

Errors and Jacobian Derivations for SLAM

Gyubeom Edward Im*

April 2, 2024

Contents

1	Introduction	2
2	Optimization formulation	3
2.1	Error derivation	3
2.2	Error function derivation	3
2.3	Non-linear least squares	4
3	Reprojection error	5
3.1	Jacobian of the reprojection error	7
3.1.1	Jacobian of camera pose	7
3.1.2	Lie theory-based SO(3) optimization	8
3.2	Jacobian of Map Point	10
3.3	Code implementations	11
4	Photometric error	11
4.1	Jacobian of the photometric error	13
4.1.1	Lie theory-based SE(3) optimization	14
4.2	Code implementations	16
5	Relative pose error	17
5.1	Jacobian of relative pose error	18
5.1.1	Lie theory-based SE(3) optimization	19
5.2	Code implementations	21
6	Line reprojection error	21
6.1	Line Transformation and projection	22
6.2	Line reprojection error	23
6.3	Orthonormal representation	23
6.4	Error function formulation	24
6.4.1	The analytical jacobian of 3d line	24
6.5	Code implementations	25
7	IMU measurement error	25
7.1	Error function formulation	27
7.2	Jacobian of IMU measurement error	30
7.2.1	Lie theory-based SO(3) optimization	30
7.3	Code implementations	31
8	Other jacobians	32
8.1	Jacobian of unit quaternion	32
8.1.1	Code Implementations	33
8.2	Jacobian of camera intrinsics	33
8.2.1	Code Implementations	35
8.3	Jacobian of inverse depth	36
8.3.1	Inverse depth parameterization	36
8.3.2	Jacobian of inverse depth	36

*blog: alida.tistory.com, email: criterion.im@gmail.com

8.3.3 Code Implementations	37
9 References	37
10 Revision log	37

1 Introduction

본 포스트에서는 SLAM에서 사용하는 다양한 에러에 대한 정의 및 이를 최적화하기 위해 사용하는 자코비안에 대해 설명한다. 본 포스트에서 다루는 에러는 다음과 같다...

- Reprojection error

$$\mathbf{e} = \mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^2 \quad (1)$$

- Photometric error

$$\mathbf{e} = \mathbf{I}_1(\mathbf{p}_1) - \mathbf{I}_2(\mathbf{p}_2) \in \mathbb{R}^1 \quad (2)$$

- Relative pose error (PGO)

$$\mathbf{e}_{ij} = \text{Log}(\mathbf{z}_{ij}^{-1} \hat{\mathbf{z}}_{ij}) \in \mathbb{R}^6 \quad (3)$$

- Line reprojection error

$$\mathbf{e}_l = \left[\frac{\mathbf{x}_s^\top l_c}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}}, \quad \frac{\mathbf{x}_s^\top l_c}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}} \right] \in \mathbb{R}^2 \quad (4)$$

- IMU measurement error :

$$\mathbf{e}_B = \begin{bmatrix} \delta \alpha_{b_{k+1}}^{b_k} \\ \delta \theta_{b_{k+1}}^{b_k} \\ \delta \beta_{b_{k+1}}^{b_k} \\ \delta \mathbf{b}_a \\ \delta \mathbf{b}_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_w^{b_k} (\mathbf{p}_{b_{k+1}}^w - \mathbf{p}_{b_k}^w - \mathbf{v}_{b_k}^w \Delta t_k + \frac{1}{2} \mathbf{g}^w \Delta t_k^2) - \hat{\alpha}_{b_{k+1}}^{b_k} \\ 2 \left[\left(\hat{\gamma}_{b_{k+1}}^{b_k} \right)^{-1} \otimes (\mathbf{q}_{b_k}^w)^{-1} \otimes \mathbf{q}_{b_{k+1}}^w \right]_{xyz} \\ \mathbf{R}_w^{b_k} (\mathbf{v}_{b_{k+1}}^w - \mathbf{v}_{b_k}^w + \mathbf{g}^w \Delta t_k) - \hat{\beta}_{b_{k+1}}^{b_k} \\ \mathbf{b}_{a_{k+1}} - \mathbf{b}_{a_k} \\ \mathbf{b}_{g_{k+1}} - \mathbf{b}_{g_k} \end{bmatrix} \quad (5)$$

카메라 포즈는 회전행렬 $\mathbf{R} \in SO(3)$ 로 표현하느냐 또는 변환행렬 $\mathbf{T} \in SE(3)$ 로 표현하느냐에 따라 서로 다른 자코비안이 유도된다. 두 가지 자코비안을 구하기 위해 reprojection 에러의 경우 $SO(3)$ 에 대한 자코비안을 유도하고 photometric 에러의 경우 $SE(3)$ 에 대한 자코비안을 유도한다. 또한 3차원 공간 상의 점 또한 $\mathbf{X} = [X, Y, Z, W]^\top$ 으로 표현하는 방법과 inverse depth ρ 로 표현하는 방법에 따라 자코비안이 달라진다. 두 경우에 대한 자코비안 유도 과정에 대해서도 설명한다.

본 포스트에서 다루는 자코비안은 다음과 같다.

- Camera pose ($SO(3)$ -based)

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{R}} \rightarrow \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \Delta \mathbf{w}} \quad (6)$$

- Camera pose ($SE(3)$ -based)

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{T}} \rightarrow \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \Delta \xi} \quad (7)$$

- Map point

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{X}} \quad (8)$$

- Relative pose ($SE(3)$ -based)

$$\frac{\partial \mathbf{e}_{ij}}{\partial \Delta \xi_i}, \frac{\partial \mathbf{e}_{ij}}{\partial \Delta \xi_j} \quad (9)$$

- 3D plücker line

$$\frac{\partial \mathbf{e}_l}{\partial l}, \frac{\partial l}{\partial \mathcal{L}_c}, \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \mathcal{L}_w}, \frac{\partial \mathcal{L}_w}{\partial \delta_\theta} \quad (10)$$

- Quaternion representation

$$\frac{\partial \mathbf{X}'}{\partial \mathbf{q}} \quad (11)$$

- Camera intrinsics

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial f_x}, \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial f_y}, \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial c_x}, \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial c_y} \quad (12)$$

- Inverse depth

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \rho} \quad (13)$$

- IMU error-state system kinematics :

$$\mathbf{J}_{b_{k+1}}^{b_k} \quad (14)$$

- IMU measurement :

$$\frac{\partial \mathbf{e}_B}{\partial [\mathbf{p}_{b_k}^w, \mathbf{q}_{b_k}^w]}, \frac{\partial \mathbf{e}_B}{\partial [\mathbf{v}_{b_k}^w, \mathbf{b}_{a_k}, \mathbf{b}_{g_k}]}, \frac{\partial \mathbf{e}_B}{\partial [\mathbf{p}_{b_{k+1}}^w, \mathbf{q}_{b_{k+1}}^w]}, \frac{\partial \mathbf{e}_B}{\partial [\mathbf{v}_{b_{k+1}}^w, \mathbf{b}_{a_{k+1}}, \mathbf{b}_{g_{k+1}}]} \quad (15)$$

2 Optimization formulation

2.1 Error derivation

SLAM에서 에러는 센서 데이터에 의한 관측값(measurement) \mathbf{z} 과 수학적 모델링에 의한 예측값(estimate) $\hat{\mathbf{z}}$ 의 차이로 정의한다.

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}) = \mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}(\mathbf{x}) \quad (16)$$

- \mathbf{x} : 모델의 상태 변수

위와 같이 관측값과 예측값의 차이를 에러로 정하고 에러를 최소로 하는 최적의 상태변수 \mathbf{x} 를 계산하는 것이 SLAM에서 최적화 문제가 된다. 이 때, 일반적인 경우 SLAM의 상태변수에는 회전과 관련된 비선형 항이 포함되어므로 비선형 최소제곱법(non-linear least squares) 방법이 주로 사용된다.

2.2 Error function derivation

일반적으로 다양한 센서 데이터가 들어오면 이에 대한 수십 수백개의 에러가 벡터 형태로 계산된다. 이 때, 에러가 정규분포를 따른다고 가정하고 에러 함수로 변환하는 작업을 수행한다.

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}) = \mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}} \sim \mathcal{N}(0, \Sigma) \quad (17)$$

Tip

에러 함수를 모델링하기 위한 확률 변수 \mathbf{x} 의 다변수 정규분포는 다음과 같다.

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu)^\top \Omega (\mathbf{x} - \mu)\right) \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma) \quad (18)$$

- $\Omega = \Sigma^{-1}$: information matrix (inverse of covariance matrix)

에러를 평균이 0이고 분산이 Σ 인 다변수 정규분포로 모델링할 수 있다. 해당 식에 log-likelihood를 적용한 $\ln p(\mathbf{e})$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \ln p(\mathbf{e}) &\propto -\frac{1}{2}(\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}})^\top \Omega (\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}) \\ &\propto -\frac{1}{2}\mathbf{e}^\top \Omega \mathbf{e} \end{aligned} \quad (19)$$

log-likelihood $\ln p(\mathbf{e})$ 가 최대가 되는 \mathbf{x}^* 를 찾으면 다변수 정규분포의 확률이 최대가 된다. 이를 Maximum Likelihood Estimation (MLE)라고 한다. $\ln p(\mathbf{e})$ 는 앞에 음수(-)가 있으므로 negative log-likelihood가 최소가되는 $\ln p(\mathbf{e})$ 를 찾으면 다음과 같다.

$$\mathbf{x}^* = \arg \max p(\mathbf{e}) = \arg \min \mathbf{e}^\top \Omega \mathbf{e} \quad (20)$$

단일 에러가 아닌 모든 에러를 더하여 표현하면 다음과 같고 이를 에러 함수 E 라고 한다. 실제 최적화 문제에서는 단일 에러 e_i 가 아닌 에러 함수 E 를 최소화하는 \mathbf{x}^* 를 찾는다.

$$\begin{aligned} E(\mathbf{x}) &= \sum_i \mathbf{e}_i^\top \Omega_i \mathbf{e}_i \\ \mathbf{x}^* &= \arg \min E(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (21)$$

2.3 Non-linear least squares

최종적으로 풀어야 하는 최적화 수식은 다음과 같다.

$$\mathbf{x}^* = \arg \min \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \arg \min \sum_i \mathbf{e}_i^T \Omega_i \mathbf{e}_i \quad (22)$$

위 공식에서 에러를 최소화하는 최적 파라미터 \mathbf{x}^* 를 찾아야 한다. 하지만 위 공식은 SLAM에서 일반적으로 회전에 대한 비선형 항을 포함하므로 closed-form solution이 존재하지 않는다. 따라서 비선형 최적화 방법 (Gauss-Newton (GN), Levenberg-Marquardt (LM))을 사용하여 문제를 풀어야 한다. 실제 구현된 SLAM 코드 중에서는 information matrix Ω_i 를 종종 \mathbf{I}_3 으로 설정하여 $\mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_i$ 에 대한 최적값을 찾기도 한다.

예를 들어, GN 방법을 사용해서 해당 문제를 푼다고 가정해보자. 문제를 푸는 순서는 다음과 같다.

- 에러함수를 정의한다
- 테일러 전개로 근사 선형화한다
- 1차 미분 후 0으로 설정한다.
- 이 때 값을 구하고 이를 에러함수에 대입한다
- 값이 수렴할 때 까지 반복한다.

에러함수 \mathbf{e} 를 자세히 나타내면 $\mathbf{e}(\mathbf{x})$ 와 같고 이는 로봇의 포즈 벡터 \mathbf{x} 에 따라 에러함수의 값이 달라지는 것을 의미 한다. GN 방법은 $\mathbf{e}(\mathbf{x})$ 에 반복적(iterative)으로 에러가 감소하는 방향으로 증분량 $\Delta\mathbf{x}$ 를 업데이트한다.

$$\mathbf{e}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})^T \Omega \mathbf{e}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) \quad (23)$$

이 때, $\mathbf{e}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})$ 를 \mathbf{x} 부근에서 1차 테일러 전개를 사용하면 위 식은 다음과 같이 근사된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})|_{\mathbf{x}} &\approx \mathbf{e}(\mathbf{x}) + \mathbf{J}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x} - \mathbf{x}) \\ &= \mathbf{e}(\mathbf{x}) + \mathbf{J}\Delta\mathbf{x} \end{aligned} \quad (24)$$

이 때, $\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ 이다. 이를 에러함수 전체에 적용하면 아래와 같다.

$$\mathbf{e}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})^T \Omega \mathbf{e}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) \approx (\mathbf{e} + \mathbf{J}\Delta\mathbf{x})^T \Omega (\mathbf{e} + \mathbf{J}\Delta\mathbf{x}) \quad (25)$$

위 식을 전개한 후 치환하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} &= \underbrace{\mathbf{e}^T \Omega \mathbf{e}}_{\mathbf{c}} + 2 \underbrace{\mathbf{e}^T \Omega \mathbf{J}}_{\mathbf{b}} \Delta\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}^T \underbrace{\mathbf{J}^T \Omega \mathbf{J}}_{\mathbf{H}} \Delta\mathbf{x} \\ &= \mathbf{c} + 2\mathbf{b}\Delta\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}^T \mathbf{H}\Delta\mathbf{x} \end{aligned} \quad (26)$$

위 전체 에러에 적용하면 다음과 같다.

$$\mathbf{E}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \sum_i \mathbf{e}_i^T \Omega_i \mathbf{e}_i = \mathbf{c} + 2\mathbf{b}\Delta\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}^T \mathbf{H}\Delta\mathbf{x} \quad (27)$$

$\mathbf{E}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})$ 은 $\Delta\mathbf{x}$ 에 대한 2차식(Quadratic) 형태이고 $\mathbf{H} = \mathbf{J}^T \Omega \mathbf{J}$ 는 positive definite 행렬이므로 $\mathbf{E}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})$ 를 1차 미분하여 0으로 설정한 값이 $\Delta\mathbf{x}$ 의 극소가 된다.

$$\frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})}{\partial \Delta\mathbf{x}} \approx 2\mathbf{b} + 2\mathbf{H}\Delta\mathbf{x} = 0 \quad (28)$$

이를 정리하면 다음과 같은 공식이 도출된다.

$$\mathbf{H}\Delta\mathbf{x} = -\mathbf{b} \quad (29)$$

이렇게 구한 $\Delta\mathbf{x} = -\mathbf{H}^{-1}\mathbf{b}$ 를 \mathbf{x} 에 업데이트해준다.

$$\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \Delta\mathbf{x} \quad (30)$$

지금까지 과정을 반복적(iterative)으로 수행하는 알고리즘을 Gauss-Newton 방법이라고 한다. LM 방법은 GN 방법과 비교했을 때 전체적인 프로세스는 동일하나 증분량을 구하는 공식에서 damping factor λ 항이 추가된다.

(GN) $\mathbf{H}\Delta\mathbf{x} = -\mathbf{b}$	(31)
(LM) $(\mathbf{H} + \lambda\mathbf{I})\Delta\mathbf{x} = -\mathbf{b}$	

3 Reprojection error

Reprojection 에러는 feature-based Visual SLAM에서 주로 사용되는 에러이다. 주로 feature-based method 기반의 visual odometry(VO) 또는 bundle adjustment(BA)를 수행할 때 사용된다. BA에 대한 자세한 내용은 [SLAM] Bundle Adjustment 개념 리뷰 포스트를 참조하면 된다.

NOMENCLATURE of reprojection error

- $\tilde{\mathbf{p}} = \pi_h(\cdot) : \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} X'/Z' \\ Y'/Z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ 1 \end{bmatrix}$

– 이미지 평면에 프로젝션하기 위해 3차원 공간 상의 점 \mathbf{X}' 를 non-homogeneous 변환한 점

- $\hat{\mathbf{p}} = \pi_k(\cdot) = \tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} f & 0 & c_x \\ 0 & f & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f\tilde{u} + c_x \\ f\tilde{v} + c_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$

– 렌즈 왜곡을 보정한 후 이미지 평면에 프로젝션한 점. 만약 왜곡 보정이 입력 단계에서 이미 수행된 경우 $\pi_k(\cdot) = \mathbf{K}(\cdot)$ 이 된다.

- $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} f & 0 & c_x \\ 0 & f & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$: 카메라 내부(intrinsic) 파라미터

- $\tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} f & 0 & c_x \\ 0 & f & c_y \end{bmatrix}$: $\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 로 프로젝션하기 위해 내부 파라미터의 마지막 행을 생략했다.

- $\mathcal{X} = [\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_m, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n]^T$: 모델의 상태변수

- m : 카메라 포즈의 개수

- n : 3차원 점의 개수

- $\mathcal{T}_i = [\mathbf{R}_i, \mathbf{t}_i]$

- $\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{e}_{ij}(\mathcal{X})$: 간략한 표기를 위해 \mathcal{X} 생략하기도 한다

- \mathbf{p}_{ij} : 관측된(observed) 특정점의 픽셀 좌표

- $\hat{\mathbf{p}}_{ij}$: 예측된(estimated) 특정점의 픽셀 좌표

- $\mathbf{T}_i \mathbf{X}_j$: Transformation, 3차원 점 \mathbf{X}_j 를 카메라 좌표계 $\{i\}$ 로 변환, $\left(\mathbf{T}_i \mathbf{X}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_i \mathbf{X}_j + \mathbf{t}_i \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 1} \right)$

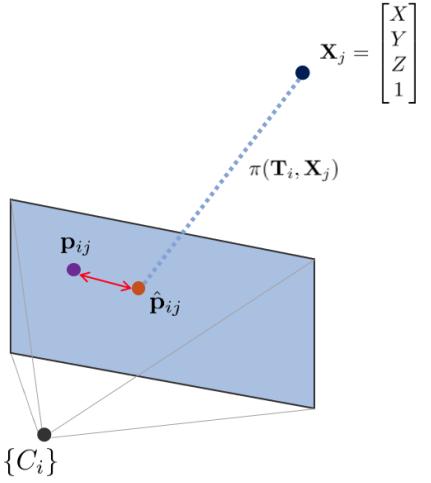
– $\mathbf{X}' = \mathbf{TX} = [X', Y', Z', 1]^T = [\tilde{\mathbf{X}}', 1]^T$

- \oplus : SO(3) 회전행렬 \mathbf{R} 과 3차원 벡터 \mathbf{t}, \mathbf{X} 를 한 번에 업데이트할 수 있는 연산자.

- $\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathcal{X}} = \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial [\mathcal{T}, \mathbf{X}]}$

- $\mathbf{w} = [w_x \ w_y \ w_z]^T$: 각속도

- $[\mathbf{w}]_\times = \begin{bmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{bmatrix}$: 각속도 \mathbf{w} 의 반대칭 행렬



i번째 핀홀카메라 $\{C_i\}$ 의 포즈 \mathbf{T}_i 와 j번째 월드 상의 한 점 \mathbf{X}_j 가 있을 때 \mathbf{X}_j 는 다음과 같은 변환을 통해 이미지 평면 상에 투영된다.

$$\text{projection model: } \hat{\mathbf{p}}_{ij} = \pi(\mathbf{T}_i, \mathbf{X}_j) \quad (32)$$

3차원 점	$\mathbf{T}_i \mathbf{X}_j$ Transformation	$\tilde{\mathbf{p}} = \pi_h(\cdot)$ Non-homogeneous	$\hat{\mathbf{p}} = \pi_k(\cdot)$ Undistort Project to Image Plane	
	$\mathbf{X}'_j = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_i \mathbf{X}_j + \mathbf{t}_i \\ 1 \end{bmatrix}$ $= [X'_j, Y'_j, Z'_j, 1]^\top$	$\tilde{\mathbf{p}}_{ij} = [X'_j/Z'_j, Y'_j/Z'_j, 1]^\top$ $= [\bar{u}_{ij}, \bar{v}_{ij}, 1]^\top$	$\begin{cases} \bar{u}_{ij} = \bar{u}_{ij}(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4) \\ \bar{v}_{ij} = \bar{v}_{ij}(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4) \end{cases}$ $\begin{cases} u_{ij} = f_x \bar{u}_{ij} + c_x \\ v_{ij} = f_y \bar{v}_{ij} + c_y \end{cases}$	$\hat{\mathbf{p}}_{ij} = [u_{ij}, v_{ij}]^\top$

위와 같이 카메라 내부/외부(intrinsic/extrinsic) 파라미터를 활용한 모델을 projection model이라고 한다. 이를 통한 reprojection 예러는 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{ij} &= \mathbf{p}_{ij} - \hat{\mathbf{p}}_{ij} \\ &= \mathbf{p}_{ij} - \pi(\mathbf{T}_i, \mathbf{X}_j) \\ &= \mathbf{p}_{ij} - \pi_k(\pi_h(\mathbf{T}_i \mathbf{X}_j)) \end{aligned} \quad (33)$$

모든 카메라 포즈, 3차원 점들에 대한 예러 함수는 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{E}(\mathcal{X}) = \sum_i \sum_j \|\mathbf{e}_{ij}\|^2 \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^* &= \arg \min_{\mathcal{X}^*} \mathbf{E}(\mathcal{X}) \\ &= \arg \min_{\mathcal{X}^*} \sum_i \sum_j \|\mathbf{e}_{ij}\|^2 \\ &= \arg \min_{\mathcal{X}^*} \sum_i \sum_j \mathbf{e}_{ij}^\top \mathbf{e}_{ij} \\ &= \arg \min_{\mathcal{X}^*} \sum_i \sum_j (\mathbf{p}_{ij} - \hat{\mathbf{p}}_{ij})^\top (\mathbf{p}_{ij} - \hat{\mathbf{p}}_{ij}) \end{aligned} \quad (35)$$

$\mathbf{E}(\mathcal{X}^*)$ 를 만족하는 $\|\mathbf{e}(\mathcal{X}^*)\|^2$ 를 non-linear least squares를 통해 반복적으로 계산할 수 있다. 작은 증분량 $\Delta \mathcal{X}$ 를 반복적으로 \mathcal{X} 에 업데이트함으로써 최적의 상태를 찾는다.

$$\arg \min_{\mathcal{X}^*} \mathbf{E}(\mathcal{X} + \Delta \mathcal{X}) = \arg \min_{\mathcal{X}^*} \sum_i \sum_j \|\mathbf{e}(\mathcal{X} + \Delta \mathcal{X})\|^2 \quad (36)$$

엄밀하게 말하면 상태 증분량 $\Delta \mathcal{X}$ 은 $\text{SO}(3)$ 회전행렬을 포함하므로 \oplus 연산자를 통해 기존 상태 \mathcal{X} 에 더해지는게 맞지만 표현의 편의를 위해 $+$ 연산자를 사용하였다.

$$\mathbf{e}(\mathcal{X} \oplus \Delta \mathcal{X}) \rightarrow \mathbf{e}(\mathcal{X} + \Delta \mathcal{X}) \quad (37)$$

위 식은 템일러 1차 근사를 통해 다음과 같이 표현이 가능하다.

$$\begin{aligned}\mathbf{e}(\mathcal{X} + \Delta\mathcal{X}) &\approx \mathbf{e}(\mathcal{X}) + \mathbf{J}\Delta\mathcal{X} \\ &= \mathbf{e}(\mathcal{X}) + \mathbf{J}_c\Delta\mathcal{T} + \mathbf{J}_p\Delta\mathbf{X} \\ &= \mathbf{e}(\mathcal{X}) + \frac{\partial\mathbf{e}}{\partial\mathcal{T}}\Delta\mathcal{T} + \frac{\partial\mathbf{e}}{\partial\mathbf{X}}\Delta\mathbf{X}\end{aligned}\quad (38)$$

$$\arg \min_{\mathcal{X}^*} \mathbf{E}(\mathcal{X} + \Delta\mathcal{X}) \approx \arg \min_{\mathcal{X}^*} \sum_i \sum_j \|\mathbf{e}(\mathcal{X}) + \mathbf{J}\Delta\mathcal{X}\|^2 \quad (39)$$

이를 미분하여 최적의 증분량 $\Delta\mathcal{X}^*$ 값을 구하면 다음과 같다. 자세한 유도 과정은 본 섹션에서는 생략한다. 유도 과정에 대해 자세히 알고 싶으면 이전 섹션을 참조하면 된다.

$$\begin{aligned}\mathbf{J}^\top \mathbf{J}\Delta\mathcal{X}^* &= -\mathbf{J}^\top \mathbf{e} \\ \mathbf{H}\Delta\mathcal{X}^* &= -\mathbf{b}\end{aligned}\quad (40)$$

위 식은 선형시스템 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 형태이므로 schur complement, cholesky decomposition과 같은 다양한 선형대수학 테크닉을 사용하여 $\Delta\mathcal{X}^*$ 를 구할 수 있다. 이 때, 기존 상태 \mathcal{X} 중 \mathbf{t}, \mathbf{X} 는 선형 벡터 공간에 존재하므로 오른쪽에서 더하는지 또는 왼쪽에서 더하는지에 따른 차이가 없지만 회전 행렬 \mathbf{R} 은 비선형 $SO(3)$ 군에 속하므로 오른쪽에 곱하느냐 왼쪽에 곱하느냐에 따라 각각 로컬 좌표계에서 본 포즈를 업데이트할 것인지(오른쪽) 전역 좌표계에서 본 포즈를 업데이트할 것인지(왼쪽) 달라지게 된다. Reprojection 에러는 전역 좌표계의 변환 행렬을 업데이트하므로 일반적으로 왼쪽 곱셈 방법을 사용한다.

$$\mathcal{X} \leftarrow \mathcal{X} \oplus \Delta\mathcal{X}^* \quad (41)$$

\mathcal{X} 는 $[\mathcal{T}, \mathbf{X}]$ 로 구성되어 있으므로 다음과 같이 풀어 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}\mathcal{T} &\leftarrow \mathcal{T} \oplus \Delta\mathcal{T}^* \\ \mathbf{X} &\leftarrow \mathbf{X} \oplus \Delta\mathbf{X}^*\end{aligned}\quad (42)$$

왼쪽 곱셈 \oplus 연산의 정의는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathbf{R} \oplus \Delta\mathbf{R}^* &= \Delta\mathbf{R}^* \mathbf{R} \\ &= \exp([\Delta\mathbf{w}^*]_\times) \mathbf{R} \quad \cdots \text{globally updated (left mult)} \\ \mathbf{t} \oplus \Delta\mathbf{t}^* &= \mathbf{t} + \Delta\mathbf{t}^* \\ \mathbf{X} \oplus \Delta\mathbf{X}^* &= \mathbf{X} + \Delta\mathbf{X}^*\end{aligned}\quad (43)$$

3.1 Jacobian of the reprojection error

3.1.1 Jacobian of camera pose

포즈에 대한 자코비안 \mathbf{J}_c 은 다음과 같이 분해할 수 있다.

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_c &= \frac{\partial\mathbf{e}}{\partial\mathcal{T}} = \frac{\partial}{\partial\mathcal{T}}(\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}) \\ &= \frac{\partial}{\partial\mathcal{T}}\left(\mathbf{p} - \pi_k(\pi_h(\mathbf{T}_i\mathbf{X}_j))\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial\mathcal{T}}\left(-\pi_k(\pi_h(\mathbf{T}_i\mathbf{X}_j))\right)\end{aligned}\quad (44)$$

Chain rule을 사용하여 위 식을 정리하면 다음과 같다. 이 때, 편의를 위해 $\mathbf{T}_i\mathbf{X}_j \rightarrow \mathbf{X}'$ 로 표기한다.

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_c &= \frac{\partial\hat{\mathbf{p}}}{\partial\tilde{\mathbf{p}}} \frac{\partial\tilde{\mathbf{p}}}{\partial\mathbf{X}'} \frac{\partial\mathbf{X}'}{\partial[\mathbf{w}, \mathbf{t}]} \\ &= \mathbb{R}^{2 \times 3} \cdot \mathbb{R}^{3 \times 4} \cdot \mathbb{R}^{4 \times 6} = \mathbb{R}^{2 \times 6}\end{aligned}\quad (45)$$

이 때, 회전행렬 \mathbf{R} 에 대한 자코비안 $\frac{\partial\mathbf{X}'}{\partial\mathbf{R}}$ 을 구하는 것이 아닌 각속도 \mathbf{w} 에 대한 자코비안 $\frac{\partial\mathbf{X}'}{\partial\mathbf{w}}$ 을 구하는 이유는 다음 섹션에서 설명한다. 또한 에러를 $\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}$ 로 정의하느냐 $\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p}$ 로 정의하느냐에 따라 \mathbf{J}_c 의 부호 또한 변경되므로 이는 실제 코드로 구현할 때 유의하여 적용해야 한다. 해당 자료에서는 부호는 +로 간주하고 표기하였다.

undistortion은 이미지 입력 과정에서 이미 수행되었다고 가정하면 $\frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}}$ 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} &= \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{p}}} \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{p}} \\ &= \tilde{\mathbf{K}} \\ &= \begin{bmatrix} f & 0 & c_x \\ 0 & f & c_y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3} \end{aligned} \quad (46)$$

다음으로 $\frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{X}'}$ 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{X}'} &= \frac{\partial[\tilde{u}, \tilde{v}, 1]}{\partial[X', Y', Z', 1]} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{Z'} & 0 & \frac{-X'}{Z'^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{Z'} & \frac{-Y'}{Z'^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4} \end{aligned} \quad (47)$$

다음으로 $\frac{\partial \mathbf{X}'}{\partial \mathbf{t}}$ 를 구해야 한다. 이는 다음과 같이 비교적 간단하게 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{X}'}{\partial \mathbf{t}} &= \frac{\partial}{\partial[t_x, t_y, t_z]} \begin{bmatrix} \mathbf{R}\mathbf{X} + \mathbf{t} \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial}{\partial[t_x, t_y, t_z]} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial}{\partial[t_x, t_y, t_z]} \left(\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 3} \end{aligned} \quad (48)$$

3.1.2 Lie theory-based SO(3) optimization

마지막으로 $\frac{\partial \mathbf{X}'}{\partial \mathbf{w}}$ 를 구해야 한다. 이 때, 회전 관련 파라미터를 회전행렬 \mathbf{R} 이 아닌 각속도 \mathbf{w} 로 표현하였다. 회전행렬 \mathbf{R} 은 파라미터의 개수가 9개인 반면에 실제 회전에는 3개의 자유도로 제한되므로 over-parameterized 되었다. over-parameterized 표현법의 단점은 다음과 같다.

- 중복되는 파라미터를 계산해야 하기 때문에 최적화 수행 시 연산량이 증가한다.
- 추가적인 자유도로 인해 수치적인 불안정성(numerical instability) 문제가 야기될 수 있다.
- 파라미터가 업데이트될 때마다 항상 제약조건을 만족하는지 체크해줘야 한다.

lie theory를 사용하면 제약조건으로부터 자유롭게 최적화를 수행할 수 있다. 따라서 lie group SO(3) \mathbf{R} 대신 lie algebra $\text{so}(3)$ $[\mathbf{w}]_\times$ 을 사용하여 제약조건으로부터 자유롭게 파라미터를 업데이트할 수 있게 된다. 이 때, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ 는 각속도 벡터를 의미한다.

$$\mathbf{J}_c = \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial [\mathbf{R}, \mathbf{t}]} \rightarrow \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial [\mathbf{w}, \mathbf{t}]} \quad (49)$$

하지만 \mathbf{X}' 에서 \mathbf{w} 이 바로 보이지 않으므로 \mathbf{X}' 를 lie algebra로 표현해야 한다. 이 때, 회전과 관련된 \mathbf{w} 항에 대한 자코비안을 구해야 하므로 3차원 점 \mathbf{X}_t 를 \mathbf{X} 가 \mathbf{t} 만큼 병진 이동한 후 \mathbf{X}' 를 동일한 위치의 \mathbf{X}_t 가 \mathbf{R} 만큼 회전한 점이라고 하자.

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_t &= \mathbf{X} + \mathbf{t} \\ \mathbf{X}' &= \mathbf{R}\mathbf{X}_t \\ &= \exp([\mathbf{w}]_\times)\mathbf{X}_t \end{aligned} \quad (50)$$

이 때, 작은 lie algebra 증분량 $\Delta \mathbf{w}$ 를 기준 $\exp([\mathbf{w}]_\times)$ 에 업데이트하는 방식에 따라 두 가지 방법으로 나뉘게 된다. 우선 [1] 기본적인 lie algebra를 사용한 업데이트 방법이 있다. 다음으로 [2] 섭동(perturbation) 모델을 활용한 업데이트 방법이 있다.

$$\begin{aligned} \exp([\mathbf{w}]_\times) &\leftarrow \exp([\mathbf{w} + \Delta \mathbf{w}]_\times) \quad \cdots [1] \\ \exp([\mathbf{w}]_\times) &\leftarrow \exp([\Delta \mathbf{w}]_\times) \exp([\mathbf{w}]_\times) \quad \cdots [2] \end{aligned} \quad (52)$$

Tip

$\exp([\mathbf{w}]_\times) \in SO(3)$ 는 각속도 \mathbf{w} 를 exponential mapping하여 3차원 회전행렬 \mathbf{R} 로 변환하는 연산을 말한다. exponential mapping에 대한 자세한 내용은 해당 링크를 참조하면 된다.

$$\exp([\mathbf{w}]_\times) = \mathbf{R} \quad (51)$$

Tip

위 두 방법 사이에는 다음과 같은 관계가 존재한다. 자세한 내용은 해당 링크의 4.3.3 챕터를 참조하면 된다.

$$\begin{aligned}\exp([\Delta\mathbf{w}]_\times)\exp([\mathbf{w}]_\times) &= \exp([\mathbf{w} + \mathbf{J}_l^{-1}\Delta\mathbf{w}]_\times) \\ \exp([\mathbf{w} + \Delta\mathbf{w}]_\times) &= \exp([\mathbf{J}_l\Delta\mathbf{w}]_\times)\exp([\mathbf{w}]_\times)\end{aligned} \quad (53)$$

[1] Lie algebra-based update: 우선 [1] 방법을 사용해서 자코비안 $\frac{\partial \mathbf{R}\mathbf{X}_t}{\partial \mathbf{w}}$ 를 바로 계산하면 다음과 같은 복잡한 식이 유도된다.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{R}\mathbf{X}_t}{\partial \mathbf{w}} &= \lim_{\Delta\mathbf{w} \rightarrow 0} \frac{\exp([\mathbf{w} + \Delta\mathbf{w}]_\times)\mathbf{X}_t - \exp([\mathbf{w}]_\times)\mathbf{X}_t}{\Delta\mathbf{w}} \\ &\approx \lim_{\Delta\mathbf{w} \rightarrow 0} \frac{\exp([\mathbf{J}_l\Delta\mathbf{w}]_\times)(\exp([\mathbf{w}]_\times)\mathbf{X}_t - \exp([\mathbf{w}]_\times)\mathbf{X}_t)}{\Delta\mathbf{w}} \\ &\approx \lim_{\Delta\mathbf{w} \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{I} + [\mathbf{J}_l\Delta\mathbf{w}]_\times)(\exp([\mathbf{w}]_\times)\mathbf{X}_t - \exp([\mathbf{w}]_\times)\mathbf{X}_t)}{\Delta\mathbf{w}} \\ &= \lim_{\Delta\mathbf{w} \rightarrow 0} \frac{[\mathbf{J}_l\Delta\mathbf{w}]_\times \mathbf{R}\mathbf{X}_t}{\Delta\mathbf{w}} \quad (\because \exp([\mathbf{w}]_\times)\mathbf{X}_t = \mathbf{R}\mathbf{X}_t) \\ &= \lim_{\Delta\mathbf{w} \rightarrow 0} \frac{-[\mathbf{R}\mathbf{X}_t]_\times \mathbf{J}_l \Delta\mathbf{w}}{\Delta\mathbf{w}} \\ &= -[\mathbf{R}\mathbf{X}_t]_\times \mathbf{J}_l \\ &= -[\mathbf{X}']_\times \mathbf{J}_l\end{aligned} \quad (54)$$

Tip

위 식에서 두 번째 행은 BCH 근사를 사용하여 왼쪽 자코비안(left jacobian) \mathbf{J}_l 이 유도된 형태이고 세 번째 행은 작은 회전량 $\exp([\mathbf{J}_l\Delta\mathbf{w}]_\times)$ 에 대해 1차 테일러 근사가 적용된 형태이다. \mathbf{J}_l 에 대한 자세한 내용은 Visual SLAM 입문 챕터 4를 참조하면 된다.

세 번째 행의 근사를 이해하기 위해 임의의 회전 벡터 $\mathbf{w} = [w_x, w_y, w_z]^\top$ 가 주어졌을 때 회전행렬을 exponential mapping 형태로 전개하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{R} = \exp([\mathbf{w}]_\times) = \mathbf{I} + [\mathbf{w}]_\times + \frac{1}{2}[\mathbf{w}]^2_\times + \frac{1}{3!}[\mathbf{w}]^3_\times + \frac{1}{4!}[\mathbf{w}]^4_\times + \dots \quad (55)$$

작은 크기의 회전행렬 $\Delta\mathbf{R}$ 에 대해서는 2차 이상의 고차항을 무시하여 다음과 같이 근사적으로 나타낼 수 있다.

$$\Delta\mathbf{R} \approx \mathbf{I} + [\Delta\mathbf{w}]_\times \quad (56)$$

[2] Perturbation model-based update: \mathbf{J}_l 을 사용하지 않고 보다 간단한 자코비안을 구하기 위해 [2] lie algebra $so(3)$ 의 섭동(perturbation) 모델을 일반적으로 사용한다. 섭동 모델을 사용하여 자코비안 $\frac{\partial \mathbf{R}\mathbf{X}_t}{\partial \Delta\mathbf{w}}$ 를 구하면

다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{R} \mathbf{X}_t}{\partial \Delta \mathbf{w}} &= \lim_{\Delta \mathbf{w} \rightarrow 0} \frac{\exp([\Delta \mathbf{w}]_{\times}) \exp([\mathbf{w}]_{\times}) \mathbf{X}_t - \exp([\mathbf{w}]_{\times}) \mathbf{X}_t}{\Delta \mathbf{w}} \\
 &\approx \lim_{\Delta \mathbf{w} \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{I} + [\Delta \mathbf{w}]_{\times}) \exp([\mathbf{w}]_{\times}) \mathbf{X}_t - \exp([\mathbf{w}]_{\times}) \mathbf{X}_t}{\Delta \mathbf{w}} \\
 &= \lim_{\Delta \mathbf{w} \rightarrow 0} \frac{[\Delta \mathbf{w}]_{\times} \mathbf{R} \mathbf{X}_t}{\Delta \mathbf{w}} \quad (\because \exp([\mathbf{w}]_{\times}) \mathbf{X}_t = \mathbf{R} \mathbf{X}_t) \\
 &= \lim_{\Delta \mathbf{w} \rightarrow 0} \frac{-[\mathbf{R} \mathbf{X}_t]_{\times} \Delta \mathbf{w}}{\Delta \mathbf{w}} \\
 &= -[\mathbf{R} \mathbf{X}_t]_{\times} \\
 &= -[\mathbf{X}']_{\times}
 \end{aligned} \tag{57}$$

위 식 또한 두 번째 행에서 작은 회전행렬에 대한 근사 $\exp([\Delta \mathbf{w}]_{\times}) \approx \mathbf{I} + [\Delta \mathbf{w}]_{\times}$ 를 사용하였다. 따라서 [2] 섭동 모델을 사용하는 경우 3차원 공간 상의 점 \mathbf{X}' 의 반대칭 행렬을 사용하여 간단하게 자코비안을 구할 수 있는 이점이 있다. reprojection 에러 최적화의 경우 대부분 순차적으로 들어오는 이미지들의 특징점에 대한 에러를 최적화하므로 카메라 포즈 변화가 크지 않고 따라서 $\Delta \mathbf{w}$ 의 크기 또한 크지 않으므로 일반적으로 위의 자코비안을 주로 사용한다. [2] 방법을 사용하므로 기존 회전행렬 \mathbf{R} 에 작은 증분량 $\Delta \mathbf{w}$ 를 업데이트할 때 (43) 같이 업데이트한다.

$$\mathbf{R} \leftarrow \Delta \mathbf{R}^* \mathbf{R} \quad \text{where, } \Delta \mathbf{R}^* = \exp([\Delta \mathbf{w}^*]_{\times}) \tag{58}$$

따라서 기존의 자코비안은 $\frac{\partial \mathbf{X}'}{\partial [\mathbf{w}, \mathbf{t}]}$ 에서 $\frac{\partial \mathbf{X}'}{\partial [\Delta \mathbf{w}, \mathbf{t}]}$ 로 변경되고 이는 다음과 같다.

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial [\Delta \mathbf{w}, \mathbf{t}]} \begin{bmatrix} \mathbf{R} \mathbf{X} + \mathbf{t} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & Z' & -Y' & 1 & 0 & 0 \\ -Z' & 0 & X' & 0 & 1 & 0 \\ Y' & -X' & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 6}} \tag{59}$$

최종적인 포즈에 대한 자코비안 \mathbf{J}_c 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}_c &= \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}}{\partial \tilde{\mathbf{p}}} \frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{X}'} \frac{\partial \mathbf{X}'}{\partial [\Delta \mathbf{w}, \mathbf{t}]} \\
 &= \begin{bmatrix} f & 0 & c_x \\ 0 & f & c_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{Z'} & 0 & \frac{-X'}{Z'^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{Z'} & \frac{-Y'}{Z'^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & Z' & -Y' & 1 & 0 & 0 \\ -Z' & 0 & X' & 0 & 1 & 0 \\ Y' & -X' & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{f}{Z'} & 0 & -\frac{fX}{Z'^2} & 0 \\ 0 & \frac{f}{Z'} & -\frac{fY}{Z'^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & Z' & -Y' & 1 & 0 & 0 \\ -Z' & 0 & X' & 0 & 1 & 0 \\ Y' & -X' & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\frac{fX'Y'}{Z'^2} & \frac{f(1+X'^2)}{Z'^2} & -\frac{fY'}{Z'} & \frac{f}{Z'} & 0 & -\frac{fX'}{Z'^2} \\ -\frac{f(1+y^2)}{Z'^2} & \frac{fX'Y'}{Z'^2} & \frac{fX'}{Z'} & 0 & \frac{f}{Z'} & -\frac{fY'}{Z'^2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 6}
 \end{aligned} \tag{60}$$

3.2 Jacobian of Map Point

3차원 점 \mathbf{X} 에 대한 자코비안 \mathbf{J}_p 은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}_p &= \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} (\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}) \\
 &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left(\mathbf{p} - \pi_k(\pi_h(\mathbf{T}_i \mathbf{X}_j)) \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left(-\pi_k(\pi_h(\mathbf{T}_i \mathbf{X}_j)) \right)
 \end{aligned} \tag{61}$$

Chain rule을 사용하여 위 식을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}_p &= \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}}{\partial \tilde{\mathbf{p}}} \frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{X}'} \frac{\partial \mathbf{X}'}{\partial \mathbf{X}} \\
 &= \mathbb{R}^{2 \times 3} \cdot \mathbb{R}^{3 \times 4} \cdot \mathbb{R}^{4 \times 4} = \mathbb{R}^{2 \times 4}
 \end{aligned} \tag{62}$$

이 중, $\frac{\partial \hat{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{X}'}$ 는 앞서 구한 자코비안과 동일하다. 따라서 $\frac{\partial \mathbf{X}'}{\partial \mathbf{X}}$ 만 계산하면 된다.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{X}'}{\partial \mathbf{X}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \begin{bmatrix} \mathbf{R}\mathbf{X} + \mathbf{t} \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{63}$$

따라서 \mathbf{J}_p 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_p &= \begin{bmatrix} f & 0 & c_x \\ 0 & f & c_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{Z'} & 0 & \frac{-X'}{Z'^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{Z'} & \frac{-Y'}{Z'^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{f}{Z'} & 0 & -\frac{fX'}{Z'^2} & 0 \\ 0 & \frac{f}{Z'} & -\frac{fY'}{Z'^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}\end{aligned}\tag{64}$$

일반적으로 \mathbf{J}_p 의 마지막 열은 항상 0이므로 이를 생략하여 non-homogeneous 형태로 나타내기도 한다.

$$\mathbf{J}_p = \begin{bmatrix} \frac{f}{Z'} & 0 & -\frac{fX'}{Z'^2} \\ 0 & \frac{f}{Z'} & -\frac{fY'}{Z'^2} \end{bmatrix} \mathbf{R} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}\tag{65}$$

3.3 Code implementations

- g2o 코드: edge_project_xyz.cpp#L80
- g2o 코드: edge_project_xyz.cpp#L82

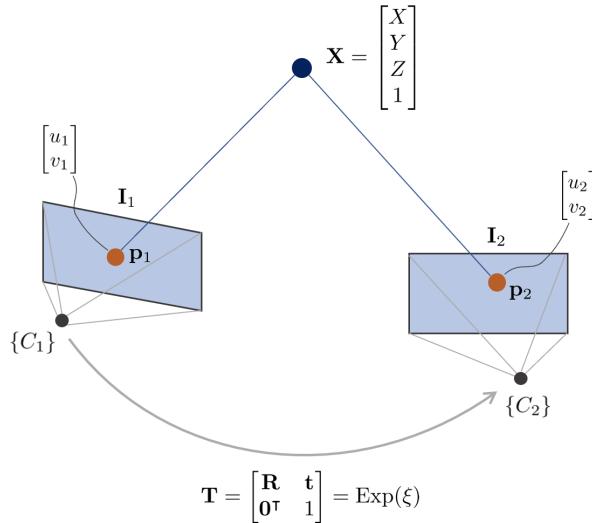
4 Photometric error

Photometric 예리는 direct Visual SLAM에서 주로 사용되는 예리이다. 주로 direct method 기반의 visual odometry(VO) 또는 bundle adjustment(BA)를 수행할 때 사용된다. direct method에 대한 자세한 내용은 [SLAM] Optical Flow와 Direct Method 개념 및 코드 리뷰 포스트를 참조하면 된다.

NOMENCLATURE of photometric error

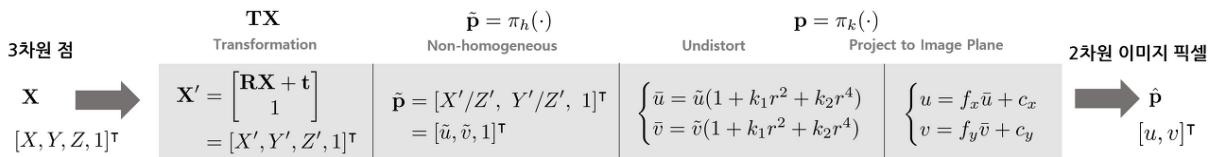
- $\tilde{\mathbf{p}}_2 = \pi_h(\cdot) : \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} X'/Z' \\ Y'/Z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_2 \\ \tilde{v}_2 \\ 1 \end{bmatrix}$
 - 이미지 평면에 프로젝션하기 위해 3차원 공간 상의 점 \mathbf{X}' 를 non-homogeneous 변환한 점
- $\mathbf{p}_2 = \pi_k(\cdot) = \tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{p}}_2 = \begin{bmatrix} f & 0 & c_x \\ 0 & f & c_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_2 \\ \tilde{v}_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f\tilde{u}_2 + c_x \\ f\tilde{v}_2 + c_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ 1 \end{bmatrix}$
 - 렌즈 왜곡을 보정한 후 이미지 평면에 프로젝션한 점. 만약 왜곡 보정이 입력 단계에서 이미 수행된 경우 $\pi_k(\cdot) = \tilde{\mathbf{K}}(\cdot) \circ$ 된다.
- $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} f & 0 & c_x \\ 0 & f & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$: 카메라 내부(intrinsic) 파라미터
- $\tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} f & 0 & c_x \\ 0 & f & c_y \end{bmatrix}$: $\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 로 프로젝션하기 위해 내부 파라미터의 마지막 행을 생략했다.
- \mathcal{P} : 이미지 내의 모든 특징점들의 집합
- $\mathbf{e}(\mathbf{T}) \rightarrow \mathbf{e}$: 일반적으로 표기를 생략하여 간단하게 나타내기도 한다.
- $\mathbf{p}_1^i, \mathbf{p}_2^i$: 첫번째 이미지와 두번째 이미지에서 i번째 특징점의 픽셀 좌표
- \oplus : 두 SE(3) 군을 결합(composition)하는 연산자

- $\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{T}} = \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial [\mathbf{R}, \mathbf{t}]}$
- $\mathbf{X}' = [X, Y, Z, 1]^\top = [\tilde{\mathbf{X}}', 1]^\top = \mathbf{T}\mathbf{X}$
- $\mathbf{T}\mathbf{X}$: Transformation, 3차원 점 \mathbf{X} 를 카메라 좌표계로 변환, $(\mathbf{T}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}\mathbf{X} + \mathbf{t} \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 1})$
- $\mathbf{X}' = [X', Y', Z', 1]^\top = [\tilde{\mathbf{X}}', 1]^\top$
- $\xi = [\mathbf{w}, \mathbf{v}]^\top = [w_x, w_y, w_z, v_x, v_y, v_z]^\top$: 3차원 각속도와 속도로 구성된 벡터. twist라고 불린다.
- $[\xi]_\times = \begin{bmatrix} [\mathbf{w}]_\times & \mathbf{v} \\ \mathbf{0}^\top & 0 \end{bmatrix} \in \text{se}(3)$: hat 연산자가 적용된 twist의 lie algebra (4x4 행렬)
- \mathcal{J}_l : 왼쪽 곱셈에 대한 자코비안. 실제 계산에는 사용되지 않으므로 이를 자세히 소개하지 않는다.



위 그림에서 3차원 점 \mathbf{X} 의 월드 좌표는 $[X, Y, Z, 1]^\top \in \mathbb{P}^3$ 이고 이에 대응하는 두 카메라 이미지 평면 상의 픽셀 좌표는 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \mathbb{P}^2$ 이다. 이 때, 두 카메라 $\{C_1\}, \{C_2\}$ 의 내부 파라미터 \mathbf{K} 는 동일하다고 가정한다. 카메라 $\{C_1\}$ 을 원점($\mathbf{R} = \mathbf{I}, \mathbf{t} = \mathbf{0}$)이라고 했을 때 픽셀 좌표 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ 를 3차원 점 \mathbf{X} 을 통해 표현하면 아래와 같은 순서로 프로젝션된다.

$$\mathbf{p} = \pi(\mathbf{T}, \mathbf{X}) \quad (66)$$



$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \pi(\mathbf{I}, \mathbf{X}) = \pi_k(\pi_h(\mathbf{X})) \\ \mathbf{p}_2 &= \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \pi(\mathbf{T}, \mathbf{X}) = \pi_k(\pi_h(\mathbf{T}\mathbf{X})) \end{aligned} \quad (67)$$

direct method의 특징 중 하나는 feature-based와 달리 어떤 \mathbf{p}_2 가 \mathbf{p}_1 과 매칭하는지 알 수 있는 방법이 없다. 따라서 현재 포즈 추정치를 기반으로 \mathbf{p}_2 의 위치를 찾는다. 즉, 카메라의 포즈를 최적화하여 \mathbf{p}_2 와 \mathbf{p}_1 을 유사하게 만드는데 이 때 photometric 에러를 최소화하여 문제를 해결한다. photometric 에러는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(\mathbf{T}) &= \mathbf{I}_1(\mathbf{p}_1) - \mathbf{I}_2(\mathbf{p}_2) \\ &= \mathbf{I}_1\left(\pi_k(\pi_h(\mathbf{X}))\right) - \mathbf{I}_2\left(\pi_k(\pi_h(\mathbf{T}\mathbf{X}))\right) \end{aligned} \quad (68)$$

photometric 에러는 grayscale 불변성 가정에 기반하며 스칼라 값으로 가진다. photometric 에러를 통해 non-linear least squares를 풀기 위해 다음과 같은 에러 함수 $\mathbf{E}(\mathbf{T})$ 를 정의할 수 있다.

$$\mathbf{E}(\mathbf{T}) = \sum_{i \in \mathcal{P}} \|\mathbf{e}_i\|^2 \quad (69)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^* &= \arg \min_{\mathbf{T}^*} \mathbf{E}(\mathbf{T}) \\ &= \arg \min_{\mathbf{T}^*} \sum_{i \in \mathcal{P}} \|\mathbf{e}_i\|^2 \\ &= \arg \min_{\mathbf{T}^*} \sum_{i \in \mathcal{P}} \mathbf{e}_i^\top \mathbf{e}_i \\ &= \arg \min_{\mathbf{T}^*} \sum_{i \in \mathcal{P}} (\mathbf{I}_1(\mathbf{p}_1^i) - \mathbf{I}_2(\mathbf{p}_2^i))^\top (\mathbf{I}_1(\mathbf{p}_1^i) - \mathbf{I}_2(\mathbf{p}_2^i)) \end{aligned} \quad (70)$$

$\mathbf{E}(\mathbf{T}^*)$ 를 만족하는 $\|\mathbf{e}(\mathbf{T}^*)\|^2$ 를 non-linear least squares를 통해 반복적으로 계산할 수 있다. 작은 증분량 $\Delta \mathbf{T}$ 를 반복적으로 \mathbf{T} 에 업데이트함으로써 최적의 상태를 찾는다.

$$\arg \min_{\mathbf{T}^*} \mathbf{E}(\mathbf{T} + \Delta \mathbf{T}) = \arg \min_{\mathbf{T}^*} \sum_{i \in \mathcal{P}} \|\mathbf{e}_i(\mathbf{T} + \Delta \mathbf{T})\|^2 \quad (71)$$

엄밀하게 말하면 상태 증분량 $\Delta \mathbf{T}$ 은 $SE(3)$ 변환행렬이므로 \oplus 연산자를 통해 기존 상태 \mathbf{T} 에 더해지는게 맞지만 표현의 편의를 위해 $+$ 연산자를 사용하였다.

$$\mathbf{T} \oplus \Delta \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T} + \Delta \mathbf{T} \quad (72)$$

이는 1차 테일러 근사를 통해 다음과 같이 표현이 가능하다.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(\mathbf{T} + \Delta \mathbf{T}) &\approx \mathbf{e}_i(\mathbf{T}) + \mathbf{J} \Delta \mathbf{T} \\ &= \mathbf{e}_i(\mathbf{T}) + \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{T}} \Delta \mathbf{T} \end{aligned} \quad (73)$$

$$\arg \min_{\mathbf{T}^*} \mathbf{E}(\mathbf{T} + \Delta \mathbf{T}) = \arg \min_{\mathbf{T}^*} \sum_{i \in \mathcal{P}} \|\mathbf{e}_i(\mathbf{T}) + \mathbf{J} \Delta \mathbf{T}\|^2 \quad (74)$$

이를 미분하여 최적의 증분량 $\Delta \mathbf{T}^*$ 값을 구하면 다음과 같다. 자세한 유도 과정은 본 섹션에서는 생략한다. 유도 과정에 대해 자세히 알고 싶으면 이전 섹션을 참조하면 된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^\top \mathbf{J} \Delta \mathbf{T}^* &= -\mathbf{J}^\top \mathbf{e} \\ \mathbf{H} \Delta \mathbf{T}^* &= -\mathbf{b} \end{aligned} \quad (75)$$

위 식은 선형시스템 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 형태이므로 schur complement, cholesky decomposition과 같은 다양한 선형대수학 테크닉을 사용하여 $\Delta \mathbf{T}^*$ 를 구할 수 있다. 이렇게 구한 최적의 증분량을 현재 상태에 더한다. 이 때, 기존 상태 \mathbf{T} 의 오른쪽에 곱하느냐 왼쪽에 곱하느냐에 따라서 각각 로컬 좌표계에서 본 포즈를 업데이트할 것인지(오른쪽) 전역 좌표계에서 본 포즈를 업데이트할 것인지(왼쪽) 달라지게 된다. Photometric 에러는 전역 좌표계의 변환 행렬을 업데이트하므로 일반적으로 왼쪽 곱셈 방법을 사용한다.

$$\mathbf{T} \leftarrow \mathbf{T} \oplus \Delta \mathbf{T}^* \quad (76)$$

왼쪽 곱셈 \oplus 연산의 정의는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \oplus \Delta \mathbf{T}^* &= \Delta \mathbf{T}^* \mathbf{T} \\ &= \exp([\Delta \xi^*]_\times) \mathbf{T} \quad \cdots \text{globally updated (left mult)} \end{aligned} \quad (77)$$

4.1 Jacobian of the photometric error

(75)를 수행하기 위해서는 photometric 에러에 대한 자코비안 \mathbf{J} 을 구해야 한다. 이는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{T}} \\ &= \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial [\mathbf{R}, \mathbf{t}]} \end{aligned} \quad (78)$$

이를 자세히 풀어서 보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J} &= \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{T}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{T}} \left(\mathbf{I}_1(\mathbf{p}_1) - \mathbf{I}_2(\mathbf{p}_2) \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{T}} \left(\mathbf{I}_1 \left(\pi_k(\pi_h(\mathbf{X})) \right) - \mathbf{I}_2 \left(\pi_k(\pi_h(\mathbf{TX})) \right) \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{T}} \left(- \mathbf{I}_2 \left(\pi_k(\pi_h(\mathbf{TX})) \right) \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{T}} \left(- \mathbf{I}_2 \left(\pi_k(\pi_h(\mathbf{X}')) \right) \right)
 \end{aligned} \tag{79}$$

Chain rule을 적용하여 위 식을 다시 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \xi} &= \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial \mathbf{p}_2} \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \tilde{\mathbf{p}}_2} \frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}_2}{\partial \mathbf{X}'} \frac{\partial \mathbf{X}'}{\partial \xi} \\
 &= \mathbb{R}^{1 \times 2} \cdot \mathbb{R}^{2 \times 3} \cdot \mathbb{R}^{3 \times 4} \cdot \mathbb{R}^{4 \times 6} = \mathbb{R}^{1 \times 6}
 \end{aligned} \tag{80}$$

이 때, 변환행렬 \mathbf{T} 에 대한 자코비안 $\frac{\partial \mathbf{X}'}{\partial \mathbf{T}}$ 을 구하는 것이 아닌 twist ξ 에 대한 자코비안 $\frac{\partial \mathbf{X}'}{\partial \xi}$ 을 구하는 이유는 다음 섹션에서 설명한다. 우선 $\frac{\partial \mathbf{I}}{\partial \mathbf{p}_2}$ 은 이미지의 기울기(gradient)를 의미한다.

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial \mathbf{p}_2} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial u} & \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial v} \end{bmatrix} \\
 &= [\nabla \mathbf{I}_u \quad \nabla \mathbf{I}_v]
 \end{aligned} \tag{81}
 }$$

undistortion은 이미지 입력 과정에서 이미 수행되었다고 가정하면 $\frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \tilde{\mathbf{p}}_2}$ 은 다음과 같다.

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \tilde{\mathbf{p}}_2} &= \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{p}}_2} \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{p}}_2 \\
 &= \tilde{\mathbf{K}} \\
 &= \begin{bmatrix} f & 0 & c_x \\ 0 & f & c_y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}
 \end{aligned} \tag{82}
 }$$

다음으로 $\frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}_2}{\partial \mathbf{X}'}$ 은 다음과 같다.

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 \frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}_2}{\partial \mathbf{X}'} &= \frac{\partial [\tilde{u}_2, \tilde{v}_2, 1]}{\partial [X', Y', Z', 1]} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{Z'} & 0 & \frac{-X'}{Z'^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{Z'} & \frac{-Y'}{Z'^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}
 \end{aligned} \tag{83}
 }$$

4.1.1 Lie theory-based SE(3) optimization

마지막으로 $\frac{\partial \mathbf{X}'}{\partial \mathbf{T}} = \frac{\partial \mathbf{X}'}{\partial [\mathbf{R}, \mathbf{t}]}$ 를 구해야 한다. 이 때, 위치에 관련된 항 \mathbf{t} 는 3차원 벡터이고 해당 벡터의 크기가 3차원 위치를 표현하는 최소한의 자유도인 3 자유도와 동일하므로 최적화 업데이트를 수행할 때 별도의 제약조건이 존재하지 않는다. 반면에, 회전행렬 \mathbf{R} 은 파라미터의 개수가 9개이고 이는 3차원 회전을 표현하는 최소 자유도인 3 자유도보다 많으므로 다양한 제약조건이 존재한다. 이를 over-parameterized 되었다고 한다. over-parameterized 표현법의 단점은 다음과 같다.

- 중복되는 파라미터를 계산해야 하기 때문에 최적화 수행 시 연산량이 증가한다.
- 추가적인 자유도로 인해 수치적인 불안정성(numerical instability) 문제가 야기될 수 있다.
- 파라미터가 업데이트될 때마다 항상 제약조건을 만족하는지 체크해줘야 한다.

따라서 제약조건으로 부터 자유로운 최소 파라미터(minimal parameter) 표현법인 lie theory 기반 최적화 방식을 일반적으로 사용한다. lie group SE(3) 기반 최적화 방법은 비선형의 회전행렬을 포함하는 $\Delta \mathbf{T}^*$ 를 구하는 대신 회전 관련된 항은 $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{w}$ 으로 변경하고 위치 관련된 항은 $\mathbf{t} \rightarrow \mathbf{v}$ 로 변경하여 최적의 twist $\Delta \xi^*$ 를 구한 후 lie algebra se(3) $[\Delta \xi]_{\times}$ 를 exponential mapping을 통해 SE(3)에 업데이트 하는 방법을 말한다.

$$\Delta \mathbf{T}^* \rightarrow \Delta \xi^* \tag{84}$$

ξ 에 대한 자코비안은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial [\mathbf{R}, \mathbf{t}]} \rightarrow \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial [\mathbf{w}, \mathbf{v}]} \\ &\rightarrow \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \xi}\end{aligned}\quad (85)$$

이를 통해 기존의 식은 다음과 같이 변경된다.

$$\begin{aligned}\mathbf{e}(\mathbf{T}) &\rightarrow \mathbf{e}(\xi) \\ \mathbf{E}(\mathbf{T}) &\rightarrow \mathbf{E}(\xi) \\ \mathbf{e}(\mathbf{T}) + \mathbf{J}'\Delta\mathbf{T} &\rightarrow \mathbf{e}(\xi) + \mathbf{J}\Delta\xi \\ \mathbf{H}\Delta\mathbf{T}^* = -\mathbf{b} &\rightarrow \mathbf{H}\Delta\xi^* = -\mathbf{b} \\ \mathbf{T} \leftarrow \Delta\mathbf{T}^*\mathbf{T} &\rightarrow \mathbf{T} \leftarrow \exp([\Delta\xi]^*)\mathbf{T}\end{aligned}\quad (86)$$

- $\mathbf{J}' = \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{T}}$
- $\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \xi}$

Tip

$\exp([\xi]_\times) \in \text{SE}(3)$ 는 twist ξ 를 exponential mapping하여 3차원 포즈로 변환하는 연산을 말한다. exponential mapping에 대한 자세한 내용은 해당 링크를 참조하면 된다.

$$\exp([\Delta\xi]_\times) = \Delta\mathbf{T} \quad (87)$$

지금까지 자코비안들은 계산하기 용이했던 반면에 $\frac{\partial \mathbf{X}'}{\partial \xi}$ 은 파라미터 ξ 가 \mathbf{X}' 에서 바로 보이지 않으므로 \mathbf{X}' 를 lie algebra와 관련된 항으로 변경해야 한다.

$$\mathbf{X}' \rightarrow \mathbf{T}\mathbf{X} \rightarrow \exp([\xi]_\times)\mathbf{X} \quad (88)$$

이 때, 작은 lie algebra 증분량 $\Delta\xi$ 를 기존 $\exp([\xi]_\times)$ 에 업데이트하는 방식에 따라 두 가지 방법으로 나뉘게 된다. 우선 [1] 기본적인 lie algebra를 사용한 업데이트 방법이 있다. 다음으로 [2] 섭동(perturbation) 모델을 활용한 업데이트 방법이 있다.

$$\begin{aligned}\exp([\xi]_\times) &\leftarrow \exp([\xi + \Delta\xi]_\times) \quad \cdots [1] \\ \exp([\xi]_\times) &\leftarrow \exp([\Delta\xi]_\times) \exp([\xi]_\times) \quad \cdots [2]\end{aligned}\quad (89)$$

위 두 방법 중 [1] 방법은 기존 ξ 에 미세 증분량 $\Delta\xi$ 를 더한 후 exponential mapping을 수행하여 자코비안을 구하는 방법이며 [2] 방법은 기존 ξ 왼쪽에 섭동(perturbation) 모델 $\exp([\Delta\xi]_\times)$ 을 곱함으로써 기존 상태를 업데이트하는 방법이다.

Tip

두 방법 사이에는 다음과 같은 변환이 존재하며 이를 BCH 근사라고 한다. 자세한 내용은 Visual SLAM 입문 챕터 4를 참조하면 된다.

$$\begin{aligned}\exp([\Delta\xi]_\times) \exp([\xi]_\times) &= \exp([\xi + \mathcal{J}_l^{-1}\Delta\xi]_\times) \\ \exp([\xi + \Delta\xi]_\times) &= \exp([\mathcal{J}_l\Delta\xi]_\times) \exp([\xi]_\times)\end{aligned}\quad (90)$$

[1] 방법을 사용하면 매우 복잡한 식이 유도되기 때문에 해당 방법은 잘 사용되지 않고 [2]의 섭동 모델을 주로 사용한다. 따라서 $\frac{\partial \mathbf{X}'}{\partial \xi}$ 은 다음과 같이 변형된다.

$$\frac{\partial \mathbf{X}'}{\partial \xi} \rightarrow \frac{\partial \mathbf{X}'}{\partial \Delta\xi} \quad (91)$$

$\frac{\partial \mathbf{X}'}{\partial \Delta\xi}$ 에 대한 자코비안은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{X}'}{\partial \Delta\xi} &= \lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \frac{\exp([\Delta\xi]_{\times}) \mathbf{X}' - \mathbf{X}'}{\Delta\xi} \\
&\approx \lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{I} + [\Delta\xi]_{\times}) \mathbf{X}' - \mathbf{X}'}{\Delta\xi} \\
&= \lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \frac{[\Delta\xi]_{\times} \mathbf{X}'}{\Delta\xi} \\
&= \lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \frac{\begin{bmatrix} [\Delta\mathbf{w}]_{\times} & \Delta\mathbf{v} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}' \\ 1 \end{bmatrix}}{\Delta\xi} \\
&= \lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \frac{\begin{bmatrix} [\Delta\mathbf{w}]_{\times} \tilde{\mathbf{X}}' + \Delta\mathbf{v} \\ \mathbf{0}^T \end{bmatrix}}{[\Delta\mathbf{w}, \Delta\mathbf{v}]^T} = \begin{bmatrix} -[\tilde{\mathbf{X}}']_{\times} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 6}
\end{aligned} \tag{92}$$

따라서 [2] 섭동 모델을 사용하는 경우 3차원 공간 상의 점 \mathbf{X}' 의 반대칭 행렬을 사용하여 간단하게 자코비안을 구할 수 있는 이점이 있다. photometric 에러 최적화의 경우 대부분 순차적으로 들어오는 이미지들의 밝기 변화에 대한 에러를 최적화하므로 카메라 포즈 변화가 크지 않고 따라서 $\Delta\xi$ 의 크기 또한 크지 않으므로 일반적으로 위의 자코비안을 주로 사용한다. [2] 섭동 모델을 사용하므로 작은 증분량 $\Delta\xi^*$ 는 (77)와 같이 업데이트된다.

$$\mathbf{T} \leftarrow \Delta\mathbf{T}^* \mathbf{T} = \exp([\Delta\xi^*]_{\times}) \mathbf{T} \tag{93}$$

Tip

위 식에서 두 번째 행은 작은 twist 증분량 $\exp([\Delta\xi]_{\times})$ 에 대해 1차 테일러 근사가 적용된 형태이다. 두 번째 행의 근사를 이해하기 위해 임의의 twist $\xi = [\mathbf{w}, \mathbf{v}]^T$ 가 주어졌을 때 변환행렬 \mathbf{T} 를 exponential mapping 형태로 전개하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} = \exp([\xi]_{\times}) &= \mathbf{I} + \begin{bmatrix} [\mathbf{w}]_{\times} & \mathbf{v} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} [\mathbf{w}]_{\times}^2 & [\mathbf{w}]_{\times} \mathbf{v} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{3!} \begin{bmatrix} [\mathbf{w}]_{\times}^3 & [\mathbf{w}]_{\times}^2 \mathbf{v} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} + \dots \\
&= \mathbf{I} + [\xi]_{\times} + \frac{1}{2!} [\xi]_{\times}^2 + \frac{1}{3!} [\xi]_{\times}^3 + \dots
\end{aligned} \tag{94}$$

작은 크기의 twist 증분량 $\Delta\xi$ 에 대해서는 2차 이상의 고차항을 무시하여 다음과 같이 근사적으로 나타낼 수 있다.

$$\exp([\Delta\xi]_{\times}) \approx \mathbf{I} + [\Delta\xi]_{\times} \tag{95}$$

최종적인 포즈에 대한 자코비안 \mathbf{J} 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{J} &= \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \Delta\xi} = \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial \mathbf{p}_2} \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \tilde{\mathbf{p}}_2} \frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}_2}{\partial \mathbf{X}'} \frac{\partial \mathbf{X}'}{\partial \Delta\xi} \\
&= [\nabla \mathbf{I}_u \quad \nabla \mathbf{I}_v] \begin{bmatrix} f & 0 & c_x \\ 0 & f & c_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{Z'} & 0 & \frac{-X'}{Z'^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{Z'} & \frac{-Y'}{Z'^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -[\tilde{\mathbf{X}}']_{\times} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \end{bmatrix} \\
&= [\nabla \mathbf{I}_u \quad \nabla \mathbf{I}_v] \begin{bmatrix} \frac{f}{Z'} & 0 & -\frac{fX}{Z'^2} & 0 \\ 0 & \frac{f}{Z'} & -\frac{fY}{Z'^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & Z' & -Y' & 1 & 0 & 0 \\ -Z' & 0 & X' & 0 & 1 & 0 \\ Y' & -X' & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= [\nabla \mathbf{I}_u \quad \nabla \mathbf{I}_v] \begin{bmatrix} -\frac{fX'Y'}{Z'^2} & \frac{f(1+X'^2)}{Z'^2} & -\frac{fY'}{Z'} & \frac{f}{Z'} & 0 & -\frac{fX'}{Z'^2} \\ -\frac{f(1+Y'^2)}{Z'^2} & \frac{fX'Y'}{Z'^2} & \frac{fX'}{Z'} & 0 & \frac{f}{Z'} & -\frac{fY'}{Z'^2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 6}
\end{aligned} \tag{96}$$

이 때, $\frac{\partial \mathbf{X}'}{\partial \Delta\xi}$ 의 마지막 행은 항상 0이므로 이를 생략하고 계산하기도 한다.

4.2 Code implementations

- Visual SLAM 입문 챕터8 코드: direct_sparse.cpp#L111

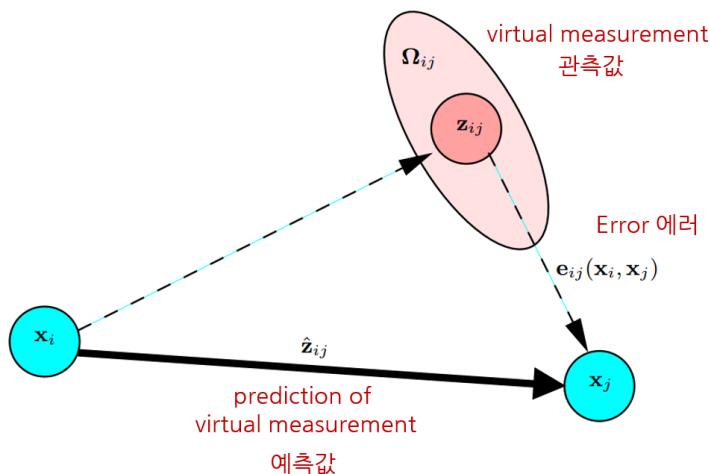
- DSO 코드: CoarseInitializer.cpp#L430
- DSO 코드2: CoarseTracker.cpp#L320

5 Relative pose error

Relative pose 에러는 주로 pose graph optimization(PGO)에서 사용하는 에러이다. PGO에 대한 자세한 내용은 [SLAM] Pose Graph Optimization 개념 설명 및 예제 코드 분석 포스트를 참조하면 된다.

NOMENCLATURE of relative pose error

- (Node) $\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_i & \mathbf{t}_i \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$
- (Edge) $\mathbf{z}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ij} & \mathbf{t}_{ij} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$
- $\hat{\mathbf{z}}_{ij} = \mathbf{x}_i^{-1} \mathbf{x}_j$: 예측값
- \mathbf{z}_{ij} : 관측값 (virtual measurement)
- $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$: pose graph의 모든 포즈 노드
- $\mathbf{e}_{ij}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \leftrightarrow \mathbf{e}_{ij}$: 표현의 편의를 위해 생략하여 표기하기도 한다.
- $\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{x}}$
- \oplus : 두 SE(3) 군을 결합(composition)하는 연산자
- Log(\cdot): SE(3)를 twist $\xi \in \mathbb{R}^6$ 로 변환하는 연산자. Logarithm mapping에 대한 자세한 내용은 해당 포스트를 참조하면 된다.



Pose graph 상에서 두 노드 $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$ 가 주어졌을 때 센서 데이터에 의해 새롭게 계산한 상대포즈(관측값) \mathbf{z}_{ij} 와 기존의 알고 있는 상대포즈(예측값) $\hat{\mathbf{z}}_{ij}$ 의 차이를 relative pose 에러로 정의한다. (Freiburg univ. Robot Mapping Course 그림 참조).

$$\mathbf{e}_{ij}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \mathbf{z}_{ij}^{-1} \hat{\mathbf{z}}_{ij} = \mathbf{z}_{ij}^{-1} \mathbf{x}_i^{-1} \mathbf{x}_j \quad (97)$$

relative pose 에러를 최적화하는 과정을 **pose graph optimization (PGO)**라고 하며 **graph-based SLAM**의 back-end 알고리즘으로도 불린다. Front-end의 visual odometry(VO) 또는 lidar odometry(LO)에 의해 순차적으로 계산되는 노드 $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, \dots$ 는 관측값과 예측값이 동일하기 때문에 PGO가 수행되지 않지만 loop closing이 발생하여 비순차적인 두 노드 $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$ 사이에 엣지가 연결되면 관측값과 예측값의 차이가 발생하기 때문에 PGO가 수행된다.

즉, PGO는 일반적으로 loop closing과 같은 특수한 상황이 발생할 때 수행된다. 로봇이 이동하면서 같은 장소를 재방문하는 경우 loop detection 알고리즘이 동작하여 루프를 판별한다. 이 때 루프가 탐지되면 기존 노드 \mathbf{x}_i 와 재방문하여 생성된 노드 \mathbf{x}_j 가 loop edge로 연결되고 여러 매칭 알고리즘 (GICP, NDT, etc...)에 의해 관측값을 생성한다. 이러한 관측값은 실제로 관측한 값이 아닌 매칭 알고리즘에 의해 생성된 가상의 관측값이므로 **virtual measurement**라고 불린다.

Pose graph 상의 모든 노드에 대한 relative pose 에러는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \sum_i \sum_j \|\mathbf{e}_{ij}\|^2 \quad (98)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= \arg \min_{\mathbf{x}^*} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \\ &= \arg \min_{\mathbf{x}^*} \sum_i \sum_j \|\mathbf{e}_{ij}\|^2 \\ &= \arg \min_{\mathbf{x}^*} \sum_i \sum_j \mathbf{e}_{ij}^\top \mathbf{e}_{ij} \end{aligned} \quad (99)$$

$\mathbf{E}(\mathbf{x}^*)$ 를 만족하는 $\|\mathbf{e}(\mathbf{x}^*)\|^2$ 를 non-linear least squares를 통해 반복적으로 계산할 수 있다. 작은 증분량 $\Delta\mathbf{x}$ 를 반복적으로 \mathbf{x} 에 업데이트함으로써 최적의 상태를 찾는다.

$$\arg \min_{\mathbf{x}^*} \mathbf{E}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \arg \min_{\mathbf{x}^*} \sum_i \sum_j \|\mathbf{e}_{ij}(\mathbf{x}_i + \Delta\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j + \Delta\mathbf{x}_j)\|^2 \quad (100)$$

엄밀하게 말하면 상태 증분량 $\Delta\mathbf{x}$ 은 SE(3) 변환행렬이므로 \oplus 연산자를 통해 기존 상태 \mathbf{x} 에 더해지는게 맞지만 표현의 편의를 위해 $+$ 연산자를 사용하였다.

$$\mathbf{e}_{ij}(\mathbf{x}_i \oplus \Delta\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \oplus \Delta\mathbf{x}_j) \rightarrow \mathbf{e}_{ij}(\mathbf{x}_i + \Delta\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j + \Delta\mathbf{x}_j) \quad (101)$$

위 식은 테일러 1차 근사를 통해 다음과 같이 표현이 가능하다.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{ij}(\mathbf{x}_i + \Delta\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j + \Delta\mathbf{x}_j) &\approx \mathbf{e}_{ij}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) + \mathbf{J}_{ij} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{x}_i \\ \Delta\mathbf{x}_j \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{e}_{ij}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) + \mathbf{J}_i \Delta\mathbf{x}_i + \mathbf{J}_j \Delta\mathbf{x}_j \\ &= \mathbf{e}_{ij}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) + \frac{\partial \mathbf{e}_{ij}}{\partial \mathbf{x}_i} \Delta\mathbf{x}_i + \frac{\partial \mathbf{e}_{ij}}{\partial \mathbf{x}_j} \Delta\mathbf{x}_j \end{aligned} \quad (102)$$

$$\arg \min_{\mathbf{x}^*} \mathbf{E}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) \approx \arg \min_{\mathbf{x}^*} \sum_i \sum_j \left\| \mathbf{e}_{ij}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) + \mathbf{J}_{ij} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{x}_i \\ \Delta\mathbf{x}_j \end{bmatrix} \right\|^2 \quad (103)$$

이를 미분하여 모든 노드에 대한 최적의 증분량 $\Delta\mathbf{x}^*$ 값을 구하면 다음과 같다. 자세한 유도 과정은 본 섹션에서는 생략한다. 유도 과정에 대해 자세히 알고 싶으면 이전 섹션을 참조하면 된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^\top \mathbf{J} \Delta\mathbf{x}^* &= -\mathbf{J}^\top \mathbf{e} \\ \mathbf{H} \Delta\mathbf{x}^* &= -\mathbf{b} \end{aligned} \quad (104)$$

위 식은 선형시스템 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 형태이므로 schur complement, cholesky decomposition과 같은 다양한 선형대수학 테크닉을 사용하여 $\Delta\mathbf{x}^*$ 를 구할 수 있다. 이렇게 구한 최적의 증분량을 현재 상태에 더한다. 이 때, 기존 상태 \mathbf{x} 의 오른쪽에 곱하느냐 왼쪽에 곱하느냐에 따라서 각각 로컬 좌표계에서 본 포즈를 업데이트할 것인지(오른쪽) 전역 좌표계에서 본 포즈를 업데이트할 것인지(왼쪽) 달라지게 된다. relative pose 에러는 두 노드의 상태 포즈에 관련되어 있으므로 로컬 좌표계에서 업데이트하는 오른쪽 곱셈이 적용된다.

$$\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} \oplus \Delta\mathbf{x}^* \quad (105)$$

오른쪽 곱셈 \oplus 연산의 정의는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \oplus \Delta\mathbf{x}^* &= \mathbf{x} \Delta\mathbf{x}^* \\ &= \mathbf{x} \exp([\Delta\xi^*]_\times) \quad \cdots \text{locally updated (right mult)} \end{aligned} \quad (106)$$

5.1 Jacobian of relative pose error

(104)를 수행하기 위해서는 relative pose 에러에 대한 자코비안 \mathbf{J} 을 구해야 한다. 비순차적인 두 노드 $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$ 가 주어졌을 때 이에 대한 자코비안 \mathbf{J}_{ij} 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{ij} &= \frac{\partial \mathbf{e}_{ij}}{\partial \mathbf{x}_{ij}} \\ &= \frac{\partial \mathbf{e}_{ij}}{\partial [\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j]} \\ &= [\mathbf{J}_i, \mathbf{J}_j] \end{aligned} \quad (107)$$

이를 자세히 풀어서 보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_{ij} &= \frac{\partial \mathbf{e}_{ij}}{\partial [\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j]} = \frac{\partial}{\partial [\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j]} \left(\mathbf{z}_{ij}^{-1} \hat{\mathbf{z}}_{ij} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial [\mathbf{R}_i, \mathbf{t}_i, \mathbf{R}_j, \mathbf{t}_j]} \left(\mathbf{z}_{ij}^{-1} \hat{\mathbf{z}}_{ij} \right)\end{aligned}\quad (108)$$

5.1.1 Lie theory-based SE(3) optimization

위 자코비안을 구할 때, 위치에 관련된 항 \mathbf{t} 는 3차원 벡터이고 해당 벡터의 크기가 3차원 위치를 표현하는 최소한의 자유도인 3 자유도와 동일하므로 최적화 업데이트를 수행할 때 별도의 제약조건이 존재하지 않는다. 반면에, 회전 행렬 \mathbf{R} 은 파라미터의 개수가 9개이고 이는 3차원 회전을 표현하는 최소 자유도인 3 자유도보다 많으므로 다양한 제약조건이 존재한다. 이를 over-parameterized 되었다고 한다. over-parameterized 표현법의 단점은 다음과 같다.

- 중복되는 파라미터를 계산해야 하기 때문에 최적화 수행 시 연산량이 증가한다.
- 추가적인 자유도로 인해 수치적인 불안정성(numerical instability) 문제가 야기될 수 있다.
- 파라미터가 업데이트될 때마다 항상 제약조건을 만족하는지 체크해줘야 한다.

따라서 제약조건으로부터 자유로운 최소 파라미터(minimal parameter) 표현법인 lie theory 기반 최적화 방식을 일반적으로 사용한다. lie group SE(3) 기반 최적화 방법은 비선형의 회전행렬을 포함하는 $\Delta \mathbf{T}^*$ 를 구하는 대신 회전 관련된 항은 $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{w}$ 으로 변경하고 위치 관련된 항은 $\mathbf{t} \rightarrow \mathbf{v}$ 로 변경하여 최적의 twist $\Delta \xi^*$ 를 구한 후 lie algebra se(3) $[\Delta \xi]_\times$ 를 exponential mapping을 통해 SE(3)에 업데이트 하는 방법을 말한다.

$$[\Delta \mathbf{x}_i^*, \Delta \mathbf{x}_j^*] \rightarrow [\Delta \xi_i^*, \Delta \xi_j^*] \quad (109)$$

ξ 에 대한 자코비안은 다음과 같다.

$$\mathbf{J}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{e}_{ij}}{\partial [\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j]} \rightarrow \frac{\partial \mathbf{e}_{ij}}{\partial [\xi_i, \xi_j]} \quad (110)$$

이를 통해 기존의 식은 다음과 같이 변경된다.

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_{ij}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) &\rightarrow \mathbf{e}_{ij}(\xi_i, \xi_j) \\ \mathbf{E}(\mathbf{x}) &\rightarrow \mathbf{E}(\xi) \\ \mathbf{e}_{ij}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) + \mathbf{J}'_i \Delta \mathbf{x}_i + \mathbf{J}'_j \Delta \mathbf{x}_j &\rightarrow \mathbf{e}_{ij}(\xi_i, \xi_j) + \mathbf{J}_i \Delta \xi_i + \mathbf{J}_j \Delta \xi_j \\ \mathbf{H} \Delta \mathbf{x}^* = -\mathbf{b} &\rightarrow \mathbf{H} \Delta \xi^* = -\mathbf{b} \\ \mathbf{x} \leftarrow \Delta \mathbf{x}^* \mathbf{x} &\rightarrow \mathbf{x} \leftarrow \exp([\Delta \xi^*]_\times) \mathbf{x}\end{aligned}\quad (111)$$

- $\mathbf{J}'_{ij} = \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial [\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j]}$
- $\mathbf{J}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial [\xi_i, \xi_j]}$

Tip

$\exp([\xi]_\times) \in \text{SE}(3)$ 는 twist ξ 를 exponential mapping하여 3차원 포즈로 변환하는 연산을 말한다. exponential mapping에 대한 자세한 내용은 해당 링크를 참조하면 된다.

$$\exp([\Delta \xi]_\times) = \Delta \mathbf{x} \quad (112)$$

$\frac{\partial}{\partial \xi} (\mathbf{z}_{ij}^{-1} \hat{\mathbf{z}}_{ij})$ 은 파라미터 ξ 가 $\mathbf{z}_{ij}^{-1} \hat{\mathbf{z}}_{ij}$ 에서 바로 보이지 않으므로 이를 lie algebra와 관련된 항으로 변경해야 한다.

$$\mathbf{z}_{ij}^{-1} \hat{\mathbf{z}}_{ij} \rightarrow \text{Log}(\mathbf{z}_{ij}^{-1} \hat{\mathbf{z}}_{ij}) \quad (113)$$

이 때, $\text{Log}(\cdot)$ 은 SE(3)에서 twist $\xi \in \mathbb{R}^6$ 로 변경하는 logarithm mapping을 의미한다. Logarithm mapping에 대한 자세한 내용은 해당 포스트를 참조하면 된다. 따라서 SE(3) 버전 relative pose 에서 \mathbf{e}_{ij} 는 다음과 같이 변경된다.

$$\boxed{\mathbf{e}_{ij}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \mathbf{z}_{ij}^{-1} \hat{\mathbf{z}}_{ij} \rightarrow \mathbf{e}_{ij}(\xi_i, \xi_j) = \text{Log}(\mathbf{z}_{ij}^{-1} \hat{\mathbf{z}}_{ij})} \quad (114)$$

이를 자세히 풀어쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_{ij}(\xi_i, \xi_j) &= \text{Log}(\mathbf{z}_{ij}^{-1} \hat{\mathbf{z}}_{ij}) \\ &= \text{Log}(\mathbf{z}_{ij}^{-1} \mathbf{x}_i^{-1} \mathbf{x}_j) \\ &= \text{Log}(\exp(-\xi_{ij}]_\times) \exp(-\xi_i]_\times) \exp(\xi_j]_\times))\end{aligned}\quad (115)$$

위 식을 보면 \mathbf{z}_{ij} 안에 ξ_i, ξ_j 파라미터가 exponential mapping으로 연결되어 있는 것을 알 수 있다. 위 식 두 번째 라인의 공식에 왼쪽 섭동(perturbation) 모델을 적용하여 증분량을 표현하면 다음과 같다.

$$\mathbf{e}_{ij}(\xi_i + \Delta\xi_i, \xi_j + \Delta\xi_j) = \text{Log}(\hat{\mathbf{z}}_{ij}^{-1} \mathbf{x}_i^{-1} \exp(-[\Delta\xi_i]_\times) \exp([\Delta\xi_j]_\times) \mathbf{x}_j) \quad (116)$$

Tip

위 식에서 증분량 항을 왼쪽 또는 오른쪽으로 이동시켜야 $\mathbf{e} + \mathbf{J}\Delta\xi$ 꼴로 항이 정리된다. 이를 수행하기 위해 아래와 같은 adjoint matrix of SE(3)의 성질을 이용해야 한다. Adjoint martix에 대한 자세한 내용은 해당 포스트를 참조하면 된다.

$$\exp([\text{Ad}_{\mathbf{T}} \cdot \xi]_\times) = \mathbf{T} \cdot \exp([\xi]_\times) \cdot \mathbf{T}^{-1} \quad (117)$$

위 식을 $\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}^{-1}$ 에 대한 식으로 변형하면 다음과 같다.

$$\exp([\text{Ad}_{\mathbf{T}^{-1}} \cdot \xi]_\times) = \mathbf{T}^{-1} \cdot \exp([\xi]_\times) \cdot \mathbf{T} \quad (118)$$

그리고 정리하면 다음과 같은 공식을 얻을 수 있다.

$$\exp([\xi]_\times) \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \exp([\text{Ad}_{\mathbf{T}^{-1}} \cdot \xi]_\times) \quad (119)$$

(119)을 사용하면 (116)의 중간에 있는 $\exp(\cdot) \exp(\cdot)$ 항을 오른쪽 또는 왼쪽으로 이동시킬 수 있다. 본 포스트에서는 오른쪽으로 이동시키는 과정에 대해 설명한다. 이를 $\Delta\xi_i, \Delta\xi_j$ 별로 각각 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_{ij}(\xi_i + \Delta\xi_i, \xi_j) &= \text{Log}(\hat{\mathbf{z}}_{ij}^{-1} \mathbf{x}_i^{-1} \exp(-[\Delta\xi_i]_\times) \mathbf{x}_j) \\ &= \text{Log}(\mathbf{z}_{ij}^{-1} \mathbf{x}_i^{-1} \mathbf{x}_j \exp(-\text{Ad}_{\mathbf{x}_j^{-1}} \Delta\xi_i]_\times)) \quad \cdots [1] \\ \mathbf{e}_{ij}(\xi_i, \xi_j + \Delta\xi_j) &= \text{Log}(\hat{\mathbf{z}}_{ij}^{-1} \mathbf{x}_i^{-1} \exp([\Delta\xi_j]_\times) \mathbf{x}_j) \\ &= \text{Log}(\mathbf{z}_{ij}^{-1} \mathbf{x}_i^{-1} \mathbf{x}_j \exp([\text{Ad}_{\mathbf{x}_j^{-1}} \Delta\xi_j]_\times)) \quad \cdots [2]\end{aligned}\quad (120)$$

이를 간단하게 표현하기 위해 치환하여 표시하면 [1], [2]는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\text{Log}(\exp([\mathbf{a}]_\times) \exp([\mathbf{b}]_\times)) &\quad \cdots [1] \\ \text{Log}(\exp([\mathbf{a}]_\times) \exp([\mathbf{c}]_\times)) &\quad \cdots [2]\end{aligned}\quad (121)$$

- $\exp([\mathbf{a}]_\times) = \mathbf{z}_{ij}^{-1} \mathbf{x}_i^{-1} \mathbf{x}_j$: 변환행렬을 exponential 항으로 표현한 모습. 앞서 (114) 정의에 따라 $\mathbf{a} = \mathbf{e}_{ij}(\xi_i, \xi_j)$ 이다.
- $\mathbf{b} = -\text{Ad}_{\mathbf{x}_j^{-1}} \Delta\xi_i$
- $\mathbf{c} = \text{Ad}_{\mathbf{x}_j^{-1}} \Delta\xi_j$

위 식은 오른쪽 BCH 근사를 사용하여 정리할 수 있다.

Tip

오른쪽 BCH 근사는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\exp([\xi]_\times) \exp([\Delta\xi]_\times) &= \exp([\xi + \mathcal{J}_r^{-1} \Delta\xi]_\times) \\ \exp([\xi + \Delta\xi]_\times) &= \exp([\xi]_\times) \exp([\mathcal{J}_r \Delta\xi]_\times)\end{aligned}\quad (122)$$

자세한 내용은 Visual SLAM 입문 챕터 4를 참조하면 된다.

BCH 근사를 사용하여 (121)을 정리하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned}\text{Log}(\exp([\mathbf{a}]_\times) \exp([\mathbf{b}]_\times)) &= \text{Log}(\exp([\mathbf{a} + \mathcal{J}_r^{-1}\mathbf{b}]_\times)) \\ &= \mathbf{a} + \mathcal{J}_r^{-1}\mathbf{b} \quad \cdots [1] \\ \text{Log}(\exp([\mathbf{a}]_\times) \exp([\mathbf{c}]_\times)) &= \text{Log}(\exp([\mathbf{a} + \mathcal{J}_r^{-1}\mathbf{c}]_\times)) \\ &= \mathbf{a} + \mathcal{J}_r^{-1}\mathbf{c} \quad \cdots [2]\end{aligned}\tag{123}$$

최종적으로 치환을 풀고 $\Delta\xi_i, \Delta\xi_j$ 식을 합하여 다시 쓰면 (102)의 SE(3) 베전 공식이 된다.

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_{ij}(\xi_i + \Delta\xi_i, \xi_j + \Delta\xi_j) &= \mathbf{a} + \mathcal{J}_r^{-1}\mathbf{b} + \mathcal{J}_r^{-1}\mathbf{c} \\ &= \mathbf{e}_{ij}(\xi_i, \xi_j) - \mathcal{J}_r^{-1}\text{Ad}_{\mathbf{x}_j^{-1}}\Delta\xi_i + \mathcal{J}_r^{-1}\text{Ad}_{\mathbf{x}_j^{-1}}\Delta\xi_j \\ &= \mathbf{e}_{ij}(\xi_i, \xi_j) + \frac{\partial \mathbf{e}_{ij}}{\partial \Delta\xi_i} \Delta\xi_i + \frac{\partial \mathbf{e}_{ij}}{\partial \Delta\xi_j} \Delta\xi_j\end{aligned}\tag{124}$$

따라서 최종적인 relative pose 에러의 SE(3) 베전 자코비안은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{e}_{ij}}{\partial \Delta\xi_i} &= -\mathcal{J}_r^{-1}\text{Ad}_{\mathbf{x}_j^{-1}} \in \mathbb{R}^{6 \times 6} \\ \frac{\partial \mathbf{e}_{ij}}{\partial \Delta\xi_j} &= \mathcal{J}_r^{-1}\text{Ad}_{\mathbf{x}_j^{-1}} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}\end{aligned}\tag{125}$$

이 때, \mathcal{J}_r^{-1} 은 식이 복잡하여 일반적으로 이를 아래와 같이 근사하여 사용하거나 \mathbf{I}_6 로 놓고 사용하기도 한다.

$$\mathcal{J}_r^{-1} \approx \mathbf{I}_6 + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} [\mathbf{w}]_\times & [\mathbf{v}]_\times \\ \mathbf{0} & [\mathbf{w}]_\times \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}\tag{126}$$

만약 $\mathcal{J}_r^{-1} = \mathbf{I}_6$ 로 가정하고 최적화를 수행하면 연산량 측면에서 감소 효과는 있지만 최적화 성능은 위와 같이 근사한 자코비안을 사용하는 방법이 미세하게 우세하다. 자세한 내용은 Visual SLAM 입문 챕터 11을 참조하면 된다.

5.2 Code implementations

- g2o 코드: edge_se3_expmapper.cpp#L55

- 위 g2o 코드에서는 에러를 $\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{x}_j^{-1}\mathbf{z}_{ij}\mathbf{x}_i$ 로 정의하여 자코비안이 위 설명과 약간 달라지게 된다.
- $\frac{\partial \mathbf{e}_{ij}}{\partial \Delta\xi_i} = \mathcal{J}_l^{-1}\text{Ad}_{\mathbf{x}_j^{-1}\mathbf{z}_{ij}}$
- $\frac{\partial \mathbf{e}_{ij}}{\partial \Delta\xi_j} = -\mathcal{J}_r^{-1}\text{Ad}_{\mathbf{x}_i^{-1}\mathbf{z}_{ij}^{-1}}$
- 이는 (120)에서 $\Delta\xi_i$ 는 왼쪽으로 항을 넘겨서 정리하고 $\Delta\xi_j$ 는 오른쪽으로 항을 넘겨서 정리한 후 합쳐준 형식과 동일하다.
- 또한 $\mathcal{J}_l^{-1} \approx \mathbf{I}_6, \mathcal{J}_r^{-1} \approx \mathbf{I}_6$ 으로 근사한 것으로 보인다. 따라서 실제 구현된 코드는 다음과 같다.
 - * $\frac{\partial \mathbf{e}_{ij}}{\partial \Delta\xi_i} \approx \text{Ad}_{\mathbf{x}_j^{-1}\mathbf{z}_{ij}}$
 - * $\frac{\partial \mathbf{e}_{ij}}{\partial \Delta\xi_j} \approx -\text{Ad}_{\mathbf{x}_i^{-1}\mathbf{z}_{ij}^{-1}}$

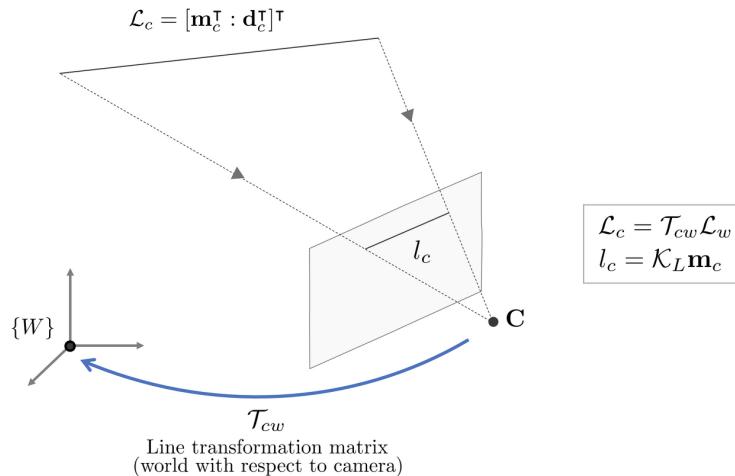
6 Line reprojection error

Line reprojection 에러는 plücker coordinate로 표현한 3차원 공간 상의 직선을 최적화할 때 사용하는 에러이다. Plücker coordinate에 대한 자세한 내용은 Plücker Coordinate 개념 정리 포스트를 참조하면 된다.

NOMENCLATURE of line reprojection error

- $\mathcal{T}_{cw} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$: Plücker 직선의 변환 행렬
- \mathcal{K}_L : 직선의 내부 파라미터 행렬(line intrinsic matrix)
- $\mathbf{U} \in SO(3)$: 3차원 직선의 회전 행렬
- $\mathbf{W} \in SO(2)$: 3차원 직선이 원점과 떨어진 거리 정보를 포함하는 행렬

- $\theta \in \mathbb{R}^3$: SO(3) 회전행렬에 대응하는 파라미터
- $\theta \in \mathbb{R}$: SO(2) 회전행렬에 대응하는 파라미터
- \mathbf{u}_i : i 번째 열벡터(column vector)
- $\mathcal{X} = [\delta_\theta, \delta_\xi]$: 상태 변수
- $\delta_\theta = [\theta^\top, \theta] \in \mathbb{R}^4$: orthonormal 표현법의 상태 변수
- $\delta_\xi = [\delta\xi] \in se(3)$: Lie theory를 통한 업데이트 방법은 해당 링크를 참조하면 된다
- \oplus : 상태 변수 $\delta_\theta, \delta_\xi$ 를 한 번에 업데이트할 수 있는 연산자.
- $\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{e}_l}{\partial \mathcal{X}} = \frac{\partial \mathbf{e}_l}{\partial [\delta_\theta, \delta_\xi]}$



3차원 공간 상의 직선은 Plücker Coordinate를 사용하여 6차원 열벡터로 표현할 수 있다.

$$\mathcal{L} = [\mathbf{m}^\top : \mathbf{d}^\top]^\top = [m_x : m_y : m_z : d_x : d_y : d_z]^\top \quad (127)$$

앞서 설명한 $[\mathbf{d} : \mathbf{m}]$ 순서와 달리 Plücker Coordinate를 활용한 논문에서는 대부분 $[\mathbf{m} : \mathbf{d}]$ 순서를 사용하기 때문에 본 섹션에서도 해당 순서로 직선을 표현한다. 해당 직선 표현법은 스케일 모호성을 가지고 있기 때문에(up to scale) 5자유도를 가지며 \mathbf{m}, \mathbf{d} 는 단위 벡터가 아니어도 두 벡터 값의 비율에 의해 직선을 유일하게 표현할 수 있다.

6.1 Line Transformation and projection

월드 좌표계에서 본 직선을 \mathcal{L}_w 라고 하면 이를 카메라 좌표계에서 봤을 경우 다음과 같이 변환할 수 있다.

$$\mathcal{L}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_c \\ \mathbf{d}_c \end{bmatrix} = T_{cw}\mathcal{L}_w = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{cw} & \mathbf{t}^\top \mathbf{R}_{cw} \\ 0 & \mathbf{R}_{cw} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{m}_w \\ \mathbf{d}_w \end{bmatrix} \quad (128)$$

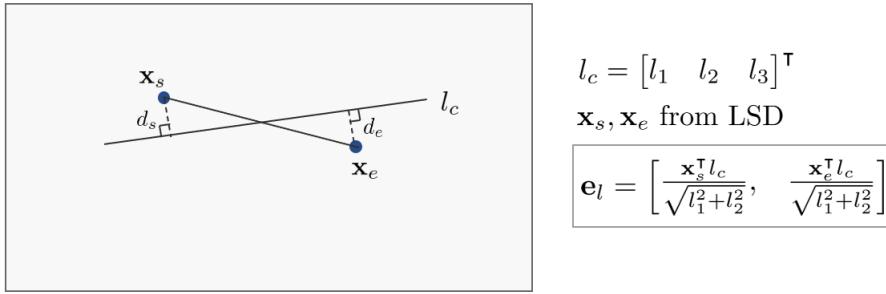
해당 직선을 이미지 평면 상에 프로젝션시키면 다음과 같다.

$$l_c = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} = \mathcal{K}_L \mathbf{m}_c = \begin{bmatrix} f_y & & \\ & f_x & \\ -f_y c_x & -f_x c_y & f_x f_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} \quad (129)$$

\mathcal{K}_L 은 $\mathcal{P} = [\det(\mathbf{N})\mathbf{N}^{-\top}|\mathbf{n}^\top\mathbf{N}]$ 에서 $\mathbf{P} = K[\mathbf{I}|\mathbf{0}]$ 인 경우를 의미한다. 따라서 $\mathcal{P} = [\det(\mathbf{K})\mathbf{K}^{-\top}|\mathbf{0}]$ 이 되므로 \mathcal{L} 의 \mathbf{d} 항이 0으로 소거된다. 따라서 $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} f_x & c_x \\ f_y & c_y \\ 1 \end{bmatrix}$ 일 때 다음과 같은 식이 유도된다.

$$\mathcal{K}_L = \det(\mathbf{K})\mathbf{K}^{-\top} = \begin{bmatrix} f_y & & \\ & f_x & \\ -f_y c_x & -f_x c_y & f_x f_y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad (130)$$

6.2 Line reprojection error



직선의 reprojection 에러 \mathbf{e}_l 은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{e}_l = [d_s, d_e] = \left[\frac{\mathbf{x}_s^\top l_c}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}}, \quad \frac{\mathbf{x}_e^\top l_c}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}} \right] \in \mathbb{R}^2 \quad (131)$$

이는 점과 직선 사이의 거리 공식을 통해 나타낼 수 있다. 이 때, $\{\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_e\}$ 는 각각 line feature extract(e.g., LSD)를 사용하여 추출한 직선의 시작점과 끝점을 의미한다. 즉, l_c 가 모델링을 통해 구한 예측값이고 $\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_e$ 를 잇는 직선이 센서 데이터를 통해 측정한 관측값이 된다.

6.3 Orthonormal representation

앞서 구한 \mathbf{e}_l 를 사용하여 BA 최적화를 수행할 때 Plücker Coordinate 표현법을 그대로 사용하게 되면 문제가 발생 한다. Plücker Coordinate는 항상 $\mathbf{m}^\top \mathbf{d} = 0$ 이라는 Klein quadric 제약조건을 만족해야 하기 때문에 5자유도를 가지므로 직선을 표현할 수 있는 최소 파라미터 개수인 4개의 비해 over-parameterized 되어 있다. Over-parameterized 된 표현법의 단점은 다음과 같다.

- 중복되는 파라미터를 계산해야 하기 때문에 최적화 수행 시 연산량이 증가한다.
- 추가적인 자유도로 인해 수치적인 불안정성(numerical instability) 문제가 야기될 수 있다.
- 파라미터가 업데이트될 때마다 항상 제약조건을 만족하는지 체크해줘야 한다.

따라서 직선을 최적화 할 때는 일반적으로 최소 파라미터인 4자유도로 변경하기 위해 orthonormal 표현법을 사용한다. 즉, 직선을 표현할 때는 Plücker Coordinate를 사용하지만 최적화를 수행할 때는 orthonormal 표현법으로 변형한 뒤 최적값을 업데이트하고 다시 Plücker Coordinate로 돌아오는 방식을 취한다.

Orthonormal 표현법은 다음과 같다. 3차원 공간 상의 직선은 항상 다음과 같이 표현 가능하다.

$$(\mathbf{U}, \mathbf{W}) \in SO(3) \times SO(2) \quad (132)$$

임의의 Plücker 직선 $\mathcal{L} = [\mathbf{m}^\top : \mathbf{d}^\top]^\top$ 은 이와 일대일 대응하는 (\mathbf{U}, \mathbf{W}) 를 항상 가지고 있으며 이러한 표현 방법을 orthonormal 표현법이라고 한다. 월드 상의 한 직선 $\mathcal{L}_w = [\mathbf{m}_w^\top : \mathbf{d}_w^\top]^\top$ 이 주어졌을 때 \mathcal{L}_w 를 QR decomposition 함으로써 (\mathbf{U}, \mathbf{W}) 구할 수 있다.

$$[\mathbf{m}_w \mid \mathbf{d}_w] = \mathbf{U} \begin{bmatrix} w_1 & 0 \\ 0 & w_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{with set: } \mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1 & -w_2 \\ w_2 & w_1 \end{bmatrix} \quad (133)$$

이 때, 상삼각행렬(upper triangle matrix) \mathbf{R} 의 (1, 2) 원소는 Plücker 제약조건(Klein quadric)으로 인해 항상 0이 된다. \mathbf{U}, \mathbf{W} 는 각각 3차원, 2차원 회전행렬을 의미하므로 $\mathbf{U} = \mathbf{R}(\theta), \mathbf{W} = \mathbf{R}(\theta)$ 와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\theta) &= \mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3] = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{m}_w}{\|\mathbf{m}_w\|} & \frac{\mathbf{d}_w}{\|\mathbf{d}_w\|} & \frac{\mathbf{m}_w \times \mathbf{d}_w}{\|\mathbf{m}_w \times \mathbf{d}_w\|} \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}(\theta) &= \mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1 & -w_2 \\ w_2 & w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\|\mathbf{m}_w\|^2 + \|\mathbf{d}_w\|^2}} \begin{bmatrix} \|\mathbf{m}_w\| & \|\mathbf{d}_w\| \\ -\|\mathbf{d}_w\| & \|\mathbf{m}_w\| \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (134)$$

실제 최적화를 수행할 때는 $\mathbf{U} \leftarrow \mathbf{U}\mathbf{R}(\theta), \mathbf{W} \leftarrow \mathbf{W}\mathbf{R}(\theta)$ 과 같이 업데이트된다. 따라서 orthonormal 표현법은 3차원 공간 상의 직선을 $\delta_\theta = [\theta^\top, \theta] \in \mathbb{R}^4$ 를 통해 4자유도로 표현할 수 있다. 최적화를 통해 업데이트된 $[\theta^\top, \theta]$ 는 다음과 같이 \mathcal{L}_w 로 변환된다.

$$\mathcal{L}_w = [w_1 \mathbf{u}_1^\top \quad w_2 \mathbf{u}_2^\top] \quad (135)$$

6.4 Error function formulation

직선에 대한 reprojection 에러 \mathbf{e}_l 를 최적화하기 위해서는 Gauss-Newton(GN), Levenberg-Marquardt(LM) 등의 비선형 최소제곱법을 사용하여 반복적으로(iterative) 최적 변수를 업데이트해야 한다. reprojection 에러를 사용하여 에러 함수를 표현하면 다음과 같다.

$$\mathbf{E}_l(\mathcal{X}) = \sum_i \sum_j \|\mathbf{e}_{l,ij}\|^2 \quad (136)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^* &= \arg \min_{\mathcal{X}^*} \mathbf{E}_l(\mathcal{X}) \\ &= \arg \min_{\mathcal{X}^*} \sum_i \sum_j \|\mathbf{e}_{l,ij}\|^2 \\ &= \arg \min_{\mathcal{X}^*} \sum_i \sum_j \mathbf{e}_{l,ij}^\top \mathbf{e}_{l,ij} \end{aligned} \quad (137)$$

$\mathbf{E}_l(\mathcal{X}^*)$ 를 만족하는 $\|\mathbf{e}_l(\mathcal{X}^*)\|^2$ 를 non-linear least squares를 통해 반복적으로 계산할 수 있다. 작은 증분량 $\Delta \mathcal{X}$ 를 반복적으로 \mathcal{X} 에 업데이트함으로써 최적의 상태를 찾는다.

$$\arg \min_{\mathcal{X}^*} \mathbf{E}_l(\mathcal{X} + \Delta \mathcal{X}) = \arg \min_{\mathcal{X}^*} \sum_i \sum_j \|\mathbf{e}_l(\mathcal{X} + \Delta \mathcal{X})\|^2 \quad (138)$$

엄밀하게 말하면 상태 증분량 $\Delta \mathcal{X}$ 은 SE(3) 변환행렬을 포함하므로 \oplus 연산자를 통해 기존 상태 \mathcal{X} 에 더해지는게 맞지만 표현의 편의를 위해 $+$ 연산자를 사용하였다.

$$\mathbf{e}_l(\mathcal{X} \oplus \Delta \mathcal{X}) \rightarrow \mathbf{e}_l(\mathcal{X} + \Delta \mathcal{X}) \quad (139)$$

위 식은 테일러 1차 근사를 통해 다음과 같이 표현이 가능하다.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_l(\mathcal{X} + \Delta \mathcal{X}) &\approx \mathbf{e}_l(\mathcal{X}) + \mathbf{J} \Delta \mathcal{X} \\ &= \mathbf{e}_l(\mathcal{X}) + \mathbf{J}_\theta \Delta \theta + \mathbf{J}_\xi \Delta \xi \\ &= \mathbf{e}_l(\mathcal{X}) + \frac{\partial \mathbf{e}_l}{\partial \delta_\theta} \Delta \theta + \frac{\partial \mathbf{e}_l}{\partial \delta_\xi} \Delta \xi \end{aligned} \quad (140)$$

$$\arg \min_{\mathcal{X}^*} \mathbf{E}_l(\mathcal{X} + \Delta \mathcal{X}) \approx \arg \min_{\mathcal{X}^*} \sum_i \sum_j \|\mathbf{e}_l(\mathcal{X}) + \mathbf{J} \Delta \mathcal{X}\|^2 \quad (141)$$

이를 미분하여 최적의 증분량 $\Delta \mathcal{X}^*$ 값을 구하면 다음과 같다. 자세한 유도 과정은 본 섹션에서는 생략한다. 유도 과정에 대해 자세히 알고 싶으면 이전 섹션을 참조하면 된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^\top \mathbf{J} \Delta \mathcal{X}^* &= -\mathbf{J}^\top \mathbf{e} \\ \mathbf{H} \Delta \mathcal{X}^* &= -\mathbf{b} \end{aligned} \quad (142)$$

6.4.1 The analytical jacobian of 3d line

이전 섹션에서 설명한 것처럼 비선형 최적화를 수행하기 위해서는 \mathbf{J} 를 계산해야 한다. \mathbf{J} 는 다음과 같이 구성되어 있다.

$$\mathbf{J} = [\mathbf{J}_\theta, \mathbf{J}_\xi] \quad (143)$$

$[\mathbf{J}_\theta, \mathbf{J}_\xi]$ 는 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_\theta &= \frac{\partial \mathbf{e}_l}{\partial \delta_\theta} = \frac{\partial \mathbf{e}_l}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial \mathcal{L}_c} \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \mathcal{L}_w} \frac{\partial \mathcal{L}_w}{\partial \delta_\theta} \\ \mathbf{J}_\xi &= \frac{\partial \mathbf{e}_l}{\partial \delta_\xi} = \frac{\partial \mathbf{e}_l}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial \mathcal{L}_c} \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \delta_\xi} \end{aligned} \quad (144)$$

$\frac{\partial \mathbf{e}_l}{\partial l}$ 는 다음과 같이 구할 수 있다. 이 때, l 은 벡터이고 l_i 는 스칼라임에 유의한다.

$$\frac{\partial \mathbf{e}_l}{\partial l} = \frac{1}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}} \begin{bmatrix} x_s - \frac{l_1 \mathbf{x}_s l}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}} & y_s - \frac{l_2 \mathbf{x}_s l}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}} & 1 \\ x_e - \frac{l_1 \mathbf{x}_e l}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}} & y_e - \frac{l_2 \mathbf{x}_e l}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}} & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3} \quad (145)$$

$\frac{\partial l}{\partial \mathcal{L}_c}$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\partial l}{\partial \mathcal{L}_c} = \frac{\partial \mathcal{K}_L \mathbf{m}_c}{\partial \mathcal{L}_c} = [\mathcal{K}_L \quad \mathbf{0}_{3 \times 3}] = \begin{bmatrix} f_y & 0 & 0 \\ 0 & f_x & 0 \\ -f_y c_x & -f_x c_y & f_x f_y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 6} \quad (146)$$

$\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \mathcal{L}_w}$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \mathcal{L}_w} = \frac{\partial \mathcal{T}_{cw} \mathcal{L}_w}{\partial \mathcal{L}_w} = \mathcal{T}_{cw} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{cw} & \mathbf{t}^\wedge \mathbf{R}_{cw} \\ 0 & \mathbf{R}_{cw} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6} \quad (147)$$

orthonormal 표현법에 대한 자코비안 $\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \delta_\theta}$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\partial \mathcal{L}_w}{\partial \delta_\theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} & -w_1 \mathbf{u}_3 & w_1 \mathbf{u}_2 & -w_2 \mathbf{u}_1 \\ w_2 \mathbf{u}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 1} & -w_2 \mathbf{u}_1 & w_1 \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 4} \quad (148)$$

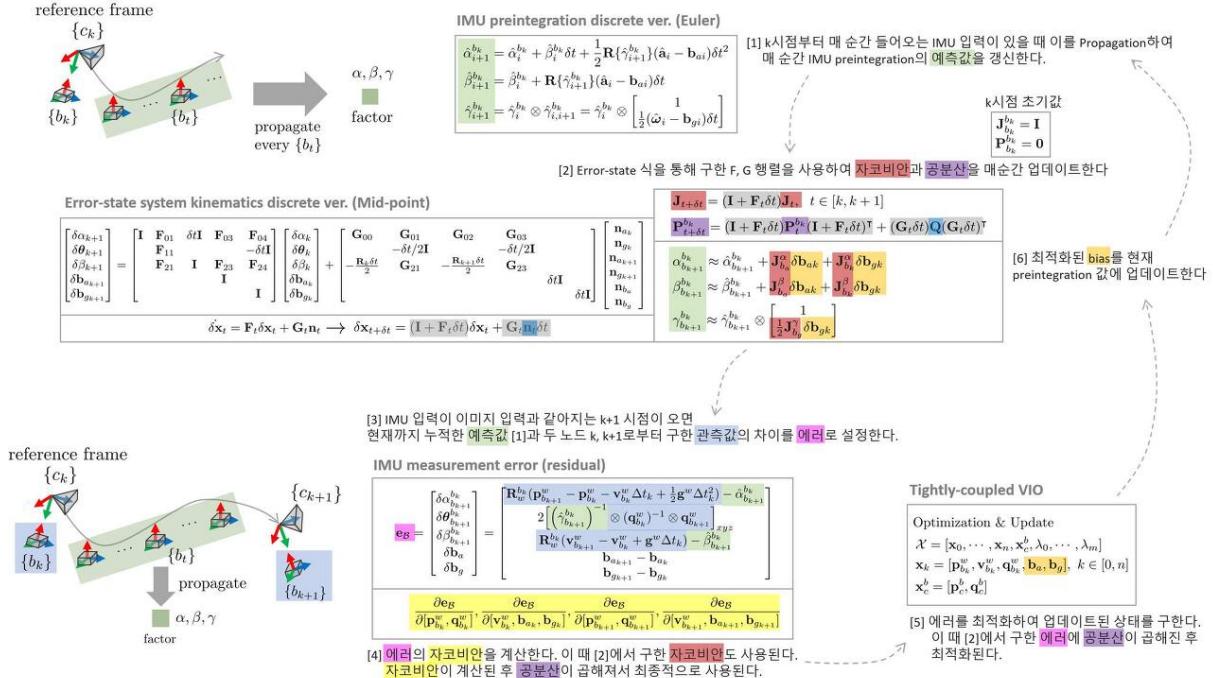
카메라 포즈에 대한 자코비안 $\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \delta_\xi}$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \delta_\xi} = \begin{bmatrix} -(\mathbf{Rm})^\wedge - (\mathbf{t}^\wedge \mathbf{Rd})^\wedge & -(\mathbf{Rd})^\wedge \\ -(\mathbf{Rd})^\wedge & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6} \quad (149)$$

6.5 Code implementations

- Structure PLP SLAM 코드: g2o/se3/pose_opt_edge_line3d_orthonormal.h#L62
- Structure PLP SLAM 코드2: g2o/se3/pose_opt_edge_line3d_orthonormal.h#L81

7 IMU measurement error

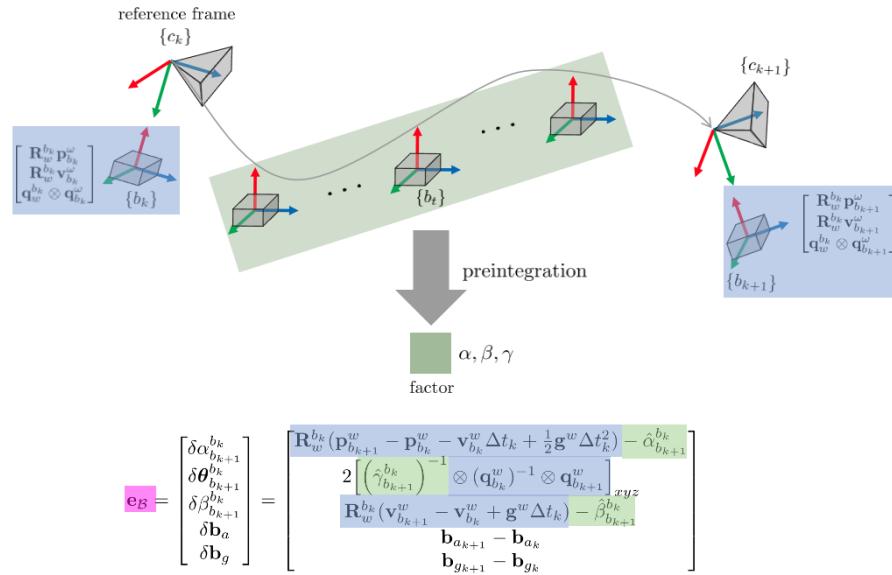


IMU measurement 에러를 구하기 위해서는 우선 IMU preintegration 기법과 error-state 모델링에 대해 알아야 한다. 전반적인 IMU measurement 에러 기반 최적화 과정을 표현한 그림은 위와 같다. [1]-[6] 순서대로 보면 된다. 보다 자세한 내용은 [SLAM] Formula Derivation and Analysis of the VINS-mono 내용 정리를 참조하면 된다.

NOMENCLATURE of IMU measurement error

- $\alpha_{b_{k+1}}^{b_k} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$: $t \in [b_k, b_{k+1}]$ 시간 동안 누적된 위치의 관측값
- $\hat{\alpha}_{b_{k+1}}^{b_k} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$: $t \in [b_k, b_{k+1}]$ 시간 동안 누적된 위치의 예측값
- $\beta_{b_{k+1}}^{b_k} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$: $t \in [b_k, b_{k+1}]$ 시간 동안 누적된 속도의 관측값
- $\hat{\beta}_{b_{k+1}}^{b_k} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$: $t \in [b_k, b_{k+1}]$ 시간 동안 누적된 속도의 예측값

- $\gamma_{b_{k+1}}^{b_k} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$: $t \in [b_k, b_{k+1}]$ 시간 동안 누적된 방향(orientation)의 관측값
- $\hat{\gamma}_{b_{k+1}}^{b_k} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$: $t \in [b_k, b_{k+1}]$ 시간 동안 누적된 방향(orientation)의 예측값
- $\mathcal{X} = [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_c^b, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m]$: 모든 상태 변수
- $\mathbf{x}_k = [\mathbf{p}_{b_k}^w, \mathbf{v}_{b_k}^w, \mathbf{q}_{b_k}^w, \mathbf{b}_a, \mathbf{b}_g]$: 특정 k 시점에서 IMU 모델의 상태 변수
- $\mathbf{x}_c^b = [\mathbf{p}_c^b, \mathbf{q}_c^b]$: 카메라와 IMU의 외부 파라미터(extrinsic parameter)
- \mathcal{X}_k : 특정 두 시점 $[b_k, b_{k+1}]$ 의 상태변수. 이는 즉 $\mathcal{X}_k = (\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1})$ 과 같다.
- λ : 특징점의 inverse depth
- \otimes : 쿼터니언 곱셈 연산자. (e.g., $\mathbf{q} = \mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{q}_2$)
- \mathcal{B} : 모든 IMU b_k 값들의 집합
- \ominus : 벡터와 쿼터니언을 한 번에 뺄셈 연산하는 연산자
- $\mathbf{P}_\mathcal{B}$: 모든 IMU b_k 값들의 공분산
- $\Omega_\mathcal{B}$: 공분산 $\mathbf{P}_\mathcal{B}$ 의 역행렬. Information 행렬을 의미한다.
- $\mathbf{e}_{\mathcal{B}, k} = \mathbf{e}_\mathcal{B}(\mathcal{X}_k)$



IMU 또한 이전 섹션에서 설명한 예러들과 동일하게 관측값 - 예측값을 예러로 정의하며 이를 IMU measurement 예러 $\mathbf{e}_\mathcal{B}$ 라고 한다. 자세히 설명하면, IMU measurement 예러 $\mathbf{e}_\mathcal{B}$ 는 $t \in [b_k, b_{k+1}]$ 시간 동안 들어오는 IMU 데이터를 누적한 preintegration과 bias $[\alpha, \beta, \gamma, \mathbf{b}_a, \mathbf{b}_g]$ 의 관측값($\mathbf{z}_{b_{k+1}}^{b_k}$)과 예측값($\hat{\mathbf{z}}_{b_{k+1}}^{b_k}$)의 차이를 의미한다.

$$\mathbf{e}_\mathcal{B}(\mathcal{X}_k) = \mathbf{z}_{b_{k+1}}^{b_k} \ominus \hat{\mathbf{z}}_{b_{k+1}}^{b_k} = \begin{bmatrix} \alpha_{b_{k+1}}^{b_k} - \hat{\alpha}_{b_{k+1}}^{b_k} \\ \beta_{b_{k+1}}^{b_k} - \hat{\beta}_{b_{k+1}}^{b_k} \\ \gamma_{b_{k+1}}^{b_k} \otimes \hat{\gamma}_{b_{k+1}}^{b_k} \\ \mathbf{b}_{a_k} - \hat{\mathbf{b}}_a \\ \mathbf{b}_g - \hat{\mathbf{b}}_g \end{bmatrix} \quad (150)$$

관측값과 예측값에 대해 자세히 알아보자. 우선, 관측값은 두 시점 b_k, b_{k+1} 의 위치 \mathbf{p} 와 속도 \mathbf{v} 그리고 방향 \mathbf{q} 값을 사용하여 구할 수 있다. 관측값을 구하기 위해 $[b_k, b_{k+1}]$ 구간의 IMU kinematics 공식을 보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_w^{b_k} \mathbf{p}_{b_{k+1}}^w &= \mathbf{R}_w^{b_k} (\mathbf{p}_{b_k}^w + \mathbf{v}_{b_k}^w \Delta t - \frac{1}{2} \mathbf{g}^w \Delta t_k^2) + \alpha_{b_{k+1}}^{b_k} \\ \mathbf{R}_w^{b_k} \mathbf{v}_{b_{k+1}}^w &= \mathbf{R}_w^{b_k} (\mathbf{v}_{b_k}^w - \mathbf{g}^w \Delta t_k) + \beta_{b_{k+1}}^{b_k} \\ \mathbf{q}_w^{b_k} \otimes \mathbf{q}_{b_{k+1}}^w &= \gamma_{b_{k+1}}^{b_k} \end{aligned} \quad (151)$$

따라서 관측값은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{z}_{b_{k+1}}^{b_k} = \begin{bmatrix} \alpha_{b_{k+1}}^{b_k} \\ \beta_{b_{k+1}}^{b_k} \\ \gamma_{b_{k+1}}^{b_k} \\ \mathbf{b}_{a_{k+1}} - \mathbf{b}_{a_k} \\ \mathbf{b}_{g_{k+1}} - \mathbf{b}_{g_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_w^{b_k}(\mathbf{p}_{b_{k+1}}^w - \mathbf{p}_{b_k}^w - \mathbf{v}_{b_k}^w \Delta t_k + \frac{1}{2} \mathbf{g}^w \Delta t_k^2) \\ \mathbf{R}_w^{b_k}(\mathbf{v}_{b_{k+1}}^w - \mathbf{v}_{b_k}^w + \mathbf{g}^w \Delta t_k) \\ (\mathbf{q}_{b_k}^w)^{-1} \otimes \mathbf{q}_{b_{k+1}}^w \\ \mathbf{b}_{a_{k+1}} - \mathbf{b}_{a_k} \\ \mathbf{b}_{g_{k+1}} - \mathbf{b}_{g_k} \end{bmatrix} \quad (152)$$

다음으로 예측값은 $t \in [b_k, b_{k+1}]$ 시간동안 누적한 preintegration 값을 통해 구할 수 있다. 예측값을 구하기 위해 preintegration 식을 자세히 보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{b_{k+1}}^{b_k} &= \iint_{t \in [k, k+1]} \mathbf{R}_t^{b_k}(\hat{\mathbf{a}}_t - \mathbf{b}_{at} - \mathbf{n}_a) dt^2 \\ \hat{\beta}_{b_{k+1}}^{b_k} &= \int_{t \in [k, k+1]} \mathbf{R}_t^{b_k}(\hat{\mathbf{a}}_t - \mathbf{b}_{at} - \mathbf{n}_a) dt \\ \hat{\gamma}_{b_{k+1}}^{b_k} &= \int_{t \in [k, k+1]} \frac{1}{2} \Omega_R(\hat{\omega}_t - \mathbf{b}_{gt} - \mathbf{n}_g) \gamma_t^{b_k} dt \end{aligned} \quad (153)$$

위 식은 연속 신호에서 사용 가능한 공식이다. 하지만 실제 IMU 신호는 이산 신호(discrete signal)로 들어오므로 미분 방정식(differential equation)을 차분 방정식(difference equation)으로 표현해야 한다. 해당 과정에서 다양한 수치적분 알고리즘이 사용되는데, 수치적분에는 zero-order hold(euler), first-order hold(mid-point), higher order (RK4) 등이 존재한다. 이 중 VINS-mono에서 사용한 mid-point method를 사용해 차분 방정식을 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{t+1}^{b_k} &= \hat{\alpha}_t^{b_k} + \frac{1}{2}(\hat{\beta}_t^{b_k} + \hat{\beta}_{t+1}^{b_k})\delta t \\ &= \hat{\alpha}_t^{b_k} + \hat{\beta}_t^{b_k}\delta t + \frac{1}{4}[\mathbf{R}\{\hat{\gamma}_t^{b_k}\}(\hat{\mathbf{a}}_t - \mathbf{b}_{at}) + \mathbf{R}\{\hat{\gamma}_{t+1}^{b_k}\}(\hat{\mathbf{a}}_{t+1} - \mathbf{b}_{at})]\delta t^2 \\ \hat{\beta}_{t+1}^{b_k} &= \hat{\beta}_t^{b_k} + \frac{1}{2}[\mathbf{R}\{\hat{\gamma}_t^{b_k}\}(\hat{\mathbf{a}}_t - \mathbf{b}_{at}) + \mathbf{R}\{\hat{\gamma}_{t+1}^{b_k}\}(\hat{\mathbf{a}}_{t+1} - \mathbf{b}_{at})]\delta t \\ \hat{\gamma}_{t+1}^{b_k} &= \hat{\gamma}_t^{b_k} \otimes \hat{\gamma}_{t+1}^{b_k} = \hat{\gamma}_t^{b_k} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 1/4(\hat{\omega}_t + \hat{\omega}_{t+1} - 2\mathbf{b}_{gt})\delta t \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (154)$$

따라서 예측값은 (154) 식을 $t \in [b_k, b_{k+1}]$ 시간 동안 누적한 값으로 구할 수 있다. Bias 값은 예측값을 구할 수 없기 때문에 0으로 설정한다.

$$\hat{\mathbf{z}}_{b_{k+1}}^{b_k} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{b_{k+1}}^{b_k} \\ \hat{\beta}_{b_{k+1}}^{b_k} \\ \hat{\gamma}_{b_{k+1}}^{b_k} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (155)$$

지금까지 구한 값을 토대로 (150)를 풀어쓰면 IMU measurement에러는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{e}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}_k) = \mathbf{z}_{b_{k+1}}^{b_k} \ominus \hat{\mathbf{z}}_{b_{k+1}}^{b_k} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_w^{b_k}(\mathbf{p}_{b_{k+1}}^w - \mathbf{p}_{b_k}^w - \mathbf{v}_{b_k}^w \Delta t_k + \frac{1}{2} \mathbf{g}^w \Delta t_k^2) - \hat{\alpha}_{b_{k+1}}^{b_k} \\ \mathbf{R}_w^{b_k}(\mathbf{v}_{b_{k+1}}^w - \mathbf{v}_{b_k}^w + \mathbf{g}^w \Delta t_k) - \hat{\beta}_{b_{k+1}}^{b_k} \\ (\hat{\gamma}_{b_{k+1}}^{b_k})^{-1} \otimes (\mathbf{q}_{b_k}^w)^{-1} \otimes \mathbf{q}_{b_{k+1}}^w \\ \mathbf{b}_{a_{k+1}} - \mathbf{b}_{a_k} \\ \mathbf{b}_{g_{k+1}} - \mathbf{b}_{g_k} \end{bmatrix} \quad (156)$$

7.1 Error function formulation

모든 preintegration, bias들에 대한 에러 함수는 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{E}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}) = \sum_{k \in \mathcal{B}} \|\mathbf{e}_{\mathcal{B},k}\|_{\mathbf{P}_{\mathcal{B}}}^2 \quad (157)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}^* &= \arg \min_{\mathcal{X}^*} \mathbf{E}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}) \\
&= \arg \min_{\mathcal{X}^*} \sum_{k \in \mathcal{B}} \|\mathbf{e}_{\mathcal{B},k}\|_{\mathbf{P}_{\mathcal{B}}}^2 \\
&= \arg \min_{\mathcal{X}^*} \sum_{k \in \mathcal{B}} \mathbf{e}_{\mathcal{B},k}^\top \boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{B}} \mathbf{e}_{\mathcal{B},k} \\
&= \arg \min_{\mathcal{X}^*} \sum_{k \in \mathcal{B}} (\mathbf{z}_{b_{k+1}}^{b_k} \ominus \hat{\mathbf{z}}_{b_{k+1}}^{b_k})^\top \boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{B}} (\mathbf{z}_{b_{k+1}}^{b_k} \ominus \hat{\mathbf{z}}_{b_{k+1}}^{b_k})
\end{aligned} \tag{158}$$

위 식에서 $\mathbf{e}_{\mathcal{B},k} = \mathbf{e}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}_k)$ 를 의미한다.

Tip

실제 VINS-mono에서는 IMU measurement 에러 뿐만 아니라 visual residual \mathbf{r}_C , marginalization prior residual \mathbf{r}_p 값도 동시에 최적화하여 tightly-coupled VIO를 수행한다. VINS-mono에서는 IMU measurement 에러를 residual $\mathbf{r}_{\mathcal{B}}(\hat{\mathbf{z}}_{b_{k+1}}^{b_k}, \mathcal{X})$ 로 표현하였다.

$$\min_{\mathcal{X}} \left\{ \|\mathbf{r}_p - \mathbf{J}_p \mathcal{X}\|_{\mathbf{P}_M} + \sum_{k \in \mathcal{B}} \left\| \mathbf{r}_{\mathcal{B}}(\hat{\mathbf{z}}_{b_{k+1}}^{b_k}, \mathcal{X}) \right\|_{\mathbf{P}_{\mathcal{B}}} + \sum_{(l,j) \in \mathcal{C}} \left\| \mathbf{r}_C(\hat{\mathbf{z}}_l^{c_j}, \mathcal{X}) \right\|_{\mathbf{P}_l^{c_j}} \right\} \tag{159}$$

본 섹션에서는 이 중 IMU measurement 에러 $\mathbf{r}_{\mathcal{B}}(\hat{\mathbf{z}}_{b_{k+1}}^{b_k}, \mathcal{X})$ 에 대한 내용만 설명한다.

$\mathbf{E}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}^*)$ 를 만족하는 $\|\mathbf{e}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}_k^*)\|_{\mathbf{P}_{\mathcal{B}}}^2$ 를 non-linear least squares를 통해 반복적으로 계산할 수 있다. 작은 증분량 $\Delta \mathcal{X}$ 를 반복적으로 \mathcal{X} 에 업데이트함으로써 최적의 상태를 찾는다.

$$\arg \min_{\mathcal{X}^*} \mathbf{E}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X} + \Delta \mathcal{X}) = \arg \min_{\mathcal{X}^*} \sum_{k \in \mathcal{B}} \|\mathbf{e}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}_k + \Delta \mathcal{X}_k)\|^2 \tag{160}$$

엄밀하게 말하면 상태 증분량 $\Delta \mathcal{X}$ 은 쿼터니언을 포함하므로 \oplus 연산자를 통해 기존 상태 \mathcal{X} 에 더해지는게 맞지만 표현의 편의를 위해 $+$ 연산자를 사용하였다.

$$\mathbf{e}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}_k + \Delta \mathcal{X}_k) \rightarrow \mathbf{e}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}_k + \Delta \mathcal{X}_k) \tag{161}$$

위 식은 테일러 1차 근사를 통해 다음과 같이 표현이 가능하다.

$$\mathbf{e}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}_k + \Delta \mathcal{X}_k) \approx \mathbf{e}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}) + \mathbf{J} \Delta \mathcal{X}_k$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{e}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}_k) + \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{e}_{\mathcal{B}}}{\partial [\mathbf{p}_{b_k}^w, \mathbf{q}_{b_k}^w]} & \frac{\partial \mathbf{e}_{\mathcal{B}}}{\partial [\mathbf{v}_{b_k}^w, \mathbf{b}_{ak}, \mathbf{b}_{gk}]} & \frac{\partial \mathbf{e}_{\mathcal{B}}}{\partial [\mathbf{p}_{b_{k+1}}^w, \mathbf{q}_{b_{k+1}}^w]} & \frac{\partial \mathbf{e}_{\mathcal{B}}}{\partial [\mathbf{v}_{b_{k+1}}^w, \mathbf{b}_{ak+1}, \mathbf{b}_{gk+1}]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{p}_k^w \\ \Delta \mathbf{q}_k^w \\ \Delta \mathbf{v}_k^w \\ \Delta \mathbf{b}_{ak} \\ \Delta \mathbf{b}_{gk} \\ \Delta \mathbf{p}_{k+1}^w \\ \Delta \mathbf{q}_{k+1}^w \\ \Delta \mathbf{v}_{k+1}^w \\ \Delta \mathbf{b}_{ak+1} \\ \Delta \mathbf{b}_{gk+1} \end{bmatrix} \tag{162} \\
&= \mathbf{e}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}_k) + \frac{\partial \mathbf{e}_{\mathcal{B}}}{\partial [\mathbf{p}_{b_k}^w, \mathbf{q}_{b_k}^w]} (\Delta \mathbf{p}_k^w, \Delta \mathbf{q}_k^w) + \frac{\partial \mathbf{e}_{\mathcal{B}}}{\partial [\mathbf{v}_{b_k}^w, \mathbf{b}_{ak}, \mathbf{b}_{gk}]} (\Delta \mathbf{v}_k^w, \Delta \mathbf{b}_{ak}, \Delta \mathbf{b}_{gk}) \\
&\quad + \frac{\partial \mathbf{e}_{\mathcal{B}}}{\partial [\mathbf{p}_{b_{k+1}}^w, \mathbf{q}_{b_{k+1}}^w]} (\Delta \mathbf{p}_{k+1}^w, \Delta \mathbf{q}_{k+1}^w) + \frac{\partial \mathbf{e}_{\mathcal{B}}}{\partial [\mathbf{v}_{b_{k+1}}^w, \mathbf{b}_{ak+1}, \mathbf{b}_{gk+1}]} (\Delta \mathbf{v}_{k+1}^w, \Delta \mathbf{b}_{ak+1}, \Delta \mathbf{b}_{gk+1})
\end{aligned}$$

b_k 시점의 $[\mathbf{p}_{b_k}^w, \mathbf{v}_{b_k}^w, \mathbf{q}_{b_k}^w, \mathbf{b}_{ak}, \mathbf{b}_{gk}]$ 와 b_{k+1} 시점의 $[\mathbf{p}_{b_{k+1}}^w, \mathbf{v}_{b_{k+1}}^w, \mathbf{q}_{b_{k+1}}^w, \mathbf{b}_{ak+1}, \mathbf{b}_{gk+1}]$ 모두 여러 값에 관여하기 때문에 총 10개 변수에 대한 자코비안을 모두 계산해야 한다. VINS-mono에서는 다음과 같이 4개의 그룹으로 묶어서 상태 변수를 표현하였다.

$$\begin{aligned}
&[\mathbf{p}_{b_k}^w, \mathbf{q}_{b_k}^w] && \dots \text{for } \mathbf{J}[0] \\
&[\mathbf{v}_{b_k}^w, \mathbf{b}_{ak}, \mathbf{b}_{gk}] && \dots \text{for } \mathbf{J}[1] \\
&[\mathbf{p}_{b_{k+1}}^w, \mathbf{q}_{b_{k+1}}^w] && \dots \text{for } \mathbf{J}[2] \\
&[\mathbf{v}_{b_{k+1}}^w, \mathbf{b}_{ak+1}, \mathbf{b}_{gk+1}] && \dots \text{for } \mathbf{J}[3]
\end{aligned} \tag{163}$$

Tightly-coupled VIO에서 최적화하는 상태 변수 \mathcal{X} 은 inverse depth λ 와 외부 파라미터(extrinsic parameter) \mathbf{x}_c^b , time difference td 의 상태를 포함하지만 IMU measurement 에러에서는 위와 같이 두 시점 $[b_k, b_{k+1}]$ 에서 포즈와 속도, bias 값들만 업데이트함에 유의한다.
에러 함수는 다음과 같이 근사할 수 있다.

$$\arg \min_{\mathcal{X}^*} \mathbf{E}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X} + \Delta \mathcal{X}) \approx \arg \min_{\mathcal{X}^*} \sum_{k \in \mathcal{B}} \|\mathbf{e}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}_k) + \mathbf{J} \Delta \mathcal{X}_k\|_{\mathbf{P}_{\mathcal{B}}}^2 \quad (164)$$

이를 미분하여 최적의 증분량 $\Delta \mathcal{X}^*$ 값을 구하면 다음과 같다. 자세한 유도 과정은 본 섹션에서는 생략한다. 유도 과정에 대해 자세히 알고 싶으면 이전 섹션을 참조하면 된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^\top \mathbf{J} \Delta \mathcal{X}^* &= -\mathbf{J}^\top \mathbf{e} \\ \mathbf{H} \Delta \mathcal{X}^* &= -\mathbf{b} \end{aligned} \quad (165)$$

위 식은 선형시스템 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 형태이므로 schur complement, cholesky decomposition과 같은 다양한 선형대수학 테크닉을 사용하여 $\Delta \mathcal{X}^*$ 를 구할 수 있다. 이렇게 구한 최적의 증분량을 현재 상태에 더한다. 이 때, 기존 상태 \mathbf{x} 의 오른쪽에 곱하느냐 왼쪽에 곱하느냐에 따라서 각각 로컬 좌표계에서 본 포즈를 업데이트할 것인지(오른쪽) 전역 좌표계에서 본 포즈를 업데이트할 것인지(왼쪽) 달라지게 된다. IMU measurement 에러는 두 노드 b_k, b_{k+1} 과 관련되어 있으므로 로컬 좌표계에서 업데이트하는 오른쪽 곱셈이 적용된다.

$$\mathcal{X} \leftarrow \mathcal{X} \oplus \Delta \mathcal{X}^* \quad (166)$$

\mathcal{X} 중에서 IMU measurement 에러에 의해 업데이트되는 \mathcal{X}_k 는 $[\mathbf{p}_{b_k}^w, \mathbf{v}_{b_k}^w, \mathbf{q}_{b_k}^w, \mathbf{b}_{a_k}, \mathbf{b}_{g_k}, \mathbf{p}_{b_{k+1}}^w, \mathbf{v}_{b_{k+1}}^w, \mathbf{q}_{b_{k+1}}^w, \mathbf{b}_{a_{k+1}}, \mathbf{b}_{g_{k+1}}]$ 로 구성되어 있으므로 다음과 같이 풀어 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{b_k}^w &\leftarrow \mathbf{p}_{b_k}^w \oplus \Delta \mathbf{p}_{b_k}^{w*} \\ \mathbf{q}_{b_k}^w &\leftarrow \mathbf{q}_{b_k}^w \oplus \Delta \mathbf{q}_{b_k}^{w*} \\ \mathbf{v}_{b_k}^w &\leftarrow \mathbf{v}_{b_k}^w \oplus \Delta \mathbf{v}_{b_k}^{w*} \\ \mathbf{b}_{a_k} &\leftarrow \mathbf{b}_{a_k} \oplus \Delta \mathbf{b}_{a_k}^* \\ \mathbf{b}_{g_k} &\leftarrow \mathbf{b}_{g_k} \oplus \Delta \mathbf{b}_{g_k}^* \\ \mathbf{p}_{b_{k+1}}^w &\leftarrow \mathbf{p}_{b_{k+1}}^w \oplus \Delta \mathbf{p}_{b_{k+1}}^{w*} \\ \mathbf{q}_{b_{k+1}}^w &\leftarrow \mathbf{q}_{b_{k+1}}^w \oplus \Delta \mathbf{q}_{b_{k+1}}^{w*} \\ \mathbf{v}_{b_{k+1}}^w &\leftarrow \mathbf{v}_{b_{k+1}}^w \oplus \Delta \mathbf{v}_{b_{k+1}}^{w*} \\ \mathbf{b}_{a_{k+1}} &\leftarrow \mathbf{b}_{a_{k+1}} \oplus \Delta \mathbf{b}_{a_{k+1}}^* \\ \mathbf{b}_{g_{k+1}} &\leftarrow \mathbf{b}_{g_{k+1}} \oplus \Delta \mathbf{b}_{g_{k+1}}^* \end{aligned} \quad (167)$$

오른쪽 곱셈 \oplus 연산의 정의는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{b_k}^w &\leftarrow \mathbf{p}_{b_k}^w + \Delta \mathbf{p}_{b_k}^{w*} \\ \mathbf{q}_{b_k}^w &\leftarrow \mathbf{q}_{b_k}^w \otimes \Delta \mathbf{q}_{b_k}^{w*} \quad \dots \text{locally updated (right mult)} \\ \mathbf{v}_{b_k}^w &\leftarrow \mathbf{v}_{b_k}^w + \Delta \mathbf{v}_{b_k}^{w*} \\ \mathbf{b}_{a_k} &\leftarrow \mathbf{b}_{a_k} + \Delta \mathbf{b}_{a_k}^* \\ \mathbf{b}_{g_k} &\leftarrow \mathbf{b}_{g_k} + \Delta \mathbf{b}_{g_k}^* \\ \mathbf{p}_{b_{k+1}}^w &\leftarrow \mathbf{p}_{b_{k+1}}^w + \Delta \mathbf{p}_{b_{k+1}}^{w*} \\ \mathbf{q}_{b_{k+1}}^w &\leftarrow \mathbf{q}_{b_{k+1}}^w \otimes \Delta \mathbf{q}_{b_{k+1}}^{w*} \quad \dots \text{locally updated (right mult)} \\ \mathbf{v}_{b_{k+1}}^w &\leftarrow \mathbf{v}_{b_{k+1}}^w + \Delta \mathbf{v}_{b_{k+1}}^{w*} \\ \mathbf{b}_{a_{k+1}} &\leftarrow \mathbf{b}_{a_{k+1}} + \Delta \mathbf{b}_{a_{k+1}}^* \\ \mathbf{b}_{g_{k+1}} &\leftarrow \mathbf{b}_{g_{k+1}} + \Delta \mathbf{b}_{g_{k+1}}^* \end{aligned} \quad (168)$$

7.2 Jacobian of IMU measurement error

(165)를 수행하기 위해서는 IMU measurement 에러에 대한 자코비안 \mathbf{J} 를 구해야 한다. 이를 풀어쓰면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= [\mathbf{J}[0] \quad \mathbf{J}[1] \quad \mathbf{J}[2] \quad \mathbf{J}[3]] \\ &= \left[\frac{\partial \mathbf{e}_B}{\partial [\mathbf{p}_{b_k}^w, \mathbf{q}_{b_k}^w]} \quad \frac{\partial \mathbf{e}_B}{\partial [\mathbf{v}_{b_k}^w, \mathbf{b}_{a_k}, \mathbf{b}_{g_k}]} \quad \frac{\partial \mathbf{e}_B}{\partial [\mathbf{p}_{b_{k+1}}^w, \mathbf{q}_{b_{k+1}}^w]} \quad \frac{\partial \mathbf{e}_B}{\partial [\mathbf{v}_{b_{k+1}}^w, \mathbf{b}_{a_{k+1}}, \mathbf{b}_{g_{k+1}}]} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial [\mathbf{p}_{b_k}^w, \mathbf{q}_{b_k}^w], [\mathbf{v}_{b_k}^w, \mathbf{b}_{a_k}, \mathbf{b}_{g_k}], [\mathbf{p}_{b_{k+1}}^w, \mathbf{q}_{b_{k+1}}^w], [\mathbf{v}_{b_{k+1}}^w, \mathbf{b}_{a_{k+1}}, \mathbf{b}_{g_{k+1}}]} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_w^{b_k}(\mathbf{p}_{b_{k+1}}^w - \mathbf{p}_{b_k}^w - \mathbf{v}_{b_k}^w \Delta t_k + \frac{1}{2} \mathbf{g}^w \Delta t_k^2) - \hat{\alpha}_{b_{k+1}}^{b_k} \\ \mathbf{R}_w^{b_k}(\mathbf{v}_{b_{k+1}}^w - \mathbf{v}_{b_k}^w + \mathbf{g}^w \Delta t_k) - \hat{\beta}_{b_{k+1}}^{b_k} \\ (\hat{\gamma}_{b_{k+1}}^{b_k})^{-1} \otimes (\mathbf{q}_{b_k}^w)^{-1} \otimes \mathbf{q}_{b_{k+1}}^w \\ \mathbf{b}_{a_{k+1}} - \mathbf{b}_{a_k} \\ \mathbf{b}_{g_{k+1}} - \mathbf{b}_{g_k} \end{bmatrix} \\ &= [\mathbb{R}^{15 \times 7} \quad \mathbb{R}^{15 \times 9} \quad \mathbb{R}^{15 \times 7} \quad \mathbb{R}^{15 \times 9}] = \mathbb{R}^{15 \times 32} \end{aligned} \tag{169}$$

7.2.1 Lie theory-based SO(3) optimization

위 자코비안을 구할 때, 위치 \mathbf{p} , 속도 \mathbf{v} , bias $\mathbf{b}_a, \mathbf{b}_g$ 에 관련된 항은 각각 3차원 벡터이므로 최적화 업데이트를 수행할 때 별도의 제약조건이 존재하지 않는다. 반면에, 쿼터니언 \mathbf{q} 는 파라미터의 개수가 4개이고 이는 3차원 회전을 표현하는 최소 자유도인 3 자유도보다 많으므로 다양한 제약조건이 존재한다. 이를 over-parameterized 되었다고 한다. over-parameterized 표현법의 단점은 다음과 같다.

- 중복되는 파라미터를 계산해야 하기 때문에 최적화 수행 시 연산량이 증가한다.
- 추가적인 자유도로 인해 수치적인 불안정성(numerical instability) 문제가 야기될 수 있다.
- 파라미터가 업데이트될 때마다 항상 제약조건을 만족하는지 체크해줘야 한다.

lie theory를 사용하면 제약조건으로부터 자유롭게 최적화를 수행할 수 있다. 따라서 쿼터니언 \mathbf{q} 을 사용하는 대신 lie algebra $\text{so}(3)$ $[\boldsymbol{\theta}]_\times$ 을 사용하여 제약조건으로부터 자유롭게 파라미터를 업데이트할 수 있게 된다. 이 때, $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^3$ 는 각속도 벡터를 의미한다. SO(3)-based 최적화에 대한 디테일한 내용은 reprojection 에러 쟝션과 동일하므로 이에 대한 자세한 설명은 생략한다.

각속도 벡터 $\boldsymbol{\theta}$ 를 사용하면 기존의 쿼터니언 \mathbf{q} 의 자코비안은 다음과 같이 변경된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}_B}{\partial \mathbf{q}_{b_k}^w} &\rightarrow \frac{\partial \mathbf{e}_B}{\partial [1 \quad \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}_{b_k}^w]} \\ \frac{\partial \mathbf{e}_B}{\partial \mathbf{q}_{b_{k+1}}^w} &\rightarrow \frac{\partial \mathbf{e}_B}{\partial [1 \quad \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}_{b_{k+1}}^w]} \end{aligned} \tag{170}$$

Tip

임의의 angle-axis 벡터 $\boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{u}$ 가 주어졌을 때, 이에 대한 exponential map은 오일러 공식의 확장 버전으로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{q} \triangleq \text{Exp}(\boldsymbol{\theta}) = \text{Exp}(\theta \mathbf{u}) = e^{\theta \mathbf{u}/2} = \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{u} \sin \frac{\theta}{2} = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \mathbf{u} \sin(\theta/2) \end{bmatrix} \tag{171}$$

충분히 작은 $\boldsymbol{\theta}$ 값에 대해 $\cos \frac{\theta}{2} \approx 1$ 과 $\sin \frac{\theta}{2} \approx \frac{\theta}{2}$ 이 만족하므로 충분히 작은 쿼터니언에 대한 다음 식이 성립한다.

$$\mathbf{q} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} \tag{172}$$

이에 대한 자세한 내용은 Quaternion kinematics for the error-state Kalman filter 내용 정리 포스트의 4.4 챕터를 참고하면 된다.

일반적으로 최적화에 사용하는 에러는 크기가 작으므로 γ 에 대한 에러 $(\hat{\gamma}_{b_{k+1}}^{b_k})^{-1} \otimes (\mathbf{q}_{b_k}^w)^{-1} \otimes \mathbf{q}_{b_{k+1}}^w$ 또한 크기가 작다고 가정한다. 따라서 실제 쿼터니언의 $\mathbf{q} = [w, x, y, z]$ 중에서 허수 부분 $[x, y, z] = \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}$ 만 최적화에

사용한다. 이를 통해 γ 부분은 다음과 같이 변형된다.

$$\begin{aligned} \gamma &\rightarrow 2[\gamma]_{xyz} = 2[x, y, z] = \theta \\ \left(\hat{\gamma}_{b_{k+1}}^{b_k}\right)^{-1} \otimes (\mathbf{q}_{b_k}^w)^{-1} \otimes \mathbf{q}_{b_{k+1}}^w &\rightarrow 2\left[\left(\hat{\gamma}_{b_{k+1}}^{b_k}\right)^{-1} \otimes (\mathbf{q}_{b_k}^w)^{-1} \otimes \mathbf{q}_{b_{k+1}}^w\right]_{xyz} \end{aligned} \quad (173)$$

최종적인 SO(3) 버전 IMU measurement 에러 \mathbf{e}_B 는 다음과 같다.

$$\mathbf{e}_B(\mathcal{X}_k) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_w^{b_k}(\mathbf{p}_{b_{k+1}}^w - \mathbf{p}_{b_k}^w - \mathbf{v}_{b_k}^w \Delta t_k + \frac{1}{2} \mathbf{g}^w \Delta t_k^2) - \hat{\alpha}_{b_{k+1}}^{b_k} \\ 2\left[\left(\hat{\gamma}_{b_{k+1}}^{b_k}\right)^{-1} \otimes (\mathbf{q}_{b_k}^w)^{-1} \otimes \mathbf{q}_{b_{k+1}}^w\right]_{xyz} \\ \mathbf{R}_w^{b_k}(\mathbf{v}_{b_{k+1}}^w - \mathbf{v}_{b_k}^w + \mathbf{g}^w \Delta t_k) - \hat{\beta}_{b_{k+1}}^{b_k} \\ \mathbf{b}_{a_{k+1}} - \mathbf{b}_{a_k} \\ \mathbf{b}_{g_{k+1}} - \mathbf{b}_{g_k} \end{bmatrix} \quad (174)$$

$[\mathbf{p}, \mathbf{q}], [\mathbf{v}, \mathbf{b}_a, \mathbf{b}_g]$ 에 대한 자코비안을 편하게 계산하기 위해 기존 상태 변수의 두번째 줄 β 와 세번째 줄 γ 의 순서를 서로 변경하였다.

최종적으로 SO(3) 버전 IMU measurement 에러의 자코비안은 다음과 같이 구할 수 있다. 자세한 유도 과정은 Formula Derivation and Analysis of the VINS-Mono 논문의 Appendix 섹션을 참고하면 된다.

$$\mathbf{J}[0]_{15 \times 6} = \frac{\partial \mathbf{e}_B}{\partial [\mathbf{p}_{b_k}^w, \mathbf{q}_{b_k}^w]} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_w^{b_k} & [\mathbf{R}_w^{b_k}(\mathbf{p}_{b_{k+1}}^w - \mathbf{p}_{b_k}^w - \mathbf{v}_{b_k}^w \Delta t_k + \frac{1}{2} \mathbf{g}^w \Delta t_k^2)]_x \\ 0 & [\gamma_{b_{k+1}}^{b_k}]_R[(\mathbf{q}_{b_{k+1}}^w)^{-1} \otimes \mathbf{q}_{b_k}^w]_{L,3 \times 3} \\ 0 & [\mathbf{R}_w^{b_k}(\mathbf{p}_{b_{k+1}}^w - \mathbf{p}_{b_k}^w + \mathbf{g}^w \Delta t_k)]_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (175)$$

$$\mathbf{J}[1]_{15 \times 9} = \frac{\partial \mathbf{e}_B}{\partial [\mathbf{v}_{b_k}^w, \mathbf{b}_{a_k}, \mathbf{b}_{g_k}]} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_w^{b_k} \Delta t_k & -\mathbf{J}_{b_a}^\alpha & -\mathbf{J}_{b_g}^\alpha \\ 0 & 0 & -[(\hat{\gamma}_{b_{k+1}}^{b_k})^{-1} \otimes (\mathbf{q}_{b_k}^w)^{-1} \otimes \mathbf{q}_{b_{k+1}}^w]_{R,3 \times 3} \mathbf{J}_{b_g}^\gamma \\ -\mathbf{R}_w^{b_k} & -\mathbf{J}_{b_a}^\beta & -\mathbf{J}_{b_g}^\beta \\ 0 & -\mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (176)$$

$$\mathbf{J}[2]_{15 \times 6} = \frac{\partial \mathbf{e}_B}{\partial [\mathbf{p}_{b_{k+1}}^w, \mathbf{q}_{b_{k+1}}^w]} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_w^{b_k} & 0 \\ 0 & [(\hat{\gamma}_{b_{k+1}}^{b_k})^{-1} \otimes (\mathbf{q}_{b_k}^w)^{-1} \otimes \mathbf{q}_{b_{k+1}}^w]_L \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (177)$$

$$\mathbf{J}[3]_{15 \times 9} = \frac{\partial \mathbf{e}_B}{\partial [\mathbf{v}_{b_{k+1}}^w, \mathbf{b}_{a_{k+1}}, \mathbf{b}_{g_{k+1}}]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{R}_w^{b_k} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (178)$$

NOTICE: 기존의 $\mathbf{J}[0], \mathbf{J}[2] \in \mathbb{R}^{15 \times 7}$ 이었으나 쿼터니언을 SO(3) 기반으로 업데이트하면서 $[xyz]$ 부분만 사용하므로 w 부분은 항상 0이된다. w 부분을 생략하여 표기하면 $\mathbf{J}[0], \mathbf{J}[2] \in \mathbb{R}^{15 \times 6}$ 이 된다.

NOTICE: 위 식을 보면 자코비안 안에 또 다른 자코비안 $\mathbf{J}_{b_a}^\alpha, \mathbf{J}_{b_g}^\alpha, \mathbf{J}_{b_a}^\beta, \mathbf{J}_{b_g}^\beta, \mathbf{J}_{b_g}^\gamma$ 이 사용된 것을 알 수 있다. 이는 IMU의 에러 상태 방정식(error-state equation)에서 파생된 자코비안 $\mathbf{J}_{b_{k+1}}^{b_k}$ 의 부분 자코비안을 의미한다.

7.3 Code implementations

- VINS-mono 코드: integration_base.h#L180
 - SO(3) 버전 IMU measurement 에러 \mathbf{e}_B 가 구현되어 있다.
- VINS-mono 코드: imu_factor.h#L86
 - $\mathbf{J}[0], \mathbf{J}[1], \mathbf{J}[2], \mathbf{J}[3]$ 가 구현되어 있다.

Tip

IMU의 이산(discrete) 신호에 대한 여러 상태 방정식은 다음과 같다. (Mid-point 근사 방법 사용)

$$\begin{bmatrix} \delta\alpha_{k+1} \\ \delta\theta_{k+1} \\ \delta\beta_{k+1} \\ \delta\mathbf{b}_{a_{k+1}} \\ \delta\mathbf{b}_{g_{k+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{F}_{01} & \delta t \mathbf{I} & \mathbf{F}_{03} & \mathbf{F}_{04} \\ & \mathbf{F}_{11} & & & -\delta t \mathbf{I} \\ & \mathbf{F}_{21} & \mathbf{I} & \mathbf{F}_{23} & \mathbf{F}_{24} \\ & & \mathbf{I} & & \\ & & & \mathbf{I} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\alpha_k \\ \delta\theta_k \\ \delta\beta_k \\ \delta\mathbf{b}_{a_k} \\ \delta\mathbf{b}_{g_k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{00} & \mathbf{G}_{01} & \mathbf{G}_{02} & \mathbf{G}_{03} \\ -\frac{\mathbf{R}_k \delta t}{2} & \mathbf{G}_{21} & -\frac{\mathbf{R}_{k+1} \delta t}{2} & \mathbf{G}_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{a_k} \\ \mathbf{n}_{g_k} \\ \mathbf{n}_{a_{k+1}} \\ \mathbf{n}_{g_{k+1}} \\ \mathbf{n}_{b_a} \\ \mathbf{n}_{b_g} \end{bmatrix} \quad (179)$$

이 때 상태 변수에 대한 자코비안 $\mathbf{J}_t^{b_k}$ 은 다음과 같이 업데이트 된다.

$$\mathbf{J}_{t+\delta t}^{b_k} = (\mathbf{I} + \mathbf{F}_t \delta t) \mathbf{J}_t^{b_k}, \quad t \in [k, k+1] \quad (180)$$

보다 자세한 내용은 [SLAM] Formula Derivation and Analysis of the VINS-mono 내용 정리 포스트의 2.3, 2.4 섹션을 참고하면 된다.

- 자코비안과 여러 함수에 공분산의 제곱근 역함수 $\sqrt{(\mathbf{P}_{b_{k+1}}^{b_k})^{-1}} = \sqrt{\Omega_B} \circ |$ information 행렬의 형태로 곱해진다.
 - * $\mathbf{e}_{B,k} \rightarrow \sqrt{\Omega_B}^\top \mathbf{e}_{B,k}$: 실제 코드에서는 오른쪽 에러항이 최적화된다.
 - * 이는 실제 코드 구현에서 여러 함수 $\mathbf{E}_B(\mathcal{X}) = \mathbf{e}_{B,k}^\top \Omega_B \mathbf{e}_{B,k}$ 의 제곱근 $\sqrt{\Omega_B}^\top \mathbf{e}_{B,k}$ 을 여러로 설정했기 때문이다.
- VINS-mono 코드: integration_base.h#L90
 - 여러 상태 방정식을 Mid-point 방법으로 근사한 \mathbf{F}, \mathbf{G} 상태천이행렬이 구현되어 있다.
 - IMU 상태 변수의 자코비안 업데이트 공식 $\mathbf{J}_{t+\delta t}^{b_k} = (\mathbf{I} + \mathbf{F}_t \delta t) \mathbf{J}_t^{b_k}$ 이 구현되어 있다.
 - IMU 상태 변수의 공분산 업데이트 공식 $\mathbf{P}_{t+\delta t}^{b_k} = (\mathbf{I} + \mathbf{F}_t \delta t) \mathbf{P}_t^{b_k} (\mathbf{I} + \mathbf{F}_t \delta t)^\top + (\mathbf{G}_t \delta t) \mathbf{Q} (\mathbf{G}_t \delta t)^\top \circ |$ 구현되어 있다.

8 Other jacobians

8.1 Jacobian of unit quaternion

NOMENCLATURE of jacobian of unit quaternion

- $\mathbf{X} = [X, Y, Z, 1]^\top = [\tilde{\mathbf{X}}, 1]^\top \in \mathbb{P}^3$
- $\tilde{\mathbf{X}} = [X, Y, Z]^\top \in \mathbb{P}^2$
- $\mathbf{q} = [w, x, y, z]^\top = [w, \mathbf{v}]^\top$
 - hamilton 표기법으로 표현한 쿼터니언. 이에 대한 자세한 내용은 해당 포스트를 참조하면 된다.

앞서 reprojection 여러 섹션에서 설명했던 자코비안은 다음과 같다.

$$\mathbf{J}_c = \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}}{\partial \tilde{\mathbf{p}}} \frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{X}'} \frac{\partial \mathbf{X}'}{\partial [\mathbf{R}, \mathbf{t}]} \quad (181)$$

이 중, $\frac{\partial \mathbf{X}'}{\partial \mathbf{R}}$ 은 회전을 회전행렬 \mathbf{R} 로 표현하였을 때 사용할 수 있는 자코비안이다. 해당 섹션에서는 회전을 단위 쿼터니언 \mathbf{q} 로 표현하였을 때 사용할 수 있는 자코비안 $\frac{\partial \mathbf{X}'}{\partial \mathbf{q}}$ 에 대해 설명한다.

3차원 공간 상의 점 \mathbf{X} 이 주어졌을 때 임의의 단위 쿼터니언 \mathbf{q} 을 통해 회전한 점 \mathbf{X}' 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\tilde{\mathbf{X}}' = \mathbf{q} \otimes \tilde{\mathbf{X}} \otimes \mathbf{q}^* \quad (182)$$

이를 다시 풀어서 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{X}}' &= \mathbf{q} \otimes \tilde{\mathbf{X}} \otimes \mathbf{q}^* \\
&= (\mathbf{w} + \mathbf{v}) \otimes \tilde{\mathbf{X}} \otimes (\mathbf{w} - \mathbf{v}) \\
&= w^2 \tilde{\mathbf{X}} + w(\mathbf{v} \otimes \tilde{\mathbf{X}} - \tilde{\mathbf{X}} \otimes \mathbf{v}) - \mathbf{v} \otimes \tilde{\mathbf{X}} \otimes \mathbf{v} \\
&= w^2 \tilde{\mathbf{X}} + 2w(\mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{X}}) - [(-\mathbf{v}^\top \tilde{\mathbf{X}} + \mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{X}}) \otimes \mathbf{v}] \\
&= w^2 \tilde{\mathbf{X}} + 2w(\mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{X}}) - [(-\mathbf{v}^\top \tilde{\mathbf{X}})\mathbf{v} + (\mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{X}}) \otimes \mathbf{v}] \\
&= w^2 \tilde{\mathbf{X}} + 2w(\mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{X}}) - [(-\mathbf{v}^\top \tilde{\mathbf{X}})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{X}})^\top \mathbf{v} + (\mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{X}}) \times \mathbf{v}] \\
&= w^2 \tilde{\mathbf{X}} + 2w(\mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{X}}) - [(-\mathbf{v}^\top \tilde{\mathbf{X}})\mathbf{v} + (\mathbf{v}^\top \mathbf{v})\tilde{\mathbf{X}} - (\mathbf{v}^\top \tilde{\mathbf{X}})\mathbf{v}] \\
&= w^2 \tilde{\mathbf{X}} + 2w(\mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{X}}) + 2(\mathbf{v}^\top \tilde{\mathbf{X}})\mathbf{v} - (\mathbf{v}^\top \mathbf{v})\tilde{\mathbf{X}}
\end{aligned} \tag{183}$$

이를 사용하여 쿼터니언에 대한 자코비안 $\frac{\partial \tilde{\mathbf{X}}'}{\partial \mathbf{q}}$ 을 구할 수 있다. 스칼라 파트 $\frac{\partial \tilde{\mathbf{X}}'}{\partial w}$ 와 벡터 파트 $\frac{\partial \tilde{\mathbf{X}}'}{\partial \mathbf{v}}$ 로 나누어 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{\mathbf{X}}'}{\partial w} &= 2(w\tilde{\mathbf{X}} + \mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{X}}) \\
\frac{\partial \tilde{\mathbf{X}}'}{\partial \mathbf{v}} &= -2w[\tilde{\mathbf{X}}]_\times + 2(\mathbf{v}^\top \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{I} + \mathbf{v} \tilde{\mathbf{X}}^\top) - 2\tilde{\mathbf{X}} \mathbf{v}^\top \\
&= 2(\mathbf{v}^\top \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{I} + \mathbf{v} \tilde{\mathbf{X}}^\top - \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{v}^\top - w[\tilde{\mathbf{X}}]_\times)
\end{aligned} \tag{184}$$

이 때, 쿼터니언 곱셈 중앙에 들어가는 $\tilde{\mathbf{X}}$ 는 실제로는 3차원 벡터가 들어가지 않고 스칼라 값이 0인 순수 쿼터니언(pure quaternion) $[0, X, Y, Z]^\top$ 형태로 변형되어 들어간다. 따라서 위 식에서 스칼라에 대한 자코비안 $\frac{\partial \tilde{\mathbf{X}}'}{\partial w}$ 는 실제 최적화 수행 시 사용되지 않기 때문에 별도로 구하지 않고 벡터에 대한 자코비안 $\frac{\partial \tilde{\mathbf{X}}'}{\partial \mathbf{v}}$ 만 구한다.

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{X}}' = \mathbf{q} \otimes \tilde{\mathbf{X}} \otimes \mathbf{q}^* \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\mathbf{X}}' \end{bmatrix} = \mathbf{q} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\mathbf{X}} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}^* \cdots \text{strict notation} \\
\text{Then, } \frac{\partial \tilde{\mathbf{X}}'}{\partial w} \text{ is going to be useless}
\end{aligned} \tag{185}$$

또한, 충분히 작은 회전행렬을 $\mathbf{R} \approx \mathbf{I} + [\mathbf{w}]_\times$ 로 근사했던 방법과 동일하게 쿼터니언 \mathbf{q} 이 충분히 작다고 가정하면 이는 identity로 근사할 수 있다($\mathbf{q} \approx \mathbf{q}_1 = [1, 0, 0, 0]^\top$).

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \tilde{\mathbf{X}}'}{\partial \mathbf{v}} \right|_{\mathbf{q} \approx \mathbf{q}_1} &= 2(\mathbf{v}^\top \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{I} + \mathbf{v} \tilde{\mathbf{X}}^\top - \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{v}^\top - w[\tilde{\mathbf{X}}]_\times) \\
&= -2[\tilde{\mathbf{X}}]_\times
\end{aligned} \tag{186}$$

따라서 최종적인 쿼터니언에 대한 자코비안 $\frac{\partial \tilde{\mathbf{X}}'}{\partial \mathbf{q}}$ 은 다음과 같다.

$$\boxed{\frac{\partial \tilde{\mathbf{X}}'}{\partial \mathbf{q}} = -2[\tilde{\mathbf{X}}]_\times = -2 \begin{bmatrix} 0 & -Z & Y \\ Z & 0 & -X \\ -Y & X & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}} \tag{187}$$

8.1.1 Code Implementations

- ProSLAM 코드: trajectory_analyzer.cpp#L253
 - jinyongjeong님의 블로그 포스트를 참고하였다.

8.2 Jacobian of camera intrinsics

NOMENCLATURE of jacobian of camera intrinsics

- $\pi^{-1}(\cdot) = Z\mathbf{K}^{-1}(\cdot)$: 이미지 상의 점을 3차원 공간 상에 back projection하는 함수
- $\pi(\cdot) = \pi_k(\pi_h(\cdot)) = \mathbf{K}(\frac{1}{Z}\cdot)$: 3차원 공간 상의 점을 이미지 평면 상에 프로젝션하는 함수
- $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} f_x & 0 & c_x \\ 0 & f_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$: 카메라 내부(intrinsic) 파라미터

- $\mathbf{K}^{-1} = \begin{bmatrix} f_x^{-1} & 0 & -f_x^{-1}c_x \\ 0 & f_y^{-1} & -f_y^{-1}c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $\tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} f_x & 0 & c_x \\ 0 & f_y & c_y \end{bmatrix} : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 로 프로젝션하기 위해 내부 파라미터의 마지막 행을 생략했다.
- $\mathbf{X} = [\tilde{\mathbf{X}}, 1]^\top$

SLAM을 수행하기 위해 카메라 캘리브레이션을 수행하면 내부 파라미터(intrinsic matrix) $\mathbf{c} = [f_x, f_y, c_x, c_y]$ 와 렌즈 왜곡 파라미터 $\mathbf{d} = [k_1, k_2, p_1, p_2]$ 를 구할 수 있다. 하지만 캘리브레이션 값이 정확히 실제 센서의 파라미터와 일치하지는 않으므로 이를 최적화를 통해 fine tuning할 수 있다. 본 섹션에서는 이 중 \mathbf{c} 에 대한 자코비안 \mathbf{J}_c 을 유도하는 과정에 대해 설명한다. 이 때, 초점 거리(focal length)는 $f_x \neq f_y$ 라고 가정한다.

예를 들어, (68) photometric 에러 대한 \mathbf{J}_c 를 구한다고 가정해보자. 이는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_c &= \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{c}} \\ &= \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial \mathbf{p}_2} \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \tilde{\mathbf{p}}_2} \frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}_2}{\partial \mathbf{X}'} \frac{\partial \mathbf{X}'}{\partial \mathbf{c}} \\ &= \mathbb{R}^{1 \times 2} \cdot \mathbb{R}^{2 \times 3} \cdot \mathbb{R}^{3 \times 4} \cdot \mathbb{R}^{4 \times 4} = \mathbb{R}^{1 \times 4} \end{aligned} \quad (188)$$

이 때, 맨 앞의 $\frac{\partial \mathbf{I}}{\partial \mathbf{p}_2}$ 항은 photometric 에러를 구하기 위해 구해야 하는 자코비안이고 나머지 세 자코비안은 reprojection, photometric 에러 항과 관계없이 항상 구해야하는 항이다. 따라서 $\frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \tilde{\mathbf{p}}_2} \frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}_2}{\partial \mathbf{X}'} \frac{\partial \mathbf{X}'}{\partial \mathbf{c}}$ 를 구하면 일반적으로 SLAM에서 사용하는 에러 항에 대해 모두 적용이 가능하다.

두 카메라 $\{C_1\}, \{C_2\}$ 의 이미지 평면 상의 점 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ 의 관계는 다음과 같이 풀어 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= [u_1 \ v_1]^\top \\ \mathbf{p}_2 &= [u_2 \ v_2]^\top \end{aligned} \quad (189)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_2 &= \pi(\mathbf{X}') \\ &= \pi(\mathbf{R}\mathbf{X} + \mathbf{t}) \\ &= \pi(\mathbf{R}\pi^{-1}(\mathbf{p}_1) + \mathbf{t}) \quad \cdots \text{ apply back-proj} \\ &= \pi(\mathbf{R}(Z\mathbf{K}^{-1}\mathbf{p}_1) + \mathbf{t}) \\ &= \pi_k(\pi_h(\mathbf{R}(Z\mathbf{K}^{-1}\mathbf{p}_1) + \mathbf{t})) \\ &= \pi_k\left(\frac{Z}{Z'}\mathbf{R}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{p}_1 + \frac{1}{Z'}\mathbf{t}\right) \quad \cdots \text{ apply } \pi_h(\cdot) \\ &= \frac{Z}{Z'}\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{R}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{p}_1 + \frac{1}{Z'}\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{t} \quad \cdots \text{ apply } \pi_k(\cdot) \end{aligned} \quad (190)$$

\mathbf{p}_1 에 back projection \rightarrow 변환행렬 적용 \rightarrow 프로젝션 \rightarrow 연쇄적으로 발생하여 \mathbf{p}_2 가 되기 때문에 위와 같은 복잡한 형태의 공식이 얻어진다. 위 식에서 보다시피 $\frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \tilde{\mathbf{p}}_2} \frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}_2}{\partial \mathbf{X}'} \frac{\partial \mathbf{X}'}{\partial \mathbf{c}}$ 는 \mathbf{p}_2 부터 \mathbf{c} 파라미터를 포함한다. 따라서 세 자코비안을 끌어서 $\frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \mathbf{c}}$ 를 한 번에 계산해야 한다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \mathbf{c}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial}{\partial [f_x, f_y, c_x, c_y]} \begin{bmatrix} f_x \tilde{u}_2 + c_x \\ f_y \tilde{v}_2 + c_y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u_2}{\partial f_x} & \frac{\partial u_2}{\partial f_y} & \frac{\partial u_2}{\partial c_x} & \frac{\partial u_2}{\partial c_y} \\ \frac{\partial v_2}{\partial f_x} & \frac{\partial v_2}{\partial f_y} & \frac{\partial v_2}{\partial c_x} & \frac{\partial v_2}{\partial c_y} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{u}_2 + f_x \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial f_x} & f_x \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial f_y} & f_x \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial c_x} + 1 & f_x \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial c_y} \\ f_y \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial f_x} & \tilde{v}_2 + f_y \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial f_y} & f_y \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial c_x} & f_y \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial c_y} + 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4} \end{aligned} \quad (191)$$

다음으로 위 식의 원소를 계산해야 한다.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial f_x} & \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial f_y} & \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial c_x} & \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial c_y} \\ \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial f_x} & \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial f_y} & \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial c_x} & \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial c_y} \end{pmatrix} \quad (192)$$

이를 구하기 위해 우선 $\tilde{\mathbf{p}}_2 = [\tilde{u}_2, \tilde{v}_2, 1]^\top$ 을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{p}}_2 &= [\tilde{u}_2, \tilde{v}_2, 1]^\top \\
&= \frac{1}{Z'} \tilde{\mathbf{X}}' \\
&= \frac{1}{Z'} (\mathbf{R} \tilde{\mathbf{X}} + \mathbf{t}) \\
&= \frac{Z}{Z'} \mathbf{R} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{p}_1 + \frac{1}{Z'} \mathbf{t} \\
&= \frac{Z}{Z'} \begin{bmatrix} \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x^{-1} & -f_x^{-1} c_x \\ f_y^{-1} & -f_y^{-1} c_y \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{Z'} \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} \\
&= \frac{Z}{Z'} \begin{bmatrix} \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x^{-1}(u_1 - c_x) \\ f_y^{-1}(v_1 - c_y) \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{Z'} \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} \\
&= \frac{Z}{Z'} \begin{bmatrix} r_{11} f_x^{-1}(u_1 - c_x) + r_{12} f_y^{-1}(v_1 - c_y) + r_{13} \\ r_{21} f_x^{-1}(u_1 - c_x) + r_{22} f_y^{-1}(v_1 - c_y) + r_{23} \\ r_{31} f_x^{-1}(u_1 - c_x) + r_{32} f_y^{-1}(v_1 - c_y) + r_{33} \end{bmatrix} + \frac{1}{Z'} \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{193}$$

위 식을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_2 \\ \tilde{v}_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r_{11} f_x^{-1}(u_1 - c_x) + r_{12} f_y^{-1}(v_1 - c_y) + r_{13} + \frac{1}{Z'} t_x}{r_{31} f_x^{-1}(u_1 - c_x) + r_{32} f_y^{-1}(v_1 - c_y) + r_{33} + \frac{1}{Z'} t_z} \\ \frac{r_{21} f_x^{-1}(u_1 - c_x) + r_{22} f_y^{-1}(v_1 - c_y) + r_{23} + \frac{1}{Z'} t_y}{r_{31} f_x^{-1}(u_1 - c_x) + r_{32} f_y^{-1}(v_1 - c_y) + r_{33} + \frac{1}{Z'} t_z} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{194}$$

이를 바탕으로 (192)을 구해보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial f_x} &= \frac{Z}{Z'} (r_{31} \tilde{u}_2 - r_{11}) f_x^{-2} (u_1 - c_x) \\
\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial f_y} &= \frac{Z}{Z'} (r_{32} \tilde{u}_2 - r_{12}) f_y^{-2} (v_1 - c_y) \\
\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial c_x} &= \frac{Z}{Z'} (r_{31} \tilde{u}_2 - r_{11}) f_x^{-1} \\
\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial c_y} &= \frac{Z}{Z'} (r_{32} \tilde{u}_2 - r_{12}) f_y^{-1} \\
\frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial f_x} &= \frac{Z}{Z'} (r_{31} \tilde{v}_2 - r_{21}) f_x^{-2} (u_1 - c_x) \\
\frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial f_y} &= \frac{Z}{Z'} (r_{32} \tilde{v}_2 - r_{22}) f_y^{-2} (v_1 - c_y) \\
\frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial c_x} &= \frac{Z}{Z'} (r_{31} \tilde{v}_2 - r_{21}) f_x^{-1} \\
\frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial c_y} &= \frac{Z}{Z'} (r_{32} \tilde{v}_2 - r_{22}) f_y^{-1}
\end{aligned} \tag{195}$$

최종적으로 (191)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \mathbf{c}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u_2}{\partial f_x} & \frac{\partial u_2}{\partial f_y} & \frac{\partial u_2}{\partial c_x} & \frac{\partial u_2}{\partial c_y} \\ \frac{\partial v_2}{\partial f_x} & \frac{\partial v_2}{\partial f_y} & \frac{\partial v_2}{\partial c_x} & \frac{\partial v_2}{\partial c_y} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \tilde{u}_2 + f_x \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial f_x} & f_x \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial f_y} & f_x \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial c_x} + 1 & f_x \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial c_y} \\ f_y \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial f_x} & \tilde{v}_2 + f_y \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial f_y} & f_y \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial c_x} & f_y \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial c_y} + 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \tilde{u}_2 + \frac{Z}{Z'} f_x^{-1} (r_{31} \tilde{u}_2 - r_{11}) (u_1 - c_x) & \frac{Z}{Z'} f_x f_y^{-2} (r_{32} \tilde{u}_2 - r_{12}) (v_1 - c_y) & \frac{Z}{Z'} (r_{31} \tilde{u}_2 - r_{11}) + 1 & \frac{Z}{Z'} f_x f_y^{-1} (r_{32} \tilde{u}_2 - r_{12}) + 1 \\ \frac{Z}{Z'} f_x^{-2} f_y (r_{31} \tilde{v}_2 - r_{21}) (u_1 - c_x) & \tilde{v}_2 + \frac{Z}{Z'} f_y^{-1} (r_{32} \tilde{v}_2 - r_{22}) (v_1 - c_y) & \frac{Z}{Z'} f_x^{-1} f_y (r_{31} \tilde{v}_2 - r_{21}) & \frac{Z}{Z'} (r_{32} \tilde{u}_2 - r_{12}) + 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{196}$$

8.2.1 Code Implementations

- DSO 코드: Residuals.cpp#L123

- 코드에 대한 자세한 설명은 [SLAM] Direct Sparse Odometry (DSO) 논문 및 코드 리뷰 (2)를 참조하면 된다.

8.3 Jacobian of inverse depth

NOMENCLATURE of jacobian of inverse depth

- $\mathbf{X} = [X, Y, Z, 1]^\top = [\tilde{\mathbf{X}}, 1]^\top \in \mathbb{P}^3$
- $\tilde{\mathbf{X}} = [X, Y, Z]^\top \in \mathbb{P}^2$
- $\rho = \frac{1}{Z}, \rho^{-1} = Z$

8.3.1 Inverse depth parameterization

SLAM에서 inverse depth parameterization란 3차원 점 \mathbf{X} 를 표현할 때 3개의 파라미터 $[X, Y, Z, 1]$ 을 사용하는 것이 아닌 1개의 파라미터 (Z 의 역수 ρ)만 사용하여 표현하는 방법을 말한다. 이를 통해 이미지 평면 상의 픽셀 $\mathbf{p} = [u, v]$ 의 위치만 알고 있으면 오직 inverse depth ρ 를 사용하여 3차원 점 \mathbf{X} 를 완벽하게 표현할 수 있다. 이는 최적화를 수행할 때 1개의 파라미터만 추정하면 되므로 계산 상의 이점을 지닌다.

8.3.2 Jacobian of inverse depth

inverse depth의 자코비안을 \mathbf{J}_ρ 라고 했을 때 photometric 에러에 대한 \mathbf{J}_ρ 를 구한다고 가정해보자. 이는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_\rho &= \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \rho} \\ &= \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial \mathbf{p}_2} \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \tilde{\mathbf{p}}_2} \frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}_2}{\partial \mathbf{X}'} \frac{\partial \mathbf{X}'}{\partial \rho} \\ &= \mathbb{R}^{1 \times 2} \cdot \mathbb{R}^{2 \times 3} \cdot \mathbb{R}^{3 \times 4} \cdot \mathbb{R}^{4 \times 1} = \mathbb{R}^{1 \times 1}\end{aligned}\quad (197)$$

이 때, 맨 앞의 $\frac{\partial \mathbf{I}}{\partial \mathbf{p}_2}$ 항은 photometric 에러를 구하기 위해 구해야 하는 자코비안이고 나머지 세 자코비안은 reprojection, photometric 에러 항과 관계없이 항상 구해야하는 항이다. 따라서 $\frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \tilde{\mathbf{p}}_2} \frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}_2}{\partial \mathbf{X}'}$ 를 구하면 일반적으로 SLAM에서 사용하는 에러 항에 대해 모두 적용이 가능하다.

우선 $\frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}_2}{\partial \mathbf{X}'}$ 를 inverse depth로 표현하면 아래와 같다. 이는 $\rho' = \frac{1}{Z'}$ 로 치환하여 표현한 것과 같다.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}_2}{\partial \mathbf{X}'} &= \frac{\partial [\tilde{u}_2, \tilde{v}_2, 1]}{\partial \mathbf{X}'} \\ &= \begin{bmatrix} \rho' & 0 & -\rho'^2 X' & 0 \\ 0 & \rho' & -\rho'^2 Y' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}\end{aligned}\quad (198)$$

다음으로 $\frac{\partial \mathbf{X}'}{\partial \rho}$ 를 구해야 한다. 우선 \mathbf{X}' 는 다음과 같이 풀어서 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}\mathbf{X}' &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}'} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}\tilde{\mathbf{X}} + \mathbf{t} \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}(Z\mathbf{K}^{-1}\tilde{\mathbf{X}}) + \mathbf{t} \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\frac{\mathbf{K}^{-1}\tilde{\mathbf{X}}}{\rho}) + \mathbf{t} \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (199)$$

위 식을 참고하여 $\frac{\partial \mathbf{X}'}{\partial \rho}$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{X}'}{\partial \rho} &= \begin{bmatrix} -\mathbf{R}(\frac{\mathbf{K}^{-1}\tilde{\mathbf{X}}}{\rho^2}) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{\tilde{\mathbf{X}}' - \mathbf{t}}{\rho} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= -\rho^{-1} \begin{bmatrix} X' - t_x \\ Y' - t_y \\ Z' - t_z \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 1}\end{aligned}\quad (200)$$

위 식에서 두 번째 줄은 (199)을 변형하여 구할 수 있다. 위 두 자코비안을 사용하여 최종적으로 $\frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \rho}$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \rho} &= \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \tilde{\mathbf{p}}_2} \frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}_2}{\partial \mathbf{X}'} \frac{\partial \mathbf{X}'}{\partial \rho} \\
 &= \begin{bmatrix} f_x & 0 & c_x \\ 0 & f_y & c_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho' & 0 & -\rho'^2 X' & 0 \\ 0 & \rho' & -\rho'^2 Y' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot -\rho^{-1} \begin{bmatrix} X' - t_x \\ Y' - t_y \\ Z' - t_z \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= -\rho^{-1} \rho' \begin{bmatrix} f_x(\tilde{u}_2 t_z - t_x) \\ f_y(\tilde{v}_2 t_z - t_y) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}
 \end{aligned} \tag{201}$$

- $\tilde{u}_2 = \frac{X'}{Z'} = \rho' X'$
- $\tilde{v}_2 = \frac{Y'}{Z'} = \rho' Y'$

8.3.3 Code Implementations

- DSO 코드: CoarseInitializer.cpp#L424
 - 코드에 대한 자세한 설명은 [SLAM] Direct Sparse Odometry (DSO) 논문 및 코드 리뷰 (2)를 참조하면 된다.

9 References

- [1] [Blog] [SLAM] Bundle Adjustment 개념 리뷰: Reprojection error
- [2] [Blog] [SLAM] Optical Flow와 Direct Method 개념 및 코드 리뷰: Photometric error
- [3] [Blog] [SLAM] Pose Graph Optimization 개념 설명 및 예제 코드 분석: Relative pose error
- [4] [Blog] Plücker Coordinate 개념 정리: Line projection error
- [5] [Blog] [SLAM] Formula Derivation and Analysis of the VINS-mono 내용 정리: IMU measurement error

10 Revision log

- 1st: 2023-01-21
- 2nd: 2023-01-22
- 3rd: 2023-01-25
- 4th: 2023-01-28
- 5th: 2023-09-26
- 6th: 2023-11-14
- 7th: 2024-02-06
- 8th: 2024-04-02