

# Notes on Iterative Closest Point

## (Point-to-Point, Point-to-Plane, GICP)

Gyubeom Edward Im\*

## Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Example pointcloud data (2D)</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Example pointcloud data (3D)</b>	<b>2</b>
<b>4</b>	<b>Point-to-point ICP</b>	<b>3</b>
4.1	With known data associations . . . . .	3
4.1.1	Covariance SVD-based solution . . . . .	3
4.1.2	Method 1 for $\mathbf{R}^*$ . . . . .	6
4.1.3	Method 2 for $\mathbf{R}^*$ . . . . .	7
4.2	With unknown data associations . . . . .	7
4.3	Least squares point-to-point ICP (2D) . . . . .	9
4.3.1	Least squares point-to-point ICP (3D) . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Point-to-plane ICP</b>	<b>13</b>
5.1	Least squares point-to-plane ICP (2D) . . . . .	14
5.2	Least squares point-to-plane ICP (3D) . . . . .	16
<b>6</b>	<b>Generalized-ICP (GICP)</b>	<b>18</b>
6.1	Point-to-point ICP in GICP . . . . .	19
6.2	Point-to-plane ICP in GICP . . . . .	20
6.3	Plane-to-plane ICP in GICP . . . . .	21
6.4	Least squares GICP (3D) . . . . .	22
<b>7</b>	<b>References</b>	<b>24</b>
<b>8</b>	<b>Revision log</b>	<b>24</b>

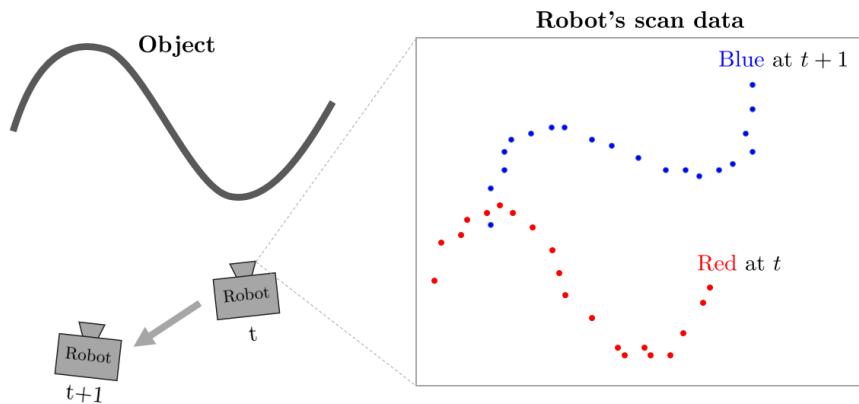
## 1 Introduction

**Iterative Closest Point (ICP)** 알고리즘은 두 점군(pointcloud) 집합들이 주어졌을 때 각 점으로부터 **최단 거리의 점들을 탐색**하여 이를 바탕으로 **반복적으로 정합(registration)**하는 방법을 말한다. ICP는 주로 LiDAR SLAM에서 3D 스캔 데이터 정렬에 사용되며 Point-to-Point, Point-to-Plane 기법 등이 존재한다.

---

\*blog: alida.tistory.com, email: criterion.im@gmail.com

## 2 Example pointcloud data (2D)



우선 2D 점군 데이터를 예시로 들어보자. 로봇이 2D 스캐너를 통해 다음과 같은 데이터를  $t$ ,  $t + 1$  시점에 대해 획득하였다고 가정하자.

$t$  시점의 포인트(빨간색)과  $t + 1$  시점의 포인트(파란색)의 2D 점군의 좌표는 다음과 같다.

Tip

```
sourcePoints = [ [-19, -15], [-18, -10], [-15, -9], [-14, -7], [-11, -6], [-9, -5], [-7, -6], [-4, -8], [-1, -11], [0, -14], [1, -17], [5, -20], [9, -24], [10, -25], [13, -24], [14, -25], [17, -25], [19, -22], [22, -18], [23, -16] ]  
-  
targetPoints = [ [-12, -8], [-12, -2], [-10, 1], [-10, 4], [-9, 6], [-6, 7], [-3, 8], [-1, 8], [3, 6], [6, 5], [10, 3], [14, 1], [17, 1], [19, 0], [22, 1], [24, 2], [27, 4], [26, 7], [27, 11], [27, 15] ]
```

## 3 Example pointcloud data (3D)

하지만 실제 주어지는 데이터는 일반적으로 다음과 같은 3D 점군 데이터가 주어진다. 로봇이 3D 스캐너를 통해 다음과 같은 데이터를  $t$ ,  $t + 1$  시점에 대해 획득하였다고 가정하자.

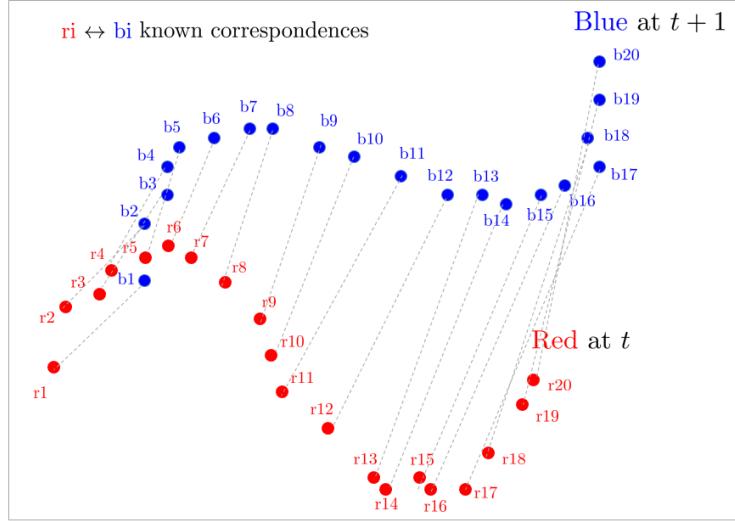
$t$  시점의 포인트(빨간색)과  $t + 1$  시점의 포인트(파란색)의 3D 점군의 좌표는 다음과 같다.

Tip

```
sourcePoints = [ [-19, -15, 7], [-18, -10, 6], [-15, -9, 5], [-14, -7, 4], [-11, -6, 8], [-9, -5, 5], [-7, -6, 7], [-4, -8, 6], [-1, -11, 4], [0, -14, 6], [1, -17, 8], [5, -20, 7], [9, -24, 5], [10, -25, 6], [13, -24, 8], [14, -25, 5], [17, -25, 7], [19, -22, 6], [22, -18, 8], [23, -16, 7] ]  
-  
targetPoints = [ [-12, -8, 9], [-12, -2, 11], [-10, 1, 10], [-10, 4, 12], [-9, 6, 9], [-6, 7, 10], [-3, 8, 8], [-1, 8, 12], [3, 6, 11], [6, 5, 9], [10, 3, 8], [14, 1, 12], [17, 1, 11], [19, 0, 10], [22, 1, 8], [24, 2, 9], [27, 4, 11], [26, 7, 12], [27, 11, 9], [27, 15, 10] ]
```

## 4 Point-to-point ICP

### 4.1 With known data associations



ICP를 본격적으로 설명하기에 앞서 가장 쉬운 케이스를 먼저 생각해보자. 만약 위 그림과 같이 두 점군의 데이터들 간 관계(association, correspondence)  $r_i \leftrightarrow b_i$ 가 미리 주어져 있는 경우 해당 정합 문제는 closed form 해가 존재하여 간단하게 문제를 풀 수 있다. (No initial guess, no iterative)

빨간색 점군을  $\mathbf{p}_t = [\mathbf{p}_{t,1}, \mathbf{p}_{t,2}, \dots, \mathbf{p}_{t,n}]^\top$  파란색 점군을  $\mathbf{p}_{t+1} = [\mathbf{p}_{t+1,1}, \mathbf{p}_{t+1,2}, \dots, \mathbf{p}_{t+1,n}]^\top$ 라고 하면 두 점군 사이의 관계는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{p}_{t+1} \approx \mathbf{R}\mathbf{p}_t + \mathbf{t} \quad (1)$$

- 위 식은 2D, 3D 데이터  $\mathbf{p}_t$ 에 대해 모두 성립한다. 따라서  $\mathbf{R} \in SO(2)$ 와  $\mathbf{R} \in SO(3)$  모두 성립한다.

위 식은 다음과 같은 최소제곱법 문제로 변환할 수 있다.

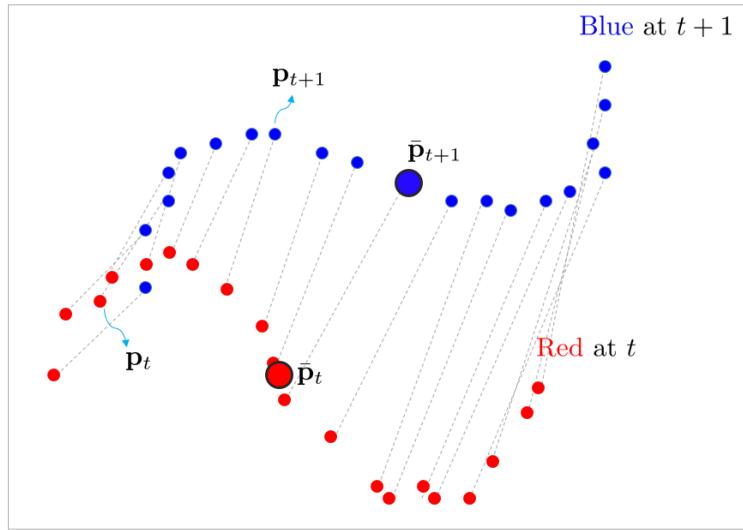
$$\arg \min_{\mathbf{R}, \mathbf{t}} \|\mathbf{p}_{t+1} - \mathbf{R}\mathbf{p}_t - \mathbf{t}\|^2 \quad (2)$$

위 최소제곱법 문제는 비선형 항  $\mathbf{R}$ 가 포함되어 있기 때문에 정규방정식(normal equation) 형태로 풀 수 없다. 따라서 이를 해결하기 위해 공분산 행렬을 SVD 분해하는 방법과 비선형 최소제곱법(Gauss-Newton)으로 푸는 방법이 존재한다. 우선 공분산 행렬을 SVD 분해하는 방법에 대해 먼저 설명한다.

#### 4.1.1 Covariance SVD-based solution

결론부터 말하자면 두 점군에 대한 공분산 행렬  $\mathbf{C}$ 를 구한 후 이를 SVD 분해하여 회전 행렬의 최적해  $\mathbf{R}^*$ 를 구할 수 있다.

우선 이를 위해 두 점군의 무게 중심(centroid)를 먼저 구한다.



$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{p}}_t &= \frac{1}{n} \sum \mathbf{p}_{t,i} \\ \bar{\mathbf{p}}_{t+1} &= \frac{1}{n} \sum \mathbf{p}_{t+1,i}\end{aligned}\tag{3}$$

다음으로 기존의 모든 점들  $\mathbf{p}$ 에 대해 무게 중심  $\bar{\mathbf{p}}$ 을 빼준  $\mathbf{p}'$  값을 구한다.

$$\begin{aligned}\mathbf{p}'_t &= \mathbf{p}_t - \bar{\mathbf{p}}_t \\ \mathbf{p}'_{t+1} &= \mathbf{p}_{t+1} - \bar{\mathbf{p}}_{t+1}\end{aligned}\tag{4}$$

위 결과를 사용하여 (2) 식을 다시 표현하면 다음과 같다.

$$\arg \min_{\mathbf{R}, \mathbf{t}} \|(\mathbf{p}'_{t+1} + \bar{\mathbf{p}}_{t+1}) - \mathbf{R}(\mathbf{p}'_t + \bar{\mathbf{p}}_t) - \mathbf{t}\|^2\tag{5}$$

- $\mathbf{p}_{t+1} = \mathbf{p}'_{t+1} + \bar{\mathbf{p}}_{t+1}$
- $\mathbf{p}_t = \mathbf{p}'_t + \bar{\mathbf{p}}_t$

이 때, 두 점군의 이동 벡터  $\mathbf{t}$ 는  $t+1$ 시점 점군의 무게중심  $\bar{\mathbf{p}}_{t+1}$ 과  $t$  시점 회전한 점군의 무게중심  $\mathbf{R}\bar{\mathbf{p}}_t$ 의 차이로 설정한다. 즉, **두 점군의 상대 회전량을 정확히 보정한다면 두 점군은 정확히  $\mathbf{t}$ 만큼 떨어져 있다고 가정하는 것이다.**

$$\boxed{\mathbf{t} = \bar{\mathbf{p}}_{t+1} - \mathbf{R}\bar{\mathbf{p}}_t}\tag{6}$$

(5)에 위 식을 대입하면 다음과 같이  $\mathbf{t}$  항이 소거되어  $\mathbf{R}$ 을 찾는 문제로 단순화된다.

$$\arg \min_{\mathbf{R}} \|\mathbf{p}'_{t+1} - \mathbf{R}\mathbf{p}'_t\|^2\tag{7}$$

위 식을 전개하면 다음과 같다. 식이 전개되면서  $\mathbf{R}$ 이 소거되어 중간의 항만  $\mathbf{R}$ 과 관련있는 항이 된다.

$$\begin{aligned}\arg \min_{\mathbf{R}} \|\mathbf{p}'_{t+1} - \mathbf{R}\mathbf{p}'_t\|^2 &= \arg \min_{\mathbf{R}} \left[ \mathbf{p}'_{t+1}^\top \mathbf{p}'_{t+1} - 2\mathbf{p}'_{t+1}^\top \mathbf{R}\mathbf{p}'_t + \mathbf{p}'_t^\top \underbrace{\mathbf{R}^\top \mathbf{R}}_{\mathbf{I}} \mathbf{p}'_t \right] \\ &= \arg \min_{\mathbf{R}} \left[ -2\mathbf{p}'_{t+1}^\top \mathbf{R}\mathbf{p}'_t + C \right]\end{aligned}\tag{8}$$

따라서 최적화 수식은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다. 마이너스 부호( $-$ )가 사라지면서 argmin 문제가 argmax 문제로 변환된다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}^* &= \arg \min_{\mathbf{R}} \left[ -2\mathbf{p}_{t+1}' \mathbf{R} \mathbf{p}_t' \right] \\
&= \arg \max_{\mathbf{R}} \left[ \mathbf{p}_{t+1}' \mathbf{R} \mathbf{p}_t' \right] \\
&= \arg \max_{\mathbf{R}} \left[ \text{tr}(\mathbf{p}_{t+1}' \mathbf{R} \mathbf{p}_t') \right] \\
&= \arg \max_{\mathbf{R}} \left[ \text{tr}(\mathbf{R} \mathbf{p}_t' \mathbf{p}_{t+1}') \right] \quad \leftarrow \because \text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA}) \\
&= \arg \max_{\mathbf{R}} \left[ \text{tr}(\mathbf{RC}) \right]
\end{aligned} \tag{9}$$

-  $\mathbf{C} = \mathbf{p}_t' \mathbf{p}_{t+1}'$

위 식의 세번째 줄을 보면  $\mathbf{p}_{t+1}' \mathbf{R} \mathbf{p}_t' = \mathbb{R}^{1 \times n} \cdot \mathbb{R}^{n \times n} \cdot \mathbb{R}^{n \times 1} = \mathbb{R}$ 로 스칼라 값이 나오는 것을 알 수 있다. 따라서 최종 결과가 스칼라 (=1x1 행렬)이므로 행렬의 대각 성분의 합인 trace의 유용한 성질을 활용할 수 있다.  $\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA})$ 의 성질을 활용하여  $\mathbf{A} = \mathbf{p}_{t+1}'$ 과  $\mathbf{B} = \mathbf{R} \mathbf{p}_t'$ 의 위치를 바꿔준다.

위 식의 네번째 줄을 보면  $\mathbf{p}_t' \mathbf{p}_{t+1}'$  식은 두 점군의 공분산 행렬(covariance matrix)의 정의와 동일하다. 따라서 이를  $\mathbf{C}$ 로 치환해준다.

Tip

#### Covariance matrix of $\mathbf{x}, \mathbf{y}$

두 데이터 집합  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n]'$ 과  $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n]'$ 이 주어졌을 때 두 데이터의 공분산 행렬은 다음과 같이 구할 수 있다.

1. 두 데이터의 평균을 구한다

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{x}} &= \frac{1}{n} \sum \mathbf{x}_i \\
\bar{\mathbf{y}} &= \frac{1}{n} \sum \mathbf{y}_i
\end{aligned} \tag{10}$$

2. 원본 데이터에서 각각 평균을 빼준다

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}' &= \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}} \\
\mathbf{y}' &= \mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}
\end{aligned} \tag{11}$$

3. 두 데이터의 공분산 행렬  $\mathbf{C}_{xy}$ 은 다음과 같이 구할 수 있다

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_{xy} &= \mathbf{x}' \mathbf{y}'' \\
&= (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})''
\end{aligned} \tag{12}$$

따라서 최적의  $\mathbf{R}^*$ 을 구하기 위해서는 다음 식을 풀어야 한다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}^* &= \arg \max_{\mathbf{R}} \left[ \text{tr}(\mathbf{RC}) \right] \\
&= \arg \max_{\mathbf{R}} \left[ \text{tr}(\mathbf{RUDV}'') \right]
\end{aligned} \tag{13}$$

공분산 행렬  $\mathbf{C}$ 은 값이 마이너스(-)가 나올 수 없으므로 항상 positive (semi-)definite 행렬이다. 따라서 위 식의 두번째 줄에서  $\mathbf{C}$ 를 SVD 분해하면 모든 특이값(singular value)은 항상 0보다 크거나 같다.

Tip

### Lemma

임의의 positive definite 행렬  $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top$ 과 정규직교행렬(orthonormal)  $\mathbf{B}$ 에 대하여 다음과 같은 Cauchy-Schwarz 부등식이 성립한다.

$$\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}^\top) \geq \text{tr}(\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{A}^\top) \quad (14)$$

### Proof

임의의 벡터에 대한 Cauchy-Schwarz 부등식은 다음과 같다.

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \quad (15)$$

-  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ : 임의의 벡터

-  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ : 벡터의 내적(inner product)

-  $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}$ : 벡터의 놈(norm)

$\text{tr}(\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{A}^\top)$ 은 다음과 같이 벡터 형태로 표현이 가능하다

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{B}\mathbf{A} \cdot \underline{\mathbf{A}^\top}) &= \text{tr}(\underline{\mathbf{A}^\top} \cdot \underline{\mathbf{B}\mathbf{A}}) \\ &= \sum \mathbf{a}_i^\top \mathbf{B} \mathbf{a}_i \end{aligned} \quad (16)$$

위 식을 Cauchy-Schwarz 부등식에 대입하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i^\top \mathbf{B} \mathbf{a}_i &\leq \sqrt{(\mathbf{a}_i^\top \mathbf{a}_i)(\mathbf{a}_i^\top \underbrace{\mathbf{B}^\top \mathbf{B}}_{\mathbf{I}} \mathbf{a}_i)} \\ &= \mathbf{a}_i^\top \mathbf{a}_i \end{aligned} \quad (17)$$

$$\mathbf{a}_i^\top \mathbf{B} \mathbf{a}_i \leq \mathbf{a}_i^\top \mathbf{a}_i \quad (18)$$

따라서 다음과 같은 Lemma를 얻는다.

$$\therefore \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}^\top) \geq \text{tr}(\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{A}^\top) \quad (19)$$

### 4.1.2 Method 1 for $\mathbf{R}^*$

만약  $\mathbf{R} = \mathbf{V}\mathbf{U}^\top$ 로 정의하면 (13)에서 정규직교행렬  $\mathbf{U}^\top \mathbf{U}$ 가 서로 소거되어  $\mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^\top$ 만 남는다. 이를 통해  $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top$  형태로 만들 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^\top) &= \text{tr}(\mathbf{V} \underbrace{\mathbf{U}^\top \mathbf{U}}_{\mathbf{I}} \mathbf{D}\mathbf{V}^\top) \\ &= \text{tr}(\mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^\top) \\ &= \text{tr}(\mathbf{V}\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\mathbf{V}^\top) \\ &= \text{tr}(\mathbf{V}\mathbf{D}^{\frac{1}{2}})(\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\mathbf{V}^\top) \quad \leftarrow \mathbf{AA}^\top \text{ form} \\ &= \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}^\top) \\ &\geq \text{tr}(\mathbf{R}'\mathbf{A}\mathbf{A}^\top) \end{aligned} \quad (20)$$

-  $\mathbf{R}'$ : 임의의 정규직교행렬(orthonormal)

-  $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}$

이를 다시 정리하면 다음과 같다.

$$\boxed{\text{tr}(\mathbf{RC}) = \text{tr}(\mathbf{V}\mathbf{U}^\top \mathbf{C}) \geq \text{tr}(\mathbf{R}'\mathbf{A}\mathbf{A}^\top) = \text{tr}(\mathbf{R}'\mathbf{RC})} \quad (21)$$

위 식의 의미는  $\mathbf{R}$ 은  $\mathbf{R} = \mathbf{V}\mathbf{U}^\top$ 인 경우에 모든 다른 임의의 회전행렬  $\mathbf{R}'\mathbf{R}$ 보다 큰 값을 가진다는 의미이다. 따라서 argmax의 해가 된다.

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{R} &= \mathbf{V}\mathbf{U}^\top \\ \mathbf{t} &= \mathbf{R}\bar{\mathbf{p}}_t - \bar{\mathbf{p}}_{t+1}\end{aligned}} \quad (22)$$

#### 4.1.3 Method 2 for $\mathbf{R}^*$

(13) 식을 다시 보면 trace 내부의 값을 최대화해야 한다. 이 때, 앞서 언급했듯이 공분산 행렬  $\mathbf{C}$ 는 positive (semi-)definite 행렬이므로 특이값이 항상 0보다 크거나 같고 따라서 대각행렬  $\mathbf{D}$ 의 모든 값은 항상 0보다 크거나 같다. 그리고  $\mathbf{R}, \mathbf{U}, \mathbf{V}$ 는 정규직교행렬(orthonormal) 행렬이므로 대각행렬과 곱해지면 항상 trace 값은  $\mathbf{D}$  자체보다 작아지게 된다.

$$\text{tr}(\mathbf{D}) \geq \text{tr}(\mathbf{RUDV}^\top) \quad (23)$$

Trace 성질에 의해 순서를 바꿔주게 되면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^* &= \arg \max_{\mathbf{R}} [\text{tr}(\underline{\mathbf{R}}\underline{\mathbf{U}} \cdot \underline{\mathbf{D}}\mathbf{V}^\top)] \\ &= \arg \max_{\mathbf{R}} [\text{tr}(\underline{\mathbf{D}}\mathbf{V}^\top \cdot \underline{\mathbf{R}}\underline{\mathbf{U}})]\end{aligned} \quad (24)$$

만약  $\mathbf{R} = \mathbf{V}\mathbf{U}^\top$ 인 경우 정규직교행렬들이 소거되어 최대 trace 값을 가진다.

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^* &= \arg \max_{\mathbf{R}} [\text{tr}(\underline{\mathbf{D}}\mathbf{V}^\top \underline{\mathbf{R}}\underline{\mathbf{U}})] \\ &= \arg \max_{\mathbf{R}} [\text{tr}(\underline{\mathbf{D}} \underbrace{\mathbf{V}^\top \underline{\mathbf{R}}\underline{\mathbf{U}}}_{\mathbf{I}})]\end{aligned} \quad (25)$$

-  $\mathbf{R} = \mathbf{V}\mathbf{U}^\top$

따라서 앞서 method1에서 유도한 (22)와 동일한  $\mathbf{R}$  값을 구할 수 있다.

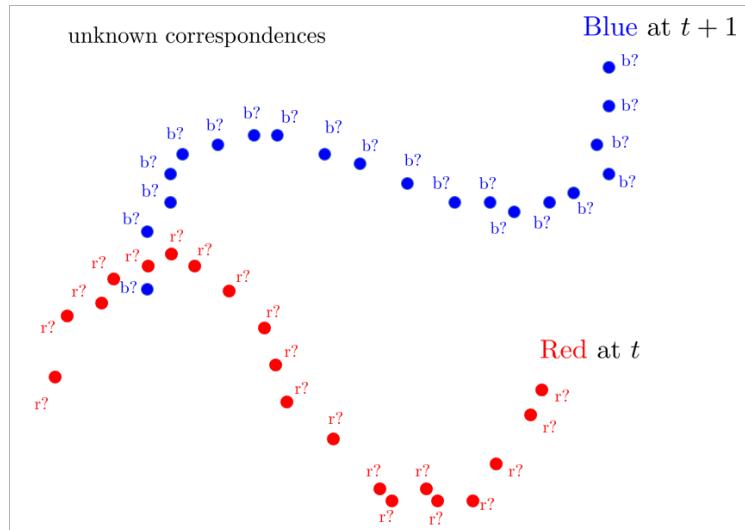
$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{R} &= \mathbf{V}\mathbf{U}^\top \\ \mathbf{t} &= \bar{\mathbf{p}}_{t+1} - \mathbf{R}\bar{\mathbf{p}}_t\end{aligned}} \quad (26)$$

회전행렬의 최적해를 구할 때  $\mathbf{R}$ 이 SO(3)군의 조건을 만족하려면 반드시 행렬식이 +1이어야 한다.  $\det(\mathbf{R}) = 1$ . 하지만 실제 ICP 해를 구하다보면 행렬식이 -1이 되는 경우가 발생하는데 이는 reflection (특정 축 기준으로 상하좌우 반전)이 된 경우이다. 이러한 degenerate 케이스를 방지하기 위해 일반적으로 다음과 같이 회전 행렬의 최적해를 구한다.

$$\mathbf{R} = \mathbf{V} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \det(\mathbf{V}\mathbf{U}^\top) \end{bmatrix} \mathbf{U}^\top \quad (27)$$

## 4.2 With unknown data associations

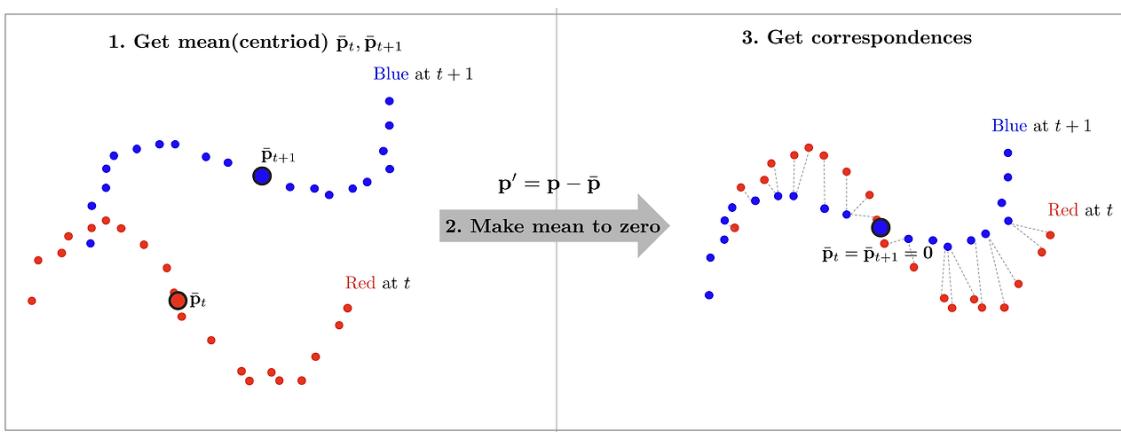
이전 섹션에서 살펴본 최적해  $\mathbf{R}^*, \mathbf{t}^*$ 는 두 점군 사이의 대응 관계(association, correspondences)를 모두 알고 있는 경우에 사용할 수 있는 방법이었다. 하지만 일반적으로 센서에서 얻어지는 두 점군 데이터는 어느 포인트가 어느 포인트와 대응하는지 알 수 없다.

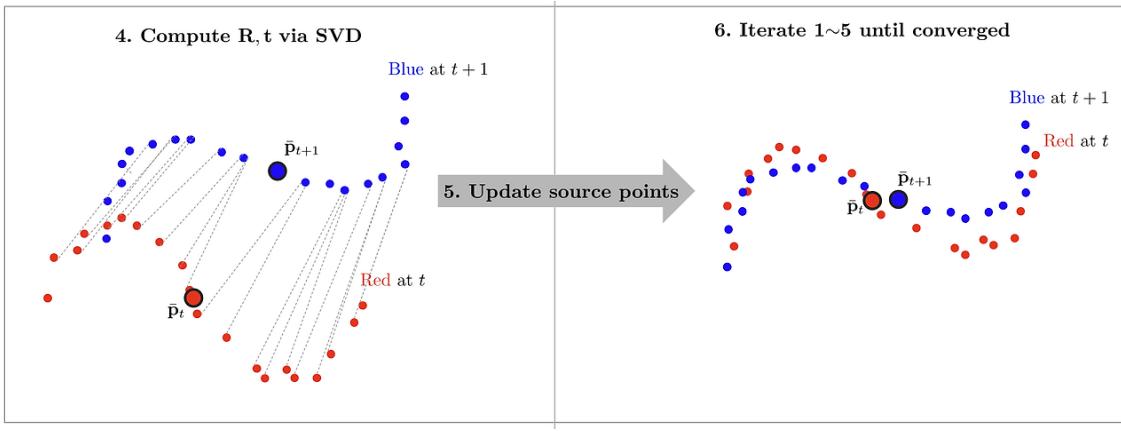


위와 같이 대응 관계를 모르는 경우, 바로 구할 수 있는 closed form 해는 존재하지 않는다. [따라서 하나의 점으로부터 가장 가까운 점\(closest point\)을 대응점 쌍으로 설정하여 반복적\(iterative\)으로 최적해를 구하는 알고리즘이 Iterative Closest Point\(ICP\)이다.](#) ICP의 전체적인 과정은 다음과 같다. ( $j$ : 현재 반복 횟수)

1. source 점군과 target 점군의 평균(또는 centroid)  $\bar{p}_t, \bar{p}_{t+1}$ 을 구한다.
2. 각 점군에 두 평균을 빼줌으로써 평균을 0으로 정규화한다. ( $p' = p - \bar{p}$ )
3. 각 source 점들마다 최단 거리의 target 점들을 correspondence로 설정한다. (nearest neighborhood 알고리즘 사용 e.g., KD-tree)
4. 공분산 행렬을 SVD 분해하여 회전행렬  $R$ 을 구하고 평균 간 차이를 통해 이동 벡터  $t$ 를 구한다. ( $R_j = VU^\top, t_j = \bar{p}_{t+1} - R_j\bar{p}_t$ )
5. source 점군을 최적해만큼 이동시킨다.  $p_{t,j+1} = R_j p_{t,j} + t_j$
6. 두 점군의 거리가 충분히 가까워질 때까지 1~5 과정을 반복한다.

ICP 과정을 그림으로 나타내면 다음과 같다.





지금까지 설명한 알고리즘을 가장 기본적인 ICP 알고리즘이라는 뜻에서 일반적으로 **Vanila ICP**라고 부른다. Vanila ICP는 구현하기 비교적 쉽고 초기 추정값(initial guess)가 정확하면 잘 동작한다는 장점이 있으나 일반적으로 수렴하는데 많은 반복 횟수가 필요하며 잘못된 correspondence에 영향을 많이 받아 결과가 안 좋아질 수 있는 한계점이 존재한다.

이러한 Vanila ICP의 한계점을 극복하기 위해 모든 점들이 아닌 점군의 부분 집합(e.g., 특징점)만 추출하여 ICP를 수행한다거나 point-to-plane과 같이 다른 대응 관계를 이용하거나 correspondence에 가중치를 두어 outlier의 영향력을 축소한다거나 잠재적인 point outlier를 아예 제거하여 보다 강건한 ICP를 수행하는 등 많은 변형 ICP 방법들이 존재한다. 자세한 내용은 Cyril 교수님의 ICP 강의를 참고하면 된다.

### 4.3 Least squares point-to-point ICP (2D)

지금까지 설명했던 ICP 방법의 핵심은 두 점군의 공분산 행렬을 구한 후 SVD 분해하여 회전 행렬을  $\mathbf{R} = \mathbf{V}\mathbf{U}^\top$ 과 같이 구하는 방법이었다. 이번 섹션에서는 비선형 최소제곱법(=Gauss-Newton, GN)을 사용하여 ICP 문제를 푸는 방법에 대해 설명한다. Least squares ICP는 기본적으로 대응 관계를 모르는 경우(unknown data association)에 적용할 수 있다.

**Least squares ICP는 대부분 과정이 기존 ICP와 동일하지만 매 iteration마다 최적해  $R, t$ 를 추정하는 방법이 SVD -> Gauss-Newton 방법으로 변경된 점이 다르다. 또한 가장 가까운 대응점 쌍(correspondences)을 구할 때 평균을 0으로 설정 후 대응점 쌍을 구하지 않고 바로 대응점 쌍을 구한다는 점이 다르다.**

SVD 해는 점군들의 correspondence가 point-to-point 대응점 쌍임을 가정하고 해를 구하지만 실제 ICP는 point-to-point 이외에도 다양한 에러 함수를 설정할 수 있으므로 Least squares ICP를 사용하면 이러한 에러함수를 일관되게 최적화할 수 있다. 또한 Robust estimator 같은 항을 사용하여 보다 outlier에 강건한 최적화를 수행할 수 있다.

Least squares ICP를 수행하기 위해 2차원 포즈 상태 변수  $\mathbf{x} = [t_x, t_y, \theta]^\top$ 를 선언한다. 2차원 회전 행렬  $\mathbf{R}$ 과 이동 벡터  $\mathbf{t}$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= [t_x, t_y, \theta]^\top \\ \mathbf{R}(\theta) &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ \mathbf{t} &= \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{28}$$

-  $\mathbf{R}(\theta)$ : 회전 행렬의 입력 파라미터로  $\theta$ 가 들어간다는 것을 명시적으로 써준 형태이다.

**최적화 식은 기존의 (2)와 동일하지만 자코비안 전개의 편의를 위해 기존의 '관측값-예측값' 형태에서 '예측값-관측값' 형태로 변경해주자.**  $i$ 번째 점에 대한 에러 함수  $\mathbf{e}_i$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{e}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{R}(\theta)\mathbf{p}_{t,i} + \mathbf{t} - \mathbf{p}_{t+1,i} \in \mathbb{R}^2 \tag{29}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{x}^* &= \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{e}_i(\mathbf{x})\|^2 \\ &= \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{R}(\theta) \mathbf{p}_{t,i} + \mathbf{t} - \mathbf{p}_{t+1,i}\|^2\end{aligned}} \quad (30)$$

- 에러 함수가 '예측값-관측값' 형태로 변경되어도 제곱이 되므로 전체 최적화 과정에는 영향을 주지 않는다. 다만 에러 함수에 모양에 따라 자코비안의 부호가 달라지므로 실제 코드 구현 시 이에 유의한다.

위 식은 비선형 최소제곱법의 형태를 띄므로 Gauss-Newton(GN) 또는 Levenberg-Marquardt(LM) 방법으로 풀 수 있다. GN 방법을 예로 들어 설명해보자. 미소한 변화량  $\Delta \mathbf{x}$ 에 대하여 에러 함수  $\mathbf{e}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x})$ 는 다음과 같이 테일러 근사를 통해 선형화할 수 있다.

$$\mathbf{e}_i(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) \approx \mathbf{e}_i(\mathbf{x}) + \mathbf{J}_i \Delta \mathbf{x} \quad (31)$$

$i$ 번째 점에 대한 자코비안  $\mathbf{J}_i$ 는 다음과 같다.

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{J}_i &= \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \mathbf{x}} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial t_x} & \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial t_y} & \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \theta} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{e}_i^x}{\partial t_x} & \frac{\partial \mathbf{e}_i^x}{\partial t_y} & \frac{\partial \mathbf{e}_i^x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \mathbf{e}_i^y}{\partial t_x} & \frac{\partial \mathbf{e}_i^y}{\partial t_y} & \frac{\partial \mathbf{e}_i^y}{\partial \theta} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta & x_{t,i} - \cos \theta & y_{t,i} \\ 0 & 1 & \cos \theta & x_{t,i} - \sin \theta & y_{t,i} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}\end{aligned}} \quad (32)$$

위 식에서  $\theta$ 에 대한 자코비안 성분은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta} (\mathbf{R}(\theta) \mathbf{p}_{t,i}) \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t,i} \\ y_{t,i} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t,i} \\ y_{t,i} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\sin \theta & x_{t,i} - \cos \theta & y_{t,i} \\ \cos \theta & x_{t,i} - \sin \theta & y_{t,i} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}\end{aligned}} \quad (33)$$

-  $\mathbf{p}_{t,i} = [x_{t,i}, y_{t,i}]^\top$

모든 점들에 대한 에러 함수를 합치면 다음과 같이 점군에 대한 에러 함수가 된다.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x}) &= \sum_i^n \|\mathbf{e}_i(\mathbf{x})\|^2 \\ \mathbf{x} &= \arg \min_{\mathbf{x}} \mathbf{E}(\mathbf{x})\end{aligned} \quad (34)$$

점군에 대한 자코비안  $\mathbf{J}_i$ 와  $\mathbf{H}_i, \mathbf{b}_i$ 도 다음과 같이 합쳐지게 된다.

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_i &= \mathbf{J}_i^\top \mathbf{J}_i \\ \mathbf{b}_i &= \mathbf{J}_i^\top \mathbf{e}_i\end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= \sum_i^n \mathbf{J}_i \\ \mathbf{H} &= \sum_i^n \mathbf{H}_i \\ \mathbf{b} &= \sum_i^n \mathbf{b}_i\end{aligned}\tag{36}$$

GN 방법의 해는 다음과 같이 구할 수 있다. 유도 과정에 대해 궁금한 독자들은 에러와 자코비안 정리 포스팅을 참고하면 된다.

$$\Delta \mathbf{x}^* = -\mathbf{H}^{-1} \mathbf{b}\tag{37}$$

미소 증분량의 최적해  $\Delta \mathbf{x}^*$ 를 위와 같이 구했으면 이를 원래 상태 변수  $\mathbf{x}$ 에 업데이트 해준다. 업데이트를 통해 source 점군이 target 점군에 점진적으로 정합(registration)된다.

$$\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}^*\tag{38}$$

지금까지 설명한 과정을 source 점군이 더 이상 업데이트 되지 않을 때까지 반복한다. 이러한 과정을 Least squares ICP (2D ver.) 알고리즘이라고 부른다.

### Gauss-Newton method (point-to-point ICP 2D)

1. Nearest neighborhood (e.g., KD-tree) 방법을 통해 source 점에 가장 가까운 target 점들을 correspondence로 설정한다.
2. (29)과 같이 에러함수를 정의한다.  $\mathbf{e}(\mathbf{x})$
3. 테일러 전개로 근사 선형화하여 자코비안을 구한다.  $\mathbf{H} = \mathbf{J}^\top \mathbf{J}, \mathbf{b} = \mathbf{J}^\top \mathbf{e}$
4. 1차 미분 후 0으로 설정한다.  $\Delta \mathbf{x}^* = -\mathbf{H}^{-1} \mathbf{b}$
6. 이 때 값을 구하고 이를 에러함수에 대입한다.  $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}^*$
7. 값이 수렴할 때 까지 반복한다.

#### 4.3.1 Least squares point-to-point ICP (3D)

3D 점군에 대한 Least squares ICP는 2D 점군과 비교해서 자코비안을 제외하고 모든 과정이 동일하다. 이 때, **자코비안에 3차원 회전 행렬  $\mathbf{R} \in SO(3)$ 이 포함되므로 자코비안을 구할 때 Lie algebra  $so(3)$ -based optimization이 적용된다는 점이 유의할만한 점이다.** Lie theory-based optimization에 대한 내용은 에러와 자코비안 정리 포스팅을 참고하면 된다.

Least squares ICP를 수행하기 위해 3차원 포즈 상태 변수  $\mathbf{x} = [t_x, t_y, t_z, \mathbf{R}]^\top$ 를 선언한다. 3차원 회전 행렬  $\mathbf{R} \in SO(3)$ 과 이동 벡터  $\mathbf{t}$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= [t_x, t_y, t_z, \mathbf{R}]^\top \\ \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \in SO(3) \\ \mathbf{t} &= \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{39}$$

$i$ 번째 점에 대한 에러 함수  $\mathbf{e}_i$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{e}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{R} \mathbf{p}_{t,i} + \mathbf{t} - \mathbf{p}_{t+1,i} \in \mathbb{R}^3\tag{40}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{x}^* &= \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{e}_i(\mathbf{x})\|^2 \\ &= \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{R}\mathbf{p}_{t,i} + \mathbf{t} - \mathbf{p}_{t+1,i}\|^2\end{aligned}} \quad (41)$$

위 식은 비선형 최소제곱법의 형태를 띠므로 Gauss-Newton(GN) 또는 Levenberg-Marquardt(LM) 방법으로 풀 수 있다. GN 방법을 예로 들어 설명해보자. 미소한 변화량  $\Delta\mathbf{x}$ 에 대하여 에러 함수  $\mathbf{e}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})$ 는 다음과 같이 테일러 근사를 통해 선형화할 수 있다.

$$\mathbf{e}_i(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) \approx \mathbf{e}_i(\mathbf{x}) + \mathbf{J}_i \Delta\mathbf{x} \quad (42)$$

$i$ 번째 3D 점에 대한 자코비안  $\mathbf{J}_i$ 은 다음과 같다.

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{J}_i &= \frac{\partial \mathbf{e}_i(\mathbf{x})}{\partial [\mathbf{t}, \mathbf{R}]} \\ &= \frac{\partial \mathbf{e}_i(\mathbf{x})}{\partial [\mathbf{t}, \Delta\mathbf{w}]} \quad \leftarrow \text{so(3)-based optimization} \\ &= \frac{\partial}{\partial [\mathbf{t}, \Delta\mathbf{w}]} \left( \mathbf{R}\mathbf{p}_{t,i} + \mathbf{t} - \mathbf{p}_{t+1,i} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z'_{t,i} & -y'_{t,i} \\ 0 & 1 & 0 & -z'_{t,i} & 0 & x'_{t,i} \\ 0 & 0 & 1 & y'_{t,i} & -x'_{t,i} & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 6}\end{aligned}} \quad (43)$$

- Lie theory-based optimization에 대한 내용은 에러와 자코비안 정리 포스팅을 참고하면 된다.

$\frac{\partial \mathbf{e}_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{t}}$ 은 다음과 같다.

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{e}_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{t}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}} \mathbf{t} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}\end{aligned}} \quad (44)$$

$\frac{\partial \mathbf{e}_i(\mathbf{x})}{\partial \Delta\mathbf{w}}$ 은 다음과 같다.

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{e}_i(\mathbf{x})}{\partial \Delta\mathbf{w}} &= -[\mathbf{R}\mathbf{p}_{t,i} + \mathbf{t}] \times \\ &= \begin{bmatrix} 0 & z'_{t,i} & -y'_{t,i} \\ -z'_{t,i} & 0 & x'_{t,i} \\ y'_{t,i} & -x'_{t,i} & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}\end{aligned}} \quad (45)$$

-  $\mathbf{R}\mathbf{p}_{t,i} + \mathbf{t} = [x'_{t,i} \ y'_{t,i} \ z'_{t,i}]^\top$

$$- [\mathbf{a}] \times = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \times = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} : \text{반대칭행렬 연산자}$$

모든 점들에 대한 에러 함수를 합치면 다음과 같이 점군에 대한 에러 함수가 된다.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x}) &= \sum_i^n \|\mathbf{e}_i(\mathbf{x})\|^2 \\ \mathbf{x} &= \arg \min_{\mathbf{x}} \mathbf{E}(\mathbf{x})\end{aligned} \quad (46)$$

점군에 대한 자코비안  $\mathbf{J}_i$ 와  $\mathbf{H}_i, \mathbf{b}_i$ 도 다음과 같이 합쳐지게 된다.

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_i &= \mathbf{J}_i^\top \mathbf{J}_i \\ \mathbf{b}_i &= \mathbf{J}_i^\top \mathbf{e}_i\end{aligned}\tag{47}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= \sum_i^n \mathbf{J}_i \\ \mathbf{H} &= \sum_i^n \mathbf{H}_i \\ \mathbf{b} &= \sum_i^n \mathbf{b}_i\end{aligned}\tag{48}$$

GN 방법의 해는 다음과 같이 구할 수 있다. 유도 과정에 대해 궁금한 독자들은 에러와 자코비안 정리 포스팅을 참고하면 된다.

$$\Delta \mathbf{x}^* = -\mathbf{H}^{-1} \mathbf{b}\tag{49}$$

미소 증분량의 최적해  $\Delta \mathbf{x}^*$ 를 위와 같이 구했으면 이를 원래 상태  $\mathbf{x}$ 에 업데이트 해준다. 업데이트를 통해 source 점군이 target 점군에 점진적으로 정합(registration)된다.

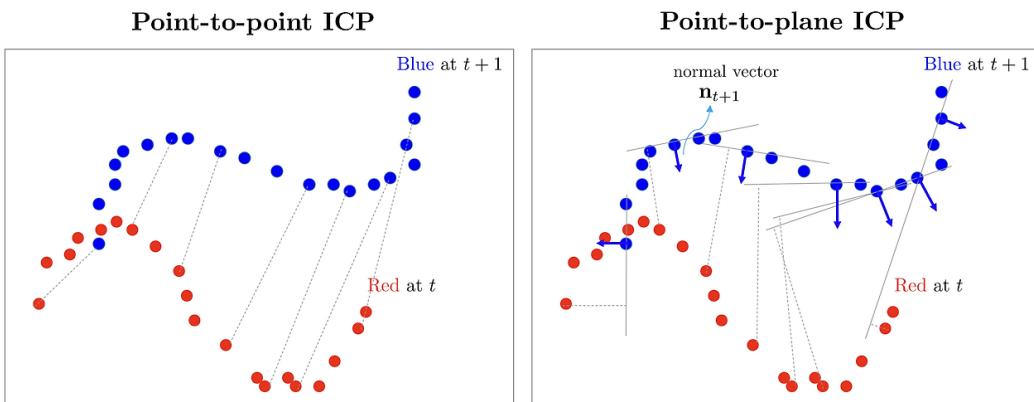
$$\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}^*\tag{50}$$

지금까지 설명한 과정을 source 점군이 더 이상 업데이트 되지 않을 때까지 반복한다. 이러한 과정을 Least squares ICP (3D ver.) 알고리즘이라고 부른다.

### Gauss-Newton method (point-to-point ICP 3D)

1. Nearest neighborhood (e.g., KD-tree) 방법을 통해 source 점에 가장 가까운 target 점들을 correspondence로 설정한다.
2. (40)과 같이 에러함수를 정의한다.  $e(\mathbf{x})$
3. 테일러 전개로 근사 선형화하여 자코비안을 구한다.  $\mathbf{H} = \mathbf{J}^\top \mathbf{J}, \mathbf{b} = \mathbf{J}^\top \mathbf{e}$
4. 1차 미분 후 0으로 설정한다.  $\Delta \mathbf{x}^* = -\mathbf{H}^{-1} \mathbf{b}$
5. 이 때 값을 구하고 이를 에러함수에 대입한다.  $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}^*$
6. 값이 수렴할 때 까지 반복한다.

## 5 Point-to-plane ICP



기존 point-to-point ICP는 source 점과 target 점 사이의 유clidean 거리(euclidean distance)를 최소화하는 방향으로 최적화를 수행하였다. 반면에 point-to-plane ICP는 source 점과 target 법선 벡터(normal vector) 거리를 최소화하는 방향으로 최적화를 수행한다. Point-to-plane의 원조격이 되는 논문은 [5],[6],[7]가 있다.

Point-to-plane 알고리즘은 point-to-point 대비 일반적으로 수렴 속도가 빠르며 노이즈와 outlier에 덜 민감하다는 특징이 있다. 반면에 법선 벡터를 계산한 후 최적화하는 과정이 추가되어 연산량이 증가한다는 trade-off 관계가 존재한다. 또한 point-to-point와 최적화 수식이 달라지므로 SVD 해를 구할 수 없고 least squares(=GN)을 통해서만 최적해를 구할 수 있다.

## 5.1 Least squares point-to-plane ICP (2D)

Point-to-plane ICP의 대부분의 과정은 point-to-point ICP와 동일하며 법선 벡터(normal vector)를 구하는 과정과 최적화 수식이 약간 변경되었다는 점이 다르다. Least squares ICP를 수행하기 위해 2차원 포즈 상태 변수  $\mathbf{x} = [t_x, t_y, \theta]^\top$ 를 선언한다. 2차원 회전 행렬  $\mathbf{R}$ 과 이동 벡터  $\mathbf{t}$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= [t_x, t_y, \theta]^\top \\ \mathbf{R}(\theta) &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ \mathbf{t} &= \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{51}$$

-  $\mathbf{R}(\theta)$ : 회전 행렬의 입력 파라미터로  $\theta$ 가 들어간다는 것을 명시적으로 써준 형태이다.

$i$ 번째 점에 대한 에러 함수  $\mathbf{e}_i$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{e}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{n}_{t+1,i}^\top (\mathbf{R}(\theta)\mathbf{p}_{t,i} + \mathbf{t} - \mathbf{p}_{t+1,i}) \in \mathbb{R}\tag{52}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{x}^* &= \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{e}_i(\mathbf{x})\|^2 \\ &= \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{n}_{t+1,i}^\top (\mathbf{R}(\theta)\mathbf{p}_{t,i} + \mathbf{t} - \mathbf{p}_{t+1,i})\|^2\end{aligned}}\tag{53}$$

- $\mathbf{n}_{t+1,i} = [n_{t+1,i}^x, n_{t+1,i}^y]^\top$ : target 점군에서  $i$ 번째 점의 법선 벡터(normal vector)
- $\mathbf{n}^\top(\cdot) = (\cdot)^\top \mathbf{n}$ 의 성질로 인해 법선 벡터는 식의 오른쪽과 왼쪽 어느 방향이든 위치할 수 있다.

기존 point-to-point의 최적화 수식에 법선 벡터  $\mathbf{n}_{t+1,i}$ 를 내적한 형태로 수식이 구성되어 있는 것을 알 수 있다. 이는 source 점과 target 점이 완벽히 정합(registration)되어 있는 경우 두 점 사이의 벡터가 법선벡터와 수직을 이루기 때문에 내적=0의 성질을 이용한 것으로 해석할 수 있다.

2D의 경우 법선 벡터는 점  $\mathbf{p} = [x, y]^\top$ 가 주어져 있을 때  $\mathbf{n} = [-y, x]^\top$ 와 같이 간단하게 구할 수 있다.

위 식은 비선형 최소제곱법의 형태를 띠므로 Gauss-Newton(GN) 또는 Levenberg-Marquardt(LM) 방법으로 풀 수 있다. GN 방법을 예로 들어 설명해보자. 미소한 변화량  $\Delta\mathbf{x}$ 에 대하여 에러 함수  $\mathbf{e}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})$ 는 다음과 같이 테일러 근사를 통해 선형화할 수 있다.

$$\mathbf{e}_i(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) \approx \mathbf{e}_i(\mathbf{x}) + \mathbf{J}_i \Delta\mathbf{x}\tag{54}$$

$i$ 번째 점에 대한 자코비안  $\mathbf{J}_i$ 는 다음과 같다.

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{J}_i &= \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \mathbf{x}} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial t_x} & \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial t_y} & \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \theta} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{e}_i^x}{\partial t_x} & \frac{\partial \mathbf{e}_i^x}{\partial t_y} & \frac{\partial \mathbf{e}_i^x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \mathbf{e}_i^y}{\partial t_x} & \frac{\partial \mathbf{e}_i^y}{\partial t_y} & \frac{\partial \mathbf{e}_i^y}{\partial \theta} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} n_{t+1,i}^x & n_{t+1,i}^y & n_{t+1,i}^x(-\sin \theta x_{t,i} - \cos \theta y_{t,i}) + n_{t+1,i}^y(\cos \theta x_{t,i} - \sin \theta y_{t,i}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 3}\end{aligned}}\tag{55}$$

위 식에서  $\theta$ 에 대한 자코비안 성분은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta} (\mathbf{n}_{t+1,i}^\top \mathbf{R}(\theta) \mathbf{p}_{t,i}) \\
&= \frac{\partial}{\partial \theta} \begin{bmatrix} n_{t+1,i}^x & n_{t+1,i}^y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t,i} \\ y_{t,i} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} n_{t+1,i}^x & n_{t+1,i}^y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t,i} \\ y_{t,i} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} n_{t+1,i}^x (-\sin \theta x_{t,i} - \cos \theta y_{t,i}) & n_{t+1,i}^y (\cos \theta x_{t,i} - \sin \theta y_{t,i}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}
\end{aligned} \tag{56}$$

- $\mathbf{p}_{t,i} = [x_{t,i}, y_{t,i}]^\top$
- $\mathbf{n}_{t+1,i} = [n_{t+1,i}^x, n_{t+1,i}^y]^\top$

모든 점들에 대한 에러 함수를 합치면 다음과 같이 점군에 대한 에러 함수가 된다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{x}) &= \sum_i^n \|\mathbf{e}_i(\mathbf{x})\|^2 \\
\mathbf{x} &= \arg \min_{\mathbf{x}} \mathbf{E}(\mathbf{x})
\end{aligned} \tag{57}$$

점군에 대한 자코비안  $\mathbf{J}_i$ 와  $\mathbf{H}_i, \mathbf{b}_i$ 도 다음과 같이 합쳐지게 된다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_i &= \mathbf{J}_i^\top \mathbf{J}_i \\
\mathbf{b}_i &= \mathbf{J}_i^\top \mathbf{e}_i
\end{aligned} \tag{58}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{J} &= \sum_i^n \mathbf{J}_i \\
\mathbf{H} &= \sum_i^n \mathbf{H}_i \\
\mathbf{b} &= \sum_i^n \mathbf{b}_i
\end{aligned} \tag{59}$$

GN 방법의 해는 다음과 같이 구할 수 있다. 유도 과정에 대해 궁금한 독자들은 에러와 자코비안 정리 포스팅을 참고하면 된다.

$$\Delta \mathbf{x}^* = -\mathbf{H}^{-1} \mathbf{b} \tag{60}$$

미소 증분량의 최적해  $\Delta \mathbf{x}^*$ 를 위와 같이 구했으면 이를 원래 상태 변수  $\mathbf{x}$ 에 업데이트 해준다. 업데이트를 통해 source 점군이 target 점군에 점진적으로 정합(registration)된다.

$$\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}^* \tag{61}$$

지금까지 설명한 과정을 source 점군이 더 이상 업데이트 되지 않을 때까지 반복한다. 이러한 과정을 Least squares ICP (2D ver.) 알고리즘이라고 부른다.

### Gauss-Newton method (point-to-plane ICP 2D)

1. Nearest neighborhood (e.g., KD-tree) 방법을 통해 source 점에 가장 가까운 target 점들을 correspondence로 설정한다.
2. target 점들의 법선 벡터(normal vector)  $\mathbf{n}$ 을 계산한다. (2D:  $\mathbf{p} = [x, y]^\top, \mathbf{n} = [-y, x]^\top$ )
3. (52)과 같이 에러함수를 정의한다.  $\mathbf{e}(\mathbf{x})$
4. 테일러 전개로 근사 선형화하여 자코비안을 구한다.  $\mathbf{H} = \mathbf{J}^\top \mathbf{J}, \mathbf{b} = \mathbf{J}^\top \mathbf{e}$
5. 1차 미분 후 0으로 설정한다.  $\Delta \mathbf{x}^* = -\mathbf{H}^{-1} \mathbf{b}$

- 
6. 이 때 값을 구하고 이를 에러함수에 대입한다.  $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}^*$
  7. 값이 수렴할 때 까지 반복한다.

## 5.2 Least squares point-to-plane ICP (3D)

3D 역시 point-to-plane ICP의 대부분의 과정은 point-to-point ICP와 동일하며 법선 벡터(normal vector)를 구하는 과정과 최적화 수식이 약간 변경되었다는 점이 다르다. Least squares ICP를 수행하기 위해 3차원 포즈 상태 변수  $\mathbf{x} = [t_x, t_y, t_z, \mathbf{R}]^\top$ 을 선언한다. 3차원 회전 행렬  $\mathbf{R} \in SO(3)$ 과 이동 벡터  $\mathbf{t}$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= [t_x, t_y, t_z, \mathbf{R}]^\top \\ \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \in SO(3) \\ \mathbf{t} &= \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{62}$$

$i$ 번째 점에 대한 에러 함수  $\mathbf{e}_i$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{e}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{n}_{t+1,i}^\top (\mathbf{R}\mathbf{p}_{t,i} + \mathbf{t} - \mathbf{p}_{t+1,i}) \in \mathbb{R}\tag{63}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^* &= \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{e}_i(\mathbf{x})\|^2 \\ &= \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{n}_{t+1,i}^\top (\mathbf{R}\mathbf{p}_{t,i} + \mathbf{t} - \mathbf{p}_{t+1,i})\|^2\end{aligned}\tag{64}$$

- $\mathbf{n}_{t+1,i} = [n_{t+1,i}^x, n_{t+1,i}^y, n_{t+1,i}^z]^\top$ : target 점군에서  $i$ 번째 점의 법선 벡터(normal vector)
- $\mathbf{n}^\top(\cdot) = (\cdot)^\top \mathbf{n}$ 의 성질로 인해 법선 벡터는 식의 오른쪽과 왼쪽 어느 방향이든 위치할 수 있다.

기존 point-to-point의 최적화 수식에 법선 벡터  $\mathbf{n}_{t+1,i}$ 를 내적한 형태로 수식이 구성되어 있는 것을 알 수 있다. 이는 source 점과 target 점이 완벽히 정합(registration)되어 있는 경우 두 점 사이의 벡터가 법선벡터와 수직을 이루기 때문에 내적=0의 성질을 이용한 것으로 해석할 수 있다.

법선 벡터는 다양한 방법을 통해 구할 수 있는데 3D의 경우 점  $\mathbf{p} = [x, y, z]^\top$ 가 주어져 있을 때  $\mathbf{p}$ 로부터 가장 가까운 점 2개  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ 를 nearest neighbor(e.g., KD-tree)를 통해 구한 후 두 점을 외적하여  $\mathbf{n} = \mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2$ 를 구할 수 있다. 또한 주변의  $k$ 개의 점을 구한 다음 PCA를 통해 가장 작은 고유값(eigenvalue)에 대응하는 고유 벡터(eigenvector)가 법선벡터인 성질을 이용하여 구할 수 있다.

위 식은 비선형 최소제곱법의 형태를 띠므로 Gauss-Newton(GN) 또는 Levenberg-Marquardt(LM) 방법으로 풀 수 있다. GN 방법을 예로 들어 설명해보자. 미소한 변화량  $\Delta \mathbf{x}$ 에 대하여 에러 함수  $\mathbf{e}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x})$ 는 다음과 같이 테일러 근사를 통해 선형화할 수 있다.

$$\mathbf{e}_i(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) \approx \mathbf{e}_i(\mathbf{x}) + \mathbf{J}_i \Delta \mathbf{x}\tag{65}$$

$i$ 번째 3D 점에 대한 자코비안  $\mathbf{J}_i$ 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_i &= \frac{\partial \mathbf{e}_i(\mathbf{x})}{\partial [\mathbf{t}, \mathbf{R}]} \\
&= \frac{\partial \mathbf{e}_i(\mathbf{x})}{\partial [\mathbf{t}, \Delta \mathbf{w}]} \quad \leftarrow \text{so(3)-based optimization} \\
&= \frac{\partial}{\partial [\mathbf{t}, \Delta \mathbf{w}]} \left( \mathbf{n}_{t+1,i}^\top (\mathbf{R}\mathbf{p}_{t,i} + \mathbf{t} - \mathbf{p}_{t+1,i}) \right) \\
&= \begin{bmatrix} n_{t+1,i}^x & n_{t+1,i}^y & n_{t+1,i}^z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z'_{t,i} & -y'_{t,i} \\ 0 & 1 & 0 & -z'_{t,i} & 0 & x'_{t,i} \\ 0 & 0 & 1 & y'_{t,i} & -x'_{t,i} & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} n_{t+1,i}^x & n_{t+1,i}^y & n_{t+1,i}^z & n_{t+1,i}^x(-z'_{t,i} + y'_{t,i}) & n_{t+1,i}^y(z'_{t,i} - x'_{t,i}) & n_{t+1,i}^z(-y'_{t,i} + x'_{t,i}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 6}
\end{aligned} \tag{66}$$

- Lie theory-based optimization에 대한 내용은 여러와 자코비안 정리 포스팅을 참고하면 된다.

$\frac{\partial \mathbf{e}_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{t}}$ 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{e}_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{t}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}} \mathbf{n}_{t+1,i}^\top \mathbf{t} \\
&= \begin{bmatrix} n_{t+1,i}^x & n_{t+1,i}^y & n_{t+1,i}^z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} n_{t+1,i}^x & n_{t+1,i}^y & n_{t+1,i}^z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 3}
\end{aligned} \tag{67}$$

$\frac{\partial \mathbf{e}_i(\mathbf{x})}{\partial \Delta \mathbf{w}}$ 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{e}_i(\mathbf{x})}{\partial \Delta \mathbf{w}} &= -\mathbf{n}_{t+1,i}^\top [\mathbf{R}\mathbf{p}_{t,i} + \mathbf{t}]_\times \\
&= \begin{bmatrix} n_{t+1,i}^x & n_{t+1,i}^y & n_{t+1,i}^z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & z'_{t,i} & -y'_{t,i} \\ -z'_{t,i} & 0 & x'_{t,i} \\ y'_{t,i} & -x'_{t,i} & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} n_{t+1,i}^x(-z'_{t,i} + y'_{t,i}) & n_{t+1,i}^y(z'_{t,i} - x'_{t,i}) & n_{t+1,i}^z(-y'_{t,i} + x'_{t,i}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 3}
\end{aligned} \tag{68}$$

-  $\mathbf{R}\mathbf{p}_{t,i} + \mathbf{t} = [x'_{t,i} \ y'_{t,i} \ z'_{t,i}]^\top$

-  $[\mathbf{a}]_\times = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}_\times = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}$ : 반대칭행렬 연산자

모든 점들에 대한 여러 함수를 합치면 다음과 같이 점군에 대한 여러 함수가 된다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{x}) &= \sum_i^n \|\mathbf{e}_i(\mathbf{x})\|^2 \\
\mathbf{x} &= \arg \min_{\mathbf{x}} \mathbf{E}(\mathbf{x})
\end{aligned} \tag{69}$$

점군에 대한 자코비안  $\mathbf{J}_i$ 와  $\mathbf{H}_i, \mathbf{b}_i$ 도 다음과 같이 합쳐지게 된다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_i &= \mathbf{J}_i^\top \mathbf{J}_i \\
\mathbf{b}_i &= \mathbf{J}_i^\top \mathbf{e}_i
\end{aligned} \tag{70}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= \sum_i^n \mathbf{J}_i \\ \mathbf{H} &= \sum_i^n \mathbf{H}_i \\ \mathbf{b} &= \sum_i^n \mathbf{b}_i\end{aligned}\tag{71}$$

GN 방법의 해는 다음과 같이 구할 수 있다. 유도 과정에 대해 궁금한 독자들은 에러와 자코비안 정리 포스팅을 참고하면 된다.

$$\Delta \mathbf{x}^* = -\mathbf{H}^{-1} \mathbf{b}\tag{72}$$

미소 증분량의 최적해  $\Delta \mathbf{x}^*$ 를 위와 같이 구했으면 이를 원래 상태  $\mathbf{x}$ 에 업데이트 해준다. 업데이트를 통해 source 점군이 target 점군에 점진적으로 정합(registration)된다.

$$\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}^*\tag{73}$$

지금까지 설명한 과정을 source 점군이 더 이상 업데이트 되지 않을 때까지 반복한다. 이러한 과정을 Least squares ICP (3D ver.) 알고리즘이라고 부른다.

### Gauss-Newton method (point-to-plane ICP 3D)

1. Nearest neighborhood (e.g., KD-tree) 방법을 통해 source 점에 가장 가까운 target 점들을 correspondence로 설정한다.
2. target 점들의 법선 벡터(normal vector)  $\mathbf{n}$ 을 계산한다.
3. (63)과 같이 에러함수를 정의한다.  $\mathbf{e}(\mathbf{x})$
4. 테일러 전개로 근사 선형화하여 자코비안을 구한다.  $\mathbf{H} = \mathbf{J}^\top \mathbf{J}, \mathbf{b} = \mathbf{J}^\top \mathbf{e}$
5. 1차 미분 후 0으로 설정한다.  $\Delta \mathbf{x}^* = -\mathbf{H}^{-1} \mathbf{b}$
6. 이 때 값을 구하고 이를 에러함수에 대입한다.  $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}^*$
7. 값이 수렴할 때 까지 반복한다.

## 6 Generalized-ICP (GICP)

Generalized-ICP(GICP)는 기존 ICP 알고리즘들과 달리 **점을 확률 기반으로 모델링하여 점군 간 변환을 추정하는 알고리즈다**. GICP는 공분산 행렬의 형태에 따라 point-to-point, point-to-plane, plane-to-plane ICP 방법을 모두 포함할 수 있다. 이러한 이유로 인해 일반화된(generalized) ICP라는 이름이 붙여진 것으로 보인다. 하지만 가장 가까운 대응점 쌍(correspondence)를 구할 때는 여전히 확률 기반이 아닌 거리 기반(nearest neighbor, KD-tree)을 사용하여 KNN 알고리즘의 속도는 유지하였다.

GICP[8]는 대응점 쌍이 구해졌다고 가정한 상태에서 수식을 유도한다. Source 점군이  $\mathbf{p}_t = [\mathbf{p}_{t,1}, \mathbf{p}_{t,2}, \dots, \mathbf{p}_{t,n}]^\top$ 이고 target 점군이  $\mathbf{p}_{t+1} = [\mathbf{p}_{t+1,1}, \mathbf{p}_{t+1,2}, \dots, \mathbf{p}_{t+1,n}]^\top$ 와 같이 주어져 있을 때 **각각의 점들이 가우시안 확률 분포를 따르고 있다고 모델링한다**.

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_{t,i} &\sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{p}}_{t,i}, \mathbf{C}_{t,i}) \\ \mathbf{p}_{t+1,i} &\sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{p}}_{t+1,i}, \mathbf{C}_{t+1,i})\end{aligned}\tag{74}$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{p}}_t &= [\hat{\mathbf{p}}_{t,1}, \hat{\mathbf{p}}_{t,2}, \dots, \hat{\mathbf{p}}_{t,n}]^\top \\ \hat{\mathbf{p}}_{t+1} &= [\hat{\mathbf{p}}_{t+1,1}, \hat{\mathbf{p}}_{t+1,2}, \dots, \hat{\mathbf{p}}_{t+1,n}]^\top\end{aligned}\tag{75}$$

만약 두 점군이 노이즈 또는 outlier 없이 정확히 유 кл리디언 거리만큼 떨어져 있는 경우 두 점 사이에는 다음과 같은 변환 관계가 성립한다.

$$\hat{\mathbf{p}}_{t+1,i} = \mathbf{T}^* \hat{\mathbf{p}}_{t,i} \quad (76)$$

두 점 사이의 임의의 변환  $\mathbf{T}$ 에 대하여

$$d_i = \hat{\mathbf{p}}_{t+1,i} - \mathbf{T} \hat{\mathbf{p}}_{t,i} \quad (77)$$

와 같이 거리 함수  $d_i$ 를 정의할 수 있다. 이 때,  $\hat{\mathbf{p}}_{t,i}, \hat{\mathbf{p}}_{t+1,i}$  모두 확률 변수(random variable)이므로  $d_i$  또한 확률 분포를 따른다.

$$\begin{aligned} d_i |_{\mathbf{T}=\mathbf{T}^*} &\sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{p}}_{t+1,i} - \mathbf{T}^* \hat{\mathbf{p}}_{t,i}, \mathbf{C}_{t+1,i} + \mathbf{T}^* \mathbf{C}_{t,i} \mathbf{T}^{*\top}) \\ &= \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{C}_{t+1,i} + \mathbf{T}^* \mathbf{C}_{t,i} \mathbf{T}^{*\top}) \end{aligned} \quad (78)$$

- 두 점  $\hat{\mathbf{p}}_{t,i}, \hat{\mathbf{p}}_{t+1,i}$ 은 서로 독립적인(independent) 가우시안 분포를 따른다고 가정한다.

Tip

#### Linear transformation of gaussian random variable

확률 변수  $\mathbf{x}$ 가  $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}(\mathbf{a}, \mathbf{B})$ 와 같이 평균이  $\mathbf{a}$ 이고 공분산이  $\mathbf{B}$ 인 가우시안 분포를 따른다고 했을 때, 임의의 행렬  $\mathbf{C}$ 에 대하여  $\mathbf{y} = \mathbf{Cx}$ 를 만족하는  $\mathbf{y}$  또한 확률 변수이고  $\mathbf{y} \sim \mathcal{N}(\mathbf{Ca}, \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{C}^\top)$ 인 가우시안 분포를 따른다.

보다 자세한 내용은 확률 이론 포스팅을 참조하면 된다.

위 식은  $i$ 번째 source, target 점들의 거리에 대한 함수이므로 이를 모든 점군에 대하여 합하여  $d_i$ 에 대한 pdf  $p(d_i)$ 를 모두 곱하면 다음과 같은  $\mathbf{T}$ 에 대한 maximum likelihood estimation(MLE) 최적화 공식이 구해진다.

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \arg \max_{\mathbf{T}} \Pi_i p(d_i) \quad \leftarrow \text{likelihood} \\ &= \arg \max_{\mathbf{T}} \sum_i \log p(d_i) \quad \leftarrow \text{log-likelihood} \end{aligned} \quad (79)$$

$p(d_i)$ 는 다음과 같다.  $p(d_i)$ 의 평균은  $d_i |_{\mathbf{T}=\mathbf{T}^*} = 0$ 처럼 0이 되어 생략되었다.

$$\begin{aligned} p(d_i) &= \eta \cdot \exp \left( -\frac{1}{2} d_i^\top (\mathbf{C}_{t+1,i} + \mathbf{T} \mathbf{C}_{t,i} \mathbf{T}^\top)^{-1} d_i \right) \\ &\sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{C}_{t+1,i} + \mathbf{T} \mathbf{C}_{t,i} \mathbf{T}^\top) \end{aligned} \quad (80)$$

따라서 (79)은 다음과 같이 쓸 수 있다. 위 식의 log-likelihood에서  $(-)$  부호를 제거하고 나머지 식만 고려하여 argmax가 argmin으로 변경되었다( $=\text{negative log-likelihood}$ ) .

$$\mathbf{T} = \arg \min_{\mathbf{T}} \sum_i d_i^\top (\mathbf{C}_{t+1,i} + \mathbf{T} \mathbf{C}_{t,i} \mathbf{T}^\top)^{-1} d_i \quad (81)$$

## 6.1 Point-to-point ICP in GICP

GICP가 일반화된(generalized) ICP로 불리는 이유는 (81) 수식에서 공분산 행렬  $\mathbf{C}_{t,i}, \mathbf{C}_{t+1,i}$  값을 변형함으로써 point-to-point, point-to-plane, plane-to-plane ICP의 수식이 모두 도출되기 때문이다.

만약 공분산 행렬이 다음과 같은 경우 point-to-point ICP 수식이 유도된다.

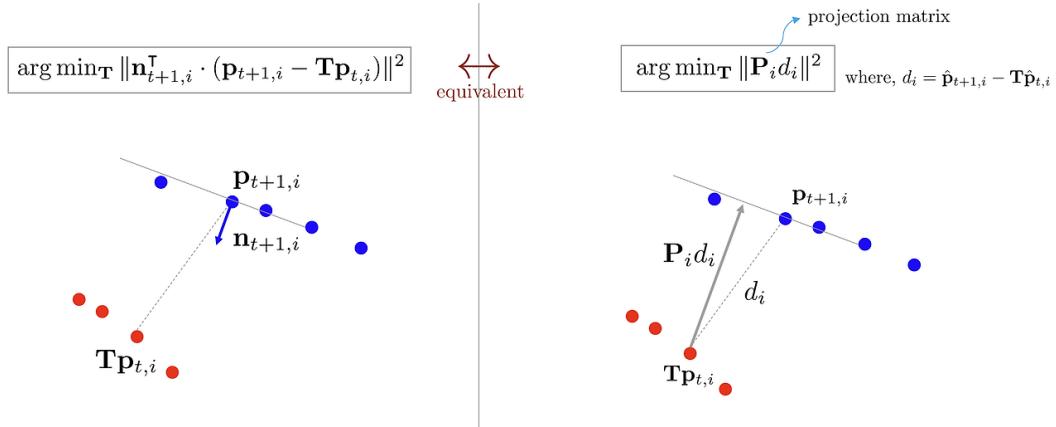
$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{t+1,i} &= \mathbf{I} \\ \mathbf{C}_{t,i} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (82)$$

위 식을 (81)에 대입하면 다음과 같은 식이 도출된다.

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \arg \min_{\mathbf{T}} \sum_i d_i^T d_i \\ &= \arg \min_{\mathbf{T}} \sum_i \|d_i\|^2\end{aligned}\tag{83}$$

이는 point-to-point ICP의 수식과 정확히 일치한다.

## 6.2 Point-to-plane ICP in GICP



앞서 설명한 point-to-plane ICP는 source 점과 target 평면 사이의 거리를 최소화하는 알고리즘이었다. 따라서 target 평면의 법선 벡터  $\mathbf{n}_i$ 를 기준 수식에 내적하는 식으로 최적화 수식이 구성되었다. GICP에서는 관점을 약간 다르게하여 두 점 사이의 거리 벡터  $d_i$ 에 target 평면 방향으로 프로젝션한 투영 행렬  $\mathbf{P}_i$ 를 곱한 식을 최적화하는 방식으로 해석한다.

$$\mathbf{T} = \arg \min_{\mathbf{T}} \sum_i \|\mathbf{P}_i d_i\|^2\tag{84}$$

위 식에서  $\mathbf{P}_i$ 는 source 점으로부터 target 평면의 법선 방향에 대한 프로젝션한 투영 행렬을 의미한다. 투영 행렬의 성질에 따라  $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i^2 = \mathbf{P}_i^\top$ 이 성립한다. 따라서 위 식은 다음과 같이 변형될 수 있다.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{P}_i d_i\|^2 &= (\mathbf{P}_i d_i)^\top (\mathbf{P}_i d_i) \\ &= d_i^\top \mathbf{P}_i d_i\end{aligned}\tag{85}$$

이에 따라 (84) 수식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \arg \min_{\mathbf{T}} \sum_i \|\mathbf{P}_i d_i\|^2 \\ &= \arg \min_{\mathbf{T}} \sum_i \|d_i^\top \mathbf{P}_i d_i\|^2\end{aligned}\tag{86}$$

이는 GICP 수식 (81)에서 공분산 행렬이 다음과 같은 경우에 해당한다.

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{t+1,i} &= \mathbf{P}_i^{-1} \\ \mathbf{C}_{t,i} &= \mathbf{0}\end{aligned}\tag{87}$$

**엄밀하게 말하면 투영 행렬  $\mathbf{P}_i$ 는 rank deficient이기 때문에 full rank가 아니므로 역행렬이 존재하지 않는다.** 그러나  $\mathbf{P}_i$ 를 역행렬이 존재하는  $\mathbf{Q}_i$ 로 근사화할 수는 있다.  $\mathbf{Q}_i$ 는  $\mathbf{P}_i$ 와 비슷하지만 full rank인 역행렬이 존재하는 행렬로 가정한다. 따라서 GICP 식에서  $\mathbf{Q}_i$ 가  $\mathbf{P}_i$ 에 가까울수록 GICP는 point-to-plane ICP로 수렴하게 된다.

Tip

### Projection Matrix $\mathbf{P}$

투영 행렬  $\mathbf{P}_i$ 가 rank deficient인 이유는 고차원 벡터 공간의 점(또는 벡터)를 저차원 부분 공간으로 투영(projection)하는 역할을 하기 때문이다. Point-to-plane 예시에서는 source 점  $\mathbf{T}\mathbf{p}_{t,i}$ 가 target 점  $\mathbf{p}_{t+1,i}$ 가 이루는 평면의 부분 공간으로 투영(projection)되는 것으로 해석할 수 있다. 투영 행렬에 대한 자세한 설명은 선형대수학 개념 정리 포스팅을 참조하면 된다.

## 6.3 Plane-to-plane ICP in GICP

마지막으로 GICP는 source 평면과 target 평면 사이의 거리를 최소화하는 **plane-to-plane ICP** 또한 수행할 수 있다. 이는 단순히 (87) 식에서  $\mathbf{C}_{t,i}$ 를  $\mathbf{0}$ 이 아닌 프로젝션 행렬  $\mathbf{P}'_i^{-1}$ 로 나타내면 된다고 생각할 수 있으나 그렇게 되면 두 투영 행렬들  $\mathbf{P}_i, \mathbf{P}'_i$ 가 rank deficient하여 singular한 값을 가지므로 이를 근사화한다고 해도 높은 정확도를 기대하기는 힘들다.

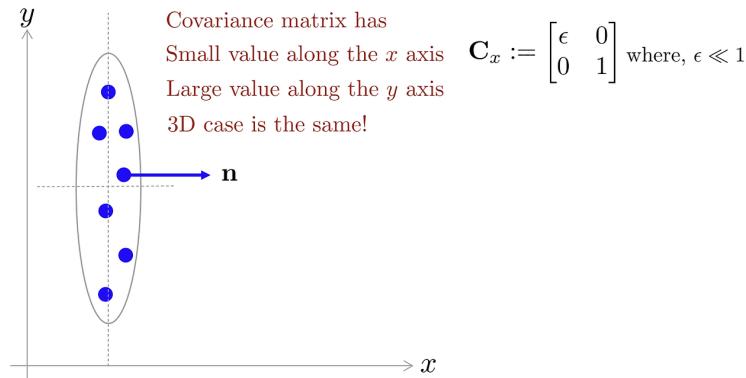
이에 따라 여러 가정을 통해 plane에 대한 공분산 행렬을 모델링한다.

1. 스캔 데이터는 실제 3차원 공간의 부드러운 다양체(2-manifold)를 샘플링 한 것이므로 모든 포인트에서 미분 가능하다(=법선 벡터를 구할 수 있다).
2. 서로 다른 시점(t, t+1)에서 샘플링한 데이터는 일반적으로 정확히 같은 점을 샘플링하지 않는다. 따라서 가장 가까운 대응점 쌍(nearest correspondence)는  $0^\circ$ 이 될 수 없다.
3. 샘플링된 점은 평면의 수평한 방향으로 높은 공분산을 가지고 수직한(법선벡터) 방향으로는 낮은 공분산을 가진다고 간주한다.

만약  $x$ 축으로 법선 벡터를 갖는 경우 위 가정에 따라 공분산  $\mathbf{C}_x$ 은 다음과 같이 모델링할 수 있다.

$$\mathbf{C}_x = \begin{bmatrix} \epsilon & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad (88)$$

-  $\epsilon$ : 법선 방향으로 공분산을 나타내는 작은 상수값 ( $\epsilon \ll 1$ )



$i$ 번째 source 점  $\mathbf{p}_{t,i}$ 와 target 점  $\mathbf{p}_{t+1,i}$ 의 법선 벡터를 각각  $\mu_i$ 와  $\nu_i$ 라고 하면 plane-to-plane의 공분산 행렬은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{t,i} &= \mathbf{R}_{\mu_i} \begin{bmatrix} \epsilon & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \mathbf{R}_{\mu_i}^T \\ \mathbf{C}_{t+1,i} &= \mathbf{R}_{\nu_i} \begin{bmatrix} \epsilon & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \mathbf{R}_{\nu_i}^T \end{aligned} \quad (89)$$

- $\mathbf{R}_{\mu_i}$ :  $x$ 축의 방향 벡터를  $\mu_i$ 로 회전해주는 행렬
- $\mathbf{R}_{\nu_i}$ :  $x$ 축의 방향 벡터를  $\nu_i$ 로 회전해주는 행렬

위 식을 (81)에 대입함으로써 plane-to-plane ICP를 수행할 수 있다. Plane-to-plane ICP는 법선 벡터의 방향이 다른 두 점이 대응점 쌍으로 주어진 경우 최종 합산된 공분산 행렬이 등방성을 가지게 되어 최적화 수식 기여하는 정도가 매우 작아진다. 즉, **outlier에 강건한 특성**을 지닌다. 다만 모든 스캔 점들에 대한 법선 벡터를 계산해야 하므로 **연산량이 많다**는 특징이 있다.

법선 벡터를 추정하는 방법은 다양하게 있으며 GICP 논문에서는 각 스캔한 점에 대해 가장 가까운 주변의 20개의 점을 KD-Tree를 통해 구한 후 공분산 행렬에 PCA를 사용하여 법선 벡터를 계산하였다. 이 때, 가장 작은 고유값(eigenvalue)에 해당하는 고유 벡터(eigenvector)가 법선 벡터에 해당한다.

## 6.4 Least squares GICP (3D)

GICP는 (81) 수식을 비선형 최소제곱법(GN, LM)을 반복적으로 최적해를 구한다. 앞서 설명한 point-to-point, point-to-plane ICP와 비교했을 때 **확률 기반 모델링으로 인한 공분산이 최적화 수식에 추가된다는 점을 제외하고 거의 모든 과정이 동일하다**. Least squares GICP를 수행하기 위해 3차원 포즈 상태 변수  $\mathbf{x} = [t_x, t_y, t_z, \mathbf{R}]^\top$ 을 선언한다. 3차원 회전 행렬  $\mathbf{R} \in SO(3)$ 과 이동 벡터  $\mathbf{t}$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= [t_x, t_y, t_z, \mathbf{R}]^\top \\ \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \in SO(3) \\ \mathbf{t} &= \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{90}$$

$i$ 번째 점에 대한 에러 함수  $\mathbf{e}_i$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{e}_i(\mathbf{x}) = (\hat{\mathbf{p}}_{t+1,i} - \mathbf{R}\hat{\mathbf{p}}_{t,i} - \mathbf{t})\tag{91}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^* &= \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{e}_i(\mathbf{x})\|_{\mathbf{M}^{-1}}^2 \\ &= \arg \min_{\mathbf{x}} \|(\hat{\mathbf{p}}_{t+1,i} - \mathbf{R}\hat{\mathbf{p}}_{t,i} - \mathbf{t})\|_{\mathbf{M}^{-1}}^2\end{aligned}\tag{92}$$

- $d_i = \hat{\mathbf{p}}_{t+1,i} - \mathbf{R}\hat{\mathbf{p}}_{t,i} - \mathbf{t}$ : 위 식에는  $d_i$ 를 풀어서 작성하였다.
- $\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{B}}^2 = \mathbf{a}^\top \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}$ : 마할라노비스 놈(Mahalanobis norm)
- $\mathbf{M} = (\mathbf{C}_{t+1,i} + \mathbf{R}\mathbf{C}_{t,i}\mathbf{R}^\top)^{-1}$ : 공분산의 역행렬
- $\mathbf{M}^{-1}$ : 공분산 행렬

**기존 ICP들과 달리 GICP는 확률 기반으로 모델링하기였기 때문에 mahalanobis norm  $\|\cdot\|_{\mathbf{M}^{-1}}^2$ 을 최적화해야 한다.** (81)에서 수식을 유도할 때는  $\mathbf{T} \in SE(3)$ 를 사용하였으나 실제 코드 상으로는  $\mathbf{R} \in SO(3)$ ,  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$ 를 사용하였다. 따라서 회전 행렬  $\mathbf{R}$ 에 대한 covariance propagation된다[9].

$$\mathbf{C}_{t+1,i} + \mathbf{T}\mathbf{C}_{t,i}\mathbf{T}^\top \rightarrow \mathbf{C}_{t+1,i} + \mathbf{R}\mathbf{C}_{t,i}\mathbf{R}^\top\tag{93}$$

Gauss-Newton 수식 유도는 **least-squares point-to-point ICP와 완전히 동일하다**.

$$\mathbf{e}_i(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) \approx \mathbf{e}_i(\mathbf{x}) + \mathbf{J}_i \Delta\mathbf{x}\tag{94}$$

$i$ 번째 점의 자코비안 또한 **least-squares point-to-point ICP와 완전히 동일하다**.

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_i &= \frac{\partial \mathbf{e}_i(\mathbf{x})}{\partial [\mathbf{t}, \mathbf{R}]} \\
&= \frac{\partial \mathbf{e}_i(\mathbf{x})}{\partial [\mathbf{t}, \Delta \mathbf{w}]} \quad \leftarrow \text{so(3)-based optimization} \\
&= \frac{\partial}{\partial [\mathbf{t}, \Delta \mathbf{w}]} \left( \mathbf{R} \mathbf{p}_{t,i} + \mathbf{t} - \mathbf{p}_{t+1,i} \right) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z'_{t,i} & -y'_{t,i} \\ 0 & 1 & 0 & -z'_{t,i} & 0 & x'_{t,i} \\ 0 & 0 & 1 & y'_{t,i} & -x'_{t,i} & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 6}
\end{aligned} \tag{95}$$

- Lie theory-based optimization에 대한 내용은 에러와 자코비안 정리 포스팅을 참고하면 된다.

모든 점들에 대한 에러 함수를 합치면 다음과 같이 점군에 대한 에러 함수가 된다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{x}) &= \sum_i^n \|\mathbf{e}_i(\mathbf{x})\|_{\mathbf{M}^{-1}}^2 \\
\mathbf{x} &= \arg \min_{\mathbf{x}} \mathbf{E}(\mathbf{x})
\end{aligned} \tag{96}$$

위 식을 자세하게 전개하면 (81) 수식이 된다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \arg \min_{\mathbf{x}} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \\
&= \arg \min_{\mathbf{x}} \sum_i d_i^T \mathbf{M} d_i
\end{aligned} \tag{97}$$

점군에 대한 자코비안  $\mathbf{J}_i$ 와  $\mathbf{H}_i, \mathbf{b}_i$ 도 다음과 같이 합쳐지게 된다. **GICP는 확률 기반 모델링이기 때문에 공분산의 역행렬  $\mathbf{M}$ 이 곱해진 것에 유의한다.**

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_i &= \mathbf{J}_i^T \mathbf{M} \mathbf{J}_i \\
\mathbf{b}_i &= \mathbf{J}_i^T \mathbf{M} \mathbf{e}_i
\end{aligned} \tag{98}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{J} &= \sum_i^n \mathbf{J}_i \\
\mathbf{H} &= \sum_i^n \mathbf{H}_i \\
\mathbf{b} &= \sum_i^n \mathbf{b}_i
\end{aligned} \tag{99}$$

GN 방법의 해는 다음과 같이 구할 수 있다. 유도 과정에 대해 궁금한 독자들은 에러와 자코비안 정리 포스팅을 참고하면 된다.

$$\Delta \mathbf{x}^* = -\mathbf{H}^{-1} \mathbf{b} \tag{100}$$

미소 증분량의 최적해  $\Delta \mathbf{x}^*$ 를 위와 같이 구했으면 이를 원래 상태 변수  $\mathbf{x}$ 에 업데이트 해준다. 업데이트를 통해 source 점군이 target 점군에 점진적으로 정합(registration)된다.

$$\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}^* \tag{101}$$

지금까지 설명한 과정을 source 점군이 더 이상 업데이트 되지 않을 때까지 반복한다. 이러한 과정을 Least squares GICP (3D ver.) 알고리즘이라고 부른다.

### Gauss-Newton method (GICP 3D)

- 
1. Nearest neighborhood (e.g., KD-tree) 방법을 통해 source 점에 가장 가까운 target 점들을 correspondence로 설정한다.
  2. 공분산  $\mathbf{C}_{t,i}, \mathbf{C}_{t+1,i}$ 의 초기값을 설정한다. (fast gicp[9]에서는 plane-to-plane 공분산이 기본값으로 설정되어 있음)
  3. (81)과 같이 에러함수를 정의한다.  $\mathbf{e}(\mathbf{x})$
  4. 테일러 전개로 근사 선형화하여 자코비안을 구한다.  $\mathbf{H} = \mathbf{J}^\top \mathbf{M} \mathbf{J}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{J}^\top \mathbf{M} \mathbf{e}$
  5. 1차 미분 후 0으로 설정한다.  $\Delta \mathbf{x}^* = -\mathbf{H}^{-1} \mathbf{b}$
  6. 이 때 값을 구하고 이를 에러함수에 대입한다.  $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}^*$
  7. 값이 수렴할 때 까지 반복한다.

## 7 References

- [1] (youtube) ICP & Point Cloud Registration - Part 2: Unknown Data Association (Cyrill Stachniss, 2021)
- [2] (blog) ICP (Iterative Closest Point) 와 Point Cloud Registration - Jinsol Kim님 블로그
- [3] (blog) Slam 3-2강 (ICP algorithm & Unknown Data Association) 요약 - taeyoung96님 블로그
- [4] (youtube) [AIX7063] Inclass 19 | Iterative Closest Point 강의
- [5] (paper) Chen, Yang, and Gérard Medioni. "Object modelling by registration of multiple range images." Image and vision computing 10.3 (1992): 145-155.
- [6] (paper) Rusinkiewicz, Szymon, and Marc Levoy. "Efficient variants of the ICP algorithm." Proceedings third international conference on 3-D digital imaging and modeling. IEEE, 2001.
- [7] (paper) Low, Kok-Lim. "Linear least-squares optimization for point-to-plane icp surface registration." Chapel Hill, University of North Carolina 4.10 (2004): 1-3.
- [8] (paper) Segal, Aleksandr, Dirk Haehnel, and Sebastian Thrun. "Generalized-icp." Robotics: science and systems. Vol. 2. No. 4. 2009.
- [9] (code) SMRT-AIST/fast gicp
- [10] (code) ICP Jupyter notebook

## 8 Revision log

- 1st: 2024-07-06