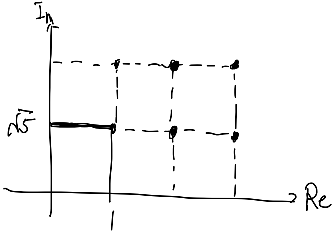
$\Gamma = [0, 1] + \{2\}$

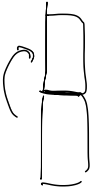
2 は 解点だが 集積点ではない.

$\Gamma' = \{2\}$

$\Gamma'' = \langle 0, 1 \rangle - (0, 1)$

離散について (時間があれば)





$$\{(x, y) \mid 0 \leq x < 1,\ 0 \leq y < \sqrt{5}\}$$