

# Notes on Plücker Coordinates

Gyubeom Edward Im\*

February 8, 2024

## Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>How to represent a line in 3D space</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Plücker coordinate representation</b>	<b>4</b>
3.1	Graßmann–Plücker relations . . . . .	4
3.2	Distance to origin . . . . .	5
3.3	Up to scale uniqueness . . . . .	5
3.4	Plücker matrix . . . . .	6
3.4.1	Properties of plücker matrix . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Dual plücker coordinate representation</b>	<b>7</b>
4.1	Dual plücker matrix . . . . .	8
4.1.1	Properties of dual plücker matrix . . . . .	8
<b>5</b>	<b>Uses</b>	<b>9</b>
5.1	Line-line crossing . . . . .	9
5.2	Line-line join (Plane) . . . . .	10
5.3	Line-line meet (Point) . . . . .	10
5.4	Plane-line meet (Point) . . . . .	11
5.5	Point-line join (Plane) . . . . .	11
5.6	Line projection to the image plane . . . . .	12
5.6.1	Line projection matrix . . . . .	12
5.6.2	Point and line duality . . . . .	14
5.6.3	Projection matrix duality . . . . .	15
<b>6</b>	<b>Plücker line-based optimization</b>	<b>15</b>
6.1	Line Transformation and projection . . . . .	15
6.2	Line reprojection error . . . . .	16
6.3	Orthonormal representation . . . . .	16
6.4	Error function formulation . . . . .	17
6.4.1	The analytical jacobian of 3d line . . . . .	18
<b>7</b>	<b>References</b>	<b>18</b>
<b>8</b>	<b>Revision log</b>	<b>19</b>

---

\*blog: alida.tistory.com, email: criterion.im@gmail.com

# 1 Introduction

Plücker Coordinate 표현법은 19세기 수학자 Julius Plücker에 의해 처음 소개되었다. 해당 표현법은 직선을 표현하는 방법 중 하나로 6차원  $\mathbb{P}^5$  공간 상의 한 점을 사용하여 4차원  $\mathbb{P}^3$  공간 상의 직선을 표현할 때 사용된다. 해당 표현법은 자체 제약조건으로 인해  $\mathbb{P}^5$  곡면(quadric) 상의 한점과  $\mathbb{P}^3$  공간 상의 직선이 일대일 대응을 이루는 특징이 있다. 사영 공간(projective space)에 대한 자세한 내용은 해당 포스팅을 참조하면 된다.

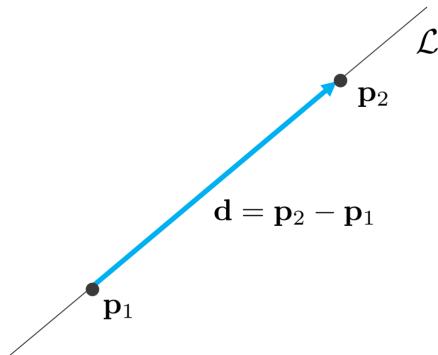
MVG 책에서는 일반적으로 3차원 공간 상의 점을  $\mathbf{X} = [X, Y, Z, W] \in \mathbb{P}^3$ 와 같이 나타내지만 Plücker Coordinates에서는 (10)와 같이  $l_{ij}$  인덱싱의 편의를 위해  $[W, X, Y, Z]$  순서를 사용하기도 한다.  $[X, Y, Z, W]$  순서로 나타내면 (28)과 같다. 따라서 이를 실제로 사용할 때는 순서에 유의하여야 한다.

컴퓨터 그래픽 분야에서 Plücker Coordinate 표현법이 자주 사용되며 로보틱스나 기구학에서도 Screw, Wrench를 표현할 때 해당 직선 표현법을 사용하는 등 종종 사용된다. 그리고 SLAM 분야에서도 직선을 활용할 때 Plücker Coordinate 표현법을 활용하여 특징선(line feature)을 트래킹하거나 최적화를 수행하는 연구 또한 볼 수 있다. [4][5]

## NOMENCLATURE

- 3차원 공간 상의 Plücker 직선은  $\mathcal{L} \in \mathbb{P}^5$ 로 표기한다.
- 이미지 평면 상 직선은  $l \in \mathbb{P}^2$ 로 표기한다. 해당 포스트에서  $l$ 은 스칼라가 아님에 유의한다.
- Plücker 행렬은  $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ 로 표기한다. 이는 Plücker 직선이 아니라 6x6 행렬임에 유의한다.
- 이미지 평면 상 직선의 Plücker 행렬은  $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 로 표기한다. 이는 직선이 아니라 3x3 행렬임에 유의한다.
- $(*)^\wedge$ 는 벡터  $*$ 의 반대칭행렬(skew-symmetric matrix)를 의미한다 e.g.,  $\mathbf{x} = [x, y, z]^\top$  일 때  $\mathbf{x}^\wedge = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}$ . 다른 문서에서는  $[*]_\times$ 로 표기하기도 한다.

## 2 How to represent a line in 3D space



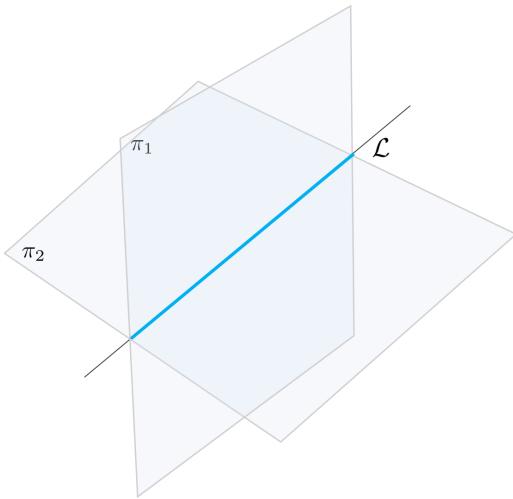
3차원 공간 상에서 직선을 표현하는 방법은 여러가지 방법들이 존재한다. 예를 들면 두 점  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ 을 사용함으로써 직선  $\mathcal{L}$ 을 표현할 수 있다.

$$\mathcal{L}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \tag{1}$$

또는 직선 위의 한 점  $\mathbf{p}_1$ 과 방향벡터  $\mathbf{d}$ 를 가지고 직선을 표현할 수 있다.

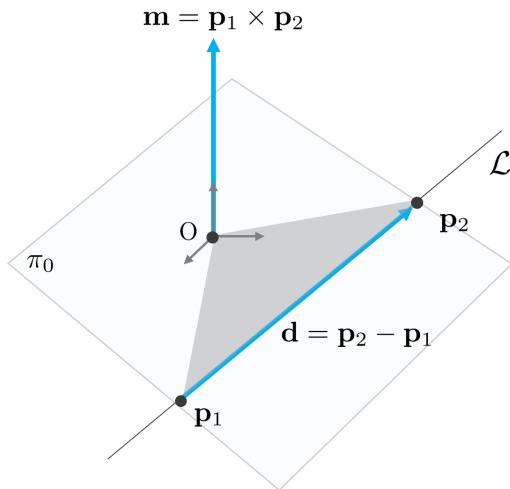
$$\mathcal{L}(\mathbf{p}_1, \mathbf{d}) \tag{2}$$

where,  $\mathbf{d} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$



또는 평행하지 않은 두 평면  $\pi_1, \pi_2$ 의 교차선이 직선을 형성하므로 평면 2개를 통해 직선  $L$ 을 표현할 수 있다.

$$L(\pi_1, \pi_2) \quad (3)$$



또는 직선의 방향벡터  $d$ 와 원점을 포함하며 직선을 포함하는 평면  $\pi_0$ 의 방향벡터  $m$ 을 사용하여 직선을 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} L(d, m) &\in \mathbb{P}^5 \\ \text{where, } d &= p_2 - p_1 \\ m &= p_1 \times p_2 \end{aligned} \quad (4)$$

이 때,  $m$ 은 단위 질량을 가진 점  $p_1$ 이  $p_2$ 로 움직일 때 발생하는 모멘트 벡터로 생각할 수 있으며 모멘트 벡터의 크기는  $p_1, p_2$ 와 원점을 이은 삼각형의 넓이의 2배가 된다. 방향 벡터  $d$ 와 모멘트 벡터  $m$ 은 서로 직교하므로 다음 공식이 성립한다.

$$m^\top \cdot d = 0 \quad (5)$$

$d$  또는  $m$  중 하나만을 사용하면 직선  $L$ 을 유일하게 표현할 수 없지만  $(d, m)$  쌍을 활용하면 스칼라 값에 무관한(up to scale) 유일한 직선을 표현할 수 있다.

$$(d : m) = (d_x : d_y : d_z : m_x : m_y : m_z) \quad (6)$$

이러한 여러 직선 표현 방법들 중  $(d, m)$ 을 사용하여 직선을 표현하는 방법을 Plücker Coordinate 표현법이라고 한다. 해당 표현법은 homogeneous 표현법이기 때문에 0이 아닌 스칼라  $\lambda$ 에 대하여  $(d : m) = (\lambda d : \lambda m)$ 를 만족한다.

### 3 Plücker coordinate representation

Plücker Coordinate에서 직선을 표현하는 방법은 다음과 같다.  $\mathbb{P}^3$  공간에 두 점  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ 가 존재할 때

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_1 &= [W_1, X_1, Y_1, Z_1] \\ \mathbf{p}_2 &= [W_2, X_2, Y_2, Z_2]\end{aligned}\quad (7)$$

와 같이 나타낼 수 있다. 설명의 편의를 위해  $[X, Y, Z, W] \rightarrow [W, X, Y, Z]$  순으로 표기한다. 직선에 대한 방향벡터  $\mathbf{d} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$ 과 원점과 직선을 포함하는 평면의 방향벡터  $\mathbf{m} = \mathbf{p}_2 \times \mathbf{p}_1$ 이 있을 때 직선  $\mathcal{L}$ 은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathcal{L} = (\mathbf{d} : \mathbf{m}) = (d_x : d_y : d_z : m_x : m_y : m_z) \quad (8)$$

이 때,  $\mathbf{m}$ 은 원점과 직선 사이의 모멘트(Moment) 벡터이며 만약 모멘트 벡터가 0이면 직선이 원점을 포함하고 있다는 의미이다. 위 식의 값을 유도하기 위해 아래와 같이 두 점을 행으로 하는 행렬  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ 을 설정하고  $2 \times 2$  submatrix에 대한 행렬식 연산  $l_{ij}$ 을 정의하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \begin{bmatrix} W_1 & X_1 & Y_1 & Z_1 \\ W_2 & X_2 & Y_2 & Z_2 \end{bmatrix} \\ l_{ij} &= \begin{vmatrix} X_i & Y_i \\ X_j & Y_j \end{vmatrix} = X_i Y_j - X_j Y_i\end{aligned}\quad (9)$$

$l_{ii} = 0, l_{ij} = -l_{ji}$ 의 성질을 지닌다. 결론적으로 직선  $\mathcal{L}$ 은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= (\mathbf{d} : \mathbf{m}) = (d_x : d_y : d_z : m_x : m_y : m_z) \\ &= (l_{01} : l_{02} : l_{03} : l_{23} : l_{31} : l_{12})\end{aligned}\quad (10)$$

해당 직선 표현법은 스케일을 제외하고(up to scale) 유일하게 직선을 표현할 수 있으며 적어도 하나의 원소는 0이 아니어야 한다. 일반적으로 Plücker Coordinate는 homogeneous한  $\mathbb{P}^5$  공간의 한 점을 콜론(:)을 사용하여 표현한다. 콜론(:)을 사용한 이유는 up to scale 특성 상 해당 여섯 원소들의 값 자체보다 원소들 사이의 비율이 중요하기 때문이다.

이 때,  $l_{ij}$ 의 각 성분들을 자세히 표기하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}l_{01} &= W_1 X_2 - W_2 X_1 & l_{23} &= Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2 \\ l_{02} &= W_1 Y_2 - W_2 Y_1 & l_{31} &= Z_1 X_2 - X_1 Z_2 \\ l_{03} &= W_1 Z_2 - W_2 Z_1 & l_{12} &= X_1 Y_2 - Y_1 X_2\end{aligned}\quad (11)$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} W_1 X_2 - W_2 X_1 \\ W_1 Y_2 - W_2 Y_1 \\ W_1 Z_2 - W_2 Z_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2 \\ Z_1 X_2 - X_1 Z_2 \\ X_1 Y_2 - Y_1 X_2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

이 때, 위 식에서  $\mathbf{m} = \mathbf{p}_2 \times \mathbf{p}_1$ 과 같은 것을 알 수 있다. 만약  $W_1 = W_2 = 1$ 이면  $l_{01}, l_{02}, l_{03}$ 은 다음과 같이 간결하게 나타낼 수 있다.

$$l_{01} = X_2 - X_1 \quad l_{02} = Y_2 - Y_1 \quad l_{03} = Z_2 - Z_1 \quad (13)$$

이는  $\mathbf{d} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$ 의 정의와 동일하다.

#### 3.1 Graßmann–Plücker relations

Plücker Coordinates 표현법은 Graßmann–Plücker relations라 부르는 제약 조건으로 인해  $\mathbb{P}^5$  곡면(quadratic) 상의 한점과  $\mathbb{P}^3$  공간 상의 직선이 일대일 대응을 이루는 특징이 있다. 이 때,  $\mathbb{P}^3$  공간 상의 직선과 대응하는  $\mathbb{P}^5$  곡면을 특별히 Klein quadric이라고 부르며 다음 제약 조건을 만족한다.

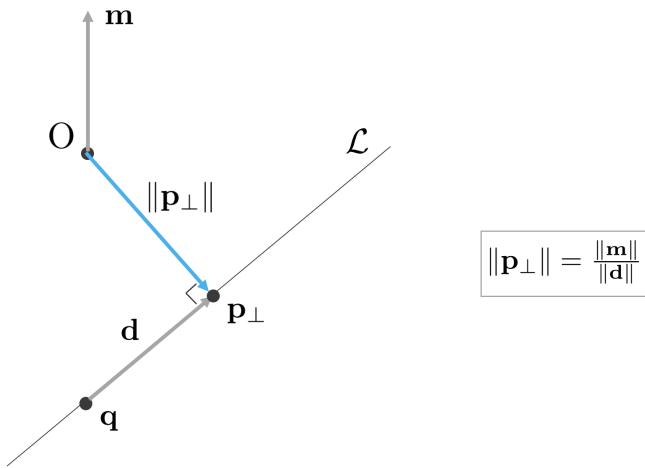
$$l_{01} l_{23} + l_{02} l_{31} + l_{03} l_{12} = 0 \quad (14)$$

또는  $l_{31} = -l_{13}$ 이므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$l_{01} l_{23} - l_{02} l_{13} + l_{03} l_{12} = 0 \quad (15)$$

위 식은 (5)  $\mathbf{m}^\top \mathbf{d} = 0$  식으로부터 유도되며  $\det \mathbf{L} = 0$ 을 통해서도 구할 수 있다.

## 3.2 Distance to origin



직선이 원점으로부터 떨어진 거리  $\|\mathbf{p}_\perp\|$ 는 다음과 같이 구할 수 있다. 직선  $\mathcal{L}$  위의 임의의 점  $\mathbf{q}$ 가 주어졌고 원점으로부터 직선의 수선의 발이 내려진 점을  $\mathbf{p}_\perp$ 라고 하면  $\mathbf{q}$ 를 통해  $\mathbf{p}_\perp$ 를 표현할 수 있다.

$$\mathbf{q} = \mathbf{p}_\perp + k\mathbf{d} \quad (\text{any } \mathbf{q} \text{ on } \mathcal{L}) \quad (16)$$

이에 따라 모멘트 벡터  $\mathbf{m}$ 은 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \mathbf{d} \times \mathbf{q} \\ &= \mathbf{d} \times (\mathbf{p}_\perp + k\mathbf{d}) \\ &= \mathbf{d} \times \mathbf{p}_\perp \end{aligned} \quad (17)$$

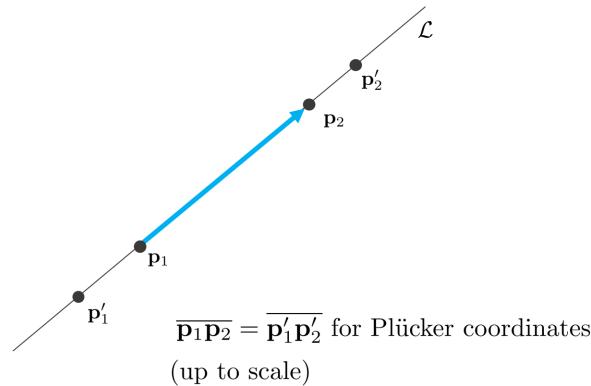
모멘트 벡터의 크기 외적의 정의에 따라 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\|\mathbf{m}\| = \|\mathbf{d}\| \|\mathbf{p}_\perp\| \sin \frac{\pi}{2} = \|\mathbf{d}\| \|\mathbf{p}_\perp\| \quad (18)$$

따라서 원점으로부터 떨어진 직선  $\mathcal{L}$ 까지의 거리는 다음과 같다.

$$\|\mathbf{p}_\perp\| = \frac{\|\mathbf{m}\|}{\|\mathbf{d}\|} \quad (19)$$

## 3.3 Up to scale uniqueness



만약 직선 위의 점  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ 가 아닌 직선 위의 임의의 다른 점  $\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2$ 가 존재할 때 이는 기존 점들을 통해 표현이 가능하다.

$$\begin{aligned} \mathbf{p}'_1 &= \lambda \mathbf{p}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}'_2 &= \mu \mathbf{p}_1 + (1 - \mu) \mathbf{p}_2 \end{aligned} \quad (20)$$

직선의 방향벡터  $\mathbf{d}'$ 와 모멘트 벡터  $\mathbf{m}$  또한 기존의 점들을 스케일하여 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}\mathbf{d}' &= \mathbf{p}_2' - \mathbf{p}_1' = (\lambda - \mu)\mathbf{d} \\ \mathbf{m}' &= \mathbf{p}_1' \times \mathbf{p}_2' = (\lambda - \mu)\mathbf{m}\end{aligned}\quad (21)$$

따라서 Plücker Coordinate는 스케일 특성까지만(up to scale) 직선을 유일하게 표현할 수 있다.

### 3.4 Plücker matrix

$\mathbb{P}^3$  공간에 두 점  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 가 존재한다고 하자.

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= (W_1, X_1, Y_1, Z_1) \\ \mathbf{B} &= (W_2, X_2, Y_2, Z_2)\end{aligned}\quad (22)$$

위 두 점을 사용하여 다음과 같은 Plücker matrix를 정의할 수 있다.

$$\mathbf{L} = \mathbf{AB}^\top - \mathbf{BA}^\top = \begin{bmatrix} 0 & -l_{01} & -l_{02} & -l_{03} \\ l_{01} & 0 & -l_{12} & -l_{13} \\ l_{02} & l_{12} & 0 & -l_{23} \\ l_{03} & l_{13} & l_{23} & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}\quad (23)$$

Plücker matrix는  $4 \times 4$  반대칭 행렬이며 하삼각(lower-triangle) 행렬의 6개 원소가 곧 Plücker coordinates가 된다.

$$\mathbf{L} = \mathcal{L}^\wedge\quad (24)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= (l_{01} : l_{02} : l_{03} : l_{12} : l_{13} : l_{23}) \\ l_{ij} &= A_i B_j - B_i A_j\end{aligned}\quad (25)$$

Tip

이 때, 주의할 점은 앞서 설명한 Plücker coordinates 순서와 위 수식의  $\mathbf{m}$ 을 표기하는 순서가 약간 다르다는 것이다.

$$\begin{aligned}(1) \quad \mathcal{L} &= (l_{01} : l_{02} : l_{03} : l_{23} : l_{31} : l_{12}) \\ (2) \quad \mathcal{L} &= (l_{01} : l_{02} : l_{03} : l_{12} : l_{13} : l_{23})\end{aligned}\quad (26)$$

[3]에서는 (1)의 순서로 나와있으나 [1], [2]에서는 (2)과 같이 나와있다. 필자의 개인적인 생각으로는 (1)의 방법이  $(l_{23} : l_{31} : l_{12}) = (m_x : m_y : m_z)$ 를 만족하므로 맞는 표기로 보이지만 (2) 또한 널리 사용되므로 순서에 유의해서 봐야 한다.

#### 3.4.1 Properties of plücker matrix

Plücker matrix 다음과 같은 성질이 존재한다.

- $\mathbf{L}$  행렬은 rank 2를 가지며 해당 행렬의 2차원 영공간(null space)는 해당 직선을 지나는 평면 다발(pencil)들에 의해 스팬(span)된다.
- $\mathbf{L}$  행렬은 4자유도를 가진다. 6개 원소  $l_{ij}$ 의 homogeneous 특성 상 자유도를 하나 잃고 또한  $\det \mathbf{L} = 0$  인 제약조건으로 인해 자유도를 추가적으로 하나 잃어서 총 4자유도를 가진다.
- $\mathbf{L} = \mathbf{AB}^\top - \mathbf{BA}^\top$ 는  $\mathbb{P}^2$  공간에서 두 점을 잇는 직선을  $\mathbf{l} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 로 표현하는 방법의  $\mathbb{P}^3$  베전으로 볼 수 있다.
  - $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ :  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 가 이미지 평면에 프로젝션된 점
- $\mathbf{L}$  행렬은 이를 정의한 두 점  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 에 독립적(independent)이다. 만약 직선 위의 점  $\mathbf{C}$ 가 주어진 경우  $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mu\mathbf{B}$ 를 통해 나타낼 수 있고 행렬은 다음과 같이 변형된다.

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{L}} &= \mathbf{AC}^\top - \mathbf{CA}^\top = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\top + \mu\mathbf{B}^\top) - (\mathbf{A} + \mu\mathbf{B})\mathbf{A}^\top \\ &= \mathbf{AB}^\top - \mathbf{BA}^\top = \mathbf{L}\end{aligned}\quad (27)$$

- $\mathbb{P}^3$  공간 상의 Homography 행렬  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ 가 3차원 점을 변환할 때  $\mathbf{X}' = \mathbf{HX}$  같이 적용된다. 이에 상응하는 직선의 Homography 변환은  $\mathbf{L}' = \mathbf{HLH}^\top$ 이다.

Tip

- 만약  $[W, X, Y, Z]$  순서가 아닌  $[X, Y, Z, W]$  순으로 좌표를 나타내면 기존  $\mathcal{L}$ 은 다음과 같이 변한다.

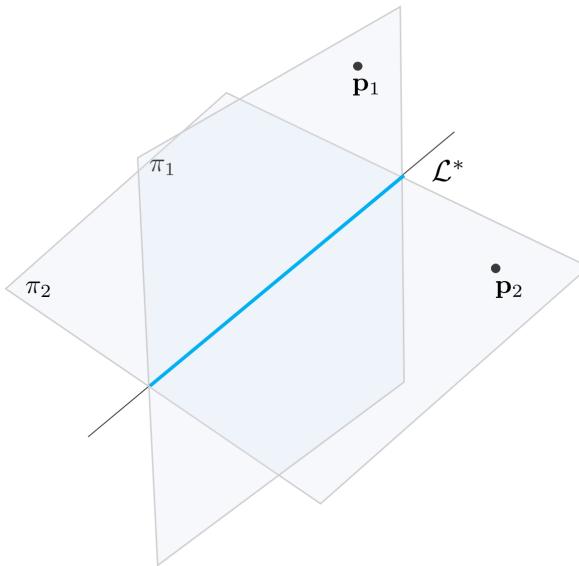
$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= (\mathbf{d} : \mathbf{m}) \\ &= (l_{01} : l_{02} : l_{03} : l_{23} : l_{31} : l_{12}) \rightarrow (l_{30} : l_{31} : l_{32} : l_{12} : l_{20} : l_{01})\end{aligned}\quad (28)$$

– 이 때,  $\mathbf{L}$  행렬은 다음과 같이 간단하게 구할 수 있다.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & -l_{01} & -l_{02} & -l_{03} \\ l_{01} & 0 & -l_{12} & -l_{13} \\ l_{02} & l_{12} & 0 & -l_{23} \\ l_{03} & l_{13} & l_{23} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}^\wedge & \mathbf{d} \\ -\mathbf{d}^\top & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

– 주의할 점은  $[W, X, Y, Z]$ 에서는 위와 같이 간단하게 구하지 못하고 오직  $[X, Y, Z, W]$ 일 때만 가능한 것으로 보인다.

## 4 Dual plücker coordinate representation



3차원 점을 사용하여 직선을 표현하는 방법과 동일하게 서로 평행하지 않은 두 평면이 교차하는 직선을 사용하여 Plücker Coordinate를 표현할 수 있다. 이렇게 두 평면의 교선으로 직선을 표현하는 방법을 **Dual Plücker Coordinate이라고 한다.**

서로 평행하지 않은 두 평면을 사용하여 Plücker Coordinates 방법과 동일하게  $2 \times 4$  행렬  $\mathbf{M}^*$ 를 만들고  $2 \times 2$  submatrix 연산  $l_{ij}^*$ 을 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned}\mathbf{M}^* &= \begin{bmatrix} a_w & a_x & a_y & a_z \\ b_w & b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} \\ l_{ij}^* &= \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = a_x b_y - a_y b_x\end{aligned}\quad (31)$$

Dual Representation으로 표현한 직선  $\mathcal{L}^*$ 은 다음과 같다.

$$\mathcal{L}^* = (l_{23}^* : l_{31}^* : l_{12}^* : l_{01}^* : l_{02}^* : l_{03}^*) \quad (32)$$

이는 두 점을 통해 표현한 Plücker Coordinate  $\mathcal{L}$ 의  $l_{ij}$ 에서  $\{1, 2, 3, 4\}$ 를 자신이 아닌 다른 값으로 변경한 것과 같다. 예를 들어  $l_{01} \leftrightarrow l_{23}^*, l_{12} \leftrightarrow l_{03}^*$ 이 된다.

Tip

3차원 공간 상의 점  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  각각 평면  $\pi_1, \pi_2$  위에 있을 때 아래의 공식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \pi_1^\top \mathbf{p}_1 &= 0, \quad \pi_2^\top \mathbf{p}_2 = 0 \\ \begin{bmatrix} a_w & a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} &= 0 \\ \begin{bmatrix} b_w & b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_2 \\ X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} &= 0 \end{aligned} \tag{30}$$

위와 같이 평면은  $\pi_1 = [a_w \ a_x \ a_y \ a_z], \pi_2 = [b_w \ b_x \ b_y \ b_z]$ 로 파라미터화 할 수 있다.

$$(l_{01} : l_{02} : l_{03} : l_{23} : l_{31} : l_{12}) = (l_{23}^* : l_{31}^* : l_{12}^* : l_{01}^* : l_{02}^* : l_{03}^*) \tag{33}$$

## 4.1 Dual plücker matrix

$\mathbb{P}^3$  공간에 두 평면  $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ 가 존재한다고 하자.

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= [W_1, X_1, Y_1, Z_1] \\ \mathbf{Q} &= [W_2, X_2, Y_2, Z_2] \end{aligned} \tag{34}$$

Dual plücker matrix  $\mathbf{L}^*$ 은 Plücker matrix  $\mathbf{L}$ 와 유사하게 위 두 평면을 사용하여 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\mathbf{L}^* = \mathbf{P}\mathbf{Q}^\top - \mathbf{Q}\mathbf{P}^\top = \begin{bmatrix} 0 & l_{23}^* & -l_{13}^* & l_{12}^* \\ -l_{23}^* & 0 & l_{03}^* & -l_{02}^* \\ l_{13}^* & -l_{03}^* & 0 & l_{01}^* \\ -l_{12}^* & l_{02}^* & -l_{01}^* & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \tag{35}$$

### 4.1.1 Properties of dual plücker matrix

Dual plücker matrix의 성질은 다음과 같다.

- $\mathbb{P}^3$  공간 상의 Homography 행렬  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ 가 3차원 점을 변환할 때  $\mathbf{X}' = \mathbf{H}\mathbf{X}$  같이 적용된다. 이에 상응하는 dual 직선의 Homography 변환은  $\mathbf{L}' = \mathbf{H}^{-\top} \mathbf{L} \mathbf{H}^{-1}$ 이다.
- 직선  $\mathcal{L}$ 과 평면  $\pi$ 가 주어졌을 때, 둘이 만나는 교점은  $\mathbf{X} = \mathbf{L}\pi$ 를 통해 구할 수 있다. 그리고 직선  $\mathcal{L}$ 과 점  $\mathbf{X}$ 가 주어졌을 때 둘을 포함하는 평면은  $\pi = \mathbf{L}^*\mathbf{X}$ 를 통해 구할 수 있다. 자세한 내용은 해당 섹션의 내용을 참조하면 된다.
  - 이 때, 평면  $\pi$  위에 직선  $\mathcal{L}$ 이 존재하거나 직선  $\mathcal{L}$  위에 점  $\mathbf{X}$ 이 존재하면 각각  $\mathbf{L}\pi = 0, \mathbf{L}^*\mathbf{X} = 0$  이 된다. 해당 식을 이어서 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathbf{L}\pi = 0 \\ \mathbf{L}^*\mathbf{X} &= \mathbf{L}^*\mathbf{L}\pi = 0 \\ \therefore \mathbf{L}^*\mathbf{L} &= 0 \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \end{aligned} \tag{36}$$

- 위 식을 풀어서 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} 0 & l_{23}^* & -l_{13}^* & l_{12}^* \\ -l_{23}^* & 0 & l_{03}^* & -l_{02}^* \\ l_{13}^* & -l_{03}^* & 0 & l_{01}^* \\ -l_{12}^* & l_{02}^* & -l_{01}^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -l_{01} & -l_{02} & -l_{03} \\ l_{01} & 0 & -l_{12} & -l_{13} \\ l_{02} & l_{12} & 0 & -l_{23} \\ l_{03} & l_{13} & l_{23} & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (37)$$

$$[l_{01}l_{23} - l_{02}l_{13} + l_{03}l_{12}] \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} = 0$$

- 위 식은 앞서 설명한 Graßmann–Plücker relation 제약조건으로 인해 0을 만족한다.

Tip

- 만약  $[W, X, Y, Z]$  순서가 아닌  $[X, Y, Z, W]$  순으로 좌표를 나타내면 기준  $\mathcal{L}^*$ 은 다음과 같이 변한다.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= (\mathbf{d} : \mathbf{m}) \\ &= (l_{01} : l_{02} : l_{03} : l_{23} : l_{31} : l_{12}) \rightarrow (l_{30} : l_{31} : l_{32} : l_{12} : l_{20} : l_{01}) \\ \mathcal{L}^* &= (-\mathbf{m} : -\mathbf{d}) \\ &= (l_{23}^* : l_{31}^* : l_{12}^* : l_{01}^* : l_{02}^* : l_{03}^*) \rightarrow (l_{21}^* : l_{02}^* : l_{10}^* : l_{03}^* : l_{13}^* : l_{23}^*) \end{aligned} \quad (38)$$

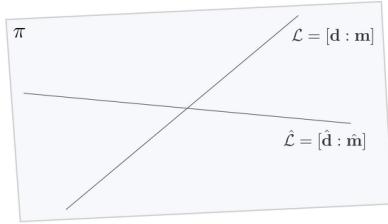
- 이 때,  $\mathbf{L}^*$  행렬은 다음과 같이 간단하게 구할 수 있다.

$$\mathbf{L}^* = \begin{bmatrix} 0 & l_{23}^* & -l_{13}^* & l_{12}^* \\ -l_{23}^* & 0 & l_{03}^* & -l_{02}^* \\ l_{13}^* & -l_{03}^* & 0 & l_{01}^* \\ -l_{12}^* & l_{02}^* & -l_{01}^* & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{d}^\wedge & \mathbf{m} \\ -\mathbf{m}^\tau & 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

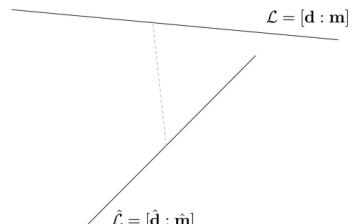
- 주의할 점은  $[W, X, Y, Z]$ 에서는 위와 같이 간단하게 구하지 못하고 오직  $[X, Y, Z, W]$ 일 때만 가능한 것으로 보인다.

## 5 Uses

### 5.1 Line-line crossing



$$(\mathcal{L}|\hat{\mathcal{L}}) = 0 \quad \text{if and only if two lines are coplanar}$$



$$(\mathcal{L}|\hat{\mathcal{L}}) \neq 0 \quad \text{if two lines are skew}$$

$\mathbb{P}^3$  공간 상의 동일한 평면 위에 존재하는(coplanar) 두 직선  $\mathcal{L}, \hat{\mathcal{L}}$ 가 주어졌다고 가정하자. 직선  $\mathcal{L}$ 이 두 점  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 에 의해 결정되고  $\hat{\mathcal{L}}$ 이 두 점  $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}$ 에 의해 결정된다고 했을 때 두 직선의 행렬식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \det[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}] &= l_{12}\hat{l}_{34} + \hat{l}_{12}l_{34} + l_{13}\hat{l}_{42} + \hat{l}_{13}l_{42} + l_{14}\hat{l}_{23} + \hat{l}_{14}l_{23} \\ &= (\mathcal{L}|\hat{\mathcal{L}}) \end{aligned} \quad (40)$$

해당 섹션에서 설명한 것처럼  $\mathcal{L}$ 과  $\hat{\mathcal{L}}$ 은 해당 직선을 결정하는 점들로부터 독립적이므로  $(\mathcal{L}|\hat{\mathcal{L}})$ 은  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}$  뿐만 아니라 해당 직선 위의 모든 점들에 대해 만족한다. 두 직선이 동일한 평면 위에 존재하려면  $\det[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}] = 0$ 을 만족해야 한다.

$$(\mathcal{L}|\hat{\mathcal{L}}) = 0 \quad \text{if and only if two lines are coplanar} \quad (41)$$

이는 다음과 같은 유용한 성질들을 도출한다.

- 임의의 6차원 벡터  $\mathcal{L}$ 가  $(\mathcal{L}|\mathcal{L}) = 0$ 을 만족하면 이는  $\mathbb{P}^3$  공간 상의 한 직선을 표현할 수 있다. 이는 앞서 설명한 Klein quadric 제약조건과 동일하다.
- 두 직선  $\mathcal{L}, \hat{\mathcal{L}}$ 은 두 평면들로부터 결정될 수 있다.  $\mathcal{L}$ 가 두 평면  $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ 로부터 결정되고  $\hat{\mathcal{L}}$ 가 두 평면  $\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{Q}}$ 로부터 결정된다고 하면 다음 제약 조건을 만족한다.

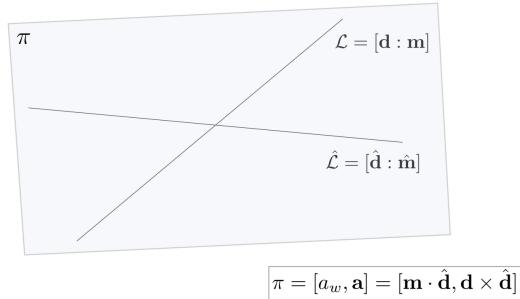
$$(\mathcal{L}|\hat{\mathcal{L}}) = \det[\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{Q}}] \quad (42)$$

앞서 설명한 내용과 동일하게 두 직선은  $(\mathcal{L}|\mathcal{L}) = 0$ 일 때 서로 교차(intersect)한다.

- 직선  $\mathcal{L}$ 가 두 평면  $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ 로부터 결정되고  $\hat{\mathcal{L}}$ 가 두 점  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 로부터 결정된다고 하면 다음 제약 조건을 만족한다.

$$(\mathcal{L}|\hat{\mathcal{L}}) = (\mathbf{P}^\top \mathbf{A})(\mathbf{Q}^\top \mathbf{B}) - (\mathbf{Q}^\top \mathbf{A})(\mathbf{P}^\top \mathbf{B}) \quad (43)$$

## 5.2 Line-line join (Plane)



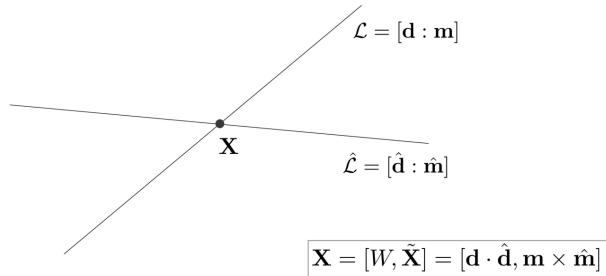
$\mathbb{P}^3$  공간 상의 두 직선  $\mathcal{L}, \hat{\mathcal{L}}$ 이 동일한 평면  $\pi$ 위에 존재하고(coplanar) 서로 평행하지 않은 경우 두 직선을 통해 평면  $\pi$ 를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= [\mathbf{d} : \mathbf{m}] \\ \hat{\mathcal{L}} &= [\hat{\mathbf{d}} : \hat{\mathbf{m}}] \\ \pi &= [a_w, a_x, a_y, a_z] = [a_w, \mathbf{a}] \end{aligned} \quad (44)$$

다음 공식을 통해 평면  $\pi$ 를 구할 수 있다.

$$\pi = [a_w, \mathbf{a}] = [\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{d}}, \mathbf{d} \times \hat{\mathbf{d}}] \quad (45)$$

## 5.3 Line-line meet (Point)



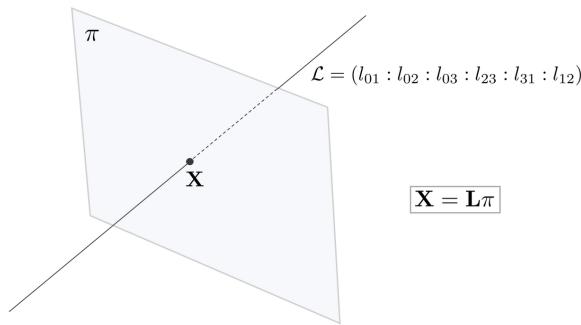
$\mathbb{P}^3$  공간 상의 두 직선  $\mathcal{L}, \hat{\mathcal{L}}$ 이 동일한 평면 위에 존재하고(coplanar) 서로 평행하지 않은 경우 두 직선은 한 점  $\mathbf{X}$ 에서 만난다.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= [\mathbf{d} : \mathbf{m}], \\ \hat{\mathcal{L}} &= [\hat{\mathbf{d}} : \hat{\mathbf{m}}] \\ \mathbf{X} &= [W, X, Y, Z] = [W, \tilde{\mathbf{X}}]\end{aligned}\tag{46}$$

다음 공식을 통해 3차원 점  $\mathbf{X}$ 을 구할 수 있다.

$$\mathbf{X} = [W, \tilde{\mathbf{X}}] = [\mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{d}}, \mathbf{m} \times \hat{\mathbf{m}}]\tag{47}$$

## 5.4 Plane-line meet (Point)



3차원 공간 상의 한 직선  $\mathcal{L}$ 과 평면  $\pi$ 의 교점으로 생성되는 한 점  $\mathbf{X}$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{X} = \mathbf{L}\pi\tag{48}$$

만약 직선  $\mathcal{L}$ 이 평면  $\pi$  위에 존재하면  $\mathbf{L}\pi = 0^\circ$  된다.

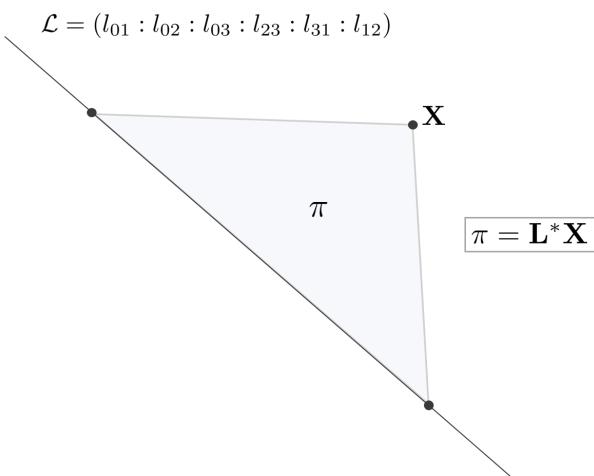
조금 더 자세하게 벡터로 풀어서 설명하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= [\mathbf{d} : \mathbf{m}], \\ \pi &= [a_w, a_x, a_y, a_z] = [a_w, \mathbf{a}] \\ \mathbf{X} &= [W, X, Y, Z] = [W, \tilde{\mathbf{X}}]\end{aligned}\tag{49}$$

따라서 직선과 평면의 교점으로 생성되는 한 점  $\mathbf{X}$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{X} = [W, \tilde{\mathbf{X}}] = [\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}, \mathbf{a} \times \mathbf{m} - a_w \mathbf{d}]\tag{50}$$

## 5.5 Point-line join (Plane)



3차원 공간 상의 한 점  $\mathbf{X}$ 와 직선  $\mathcal{L}$ 로 인해 생성되는 평면  $\pi$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\pi = \mathbf{L}^* \mathbf{X} \quad (51)$$

만약  $\mathbf{X}$ 가 직선  $\mathcal{L}$  위에 존재하면  $\mathbf{L}^* \mathbf{X} = 0$ 이 된다. Dual plücker matrix  $\mathbf{L}^*$ 에 대한 자세한 설명은 해당 섹션에서 설명한다.

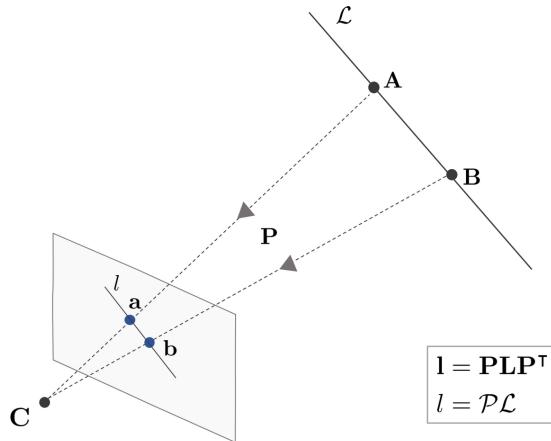
조금 더 자세하게 벡터로 풀어서 설명하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= [\mathbf{d} : \mathbf{m}], \\ \mathbf{X} &= [W, X, Y, Z] = [W, \tilde{\mathbf{X}}] \\ \pi &= [a_w, a_x, a_y, a_z] = [a_w, \mathbf{a}] \end{aligned} \quad (52)$$

따라서 직선과 한 점으로 인해 생성되는 평면  $\pi$ 는 다음과 같다.

$$\pi = [a_w, \mathbf{a}] = [\tilde{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{m}, \tilde{\mathbf{X}} \times \mathbf{d} - W\mathbf{m}] \quad (53)$$

## 5.6 Line projection to the image plane



3차원 공간 상의 점  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 와 두 점을 잇는 직선  $\mathcal{L}$ 이 주어졌다고 하자. 카메라 프로젝션 행렬  $\mathbf{P}$ 가 있을 때 직선  $\mathcal{L}$ 을 이미지 평면에 프로젝션한 직선의 이미지(image of the line)  $l$ 의 plücker matrix  $\mathbf{l}$ 은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$l^\wedge = \mathbf{l} = \mathbf{PLP}^\top \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad (54)$$

- $\mathcal{L}$ : 3차원 공간 상의 직선
- $\mathbf{L} = \mathcal{L}^\wedge$ : 3차원 공간 상의 직선의 plücker matrix (반대칭 행렬)
- $l$ : 이미지 평면에 프로젝션된 직선
- $\mathbf{l} = l^\wedge$ : 프로젝션된 직선의 plücker matrix (반대칭 행렬)

### 5.6.1 Line projection matrix

직선의 프로젝션 행렬  $\mathcal{P}$ 를 사용하면 위처럼 3차원 공간 상의 직선  $\mathcal{L}$ 을 plücker matrix의 형태  $\mathbf{L}$ 로 변환하여  $\mathbf{l}$ 을 구하지 않고 바로  $l$ 을 구할 수 있다. 임의의 카메라 프로젝션 행렬  $\mathbf{P} = [\mathbf{N}|\mathbf{n}] \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ 와 같이 주어졌을 때  $\mathcal{P}$ 는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\mathcal{P} = [\det(\mathbf{N})\mathbf{N}^{-\top}|\mathbf{n}^\wedge\mathbf{N}] \in \mathbb{R}^{3 \times 6} \quad (55)$$

만약  $\mathbf{P} = [\mathbf{R}|\mathbf{t}]$ 인 경우 위 식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathcal{P} = [\mathbf{R} | \mathbf{t}^\wedge\mathbf{R}] \in \mathbb{R}^{3 \times 6} \quad (56)$$

이는 다음과 같은 식을 통해 유도할 수 있다. 3차원 공간 상의 두 점  $\mathbf{A} = [\tilde{\mathbf{A}}|a], \mathbf{B} = [\tilde{\mathbf{B}}|b] \in \mathbb{P}^3$ 가 주어졌을 때 두 점을 프로젝션한 이미지 평면 상의 두 점  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{P}^2$ 이 있다고 하자. 이를 통해 직선  $l$ 을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
l &= \mathbf{a} \times \mathbf{b} \\
&= \mathbf{PA} \times \mathbf{PB} \\
&= (\mathbf{N}\tilde{\mathbf{A}} + a\mathbf{n}) \times (\mathbf{N}\tilde{\mathbf{B}} + b\mathbf{n}) \\
&= (\mathbf{N}\tilde{\mathbf{A}}) \times (\mathbf{N}\tilde{\mathbf{B}}) + a\mathbf{n} \times (\mathbf{N}\tilde{\mathbf{B}}) - b\mathbf{n} \times (\mathbf{N}\tilde{\mathbf{A}}) \\
&= \det(\mathbf{N})\mathbf{N}^{-\top}(\tilde{\mathbf{A}} \times \tilde{\mathbf{B}}) + \mathbf{n}^\wedge \mathbf{N}(a\tilde{\mathbf{B}} - b\tilde{\mathbf{A}}) \\
&= [\det(\mathbf{N})\mathbf{N}^{-\top}|\mathbf{n}^\wedge \mathbf{N}] \cdot [\mathbf{m}^\top | \mathbf{d}^\top]^\top \\
&= \mathcal{PL}
\end{aligned} \tag{57}$$

- $\mathbf{m} = \tilde{\mathbf{A}} \times \tilde{\mathbf{B}}$
- $\mathbf{d} = a\tilde{\mathbf{B}} - b\tilde{\mathbf{A}}$

다섯번 째 라인의 유도는 해당 링크에서 확인할 수 있다.

이와 다른 방식으로  $\mathcal{P}$ 를 구할 수도 있다. 우선 다른 방식으로 표현한  $\mathcal{P}$ 는 다음과 같다.

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{2,row} \wedge \mathbf{p}_{3,row} \\ \mathbf{p}_{3,row} \wedge \mathbf{p}_{1,row} \\ \mathbf{p}_{1,row} \wedge \mathbf{p}_{2,row} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 6} \tag{58}$$

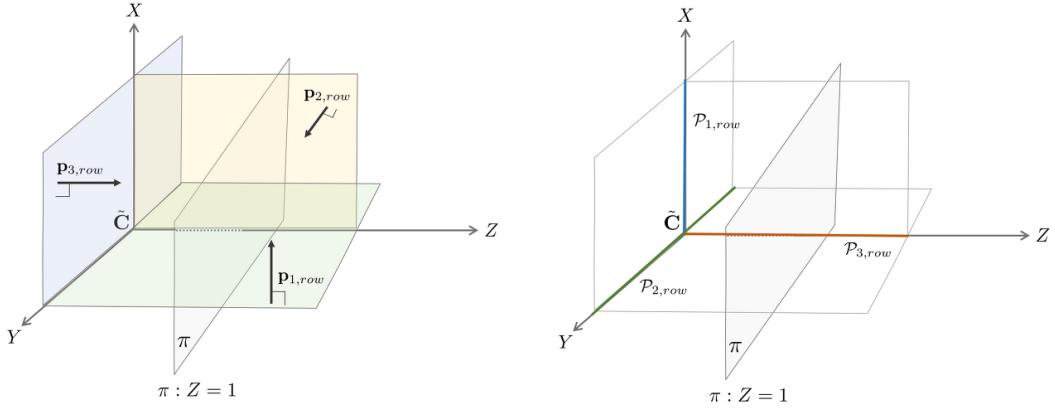
- $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{1,row}^\top \\ \mathbf{p}_{2,row}^\top \\ \mathbf{p}_{3,row}^\top \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ : 카메라 프로젝션 행렬
- $\mathbf{p}_{i,row} \in \mathbb{R}^{1 \times 4}$ :  $\mathbf{P}$ 의  $i$ 번째 행벡터.  $i = 1, 2, 3$ 을 기준으로 각각  $X, Y, Z$  축과 평행한 평면을 의미한다.
- $\mathbf{p}_{i,row} \wedge \mathbf{p}_{j,row} \in \mathbb{R}^{1 \times 6}$ : 두 평면  $\mathbf{p}_{i,row}$ 와  $\mathbf{p}_{j,row}$ 의 교차선으로 인해 생성되는 직선의 plücker coordinates

이를 통해  $l$ 를 구하면 다음과 같다.

$$l = \mathcal{PL} = \begin{bmatrix} (\mathbf{p}_{2,row} \wedge \mathbf{p}_{3,row} | \mathcal{L}) \\ (\mathbf{p}_{3,row} \wedge \mathbf{p}_{1,row} | \mathcal{L}) \\ (\mathbf{p}_{1,row} \wedge \mathbf{p}_{2,row} | \mathcal{L}) \end{bmatrix} \tag{59}$$

3차원 공간 상의 두 점  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 를 프로젝션한  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 는 각각  $\mathbf{a} = \mathbf{PA}, \mathbf{b} = \mathbf{PB}$ 와 같이 나타낼 수 있고 직선의 이미지  $l = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\mathbf{PA} \times \mathbf{PB})$ 와 같이 나타낼 수 있으므로 (43)에 따라 아래와 같이 전개할 수 있다.

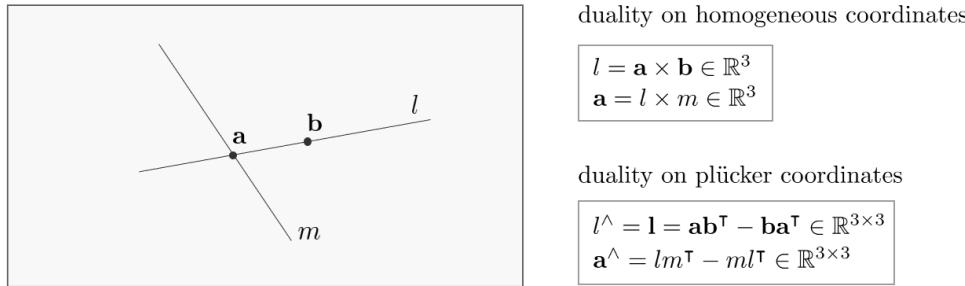
$$\begin{aligned}
l &= \mathbf{PA} \times \mathbf{PB} \\
&= \left( \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{1,row} \\ \mathbf{p}_{2,row} \\ \mathbf{p}_{3,row} \end{bmatrix} \mathbf{A} \right) \times \left( \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{1,row} \\ \mathbf{p}_{2,row} \\ \mathbf{p}_{3,row} \end{bmatrix} \mathbf{B} \right) \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{1,row}\mathbf{A} \\ \mathbf{p}_{2,row}\mathbf{A} \\ \mathbf{p}_{3,row}\mathbf{A} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{1,row}\mathbf{B} \\ \mathbf{p}_{2,row}\mathbf{B} \\ \mathbf{p}_{3,row}\mathbf{B} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{p}_{3,row}\mathbf{A} & \mathbf{p}_{2,row}\mathbf{A} \\ \mathbf{p}_{3,row}\mathbf{A} & 0 & -\mathbf{p}_{1,row}\mathbf{A} \\ -\mathbf{p}_{2,row}\mathbf{A} & \mathbf{p}_{1,row}\mathbf{A} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{1,row}\mathbf{B} \\ \mathbf{p}_{2,row}\mathbf{B} \\ \mathbf{p}_{3,row}\mathbf{B} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (\mathbf{p}_{2,row}\mathbf{A})(\mathbf{p}_{3,row}\mathbf{B}) - (\mathbf{p}_{2,row}\mathbf{B})(\mathbf{p}_{3,row}\mathbf{A}) \\ (\mathbf{p}_{3,row}\mathbf{A})(\mathbf{p}_{1,row}\mathbf{B}) - (\mathbf{p}_{3,row}\mathbf{B})(\mathbf{p}_{1,row}\mathbf{A}) \\ (\mathbf{p}_{1,row}\mathbf{A})(\mathbf{p}_{2,row}\mathbf{B}) - (\mathbf{p}_{1,row}\mathbf{B})(\mathbf{p}_{2,row}\mathbf{A}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (\mathbf{p}_{2,row} \wedge \mathbf{p}_{3,row} | \mathcal{L}) \\ (\mathbf{p}_{3,row} \wedge \mathbf{p}_{1,row} | \mathcal{L}) \\ (\mathbf{p}_{1,row} \wedge \mathbf{p}_{2,row} | \mathcal{L}) \end{bmatrix} \quad \dots \text{ by (43)}
\end{aligned} \tag{60}$$



$\mathcal{P}$  행렬의 각 행벡터(row vector)는 기하학적으로 직선을 의미하는데 이는  $\mathbf{P}$  행렬에서 각각의 행벡터가 평면을 의미하는 것과 유사하다.  $\mathbf{p}_{i,\text{row}}$  행렬이 X, Y 축 평면과 주평면(principal plane)을 의미했다면  $\mathcal{P}$  행렬의 행벡터는 해당 평면들의 교차선을 의미한다. 다시 말하면,  $\mathcal{P}$ 의 행벡터는 카메라의 중심점  $\tilde{\mathbf{C}}$ 를 지나가며 각 X, Y, Z에 평행한 직선을 의미한다.

예를 들어,  $\mathcal{P}$ 의 첫번째 행벡터는  $[\mathbf{p}_{2,\text{row}} \wedge \mathbf{p}_{3,\text{row}}]$ 인데 이는  $y = 0$  평면인  $\mathbf{p}_{2,\text{row}}$ 와 주평면  $\mathbf{p}_{3,\text{row}}$ 가 서로 교차하는 직선을 의미한다. 만약 3차원 공간 상의 직선  $\mathcal{L}$ 에 대하여  $\mathcal{PL} = 0$ 이면 이는 해당 직선이  $\mathcal{P}$ 의 영공간(null space)에 존재하는 것을 의미한다. 이는 곧  $\mathcal{L}$ 이 카메라 중심점  $\tilde{\mathbf{C}}$ 를 지나가는 것을 의미한다.

### 5.6.2 Point and line duality



앞서 3차원 공간 상의 직선  $\mathcal{L}$  프로젝션한 직선  $l$ 의 반대칭행렬은 (54)  $\mathbf{l} = \mathbf{PLP}^\top$ 을 통해 구할 수 있다고 하였다. 이를 또한 다음과 같이 표현할 수도 있다.

$$\begin{aligned}
 l^\wedge &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^\wedge \\
 &= \mathbf{ab}^\top - \mathbf{ba}^\top = \begin{bmatrix} 0 & l_2 & -l_1 \\ -l_2 & 0 & l_0 \\ l_1 & -l_0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \mathbf{l}
 \end{aligned} \tag{61}$$

- $l \in \mathbb{R}^3$ : 이미지 상의 직선
- $l^\wedge \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ : 직선  $l$ 의 반대칭 행렬
- $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ : 3차원 공간 상의 점  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 를 프로젝션한 점

외적의 성질에 의해  $\mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$  일 때,  $\mathbf{a}^\wedge = \mathbf{cb}^\top - \mathbf{bc}^\top$ 가 된다.

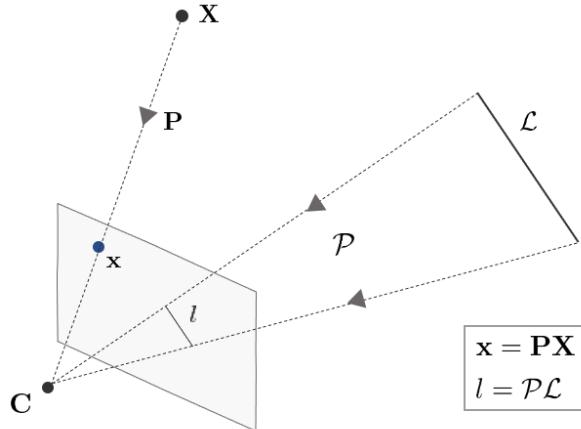
**Duality:** 3차원 공간 상의 두 직선  $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ 의 프로젝션된 두 직선  $l, m$ 의 교차점  $\mathbf{a}$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{a}^\wedge = lm^\top - ml^\top \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \tag{62}$$

- $\mathbf{a}^\wedge$ :  $\mathbf{a}$ 의 반대칭 행렬

### 5.6.3 Projection matrix duality

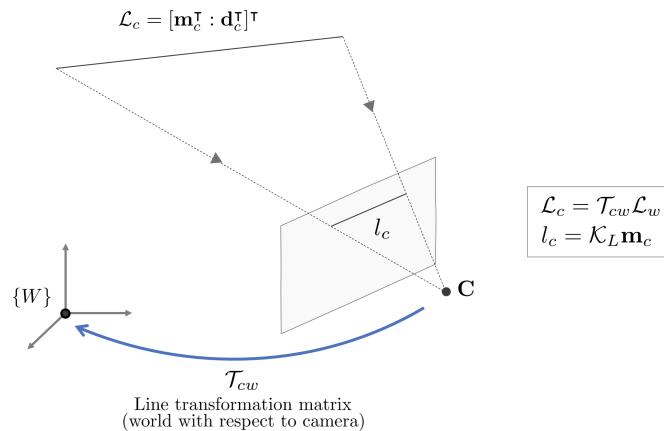
다음으로 프로젝션 행렬 또한 duality를 가진다.



직선의 프로젝션 행렬  $\mathcal{P}$ 은 3차원 점의 프로젝션 행렬  $\mathbf{P}$ 와 동일한 기능을 수행한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{P}X \\ l &= \mathcal{P}\mathcal{L} \end{aligned} \tag{63}$$

## 6 Plücker line-based optimization



3차원 공간 상의 직선은 Plücker Coordinate를 사용하여 6차원 열벡터로 표현할 수 있다.

$$\mathcal{L} = [\mathbf{m}^\top : \mathbf{d}^\top]^\top = [m_x : m_y : m_z : d_x : d_y : d_z]^\top \tag{64}$$

앞서 설명한  $[\mathbf{d} : \mathbf{m}]$  순서와 달리 Plücker Coordinate를 활용한 논문에서는 대부분  $[\mathbf{m} : \mathbf{d}]$  순서를 사용하기 때문에 본 섹션에서도 해당 순서로 직선을 표현한다. 해당 직선 표현법은 스케일 모호성을 가지고 있기 때문에(up to scale) 5자유도를 가지며  $\mathbf{m}, \mathbf{d}$ 는 단위 벡터가 아니어도 두 벡터 값의 비율에 의해 직선을 유일하게 표현할 수 있다.

### 6.1 Line Transformation and projection

월드 좌표계에서 본 직선을  $\mathcal{L}_w$ 라고 하면 이를 카메라 좌표계에서 봤을 경우 다음과 같이 변환할 수 있다[8].

$$\mathcal{L}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_c \\ \mathbf{d}_c \end{bmatrix} = \mathcal{T}_{cw}\mathcal{L}_w = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{cw} & \mathbf{t}^\top \mathbf{R}_{cw} \\ 0 & \mathbf{R}_{cw} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{m}_w \\ \mathbf{d}_w \end{bmatrix} \tag{65}$$

-  $\mathcal{T}_{cw} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ : Plücker 직선의 변환 행렬

해당 직선을 이미지 평면 상에 프로젝션시키면 다음과 같다.

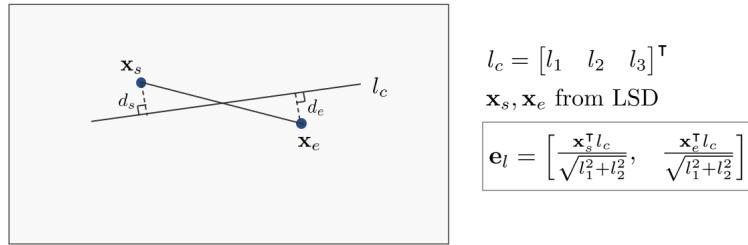
$$l_c = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} = \mathcal{K}_L \mathbf{m}_c = \begin{bmatrix} f_y & & m_x \\ & f_x & m_y \\ -f_y c_x & -f_x c_y & f_x f_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} \quad (66)$$

-  $\mathcal{K}_L$ : 직선의 내부 파라미터 행렬(line intrinsic matrix)

$\mathcal{K}_L$ 는 (55)에서  $\mathbf{P} = K[\mathbf{I}|0]$ 인 경우를 의미한다. 따라서  $\mathcal{P} = [\det(\mathbf{K})\mathbf{K}^{-T}|0]$ 이 되므로 (57)에서  $\mathcal{L}$ 의  $\mathbf{d}$  항이 0으로 소거된다. 따라서  $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} f_x & c_x \\ f_y & c_y \\ 1 \end{bmatrix}$  일 때 다음과 같은 식이 유도된다.

$$\mathcal{K}_L = \det(\mathbf{K})\mathbf{K}^{-T} = \begin{bmatrix} f_y & & f_x \\ & f_x & f_x f_y \\ -f_y c_x & -f_x c_y & \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad (67)$$

## 6.2 Line reprojection error



직선의 reprojection 에러  $\mathbf{e}_l$ 은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{e}_l = [d_s, \ d_e] = \left[ \frac{\mathbf{x}_s^T l_c}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}}, \ \frac{\mathbf{x}_e^T l_c}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}} \right] \in \mathbb{R}^2 \quad (68)$$

이는 점과 직선 사이의 거리 공식을 통해 나타낼 수 있다. 이 때,  $\{\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_e\}$ 는 각각 line feature extractor(e.g., LSD)를 사용하여 추출한 직선의 시작점과 끝점을 의미한다.

## 6.3 Orthonormal representation

앞서 구한  $\mathbf{e}_l$ 를 사용하여 BA 최적화를 수행할 때 Plücker Coordinate 표현법을 그대로 사용하게 되면 문제가 발생한다. Plücker Coordinate는 항상  $\mathbf{m}^T \mathbf{d} = 0$ 이라는 Klein quadric 제약조건을 만족해야 하기 때문에 5 자유도를 가지므로 직선을 표현할 수 있는 최소 파라미터 개수인 4개의 비해 over-parameterized 되어 있다. Over-parameterized된 표현법의 단점은 다음과 같다[6].

증복되는 파라미터를 계산해야 하기 때문에 최적화 수행 시 연산량이 증가한다. 추가적인 자유도로 인해 수치적인 불안정성(numerical instability) 문제가 야기될 수 있다. 파라미터가 업데이트될 때마다 항상 제약조건을 만족하는지 체크해줘야 한다.

따라서 직선을 최적화 할 때는 일반적으로 최소 파라미터인 4자유도로 변경하기 위해 orthonormal 표현법을 사용한다[4],[5],[6],[7]. 즉, 직선을 표현할 때는 Plücker Coordinate를 사용하지만 최적화를 수행할 때는 orthonormal 표현법으로 변형한 뒤 최적값을 업데이트하고 다시 Plücker Coordinate로 돌아오는 방식을 취한다.

Orthonormal 표현법은 다음과 같다. 3차원 공간 상의 직선은 항상 다음과 같이 표현 가능하다[6].

$$(\mathbf{U}, \mathbf{W}) \in SO(3) \times SO(2) \quad (69)$$

-  $\mathbf{U} \in SO(3)$ : 3차원 직선의 회전 행렬

-  $\mathbf{W} \in SO(2)$ : 3차원 직선이 원점과 떨어진 거리 정보를 포함하는 행렬

임의의 Plücker 직선  $\mathcal{L} = [\mathbf{m}^T : \mathbf{d}^T]^T$ 은 이와 일대일 대응하는  $(\mathbf{U}, \mathbf{W})$ 를 항상 가지고 있으며 이러한 표현 방법을 orthonormal 표현법이라고 한다. 월드 상의 한 직선  $\mathcal{L}_w = [\mathbf{m}_w^T : \mathbf{d}_w^T]^T$ 이 주어졌을 때  $\mathcal{L}_w$ 을

QR decomposition 함으로써  $(\mathbf{U}, \mathbf{W})$  구할 수 있다.

$$[\mathbf{m}_w \mid \mathbf{d}_w] = \mathbf{U} \begin{bmatrix} w_1 & 0 \\ 0 & w_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{with set: } \mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1 & -w_2 \\ w_2 & w_1 \end{bmatrix} \quad (70)$$

이 때, 상삼각행렬(upper triangle matrix)  $\mathbf{R}$ 의  $(1, 2)$  원소는 Plücker 제약조건(Klein quadric)으로 인해 항상 0이 된다.  $\mathbf{U}, \mathbf{W}$ 는 각각 3차원, 2차원 회전행렬을 의미하므로  $\mathbf{U} = \mathbf{R}(\theta), \mathbf{W} = \mathbf{R}(\theta)$ 와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\theta) &= \mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3] = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{m}_w}{\|\mathbf{m}_w\|} & \frac{\mathbf{d}_w}{\|\mathbf{d}_w\|} & \frac{\mathbf{m}_w \times \mathbf{d}_w}{\|\mathbf{m}_w \times \mathbf{d}_w\|} \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}(\theta) &= \mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1 & -w_2 \\ w_2 & w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\|\mathbf{m}_w\|^2 + \|\mathbf{d}_w\|^2}} \begin{bmatrix} \|\mathbf{m}_w\| & \|\mathbf{d}_w\| \\ -\|\mathbf{d}_w\| & \|\mathbf{m}_w\| \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (71)$$

- $\theta \in \mathbb{R}^3$ : SO(3) 회전행렬에 대응하는 파라미터
- $\theta \in \mathbb{R}$ : SO(2) 회전행렬에 대응하는 파라미터
- $\mathbf{u}_i$ :  $i$ 번째 열벡터(column vector)

실제 최적화를 수행할 때는  $\mathbf{U} \leftarrow \mathbf{U}\mathbf{R}(\theta), \mathbf{W} \leftarrow \mathbf{W}\mathbf{R}(\theta)$ 과 같이 업데이트된다. 따라서 orthonormal 표현법은 3차원 공간 상의 직선을  $\delta_\theta = [\theta^\top, \theta] \in \mathbb{R}^4$ 를 통해 4자유도로 표현할 수 있다. 최적화를 통해 업데이트된  $[\theta^\top, \theta]$ 는 다음과 같이  $\mathcal{L}_w$ 로 변환된다.

$$\mathcal{L}_w = [w_1 \mathbf{u}_1^\top \quad w_2 \mathbf{u}_2^\top] \quad (72)$$

#### 6.4 Error function formulation

직선에 대한 reprojection 에러  $\mathbf{e}_l$ 를 최적화하기 위해서는 Gauss-Newton(GN), Levenberg-Marquardt(LM) 등의 비선형 최소제곱법을 사용하여 반복적으로(iterative) 최적 변수를 업데이트해야 한다. reprojection 에러를 사용하여 에러 함수를 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_l(\mathcal{X}) &= \arg \min_{\mathcal{X}^*} \sum_i \sum_j \|\mathbf{e}_{l,ij}\|^2 \\ &= \arg \min_{\mathcal{X}^*} \sum_i \sum_j \mathbf{e}_{l,ij}^\top \mathbf{e}_{l,ij} \end{aligned} \quad (73)$$

- $\mathcal{X} = [\delta_\theta, \delta_\xi]$ : 상태 변수
- $\delta_\theta = [\theta^\top, \theta] \in \mathbb{R}^4$ : orthonormal 표현법의 상태 변수
- $\delta_\xi = [\delta\xi] \in se(3)$ : Lie theory를 통한 업데이트 방법은 해당 링크를 참조하면 된다

$\mathbf{E}_l(\mathcal{X}^*)$ 를 만족하는  $\|\mathbf{e}_l(\mathcal{X}^*)\|^2$ 를 non-linear least squares를 통해 반복적으로 계산할 수 있다. 작은 증분량  $\Delta\mathcal{X}$ 를 반복적으로  $\mathcal{X}$ 에 업데이트함으로써 최적의 상태를 찾는다.

$$\mathbf{E}_l(\mathcal{X} + \Delta\mathcal{X}) = \arg \min_{\mathcal{X}^*} \sum_i \sum_j \|\mathbf{e}_l(\mathcal{X} + \Delta\mathcal{X})\|^2 \quad (74)$$

엄밀하게 말하면 상태 증분량  $\Delta\mathcal{X}$ 은 SE(3) 변환행렬을 포함하므로  $\oplus$  연산자를 통해 기존 상태  $\mathcal{X}$ 에 더해지는게 맞지만 표현의 편의를 위해  $+$  연산자를 사용하였다.

$$\mathbf{e}_l(\mathcal{X} \oplus \Delta\mathcal{X}) \rightarrow \mathbf{e}_l(\mathcal{X} + \Delta\mathcal{X}) \quad (75)$$

- $\oplus$ : 상태 변수  $\delta_\theta, \delta_\xi$ 를 한 번에 업데이트할 수 있는 연산자

위 식은 테일러 1차 근사를 통해 다음과 같이 표현이 가능하다.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_l(\mathcal{X} + \Delta\mathcal{X}) &\approx \mathbf{e}_l(\mathcal{X}) + \mathbf{J}\Delta\mathcal{X} \\ &= \mathbf{e}_l(\mathcal{X}) + \mathbf{J}_\theta \Delta\delta_\theta + \mathbf{J}_\xi \Delta\delta_\xi \\ &= \mathbf{e}_l(\mathcal{X}) + \frac{\partial \mathbf{e}_l}{\partial \delta_\theta} \Delta\delta_\theta + \frac{\partial \mathbf{e}_l}{\partial \delta_\xi} \Delta\delta_\xi \end{aligned} \quad (76)$$

$$- \mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{e}_l}{\partial \mathcal{X}} = \frac{\partial \mathbf{e}_l}{\partial [\delta_{\theta}, \delta_{\xi}]}$$

$$\mathbf{E}_l(\mathcal{X} + \Delta \mathcal{X}) \approx \arg \min_{\mathcal{X}^*} \sum_i \sum_j \|\mathbf{e}_l(\mathcal{X}) + \mathbf{J} \Delta \mathcal{X}\|^2 \quad (77)$$

이를 미분하여 최적의 증분량  $\Delta \mathcal{X}^*$  값을 구하면 다음과 같다. 자세한 유도 과정은 본 문서에서는 생략한다. 유도 과정에 대해 자세히 알고 싶으면 해당 링크를 참조하면 된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^\top \mathbf{J} \Delta \mathcal{X}^* &= -\mathbf{J}^\top \mathbf{e} \\ \mathbf{H} \Delta \mathcal{X}^* &= -\mathbf{b} \end{aligned} \quad (78)$$

#### 6.4.1 The analytical jacobian of 3d line

이전 섹션에서 설명한 것처럼 비선형 최적화를 수행하기 위해서는  $\mathbf{J}$ 를 계산해야 한다.  $\mathbf{J}$ 는 다음과 같이 구성되어 있다.

$$\mathbf{J} = [\mathbf{J}_{\theta}, \mathbf{J}_{\xi}] \quad (79)$$

$[\mathbf{J}_{\theta}, \mathbf{J}_{\xi}]$ 는 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\theta} &= \frac{\partial \mathbf{e}_l}{\partial \delta_{\theta}} = \frac{\partial \mathbf{e}_l}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial \mathcal{L}_c} \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \mathcal{L}_w} \frac{\partial \mathcal{L}_w}{\partial \delta_{\theta}} \\ \mathbf{J}_{\xi} &= \frac{\partial \mathbf{e}_l}{\partial \delta_{\xi}} = \frac{\partial \mathbf{e}_l}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial \mathcal{L}_c} \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \delta_{\xi}} \end{aligned} \quad (80)$$

$\frac{\partial \mathbf{e}_l}{\partial l}$ 는 다음과 같이 구할 수 있다. 이 때,  $l$ 은 벡터이고  $l_i$ 는 스칼라임에 유의한다.

$$\frac{\partial \mathbf{e}_l}{\partial l} = \frac{1}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}} \begin{bmatrix} x_s - \frac{l_1 \mathbf{x}_s l}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}} & y_s - \frac{l_2 \mathbf{x}_s l}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}} & 1 \\ x_e - \frac{l_1 \mathbf{x}_e l}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}} & y_e - \frac{l_2 \mathbf{x}_e l}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}} & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3} \quad (81)$$

$\frac{\partial l}{\partial \mathcal{L}_c}$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\partial l}{\partial \mathcal{L}_c} = \frac{\partial \mathcal{K}_L \mathbf{m}_c}{\partial \mathcal{L}_c} = [\mathcal{K}_L \quad \mathbf{0}_{3 \times 3}] = \begin{bmatrix} f_y & 0 & 0 \\ 0 & f_x & 0 \\ -f_y c_x & -f_x c_y & f_x f_y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 6} \quad (82)$$

$\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \mathcal{L}_w}$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \mathcal{L}_w} = \frac{\partial \mathcal{T}_{cw} \mathcal{L}_w}{\partial \mathcal{L}_w} = \mathcal{T}_{cw} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{cw} & \mathbf{t}^\wedge \mathbf{R}_{cw} \\ 0 & \mathbf{R}_{cw} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6} \quad (83)$$

orthonormal 표현법에 대한 자코비안  $\frac{\partial \mathcal{L}_w}{\partial \delta_{\theta}}$ 는 다음과 같이 구할 수 있다[8].

$$\frac{\partial \mathcal{L}_w}{\partial \delta_{\theta}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} & -w_1 \mathbf{u}_3 & w_1 \mathbf{u}_2 & -w_2 \mathbf{u}_1 \\ w_2 \mathbf{u}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 1} & -w_2 \mathbf{u}_1 & w_1 \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 4} \quad (84)$$

카메라 포즈에 대한 자코비안  $\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \delta_{\xi}}$ 는 다음과 같이 구할 수 있다[9].

$$\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \delta_{\xi}} = \begin{bmatrix} -(\mathbf{Rm})^\wedge - (\mathbf{t}^\wedge \mathbf{Rd})^\wedge & -(\mathbf{Rd})^\wedge \\ -(\mathbf{Rd})^\wedge & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6} \quad (85)$$

## 7 References

- [1] Hartley, Richard, and Andrew Zisserman. Multiple view geometry in computer vision. Cambridge university press, 2003
- [2] Plücker Matrix
- [3] Plücker Coordinates
- [4] Robust Visual SLAM with Point and Line Features

- 
- [5] Elaborate Monocular Point and Line SLAM With Robust Initialization
  - [6] Bartoli, Adrien, and Peter Sturm. "Structure-from-motion using lines: Representation, triangulation, and bundle adjustment." Computer vision and image understanding 100.3 (2005): 416-441.
  - [7] Shu, Fangwen, et al. "Structure PLP-SLAM: Efficient Sparse Mapping and Localization using Point, Line and Plane for Monocular, RGB-D and Stereo Cameras." arXiv preprint arXiv:2207.06058 (2022).
  - [8] Bartoli, Adrien, and Peter Sturm. "The 3D line motion matrix and alignment of line reconstructions." Proceedings of the 2001 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. CVPR 2001. Vol. 1. IEEE, 2001.
  - [9] Huang, Shi-Sheng. "The Derivation of Jacobian Matrix for the Point-Line-Plane Reprojection Factor." matrix 4: 4.

## 8 Revision log

- 1st: 2022-01-05
- 3rd: 2022-12-31
- 5th: 2023-01-05
- 7th: 2023-01-22
- 2nd: 2022-12-28
- 4th: 2023-01-01
- 6th: 2023-01-06
- 8th: 2024-02-08