Notes on IMU Preintegration

Gyubeom Edward Im*

Contents

1 Introduction

2 Preliminaries

3 IMU model and motion integration

일반적으로 IMU 센서로부터 얻을 수 있는 정보에는 3축의 가속도와 3축의 각속도 정보가 포함된다. 가속도와 각속도의 측정값(measurement)에는 bias와 노이즈 성분이 포함되어 있기 때문에 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} {}_B\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{WB}(t) &= {}_B\boldsymbol{\omega}_{WB}(t) + \mathbf{b}^g(t) + \boldsymbol{\eta}^g(t) \\ {}_B\tilde{\mathbf{a}}(t) &= \mathbf{R}^{\intercal}_{WB}(t)({}_W\mathbf{a}(t) - {}_W\mathbf{g}) + \mathbf{b}^a(t) + \boldsymbol{\eta}^a(t) \end{aligned} \tag{1}$$

- ${}_B\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{WB}(t)$: 관측된(measured) 각속도
- ${}_B\tilde{\mathbf{a}}(t)$: 관측된(measured) 가속도
- ${}_B\boldsymbol{\omega}_{WB}(t)$: 실제(true) 각속도
- ${}_W\mathbf{a}(t)$: 실제(true) 가속도
- $\mathbf{b}^g(t), \mathbf{b}^a(t)$: 각속도와 가속도의 bias 값
- $\boldsymbol{\eta}^g(t), \boldsymbol{\eta}^a(t)$: 각속도와 가속도의 노이즈 값

기호 앞에 위치하는 B는 **"B(=IMU) 좌표계에서 바라본"** 것을 의미한다. IMU의 포즈는 $\{\mathbf{R}_{WB}, {}_W\mathbf{p}\}$에 의해 B에서 W로 변환되어 월드 좌표계 기준으로 표현된다. ${}_B\boldsymbol{\omega}_{WB} \in \mathbb{R}^3$는 B 좌표계에서 표현된 "W에서 본 B의" 순간적인 각속도(instantaneous angular velocity)를 의미한다. ${}_W\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$는 월드 좌표계에서 본 센서의 가속도를 의미하며 ${}_W\mathbf{g}$는 월드 좌표계에서 본 중력 벡터를 의미한다.

*blog: alida.tistory.com, email: criterion.im@gmail.com

IMU 측정값으로 부터 아래와 같은 **IMU Kinematic Model**을 사용하면 IMU의 모션을 추정할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}_{WB} &= \mathbf{R}_{WB}\ {}_B\boldsymbol{\omega}_{WB}^{\wedge} \\ {}_W\dot{\mathbf{v}} &= {}_W\mathbf{a} \\ {}_W\dot{\mathbf{p}} &= {}_W\mathbf{v} \end{aligned} \tag{2}$$

위 모델을 사용하면 시간에 따른 IMU의 포즈와 속도의 변화를 수식으로 나타낼 수 있다. $t + \Delta t$ 시간에 IMU 포즈와 속도는 다음과 같이 (2)를 적분하여 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{WB}(t+\Delta t) &= \mathbf{R}_{WB}(t) \cdot \mathrm{Exp}\left(\int_t^{t+\Delta t} {}_B\boldsymbol{\omega}_{WB}(\tau) d\tau \right) \\ {}_W\mathbf{v}(t+\Delta t) &= {}_W\mathbf{v}(t) + \int_t^{t+\Delta t} {}_W\mathbf{a}(\tau) d\tau \\ {}_W\mathbf{p}(t+\Delta t) &= {}_W\mathbf{p}(t) + \int_t^{t+\Delta t} {}_W\mathbf{v}(\tau) d\tau + \int\int_t^{t+\Delta t} {}_W\mathbf{a}(\tau) d\tau^2 \end{aligned} \tag{3}$$

만약 가속도 ${}_W\mathbf{a}$와 각속도 ${}_B\boldsymbol{\omega}_{WB}$가 시간 $[t, t+\Delta t]$ 동안 일정(constant)하다고 가정하면 위 식은 다음과 같이 조금 더 간결하게 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{WB}(t+\Delta t) &= \mathbf{R}_{WB}(t) \cdot \mathrm{Exp}({}_B\boldsymbol{\omega}_{WB}\Delta t) \\ {}_W\mathbf{v}(t+\Delta t) &= {}_W\mathbf{v}(t) + {}_W\mathbf{a}\Delta t \\ {}_W\mathbf{p}(t+\Delta t) &= {}_W\mathbf{p}(t) + {}_W\mathbf{v}\Delta t + {}_W\mathbf{a}\Delta t^2 \end{aligned} \tag{4}$$

(1)에서 보다시피 실제 IMU 가속도와 각속도 ${}_W\mathbf{a}$, ${}_B\boldsymbol{\omega}_{WB}$는 IMU 측정값 ${}_W\tilde{\mathbf{a}}$, ${}_B\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{WB}$에 대한 함수이므로 위 식을 다시 고쳐쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{WB}(t+\Delta t) &= \mathbf{R}_{WB}(t) \cdot \mathrm{Exp}(({}_B\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{WB}(t) - {}_B\mathbf{b}^g(t) - {}_B\boldsymbol{\eta}^{gd}(t))\Delta t) \\ {}_W\mathbf{v}(t+\Delta t) &= {}_W\mathbf{v}(t) + {}_W\mathbf{g}\Delta t + \mathbf{R}_{WB}(t)({}_W\tilde{\mathbf{a}}(t) - {}_B\mathbf{b}^a(t) - {}_B\boldsymbol{\eta}^{ad}(t))\Delta t \\ {}_W\mathbf{p}(t+\Delta t) &= {}_W\mathbf{p}(t) + {}_W\mathbf{v}(t)\Delta t + \frac{1}{2}{}_W\mathbf{g}\Delta t^2 + \frac{1}{2}\mathbf{R}_{WB}(t)({}_W\tilde{\mathbf{a}}(t) - {}_B\mathbf{b}^a(t) - {}_B\boldsymbol{\eta}^{ad}(t))\Delta t^2 \end{aligned} \tag{5}$$

아래 첨자로 붙은 좌표계는 자명하기 때문에 가독성을 위하여 이를 생략하여 나타낸다.

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbf{R}(t+\Delta t) = \mathbf{R}(t) \cdot \mathrm{Exp}((\tilde{\boldsymbol{\omega}}(t) - \mathbf{b}^g(t) - \boldsymbol{\eta}^{gd}(t))\Delta t) \\ &\mathbf{v}(t+\Delta t) = \mathbf{v}(t) + \mathbf{g}\Delta t + \mathbf{R}(t)(\tilde{\mathbf{a}}(t) - \mathbf{b}^a(t) - \boldsymbol{\eta}^{ad}(t))\Delta t \\ &\mathbf{p}(t+\Delta t) = \mathbf{p}(t) + \mathbf{v}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{g}\Delta t^2 + \frac{1}{2}\mathbf{R}(t)(\tilde{\mathbf{a}}(t) - \mathbf{b}^a(t) - \boldsymbol{\eta}^{ad}(t))\Delta t^2 \end{aligned}} \tag{6}$$

- η^{gd}, η^{ad}: 이산화 시간(discrete-time) 버전 각속도, 가속도 노이즈

이산화 시간(discrete-time) 버전 노이즈 η^{gd}, η^{ad}의 공분산은 연속 시간 노이즈 η^g, η^a와 샘플링 주기 Δt와 관련있기 때문에 이에 대한 함수로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(\eta^{gd}(t)) &= \frac{1}{\Delta t}\mathrm{Cov}(\eta^g(t)) \\ \mathrm{Cov}(\eta^{ad}(t)) &= \frac{1}{\Delta t}\mathrm{Cov}(\eta^a(t)) \end{aligned} \tag{7}$$

4 IMU preintegration on manifold

(6)을 자세히 보면 t 시간과 $t+\Delta t$ 시간의 사이의 상태 변수에 대한 관계식인 것을 알 수 있다. 따라서 (6)를 사용하면 매 IMU 측정값(measurement)가 들어올 때마다 다음 스텝의 상태 변수를 추정(estimation)할 수 있다.

두 키프레임 i, j가 주어졌을 때 두 키프레임 사이에 존재하는 모든 IMU 측정값들을 누적하면 하나의 측정값으로 합칠 수 있으며 이를 **preintegrated IMU 측정값(measurement)**이라고 정의한다. IMU는 카메라와 시간적으로

동기화되어 있다고 가정하고 임의의 이산 시간 k에 대한 측정값을 매 순간 얻는다고 할 때 (6)을 $k = i$부터 $k = j$까지 누적한 preintegration IMU 측정값은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R}_j &= \mathbf{R}_i \Pi_{k=i}^{j-1} \mathrm{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \mathbf{b}_k^g - \eta_k^{gd}\right)\Delta t\right) \\
\mathbf{v}_j &= \mathbf{v}_i + \mathbf{g}\Delta t_{ij} + \sum_{k=i}^{j-1} \mathbf{R}_k \left(\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_k^a - \eta_k^{ad}\right)\Delta t \\
\mathbf{p}_j &= \mathbf{p}_i + \sum_{k=i}^{j-1} \left[\mathbf{v}_k \Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{g}\Delta t^2 + \frac{1}{2}\mathbf{R}_k \left(\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_k^a - \eta_k^{ad}\right)\Delta t^2\right]
\end{aligned} \tag{8}
$$

- $\Delta t_{ij} \doteq \sum_{k=i}^{j-1} \Delta t$: 키프레임 i 부터 $j-1$까지 모든 Δt를 더한 값
- 가독성을 위해 $(\cdot)(t_i)$를 $(\cdot)_i$로 표기하였다

(8)를 사용하면 두 키프레임 i와 j 사이의 IMU 측정값들을 누적하여 둘 사이의 상대적인 모션을 추정할 수 있다. 하지만 최적화 과정에서 비선형 상태 변수 $\mathbf{R}_i$가 업데이트 될 때마다 $[i, j)$ 구간의 모든 비선형 상태 변수를 선형화(linearization)하는 과정에서 반복적인 연산을 수행해야 한다. 예를 들어 $\mathbf{R}_i$가 변하면 이에 따른 $\mathbf{R}_k, k = i, \cdots, j-1$ 또한 모두 다시 계산해야 한다.

이러한 비효율적인 계산을 피하기 위해 (8)을 바로 사용하는 것이 아닌 아래와 같은 **두 키프레임 i와 j의 상대적인 모션 증가량(relative motion increments)를 정의하여 t_i 시간의 포즈와 속도에 대해 독립적이 되도록 만든다.**

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\Delta\mathbf{R}_{ij} &\doteq \mathbf{R}_i^\intercal \mathbf{R}_j && = \Pi_{k=i}^{j-1} \mathrm{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \mathbf{b}_k^g - \eta_k^{gd}\right)\Delta t\right) \\
\Delta\mathbf{v}_{ij} &\doteq \mathbf{R}_i^\intercal (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g}\Delta t_{ij}) && = \sum_{k=i}^{j-1} \Delta\mathbf{R}_{ik} \left(\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_k^a - \eta_k^{ad}\right)\Delta t \\
\Delta\mathbf{p}_{ij} &\doteq \mathbf{R}_i^\intercal (\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i - \mathbf{v}_k \Delta t_{ij} - \frac{1}{2}\sum_{k=i}^{j-1} \mathbf{g}\Delta t^2) && = \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta\mathbf{v}_{ik}\Delta t + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{R}_{ik}\left(\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_k^a - \eta_k^{ad}\right)\Delta t^2\right]
\end{aligned}
} \tag{9}
$$

위 식에서 주목해야할 부분은 **$\Delta\mathbf{v}_{ij}$와 $\Delta\mathbf{p}_{ij}$는 실제 속도와 실제 위치의 물리적 변화를 의미하지 않는다는 사실이다.** 두 물리량은 (9) 식의 맨 오른쪽 부분을 t_i 시간의 상태 변수로부터 독립으로 만들기 위해 임의로 정의한 값이다. 식을 자세히 보면 맨 오른쪽 식은 중력 효과 또한 없는 것을 알 수 있다. (9)을 사용하면 t_i에 상관없이 IMU의 측정값으로부터 바로 두 키프레임 사이의 preintegration IMU 측정값을 구할 수 있다.

엄밀하게 말하면 (9) 에서 IMU의 bias 값은 매 순간마다 변화해야 하지만 계산의 편의를 위해 두 키프레임 i, j 사이의 시간은 충분히 짧은 시간이기 때문에 bias 값을 상수로 가정한다.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{b}_i^g &= \mathbf{b}_{i+1}^g = \cdots = \mathbf{b}_{j-1}^g \\
\mathbf{b}_i^a &= \mathbf{b}_{i+1}^a = \cdots = \mathbf{b}_{j-1}^a
\end{aligned} \tag{10}
$$

4.1 Preintegrated IMU measurements

(9)은 키프레임 i, j의 상태 변수를 나타낸 좌측 항과 이들의 측정값을 나타낸 우측 항으로 이루어져 있다.

5 References

[1] Forster, Christian, et al. "On-manifold preintegration for real-time visual–inertial odometry." IEEE Transactions on Robotics 33.1 (2016): 1-21.

6 Revision log

- 1st: 2024-11-27
- 2nd: 2024-11-30