

Notes on On-manifold preintegration for real-time visual-inertial odometry

Gyubeom Edward Im*

Contents

1	Introduction	2
2	Preliminaries	2
2.1	Notions of Riemannian geometry	2
2.1.1	Special orthogonal group $SO(3)$	2
2.1.2	Special euclidean group $SE(3)$	3
2.2	Uncertainty description in $SO(3)$	3
2.3	Gauss-Newton method on manifold	4
3	Maximum a posteriori visual-inertial state estimation	5
3.1	The state	5
3.2	The measurements	5
3.3	Factor graphs and MAP estimation	6
4	IMU model and motion integration	6
5	IMU preintegration on manifold	8
5.1	Preintegrated IMU measurements	8
5.2	Noise propagation	10
5.3	Incorporating bias updates	11
5.4	Preintegrated IMU factors	11
5.5	Bias model	11
6	Structureless vision factor	12
A	Appendix	12
A.1	Iterative noise propagation	12
A.2	Bias correction via first-order updates	13
A.3	Jacobians of residual errors	15
A.3.1	Jacobians of $\mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}$	15
A.3.2	Jacobians of $\mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}}$	16
A.3.3	Jacobians of $\mathbf{r}_{\Delta \mathbf{R}_{ij}}$	17
A.4	Structureless vision factors: null space projection	17
A.5	Rotation rate integration using euler angles	17
B	References	18

*blog: alida.tistory.com, email: criterion.im@gmail.com

1 Introduction

2 Preliminaries

본 논문에서는 VIO 관련 수식을 최적화하기 위해 MAP 추정을 사용한다. IMU 상태 변수에는 회전, 포즈와 같은 비선형(smooth manifold like $SO(3)$, $SE(3)$) 항들이 존재하기 때문에 MAP 추정 방법은 결국 비선형 최소제곱법(non-linear least squares like GN, LM)을 수행하여 풀게 된다. 본격적으로 설명하기에 앞서 자주 사용하는 기하학 지식들을 먼저 설명한다.

2.1 Notions of Riemannian geometry

2.1.1 Special orthogonal group $SO(3)$

$SO(3)$ 군은 3차원 회전 행렬들의 제약 조건을 담고 있는 군을 말한다(자세한 내용은 링크 참조).

$$SO(3) \doteq \{\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}, \det(\mathbf{R}) = 1\} \quad (1)$$

$SO(3)$ 군 사이의 연산은 행렬 곱으로 수행하며 역(inverse)는 행렬을 전치(transpose)함으로써 구할 수 있다. $SO(3)$ 는 smooth manifold 상에 존재하며 접평면(tangent space at identity) 상의 원소는 lie algebra $so(3)$ 라고 부른다. lie algebra $so(3)$ 는 3×3 크기의 반대칭 행렬로 구성되어 있다.

$$\boldsymbol{\omega}^\wedge = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}^\wedge = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \in so(3) \quad (2)$$

- $(\cdot)^\wedge$: 3차원 벡터 $\boldsymbol{\omega}$ 를 3×3 반대칭 행렬 $so(3)$ 로 만드는 연산
- $(\cdot)^\vee$: 3×3 반대칭 행렬 $so(3)$ 를 3차원 벡터 $\boldsymbol{\omega}$ 로 만드는 연산

반대칭 행렬의 유용한 성질은 다음과 같다

$$\mathbf{a}^\wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b}^\wedge \mathbf{a}, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 \quad (3)$$

지수 매핑(exponential mapping at identity) $\exp : so(3) \mapsto SO(3)$ 는 lie algebra $so(3)$ 를 lie group $SO(3)$ 로 변환해주는 연산이며 둘 사이의 관계를 표현한 Rodrigues' formula가 유명하다

$$\exp(\boldsymbol{\phi}^\wedge) = \mathbf{I} + \frac{\sin(\|\boldsymbol{\phi}\|)}{\|\boldsymbol{\phi}\|} \boldsymbol{\phi}^\wedge + \frac{1 - \cos(\|\boldsymbol{\phi}\|)}{\|\boldsymbol{\phi}\|^2} (\boldsymbol{\phi}^\wedge)^2 \quad (4)$$

지수 매핑의 1차 근사는 작은 회전량을 근사할 때 유용하게 사용된다.

$$\exp(\boldsymbol{\phi}^\wedge) \approx \mathbf{I} + \boldsymbol{\phi}^\wedge \quad (5)$$

로그 매핑(logarithm mapping at identity)은 $\mathbf{R} \neq \mathbf{I}$ 인 $SO(3)$ 를 lie algebra $so(3)$ 로 변환해주는 매핑이다

$$\log(\mathbf{R}) = \frac{\boldsymbol{\varphi} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}^T)}{2 \sin(\varphi)} \quad \text{with } \varphi = \cos^{-1} \left(\frac{\text{tr}(\mathbf{R} - \mathbf{I})}{2} \right) \quad (6)$$

- $\log(\mathbf{R})^\vee = \mathbf{a} \varphi$: \mathbf{a} 는 회전축 벡터, φ 는 회전 각도
- $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ 이면 $\varphi = 0$ 이 되어 \mathbf{a} 의 해가 무수히 많아진다

만약 지수 매핑의 정의역을 $\|\phi\| < \pi$ 로 제한한다면 지수 매핑은 일대일 대응(bijective) 함수가 되며 그 역함수는 로그 매핑이 된다. 하지만 정의역을 제한하지 않으면 지수 매핑은 전사(surjective) 함수가 된다. 왜냐하면 임의의 회전 행렬 \mathbf{R} 에 대한 angle-axis 표현을 (\mathbf{a}, θ) 라고 할 때, $\phi = (\theta + 2k\pi)\mathbf{a}$, $k \in \mathbb{Z}$ 가 2π 마다 같은 각도를 의미하기 때문이다.

표기의 편의를 위해 일반적으로 $\exp(), \log()$ 대신 벡터화된 지수 매핑과 로그 매핑 $\text{Exp}(), \text{Log}()$ 을 자주 사용한다

$$\begin{aligned}\text{Exp} : \mathbb{R}^3 &\rightarrow SO(3) \quad ; \quad \phi \mapsto \exp(\phi^\wedge) \\ \text{Log} : SO(3) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \quad ; \quad \mathbf{R} \mapsto \log(\mathbf{R})^\vee\end{aligned}\tag{7}$$

수식을 유도하다 보면 다음과 같은 지수 매핑의 1차 근사를 사용할 것이다.

$$\text{Exp}(\phi + \delta\phi) \approx \text{Exp}(\phi)\text{Exp}(\mathbf{J}_r(\phi)\delta\phi)\tag{8}$$

- $\mathbf{J}_r : SO(3)$ 군의 **오른쪽 자코비안(right jacobian)**. 기존 $SO(3)$ 군의 오른쪽에 섭동량(increments)를 곱할 때 유도되는 자코비안 행렬

$$\mathbf{J}_r(\phi) = \mathbf{I} - \left(\frac{1 - \cos(\|\phi\|)}{\|\phi\|^2} \right) \phi^\wedge + \left(\frac{\|\phi\| - \sin(\|\phi\|)}{\|\phi\|^3} \right) (\phi^\wedge)^2\tag{9}$$

로그 매핑에도 유사한 1차 근사가 존재한다

$$\text{Log}(\text{Exp}(\phi)\text{Exp}(\delta\phi)) \approx \phi + \mathbf{J}_r^{-1}(\phi)\delta\phi\tag{10}$$

오른쪽 자코비안의 역행렬은 다음과 같다

$$\mathbf{J}_r^{-1}(\phi) = \mathbf{I} + \frac{1}{2}\phi^\wedge + \left(\frac{1}{\|\phi\|^2} - \frac{1 + \cos(\|\phi\|)}{2\|\phi\|\sin(\|\phi\|)} \right) (\phi^\wedge)^2\tag{11}$$

오른쪽 자코비안과 그 역행렬 $\mathbf{J}_r, \mathbf{J}_r^{-1}$ 은 $\|\phi\| = 0$ 일 때 항등 행렬 \mathbf{I} 가 된다.

지수 매핑의 또다른 유용한 성질은 다음과 같다

$$\begin{aligned}\mathbf{R}\text{Exp}(\phi)\mathbf{R}^\top &= \exp(\mathbf{R}\phi^\wedge\mathbf{R}^\top) = \text{Exp}(\mathbf{R}\phi) \\ \Leftrightarrow \text{Exp}(\phi)\mathbf{R} &= \mathbf{R}\text{Exp}(\mathbf{R}^\top\phi)\end{aligned}\tag{12}$$

2.1.2 Special euclidean group SE(3)

$SE(3)$ 군은 3차원 강체(rigid body)의 변환 행렬과 관련된 제약 조건을 담고 있는 군을 말한다. (자세한 내용은 링크 참조).

$$SE(3) \doteq \{(\mathbf{R}, \mathbf{p}) : \mathbf{R} \in SO(3), \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3\}\tag{13}$$

두 개의 $SE(3)$ 군에 속한 변환 행렬 $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$ 가 주어졌을 때, 군의 연산은 행렬곱으로 표현되며 $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 = (\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2, \mathbf{p}_1 + \mathbf{R}_1\mathbf{p}_2)$ 와 같다. 그리고 역(inverse)는 변환 행렬의 역행렬 $\mathbf{T}_1^{-1} = (\mathbf{R}_1^\top, -\mathbf{R}_1^\top\mathbf{p}_1)$ 으로 표현된다. $SE(3)$ 군 역시 지수 매핑과 로그 매핑이 존재하지만 이는 본 논문에서 사용되지 않으므로 자세한 설명은 생략한다.

2.2 Uncertainty description in SO(3)

$SO(3)$ 에서 불확실성을 정의하는 자연스러운 방법은 먼저 접평면(tangent space)에서 분포를 정한 뒤 이를 (7)의 지수 매핑을 통해 $SO(3)$ 군으로 보내는 것이다.

$$\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\text{Exp}(\epsilon), \quad \epsilon \sim (0, \Sigma)\tag{14}$$

- \mathbf{R} : 노이즈가 없는 회전 (\rightarrow 평균)

- ϵ : 평균이 0, 분산이 Σ 인 정규분포를 따르는 확률 변수

$\tilde{\mathbf{R}}$ 의 분포를 명시적으로 얻기 위해 \mathbb{R}^3 의 적분에서 시작해보자.

$$\int_{\mathbb{R}^3} p(\epsilon) d\epsilon = \int_{\mathbb{R}^3} \alpha e^{-\frac{1}{2} \|\epsilon\|_{\Sigma}^2} d\epsilon = 1 \quad (15)$$

- $\alpha = 1/\sqrt{(2\pi)^3 \det(\Sigma)}$
- $\|\epsilon\|_{\Sigma}^2 \doteq \epsilon^T \Sigma^{-1} \epsilon$: 마할라노비스 거리의 제곱

위 식에 $\epsilon = \text{Log}(\mathbf{R}^{-1} \tilde{\mathbf{R}})$ 을 대입해보자. 이는 $\|\epsilon\| < \pi$ 일 때 (14)의 역연산이다.

$$\int_{SO(3)} \beta(\tilde{\mathbf{R}}) e^{-\frac{1}{2} \|\text{Log}(\mathbf{R}^{-1} \tilde{\mathbf{R}})\|_{\Sigma}^2} d\tilde{\mathbf{R}} = 1 \quad (16)$$

- $\beta(\tilde{\mathbf{R}})$: 정규화 인자(normalization factor). 함수의 적분 면적을 1로 만들어주는 계수

정규화 인자를 자세히 보면 $\beta(\tilde{\mathbf{R}}) = \alpha / |\det(\mathcal{J}(\tilde{\mathbf{R}}))|$ 과 같다. 이 때, $\mathcal{J}(\tilde{\mathbf{R}}) \doteq \mathbf{J}_r(\text{Log}(\mathbf{R}^{-1} \tilde{\mathbf{R}}))$ 이다. $\mathbf{J}_r(\cdot)$ 은 앞서 (9)에서 설명한 $SO(3)$ 군의 오른쪽 자코비안이다.

(16)의 형태에서 바로 $SO(3)$ 의 가우시안 분포를 얻을 수 있다.

$$p(\tilde{\mathbf{R}}) = \beta(\tilde{\mathbf{R}}) e^{-\frac{1}{2} \|\text{Log}(\mathbf{R}^{-1} \tilde{\mathbf{R}})\|_{\Sigma}^2} \quad (17)$$

공분산이 작을 때는 $\tilde{\mathbf{R}} \approx \mathbf{R}$ 이므로 $\mathbf{J}_r(\text{Log}(\mathbf{R}^{-1} \tilde{\mathbf{R}})) \approx \mathbf{I}$ 이고 $\beta(\tilde{\mathbf{R}}) \approx \alpha$ 로 근사할 수 있다. (16)는 이미 $\|\epsilon\| < \pi$ 와 같이 범위가 정해져 있기 때문에 평균에서 멀리 있는(π 를 넘어가는) 각도는 고려하지 않으므로 작은 공분산이라는 가정이 더욱 타당해진다.

만약 β 를 상수로 가정하면, $\tilde{\mathbf{R}}$ 이 (17)처럼 분포할 때 회전 \mathbf{R} 의 negative log-likelihood는 다음과 같다

$$\mathcal{L}(\mathbf{R}) = \frac{1}{2} \|\text{Log}(\mathbf{R}^{-1} \tilde{\mathbf{R}})\|_{\Sigma}^2 + \text{const} = \frac{1}{2} \|\text{Log}(\tilde{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{R})\|_{\Sigma}^2 + \text{const} \quad (18)$$

이는 기하학적으로 봤을 때 $\tilde{\mathbf{R}}$ 과 \mathbf{R} 사이의 회전각($SO(3)$ geodesic 거리)을 의미한다. 그리고 거기에 Σ^{-1} 가중치를 곱한 후 제곱한 거리로 해석할 수 있다.

2.3 Gauss-Newton method on manifold

유클리드 공간에서 일반적인 Gauss-Newton(GN) 방법은 (일반적으로 non-convex)인 목적 함수를 2차 근사(quadratic approximation)로 반복적으로 최적화한다. 2차 근사는 선형 방정식(정규 방정식)을 푸는 문제로 귀결되고 그 해로 현재 추정값을 갱신한다. 이번 섹션에서는 이러한 GN을 변수들이 특정 manifold \mathcal{M} 위에 사는 (제약 없는) 최적화 문제로 확장하는 법에 대해 설명한다.

다음 문제를 생각해보자

$$\min_{x \in \mathcal{M}} f(x) \quad (19)$$

- x 는 manifold \mathcal{M} 위에 존재하는 변수
- 편의 상 위 식은 단일 변수로 나타내었지만 다변수로 쉽게 일반화할 수 있다.

유클리드 경우와 달리 위 식은 x 에 대해 바로 2차 근사를 만들 수 없다. 주된 이유는 두 가지이다.

1. 첫째로 x 자체로 최적화를 수행하는 경우 over-parameterized 문제가 발생할 수 있다. 예를 들어 회전 행렬은 3자유도이지만 9개의 파라미터를 갖고 있다. 이 때문에 정규 방정식이 under-determined되어 무수한 해를 가질 수 있다.
2. 둘째는 그렇게 얻은 근사 해가 일반적으로 \mathcal{M} 위에 있지 않다.

manifold 최적화의 일반적인 접근 방법은 리트랙션(retraction) \mathcal{R}_x 를 도입하는 것이다. \mathcal{R}_x 는 점 x 의 접평면 공간의 원소 δx 와 x 주변의 \mathcal{M} 상의 한 이웃 사이를 연결하는 일대일 대응 매핑 연산자를 의미한다. 리트랙션을

사용하면 문제를 아래와 같이 변경할 수 있다.

$$\min_{x \in \mathcal{M}} f(x) \quad \Rightarrow \quad \min_{\delta x \in \mathbb{R}^n} f(\mathcal{R}_x(\delta x)) \quad (20)$$

위 식과 같이 기존 파라미터를 변경(re-parameterized)하는 것을 흔히 리프팅(lifting)이라고 부른다. 간단히 말하면 현재 상태에서 정의되는 접평면(여기는 국소적으로 유클리드 공간처럼 작동)에서 작업을 수행하기 위해 파라미터를 바꾸는 것이다(SO(3)인 경우 $\delta x \in \mathbb{R}^3$).

리프팅이 되었으면 (20) 문제에 일반적인 최적화 기법을 적용한다. GN 프레임워크에서는 현재 상태 주변에서 비용 함수를 제공한 다음 2차 근사 방법을 통해 접평면 공간에서 δx^* 를 구한다. 최종적으로 현재 상태를 다음과 같이 갱신한다.

$$\hat{x} \leftarrow \mathcal{R}_x(\delta x^*) \quad (21)$$

위와 같은 방법론을 흔히 "lift-solve-retraction"이라고 부르며 어떤 trust-region 방법에도 사용할 수 있다. 또한 이 방법은 항공 역학 필터링 문헌의 여러 상태 모델(error-state model)을 단일 이론으로 묶어주며 로봇틱스 최적화에도 널리 쓰인다.

마지막으로 \mathcal{R}_x 의 구체적인 방법에 대해 얘기해보자. 지수 매핑(exponential mapping)은 사용 가능한 리트랙션 방법 중 하나이다. 본 논문에서는 다음과 같은 리트랙션을 사용한다.

$$\mathcal{R}_{\mathbf{R}}(\phi) = \mathbf{R}\text{Exp}(\delta\phi), \quad \delta\phi \in \mathbb{R}^3 \quad (22)$$

SE(3)군의 경우 $\mathbf{T} \doteq (\mathbf{R}, \mathbf{p})$ 라고 하면 다음과 같이 리트랙션을 정의한다.

$$\mathcal{R}_{\mathbf{T}}(\delta\phi, \delta\mathbf{p}) = (\mathbf{R}\text{Exp}(\delta\phi), \mathbf{p} + \mathbf{R}\delta\mathbf{p}), \quad [\delta\phi, \delta\mathbf{p}] \in \mathbb{R}^6 \quad (23)$$

3 Maximum a posteriori visual-inertial state estimation

본 논문에서는 IMU와 단안 카메라가 달린 시스템(모바일 로봇, 드론, 핸드헬드 장치 등)의 상태를 추정하는 VIO 문제를 다룬다. IMU 좌표계 B 가 우리가 추적하는 본체의 좌표계와 일치한다고 가정하고 카메라-IMU 변환은 미리 캘리브레이션하여 고정되어 있다고 본다. Front-end에서는 3D 랜드마크에 대한 이미지 측정 값을 제공하며 여러 영상 중 일부를 키프레임으로 고정한다. 우리는 이 키프레임들의 포즈를 추정한다.

3.1 The state

시간 i 에서 시스템의 상태는 IMU 기준의 방향, 위치, 속도, bias로 표현된다.

$$\mathbf{x}_i \doteq [\mathbf{R}_i, \mathbf{p}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{b}_i] \quad (24)$$

- $(\mathbf{R}_i, \mathbf{p}_i)$: SE(3)군에 속하는 포즈
- $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^3$: 속도
- $\mathbf{b}_i = [\mathbf{b}_i^g, \mathbf{b}_i^a] \in \mathbb{R}^6$: IMU bias

시간 k 까지의 모든 키프레임들의 집합을 \mathcal{K}_k 라고 할 때 우리가 추정하는 상태들의 집합 \mathcal{X}_k 는 다음과 같이 표기할 수 있다.

$$\mathcal{X}_k \doteq \{\mathbf{x}_i\}_{i \in \mathcal{K}_k} \quad (25)$$

본 논문의 실제 구현에서는 structureless 기법을 사용하기 때문에 3D 랜드마크는 상태 변수에 포함하지 않는다. 필요하다면 위 방법을 랜드마크 및 카메라 내,외부 파라미터 추정으로도 쉽게 일반화 할 수 있다.

3.2 The measurements

입력 측정값은 IMU와 카메라 센서로부터 들어온다. 키프레임 i 의 이미지 집합을 \mathcal{C}_i 로 표기한다. 시간 i 에 카메라는 여러 랜드마크 l 을 볼 수 있으므로 \mathcal{C}_i 에는 여러 측정값 \mathbf{z}_{il} 이 포함된다. 편의 상 $l \in \mathcal{C}_i$ 라고 표기하면 i 에서 l 을

관측했다는 뜻으로 해석한다.

연속 키프레임 i 와 j 사이에서 수집된 IMU 측정값들의 집합은 \mathcal{I}_{ij} 로 쓴다. IMU 업데이트 속도와 키프레임 빈도에 따라 \mathcal{I}_{ij} 의 수는 수 개에서 수 백개의 측정값이 들어갈 수 있다. 시간 k 까지 모인 전체 IMU+이미지 관측값들의 집합 \mathcal{Z}_k 는 다음과 같다.

$$\mathcal{Z}_k \doteq \{\mathcal{C}_i, \mathcal{I}_{ij}\}_{(i,j) \in \mathcal{K}_k} \quad (26)$$

3.3 Factor graphs and MAP estimation

관측값 \mathcal{Z}_k 와 상태에 대한 사전 정보 $p(\mathcal{X}_0)$ 가 주어졌을 때 상태 변수 \mathcal{X}_k 의 사후 분포(posteriori)는 다음과 같다

$$\begin{aligned} p(\mathcal{X}_k | \mathcal{Z}_k) &\propto p(\mathcal{X}_0) p(\mathcal{Z}_k | \mathcal{X}_k) \stackrel{(a)}{=} p(\mathcal{X}_0) \prod_{(i,j) \in \mathcal{K}_k} p(\mathcal{C}_i, \mathcal{I}_{ij} | \mathcal{X}_k) \\ &\stackrel{(b)}{=} p(\mathcal{X}_0) \prod_{(i,j) \in \mathcal{K}_k} p(\mathcal{I}_{ij} | \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i) \prod_{i \in \mathcal{K}_k} \prod_{l \in \mathcal{C}_i} p(\mathbf{z}_{il} | \mathbf{x}_i) \end{aligned} \quad (27)$$

- (a) : 관측값들 간의 독립이라고 가정했을 때 분해
- (b) : 마르코프 성질을 사용한 분해

\mathcal{Z}_k 는 이미 관측된 값이므로 더 이상 우리가 추정할 변수가 아니다. 따라서 사후분포는 상태 변수 \mathcal{X}_k 들만을 인수(factor)로 갖는 likelihood들의 곱으로 정리된다. 이 곱 구조를 그대로 그림으로 나타낸 것이 factor graph이다. 그래프에는 상태(미지수)들을 담은 변수 노드와, 해당 상태들에 의존하는 likelihood(또는 제약)를 나타내는 factor 노드가 있고, 각 factor 노드는 자신이 참조하는 변수 노드들과 연결된다.

MAP 추정으로 구하고자 하는 상태 \mathcal{X}^* 는 (27)를 최대로 하는 값, 즉 negative log-posterior의 최소값이다. 노이즈가 평균이 0인 가우시안 분포라고 가정하면 이는 residual 제곱들의 합으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_k^* &\doteq \arg \min_{\mathcal{X}_k} -\log_e p(\mathcal{X}_k | \mathcal{Z}_k) \\ &= \arg \min_{\mathcal{X}_k} \|\mathbf{r}_0\|_{\Sigma_0}^2 + \sum_{(i,j) \in \mathcal{K}_k} \|\mathbf{r}_{\mathcal{I}_{ij}}\|_{\Sigma_{ij}}^2 + \sum_{i \in \mathcal{K}_k} \sum_{l \in \mathcal{C}_i} \|\mathbf{r}_{\mathcal{C}_{il}}\|_{\Sigma_c}^2 \end{aligned} \quad (28)$$

- \mathbf{r}_0 : 사전 항의 residual
- $\mathbf{r}_{\mathcal{I}_{ij}}$: preintegrated IMU의 residual
- $\mathbf{r}_{\mathcal{C}_{il}}$: 랜드마크의 reprojection residual
- $\Sigma_0, \Sigma_{ij}, \Sigma_c$: 각 residual들의 공분산

간단하게 말해서 residual은 측정값과 예측값의 차이를 수치화한 함수이고 우리는 그 제곱합(+공분산으로 가중된)을 최소화해 상태 \mathcal{X}_k 를 추정한다.

4 IMU model and motion integration

일반적으로 IMU 센서로부터 얻을 수 있는 정보에는 3축의 가속도와 3축의 각속도 정보가 포함된다. 가속도와 각속도의 측정값(measurement)에는 bias와 노이즈 성분이 포함되어 있기 때문에 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} {}_B \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{WB}(t) &= {}_B \boldsymbol{\omega}_{WB}(t) + \mathbf{b}^g(t) + \boldsymbol{\eta}^g(t) \\ {}_B \tilde{\mathbf{a}}(t) &= \mathbf{R}_{WB}^\top(t)({}_w \mathbf{a}(t) - {}_w \mathbf{g}) + \mathbf{b}^a(t) + \boldsymbol{\eta}^a(t) \end{aligned} \quad (29)$$

- ${}_B \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{WB}(t)$: 관측된(measured) 각속도
- ${}_B \tilde{\mathbf{a}}(t)$: 관측된(measured) 가속도
- ${}_B \boldsymbol{\omega}_{WB}(t)$: 실제(true) 각속도
- ${}_w \mathbf{a}(t)$: 실제(true) 가속도
- $\mathbf{b}^g(t), \mathbf{b}^a(t)$: 각속도와 가속도의 bias 값

- $\eta^g(t), \eta^a(t)$: 각속도와 가속도의 노이즈 값

기호 앞에 위치하는 B는 "**B(=IMU) 좌표계에서 바라본**" 것을 의미한다. IMU의 포즈는 $\{\mathbf{R}_{WB}, {}_W\mathbf{p}\}$ 에 의해 B에서 W로 변환되어 월드 좌표계 기준으로 표현된다. ${}_B\boldsymbol{\omega}_{WB} \in \mathbb{R}^3$ 는 B 좌표계에서 표현된 "W에서 본 B의" 순간적인 각속도(instantaneous angular velocity)를 의미한다. ${}_W\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ 는 월드 좌표계에서 본 센서의 가속도를 의미하며 ${}_W\mathbf{g}$ 는 월드 좌표계에서 본 중력 벡터를 의미한다.

IMU 측정값으로 부터 아래와 같은 **IMU Kinematic Model**을 사용하면 IMU의 모션을 추정할 수 있다.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{R}}_{WB} &= \mathbf{R}_{WB} {}_B\boldsymbol{\omega}_{WB}^\wedge \\ {}_W\dot{\mathbf{v}} &= {}_W\mathbf{a} \\ {}_W\dot{\mathbf{p}} &= {}_W\mathbf{v}\end{aligned}\quad (30)$$

위 모델을 사용하면 시간에 따른 IMU의 포즈와 속도의 변화를 수식으로 나타낼 수 있다. $t + \Delta t$ 시간에 IMU 포즈와 속도는 다음과 같이 (30)를 적분하여 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{WB}(t + \Delta t) &= \mathbf{R}_{WB}(t) \cdot \text{Exp}\left(\int_t^{t+\Delta t} {}_B\boldsymbol{\omega}_{WB}(\tau) d\tau\right) \\ {}_W\mathbf{v}(t + \Delta t) &= {}_W\mathbf{v}(t) + \int_t^{t+\Delta t} {}_W\mathbf{a}(\tau) d\tau \\ {}_W\mathbf{p}(t + \Delta t) &= {}_W\mathbf{p}(t) + \int_t^{t+\Delta t} {}_W\mathbf{v}(\tau) d\tau + \int_t^{t+\Delta t} \int_t^\tau {}_W\mathbf{a}(\tau) d\tau^2\end{aligned}\quad (31)$$

만약 가속도 ${}_W\mathbf{a}$ 와 각속도 ${}_B\boldsymbol{\omega}_{WB}$ 가 시간 $[t, t + \Delta t]$ 동안 일정(constant)하다고 가정하면 위 식은 다음과 같이 조금 더 간결하게 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{WB}(t + \Delta t) &= \mathbf{R}_{WB}(t) \cdot \text{Exp}({}_B\boldsymbol{\omega}_{WB}\Delta t) \\ {}_W\mathbf{v}(t + \Delta t) &= {}_W\mathbf{v}(t) + {}_W\mathbf{a}\Delta t \\ {}_W\mathbf{p}(t + \Delta t) &= {}_W\mathbf{p}(t) + {}_W\mathbf{v}\Delta t + {}_W\mathbf{a}\Delta t^2\end{aligned}\quad (32)$$

(29)에서 보드시피 실제 IMU 가속도와 각속도 ${}_W\mathbf{a}$, ${}_B\boldsymbol{\omega}_{WB}$ 는 IMU 측정값 ${}_W\tilde{\mathbf{a}}$, ${}_B\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{WB}$ 에 대한 함수이므로 위 식을 다시 고쳐쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{WB}(t + \Delta t) &= \mathbf{R}_{WB}(t) \cdot \text{Exp}(({}_B\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{WB}(t) - {}_B\mathbf{b}^g(t) - {}_B\boldsymbol{\eta}^{gd}(t))\Delta t) \\ {}_W\mathbf{v}(t + \Delta t) &= {}_W\mathbf{v}(t) + {}_W\mathbf{g}\Delta t + \mathbf{R}_{WB}(t)({}_W\tilde{\mathbf{a}}(t) - {}_B\mathbf{b}^a(t) - {}_B\boldsymbol{\eta}^{ad}(t))\Delta t \\ {}_W\mathbf{p}(t + \Delta t) &= {}_W\mathbf{p}(t) + {}_W\mathbf{v}(t)\Delta t + \frac{1}{2}{}_W\mathbf{g}\Delta t^2 + \frac{1}{2}\mathbf{R}_{WB}(t)({}_W\tilde{\mathbf{a}}(t) - {}_B\mathbf{b}^a(t) - {}_B\boldsymbol{\eta}^{ad}(t))\Delta t^2\end{aligned}\quad (33)$$

아래 첨자로 붙은 좌표계는 자명하기 때문에 가독성을 위하여 이를 생략하여 나타낸다.

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(t + \Delta t) &= \mathbf{R}(t) \cdot \text{Exp}((\tilde{\boldsymbol{\omega}}(t) - \mathbf{b}^g(t) - \boldsymbol{\eta}^{gd}(t))\Delta t) \\ \mathbf{v}(t + \Delta t) &= \mathbf{v}(t) + \mathbf{g}\Delta t + \mathbf{R}(t)(\tilde{\mathbf{a}}(t) - \mathbf{b}^a(t) - \boldsymbol{\eta}^{ad}(t))\Delta t \\ \mathbf{p}(t + \Delta t) &= \mathbf{p}(t) + \mathbf{v}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{g}\Delta t^2 + \frac{1}{2}\mathbf{R}(t)(\tilde{\mathbf{a}}(t) - \mathbf{b}^a(t) - \boldsymbol{\eta}^{ad}(t))\Delta t^2\end{aligned}\quad (34)$$

- η^{gd}, η^{ad} : 이산화 시간(discrete-time) 버전 각속도, 가속도 노이즈

이산화 시간(discrete-time) 버전 노이즈 η^{gd}, η^{ad} 의 공분산은 연속 시간 노이즈 η^g, η^a 와 샘플링 주기 Δt 와 관련있기 때문에 이에 대한 함수로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}\text{Cov}(\eta^{gd}(t)) &= \frac{1}{\Delta t} \text{Cov}(\eta^g(t)) \\ \text{Cov}(\eta^{ad}(t)) &= \frac{1}{\Delta t} \text{Cov}(\eta^a(t))\end{aligned}\quad (35)$$

5 IMU preintegration on manifold

(34)을 자세히 보면 t 시간과 $t + \Delta t$ 시간의 사이의 상태 변수에 대한 관계식인 것을 알 수 있다. 따라서 (34)를 사용하면 매 IMU 측정값(measurement)가 들어올 때마다 다음 스텝의 상태 변수를 추정(estimation)할 수 있다.

두 키프레임 i, j 가 주어졌을 때 두 키프레임 사이에 존재하는 모든 IMU 측정값들을 누적하면 하나의 측정값으로 합칠 수 있으며 이를 **preintegrated IMU 측정값(measurement)**이라고 정의한다. IMU는 카메라와 시간적으로 동기화되어 있다고 가정하고 임의의 이산 시간 k 에 대한 측정값을 매 순간 얻는다고 할 때 (34)을 $k = i$ 부터 $k = j$ 까지 누적인 preintegration IMU 측정값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_j &= \mathbf{R}_i \prod_{k=i}^{j-1} \text{Exp} \left(\left(\tilde{\omega}_k - \mathbf{b}_k^g - \boldsymbol{\eta}_k^{gd} \right) \Delta t \right) \\ \mathbf{v}_j &= \mathbf{v}_i + \mathbf{g} \Delta t_{ij} + \sum_{k=i}^{j-1} \mathbf{R}_k \left(\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_k^a - \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \right) \Delta t \\ \mathbf{p}_j &= \mathbf{p}_i + \sum_{k=i}^{j-1} \left[\mathbf{v}_k \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{g} \Delta t^2 + \frac{1}{2} \mathbf{R}_k \left(\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_k^a - \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \right) \Delta t^2 \right]\end{aligned}\quad (36)$$

- $\Delta t_{ij} \doteq \sum_{k=i}^{j-1} \Delta t$: 키프레임 i 부터 $j-1$ 까지 모든 Δt 를 더한 값
- 가독성을 위해 $(\cdot)(t_i)$ 를 $(\cdot)_i$ 로 표기하였다

(36)를 사용하면 두 키프레임 i 와 j 사이의 IMU 측정값들을 누적하여 둘 사이의 상대적인 모션을 추정할 수 있다. 하지만 최적화 과정에서 비선형 상태 변수 \mathbf{R}_i 가 업데이트 될 때마다 $[i, j]$ 구간의 모든 비선형 상태 변수를 선형화(linearization)하는 과정에서 반복적인 연산을 수행해야 한다. 예를 들어 \mathbf{R}_i 가 변하면 이에 따른 $\mathbf{R}_k, k = i, \dots, j-1$ 또한 모두 다시 계산해야 한다.

이러한 비효율적인 계산을 피하기 위해 (36)을 바로 사용하는 것이 아닌 아래와 같은 **두 키프레임 i 와 j 의 상대적인 모션 증가량(relative motion increments)를 정의하여 t_i 시간의 포즈와 속도에 대해 독립적이 되도록 만든다.**

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{R}_{ij} &\doteq \mathbf{R}_i^\top \mathbf{R}_j &= \prod_{k=i}^{j-1} \text{Exp} \left(\left(\tilde{\omega}_k - \mathbf{b}_k^g - \boldsymbol{\eta}_k^{gd} \right) \Delta t \right) \\ \Delta \mathbf{v}_{ij} &\doteq \mathbf{R}_i^\top (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g} \Delta t_{ij}) &= \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \mathbf{R}_{ik} \left(\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_k^a - \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \right) \Delta t \\ \Delta \mathbf{p}_{ij} &\doteq \mathbf{R}_i^\top (\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i - \mathbf{v}_i \Delta t_{ij} - \frac{1}{2} \sum_{k=i}^{j-1} \mathbf{g} \Delta t^2) &= \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta \mathbf{v}_{ik} \Delta t + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{R}_{ik} \left(\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_k^a - \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \right) \Delta t^2 \right]\end{aligned}\quad (37)$$

위 식에서 주목해야 할 부분은 $\Delta \mathbf{v}_{ij}$ 와 $\Delta \mathbf{p}_{ij}$ 는 **실제 속도와 실제 위치의 물리적 변화를 의미하지 않는다는 사실이다**. 두 물리량은 (37) 식의 맨 오른쪽 부분을 t_i 시간의 상태 변수로부터 독립으로 만들기 위해 임의로 정의한 값이다. 식을 자세히 보면 맨 오른쪽 식은 중력 효과 또한 없는 것을 알 수 있다. (37)을 사용하면 t_i 에 상관없이 IMU의 측정값으로부터 바로 두 키프레임 사이의 preintegration IMU 측정값을 구할 수 있다.

엄밀하게 말하면 (37)에서 IMU의 bias 값은 매 순간마다 변화해야 하지만 계산의 편의를 위해 두 키프레임 i, j 사이의 시간은 충분히 짧은 시간이기 때문에 bias 값을 상수로 가정한다.

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_i^g &= \mathbf{b}_{i+1}^g = \dots = \mathbf{b}_{j-1}^g \\ \mathbf{b}_i^a &= \mathbf{b}_{i+1}^a = \dots = \mathbf{b}_{j-1}^a\end{aligned}\quad (38)$$

5.1 Preintegrated IMU measurements

(37)은 키프레임 i, j 의 상태 변수를 나타낸 좌측 항과 이들의 측정값을 나타낸 우측 항으로 이루어져 있기 때문에 이미 하나의 측정 모델(measurement model)이라고 볼 수 있다. 하지만 (37)은 **수식 안에 측정 노이즈(η)들이 복잡하게 섞여 있기 때문에 하나의 깔끔한 MAP 추정 문제로 수식화하기 어려운 단점이 있다**. MAP 추정을

하려면 각 상태변수들을 깔끔한 negative log-likelihood 형태로 변환할 수 있어야 하기 때문에 노이즈항들을 분리할 필요가 있다. 따라서 노이즈항을 분리하기 위한 여러 수학적 테크닉들을 사용할 것이다. 그리고 t_i 시간에서 bias 값은 이미 알고 있다고 가정하고 수식을 유도한다.

우선 $\Delta \mathbf{R}_{ij}$ 부터 노이즈항을 분리해보자. Preliminaries 섹션에서 설명한 (8)을 사용하여 노이즈항을 맨 뒤로 옮길 수 있다.

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{R}_{ij} &= \prod_{k=i}^{j-1} \left[\text{Exp}((\tilde{\omega}_k - \mathbf{b}_i^g) \Delta t) \cdot \text{Exp} \left(-\mathbf{J}_r^k \boldsymbol{\eta}_k^{gd} \Delta t \right) \right] \\ &= \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij} \cdot \prod_{k=i}^{j-1} \text{Exp} \left(-\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^\top \mathbf{J}_r^k \boldsymbol{\eta}_k^{gd} \Delta t \right) \\ &\doteq \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij} \cdot \text{Exp}(-\delta \phi_{ij})\end{aligned}\tag{39}$$

- $\mathbf{J}_r^k \doteq \mathbf{J}_r^k((\tilde{\omega}_k - \mathbf{b}_i^g) \Delta t)$ 를 단순화하여 표기
- $\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij} \doteq \prod_{k=i}^{j-1} \text{Exp}((\tilde{\omega}_k - \mathbf{b}_i^g) \Delta t)$: preintegrated된 상대 회전량
- $\delta \phi_{ij}$: preintegrated된 상대 회전량의 노이즈

다음으로 (39)를 (37)의 $\Delta \mathbf{v}_{ij}$ 에 대입한 후 작은 회전량에 대해 $\text{Exp}(\delta \phi_{ij}) \approx \mathbf{I} + \delta \phi_{ij}^\wedge$ 근사를 적용하면 아래 식과 같다.

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{v}_{ij} &= \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} (\mathbf{I} - \delta \phi_{ij}^\wedge) (\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_i^a) \Delta t - \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \Delta t \\ &= \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij} + \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} (\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_i^a)^\wedge \delta \phi_{ij} \Delta t - \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \Delta t \right] \\ &\doteq \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij} - \delta \mathbf{v}_{ij}\end{aligned}\tag{40}$$

- $\delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij} \doteq \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} (\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_i^a) \Delta t$: preintegrated된 상대 속도
- $\delta \mathbf{v}_{ij}$: preintegrated된 상대 속도의 노이즈

유사하게 (39)와 (40)을 (37)의 $\Delta \mathbf{p}_{ij}$ 에 대입한 후 작은 회전량의 근사식을 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{p}_{ij} &= \sum_{k=i}^{j-1} \left[(\Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ik} - \delta \mathbf{v}_{ik}) \Delta t + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} (\mathbf{I} - \delta \phi_{ik}^\wedge) (\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_i^a) \Delta t^2 - \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \Delta t^2 \right] \\ &= \Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij} + \sum_{k=i}^{j-1} \left[-\delta \mathbf{v}_{ik} \Delta t + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} (\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_i^a) \Delta t^2 - \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \Delta t^2 \right] \\ &\doteq \Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij} - \delta \mathbf{p}_{ij}\end{aligned}\tag{41}$$

- $\delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij}$: preintegrated된 상대 위치
- $\delta \mathbf{p}_{ij}$: preintegrated된 상대 위치의 노이즈

지금까지 유도한 (39), (40), (41)을 원래 식 (37)에 대입하면 다음과 같은 preintegrated 측정 모델이 나온다.

$$\begin{aligned}\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij} &= \mathbf{R}_i^\top \mathbf{R}_j \text{Exp}(\delta \phi_{ij}) \\ \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij} &= \mathbf{R}_i^\top (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g} \Delta t_{ij}) + \delta \mathbf{v}_{ij} \\ \Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij} &= \mathbf{R}_i^\top \left(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i - \mathbf{v}_i \Delta t_{ij} - \frac{1}{2} \mathbf{g} \Delta t_{ij}^2 \right) + \delta \mathbf{p}_{ij}\end{aligned}$$

(42)

- $\text{Exp}(-\delta \phi_{ij})^\top = \text{Exp}(\delta \phi_{ij})$ 가 적용되었다
- $[\delta \phi_{ij}^\top, \delta \mathbf{v}_{ij}^\top, \delta \mathbf{p}_{ij}^\top]^\top$: 랜덤 노이즈 벡터

이전 식 (37)은 상태와 노이즈항이 복잡하게 섞여 있었던 반면에 (42)은 상태와 랜덤 노이즈항이 서로 깔끔하게

분리된 것을 볼 수 있다.

랜덤 노이즈가 평균이 0인 가우시안 분포를 따른다고 가정하면 (측정=상태+가우시안 노이즈) 형태로 분리된 꼴이므로 MAP 추정에서 결론적으로 풀고자하는 negative log-likelihood의 수식이 2차식 $\mathbf{r}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{r}$ 형태로 깔끔하게 계산되기 때문에 이를 활용한 최적화 구현이 비교적 단순해진다. 그리고 회전, 속도, 위치에 대한 노이즈를 하나의 9차원 벡터와 공분산으로 다룰 수 있어 코드, 이론, 디버깅 또한 매우 통일성 있게 정돈된다.

5.2 Noise propagation

이번 섹션에서는 앞서 구한 랜덤 노이즈 벡터 $[\delta\phi_{ij}^\top, \delta\mathbf{v}_{ij}^\top, \delta\mathbf{p}_{ij}^\top]^\top$ 의 특성에 대해 살펴본다. 앞서 이 노이즈 벡터를 평균이 0인 가우시안 노이즈로 가정하면 다루기 편리하다고 하였지만 공분산을 정확히 모델링하는 것은 매우 중요하다. 공분산의 역행렬은 MAP 최적화에서 각 항의 가중치로 직접 들어가기 때문이다. 그래서 해당 섹션에서는 preintegrated된 측정값의 공분산 Σ_{ij} 을 유도하는 과정에 대해 자세히 설명한다.

$$\boldsymbol{\eta}_{ij}^\Delta \doteq [\delta\phi_{ij}^\top, \delta\mathbf{v}_{ij}^\top, \delta\mathbf{p}_{ij}^\top]^\top \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}_{9 \times 1}, \Sigma_{ij}) \quad (43)$$

먼저 $\delta\phi_{ij}$ 를 고려해보자. (39)를 보면 다음과 같이 정의되어 있다.

$$\text{Exp}(-\delta\phi_{ij}) \doteq \prod_{k=i}^{j-1} \text{Exp}\left(-\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^\top \mathbf{J}_r^k \boldsymbol{\eta}_k^{gd} \Delta t\right) \quad (44)$$

양변에 logarithm mapping $\text{Log}(\cdot)$ 을 취하면 다음과 같다.

$$\delta\phi_{ij} = -\text{Log}\left(\prod_{k=i}^{j-1} \text{Exp}\left(-\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^\top \mathbf{J}_r^k \boldsymbol{\eta}_k^{gd} \Delta t\right)\right) \quad (45)$$

우측항에 logarithm mapping의 1차 근사를 적용하면 다음과 같다. 이 때, $\boldsymbol{\eta}_k^{gd}$ 와 $\delta\phi_{ij}$ 는 충분히 작은 값이기 때문에 오른쪽 자코비안(right jacobian) \mathbf{J}_r 은 \mathbf{I} 에 수렴한다.

$$\delta\phi_{ij} \simeq \sum_{k=i}^{j-1} \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^\top \mathbf{J}_r^k \boldsymbol{\eta}_k^{gd} \Delta t \quad (46)$$

- $\text{Log}(\text{Exp}(\phi)\text{Exp}(\delta\phi)) \approx \phi + \mathbf{J}_r^{-1}(\phi)\delta\phi$ 근사를 적용하였다

1차 근사항까지만 고려하면 상대 회전량에 대한 노이즈 $\delta\phi_{ij}$ 는 평균이 0인 가우시안 노이즈 $\boldsymbol{\eta}_k^{gd}$ 의 선형 결합(linear combination)이므로 역시 평균이 0인 가우시안 분포를 지닌다. 이러한 성질이 좋은 이유는 회전에 대한 측정값 (42)이 정확히 (상태+노이즈) 꼴이 되기 때문이다. ($\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\text{Exp}(\epsilon)$)

상대 회전량에 대한 노이즈를 위와 같이 정리하면 속도, 위치에 대한 노이즈 $\delta\mathbf{v}_{ij}, \delta\mathbf{p}_{ij}$ 는 이해하기 수월해진다. $\delta\mathbf{v}_{ij}, \delta\mathbf{p}_{ij}$ 식을 보면 $\boldsymbol{\eta}_k^{ad}$ 와 $\delta\phi_{ij}$ 의 선형 결합으로 구성되어 있기 때문에 역시 평균이 0인 가우시안 분포가 된다.

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{v}_{ij} &\simeq \sum_{k=i}^{j-1} \left[-\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}(\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_i^a)^\wedge \delta\phi_{ik} \Delta t + \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \Delta t \right] \\ \delta\mathbf{p}_{ij} &\simeq \sum_{k=i}^{j-1} \left[\delta\mathbf{v}_{ik} \Delta t - \frac{1}{2} \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}(\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_i^a)^\wedge \delta\phi_{ik} \Delta t^2 + \frac{1}{2} \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \Delta t^2 \right] \end{aligned} \quad (47)$$

- 이러한 근사는 고차항을 제외한 1차 근사까지만 유효하다

(46), (47) 식을 보면 preintegration 노이즈 $\boldsymbol{\eta}_{ij}^\Delta$ 는 IMU 측정 노이즈 $\boldsymbol{\eta}_k^d \doteq [\boldsymbol{\eta}_k^{ad}, \boldsymbol{\eta}_k^{gd}]$, $k = 1, \dots, j-1$ 의 선형 함수(linear function)으로 이루어져 있다고 볼 수 있다. 이는 IMU 데이터시트로부터 얻은 $\boldsymbol{\eta}_k^d$ 의 공분산 값을 사용하여 선형 전파(linear propagation)을 통해 $\boldsymbol{\eta}_{ij}^\Delta$ 를 구할 수 있다는 것을 의미한다. 이러한 preintegrated 공분산을 Σ_{ij} 라고 부른다. Appendix IX-A를 보면 Σ_{ij} 를 계산하는 방법에 대해 자세히 설명한다. 이런 방법을 통해

새로운 IMU 측정값이 들어올 때마다 Σ_{ij} 를 매 번 새로 계산할 필요없이 이전 상태에서부터 반복적(Iterative)으로 상태를 업데이트할 수 있다.

5.3 Incorporating bias updates

이전 섹션에서 preintegration을 수행하는 동안의 bias $\{\bar{\mathbf{b}}_i^g, \bar{\mathbf{b}}_i^a\}$ 는 값을 이미 알고 있으며 변하지 않는다고 설명하였다. **하지만 대부분의 경우 최적화를 하는 동안 bias 추정값은 작게나마 $\delta\mathbf{b}$ 만큼 변한다.** 한가지 방법은 bias가 바뀔 때마다 preintegration 결과를 처음부터 다시 적분하는 것이다. 그러나 이는 계산 비용이 크므로 비효율적이다. 대신, bias를 $\mathbf{b} \leftarrow \bar{\mathbf{b}} + \delta\mathbf{b}$ 로 업데이트한다고 하면 다음과 같이 1차 선형 전개로 preintegration 측정값을 빠르게 갱신할 수 있다.

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}(\mathbf{b}_i^g) &\simeq \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}(\bar{\mathbf{b}}_i^g) \text{Exp}\left(\frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}^g\right) \\ \Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}(\mathbf{b}_i^g, \mathbf{b}_i^a) &\simeq \Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}(\bar{\mathbf{b}}_i^g, \bar{\mathbf{b}}_i^a) + \frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}_i^g + \frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^a}\delta\mathbf{b}_i^a \\ \Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij}(\mathbf{b}_i^g, \mathbf{b}_i^a) &\simeq \Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij}(\bar{\mathbf{b}}_i^g, \bar{\mathbf{b}}_i^a) + \frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}_i^g + \frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^a}\delta\mathbf{b}_i^a\end{aligned}\quad (48)$$

위 갱신 과정은 SO(3)에서 바로 동작한다(회전식에 $\text{Exp}(\cdot)$ 가 있는 이유). 자코비안 행렬 $\{\frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}, \frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}, \dots\}$ 은 preintegration 시점의 bias $\bar{\mathbf{b}}$ 에서 계산한 값이며 bias 값이 변함에 따라 측정값이 얼마나 변하는지를 설명한다. 이 자코비안 행렬들은 상수로 간주되며 preintegration 중 미리 계산해둘 수 있다. 이 자코비안들의 유도는 [5.1] 섹션의 (큰 값+작은 섭동) 전개와 거의 동일하며 Appendix IX-B에 자세히 설명되어 있다.

5.4 Preintegrated IMU factors

(42)의 preintegration 측정 모델과 1차 근사에서 측정 노이즈가 평균이 0이고 공분산이 Σ_{ij} 인 가우시안 분포를 따른다는 점을 사용하면 residual $\mathbf{r}_{\mathcal{I}ij} \doteq [\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}ij}^\top, \mathbf{r}_{\Delta\mathbf{v}ij}^\top, \mathbf{r}_{\Delta\mathbf{p}ij}^\top]^\top \in \mathbb{R}^9$ 를 다음과 같이 쉽게 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}ij} &\doteq \text{Log}\left(\left(\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}(\bar{\mathbf{b}}_i^g) \text{Exp}\left(\frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}^g\right)\right)^\top \mathbf{R}_i^\top \mathbf{R}_j\right) \\ \mathbf{r}_{\Delta\mathbf{v}ij} &\doteq \mathbf{R}_i^\top (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g}\Delta t_{ij}) - \left[\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}(\bar{\mathbf{b}}_i^g, \bar{\mathbf{b}}_i^a) + \frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}^g + \frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^a}\delta\mathbf{b}^a\right] \\ \mathbf{r}_{\Delta\mathbf{p}ij} &\doteq \mathbf{R}_i^\top (\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i - \mathbf{v}_i\Delta t_{ij} - \frac{1}{2}\mathbf{g}\Delta t_{ij}^2) - \left[\Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij}(\bar{\mathbf{b}}_i^g, \bar{\mathbf{b}}_i^a) + \frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}^g + \frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^a}\delta\mathbf{b}^a\right]\end{aligned}\quad (49)$$

- 위 식에는 (48)에서 설명한 bias 갱신도 포함되어 있다

[2.3] 섹션에서 설명한 "lift-solve-retract" 방법론에 따르면 매 가우스-뉴턴 반복마다 (49)의 파라미터를 변경(re-parameterized)해야 한다. 여기서 re-parameterization이란 기존의 비선형 절대 변수 대신 선형의 국소 증분량으로 문제를 다시 쓰는 것을 말한다. 예를 들어, 회전 $\mathbf{R} \in \text{SO}(3)$ 은 비선형 공간에 존재하므로 $\mathbf{R} \rightarrow \boldsymbol{\theta}$ 와 같이 선형 공간의 변수로 바꾸는 작업을 말한다 ($\mathbf{R} \approx \mathbf{R}_k \text{Exp}(\delta\boldsymbol{\theta})$). 나머지 변수도 마찬가지로 국소 증분량으로 변경한다 ($\mathbf{v} \approx \mathbf{v}_k + \delta\mathbf{v}$, $\mathbf{p} \approx \mathbf{p}_k + \delta\mathbf{p}$, $\mathbf{b} \approx \mathbf{b}_k + \delta\mathbf{b}$).

그 다음 "solve" 단계에서는 현재 추정값 주변에서 이 비용 함수를 선형화(linearize)해야 한다. 선형화를 수월하게 하려면 위 residual들에 대한 자코비안의 해석적 표현을 미리 구해두는 것이 편리하며, 이는 Appendix IX-C에서 유도하였다.

5.5 Bias model

IMU 모델 식 (29)를 소개할 때 bias는 시간에 따라 천천히 변하는 값이라고 설명하였다. 따라서 우리는 bias를 브라운 운동(brownian motion)으로 모델링할 수 있다.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{b}}^g(t) &= \boldsymbol{\eta}^{bg}, \\ \dot{\mathbf{b}}^a(t) &= \boldsymbol{\eta}^{ba}\end{aligned}\quad (50)$$

연속된 두 키프레임 i 와 j 사이의 구간 $[t_i, t_j]$ 에서 (50)을 적분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_j^g &= \mathbf{b}_i^g + \boldsymbol{\eta}^{bgd} \\ \mathbf{b}_j^a &= \mathbf{b}_i^a + \boldsymbol{\eta}^{bad}\end{aligned}\tag{51}$$

- $\mathbf{b}_i^g \doteq \mathbf{b}^g(t_i)$, $\mathbf{b}_i^a \doteq \mathbf{b}^a(t_i)$ 로 단순화

$\boldsymbol{\eta}^{bgd}, \boldsymbol{\eta}^{bad}$ 는 bias 노이즈의 이산화(discrete) 버전으로써 평균이 0이고 공분산이 각각 $\boldsymbol{\Sigma}^{bgd} \doteq \Delta t_{ij} \text{Cov}(\boldsymbol{\eta}^{bg})$, $\boldsymbol{\Sigma}^{bad} \doteq \Delta t_{ij} \text{Cov}(\boldsymbol{\eta}^{ba})$ 이다.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}^{bgd} &\sim \mathcal{N}(0, \boldsymbol{\Sigma}^{bgd}) \\ \boldsymbol{\eta}^{bad} &\sim \mathcal{N}(0, \boldsymbol{\Sigma}^{bad})\end{aligned}\tag{52}$$

모델 (51)은 팩터 그래프(factor graph)에 쉽게 포함될 수 있다. 모든 연속 키프레임 쌍에 대해 논문 식(26)에 추가되는 가산항으로 넣으면 된다.

$$\|\mathbf{r}_{\mathbf{b}_{ij}}\|^2 \doteq \|\mathbf{b}_j^g - \mathbf{b}_i^g\|_{\boldsymbol{\Sigma}^{bgd}}^2 + \|\mathbf{b}_j^a - \mathbf{b}_i^a\|_{\boldsymbol{\Sigma}^{bad}}^2\tag{53}$$

6 Structureless vision factor

A Appendix

A.1 Iterative noise propagation

이번 섹션에서는 앞서 [5.2] 섹션에서 논의되었던 preintegrated 노이즈의 공분산을 계산하는 과정에 대해 설명한다. 식을 유도해보면 결국 노이즈의 공분산은 반복식 형태(iterative form)로 구할 수 있고 식 자체가 직관적이고 간결하므로 수식 해석이 용이하며 실시간 구현에 훨씬 유리하다.

상대 회전량에 대한 노이즈 (46)부터 살펴보자. $\delta\phi_{ij}$ 를 반복식 형태로 만들기 위해 마지막 샘플 $k = j - 1$ 항을 떼어내보자.

$$\begin{aligned}\delta\phi_{ij} &\simeq \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^\top \mathbf{J}_r^k \boldsymbol{\eta}_k^{gd} \Delta t \\ &= \sum_{k=i}^{j-2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^\top \mathbf{J}_r^k \boldsymbol{\eta}_k^{gd} \Delta t + \overbrace{\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{jj}^\top}^{\mathbf{I}_{3 \times 3}} \mathbf{J}_r^{j-1} \boldsymbol{\eta}_{j-1}^{gd} \Delta t \\ &= \sum_{k=i}^{j-2} \underbrace{(\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{k+1j-1} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{j-1j})^\top}_{=\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{k+1j}} \mathbf{J}_r^k \boldsymbol{\eta}_k^{gd} \Delta t + \mathbf{J}_r^{j-1} \boldsymbol{\eta}_{j-1}^{gd} \Delta t \\ &= \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{j-1j}^\top \sum_{k=i}^{j-2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{k+1j-1}^\top \mathbf{J}_r^k \boldsymbol{\eta}_k^{gd} \Delta t + \mathbf{J}_r^{j-1} \boldsymbol{\eta}_{j-1}^{gd} \Delta t \\ &= \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{j-1j}^\top \delta\phi_{ij-1} + \mathbf{J}_r^{j-1} \boldsymbol{\eta}_{j-1}^{gd} \Delta t\end{aligned}\tag{54}$$

동일한 과정을 (47)에 대해서도 수행해보자

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{v}_{ij} &= \sum_{k=i}^{j-1} \left[-\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} (\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_i^a)^\wedge \delta\phi_{ik} \Delta t + \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \Delta t \right] \\ &= \sum_{k=i}^{j-2} \left[-\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} (\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_i^a)^\wedge \delta\phi_{ik} \Delta t + \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \Delta t \right] \\ &\quad - \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij-1} (\tilde{\mathbf{a}}_{j-1} - \mathbf{b}_i^a)^\wedge \delta\phi_{ij-1} \Delta t + \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij-1} \boldsymbol{\eta}_{j-1}^{ad} \Delta t \\ &= \delta\mathbf{v}_{ij-1} - \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij-1} (\tilde{\mathbf{a}}_{j-1} - \mathbf{b}_i^a)^\wedge \delta\phi_{ij-1} \Delta t + \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij-1} \boldsymbol{\eta}_{j-1}^{ad} \Delta t\end{aligned}\tag{55}$$

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{p}_{ij} &= \sum_{k=i}^{j-1} \left[\delta \mathbf{v}_{ik} \Delta t - \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} (\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_i^a)^\wedge \phi_{ik} \Delta t^2 + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \Delta t^2 \right] \\
&= \sum_{k=i}^{j-2} \left[\delta \mathbf{v}_{ik} \Delta t - \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} (\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_i^a)^\wedge \phi_{ik} \Delta t^2 + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \Delta t^2 \right] \\
&\quad + \delta \mathbf{v}_{ij-1} \Delta t - \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij-1} (\tilde{\mathbf{a}}_{j-1} - \mathbf{b}_i^a)^\wedge \phi_{ij-1} \Delta t^2 + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij-1} \boldsymbol{\eta}_{j-1}^{ad} \Delta t^2 \\
&= \delta \mathbf{p}_{ij-1} + \delta \mathbf{v}_{ij-1} \Delta t - \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij-1} (\tilde{\mathbf{a}}_{j-1} - \mathbf{b}_i^a)^\wedge \phi_{ij-1} \Delta t^2 + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij-1} \boldsymbol{\eta}_{j-1}^{ad} \Delta t^2
\end{aligned} \tag{56}$$

Preintegrated 노이즈와 IMU 측정 노이즈는 각각 $\boldsymbol{\eta}_k^a \doteq [\delta \phi_{ik}, \delta \mathbf{v}_{ik}, \delta \mathbf{p}_{ik}]$, 그리고 $\boldsymbol{\eta}_k^d \doteq [\boldsymbol{\eta}_k^{ad}, \boldsymbol{\eta}_k^{gd}]$ 이다. 표기의 편의를 위해 transpose를 생략하였으나 모두 열벡터이다. 이를 사용하여 위 식을 다시 작성하면 다음과 같은 컴팩트한 형태가 된다

$$\boldsymbol{\eta}_{ij}^a = \mathbf{A}_{j-1} \boldsymbol{\eta}_{ij-1}^a + \mathbf{B}_{j-1} \boldsymbol{\eta}_{j-1}^d \tag{57}$$

선형 모델 (57)과 IMU 측정 노이즈 $\boldsymbol{\eta}_k^d$ 의 공분산 $\boldsymbol{\Sigma}_\eta \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ 를 사용하여 preintegrated 측정값의 공분산을 반복적(iterative)으로 쓸 수 있다.

$$\boldsymbol{\Sigma}_{ij} = \mathbf{A}_{j-1} \boldsymbol{\Sigma}_{ij-1} \mathbf{A}_{j-1}^\top + \mathbf{B}_{j-1} \boldsymbol{\Sigma}_\eta \mathbf{B}_{j-1}^\top \tag{58}$$

- 초기값: $\boldsymbol{\Sigma}_{ij} = \mathbf{0}_{9 \times 9}$

A.2 Bias correction via first-order updates

이번 섹션에서는 [5.3] 섹션에서 설명한 1차 근사 bias 보정식의 유도 과정에 대해 설명한다. 우선, 시간 i 에서 bias 추정값 $\bar{\mathbf{b}}_i \doteq [\bar{\mathbf{b}}_i^g, \bar{\mathbf{b}}_i^a]$ 가 주어졌다고 하자. 이 때 계산해둔 preintegration 값들은 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned}
\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij} &\doteq \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij}(\bar{\mathbf{b}}_i) \\
\Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij} &\doteq \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij}(\bar{\mathbf{b}}_i) \\
\Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij} &\doteq \Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij}(\bar{\mathbf{b}}_i)
\end{aligned} \tag{59}$$

이번 섹션의 목표는 **bias 추정값이 바뀌었을 때 이 세 값을 다시 적분하지 않고 업데이트하는 공식을 만드는 것이다**. 새 bias 값이 $\hat{\mathbf{b}}_i \leftarrow \bar{\mathbf{b}}_i + \delta \mathbf{b}_i$ 와 같이 주어졌다고 하자. 여기서 $\delta \mathbf{b}_i$ 는 이전 값 $\bar{\mathbf{b}}_i$ 에 비해 작은 업데이트 값이다.

회전에 대해 bias 보정을 먼저 진행해보자. 핵심 아이디어는 $\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij}(\hat{\mathbf{b}}_i)$ 를 "이전 bias에서 preintegration 결과 $\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij} + 1$ 차 보정" 꼴로 쓰는 것이다. (39) 식을 활용해 $\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij}(\hat{\mathbf{b}}_i)$ 를 전개하면 다음과 같다

$$\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij}(\hat{\mathbf{b}}_i) = \prod_{k=i}^{j-1} \text{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \hat{\mathbf{b}}_i^g\right) \Delta t\right) \tag{60}$$

여기에 $\hat{\mathbf{b}}_i = \bar{\mathbf{b}}_i + \delta \mathbf{b}_i$ 를 넣고 각 항에 1차 근사 (5)를 적용하면 아래와 같은 식이 나온다

$$\begin{aligned}
\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij}(\hat{\mathbf{b}}_i) &= \prod_{k=i}^{j-1} \text{Exp}((\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - (\bar{\mathbf{b}}_i^g + \delta \mathbf{b}_i^g)) \Delta t) \\
&\simeq \prod_{k=i}^{j-1} \text{Exp}((\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \bar{\mathbf{b}}_i^g) \Delta t) \text{Exp}\left(-\mathbf{J}_r^k \delta \mathbf{b}_i^g \Delta t\right)
\end{aligned} \tag{61}$$

그 다음으로 관계식 (12)을 사용하여 $\delta \mathbf{b}_i^g$ 가 들어간 항들을 끝으로 이동시키면 다음과 같다

$$\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij}(\hat{\mathbf{b}}_i) = \Delta \bar{\mathbf{R}}_{ij} \prod_{k=i}^{j-1} \text{Exp} \left(-\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{k+1j}(\bar{\mathbf{b}}_i)^\top \mathbf{J}_r^k \delta \mathbf{b}_i^g \Delta t \right) \quad (62)$$

$$- \Delta \bar{\mathbf{R}}_{ij} = \prod_{k=i}^{j-1} \text{Exp}((\tilde{\omega}_k - \bar{\mathbf{b}}_i^g) \Delta t)$$

위 식에 1차 근사식 (8)을 반복적으로 적용하면 다음과 같은 결과를 얻는다

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij}(\hat{\mathbf{b}}_i) &\simeq \Delta \bar{\mathbf{R}}_{ij} \text{Exp} \left(\sum_{k=i}^{j-1} -\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{k+1j}(\bar{\mathbf{b}}_i)^\top \mathbf{J}_r^k \delta \mathbf{b}_i^g \Delta t \right) \\ &= \Delta \bar{\mathbf{R}}_{ij} \text{Exp} \left(\frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g} \delta \mathbf{b}_i^g \right) \end{aligned} \quad (63)$$

위 식을 보면 회전 preintegration $\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ij}(\hat{\mathbf{b}}_i)$ 은 "이전 값 $\Delta \bar{\mathbf{R}}_{ij}$ x 작은 회전 보정" 형태로 갱신할 수 있으며 다시 적분할 필요가 없다는 것을 알 수 있다.

이제 속도항에 대해 같은 작업을 해보자.

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{b}}_i) &= \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik}(\hat{\mathbf{b}}_i) (\tilde{\mathbf{a}}_k - \bar{\mathbf{b}}_i^a - \delta \mathbf{b}_i^a) \Delta t \\ &= \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \bar{\mathbf{R}}_{ik} \text{Exp} \left(\frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial \mathbf{b}^g} \delta \mathbf{b}_i^g \right) (\tilde{\mathbf{a}}_k - \bar{\mathbf{b}}_i^a - \delta \mathbf{b}_i^a) \Delta t \\ &= \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \bar{\mathbf{R}}_{ik} \left(\mathbf{I} + \left(\frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial \mathbf{b}^g} \delta \mathbf{b}_i^g \right)^\wedge \right) (\tilde{\mathbf{a}}_k - \bar{\mathbf{b}}_i^a - \delta \mathbf{b}_i^a) \Delta t \\ &= \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ij} - \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \bar{\mathbf{R}}_{ik} \Delta t \delta \mathbf{b}_i^a + \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \bar{\mathbf{R}}_{ik} \left(\frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial \mathbf{b}^g} \delta \mathbf{b}_i^g \right)^\wedge (\tilde{\mathbf{a}}_k - \bar{\mathbf{b}}_i^a) \Delta t \\ &= \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ij} - \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \bar{\mathbf{R}}_{ik} \Delta t \delta \mathbf{b}_i^a - \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \bar{\mathbf{R}}_{ik} (\tilde{\mathbf{a}}_k - \bar{\mathbf{b}}_i^a)^\wedge \frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial \mathbf{b}^g} \Delta t \delta \mathbf{b}_i^g \\ &= \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ij} + \frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^a} \delta \mathbf{b}_i^a + \frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g} \delta \mathbf{b}_i^g \end{aligned} \quad (64)$$

$$- \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ij} = \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \bar{\mathbf{R}}_{ik} (\tilde{\mathbf{a}}_k - \bar{\mathbf{b}}_i^a) \Delta t$$

결과를 보면 속도에 대한 선형 보정식으로 정리된다. 위치항에 대해서도 동일한 방식으로 유도하면 다음과 같다.

$$\Delta \tilde{\mathbf{p}}(\hat{\mathbf{b}}_i) = \Delta \bar{\mathbf{p}}_{ij} + \frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^a} \delta \mathbf{b}_i^a + \frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g} \delta \mathbf{b}_i^g \quad (65)$$

정리하자면 (48)에 쓰이는 자코비안들은 다음과 같다

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g} &= - \sum_{k=i}^{j-1} [\Delta \bar{\mathbf{R}}_{k+1j} (\bar{\mathbf{b}}_i)^\top \mathbf{J}_r^k \Delta t] \\
\frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^a} &= - \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \bar{\mathbf{R}}_{ik} \Delta t \\
\frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g} &= - \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \bar{\mathbf{R}}_{ik} (\tilde{\mathbf{a}}_k - \bar{\mathbf{b}}_i^a)^\wedge \frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g} \Delta t \\
\frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^a} &= \sum_{k=i}^{j-1} \frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^a} \Delta t - \frac{1}{2} \Delta \bar{\mathbf{R}}_{ik} \Delta t^2 \\
\frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g} &= \sum_{k=i}^{j-1} \frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g} \Delta t - \frac{1}{2} \Delta \bar{\mathbf{R}}_{ik} (\tilde{\mathbf{a}}_k - \bar{\mathbf{b}}_i^a)^\wedge \frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g} \Delta t^2
\end{aligned} \tag{66}$$

이 자코비안들은 **새 IMU 측정값이 들어올 때마다 누적으로 계산해둘 수 있어서 최적화 중 bias가 바뀌면 1차 보정만으로도 빠르게 $\Delta \bar{\mathbf{R}}_{ij}, \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ij}, \Delta \bar{\mathbf{p}}_{ij}$ 를 업데이트할 수 있다.** 단 bias가 너무 크면 1차 근사 정확도가 떨어질 수 있으므로 해당 구간을 다시 적분하는 것이 안전하다.

A.3 Jacobians of residual errors

이번 섹션에서는 (49) 식에 나오는 residual들의 자코비안 행렬들을 해석적으로 유도한다. 이 자코비안들은 GN 같은 반복 최적화를 할 때 필수적으로 사용된다(비용 함수 (28)을 최적화할 때 사용함).

최적화는 [2.3] 섹션에서 설명한 리프팅(lifting)을 써서 residual을 증분 함수로 만든 뒤 미분한다. 즉, 다음과 같이 리트랙션을 대입한다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_i &\leftarrow \mathbf{R}_i \text{Exp}(\delta \phi_i), & \mathbf{R}_j &\leftarrow \mathbf{R}_j \text{Exp}(\delta \phi_j) \\
\mathbf{p}_i &\leftarrow \mathbf{p}_i + \mathbf{R}_i \delta \mathbf{p}_i, & \mathbf{p}_j &\leftarrow \mathbf{p}_j + \mathbf{R}_j \delta \mathbf{p}_j \\
\mathbf{v}_i &\leftarrow \mathbf{v}_i + \delta \mathbf{v}_i, & \mathbf{v}_j &\leftarrow \mathbf{v}_j + \delta \mathbf{v}_j \\
\delta \mathbf{b}_i^g &\leftarrow \delta \mathbf{b}_i^g + \delta \tilde{\mathbf{b}}_i^g, & \delta \mathbf{b}_i^a &\leftarrow \delta \mathbf{b}_i^a + \delta \tilde{\mathbf{b}}_i^a
\end{aligned} \tag{67}$$

이렇게 하면 residual이 벡터 공간의 함수가 되므로 자코비안을 쉽게 계산할 수 있다. 이제부터는 residual을 $[\delta \phi_i, \delta \mathbf{p}_i, \delta \mathbf{v}_i, \delta \phi_j, \delta \mathbf{p}_j, \delta \mathbf{v}_j, \delta \tilde{\mathbf{b}}_i^g, \delta \tilde{\mathbf{b}}_i^a]$ 에 대해 미분한다.

A.3.1 Jacobians of $\mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}$

$\mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}$ 은 $\delta \tilde{\mathbf{b}}_i^g$ 와 $\delta \tilde{\mathbf{b}}_i^a$ 에 선형이므로 이들에 대한 자코비안은 (48)에서 쓴 bias 보정항이 그대로 된다. $\delta \phi_j, \mathbf{v}_j$ 는 residual에 등장하지 않으므로 모두 0이다. 다른 자코비안들에 대해 살펴보자

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}(\mathbf{p}_i + \mathbf{R}_i \delta \mathbf{p}_i) &= \mathbf{R}_i^\top \left(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i - \mathbf{R}_i \delta \mathbf{p}_i - \mathbf{v}_i \Delta t_{ij} - \frac{1}{2} \mathbf{g} \Delta t_{ij}^2 \right) - C \\
&= \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}(\mathbf{p}_i) + (-\mathbf{I}_{3 \times 1}) \delta \mathbf{p}_i
\end{aligned} \tag{68}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}(\mathbf{p}_j + \mathbf{R}_j \delta \mathbf{p}_j) &= \mathbf{R}_i^\top \left(\mathbf{p}_j + \mathbf{R}_j \delta \mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i - \mathbf{v}_i \Delta t_{ij} - \frac{1}{2} \mathbf{g} \Delta t_{ij}^2 \right) - C \\
&= \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}(\mathbf{p}_j) + (\mathbf{R}_i^\top \mathbf{R}_j) \delta \mathbf{p}_j
\end{aligned} \tag{69}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}(\mathbf{v}_i + \delta \mathbf{v}_i) &= \mathbf{R}_i^\top \left(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i - \mathbf{v}_i \Delta t_{ij} - \delta \mathbf{v}_i \Delta t_{ij} - \frac{1}{2} \mathbf{g} \Delta t_{ij}^2 \right) - C \\
&= \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}(\mathbf{v}_i) + (-\mathbf{R}_i^\top \Delta t_{ij}) \delta \mathbf{v}_i
\end{aligned} \tag{70}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}(\mathbf{R}_i \text{Exp}(\delta \phi_i)) &= (\mathbf{R}_i \text{Exp}(\delta \phi_i))^\top \left(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i - \mathbf{v}_i \Delta t_{ij} - \frac{1}{2} \mathbf{g} \Delta t_{ij}^2 \right) - C \\
&= (\mathbf{I} - \delta \phi_i^\wedge) \mathbf{R}_i^\top \left(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i - \mathbf{v}_i \Delta t_{ij} - \frac{1}{2} \mathbf{g} \Delta t_{ij}^2 \right) - C \\
&= \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}(\mathbf{R}_i) + \left(\mathbf{R}_i^\top \left(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i - \mathbf{v}_i \Delta t_{ij} - \frac{1}{2} \mathbf{g} \Delta t_{ij}^2 \right) \right)^\wedge \delta \phi_i
\end{aligned} \tag{71}$$

$$- C \doteq \Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij} + \frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}_i^g} \delta \mathbf{b}_i^g + \frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}_i^a} \delta \mathbf{b}_i^a$$

지금까지 구한 자코비안들을 한 번에 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{ll}
\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}}{\partial \delta \phi_i} = (\mathbf{R}_i^\top (\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i - \mathbf{v}_i \Delta t_{ij} - \frac{1}{2} \mathbf{g} \Delta t_{ij}^2))^\wedge & \frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}}{\partial \delta \phi_j} = 0 \\
\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}}{\partial \delta \mathbf{p}_i} = -\mathbf{I}_{3 \times 1} & \frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}}{\partial \delta \mathbf{p}_j} = \mathbf{R}_i^\top \mathbf{R}_j \\
\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}}{\partial \delta \mathbf{v}_i} = -\mathbf{R}_i^\top \Delta t_{ij} & \frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}}{\partial \delta \mathbf{v}_j} = 0 \\
\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}}{\partial \delta \mathbf{b}_i^a} = -\frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}_i^a} & \frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}}{\partial \delta \mathbf{b}_i^g} = -\frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}_i^g}
\end{array} \tag{72}$$

A.3.2 Jacobians of $\mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}}$

$\mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}}$ 도 $\delta \tilde{\mathbf{b}}_i^g$ 와 $\delta \tilde{\mathbf{b}}_i^a$ 에 선형이므로 이들에 대한 자코비안은 (48)에서 쓴 bias 보정항이 그대로 된다. $\delta \phi_j, \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j$ 는 residual에 등장하지 않으므로 모두 0이다. 다른 자코비안들에 대해 살펴보자

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}}(\mathbf{v}_i + \delta \mathbf{v}_i) &= \mathbf{R}_i^\top (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \delta \mathbf{v}_i - \mathbf{g} \Delta t_{ij}) - D \\
&= \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}}(\mathbf{v}_j) - \mathbf{R}_i^\top \delta \mathbf{v}_i
\end{aligned} \tag{73}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}}(\mathbf{v}_j + \delta \mathbf{v}_j) &= \mathbf{R}_i^\top (\mathbf{v}_j + \delta \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g} \Delta t_{ij}) - D \\
&= \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}}(\mathbf{v}_j) + \mathbf{R}_i^\top \delta \mathbf{v}_j
\end{aligned} \tag{74}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}}(\mathbf{R}_i \text{Exp}(\delta \phi_i)) &= (\mathbf{R}_i \text{Exp}(\delta \phi_i))^\top (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g} \Delta t_{ij}) - D \\
&= (\mathbf{I} - \delta \phi_i^\wedge) \mathbf{R}_i^\top (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g} \Delta t_{ij}) - D \\
&= \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}}(\mathbf{R}_i) + \left(\mathbf{R}_i^\top (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g} \Delta t_{ij}) \right)^\wedge \delta \phi_i
\end{aligned} \tag{75}$$

$$- D \doteq \left[\Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij} + \frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}_i^g} \delta \mathbf{b}_i^g + \frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}_i^a} \delta \mathbf{b}_i^a \right]$$

지금까지 구한 자코비안들을 한 번에 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{ll}
\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}}}{\partial \delta \phi_i} = (\mathbf{R}_i^\top (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g} \Delta t_{ij}))^\wedge & \frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}}}{\partial \delta \phi_j} = 0 \\
\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}}}{\partial \delta \mathbf{p}_i} = 0 & \frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}}}{\partial \delta \mathbf{p}_j} = 0 \\
\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}}}{\partial \delta \mathbf{v}_i} = -\mathbf{R}_i^\top & \frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}}}{\partial \delta \mathbf{v}_j} = \mathbf{R}_i^\top \\
\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}}}{\partial \delta \tilde{\mathbf{b}}_i^a} = -\frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}_i^a} & \frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}}}{\partial \delta \tilde{\mathbf{b}}_i^g} = -\frac{\partial \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}_i^g}
\end{array} \tag{76}$$

A.3.3 Jacobians of $\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}$

$\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j, \delta\mathbf{b}_i^a$ 는 residual에 등장하지 않으므로 모두 0이다. 나머지에 대한 편미분을 전개하면 다음과 같다

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}(\mathbf{R}_i \text{Exp}(\delta\phi_i)) &= \text{Log}\left(\left(\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}(\bar{\mathbf{b}}_i^g)E\right)^\top (\mathbf{R}_i \text{Exp}(\delta\phi_i))^\top \mathbf{R}_j\right) \\ &= \text{Log}\left(\left(\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}(\bar{\mathbf{b}}_i^g)E\right)^\top \text{Exp}(-\delta\phi_i) \mathbf{R}_i^\top \mathbf{R}_j\right) \\ &= \text{Log}\left(\left(\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}(\bar{\mathbf{b}}_i^g)E\right)^\top \mathbf{R}_i^\top \mathbf{R}_j \text{Exp}(-\mathbf{R}_j^\top \mathbf{R}_i \delta\phi_i)\right) \\ &= \mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}}(\mathbf{R}_i) - \mathbf{J}_r^{-1}(\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}}(\mathbf{R}_i)) \mathbf{R}_j^\top \mathbf{R}_i \delta\phi_i\end{aligned}\tag{77}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}(\mathbf{R}_j \text{Exp}(\delta\phi_j)) &= \text{Log}\left(\left(\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}(\bar{\mathbf{b}}_i^g)E\right)^\top \mathbf{R}_i^\top (\mathbf{R}_j \text{Exp}(\delta\phi_j))\right) \\ &= \mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}}(\mathbf{R}_j) + \mathbf{J}_r^{-1}(\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}}(\mathbf{R}_j)) \delta\phi_j\end{aligned}\tag{78}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}(\delta\mathbf{b}_i^g + \delta\tilde{\mathbf{b}}_i^g) &= \text{Log}\left(\left(\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}(\bar{\mathbf{b}}_i^g) \text{Exp}\left(\frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}(\delta\mathbf{b}_i^g + \delta\tilde{\mathbf{b}}_i^g)\right)\right)^\top \mathbf{R}_i^\top \mathbf{R}_j\right) \\ &= \text{Log}\left(\left(\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}(\bar{\mathbf{b}}_i^g) E \text{Exp}\left(\mathbf{J}_r^b \frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g} \delta\tilde{\mathbf{b}}_i^g\right)\right)^\top \mathbf{R}_i^\top \mathbf{R}_j\right) \\ &= \text{Log}\left(\text{Exp}\left(-\mathbf{J}_r^b \frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g} \delta\tilde{\mathbf{b}}_i^g\right) (\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}(\bar{\mathbf{b}}_i^g)E)^\top \mathbf{R}_i^\top \mathbf{R}_j\right) \\ &= \text{Log}\left(\text{Exp}\left(-\mathbf{J}_r^b \frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g} \delta\tilde{\mathbf{b}}_i^g\right) \text{Exp}(\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}(\delta\mathbf{b}_i^g))\right) \\ &= \text{Log}\left(\text{Exp}(\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}(\delta\mathbf{b}_i^g)) \cdot \text{Exp}\left(-\text{Exp}(\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}(\delta\mathbf{b}_i^g))^\top \mathbf{J}_r^b \frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g} \delta\tilde{\mathbf{b}}_i^g\right)\right) \\ &= \mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}(\delta\mathbf{b}_i^g) - \mathbf{J}_r^{-1}(\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}(\delta\mathbf{b}_i^g)) \text{Exp}(\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}(\delta\mathbf{b}_i^g))^\top \mathbf{J}_r^b \frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g} \delta\tilde{\mathbf{b}}_i^g\end{aligned}\tag{79}$$

$$- E \doteq \text{Exp}\left(\frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g} \delta\mathbf{b}_i^g\right)$$

$$- \mathbf{J}_r^b = \mathbf{J}_r \left(\frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g} \delta\mathbf{b}_i^g\right)$$

지금까지 구한 자코비안들을 한 번에 정리하면 다음과 같다.

$\frac{\partial\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}}{\partial\delta\phi_i} = -\mathbf{J}_r^{-1}(\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}}(\mathbf{R}_i)) \mathbf{R}_j^\top \mathbf{R}_i$	$\frac{\partial\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}}{\partial\delta\phi_j} = 0$	(80)
$\frac{\partial\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}}{\partial\delta\mathbf{p}_i} = 0$	$\frac{\partial\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}}{\partial\delta\mathbf{p}_j} = \mathbf{J}_r^{-1}(\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}}(\mathbf{R}_j))$	
$\frac{\partial\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}}{\partial\delta\mathbf{v}_i} = 0$	$\frac{\partial\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}}{\partial\delta\mathbf{v}_j} = 0$	
$\frac{\partial\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}}{\partial\delta\tilde{\mathbf{b}}_i^a} = 0$	$\frac{\partial\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}}{\partial\delta\tilde{\mathbf{b}}_i^g} = -\mathbf{J}_r^{-1}\left(\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}}(\delta\mathbf{b}_i^g)\right) \text{Exp}\left(\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}}(\delta\mathbf{b}_i^g)\right)^\top \mathbf{J}_r^b \frac{\partial\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}$	

A.4 Structureless vision factors: null space projection

A.5 Rotation rate integration using euler angles

이번 섹션에서는 오일러 각 파라미터화로 인해 IMU 각속도 측정값을 적분하는 방법에 대해 설명한다. 시간 k 의 각속도 측정값을 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k$, 그에 대응하는 노이즈를 $\boldsymbol{\eta}_k^g$ 라고 하자. 또한 시간 k 의 오일러 각 벡터를 $\boldsymbol{\theta}_k \in \mathbb{R}^3$ 라고 하면 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k$ 를 적분하여 다음 스텝의 오일러 각 $\boldsymbol{\theta}_{k+1}$ 을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\boldsymbol{\theta}_{k+1} = \boldsymbol{\theta}_k + [E'(\boldsymbol{\theta}_k)]^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \boldsymbol{\eta}_k^g)\Delta t\tag{81}$$

- $E'(\theta_k)$: "**conjugate 오일러 각속도 행렬**"이라고 부르며 오일러 각속도와 몸체(body)의 각속도를 연결하는 행렬이다

$E'(\theta_k)$ 는 몸체 각속도 \rightarrow 오일러 각속도로 변환하는 행렬이므로 그 역행렬로 각속도를 적분하여 오일러 각을 업데이트한다. θ_{k+1} 의 공분산은 1차 선형화로 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\Sigma_{k+1}^{\text{Euler}} = \mathbf{A}_k \Sigma_k^{\text{Euler}} \mathbf{A}_k^T + \mathbf{B}_k \Sigma_{\eta} \mathbf{B}_k^T \quad (82)$$

- $\mathbf{A}_k \doteq \mathbf{I}_{3 \times 3} + \frac{\partial [E'(\theta_k)]^{-1}}{\partial \theta_k} \Delta t$
- $\mathbf{B}_k \doteq -[E'(\theta_k)]^{-1} \Delta t$
- Σ_{η} : 관측 노이즈 η_k^{gd} 의 공분산

일반적인 공분산의 전파 공식을 사용하면 위와 같은 식이 나온다. 단, 오일러 각은 짐벌락이 있을 수 있으니 큰 회전에는 SO(3) 기반 적분을 쓰는 것이 보통 더 안정적이다

B References

- [1] Forster, Christian, et al. "On-manifold preintegration for real-time visual-inertial odometry." IEEE Transactions on Robotics 33.1 (2016): 1-21.

C Revision log

- 1st: 2024-11-27
- 2nd: 2024-11-30
- 3rd: 2025-07-25 : Preintegrated IMU measurements 섹션 작성
- 4th: 2025-07-26 : Bias model 섹션까지 작성
- 5th: 2025-07-27 : Preliminaries 섹션 작성
- 6th: 2025-07-28 : Appendix 작성