Notes on On-manifold preintegration for real-time visual-inertial odometry

Gyubeom Edward Im*

Contents

*blog: alida.tistory.com, email: criterion.im@gmail.com

1 Introduction

2 Preliminaries

2.1 Notions of Riemannian geometry

2.2 Uncertainty description in SO(3)

2.3 Gauss-Newton method on manifold

3 Maximum a posteriori visual-inertial state estimation

3.1 The state

3.2 The measurements

3.3 Factor graphs and MAP estimation

4 IMU model and motion integration

일반적으로 IMU 센서로부터 얻을 수 있는 정보에는 3축의 가속도와 3축의 각속도 정보가 포함된다. 가속도와 각속도의 측정값(measurement)에는 bias와 노이즈 성분이 포함되어 있기 때문에 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} {}_B\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{WB}(t) &= {}_B\boldsymbol{\omega}_{WB}(t) + \mathbf{b}^g(t) + \boldsymbol{\eta}^g(t) \\ {}_B\tilde{\mathbf{a}}(t) &= \mathbf{R}_{WB}^\intercal(t)({}_W\mathbf{a}(t) - {}_W\mathbf{g}) + \mathbf{b}^a(t) + \boldsymbol{\eta}^a(t) \end{aligned} \tag{1}$$

- ${}_B\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{WB}(t)$: 관측된(measured) 각속도
- ${}_B\tilde{\mathbf{a}}(t)$: 관측된(measured) 가속도
- ${}_B\boldsymbol{\omega}_{WB}(t)$: 실제(true) 각속도
- ${}_W\mathbf{a}(t)$: 실제(true) 가속도
- $\mathbf{b}^g(t), \mathbf{b}^a(t)$: 각속도와 가속도의 bias 값
- $\boldsymbol{\eta}^g(t), \boldsymbol{\eta}^a(t)$: 각속도와 가속도의 노이즈 값

기호 앞에 위치하는 B는 **"B(=IMU) 좌표계에서 바라본"** 것을 의미한다. IMU의 포즈는 $\{\mathbf{R}_{WB}, {}_W\mathbf{p}\}$에 의해 B에서 W로 변환되어 월드 좌표계 기준으로 표현된다. ${}_B\boldsymbol{\omega}_{WB} \in \mathbb{R}^3$는 B 좌표계에서 표현된 "W에서 본 B의" 순간적인 각속도(instantaneous angular velocity)를 의미한다. ${}_W\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$는 월드 좌표계에서 본 센서의 가속도를 의미하며 ${}_W\mathbf{g}$는 월드 좌표계에서 본 중력 벡터를 의미한다.

IMU 측정값으로 부터 아래와 같은 **IMU Kinematic Model**을 사용하면 IMU의 모션을 추정할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}_{WB} &= \mathbf{R}_{WB}\ {}_B\boldsymbol{\omega}_{WB}^\wedge \\ {}_W\dot{\mathbf{v}} &= {}_W\mathbf{a} \\ {}_W\dot{\mathbf{p}} &= {}_W\mathbf{v} \end{aligned} \tag{2}$$

위 모델을 사용하면 시간에 따른 IMU의 포즈와 속도의 변화를 수식으로 나타낼 수 있다. $t + \Delta t$ 시간에 IMU 포즈와 속도는 다음과 같이 (2)를 적분하여 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{WB}(t+\Delta t) &= \mathbf{R}_{WB}(t) \cdot \mathrm{Exp}\left(\int_t^{t+\Delta t} {}_B\boldsymbol{\omega}_{WB}(\tau) d\tau \right) \\ {}_W\mathbf{v}(t+\Delta t) &= {}_W\mathbf{v}(t) + \int_t^{t+\Delta t} {}_W\mathbf{a}(\tau) d\tau \\ {}_W\mathbf{p}(t+\Delta t) &= {}_W\mathbf{p}(t) + \int_t^{t+\Delta t} {}_W\mathbf{v}(\tau) d\tau + \int\int_t^{t+\Delta t} {}_W\mathbf{a}(\tau) d\tau^2 \end{aligned} \tag{3}$$

만약 가속도 ${}_W\mathbf{a}$와 각속도 ${}_B\boldsymbol{\omega}_{WB}$가 시간 $[t, t+\Delta t]$ 동안 일정(constant)하다고 가정하면 위 식은 다음과 같이 조금 더 간결하게 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{WB}(t+\Delta t) &= \mathbf{R}_{WB}(t)\cdot \mathrm{Exp}({}_B\boldsymbol{\omega}_{WB}\Delta t) \\ {}_W\mathbf{v}(t+\Delta t) &= {}_W\mathbf{v}(t) + {}_W\mathbf{a}\Delta t \\ {}_W\mathbf{p}(t+\Delta t) &= {}_W\mathbf{p}(t) + {}_W\mathbf{v}\Delta t + {}_W\mathbf{a}\Delta t^2 \end{aligned} \tag{4}$$

(1)에서 보다시피 실제 IMU 가속도와 각속도 ${}_W\mathbf{a}$, ${}_B\boldsymbol{\omega}_{WB}$는 IMU 측정값 ${}_W\tilde{\mathbf{a}}$, ${}_B\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{WB}$에 대한 함수이므로 위 식을 다시 고쳐쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{WB}(t+\Delta t) &= \mathbf{R}_{WB}(t)\cdot \mathrm{Exp}\big(({}_B\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{WB}(t) - {}_B\mathbf{b}^g(t) - {}_B\boldsymbol{\eta}^{gd}(t))\Delta t\big) \\ {}_W\mathbf{v}(t+\Delta t) &= {}_W\mathbf{v}(t) + {}_W\mathbf{g}\Delta t + \mathbf{R}_{WB}(t)({}_W\tilde{\mathbf{a}}(t) - {}_B\mathbf{b}^a(t) - {}_B\boldsymbol{\eta}^{ad}(t))\Delta t \\ {}_W\mathbf{p}(t+\Delta t) &= {}_W\mathbf{p}(t) + {}_W\mathbf{v}(t)\Delta t + \frac{1}{2}{}_w\mathbf{g}\Delta t^2 + \frac{1}{2}\mathbf{R}_{WB}(t)({}_W\tilde{\mathbf{a}}(t) - {}_B\mathbf{b}^a(t) - {}_B\boldsymbol{\eta}^{ad}(t))\Delta t^2 \end{aligned} \tag{5}$$

아래 첨자로 붙은 좌표계는 자명하기 때문에 가독성을 위하여 이를 생략하여 나타낸다.

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbf{R}(t+\Delta t) = \mathbf{R}(t)\cdot \mathrm{Exp}\big((\tilde{\boldsymbol{\omega}}(t) - \mathbf{b}^g(t) - \boldsymbol{\eta}^{gd}(t))\Delta t\big) \\ &\mathbf{v}(t+\Delta t) = \mathbf{v}(t) + \mathbf{g}\Delta t + \mathbf{R}(t)(\tilde{\mathbf{a}}(t) - \mathbf{b}^a(t) - \boldsymbol{\eta}^{ad}(t))\Delta t \\ &\mathbf{p}(t+\Delta t) = \mathbf{p}(t) + \mathbf{v}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{g}\Delta t^2 + \frac{1}{2}\mathbf{R}(t)(\tilde{\mathbf{a}}(t) - \mathbf{b}^a(t) - \boldsymbol{\eta}^{ad}(t))\Delta t^2 \end{aligned}} \tag{6}$$

- $\boldsymbol{\eta}^{gd}, \boldsymbol{\eta}^{ad}$: 이산화 시간(discrete-time) 버전 각속도, 가속도 노이즈

이산화 시간(discrete-time) 버전 노이즈 $\boldsymbol{\eta}^{gd}, \boldsymbol{\eta}^{ad}$의 공분산은 연속 시간 노이즈 $\boldsymbol{\eta}^{g}, \boldsymbol{\eta}^{a}$와 샘플링 주기 Δt와 관련있기 때문에 이에 대한 함수로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(\boldsymbol{\eta}^{gd}(t)) &= \frac{1}{\Delta t}\mathrm{Cov}(\boldsymbol{\eta}^{g}(t)) \\ \mathrm{Cov}(\boldsymbol{\eta}^{ad}(t)) &= \frac{1}{\Delta t}\mathrm{Cov}(\boldsymbol{\eta}^{a}(t)) \end{aligned} \tag{7}$$

5 IMU preintegration on manifold

(6)을 자세히 보면 t 시간과 $t+\Delta t$ 시간의 사이의 상태 변수에 대한 관계식인 것을 알 수 있다. 따라서 (6)를 사용하면 매 IMU 측정값(measurement)가 들어올 때마다 다음 스텝의 상태 변수를 추정(estimation)할 수 있다.

두 키프레임 i, j가 주어졌을 때 두 키프레임 사이에 존재하는 모든 IMU 측정값들을 누적하면 하나의 측정값으로 합칠 수 있으며 이를 **preintegrated IMU 측정값(measurement)**이라고 정의한다. IMU는 카메라와 시간적으로 동기화되어 있다고 가정하고 임의의 이산 시간 k에 대한 측정값을 매 순간 얻는다고 할 때 (6)을 $k=i$부터 $k=j$까지 누적한 preintegration IMU 측정값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_j &= \mathbf{R}_i \Pi_{k=i}^{j-1}\mathrm{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \mathbf{b}_k^g - \boldsymbol{\eta}_k^{gd}\right)\Delta t\right) \\ \mathbf{v}_j &= \mathbf{v}_i + \mathbf{g}\Delta t_{ij} + \sum_{k=i}^{j-1}\mathbf{R}_k\left(\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_k^a - \boldsymbol{\eta}_k^{ad}\right)\Delta t \\ \mathbf{p}_j &= \mathbf{p}_i + \sum_{k=i}^{j-1}\left[\mathbf{v}_k\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{g}\Delta t^2 + \frac{1}{2}\mathbf{R}_k\left(\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_k^a - \boldsymbol{\eta}_k^{ad}\right)\Delta t^2\right] \end{aligned} \tag{8}$$

- $\Delta t_{ij} \doteq \sum_{k=i}^{j-1}\Delta t$: 키프레임 i 부터 $j-1$까지 모든 Δt를 더한 값
- 가독성을 위해 $(\cdot)(t_i)$를 $(\cdot)_i$로 표기하였다

(8)를 사용하면 두 키프레임 i와 j 사이의 IMU 측정값들을 누적하여 둘 사이의 상대적인 모션을 추정할 수 있다. 하지만 최적화 과정에서 비선형 상태 변수 $\mathbf{R}_i$가 업데이트 될 때마다 $[i, j)$ 구간의 모든 비선형 상태 변수를 선형화

(linearization)하는 과정에서 반복적인 연산을 수행해야 한다. 예를 들어 $\mathbf{R}_i$가 변하면 이에 따른 $\mathbf{R}_k, k = i, \cdots, j-1$ 또한 모두 다시 계산해야 한다.

이러한 비효율적인 계산을 피하기 위해 (8)을 바로 사용하는 것이 아닌 아래와 같은 **두 키프레임 i와 j의 상대적인 모션 증가량(relative motion increments)를 정의하여 t_i 시간의 포즈와 속도에 대해 독립적이 되도록 만든다.**

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta\mathbf{R}_{ij} &\doteq \mathbf{R}_i^\intercal \mathbf{R}_j & &= \Pi_{k=i}^{j-1}\mathrm{Exp}\Big(\Big(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \mathbf{b}_k^g - \boldsymbol{\eta}_k^{gd}\Big)\Delta t\Big) \\ \Delta\mathbf{v}_{ij} &\doteq \mathbf{R}_i^\intercal(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g}\Delta t_{ij}) & &= \sum_{k=i}^{j-1}\Delta\mathbf{R}_{ik}\Big(\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_k^a - \boldsymbol{\eta}_k^{ad}\Big)\Delta t \\ \Delta\mathbf{p}_{ij} &\doteq \mathbf{R}_i^\intercal(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i - \mathbf{v}_k\Delta t_{ij} - \frac{1}{2}\sum_{k=i}^{j-1}\mathbf{g}\Delta t^2) & &= \sum_{k=i}^{j-1}\Big[\Delta\mathbf{v}_{ik}\Delta t + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{R}_{ik}\Big(\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_k^a - \boldsymbol{\eta}_k^{ad}\Big)\Delta t^2\Big] \end{aligned}} \tag{9}$$

위 식에서 주목해야할 부분은 **$\Delta\mathbf{v}_{ij}$와 $\Delta\mathbf{p}_{ij}$는 실제 속도와 실제 위치의 물리적 변화를 의미하지 않는다는 사실이다.** 두 물리량은 (9) 식의 맨 오른쪽 부분을 t_i 시간의 상태 변수로부터 독립으로 만들기 위해 임의로 정의한 값이다. 식을 자세히 보면 맨 오른쪽 식은 중력 효과 또한 없는 것을 알 수 있다. (9)을 사용하면 t_i에 상관없이 IMU의 측정값으로부터 바로 두 키프레임 사이의 preintegration IMU 측정값을 구할 수 있다.

엄밀하게 말하면 (9) 에서 IMU의 bias 값은 매 순간마다 변화해야 하지만 계산의 편의를 위해 두 키프레임 i, j 사이의 시간은 충분히 짧은 시간이기 때문에 bias 값을 상수로 가정한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_i^g &= \mathbf{b}_{i+1}^g = \cdots = \mathbf{b}_{j-1}^g \\ \mathbf{b}_i^a &= \mathbf{b}_{i+1}^a = \cdots = \mathbf{b}_{j-1}^a \end{aligned} \tag{10}$$

5.1 Preintegrated IMU measurements

(9)은 키프레임 i, j의 상태 변수를 나타낸 좌측 항과 이들의 측정값을 나타낸 우측 항으로 이루어져 있기 때문에 이미 하나의 측정 모델(measurement model)이라고 볼 수 있다. 하지만 **(9)는 수식 안에 측정 노이즈(η)들이 복잡하게 섞여 있기 때문에 하나의 깔끔한 MAP 추정 문제로 수식화하기 어려운 단점이 있다.** MAP 추정을 하려면 각 상태변수들을 깔끔한 negative log-likelihood 형태로 변환할 수 있어야 하기 때문에 노이즈항들을 분리할 필요가 있다. 따라서 노이즈항을 분리하기 위한 여러 수학적 테크닉들을 사용할 것이다. 그리고 t_i 시간에서 bias 값은 이미 알고 있다고 가정하고 수식을 유도한다.

우선 $\Delta\mathbf{R}_{ij}$부터 노이즈항을 분리해보자. Preliminaries 섹션에서 언급한 여러 수학적 테크닉들을 사용하여 노이즈항을 맨 뒤로 옮길 수 있다.

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{R}_{ij} &= \Pi_{k=i}^{j-1}\Big[\mathrm{Exp}((\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \mathbf{b}_i^g)\Delta t)\cdot\mathrm{Exp}\Big(-\mathbf{J}_r^k\boldsymbol{\eta}_k^{gd}\Delta t\Big)\Big] \\ &= \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}\cdot\Pi_{k=i}^{j-1}\mathrm{Exp}\Big(-\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^\intercal\mathbf{J}_r^k\boldsymbol{\eta}_k^{gd}\Delta t\Big) \\ &\doteq \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}\cdot(-\delta\boldsymbol{\phi}_{ij}) \end{aligned} \tag{11}$$

- $\mathbf{J}_r^k \doteq \mathbf{J}_r^k((\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \mathbf{b}_i^g)\Delta t)$를 단순화하여 표기
- $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij} \doteq \Pi_{k=i}^{j-1}\mathrm{Exp}((\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \mathbf{b}_i^g)\Delta t)$: preintegrated된 상대 회전량
- $\delta\boldsymbol{\phi}_{ij}$: preintegrated된 상대 회전량의 노이즈

다음으로 (11)를 (9)의 $\Delta\mathbf{v}_{ij}$에 대입한 후 작은 회전량에 대해 $\mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\phi}_{ij}) \approx \mathbf{I} + \delta\boldsymbol{\phi}_{ij}^\wedge$ 근사를 적용하면 아래 식과

같다.

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{v}_{ij} &= \sum_{k=i}^{j-1}\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}(\mathbf{I}-\delta\boldsymbol{\phi}_{ij})(\tilde{\mathbf{a}}_k-\mathbf{b}_i^a)\Delta t - \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}\boldsymbol{\eta}_k^{ad}\Delta t \\ &= \Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij} + \sum_{k=i}^{j-1}\Big[\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}(\tilde{\mathbf{a}}_k-\mathbf{b}_i^a)^\wedge\delta\boldsymbol{\phi}_{ij}\Delta t - \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}\boldsymbol{\eta}_k^{ad}\Delta t\Big] \\ &\doteq \Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij} - \delta\mathbf{v}_{ij}\end{aligned} \tag{12}$$

- $\delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij} \doteq \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}(\tilde{\mathbf{a}}_k-\mathbf{b}_i^a)\Delta t$: preintegrated된 상대 속도
- $\delta\mathbf{v}_{ij}$: preintegrated된 상대 속도의 노이즈

유사하게 (11)와 (12)을 (9)의 $\Delta\mathbf{p}_{ij}$에 대입한 후 작은 회전량의 근사식을 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{p}_{ij} &= \sum_{k=i}^{j-1}\Big[(\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ik}-\delta\mathbf{v}_{ik})\Delta t + \frac{1}{2}\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}(\mathbf{I}-\delta\boldsymbol{\phi}_{ik}^\wedge)(\tilde{\mathbf{a}}_k-\mathbf{b}_i^a)\Delta t^2 - \frac{1}{2}\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}\boldsymbol{\eta}_k^{ad}\Delta t^2\Big] \\ &= \Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij} + \sum_{k=i}^{j-1}\Big[-\delta\mathbf{v}_{ik}\Delta t + \frac{1}{2}\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}(\tilde{\mathbf{a}}_k-\mathbf{b}_i^a)\Delta t^2 - \frac{1}{2}\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}\boldsymbol{\eta}_k^{ad}\Delta t^2\Big] \\ &\doteq \Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij} - \delta\mathbf{p}_{ij}\end{aligned} \tag{13}$$

- $\delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij}$: preintegrated된 상대 위치
- $\delta\mathbf{p}_{ij}$: preintegrated된 상대 위치의 노이즈

지금까지 유도한 (11), (12), (13)을 원래 식 (9)에 대입하면 다음과 같은 preintegrated 측정 모델이 나온다.

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij} &= \mathbf{R}_i^\intercal\mathbf{R}_j\mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\phi}_{ij}) \\ \Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij} &= \mathbf{R}_i^\intercal(\mathbf{v}_j-\mathbf{v}_i-\mathbf{g}\Delta t_{ij}) + \delta\mathbf{v}_{ij} \\ \Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij} &= \mathbf{R}_i^\intercal\Big(\mathbf{p}_j-\mathbf{p}_i-\mathbf{v}_i\Delta t_{ij}-\frac{1}{2}\mathbf{g}\Delta t_{ij}^2\Big) + \delta\mathbf{p}_{ij}\end{aligned}} \tag{14}$$

- $\mathrm{Exp}(-\delta\boldsymbol{\phi}_{ij})^\intercal = \mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\phi}_{ij})$가 적용되었다
- $[\delta\boldsymbol{\phi}_{ij}^\intercal, \delta\mathbf{v}_{ij}^\intercal, \delta\mathbf{p}_{ij}^\intercal]^\intercal$: 랜덤 노이즈 벡터

이전 식 (9)은 상태와 노이즈항이 복잡하게 섞여 있었던 반면에 (14)은 상태와 랜덤 노이즈항이 서로 깔끔하게 분리된 것을 볼 수 있다.

랜덤 노이즈가 평균이 0인 가우시안 분포를 따른다고 가정하면 (측정=상태+가우시안 노이즈) 형태로 분리된 꼴이므로 MAP 추정에서 결론적으로 풀고자하는 negative log-likelihood의 수식이 2차식 $\mathbf{r}^\intercal\Sigma^{-1}\mathbf{r}$ 형태로 깔끔하게 계산되기 때문에 이를 활용한 최적화 구현이 비교적 단순해진다. 그리고 회전, 속도, 위치에 대한 노이즈를 하나의 9차원 벡터와 공분산으로 다룰 수 있어 코드, 이론, 디버깅 또한 매우 통일성 있게 정돈된다.

5.2 Noise propagation

이번 섹션에서는 앞서 구한 랜덤 노이즈 벡터 $[\delta\boldsymbol{\phi}_{ij}^\intercal, \delta\mathbf{v}_{ij}^\intercal, \delta\mathbf{p}_{ij}^\intercal]^\intercal$의 특성에 대해 살펴본다. **앞서 이 노이즈 벡터를 평균이 0인 가우시안 노이즈로 가정하면 다루기 편리하다고 하였지만 공분산을 정확히 모델링하는 것은 매우 중요하다.** 공분산의 역행렬은 MAP 최적화에서 각 항의 가중치로 직접 들어가기 때문이다. 그래서 해당 섹션에서는 preintegrated된 측정값의 공분산 $\boldsymbol{\Sigma}_{ij}$을 유도하는 과정에 대해 자세히 설명한다.

$$\boldsymbol{\eta}_{ij}^\Delta \doteq [\delta\boldsymbol{\phi}_{ij}^\intercal, \delta\mathbf{v}_{ij}^\intercal, \delta\mathbf{p}_{ij}^\intercal]^\intercal \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}_{9\times1}, \boldsymbol{\Sigma}_{ij}) \tag{15}$$

먼저 $\delta\boldsymbol{\phi}_{ij}$를 고려해보자. (11)를 보면 다음과 같이 정의되어 있다.

$$\mathrm{Exp}(-\delta\boldsymbol{\phi}_{ij}) \doteq \Pi_{k=i}^{j-1}\mathrm{Exp}\Big(-\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^{\intercal}\mathbf{J}_r^k\boldsymbol{\eta}_k^{gd}\Delta t\Big) \tag{16}$$

양변에 logarithm mapping $\mathrm{Log}(\cdot)$을 취하면 다음과 같다.

$$\delta\boldsymbol{\phi}_{ij} = -\mathrm{Log}\Big(\Pi_{k=i}^{j-1}\mathrm{Exp}\Big(-\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^{\intercal}\mathbf{J}_r^k\boldsymbol{\eta}_k^{gd}\Delta t\Big)\Big) \tag{17}$$

우측항에 logarithm mapping의 1차 근사를 적용하면 다음과 같다. 이 때, $\boldsymbol{\eta}_k^{gd}$와 $\delta\boldsymbol{\phi}_{ij}$는 충분히 작은 값이기 때문에 우측 자코비안(right jacobian) $\mathbf{J}_r$은 $\mathbf{I}$에 수렴한다.

$$\delta\boldsymbol{\phi}_{ij} \simeq \sum_{k=i}^{j-1}\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^{\intercal}\mathbf{J}_r^k\boldsymbol{\eta}_k^{gd}\Delta t \tag{18}$$

- $\mathrm{Log}\Big(\mathrm{Exp}(\boldsymbol{\phi})\mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\phi})\Big) \approx \boldsymbol{\phi} + \mathbf{J}_r^{-1}(\boldsymbol{\phi})\delta\boldsymbol{\phi}$ 근사를 적용하였다

1차 근사항까지만 고려하면 상대 회전량에 대한 노이즈 $\delta\boldsymbol{\phi}_{ij}$는 평균이 0인 가우시안 노이즈 $\boldsymbol{\eta}_k^{gd}$의 선형 결합(linear combination)이므로 역시 평균이 0인 가우시안 분포를 지닌다. 이러한 성질이 좋은 이유는 회전에 대한 측정값 (14)이 정확히 (상태+노이즈) 꼴이 되기 때문이다. ($\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\mathrm{Exp}(\epsilon)$)

상대 회전량에 대한 노이즈를 위와 같이 정리하면 속도, 위치에 대한 노이즈 $\delta\mathbf{v}_{ij}, \delta\mathbf{p}_{ij}$는 이해하기 수월해진다. $\delta\mathbf{v}_{ij}, \delta\mathbf{p}_{ij}$ 식을 보면 $\boldsymbol{\eta}_k^{ad}$와 $\delta\boldsymbol{\phi}_{ij}$의 선형 결합으로 구성되어 있기 때문에 역시 평균이 0인 가우시안 분포가 된다.

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{v}_{ij} &\simeq \sum_{k=i}^{j-1}\Big[-\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}(\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_i^a)^\wedge\delta\boldsymbol{\phi}_{ik}\Delta t + \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}\boldsymbol{\eta}_k^{ad}\Delta t\Big] \\
\delta\mathbf{p}_{ij} &\simeq \sum_{k=i}^{j-1}\Big[\delta\mathbf{v}_{ik}\Delta t - \frac{1}{2}\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}(\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_i^a)^\wedge\delta\boldsymbol{\phi}_{ik}\Delta t^2 + \frac{1}{2}\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}\boldsymbol{\eta}_k^{ad}\Delta t^2\Big]
\end{aligned} \tag{19}$$

- 이러한 근사는 고차항을 제외한 1차 근사까지만 유효하다

(18), (19) 식을 보면 **preintegration 노이즈 η_{ij}^{Δ}는 IMU 측정 노이즈 $\eta_k^d \doteq [\eta_k^{ad}, \boldsymbol{\eta}_k^{gd}],\ k = 1, \cdots, j-1$의 선형 함수(linear function)으로 이루어져 있다고 볼 수 있다.** 이는 IMU 데이터시트로부터 얻은 $\boldsymbol{\eta}_k^d$의 공분산 값을 사용하여 선형 전파(linear propagation)을 통해 $\boldsymbol{\eta}_{ij}^{\Delta}$를 구할 수 있다는 것을 의미한다. 이러한 preintegrated 공분산을 $\boldsymbol{\Sigma}_{ij}$라고 부른다. Appendix IX-A를 보면 $\boldsymbol{\Sigma}_{ij}$를 계산하는 방법에 대해 자세히 설명한다. 이런 방법을 통해 새로운 IMU 측정값이 들어올 때마다 $\boldsymbol{\Sigma}_{ij}$를 매 번 새로 계산할 필요없이 이전 상태로부터 반복적(iterative)으로 상태를 업데이트할 수 있다.

5.3 Incorporating bias updates

이전 섹션에서 preintegrationd을 수행하는 동안의 bias $\{\bar{\mathbf{b}}_i^a, \bar{\mathbf{b}}_i^g\}$는 값을 이미 알고 있으며 변하지 않는다고 설명하였다. **하지만 대부분의 경우 최적화를 하는 동안 bias 추정값은 작게 나마 $\delta\mathrm{b}$만큼 변한다.** 한가지 방법은 bias가 바뀔 때마다 preintegration 결과를 처음부터 다시 적분하는 것이다. 그러나 이는 계산 비용이 크므로 비효율적이다. 대신, bias를 $\mathbf{b} \leftarrow \bar{\mathbf{b}} + \delta\mathbf{b}$로 업데이트한다고 하면 다음과 같이 1차 선형 전개로 preintegration 측정값을 빠르게 갱신할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}(\mathbf{b}_i^g) &\simeq \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}(\bar{\mathbf{b}}_i^g)\mathrm{Exp}\Big(\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}^g\Big) \\
\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}(\mathbf{b}_i^g, \mathbf{b}_i^a) &\simeq \Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}(\bar{\mathbf{b}}_i^g, \bar{\mathbf{b}}_i^a) + \frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}_i^g + \frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^a}\delta\mathbf{b}_i^a \\
\Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij}(\mathbf{b}_i^g, \mathbf{b}_i^a) &\simeq \Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij}(\bar{\mathbf{b}}_i^g, \bar{\mathbf{b}}_i^a) + \frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}_i^g + \frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^a}\delta\mathbf{b}_i^a
\end{aligned} \tag{20}$$

위 갱신 과정은 SO(3)에서 바로 동작한다(회전식에 $\mathrm{Exp}(\cdot)$가 있는 이유). 자코비안 행렬 $\{\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}, \frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}, \cdots\}$

은 preintegration 시점의 bias $\bar{\mathbf{b}}$에서 계산한 값이며 bias 값이 변함에 따라 측정값이 얼마나 변하는지를 설명한다. 이 자코비안 행렬들은 상수로 간주되며 preintegration 중 미리 계산해둘 수 있다.이 자코비안들의 유도는 VI-A 섹션에서 썼던 (큰 값 + 작은 섭동) 전개와 거의 동일하며 Appendix IX-B에 자세히 설명되어 있다.

5.4 Preintegrated IMU factors

(14)의 preintegration 측정 모델과 1차 근사에서 측정 노이즈가 평균이 0이고 공분산이 $\mathbf{\Sigma}_{ij}$인 가우시안 분포를 따른다는 점을 사용하면 residual $\mathbf{r}_{\mathcal{I}_{ij}} \doteq [\mathbf{r}^\intercal_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}, \mathbf{r}^\intercal_{\Delta\mathbf{v}_{ij}}, \mathbf{r}^\intercal_{\Delta\mathbf{p}_{ij}}]^\intercal \in \mathbb{R}^9$를 다음과 같이 쉽게 나타낼 수 있다.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}} &\doteq \mathrm{Log}\left(\left(\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}(\bar{\mathbf{b}}_i^g)\mathrm{Exp}\left(\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}^g\right)\right)^\intercal \mathbf{R}_i^\intercal\mathbf{R}_j\right) \\
\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{v}_{ij}} &\doteq \mathbf{R}_i^\intercal(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g}\Delta t_{ij}) - \left[\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}(\bar{\mathbf{b}}_i^g, \bar{\mathbf{b}}_i^a) + \frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}^g + \frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^a}\delta\mathbf{b}^a\right] \\
\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{p}_{ij}} &\doteq \mathbf{R}_i^\intercal(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i - \mathbf{v}_i\Delta t_{ij} - \frac{1}{2}\mathbf{g}\Delta t_{ij}^2) - \left[\Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij}(\bar{\mathbf{b}}_i^g, \bar{\mathbf{b}}_i^a) + \frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}^g + \frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^a}\delta\mathbf{b}^a\right]
\end{aligned} \tag{21}
$$

- 위 식에는 (20)에서 설명한 bias 갱신도 포함되어 있다

[2.3] 섹션에서 설명한 "lift-solve-retract" 방법론에 따르면 매 가우스-뉴턴 반복마다 (21)의 파라미터를 변경(re-parameterized)해야 한다. 여기서는 기존의 비선형 절대 변수 대신 선형의 국소 증분량으로 문제를 다시 쓰는 것을 말한다. 예를 들어, 회전 $\mathbf{R} \in SO(3)$은 비선형 공간에 존재하므로 $\mathbf{R} \rightarrow \boldsymbol{\theta}$와 같이 선형 공간의 변수로 바꾸는 작업을 말한다 ($\mathbf{R} \approx \mathbf{R}_k\mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\theta})$). 나머지 변수도 마찬가지로 국소 증분량으로 변경한다 ($\mathbf{v} \approx \mathbf{v}_k + \delta\mathbf{v},\ \mathbf{p} \approx \mathbf{p}_k + \delta\mathbf{p},\ \mathbf{b} \approx \mathbf{b}_k + \delta\mathbf{b}$).
그 다음 "solve" 단계에서는 현재 추정값 주변에서 이 비용 함수를 선형화(linearize)해야 한다. 선형화를 수월하게 하려면 위 residual들에 대한 자코비안의 해석적 표현을 미리 구해두는 것이 편리하며, 이는 Appendix IX-C에서 유도하였다.

5.5 Bias model

IMU 모델 식 (1)를 소개할 때 bias는 시간에 따라 천천히 변하는 값이라고 설명하였다. 따라서 우리는 bias를 브라운 운동(brownian motion)으로 모델링할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{b}}^g(t) &= \boldsymbol{\eta}^{bg}, \\
\dot{\mathbf{b}}^a(t) &= \boldsymbol{\eta}^{ba}
\end{aligned} \tag{22}
$$

연속된 두 키프레임 i와 j 사이의 구간 $[t_i, t_j]$에서 (22)을 적분하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{b}_j^g &= \mathbf{b}_i^g + \boldsymbol{\eta}^{bgd} \\
\mathbf{b}_j^a &= \mathbf{b}_i^a + \boldsymbol{\eta}^{bad}
\end{aligned} \tag{23}
$$

- $\mathbf{b}_i^g \doteq \mathbf{b}^g(t_i),\ \mathbf{b}_i^a \doteq \mathbf{b}^a(t_i)$로 단순화

$\boldsymbol{\eta}^{bgd}, \boldsymbol{\eta}^{bad}$는 bias 노이즈의 이산화(discrete) 버전으로써 평균이 0이고 공분산이 각각 $\mathbf{\Sigma}^{bgd} \doteq \Delta t_{ij}\mathrm{Cov}(\boldsymbol{\eta}^{bg}),\ \mathbf{\Sigma}^{bad} \doteq \Delta t_{ij}\mathrm{Cov}(\boldsymbol{\eta}^{ba})$이다.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\eta}^{bgd} &\sim \mathcal{N}(0, \mathbf{\Sigma}^{bgd}) \\
\boldsymbol{\eta}^{bad} &\sim \mathcal{N}(0, \mathbf{\Sigma}^{bad})
\end{aligned} \tag{24}
$$

모델 (23)은 팩터 그래프(factor graph)에 쉽게 포함될 수 있다. 모든 연속 키프레임 쌍에 대해 논문 식(26)에 추가되는 가산항으로 넣으면 된다.

$$
\|\mathbf{r}_{\mathbf{b}_{ij}}\|^2 \doteq \|\mathbf{b}_j^g - \mathbf{b}_i^g\|^2_{\mathbf{\Sigma}^{bgd}} + \|\mathbf{b}_j^a - \mathbf{b}_i^a\|^2_{\mathbf{\Sigma}^{bad}} \tag{25}
$$

6 Structureless vision factor

7 References

[1] Forster, Christian, et al. "On-manifold preintegration for real-time visual-inertial odometry." IEEE Transactions on Robotics 33.1 (2016): 1-21.

8 Revision log

- 1st: 2024-11-27
- 2nd: 2024-11-30
- 3rd: 2025-07-25 : Preintegrated IMU measurements 섹션 작성
- 4th: 2025-07-26 : Bias model 섹션까지 작성