

# Notes on Multiple View Geometry in Computer Vision

Gyubeom Edward Im\*  
(Orig. by Richard Hartley and Andrew Zisserman)

March 23, 2024

## Contents

<b>1 Projective Space</b>	<b>6</b>
<b>2 Projective Geometry and Transformations in 2D</b>	<b>6</b>
The 2D projective plane . . . . .	6
Points and lines . . . . .	7
Homogeneous representation of line . . . . .	7
Homogeneous representation of points . . . . .	7
Degree of freedom (dof) . . . . .	8
Intersection of lines . . . . .	8
Line joining points . . . . .	9
Ideal points and the line at infinity . . . . .	9
Intersection of parallel lines . . . . .	9
Ideal points and the line at infinity . . . . .	10
A model for the projective plane . . . . .	10
Duality . . . . .	10
Conics and dual conics . . . . .	11
Five points define a conic . . . . .	11
Tangent lines to conics . . . . .	12
Dual conics . . . . .	12
Proof . . . . .	12
Projective transformations . . . . .	13
A hierarchy of transformations . . . . .	13
Class 1: Isometries . . . . .	13
Class 2: Similarity transformations . . . . .	13
Class 3: Affine transformations . . . . .	13
Class 4: Projective transformations . . . . .	14
Decomposition of a projective transformation . . . . .	14
Recovery of affine and metric properties from images . . . . .	14
The line at infinity . . . . .	15
Recovery of affine properties from images . . . . .	15
Recovery of metric properties from images . . . . .	16
<b>3 Camera Models</b>	<b>20</b>
Finite cameras . . . . .	20
The basic pinhole model . . . . .	20
Central projection using homogeneous coordinates . . . . .	21
Principal point offset . . . . .	21
Camera rotation and translation . . . . .	22
CCD cameras . . . . .	23
Finite projective camera . . . . .	23
General projective cameras . . . . .	23

\*blog: alida.tistory.com, email: criterion.im@gmail.com

---

The projective camera . . . . .	24
Camera anatomy . . . . .	24
Camera center . . . . .	24
Column vectors . . . . .	24
Row vectors . . . . .	24
The principal plane . . . . .	25
The principal point . . . . .	25
The principal axis vector . . . . .	26
Action of a projective camera on points . . . . .	26
Forward projection . . . . .	26
Back-projection of points to rays . . . . .	26
Depth of points . . . . .	27
Result 6.1 . . . . .	27
Proof . . . . .	27
Cameras at infinity . . . . .	28
Definition 6.3 . . . . .	28
Affine cameras . . . . .	29
Error in employing an affine camera . . . . .	31
<b>4 Computation of the Camera Matrix <math>\mathbf{P}</math></b> . . . . .	<b>32</b>
Basic equations . . . . .	33
Minimal solution . . . . .	33
Over-determined solution . . . . .	33
Degenerate configurations . . . . .	33
Line correspondences . . . . .	34
Geometric error . . . . .	35
Algorithm 7.1 . . . . .	35
Zhang's method . . . . .	36
Radial distortion . . . . .	37
<b>5 More Single View Geometry</b> . . . . .	<b>38</b>
Camera calibration and the image of the absolute conic . . . . .	38
Result 8.15 . . . . .	38
Result 8.16 . . . . .	39
The image of the absolute conic . . . . .	39
Result 8.17 . . . . .	40
Orthogonality and $\mathbf{w}$ . . . . .	40
Result 8.19 . . . . .	40
Vanishing points and vanishing lines . . . . .	41
Result 8.20 . . . . .	41
Camera rotation from vanishing points . . . . .	41
Vanishing Lines . . . . .	42
Orthogonality relationships amongst vanishing points and lines . . . . .	42
Affine 3D measurements and reconstruction . . . . .	43
Result 8.24 . . . . .	43
Determining camera calibration $\mathbf{K}$ from a single view . . . . .	44
Result 8.26 . . . . .	44
Calibration from three orthogonal vanishing points . . . . .	44
Computation of focal length and principal point using vanishing point and vanishing line . . . . .	45
The calibrating conic . . . . .	45
Result 8.30 . . . . .	46
<b>6 Epipolar Geometry and the Fundamental Matrix</b> . . . . .	<b>47</b>
Epipolar geometry . . . . .	47
The fundamental matrix $\mathbf{F}$ . . . . .	47
Proof . . . . .	47
Geometric derivation . . . . .	48
Algebraic derivation . . . . .	49
Properties of the fundamental matrix . . . . .	49

---

The epipolar line homography . . . . .	50
Result 9.5 . . . . .	50
Fundamental matrices arising from special motions . . . . .	50
Pure translation . . . . .	50
Retrieving the camera matrices . . . . .	51
Projective invariance and canonical cameras . . . . .	51
Result 9.8 . . . . .	51
Proof . . . . .	51
Canonical form of camera matrices . . . . .	51
Result 9.9 . . . . .	52
Projective ambiguity of cameras given $\mathbf{F}$ . . . . .	52
Theorem 9.10 . . . . .	52
Proof . . . . .	52
Canonical cameras given $\mathbf{F}$ . . . . .	53
Result 9.12 . . . . .	53
Result 9.13 . . . . .	53
Result 9.14 . . . . .	54
Result 9.15 . . . . .	54
The essential matrix . . . . .	54
Normalized coordinates . . . . .	54
Definition 9.16. . . . .	55
Properties of the essential matrix . . . . .	55
Result 9.17 . . . . .	55
Proof . . . . .	55
Extraction of cameras from the essential matrix . . . . .	56
Result 9.18 . . . . .	56
Proof . . . . .	57
Result 9.19 . . . . .	58
Geometrical interpretation of the four solutions . . . . .	58
<b>7 3D Reconstruction of Cameras and Structure</b> . . . . .	<b>59</b>
The projective reconstruction theorem . . . . .	59
Theorem 10.1 (Projective reconstruction theorem) . . . . .	59
Proof . . . . .	59
Stratified reconstruction . . . . .	60
The step to affine reconstruction . . . . .	60
The step to metric reconstruction . . . . .	61
Result 10.5 . . . . .	61
Proof . . . . .	62
<b>8 Computation of the Fundamental Matrix <math>\mathbf{F}</math></b> . . . . .	<b>62</b>
Basic equations . . . . .	62
The minimum case - seven point correspondences . . . . .	63
The normalized 8-point algorithm . . . . .	63
Degenerate configurations . . . . .	63
Proof . . . . .	63
The Gold Standard method . . . . .	64
<b>9 Structure Computation</b> . . . . .	<b>65</b>
Problem statement . . . . .	65
Linear triangulation methods . . . . .	66
Inhomogeneous method . . . . .	67
An optimal solution . . . . .	67
Reformulation of the minimization problem . . . . .	67
Details of the minimization . . . . .	67

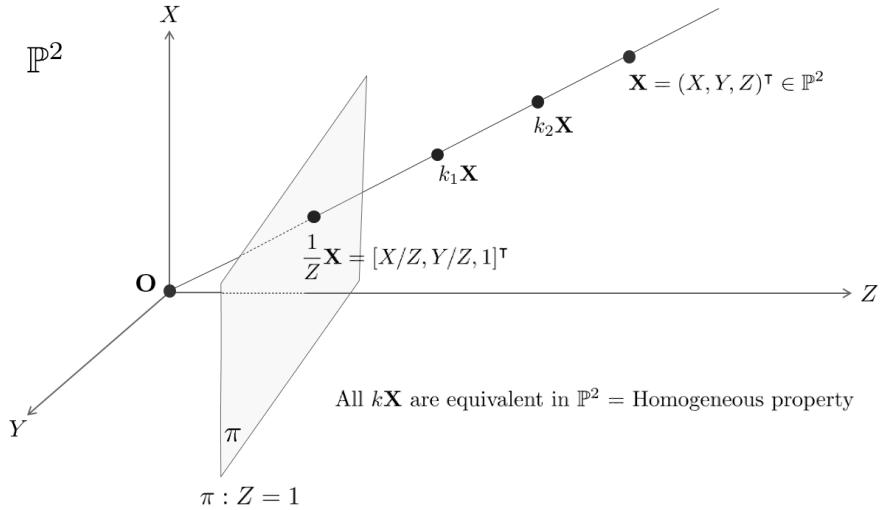
---

<b>10 Scene planes and homographies</b>	<b>69</b>
Homographies given the plane and vice versa . . . . .	69
Result 13.1 . . . . .	69
Proof . . . . .	70
A calibrated stereo rig . . . . .	70
Homographies compatible with epipolar geometry . . . . .	71
Result 13.3 . . . . .	71
Proof . . . . .	71
Corollary . . . . .	72
Proof . . . . .	72
Plane induced homographies given $\mathbf{F}$ and image correspondences . . . . .	72
Three points . . . . .	72
Result 13.6 . . . . .	73
Proof . . . . .	73
A point and line . . . . .	74
Result 13.7 . . . . .	74
Proof . . . . .	74
The homography for a corresponding point and line . . . . .	75
Result 13.8 . . . . .	75
Computing $\mathbf{F}$ given the homography induced by a plane . . . . .	75
The infinite homography $\mathbf{H}_\infty$ . . . . .	76
Definition 13.10 . . . . .	76
Affine and metric reconstruction . . . . .	76
<b>11 Affine Epipolar Geometry</b>	<b>77</b>
Affine epipolar geometry . . . . .	78
Epipolar lines . . . . .	78
The epipoles . . . . .	78
The affine fundamental matrix . . . . .	78
Result 14.1 . . . . .	78
Derivation . . . . .	78
Geometric derivation . . . . .	78
Properties . . . . .	79
The epipoles . . . . .	79
Epipolar lines . . . . .	79
Estimating $\mathbf{F}_A$ from image point correspondences . . . . .	80
Algorithm 14.2 . . . . .	80
<b>12 The Trifocal Tensor</b>	<b>81</b>
The geometric basis for the trifocal tensor . . . . .	81
Incidence relations for lines . . . . .	81
Definition 15.1 . . . . .	82
Homographies induced by a plane . . . . .	82
Result 15.2 . . . . .	82
Point and line incidence relations . . . . .	83
Epipolar lines . . . . .	84
Result 15.3 . . . . .	84
Proof . . . . .	84
Result 15.4 . . . . .	84
Extracting the fundamental matrices . . . . .	84
Retrieving the camera matrices . . . . .	85
The trifocal tensor and tensor notation . . . . .	85
The trilinearities . . . . .	86
Transfer . . . . .	86
Point transfer using fundamental matrices . . . . .	87
Point transfer using the trifocal tensor . . . . .	87
Degenerate configurations . . . . .	88
Line transfer using the trifocal tensor . . . . .	88

---

Degeneracies . . . . .	88
The fundamental matrices for three views . . . . .	88
Definition 15.5 . . . . .	89
Uniqueness of camera matrices given three fundamental matrices . . . . .	89
<b>13 Revision log</b>	<b>89</b>
<b>14 References</b>	<b>89</b>
<b>15 Closure</b>	<b>89</b>

# 1 Projective Space



사영 공간(projective space)  $\mathbb{P}^n$ 는  $\mathbb{R}^{n+1}$  공간 상의 원점을 지나는 직선들의 집합을 의미한다. 따라서 원점을 제외한  $\mathbb{R}^{n+1}$  공간 상의 모든 원소를 포함한다. 엄밀히 말하면 허수를 제외한 실수만 취급하므로  $\mathbb{RP}^n$ 라고 써야하지만 본 포스팅에서는 편의를 위해  $\mathbb{P}^n$ 를 사용한다.

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \quad (1)$$

3차원 공간 상에 점  $\mathbf{X}$ 가 다음과 같이 주어졌다고 하자.

$$\mathbf{X} = [X, Y, Z] \in \mathbb{P}^2 \quad (2)$$

**X의 모든 원소에 임의의 값 k를 곱해도 이는 원점과 X를 잇는 직선 위에 존재하며 이러한 성질을 homogeneous 성질이라고 한다.** 만약  $k = 1/Z$ 를 곱해주면 3차원 점을  $Z = 1$  평면에 프로젝션한 것과 기하학적으로 동일한 의미를 지닌다.

$$[X, Y, Z] \rightarrow [X/Z, Y/Z, 1] \quad (3)$$

따라서  $\mathbb{P}^2$ 를 사용하면 3차원 공간 상의 점들을 특정 평면에 프로젝션하여  $\mathbb{R}^2$ 와 동일하게 2차원 공간 상의 점, 직선, 곡면 등을 표현할 수 있고 여기에 추가적으로 무한대 점(point at infinity)  $x_\infty$ 과 무한대 직선(line at infinity)  $l_\infty$ 를 표현할 수 있는 표현의 이점을 지닌다. 또한 점과 직선을 동일한 3차원 벡터로 연산할 수 있는 연산의 이점을 지닌다. 자세한 내용은 추후 섹션에서 설명한다.

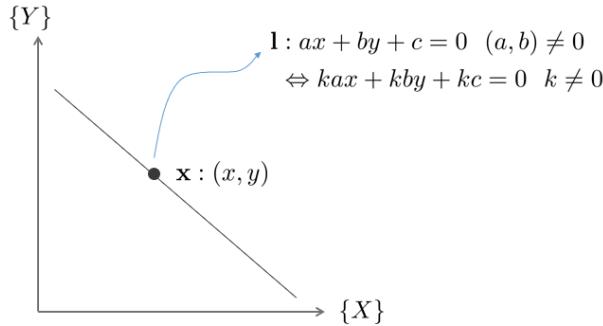
# 2 Projective Geometry and Transformations in 2D

## The 2D projective plane

일반적으로 평면 위의 점  $\mathbf{x}$ 는  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ 와 같이 표현한다.  $\mathbb{R}^2$ 가 벡터공간(vector space)이라고 하면  $\mathbf{x}$ 는 하나의 벡터로 나타낼 수 있다. 또한, 두 점  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ 을 포함하는 직선  $l$ 은 두 벡터를 뺌으로써 표현할 수 있다. 해당 섹션에서는 평면 위의 점과 직선에 대해 하나의 동일한 벡터로 표현할 수 있게 해주는 Homogeneous Notation에 대해 설명한다.

## Points and lines

### Homogeneous representation of line



임의의 직선  $\mathbf{l}$ 은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{l}: ax + by + c = 0 \quad (a, b) \neq 0 \quad (4)$$

직선  $\mathbf{l}$  위에 임의의 한 점  $\mathbf{x} = (x, y, 1)$ 이 존재하면 직선  $ax + by + c = 0$  공식에 따라 직선  $\mathbf{l}$ 은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{l}: (a, b, c) \quad (5)$$

이 때,  $(a, b, c)$ 는 직선  $\mathbf{l}$ 을 유일하게 표현하지 않는다.  $(ka, kb, kc)$ 와 같이 0이 아닌 임의의 상수  $k$ 를 곱해도 동일한 직선  $\mathbf{l}$ 을 표현할 수 있다.

$$\mathbf{l}: (ka, kb, kc) \quad (6)$$

따라서 평면 위의 직선  $\mathbf{l}$ 은 스케일 값에 상관없이 모두 같은 직선을 의미한다. 이러한 동치관계(equivalent)에 있는 모든 벡터를 Homogeneous 벡터라고 한다.  $\mathbb{R}^3$  공간에서 동치관계에 있는 모든 벡터들의 집합을 사영공간(projective space)  $\mathbb{P}^2$ 이라고 한다.

### Homogeneous representation of points

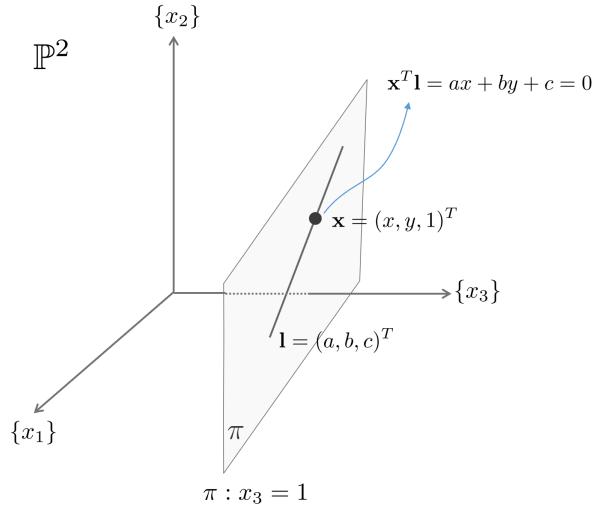
직선  $\mathbf{l} = (a, b, c)^\top$ 과 직선 위의 한 점  $\mathbf{x} = (x, y)^\top$  사이에는 다음 공식이 성립한다.

$$ax + by + c = 0 \quad (7)$$

이는 두 벡터  $\mathbf{l}$ 과  $\mathbf{x}$ 의 내적으로 표현할 수 있다.

$$(x \ y \ 1) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (x \ y \ 1) \mathbf{l} = 0 \quad (8)$$

이는 직선 위의 한 점  $\mathbf{x} = (x, y)$  좌표 맨 끝에 1을 추가하여 직선과 내적한 것으로 볼 수 있다. 직선  $\mathbf{l}$ 는 스케일 값에 상관없이 하나의 직선을 표현할 수 있으므로  $(x, y, 1)\mathbf{l} = 0$ 이 성립한다는 전제하에 모든  $k$ 값에 대해  $(kx, ky, k)\mathbf{l} = 0$  또한 성립한다. 따라서 임의의 상수  $k$ 에 대해서  $(kx, ky, k)$ 는  $\mathbb{R}^2$  공간에서 한 점  $\mathbf{x} = (x, y)$ 를 의미하므로 직선과 동일하게 점 또한 Homogeneous 벡터로 표현할 수 있다. 이를 일반화하여 표현하면 임의의 점  $\mathbf{x} = (x, y, z)^\top$ 는  $\mathbb{R}^2$  공간 상의 한 점  $(x/z, y/z)$ 을 표현한다.



따라서  $\mathbb{P}^2$  공간 상에서 임의의 한 점  $\mathbf{x}$ 가 직선  $\mathbf{l}$  위에 존재할 경우

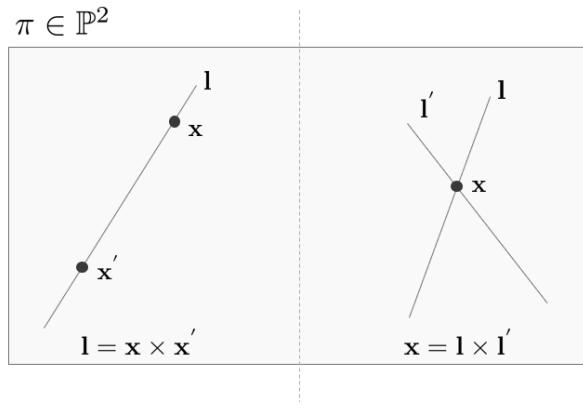
$$\begin{aligned}\mathbf{x}^T \mathbf{l} &= [x \ y \ 1] \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \\ &= ax + by + c \\ &= 0 \\ \therefore \mathbf{x}^T \mathbf{l} &= 0\end{aligned}\tag{9}$$

공식이 성립한다.

### Degree of freedom (dof)

$\mathbb{P}^2$  공간에서 하나의 점이 유일하게 결정되기 위해서는 반드시 2개의 값  $(x, y)$ 가 주어져야 한다. 직선을 유일하게 결정하기 위해서는 두 개의 독립적인  $\{a : b : c\}$  비율이 주어져야 한다. 이와 같이  $\mathbb{P}^2$  공간에서 점과 직선은 2자유도를 가진다.

### Intersection of lines



$\mathbb{P}^2$  공간 상의 두 개의 직선  $\mathbf{l}, \mathbf{l}'$ 이 주어졌을 때 두 직선의 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^T \mathbf{l} &= 0 \\ \mathbf{x}^T \mathbf{l}' &= 0\end{aligned}\tag{10}$$

이 때, 교차점  $\mathbf{x}$ 는 스케일 값에 관계없이 하나의 점을 의미하므로 두 직선  $\mathbf{l}, \mathbf{l}'$ 의 Cross Product의 배수로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{x} = \mathbf{l} \times \mathbf{l}'\tag{11}$$

예를 들어,  $\mathbb{P}^2$  공간에  $x = 1$ 인 직선과  $y = 1$ 인 직선이 존재하면 두 직선은  $(1, 1)$ 에서 교점을 가진다. 이를 위 공식을 이용해서 구해보면 직선  $x = 1$ 은  $-x + 1 = 0 \Rightarrow (-1, 0, 1)^\top$ 로 표현할 수 있고 직선  $y = 1$ 은  $-y + 1 = 0 \Rightarrow (0, -1, 1)^\top$ 로 표현할 수 있으므로

$$\mathbf{l} = \mathbf{x} \times \mathbf{l}' = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

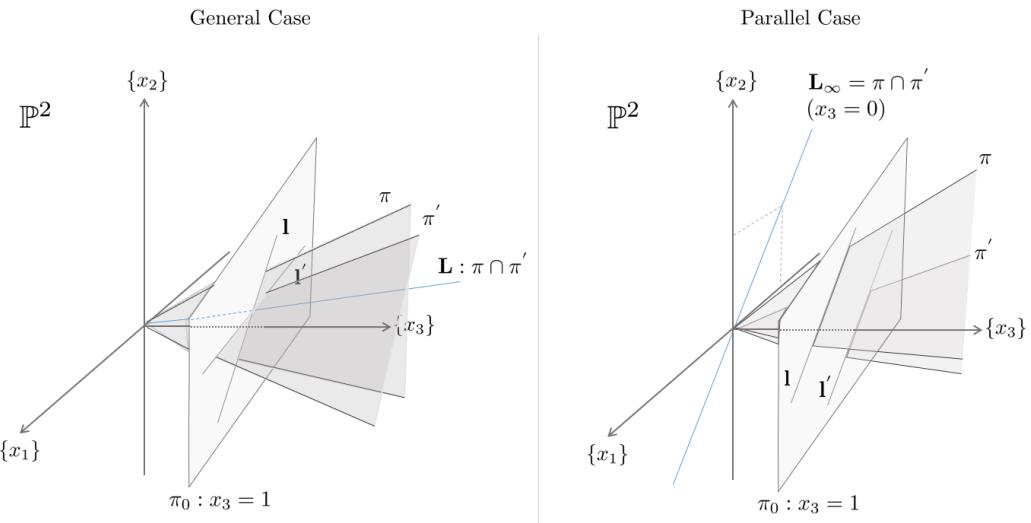
가 성립한다.  $(1, 1, 1)^\top$ 는  $\mathbb{R}^2$  공간에서  $(1, 1)$ 을 의미한다.

### Line joining points

두 직선의 교점을 구하는 공식과 유사하게  $\mathbb{P}^2$  공간에서 두 점  $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ 가 주어졌을 때 두 점을 지나는 직선  $\mathbf{l}$ 은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{l} = \mathbf{x} \times \mathbf{x}' \quad (13)$$

### Ideal points and the line at infinity



### Intersection of parallel lines

만약 두 직선  $\mathbf{l}, \mathbf{l}'$ 이 평행한 경우 두 직선의 교차점은  $\mathbb{R}^2$  공간에서는 만나지 않지만  $\mathbb{P}^2$  공간에서는 만난다.

$$\mathbb{P}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \mathbf{l}_\infty \quad (14)$$

평행한 두 직선  $\mathbf{l}, \mathbf{l}'$ 은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{l} &: (a, b, c)^\top \\ \mathbf{l}' &: (a, b, c')^\top \end{aligned} \quad (15)$$

평행한 두 직선은 무한대에 위치한 점  $\mathbf{x}_\infty$ 에서 교차하므로

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\infty &= \mathbf{l} \times \mathbf{l}' \\ &= (c' - c) \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

공식이 성립한다. 이러한 무한대 점  $\mathbf{x}_\infty$ 를  $\mathbb{R}^2$  공간으로 변환하면  $(b/0, -a/0)$ 이 되어 유효하지 않는 점으로 변환된다. 따라서  $\mathbb{P}^2$  공간에서 무한대 점  $\mathbf{x}_\infty = (x, y, 0)^\top$ 는  $\mathbb{R}^2$  공간으로 변환되지 않는다. 이를 통해 Euclidean 공간에서 평행한 두 직선은 만나지 않지만 사영 공간(projective space)에서는 무한대에서 만난다는 것을 알 수 있다.

예를 들어  $\mathbb{P}^2$  공간에 평행한 두 직선  $x = 1$ 과  $x = 2$ 가 주어지면 두 직선은 무한대에서 교차한다. 이를 Homogeneous Notation으로 표현하면  $-x + 1 = 0 \Rightarrow (-1, 0, 1)^\top$  그리고  $-x + 2 = 0 \Rightarrow (-1, 0, 2)^\top$ 으로

$$\mathbf{x}_\infty = \mathbf{l} \times \mathbf{l}' = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

이 된다. 이 때,  $\mathbf{x}_\infty$ 는  $y$ 축 방향의 무한대 점을 의미한다.

### Ideal points and the line at infinity

Homogeneous 벡터  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top$ 는  $x_3 \neq 0$ 일 때  $\mathbb{R}^2$  공간 상의 한 점과 대응된다. 그러나  $x_3 = 0$ 이면 해당 점은  $\mathbb{R}^2$  공간과 대응되지 않고  $\mathbb{P}^2$  공간에만 존재하는데 이를 Ideal Point 또는 무한대 점(point at infinity)라고 부른다. 무한대 점은

$$\mathbf{x}_\infty = (x_1 \ x_2 \ 0)^\top \quad (18)$$

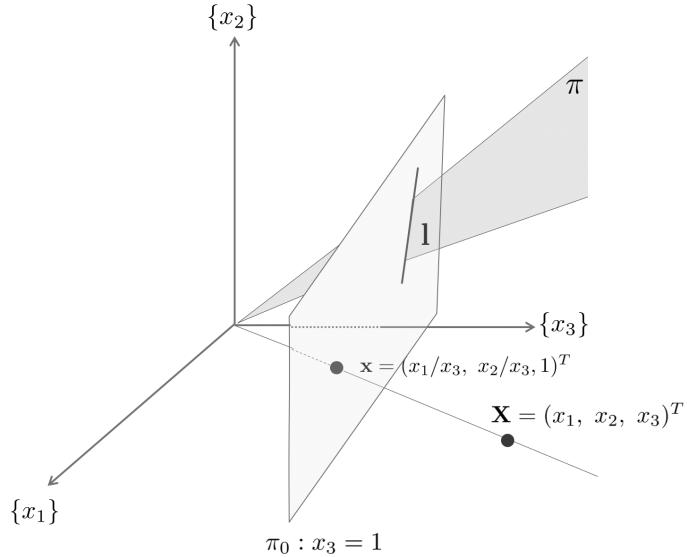
와 같은 형태를 갖는다. 이러한 무한대 점들은 특정한 직선 위에 존재하게 되는데 이러한 직선을 무한대 직선(line at infinity)이라고 한다.

$$\mathbf{l}_\infty = (0 \ 0 \ 1)^\top \quad (19)$$

따라서  $\mathbf{x}_\infty^\top \mathbf{l}_\infty = (x_1 \ x_2 \ 0) (0 \ 0 \ 1)^\top = 0$ 이 성립한다.

이전 섹션에서 설명한 것과 같이 두 평행한 직선  $\mathbf{l} = (a, b, c)^\top$ 과  $\mathbf{l}'_\infty = (a, b, c')^\top$ 는 무한대 점  $\mathbf{x}_\infty = (b, -a, 0)^\top$ 에서 교차한다는 것을 알 수 있다. 이를 통해  $\mathbb{R}^2$  공간에서는 평행한 직선들은 서로 교차하지 않지만  $\mathbb{P}^2$  공간에서는 서로 다른 두 직선은 반드시 한 점에서 교차한다는 것을 알 수 있다.

### A model for the projective plane



기하학적으로 봤을 때,  $\mathbb{P}^2$ 는 3차원 공간  $\mathbb{R}^3$ 에서 원점을 지나는 모든 직선들의 집합을 의미한다.  $\mathbb{P}^2$  상의 모든 벡터를  $k(x_1, x_2, x_3)^\top$ 라고 했을 때  $k$  값에 따라 한 점  $(x_1, x_2, x_3)^\top$ 의 위치가 결정된다.  $k$ 는 실수이므로  $k = 0$ 인 경우 원점을 의미하고  $k \neq 0$ 인 경우 무수한 점들의 집합인 직선이 된다. 반대로, 이러한  $\mathbb{R}^3$  공간 상의 원점을 통과하는 한 직선은  $\mathbb{P}^2$  공간 상의 한 점으로 볼 수 있다. 이를 확장하면  $\mathbb{P}^2$  공간 상의 직선  $\mathbf{l}$ 은  $\mathbb{R}^3$  공간 상의 원점을 포함하는 평면  $\pi$ 에 대응한다.

$\mathbb{P}^2$  공간에서는 스케일 값에 관계없이 한 점을 유일하게 정의할 수 있으므로 마지막 항  $x_3$ 로 좌표값을 나눈  $(x_1/x_3, x_2/x_3, 1)$ 을 일반적으로 한 점을 표현하는 대표값으로 간주한다. 따라서  $\mathbb{R}^3$  공간 상의 원점을 지나는 직선과  $x_3 = 1$ 인 평면이 교차하는 점이 곧  $\mathbb{P}^2$  공간 상의 한 점이 된다.

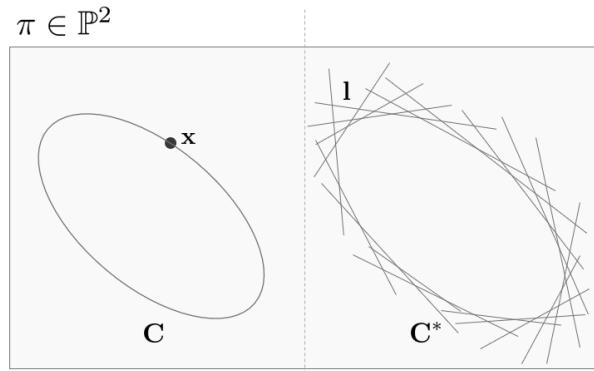
### Duality

$\mathbb{P}^2$  공간에서는 점과 직선이 대칭성(duality)을 가진다. 예를 들어 직선  $\mathbf{l}$  위의 한 점  $\mathbf{x}$ 은  $\mathbf{x}^\top \mathbf{l} = 0$  또는  $\mathbf{l}^\top \mathbf{x} = 0$ 과 같이 두 가지 방법으로 표현할 수 있다. 또한, 두 직선  $\mathbf{l}, \mathbf{l}'$ 이 교차하는 한 점은  $\mathbf{x} = \mathbf{l} \times \mathbf{l}'$ 이고 두 점

$\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ 을 통과하는 직선  $l$ 은  $l = \mathbf{x} \times \mathbf{x}'$ 으로 표현할 수 있는데 이는 기본적으로 점과 직선의 위치가 바뀌었을 뿐 동일한 공식을 사용한다.

이와 같이  $\mathbb{P}^2$  공간에서는 점과 직선이 동일한 공식에 대해 위치를 바꾸어도 성립하는 대칭성을 가진다. 즉, 두 점을 통과하는 직선의 공식은 두 직선이 교차하는 한 점의 공식과 대칭이다.

## Conics and dual conics



Conic이란 평면에서 이차식으로 정의된 곡선을 의미한다. 일반적인 공식으로는

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (20)$$

과 같으며 계수 값에 따라 원, 타원, 쌍곡선, 포물선 등 다양한 곡선 형태로 표현될 수 있다. Conic을 Homogeneous Form으로 나타내면

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dxz + eyz + fz^2 = 0 \quad (21)$$

과 같고 이를 행렬 형태로 정리하면

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad (22)$$

꼴로 쓸 수 있으며 이 때 대칭행렬  $\begin{pmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{pmatrix}$ 를 Conic  $\mathbf{C}$ 라고 한다.

### Five points define a conic

Conic  $\mathbf{C}$ 가 유일하게 결정되기 위해서는 다섯개의 점이 필요하다. 하나의 점에 대한 Conic 방정식은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} ax^2 + bxy + cy^2 + dxz + eyz + fz^2 &= 0 \\ \Rightarrow (x_i^2 &\quad x_iy_i \quad y_i^2 \quad x_i \quad y_i \quad 1) \mathbf{c} = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

이 때,  $\mathbf{c} = (a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f) \in \mathbb{R}^6$ 인 벡터를 의미한다.  $\mathbf{c}$ 는 5 자유도를 가지므로

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{c} = 0 \quad (24)$$

위 식과 같이 총 5개의 점을 사용하면  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{5 \times 6}$  행렬의 Null Space 벡터가 유일한  $\mathbf{c}$ 의 해가 되고 Conic을 유일하게 결정한다.

## Tangent lines to conics

Conic  $\mathbf{C}$  위의 한 점  $\mathbf{x}$ 에서 접선  $\mathbf{l}$ 은

$$\mathbf{l} = \mathbf{Cx} \quad (25)$$

와 같이 쓸 수 있다.

임의의 두 직선  $\mathbf{l}, \mathbf{m}$ 을 포함하는 Conic  $\mathbf{C}$ 는

$$\mathbf{C} = \mathbf{lm}^\top + \mathbf{ml}^\top \quad (26)$$

과 같이 쓸 수 있다.

## Dual conics

사영 공간(projective space)  $\mathbb{P}^n$ 은  $\mathbb{R}^{n+1}$  공간 상의 원점을 지나는 직선들의 집합을 의미한다. 이와 대칭을 이루는 Dual Projective Space  $(\mathbb{P}^n)^\vee$ 는  $\mathbb{R}^n$  공간 상 n차원 부분 선형공간들의 집합을 의미한다. n차원 부분 선형공간  $\mathbf{H}$ 는

$$\mathbf{H} = \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x_i = 0 \mid a_i \neq 0 \text{ for some } i \right\}. \quad (27)$$

이 때  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{P}^n$ 을 하나의 사영 공간(projective space)로 생각할 수 있고 하나의 Dual projective space는 하나의 사영 공간과 대칭 관계를 가진다.

$\mathbb{P}^2$  상의 Conic  $\mathbf{C}$ 가 주어졌을 때,  $\mathbf{C}$ 의 Dual Conic  $\mathbf{C}^*$ 은  $(\mathbb{P}^2)^\vee$  공간 상의 Conic을 의미하며  $\mathbf{C}^*$ 은 Conic  $\mathbf{C}$ 의 접선에 대한 정보를 가지고 있다.  $(\mathbb{P}^2)^\vee$ 는  $\mathbb{P}^2$  상의 직선을 파라미터화하여 나타낼 수 있다.  $\hat{\mathbf{C}}^*$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{C}_{ij}^* = (-1)^{i+j} \det(\hat{\mathbf{C}}_{ij}) \quad (28)$$

여기서  $\hat{\mathbf{C}}_{ij}$ 는  $\mathbf{C}_{ij}$ 에서 i번째 행, j번째 열을 제거한 행렬을 의미한다.

임의의 직선  $\mathbf{l}$ 이 주어졌을 때  $\mathbf{l}^\top \mathbf{C} \mathbf{l} = 0$  Conic  $\mathbf{C}$ 에 접하는 필요충분조건은 다음과 같다.

$$\mathbf{l}^\top \mathbf{C}^* \mathbf{l} = 0 \quad (29)$$

## Proof

$(\Rightarrow)$  Conic  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 의 rank가 3이고 non-singular하다고 가정하면  $\mathbf{C}^* = \det(\mathbf{C}^{-1})$ 와 같이 나타낼 수 있다.  $\mathbf{C}$  위의 한 점  $\mathbf{x} \in \mathbf{C}$ 가 주어졌을 때  $\mathbf{x}$ 에서 접선  $\mathbf{l}$ 은  $\mathbf{l} = \mathbf{Cx}$ 로 나타낼 수 있다. 이를 위 식에 대입하면

$$\begin{aligned} \mathbf{l}^\top \mathbf{C}^* \mathbf{l} &= (\mathbf{Cx})^\top \mathbf{C}^* \mathbf{Cx} \\ &= \mathbf{x}^\top \mathbf{C}^\top \mathbf{C}^* \mathbf{Cx} \\ &= \det(\mathbf{x}^\top \mathbf{C}^\top \mathbf{x}) \quad \because \mathbf{C}^* = \det(\mathbf{C}^{-1}) \\ &= 0 \quad \because \mathbf{x} \in \mathbf{C}, (\mathbf{x}^\top \mathbf{C} \mathbf{x})^\top = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

$(\Leftarrow)$  직선  $\mathbf{l}$ 과 Dual Conic  $\mathbf{C}^*$ 가  $\mathbf{l}^\top \mathbf{C}^* \mathbf{l} = 0$ 을 만족할 때  $\mathbf{l}$ 과  $\mathbf{C}^*$ 가 한 점  $\mathbf{x}$ 에서 만난다는 것을 증명하면 된다. 이 때  $\mathbf{l} = \mathbf{Cx}$  공식이 성립한다.

$\mathbf{C}$ 는 non-singular하기 때문에 역행렬이 존재하므로  $\mathbf{x} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{l}$ 과 같이 나타낼 수 있다. 따라서  $\mathbf{x}^\top \mathbf{l}$ 은

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^\top \mathbf{l} &= (\mathbf{C}^{-1}\mathbf{l})^\top \mathbf{l} \\ &= \mathbf{l}^\top \mathbf{C}^{-\top} \mathbf{l} = 0 \\ &\quad (\mathbf{C}^* \sim \mathbf{C}^{-1} \text{ by assumption.}) \end{aligned} \quad (31)$$

과 같고  $\mathbf{x}^\top \mathbf{C} \mathbf{x}$ 는

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^\top \mathbf{C} \mathbf{x} &= (\mathbf{C}^{-1}\mathbf{l})^\top \mathbf{C} \mathbf{C}^{-1}\mathbf{l} \\ &= \mathbf{l}^\top \mathbf{C}^{-\top} \mathbf{C} \mathbf{C}^{-1}\mathbf{l} \\ &= \mathbf{l}^\top \mathbf{C}^{-1}\mathbf{l} = 0 \\ &\quad (\mathbf{C}^{-\top} = \mathbf{C}^{-1} \text{ } \mathbf{C} \text{ is symmetric.}) \end{aligned} \quad (32)$$

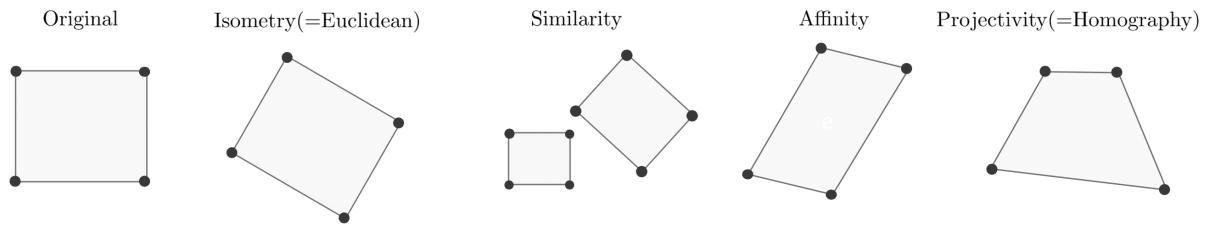
공식이 성립함에 따라  $\mathbf{x}$ 는  $\mathbf{l}$ 과  $\mathbf{C}$ 의 교점임이 증명된다.

$$\{\mathbf{x}\} = \mathbf{l} \cap \mathbf{C} \quad (33)$$

## Projective transformations

$\mathbb{P}^2$ 의 Projective Transformation은 non-singular인  $3 \times 3$  행렬로 정의되는  $\mathbb{P}^2 \Rightarrow \mathbb{P}^2$  사상을 의미하며 직선을 직선으로 보내는 성질을 가진다. Projective Transformation은 Collineation, Projectivity 또는 Homography라고도 불린다.

## A hierarchy of transformations



Projective 변환은 변환 전과 후 사이에 어떤 성질을 보존하느냐에 따라 여러 종류의 변환 행렬이 존재한다.

### Class 1: Isometries

물체가 변환 전과 후 사이에 물체의 크기가 동일한 경우 해당 변환을 Isometry 변환이라고 부른다.

$$\mathbf{H}_{iso} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

이 때  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 는 2차원 물체의 회전과 반사(reflection)을 포함한 행렬이며  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2$ 는 2차원 물체의 이동 벡터이다.

### Class 2: Similarity transformations

Isometry 변환에 스케일을 의미하는  $s$ 가 추가된 변환을 Similarity 변환이라고 하며 물체의 이동 및 회전에 추가적으로 스케일까지 같이 변환하는 성질을 가진다. 이 때 기존의  $\mathbf{A}$  행렬에서 Reflection의 성질을 제거한  $\mathbf{R}$  행렬을 사용한다.

$$\mathbf{H}_S = \begin{bmatrix} s\mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Similarity 변환은 물체의 각도와 길이의 비율을 보존되지만 스케일은 보존되지 않는다. 두 물체가 Similarity 변환까지 동일하다는 의미는(=up to scale) 두 물체의 형태는 동일하지만 스케일에 차이가 있다는 의미이다.

### Class 3: Affine transformations

Affine 변환은 Isometry 변환에서 행렬  $\mathbf{A}$ 의 아무 제약조건이 없는 변환행렬을 의미한다. 변환 후 물체는 일반적으로 변환 전과 다른 형태를 가진다.

$$\mathbf{H}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$\mathbf{H}_A$ 는 6자유도를 가지므로 세 개의 대응점 쌍으로부터  $\mathbf{H}_A$ 를 유일하게 결정할 수 있다.

Affine 변환은 물체의 길이 비율을 보존하며 또한 평행한 직선을 보존하는 성질을 가진다. 따라서 무한대 직선(line at infinity)  $\mathbf{l}_\infty$ 를 Affine 변환해도 여전히  $\mathbf{l}_\infty$ 가 된다.

$$\mathbf{H}_A(\mathbf{l}_\infty) = \mathbf{l}_\infty \quad (37)$$

#### Class 4: Projective transformations

마지막으로 Projective 변환은 변환행렬의 마지막 행이  $(0, 0, 1)$ 이 아닌 임의의 형태를 가지는 변환행렬을 의미한다. Projective 변환은 직선을 직선으로 사상한다는 성질 외에는 이전에 설명한 모든 성질들을 보존하지 않는다는 특징이 있다. 평행한 직선 또한 Projective 변환을 수행하면 평행하지 않게되며 물체의 길이비 또한 달라지게 된다.

$$\mathbf{H}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{t} \\ \mathbf{v}^\top & v \end{bmatrix} \quad (38)$$

이 때  $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2]^\top$ 는 임의의 2차원 벡터를 의미하며  $v$  또한 임의의 스칼라 값을 의미한다. Projective 변환행렬  $\mathbf{H}_p$ 는 8자유도를 가지므로 일반적으로 4개의 대응점 쌍을 통해  $\mathbf{H}_p$ 을 유일하게 결정할 수 있다.

#### Decomposition of a projective transformation

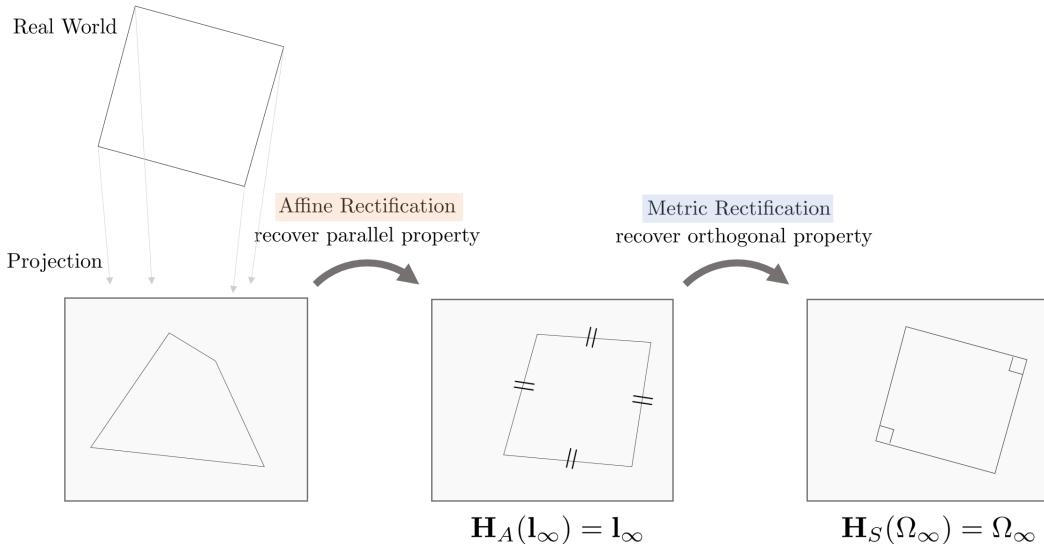
앞서 설명한 변환행렬의 계층구조에 따라 Projective 변환행렬은 다른 변환행렬들의 곱으로 표현할 수 있다. 반대로 말하면, **Projective 변환은 다른 변환행렬들로 분해가 가능하다.** 임의의 Projective 변환  $\mathbf{H}_p$ 가 주어졌을 때

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_p &= \mathbf{H}_S \mathbf{H}_A \mathbf{H}_P \\ &= \begin{bmatrix} s\mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{v}^\top & v \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{t} \\ \mathbf{v}^\top & v \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (39)$$

와 같이 Projective 변환  $\mathbf{H}_p$ 는 Similarity 변환  $\mathbf{H}_S$ 과 Affine 변환  $\mathbf{H}_A$  그리고 나머지 변환  $\mathbf{H}_P$ 의 곱으로 분해가 가능하다. 이 때,  $\mathbf{A} = s\mathbf{R}\mathbf{K} + \mathbf{t}\mathbf{v}^\top$ 이고  $\mathbf{K}$ 는  $\det(\mathbf{K}) = 1$ 로 정규화된 상삼각행렬(upper-triangle) 행렬을 의미한다. 단, 위와 같은 분해는  $v \neq 0$ 일 때만 가능하며  $s > 0$ 인 경우 분해가 유일하게 결정된다.

$\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{H}_P^{-1} \mathbf{H}_A^{-1} \mathbf{H}_S^{-1} = \mathbf{H}'_P \mathbf{H}'_A \mathbf{H}'_S$  또한  $\mathbf{H}$ 의 반대 방향으로 homography 연산을 의미한다. 이 때, 각 행렬의 디테일한  $\mathbf{R}, \mathbf{t}, \mathbf{K}, \mathbf{v}, s, v$  값은  $\mathbf{H}$ 와  $\mathbf{H}^{-1}$ 이 서로 다르다.

#### Recovery of affine and metric properties from images



임의의 이미지가 주어졌을 때 실제 월드 상에서 평행한 선들과 직교한 선들을 사용하여 이미지의 Affine 성질과 Metric 성질을 복원할 수 있다.

## The line at infinity

Affine 변환은 평행한 선들이 보존되는 Affine 성질을 보존하는 것을 의미하며 무한대 직선(line at infinity)  $\mathbf{l}_\infty = [0 \ 0 \ 1]^\top$ 을 Affine 변환해도 여전히 무한대 직선의 성질을 유지하는 특징이 있다.

$$\mathbf{H}_A(\mathbf{l}_\infty) = \mathbf{H}_A^{-\top} \mathbf{l}_\infty = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-\top} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-\top} & 0 \\ -\mathbf{t}^\top \mathbf{A}^{-\top} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{l}'_\infty \quad (40)$$

위와 같이  $\mathbf{l}_\infty$ 를 Affine 변환해도 여전히 무한대에 위치한다.

## Recovery of affine properties from images

affine 성질을 복원한다는 의미는 실제 세계에서 평행하지만 이미지 평면상에서 projective 변환에 의해 평행하지 않은 두 직선을 다시 복원한다는 의미이다. 임의의 homography  $\mathbf{H}$ 가 affine 성질을 보존한다는 의미는 곧 무한대 직선  $\mathbf{l}_\infty$ 를  $\mathbf{H}$  변환해도 무한대에 위치한 직선이 된다는 의미이다. 즉, 무한대 직선 위의 한 점  $\mathbf{x}_\infty$  점이 있다고 했을 때 다음이 성립한다.

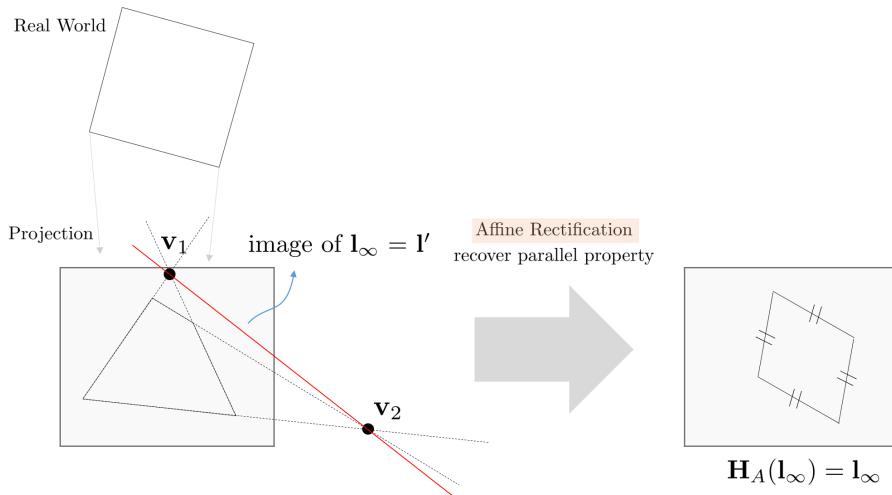
$$\mathbf{H}(\mathbf{x}_\infty) = \mathbf{H}\mathbf{x}_\infty = \mathbf{x}'_\infty \quad (41)$$

무한대 직선 위의 한 점  $\mathbf{x}_\infty$ 는  $\mathbf{x}_\infty = (x, y, 0)^\top$ 과 같이 마지막 항이 0인 특징이 있으므로 임의의 homography  $\mathbf{H}$ 는

$$\mathbf{H}\mathbf{x}_\infty = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{t} \\ \mathbf{v} & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ * \\ 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

이 성립하므로  $\mathbf{v} = (0, 0)^\top$  되고  $v$ 는 스케일 상수가 되어 1로 변환이 가능하다.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}/v & \mathbf{t}/v \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (43)$$



하지만 현실의 카메라를 통해 촬영한 영상에서는 projective 변환이 적용되므로  $\mathbf{l}_\infty$ 의 성질이 보존되지 않고 이미지 상에 투영된다. 따라서 이미지 상에 투영된 임의의 직선  $\mathbf{l}'$ 을  $\mathbf{l}_\infty$ 로 변환하는 homography  $\mathbf{H}$ 를 찾는 과정이 affine rectification이 된다.

$$\mathbf{H}(\mathbf{l}') = \mathbf{H}^{-\top} \mathbf{l}' = \mathbf{l}_\infty \quad (44)$$

임의의 한 직선은  $\mathbf{l}' = [a \ b \ c]^\top$ 과 같이 나타낼 수 있고  $\mathbf{l}_\infty = [0 \ 0 \ 1]^\top$  이므로 이를 다시 표현하면 다음과 같다.

$$\mathbf{H}(\mathbf{l}') = \mathbf{H}^{-\top} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (45)$$

다음으로  $\mathbf{H}$ 의 성분을 찾아야 한다. projective 변환은 다음과 같이 3개로 분리할 수 있고

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_p &= \mathbf{H}_S \mathbf{H}_A \mathbf{H}_P \\ &= \begin{bmatrix} s\mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{v}^\top & v \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{t} \\ \mathbf{v}^\top & v \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (46)$$

이 중,  $\mathbf{H}_P$  변환이  $\mathbf{l}_\infty$  성질을 보존하지 않는 projective 변환의 성질을 지닌다. 따라서  $\mathbf{H}$ 의 형태는 다음과 같다.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{v}^\top & v \end{bmatrix} \quad (47)$$

위 형태를 만족하면서  $\mathbf{l}'$ 를  $\mathbf{l}_\infty$ 로 변환시키는  $\mathbf{H}$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$\mathbf{H}^{-1}\mathbf{l}' = \mathbf{l}_\infty = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{bmatrix}^{-\top} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (49)$$

지금까지 affine rectification 순서를 정리하면 다음과 같다.

1. 실제 세계에서 평행한 직선 2쌍의 좌표를 구한다.
2. 평행한 직선 1쌍 당 소실점(=image of point at infinity)  $\mathbf{v}$ 를 구한다. 총 2쌍이므로 2개  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 를 구한다.
3.  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 를 잇는 image of line at infinity  $\mathbf{l}' = [a, b, c]^\top$ 를 구한다.
4.  $\mathbf{l}'$ 를 바탕으로 recover homography  $\mathbf{H}$ 를 구한다.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{bmatrix} \quad (50)$$

5. 이미지 전체에  $\mathbf{H}$ 를 적용하여 affine rectification을 마무리한다. affine rectification 결과 이미지는 평행한 선들이 보존된다.

### Recovery of metric properties from images

metric 성질을 복원한다는 의미는 실제 세계에서 수직이지만 이미지 평면상에서 projective 변환에 의해 직교하지 않은 두 직선을 다시 복원한다는 의미이다. 이 때, 복원된 이미지는 정확한 스케일 값까지는 알 수 없다(up to similarity, up to scale). 즉, metric rectification은 원본 이미지와 스케일 값만 다른 영상까지 복원한다는 의미이다. 이를 수행하기 위해서는 absolute dual conic  $\mathbf{C}_\infty^*$ 의 특징을 사용하여 복원해야 한다.

- Circular Point

circular point (또는 absolute point)  $\mathbf{x}_c, \mathbf{x}_{-c}$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{x}_{\pm c} = \begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{CP}^2 \quad (51)$$

-  $i = \sqrt{-1}$

-  $\mathbb{CP}^2$  : complex projective space

임의의 homography  $\mathbf{H}$ 가 circular point 집합을 보존하면  $\mathbf{H}$ 는 simliarity 성질을 보존하는 특징이 있다.

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}_{\pm c}) = \mathbf{x}_{\pm c} \quad \text{then, } \mathbf{H} \in \mathbf{H}_s \quad (52)$$

따라서  $\mathbf{H}$ 의 형태는 다음과 같다.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} A & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\mathbf{R} & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (53)$$

-  $s$  : scale factor

-  $\mathbf{R}$  : rotation matrix

- Dual Conic Properties

$\mathbb{P}^2$  공간 상의 두 점  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$ 가 존재할 때 두 점을 잇는 직선에 접하는 dual conic  $\mathbf{C}^*$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{P}\mathbf{Q}^\top + \mathbf{Q}\mathbf{P}^\top \quad (54)$$

-  $\mathbf{P} = [p_1, p_2, p_3]^\top$

이 때,  $\mathbf{C}^*$ 는 두 점  $\mathbf{P}$ 와  $\mathbf{Q}$ 를 지나는 직선  $\mathbf{l}$ 을 매개화하는 dual conic을 의미한다. dual conic과  $\mathbf{C}^*$ 과 이에 접하는 직선  $\mathbf{l}$ 은 다음과 같은 관계를 가진다.

$$\mathbf{l}^\top \mathbf{C}^* \mathbf{l} = 0 \quad (55)$$

$$\mathbf{l}^\top (\mathbf{P}\mathbf{Q}^\top + \mathbf{Q}\mathbf{P}^\top) \mathbf{l} = 0 \quad (56)$$

직선  $\mathbf{l}$  상에 두 점  $\mathbf{P}$ 와  $\mathbf{Q}$ 가 포함되므로  $\mathbf{P}^\top \mathbf{l} = 0$  또는  $\mathbf{Q}^\top \mathbf{l} = 0$  이 성립하여 위 식이 만족된다.

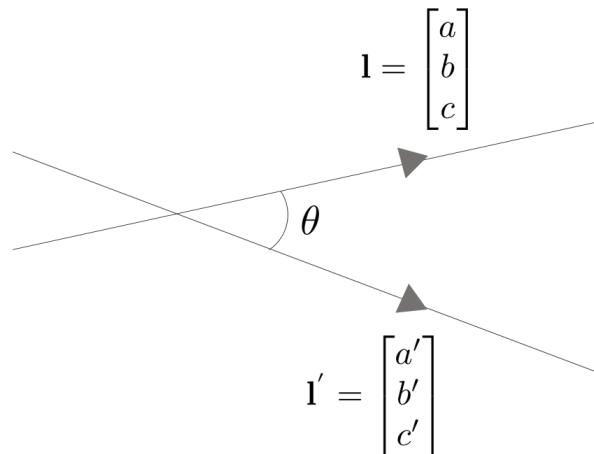
- Absolute Dual Conic

absolute dual conic  $\mathbf{C}_\infty^*$ 은 두 개의 circular point를 지나는 직선을 매개화하는 dual conic을 의미한다.

$$\mathbf{C}_\infty^* = \mathbf{x}_c \mathbf{x}_{-c}^\top + \mathbf{x}_{-c} \mathbf{x}_c^\top \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_\infty^* &= \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (58)$$

$\mathbb{P}^2$  공간 상의 임의의 두 직선  $\mathbf{l}, \mathbf{l}'$  이 존재할 때 두 직선의 각도는 다음과 같이 나타낼 수 있다.



$$\cos \theta = \frac{aa' + bb'}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{a'^2 + b'^2}} \quad (59)$$

이 때, 위 식을  $\mathbf{C}_\infty^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  를 사용하여 표현하면 다음과 같다.

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{l}^\top \mathbf{C}_\infty^* \mathbf{l}'}{\sqrt{\mathbf{l}^\top \mathbf{C}_\infty^* \mathbf{l}} \sqrt{\mathbf{l}'^\top \mathbf{C}_\infty^* \mathbf{l}'}} \quad (60)$$

- $aa' + bb' = \mathbf{l}^\top \mathbf{C}_\infty^* \mathbf{l}'$
- $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\mathbf{l}^\top \mathbf{C}_\infty^* \mathbf{l}}$
- $\sqrt{a'^2 + b'^2} = \sqrt{\mathbf{l}'^\top \mathbf{C}_\infty^* \mathbf{l}'}$

- Homography of Dual Conic

dual conic과  $\mathbf{C}^*$ 과 이에 접하는 직선  $\mathbf{l}$ 은 다음과 같은 관계를 가진다.

$$\mathbf{l}^\top \mathbf{C}^* \mathbf{l} = 0 \quad (61)$$

앞서 설명한 위 공식에 Homography  $\mathbf{H} : \mathbb{P}^2 \mapsto \mathbb{P}^2$ 를 수행하면 다음과 같다.  $\mathbf{H}(\mathbf{l}) = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{l}$ 이므로

$$(\mathbf{H}^{-1}\mathbf{l})^\top \mathbf{H}(\mathbf{C}^*) (\mathbf{H}^{-1}\mathbf{l}) = 0 \quad (62)$$

$$\therefore \mathbf{H}(\mathbf{C}^*) = \mathbf{H}\mathbf{C}^*\mathbf{H}^\top \quad (63)$$

이 때,  $\mathbf{H}(\mathbf{C}^*)$ 를 image of absolute dual conic  $\mathbf{w}$ 라고 한다.

- Image of Absolute Dual Conic

만약  $\mathbb{P}^2$  공간 상에서 두 직선  $\mathbf{l}, \mathbf{m}$ 이 직교하면 다음과 같은 공식이 성립한다.

$$\mathbf{l}^\top \mathbf{w} \mathbf{m} = 0 \quad (64)$$

-  $\mathbf{w}$  : image of absolute conic  $\mathbf{C}_\infty^*$

$\mathbf{w} = \mathbf{H}\mathbf{C}^*\mathbf{H}^\top$ 이므로  $\mathbf{H}$ 의 형태를 알기 위해 임의의 projective homography  $\mathbf{H}$ 를 분해해보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{H}_S \mathbf{H}_A \mathbf{H}_P \\ &= \begin{bmatrix} s\mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{v}^\top & v \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (65)$$

$\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{H}_P^{-1} \mathbf{H}_A^{-1} \mathbf{H}_S^{-1} = \mathbf{H}'_P \mathbf{H}'_A \mathbf{H}'_S$  또한 동일한 homography 연산을 의미한다. 편의상  $\mathbf{H}'_P \mathbf{H}'_A \mathbf{H}'_S$ 을  $\mathbf{H}_P \mathbf{H}_A \mathbf{H}_S$ 라고 표기한다. 이 때, 각 행렬의 디테일한  $\mathbf{R}, \mathbf{t}, \mathbf{K}, \mathbf{v}, s, v$  값은  $\mathbf{H}$ 와  $\mathbf{H}^{-1}$ 이 서로 다르다. 따라서  $\mathbf{H}$ 의 decompose 순서를 반대로하여 곱해주어  $\mathbf{w}$ 를 전개해보면 다음과 같다.

$$\mathbf{H}\mathbf{C}^*\mathbf{H}^\top = \mathbf{H}_P \mathbf{H}_A \mathbf{H}_S \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{H}_S^\top \mathbf{H}_A^\top \mathbf{H}_P^\top \quad (66)$$

$$\mathbf{H}\mathbf{C}^*\mathbf{H}^\top = \mathbf{H}_P \mathbf{H}_A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{H}_A^\top \mathbf{H}_P^\top \quad (67)$$

$$\therefore \mathbf{H}_S \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{H}_S^\top = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

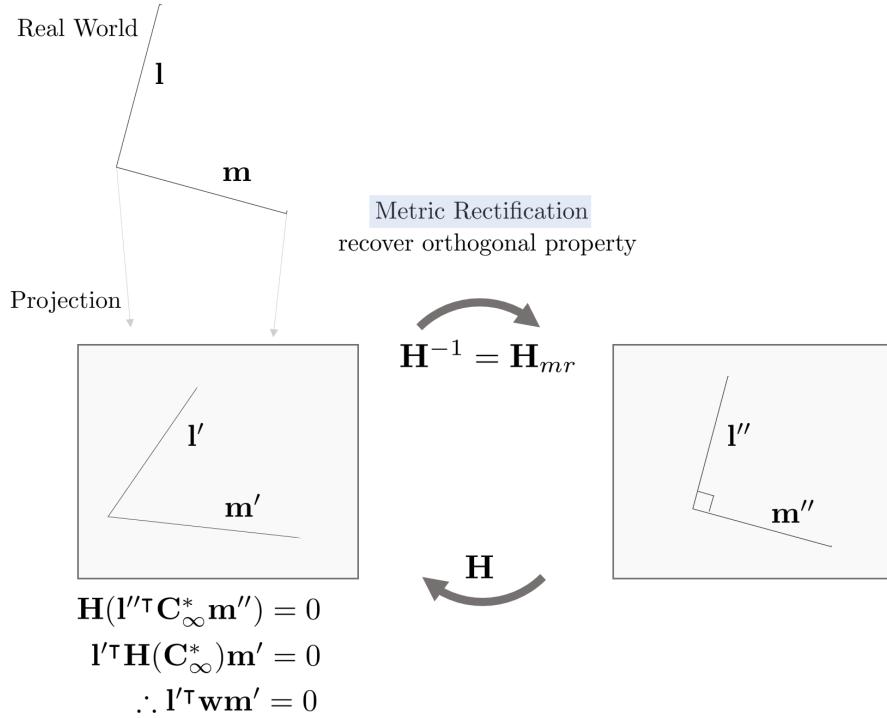
이를 전개하면 다음과 같다.

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}\mathbf{K}^\top & \mathbf{K}\mathbf{K}^\top \mathbf{v} \\ \mathbf{v}^\top \mathbf{K}^\top \mathbf{K} & \mathbf{v}^\top \mathbf{K}^\top \mathbf{K} \mathbf{v} \end{bmatrix} \quad (68)$$

최종적으로 projective 변환이 없는 similarity 변환이라고 가정하면  $\mathbf{v} = 0$ 이 되고  $\mathbf{w}$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}\mathbf{K}^\top & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (69)$$

- Metric Rectification



앞서 언급한 내용과 같이  $H$ 에 의한 image of absolute dual conic은  $w = \begin{bmatrix} \mathbf{K}\mathbf{K}^\top & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 로 나타낼 수 있다. 따라서 위 그림에서  $l''$ ,  $m''$ 에 homography 변환  $H$ 를 적용한 결과는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$H(l''^T C_\infty^* m'') = l' w m' = 0 \quad (70)$$

- $H(l'') = l'$
- $H(C_\infty^*) = w$
- $H(m'') = m'$

이를 다시 전개하면

$$l' \begin{bmatrix} \mathbf{K}\mathbf{K}^\top & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} m' = 0 \quad (71)$$

$$\begin{bmatrix} l'_1 & l'_2 \end{bmatrix} \mathbf{K}\mathbf{K}^\top \begin{bmatrix} m'_1 \\ m'_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (72)$$

- $\mathbf{K}\mathbf{K}^\top \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  : symmetric matrix &  $\det \mathbf{K}\mathbf{K}^\top = 1$

따라서 2개의 수직인 직선 쌍으로부터  $\mathbf{K}\mathbf{K}^\top$ 을 계산하여  $w$ 를 구할 수 있다.  $\mathbf{K}\mathbf{K}^\top = \mathbf{S}$ 로 치환했을 때, symmetric이고 positive definite 행렬은 다음과 같이 분해될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} l'_1 & l'_2 \end{bmatrix} \mathbf{S} \begin{bmatrix} m'_1 \\ m'_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (73)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^\top \quad (74)$$

- $\mathbf{U}$  : orthogonal matrix

- $\mathbf{D}$  : diagonal matrix

다시 diagonal matrix  $\mathbf{D}$ 는 2개의 행렬의 곱  $\mathbf{D} = \mathbf{E}\mathbf{E}^\top$ 로 나타낼 수 있으므로 이를 다시 정리하면

$$\mathbf{S} = \mathbf{U}\mathbf{E}(\mathbf{U}\mathbf{E})^\top \quad (75)$$

다음으로  $\mathbf{U}\mathbf{E}$ 를 QR decomposition을 수행하면 upper triangle 행렬  $\mathbf{R} (= \mathbf{K})$ 와 orthogonal 행렬  $\mathbf{Q}$ 로 분해할 수 있다. 이를 다시 전개하면 다음과 같다.

$$\mathbf{S} = \mathbf{K}\mathbf{Q}\mathbf{Q}^\top \mathbf{K}^\top = \mathbf{K}\mathbf{K}^\top \quad (76)$$

- $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^\top = \mathbf{I}$

다음으로  $\mathbf{S}$ 를 cholesky 또는 SVD를 통해  $\mathbf{K}$ 를 추출하여 최종적인 metric rectify homography  $\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{H}_{mr}$ 를 구한다.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (77)$$

$$\mathbf{H}_{mr} = \mathbf{H}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \quad (78)$$

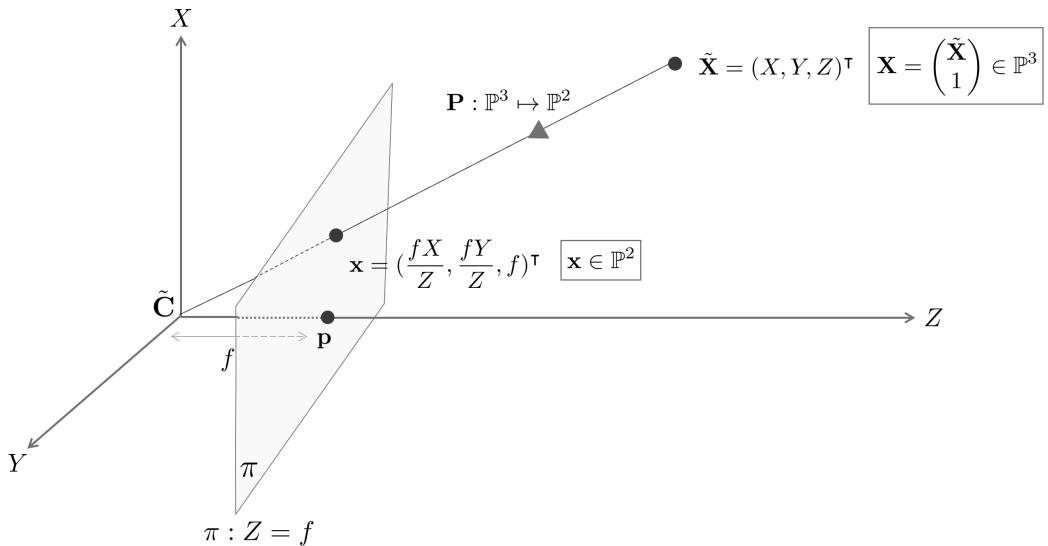
지금까지 metric rectification 순서를 정리하면 다음과 같다.

1. 서로 수직인 직선 쌍  $\mathbf{l}', \mathbf{m}'$ 를 선정하여 두 직선의 좌표를 구한다.
2.  $[l'_1 \ l'_2] \mathbf{S} \begin{bmatrix} m'_1 \\ m'_2 \end{bmatrix} = 0$  공식을 통해  $\mathbf{S} = \mathbf{K}\mathbf{K}^\top$ 을 구한다.
3. cholesky 또는 SVD를 통해  $\mathbf{K}$ 를 구하고 이를 통해  $\mathbf{H}_{mr} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$ 를 구한다.
4. 이미지에  $\mathbf{H}_{mr}$ 를 적용하여 metric rectification을 수행한다. 복원된 이미지는 원본 이미지와 스케일 값을 제외하고 동일한 형태를 지닌다(up to scale)

### 3 Camera Models

#### Finite cameras

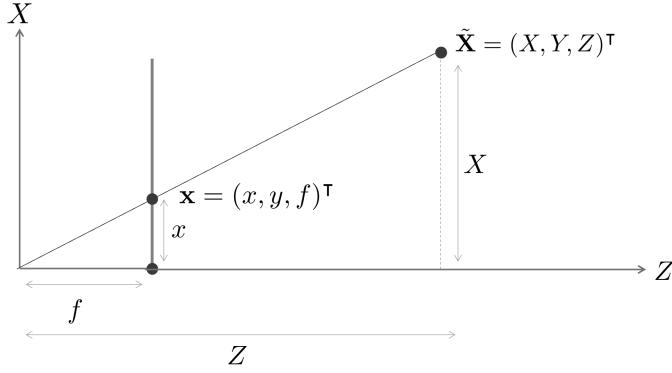
##### The basic pinhole model



핀홀 카메라(pinhole camera)란  $\mathbb{R}^3$  공간 상에 있는 한 점  $\tilde{\mathbf{X}}$ 를 특정 중심점  $\tilde{\mathbf{C}}$ 를 향해 프로젝션시켰을 때 중간에 교차하는 이미지 평면  $\pi \in \mathbb{R}^2$  상의 한 점  $\mathbf{x}$ 으로 상을 맺음으로써 이미지를 표현하는 수학적인 카메라 모델링 방법을 의미한다.  $\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{C}}$ 는 Inhomogeneous Coordinate으로 나타낸  $\mathbf{X}$ 를 의미한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= [X \ Y \ Z \ 1]^\top \\ \tilde{\mathbf{X}} &= [X \ Y \ Z]^\top \\ \mathbf{C} &= [c_x \ c_y \ c_z \ 1]^\top \\ \tilde{\mathbf{C}} &= [c_x \ c_y \ c_z]^\top \end{aligned} \quad (79)$$

임의의  $\mathbb{R}^3$  공간을 카메라 좌표계라고 생각해보면 좌표계의 원점은 카메라의 중심점  $\tilde{\mathbf{C}}$ 가 된다. 일반적으로 이미지 평면  $\pi$ 는  $Z$ 축과 수직하도록 위치시키며 이 때,  $Z$ 축을 Principal Axis라고 하고 이미지 평면과 Principal Axis가 만나는 점을 Principal Point  $\mathbf{p}$ 라고 한다.



3차원 공간 상의 점  $\tilde{\mathbf{X}} = [X \ Y \ Z]^\top$ 가 주어졌을 때  $XZ$  평면만 보는 경우 이미지 평면  $\pi$ 과 카메라 중심점  $\tilde{\mathbf{C}}$  사이의 거리인  $X$ 축에 대한 초점거리(focal length)  $f_x$ 를 계산할 수 있다.  $f_x, f_y$ 는 픽셀의 종횡비를 의미하지만 최근 생산되는 센서는 대부분 종횡비가 1:1이므로  $f = f_x = f_y$ 라고 가정한다.

$$f \frac{Y}{Z} = y \quad (80)$$

$YZ$  평면에서 이미지 평면을 봤을 때 역시 동일하게  $f$ 를 계산할 수 있다.

$$f \frac{X}{Z} = x \quad (81)$$

이에 따라 펀홀 카메라 행렬  $\mathbf{P}$ 는 월드 상의 점  $\tilde{\mathbf{X}} = (X \ Y \ Z)^\top \in \mathbb{R}^3$ 를 2차원 이미지 평면  $\pi \in \mathbb{R}^2$ 로 프로젝션하는 선형 사상이라고 볼 수 있다.

$$\mathbf{P} : (X, Y, Z)^\top \mapsto (f \frac{X}{Z}, f \frac{Y}{Z})^\top \quad (82)$$

### Central projection using homogeneous coordinates

핀홀 카메라 행렬  $\mathbf{P}$ 은 Homogeneous Point를 옮기는 것으로 생각할 수도 있다. 다시 말하면, 펀홀 카메라 행렬  $\mathbf{P}$ 는  $\mathbb{P}^3$  공간 상의 점  $\mathbf{X} = (X \ Y \ Z \ 1)^\top$ 을  $\mathbb{P}^2$  공간 상의 점  $\mathbf{x} = (fX \ fY \ Z)^\top$ 로 프로젝션하는 선형 사상으로 볼 수 있다.

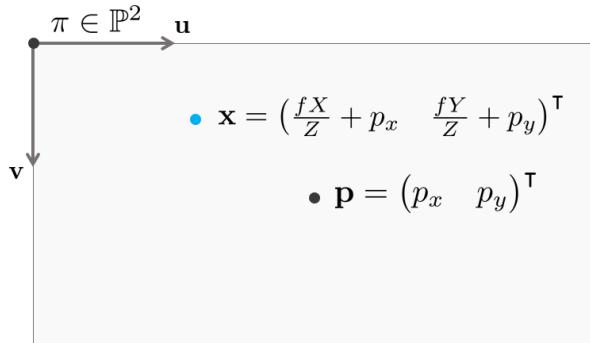
$$\mathbf{P} : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} fX \\ fY \\ Z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f & & 0 \\ & f & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (83)$$

이를 행렬 형태로 나타내면

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{X} \quad (84)$$

가 된다. ○ 때,  $\mathbf{P} = \text{diag}(f, f, 1)[\mathbf{I} \mid 0]_{3 \times 4}$ 와 같이 나타낼 수 있다.

### Principal point offset



일반적으로 Principal Point  $\mathbf{p}$ 는 이미지 평면  $\pi$ 의 원점이 아니다. 따라서 편홀 카메라 행렬을 통한 선형 사상이 이미지 평면  $\pi$ 에 제대로 대응하기 위해서는

$$(X \ Y \ Z)^\top \mapsto (fX/Z + p_x \ fY/Z + p_y)^\top \quad (85)$$

와 같이 Principal Point  $\mathbf{p} = (p_x \ p_y)^\top$ 를 보정해야 한다. 이를 카메라 행렬  $\mathbf{P}$ 를 통해 한 번에 표현해 보면

$$\mathbf{P} : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} fX + Zp_x \\ fY + Zp_y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f & p_x & 0 \\ f & p_y & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (86)$$

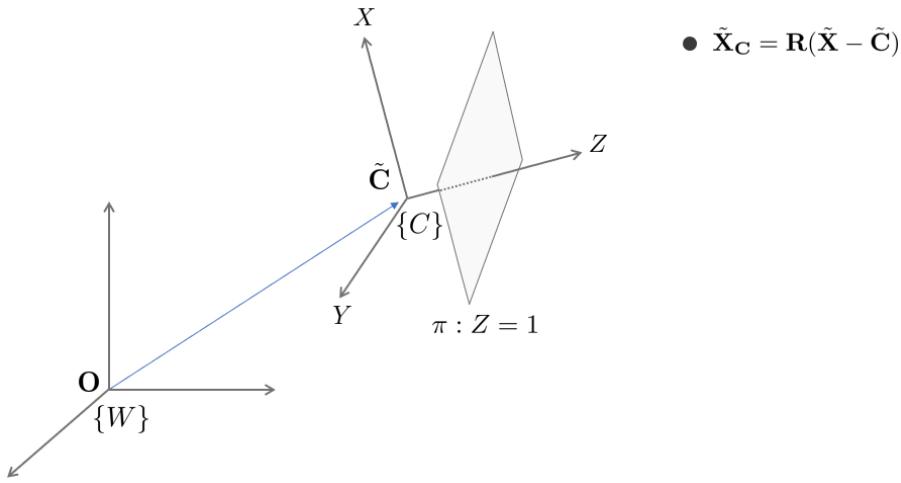
와 같이 나타낼 수 있다. 이 때 행렬  $\begin{bmatrix} f & p_x \\ f & p_y \\ 1 \end{bmatrix}$ 을 간결하게  $\mathbf{K}$ 로 나타내며 이를 내부 파라미터 행렬 또는 카메라 캘리브레이션 행렬(intrinsic parameter matrix, camera calibration matrix)이라고 한다.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} f & p_x \\ f & p_y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (87)$$

결론적으로 카메라의 Principal Point Offset을 포함한 카메라 행렬  $\mathbf{P}$ 를 통해 다음과 같은  $\mathbf{X} \in \mathbb{P}^3 \mapsto \mathbf{x} \in \mathbb{P}^2$ 인 선형 사상이 가능하다.

$$\mathbf{x} = \mathbf{K}[\mathbf{I} \mid 0]\mathbf{X} \quad (88)$$

### Camera rotation and translation



일반적으로 카메라 좌표계는 월드 좌표계로와 동일하지 않다.  $\mathbb{R}^3$  공간 상에 월드 좌표계  $\{W\}$ 가 주어졌을 때 이로부터 위치가  $\mathbf{C} = (c_x \ c_y \ c_z \ 1)^\top$  만큼 떨어져 있으며  $\mathbf{R}$  만큼 회전되어 있는 카메라 좌표계  $\{C\}$ 가 주어졌을 때 월드 좌표계  $\{W\}$ 에서 바라본 월드 상의 한 점  $\tilde{\mathbf{X}}$ 를 카메라 좌표계  $\{C\}$  상의 점  $\tilde{\mathbf{X}}_C$ 로 변환하는 공식은

$$\tilde{\mathbf{X}}_C = \mathbf{R}(\tilde{\mathbf{X}} - \tilde{\mathbf{C}}) \quad (89)$$

와 같다. Homogeneous Coordinate로 나타낸  $\mathbf{X}_C$ 를 이미지 평면  $\pi$ 로 프로젝션시키면

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{X}_C = \mathbf{K}[\mathbf{I} \mid 0]\mathbf{X}_C \quad (90)$$

와 같이 나타낼 수 있다.  $\mathbf{X}_C$ 를 자세히 나타내면

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_C &= \mathbf{R} \begin{bmatrix} 1 & & -c_x \\ & 1 & -c_y \\ & & 1 & -c_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R} & -\mathbf{R}\tilde{\mathbf{C}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{91}$$

과 같이 나타낼 수 있고 이를  $\mathbf{x} = \mathbf{K}[\mathbf{I} | 0]\mathbf{X}_C$  공식에 대입 후 정리하면

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_C &= \mathbf{K}[\mathbf{I} | 0]\mathbf{X}_C \\ &= \mathbf{K}[\mathbf{I} | 0] \begin{bmatrix} \mathbf{R} & -\mathbf{R}\tilde{\mathbf{C}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{K}[\mathbf{R} | -\mathbf{R}\tilde{\mathbf{C}}]\mathbf{X} \\ &= \mathbf{KR}[\mathbf{I} | -\tilde{\mathbf{C}}]\mathbf{X}\end{aligned}\tag{92}$$

와 같이 나타낼 수 있다. 일반적으로  $\tilde{\mathbf{X}}_C$ 를  $\tilde{\mathbf{X}}_C = \mathbf{R}\tilde{\mathbf{X}} + \mathbf{t}$ 와 같이 월드 좌표계를 기준으로 표현하는 방법 또한 자주 사용된다. 이 때 카메라 행렬  $\mathbf{P}$ 는

$$\mathbf{P} = \mathbf{K}[\mathbf{R} | \mathbf{t}]\tag{93}$$

와 같이 나타낼 수 있고 이 때,  $\mathbf{t} = -\mathbf{R}\tilde{\mathbf{C}}$  관계가 성립한다.

### CCD cameras

현대에 주로 사용하는 카메라 중 하나인 CCD 카메라는 이미지 좌표를 픽셀의 수로 기록한다. 따라서  $(x, y)[mm]$ 와 같이 이미지 좌표가 mm로 주어져 있을 때, CCD 카메라에서는  $(m_x x, m_y y)$ 와 같이 나타낸다. 이 때  $m_x, m_y$ 는  $1 \text{ mm}^2$  크기 내에서 x축 또는 y축 방향으로 픽셀의 수를 의미한다. 따라서 mm로 주어진 일반 카메라 캘리브레이션 행렬  $\mathbf{K}$ 가 주어졌을 때 이를 CCD 카메라의 좌표계로 바꾸기 위해서는

$$\begin{pmatrix} m_x & m_y & \\ & 1 \end{pmatrix} \mathbf{K} = \begin{pmatrix} m_x & m_y & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f & p_x \\ f & p_y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} fm_x & p_x m_x & \\ fm_y & p_y m_y & \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\tag{94}$$

와 같이 변환하는 작업을 수행해야 한다.

### Finite projective camera

카메라 행렬이  $\mathbf{P} = \mathbf{K}[\mathbf{R} | \mathbf{t}]$ 와 같이 주어졌을 때 이를 다시 표현하면

$$\mathbf{P} = \mathbf{KR}[\mathbf{I} | -\tilde{\mathbf{C}}] \quad \text{where, } \mathbf{t} = -\mathbf{R}\tilde{\mathbf{C}}\tag{95}$$

과 같이 나타낼 수 있고 해당 카메라 행렬을 Finite Projective 카메라라고 하며 이 때  $\mathbf{KR}$ 가 non-singular한 행렬이 되어야 한다. 임의의 non-singular 행렬  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 가 주어졌을 때  $\mathbf{M}$ 에 QR factorization 을 수행하는  $\mathbf{KR}$ 과 같이 상삼각행렬  $\mathbf{K}$ 와 직교행렬  $\mathbf{R}$ 로 분해할 수 있으므로 따라서 카메라 행렬의 집합은  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$  크기의 행렬들의 집합이고  $\mathbf{P}$ 의 왼쪽  $3 \times 3$  부분이 non-singular인 집합이다.

$$\{\text{set of camera matrix}\} = \{\mathbf{P} = [\mathbf{M} | \mathbf{t}] \mid \mathbf{M} \text{ is non-singular } 3 \times 3 \text{ matrix., } \mathbf{t} \in \mathbb{R}^3\}\tag{96}$$

### General projective cameras

General Projective Camera는 앞서 설명한 Finite projective camera와 달리  $\mathbf{P} = [\mathbf{M} | \mathbf{t}]$ 에서  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  행렬이 non-singular일 필요가 없으며  $\mathbf{P}$ 의 rank가 3인 카메라 행렬을 의미한다.

## The projective camera

### Camera anatomy

#### Camera center

임의의 Finite Projective 카메라 행렬  $\mathbf{P} = \mathbf{K}\mathbf{R}[\mathbf{I} | -\tilde{\mathbf{C}}]$ 가 주어졌을 때

$$\mathbf{P}\mathbf{C} = \mathbf{K}\mathbf{R}(\mathbf{C} - \mathbf{C}) = \mathbf{0} \quad (97)$$

이 된다. 이 때,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^4$ 는 카메라의 중심점 또는 월드 좌표계 상에서 카메라의 위치를 의미하고 rank 3인 카메라 행렬  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ 의 Null Space 벡터를 구함으로써 카메라 중심점을 구할 수 있다.

카메라 행렬  $\mathbf{P} = \mathbf{K}\mathbf{R}[\mathbf{I} | -\tilde{\mathbf{C}}]$ 가 주어졌고  $\mathbf{P}\mathbf{C} = \mathbf{0}$ 이 성립할 때 다음과 같이 월드 상의 점  $\mathbf{X}(\lambda)$ 가 주어졌다고 하자.

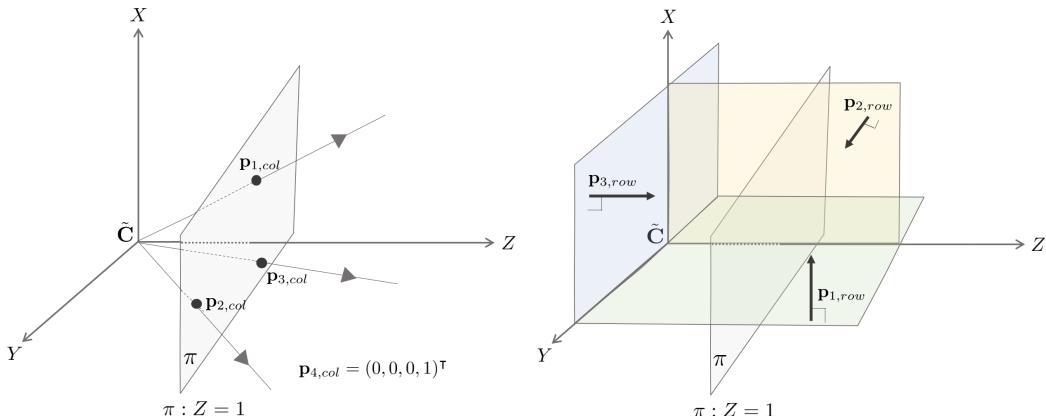
$$\mathbf{X}(\lambda) = \lambda\mathbf{A} + (1 - \lambda)\mathbf{C} \quad (98)$$

이는 곧  $\mathbf{A}$ 와  $\mathbf{C}$ 를 잇는 직선을 의미하며  $\mathbf{X}(\lambda)$ 를 카메라에 프로젝션시키면

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{X}(\lambda) = \lambda\mathbf{PA} + (1 - \lambda)\mathbf{PC} = \lambda\mathbf{PA} \quad (99)$$

가 된다. 즉, 월드 상의 점  $\mathbf{A}$ 와  $\mathbf{C}$ 를 잇는 직선이  $\mathbf{C}$  값에 관계없이 이미지 평면 상의 한 점  $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{PA}$ 가 된다는 의미이고 이는 곧 카메라의 중심점이 가지는 성질을 의미한다. 일반적인 General Projective Camera에서도  $\mathbf{P}$ 의 Null Space 벡터가 곧 카메라의 중심점  $\mathbf{C}$ 가 된다.

### Column vectors



카메라 행렬  $\mathbf{P}$ 을 열벡터(column vector)로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{P} = [\mathbf{p}_{1,col} \quad \mathbf{p}_{2,col} \quad \mathbf{p}_{3,col} \quad \mathbf{p}_{4,col}] \quad (100)$$

where,  $\mathbf{p}_{i,col} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}, i = 1, \dots, 4$

이 중  $\mathbf{p}_{i,col}, i = 1, 2, 3$ 은 각각 무한대 평면  $\pi_\infty$ 에 위치한  $X, Y, Z$  축의 소실점(vanishing point)들의 위치를 의미한다. 그리고  $\mathbf{p}_{4,col} = \mathbf{P}(0 \ 0 \ 0 \ 1)^T$ 은 월드 좌표계의 원점을 의미한다.

### Row vectors

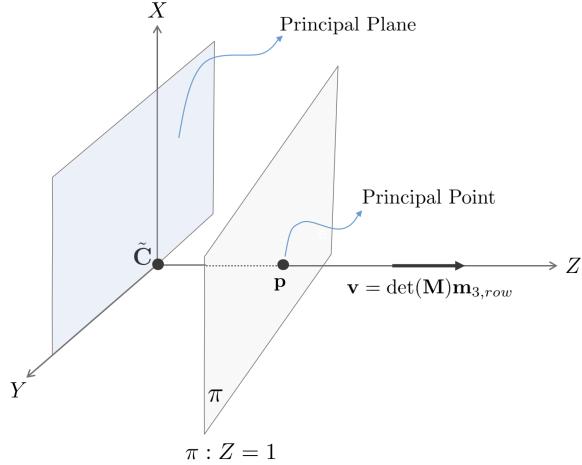
카메라 행렬  $\mathbf{P}$ 을 행벡터(row vector)로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{1,row}^\top \\ \mathbf{p}_{2,row}^\top \\ \mathbf{p}_{3,row}^\top \end{bmatrix} \quad (101)$$

$$\text{where, } \mathbf{p}_{i,row} \in \mathbb{R}^{4 \times 1}, i = 1, 2, 3$$

행벡터  $\mathbf{p}_{i,row}, i = 1, 2, 3$ 은 카메라 좌표계 기준으로 각각  $X, Y, Z$  축과 평행한 평면을 의미한다.

## The principal plane



주평면(principal plane)  $\pi_{pp}$ 은 카메라의 중심점(center)를 포함하며 이미지 평면과 평행인 평면을 의미한다. 주평면은 카메라 좌표계  $\{C\}$ 에서  $XY$  평면과 동일하며  $Z = 0$ 인 특징이 있다. 주평면 상에 위치하는 한 점  $\mathbf{X} \in \pi_{pp}$ 는 무한대 선(line at infinity) 상에서 이미지 평면  $\pi$ 과 만나므로

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{X} = (x \ y \ 0)^T \quad (102)$$

이 되고 따라서 임의의 한 점  $\mathbf{X}$ 가 주평면 상에 위치하기 위한 필요충분 조건은  $\mathbf{p}_{3, row}^T \mathbf{X} = 0$ 이다. 즉, 카메라 행렬의 세 번째 행벡터  $\mathbf{p}_{3, row}$ 가 곧 카메라의 주평면을 의미한다.

## The principal point

주점(principal point)  $\mathbf{p}$ 는 주축(principal axis)과 이미지 평면  $\pi$ 의 교차점을 의미한다. 주점  $\mathbf{p}$ 는 이미지 평면  $\pi$  상에 위치하며 카메라 중심점  $\mathbf{C}$ 와 주점을 잇는 직선은 이미지 평면과 수직하다.

$$\mathbf{p} - \mathbf{C} \perp \pi \quad (103)$$

다음과 같은 방법으로 주점을 정의할 수도 있다. 주평면은 카메라 행렬의 세 번째 행벡터  $\mathbf{p}_{3, row}$ 이므로 주평면 상에 위치한 한 점  $\mathbf{X}$ 에 대해

$$\mathbf{p}_{3, row}^T \mathbf{X} = 0 \quad (104)$$

이 성립한다. 이 때  $\mathbf{p}_{3, row} = (\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3 \ \pi_4)^T$ 는 Dual Projective Space  $(\mathbb{P}^3)^\vee$ 에서  $\mathbf{p}_{3, row}$  평면의 법선벡터를 의미한다. 주평면  $\mathbf{p}_{3, row}$ 와 무한대 평면(plane at infinity)  $\pi_\infty$ 의 교차선은 무한대 평면에 존재하는 법선벡터는  $(\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3 \ 0)^T$ 가 된다. 결론적으로 이를 이미지 평면으로 프로젝션한 점이 주점(principal point)  $\mathbf{p}$ 가 된다.

$$\mathbf{p} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (105)$$

카메라 중심점  $\mathbf{C}$ 를 지나면서 무한대 평면 상에 존재하는 법선벡터  $[\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3 \ 0]^T$ 는 곧 주축(principal axis)과 동일하므로

$$\mathbf{P} \left( \lambda \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ 0 \end{pmatrix} + (1 - \lambda) \mathbf{C} \right) = \lambda \mathbf{P} \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{p} \quad (106)$$

같이 주축을 이미지 평면에 프로젝션하면 주점  $\mathbf{p}$ 이 된다. 결론적으로 주점  $\mathbf{p}$ 는 카메라 행렬  $\mathbf{P}$ 의 세 번째 행벡터  $\mathbf{p}_{3, row} = [\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3 \ \pi_4]^T$ 에서 처음 세 개의 항  $\mathbf{p} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)^T$ 을 의미한다.

## The principal axis vector

카메라 행렬  $\mathbf{P} = [\mathbf{M} \mid \mathbf{p}_{4,col}]$ 이 주어졌을 때 행렬  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 의 세 번째 행벡터  $\mathbf{m}_{3,raw}$ 는 주점(principal point)를 의미한다. 해당 섹션에서는 주점  $\mathbf{m}_{3,raw}$ 를 카메라 좌표계에서  $+Z$  방향을 의미하는 주축(principal axis)의 방향과 동치로 간주한다. 하지만, 카메라 행렬  $\mathbf{P}$ 는 부호를 제외하고(up to sign) 유일하게 결정되기 때문에 어떤  $\mathbf{m}_{3,raw}$  또는  $-\mathbf{m}_{3,raw}$ 가  $+Z$ 를 의미하는지 알 수 없다.

이 때,  $\mathbf{v} = \det(\mathbf{M})\mathbf{m}_{3,raw} = (0, 0, 1)^T$ 과 같이  $\mathbf{M}$ 의 행렬식(determinant)를 앞에 곱해주면 항상 양의 방향을 의미하게 된다. 그리고  $\mathbf{P} \rightarrow k\mathbf{P}$ 로 스케일이 변화해도  $\mathbf{v} \rightarrow k^4\mathbf{v}$ 와 같이 같은 방향을 나타낸다. 일 반적인 카메라 행렬  $k\mathbf{P} = k\mathbf{K}\mathbf{R}[\mathbf{I} \mid -\tilde{\mathbf{C}}]$ 가 주어졌을 때에도  $\mathbf{M} = k\mathbf{K}\mathbf{R}$ 이고  $\det(\mathbf{R}) > 0$ 이므로 주축의 방향벡터  $\mathbf{v} = \det(\mathbf{M})\mathbf{m}_{3,raw}$ 는 동일한 방향을 나타낸다. **이에 따라**

$$\mathbf{v} = \det(\mathbf{M})\mathbf{m}_{3,raw} \quad (107)$$

**벡터는 주축(principal axis)의 방향벡터를 의미한다.**

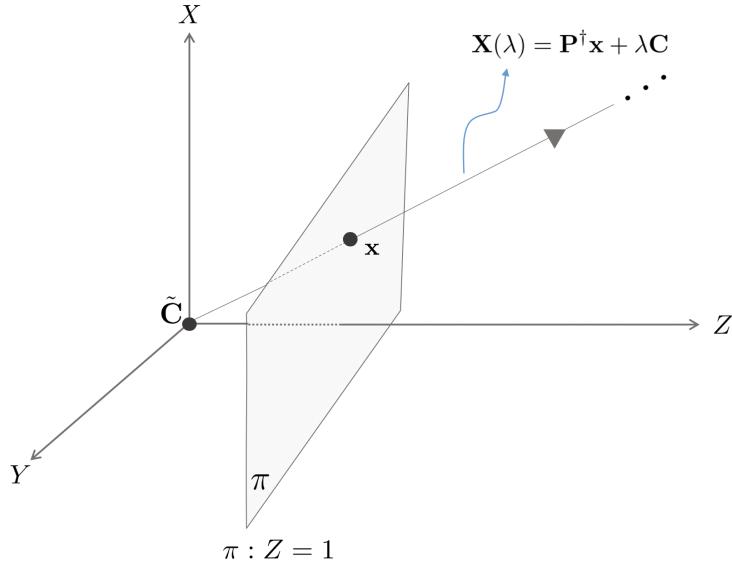
## Action of a projective camera on points

### Forward projection

Forward-projection은 일반적으로 프로젝션이라고 불리며 **월드 상에 있는 한 점  $\mathbf{X}$ 가 주어졌을 때 이를 이미지 평면 상의 한 점  $\mathbf{x}$ 으로 변환하는 연산을 의미한다**. 임의의 카메라 행렬  $\mathbf{P}$ 에 대해 다음 공식이 성립한다.

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{X} \quad (108)$$

### Back-projection of points to rays



Back-projection은 Forward-projection과는 반대로 **이미지 평면 상의 한 점  $\mathbf{x}$ 가 주어졌을 때 이를 월드 상의 한 직선으로 변환하는 연산을 의미한다**. 일반적으로  $\mathbf{x}$ 의 깊이값을 모르기 때문에 바로 월드 상의 한 점  $\mathbf{X}$ 로 변환되지 않는 특징이 있다. 임의의 카메라 행렬  $\mathbf{P}$ 는 rank가 3인 행렬이므로 Right Pseudo Inverse  $\mathbf{P}^\dagger$ 가 존재한다.

$$\mathbf{P}^\dagger = \mathbf{P}^\top (\mathbf{P}\mathbf{P}^\top)^{-1} \quad (109)$$

이 때  $\mathbf{P}\mathbf{P}^\dagger = \mathbf{P}\mathbf{P}^\top (\mathbf{P}\mathbf{P}^\top)^{-1} = \mathbf{I}$ 가 성립한다. Back-projection한 직선  $\mathbf{P}^\dagger \mathbf{x}$ 는 카메라의 중심점  $\mathbf{C}$ 를 지나가므로

$$\mathbf{X}(\lambda) = \mathbf{P}^\dagger \mathbf{x} + \lambda \mathbf{C} \quad (110)$$

와 같이 나타낼 수 있다. Back-projection 직선을 다시 프로젝션하면  $\mathbf{P}\mathbf{X}(\lambda) = \mathbf{P}\mathbf{P}^\dagger \mathbf{x} + \lambda \mathbf{P}\mathbf{C} = \mathbf{x}$ 가 된다.

Finite Projective 카메라의 경우 다른 방법으로 Back-projection을 표현할 수 있다. 임의의 Finite Projective 카메라 행렬  $\mathbf{P} = [\mathbf{M} \mid \mathbf{p}_{4,col}]$ 이 주어졌을 때 카메라의 중심점은  $\tilde{\mathbf{C}} = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{p}_{4,col}$ 과 같이 나타낼 수 있다. 이 때 이미지 평면 상의 한 점  $\mathbf{x}$ 를 Back-projection한 직선은 무한대 평면  $\pi_\infty$ 와  $\mathbf{D} = ((\mathbf{M}^{-1}\mathbf{x})^\top, 0)$ 에서 접하므로 Back-projection 직선은

$$\mathbf{X}(\mu) = \mu \begin{pmatrix} \mathbf{M}^{-1}\mathbf{x} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{p}_{4,col} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}^{-1}(\mu\mathbf{x} - \mathbf{p}_{4,col}) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (111)$$

과 같이 나타낼 수 있다.

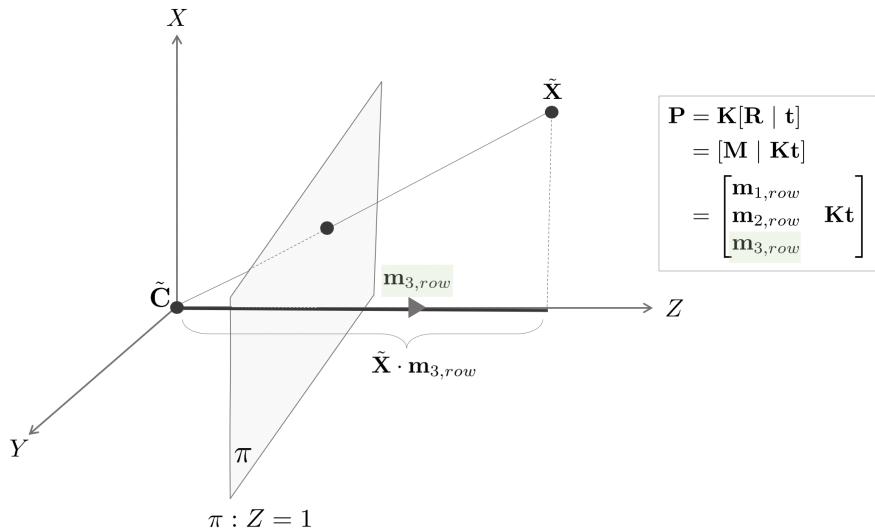
### Depth of points

General Projective 카메라  $\mathbf{P}$ 와 월드 상의 한 점  $\mathbf{X} = (X \ Y \ Z \ 1)^\top$ 가 주어졌을 때 이를 이미지 평면으로 프로젝션시키면

$$\mathbf{x} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix} \quad (112)$$

와 같이 하나의 점  $\mathbf{x}$ 를 얻을 수 있다.

### Result 6.1



카메라 행렬  $\mathbf{P}$ 에 대한 월드 상의 점  $\mathbf{X}$ 의 깊이는

$$\text{depth}(\mathbf{X}; \mathbf{P}) = \frac{\text{sign}(\det(M))w}{\|\mathbf{m}_{3,row}\|} \quad (113)$$

와 같이 나타낼 수 있다. 이 때,  $\mathbf{m}_{3,row} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 는 행렬  $\mathbf{M}$ 의 세 번째 행벡터이다.

### Proof

행벡터  $\mathbf{m}_{3,row}$ 는 주축의 방향을 의미하므로 월드 상의 점  $\tilde{\mathbf{X}}$ 를  $\mathbf{m}_{3,row}$ 로 프로젝션한 값이 곧  $Z$ 축에 대한 깊이를 의미한다. 주축으로 프로젝션은

$$\text{depth} = \frac{(\tilde{\mathbf{X}} - \tilde{\mathbf{C}})\mathbf{m}_{3.row}}{\|\mathbf{m}_{3.row}\|} \quad (114)$$

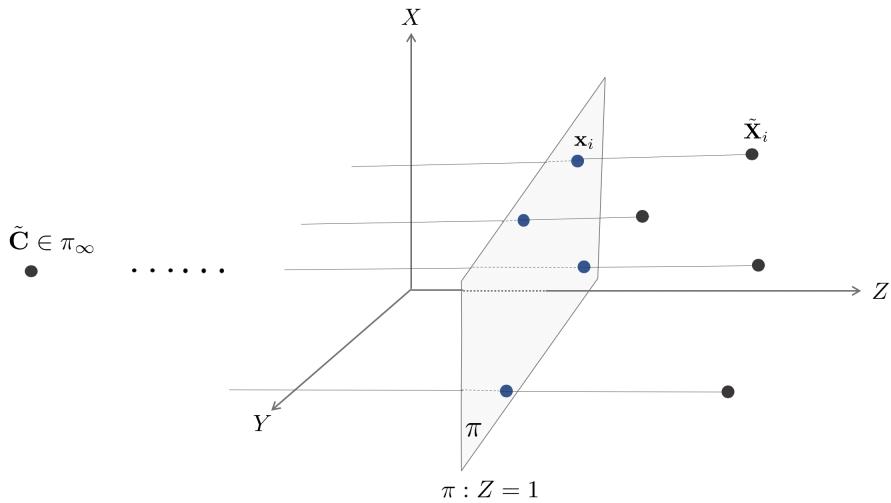
이 되고 Finite Projective 카메라의 경우  $\mathbf{m}_{3,row} = \mathbf{r}_{3,row} = 1$ 이 된다.  
깊이 값은  $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{X}$ 의 세 번째 행인  $w$ 이므로

$$\begin{aligned}
 w &= (\mathbf{P}\mathbf{X})_{3, \text{row}} \\
 &= (\mathbf{P}(\mathbf{X} - \mathbf{C}))_{3, \text{row}} \\
 &= (\tilde{\mathbf{X}} - \tilde{\mathbf{C}})\mathbf{m}_{3, \text{row}}
 \end{aligned} \tag{115}$$

와 같이 구할 수 있다. 결론적으로  $\det(\mathbf{M})$ 의 부호에 따라 깊이 값이 카메라 뒤쪽에 위치할 수 있으므로 이를 고려하여 나타내면 다음과 같다.

$$\text{depth}(\mathbf{X}; \mathbf{P}) = \frac{\text{sign}(\det(M))w}{\|\mathbf{m}_{3, \text{row}}\|} \tag{116}$$

### Cameras at infinity



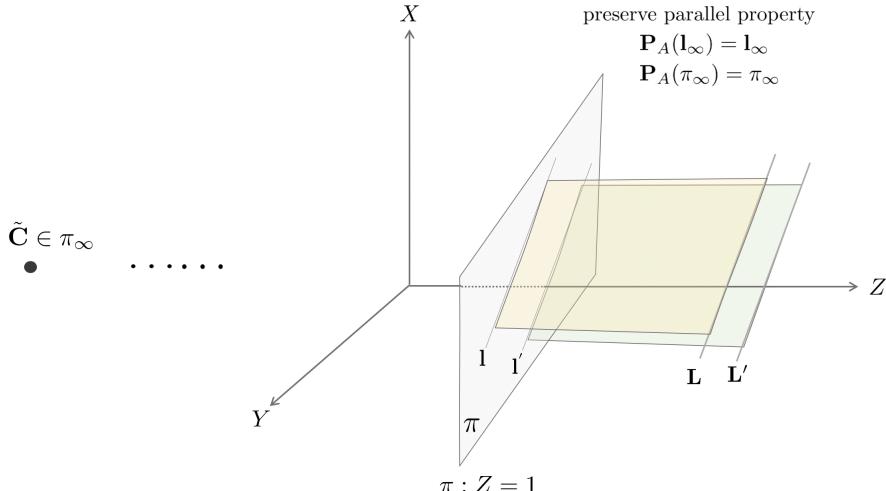
임의의 General Projective 카메라의 중심점  $C$ 가 무한대 평면  $\pi_\infty$ 에 존재하는 경우 이를 무한대 카메라 (camera at infinity)라고 한다.

$$\mathbf{C} = (*, *, *, 0)^T \in \pi_\infty \tag{117}$$

이와 동치(equivalent)인 경우는 카메라 행렬  $\mathbf{P} = [\mathbf{M} \mid \mathbf{p}_{4, \text{col}}]$ 가 주어졌을 때 행렬  $\mathbf{M}$ 가 singular한 경우이다.

무한대 카메라는 크게 Affine 카메라와 Non-affine 카메라로 분류된다.

### Definition 6.3

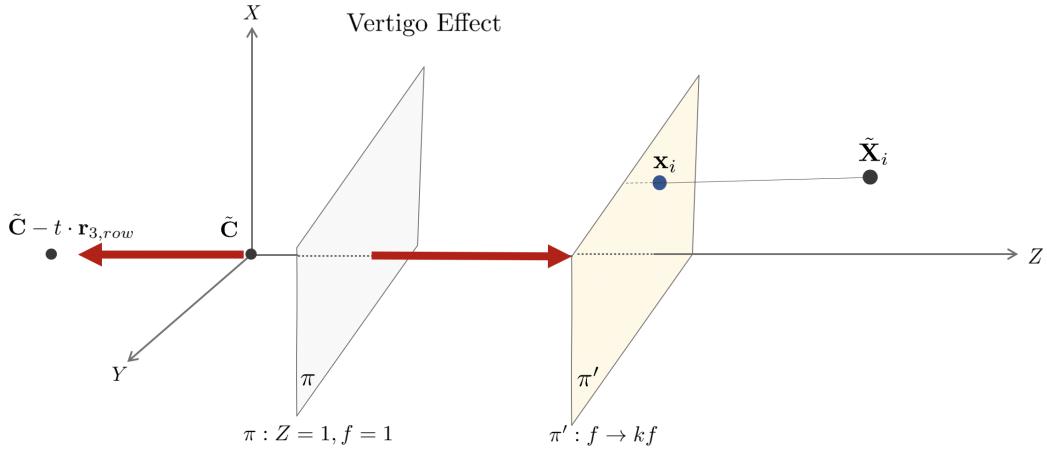


Affine 카메라  $\mathbf{P}_A$ 는 무한대 평면을 프로젝션했을 때 동일하게 무한대 평면이 되는 카메라를 의미한다.

$$\mathbf{P}_A(\pi_\infty) = \pi_\infty \quad (118)$$

이 때,  $\mathbf{P}_A = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}$  꼴이다.

### Affine cameras



Finite Projective 카메라 행렬  $\mathbf{P} = \mathbf{KR}[\mathbf{I} | 0]$ 가 있고 월드 상의 물체가 존재한다고 하자. 이 때, 물체에 대한 Zoom In을 수행하면서 동시에 카메라를 주축의 반대 방향으로 움직이면 Vertigo Effect가 발생한다. Vertigo Effect는 히치콕 감독의 영화 Vertigo에서 해당 기법을 처음 사용해서 붙은 이름이다.

이를 수식적으로 이해하기 위해 월드 상 물체의 깊이(depth) 값에 대해 다시 생각해보면 카메라의 중심점  $\tilde{\mathbf{C}}$ 가 있고 월드 상의 점  $\tilde{\mathbf{X}}$ 가 주어졌을 때 깊이 값  $d$ 는

$$d = -(\tilde{\mathbf{X}} - \tilde{\mathbf{C}})\mathbf{r}_{3, row} \quad (119)$$

이다. 이 때,  $\mathbf{r}_{3, row}$ 는 회전행렬  $\mathbf{R}$ 의 세 번째 행벡터이고 주축(principal axis)를 의미한다. 다음으로 카메라 중심점과 월드의 원점 사이의 거리를  $d_0$ 라고 하면 위 공식에서  $\tilde{\mathbf{X}} = 0$ 인 경우에 해당하므로

$$d_0 = -\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{r}_{3, row} \quad (120)$$

이 된다.

카메라를 주축의 반대 방향으로 움직이면 카메라의 중심점  $\tilde{\mathbf{C}}$ 는

$$\tilde{\mathbf{C}} - t \cdot \mathbf{r}_{3, row} \quad (121)$$

이 되고 이 때,  $t$ 는 시간을 의미한다. 카메라가 뒤로 움직일 때 시간에 따른 카메라 행렬은

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_t &= \mathbf{KR}[\mathbf{I} | -(\tilde{\mathbf{C}} - t \cdot \mathbf{r}_{3, row})] \\ &= \mathbf{K} \begin{bmatrix} & -\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{r}_{1, row} \\ \mathbf{R} & -\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{r}_{2, row} \\ & t - \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{r}_{3, row} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{K} \begin{bmatrix} & -\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{r}_{1, row} \\ \mathbf{R} & -\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{r}_{2, row} \\ & d_0 + t \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (122)$$

이 된다. 따라서 카메라를 주축의 반대방향으로 움직이는 경우  $\mathbf{P}_t$ 는 (3, 4)항에만  $d_0 + t$ 가 추가된 형태가 된다.  $d_0 + t = d_t$ 라고 하면

$$\mathbf{P}_t = \mathbf{K} \begin{bmatrix} - & - & - & - \\ - & \text{no change} & - & - \\ - & - & - & d_t \end{bmatrix} \quad (123)$$

가 된다.

다음으로 카메라를 Zoom In 해보자. Zoom In을 수학적으로 표현하면 초점거리(focal length)  $f$ 의 크기를 늘려주는 것과 동일하다.

$$\text{Zoom In} : f \rightarrow kf \quad \forall k > 0 \quad (124)$$

Zoom In을 행렬로 표현하면 다음과 같다.

$$\mathbf{P} \rightarrow \begin{bmatrix} k & & \\ & k & \\ & & 1 \end{bmatrix} \mathbf{P} \quad (125)$$

이 때, 카메라를 주축의 방향으로 움직일 때 동시에 초점거리를  $k$ 배 하여 Zoom In하면 물체의 깊이(depth)는 변하지 않도록 하는 Vertigo Effect를 구현할 수 있다. 이 때 적절한 Zoom In 값  $k$ 는

$$k = d_t/d_0 \quad (126)$$

이다. 결국 시간에 따른 카메라 행렬  $\mathbf{P}_t$ 는

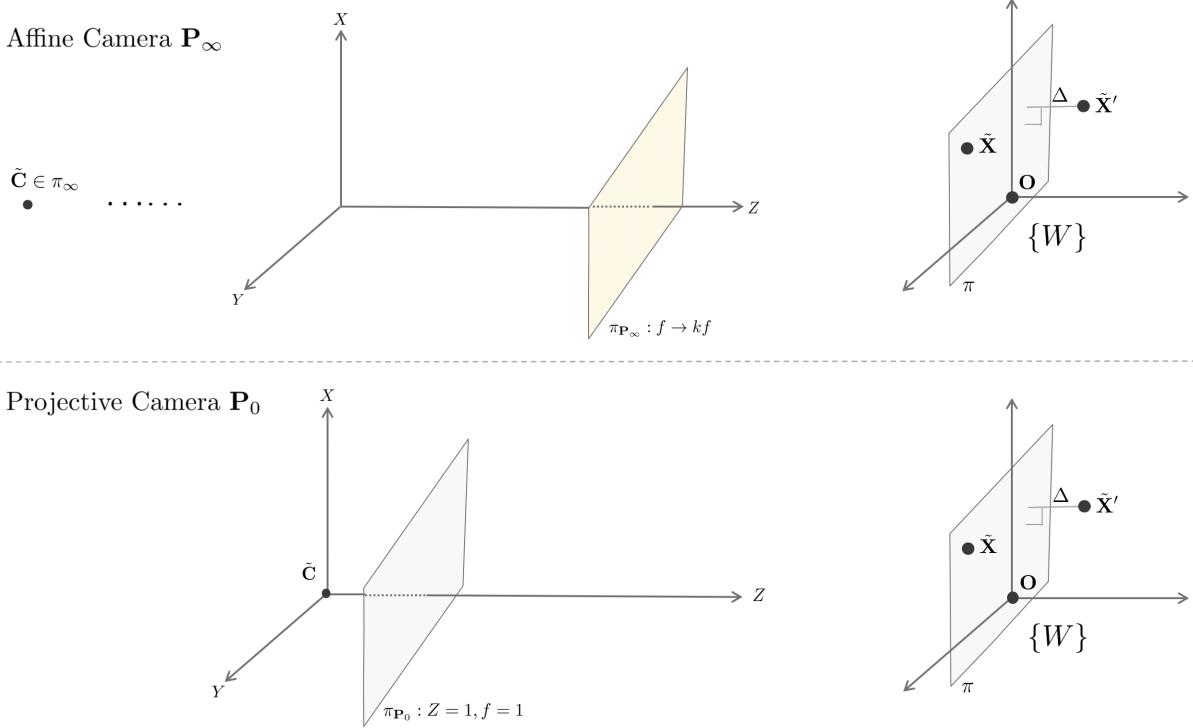
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} d_t/d_0 & & \\ & d_t/d_0 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \mathbf{P}_t &= \mathbf{K} \begin{bmatrix} d_t/d_0 & & \\ & d_t/d_0 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & * & * \\ & * & \\ & & d_t \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{k} \mathbf{K} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & d_0/d_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & * & * \\ & * & \\ & & d_t \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{k} \mathbf{K} \begin{bmatrix} - & - & - & - \\ - & \text{no change} & - & - \\ & & d_0/d_t \cdot \mathbf{r}_{3,\text{row}} & d_0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (127)$$

가 된다.  $\frac{1}{k}$ 는 스케일 값이므로 생략 가능하다. 시간이 무한히 흘렸다고 가정하면

$$\mathbf{P}_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}_t = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{1,\text{row}}^\top & -\mathbf{r}_{1,\text{row}}^\top \tilde{\mathbf{C}} \\ \mathbf{r}_{2,\text{row}}^\top & -\mathbf{r}_{2,\text{row}}^\top \tilde{\mathbf{C}} \\ \mathbf{0}^\top & d_0 \end{bmatrix} \quad (128)$$

가 된다. 위 식에서  $\mathbf{P}$ 의 세 번째 행의 세 개의 값들이  $0^\top$ 이므로 이는 곧 Affine 카메라이다.

## Error in employing and affine camera



해당 섹션에서는 General Projective 카메라와 Affine 카메라로 동일한 물체를 찍었을 때 얼마나 큰 차이가 있는지에 대해서 설명한다. General Projective 카메라는  $\mathbf{P}_0$ 로 표기하고 Affine 카메라는  $\mathbf{P}_{\infty}$ 로 표기하며 시간  $t$ 에 따른 카메라 행렬의 변화는  $\mathbf{P}_t$ 로 표기한다.

월드 좌표계의 원점을 포함하면서 카메라  $\mathbf{P}_t$ 의 이미지 평면과 수직인 평면  $\pi$ 가 주어졌을 때 앞서 설명한 Vertigo Effect(zoom in + backward moving)을 수행하면  $\pi$ 에 위치한 점들은  $\mathbf{P}_t$ 에 의해 얻어지는 이미지 상의 점들이  $t$ 에 대하여 일정하다.

이를 증명해보면 평면  $\pi$  상에 점  $\mathbf{X} \in \pi$ 가 주어졌을 때  $\pi$ 가 월드 좌표계의 원점을 포함하므로

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \alpha \mathbf{r}_{1, \text{row}} + \beta \mathbf{r}_{2, \text{row}} \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad (129)$$

같이 나타낼 수 있다. 이를  $\mathbf{P}_t$ 를 통해 프로젝션하면

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_t \mathbf{X} &= \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{1, \text{row}}^\top & -\mathbf{r}_{1, \text{row}}^\top \tilde{\mathbf{C}} \\ \mathbf{r}_{2, \text{row}}^\top & -\mathbf{r}_{2, \text{row}}^\top \tilde{\mathbf{C}} \\ d_0/d_t \cdot \mathbf{r}_{3, \text{row}} & d_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \mathbf{r}_{1, \text{row}} + \beta \mathbf{r}_{2, \text{row}} \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} * \\ * \\ d_0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (130)$$

$\because \mathbf{r}_{1, \text{row}} \cdot \mathbf{r}_{3, \text{row}} = \mathbf{r}_{2, \text{row}} \cdot \mathbf{r}_{3, \text{row}} = 0$

따라서 월드 좌표계의 원점을 포함하는 평면  $\pi$  상의 점  $\mathbf{X}$ 의 깊이(depth)는  $d_0$ 로 항상 일정하기 때문에 Vertigo Effect을 수행하면 시간  $t$ 에 관계없이 일정한 크기로 보인다. 즉, General Projective 카메라와 Affine 카메라에서  $\mathbf{X}$ 는 모두 동일한 이미지 상의 점으로 변환된다.

$$\mathbf{P}_0 \mathbf{X} = \mathbf{P}_t \mathbf{X} = \mathbf{P}_{\infty} \mathbf{X} \quad (131)$$

만약 월드 좌표계 원점을 지나면서 이미지 평면과 수직인 평면  $\pi$  상에 있는 점이 아닌, 평면  $\pi$ 로부터 거리가  $\Delta$  만큼 떨어져 있는 월드 상의 점  $\mathbf{X}'$ 를 두 카메라에서 찍는 경우  $\mathbf{P}_0 \mathbf{X}' \neq \mathbf{P}_{\infty} \mathbf{X}'$ 가 된다.  $\mathbf{X}'$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} \alpha \mathbf{r}_{1, \text{row}} + \beta \mathbf{r}_{2, \text{row}} + \Delta \mathbf{r}_{3, \text{row}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (132)$$

이 때,  $\mathbf{r}_{3, \text{row}}$ 는 카메라의 주축(principal axis)를 의미한다.  $\mathbf{X}'$ 를 두 카메라에 프로젝션하면

$$\mathbf{x}_{\text{proj}} = \mathbf{P}_0 \mathbf{X}' = \mathbf{K} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z}_{\text{proj}} \end{pmatrix} = \mathbf{K} \begin{pmatrix} \alpha - \mathbf{r}_{1, \text{row}}^\top \tilde{\mathbf{C}} \\ \beta - \mathbf{r}_{2, \text{row}}^\top \tilde{\mathbf{C}} \\ d_0 + \Delta \end{pmatrix} \quad (133)$$

$$\mathbf{x}_{\text{affine}} = \mathbf{P}_\infty \mathbf{X}' = \mathbf{K} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z}_{\text{affine}} \end{pmatrix} = \mathbf{K} \begin{pmatrix} \alpha - \mathbf{r}_{1, \text{row}}^\top \tilde{\mathbf{C}} \\ \beta - \mathbf{r}_{2, \text{row}}^\top \tilde{\mathbf{C}} \\ d_0 \end{pmatrix} \quad (134)$$

가 된다.  $\tilde{z}_{\text{proj}}$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \tilde{z}_{\text{proj}} &= [\mathbf{r}_{3, \text{row}} | - \mathbf{r}_{3, \text{row}} \tilde{\mathbf{C}}] \mathbf{X}' \\ &= [\mathbf{r}_{3, \text{row}} | - \mathbf{r}_{3, \text{row}} \tilde{\mathbf{C}}] \begin{pmatrix} \alpha \mathbf{r}_{1, \text{row}} + \beta \mathbf{r}_{2, \text{row}} + \Delta \mathbf{r}_{3, \text{row}} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= -\mathbf{r}_{3, \text{row}} \tilde{\mathbf{C}} + \Delta \\ &= d_0 + \Delta \end{aligned} \quad (135)$$

카메라 캘리브레이션 행렬  $\mathbf{K}$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{2 \times 2} & \tilde{\mathbf{x}}_0 \\ \tilde{\mathbf{0}}^\top & 1 \end{bmatrix} \quad (136)$$

이 때,  $\mathbf{K}_{2 \times 2}$ 는  $2 \times 2$  크기의 상삼각(upper-triangular)행렬을 의미하고  $\tilde{\mathbf{x}}_0 = (x_0 \ y_0)^\top$ 은 이미지 평면의 원점을 의미한다. 이를 고려하여 위 공식들을 다시 정리해보면

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\text{proj}} &= \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{2 \times 2} \tilde{\mathbf{x}} + (d_0 + \Delta) \tilde{\mathbf{x}}_0 \\ d_0 + \Delta \end{pmatrix} \\ \mathbf{x}_{\text{affine}} &= \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{2 \times 2} \tilde{\mathbf{x}} + d_0 \tilde{\mathbf{x}}_0 \\ d_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (137)$$

와 같다. 이 때  $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x} \ \tilde{y})^\top$ 을 의미한다. 두 점  $\mathbf{x}_{\text{proj}}$ 와  $\mathbf{x}_{\text{affine}}$ 의 Inhomogeneous 좌표를 계산해보면 마지막 항으로 나눈 값이 되므로

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_{\text{proj}} &= \tilde{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{K}_{2 \times 2} \tilde{\mathbf{x}} / (d_0 + \Delta) \\ \tilde{\mathbf{x}}_{\text{affine}} &= \tilde{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{K}_{2 \times 2} \tilde{\mathbf{x}} / d_0 \end{aligned} \quad (138)$$

가 된다. 결론적으로 General Projective 카메라와 Affine 카메라를 통해 프로젝션한 두 점의 차이는 다음과 같다.

$$\tilde{\mathbf{x}}_{\text{affine}} - \tilde{\mathbf{x}}_0 = \frac{d_0 + \Delta}{d_0} (\tilde{\mathbf{x}}_{\text{proj}} - \tilde{\mathbf{x}}_0) \quad (139)$$

위 공식을 Discrepancy Equation이라고 부르며  $\Delta = 0$ 인 경우, 월드 좌표계의 원점을 포함하면서 이미지 평면과 수직인 평면  $\pi$  상의 점인 경우, 두 카메라를 통해 촬영한 물체는 동일한 이미지 상의 점으로 프로젝션된다는 것을 의미한다. 영화 Vertigo 또는 Jaws를 보면 이와 같은 현상을 볼 수 있는데 주인공의 얼굴이 변하지 않으면서 주변의 환경이 Zoom Out되는 것을 볼 수 있다.

## 4 Computation of the Camera Matrix $\mathbf{P}$

해당 섹션에서는  $\mathbb{P}^3$  공간 상의 점  $\mathbf{X}_i$ 와  $\mathbb{P}^2$  공간 상의 점  $\mathbf{x}_i$ 들의 대응쌍  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{X}_i)$  여러개를 사용하여 카메라 행렬  $\mathbf{P}$ 를 수치적으로 구하는 방법에 대해 설명한다. 이러한 방법을 일반적으로 Resectioning 또는 Calibration이라고 부른다.

## Basic equations

대응점 쌍  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{X}_i)$ 가 주어졌을 때 두 점 사이의 대응관계는 다음과 같다.

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{P}\mathbf{X}_i \quad (140)$$

이 때,  $\mathbf{P}\mathbf{X}_i$ 는

$$\mathbf{P}\mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{1, row}^\top \\ \mathbf{p}_{2, row}^\top \\ \mathbf{p}_{3, row}^\top \end{bmatrix} \mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{1, row}^\top \mathbf{X}_i \\ \mathbf{p}_{2, row}^\top \mathbf{X}_i \\ \mathbf{p}_{3, row}^\top \mathbf{X}_i \end{bmatrix} \quad (141)$$

와 같이 행벡터(row vector)를 사용하여 나타낼 수 있다. 이 때,  $\mathbf{p}_{i, row} \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ 인 벡터를 의미한다.  $\mathbf{x} = (x \ y \ w)^\top$ 라고 하면  $\mathbf{x}_i \times \mathbf{P}\mathbf{X}_i = 0$ 이므로

$$\mathbf{x}_i \times \mathbf{P}\mathbf{X}_i = \begin{pmatrix} y_i \cdot \mathbf{p}_{2, row}^\top \mathbf{X}_i - w_i \cdot \mathbf{p}_{3, row}^\top \mathbf{X}_i \\ w_i \cdot \mathbf{p}_{1, row}^\top \mathbf{X}_i - x_i \cdot \mathbf{p}_{3, row}^\top \mathbf{X}_i \\ x_i \cdot \mathbf{p}_{2, row}^\top \mathbf{X}_i - y_i \cdot \mathbf{p}_{1, row}^\top \mathbf{X}_i \end{pmatrix} = 0 \quad (142)$$

과 같다. 이를  $\mathbf{Ap} = 0$  형태로 정리하면

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}^\top & -w_i \mathbf{X}_i^\top & y_i \mathbf{X}_i^\top \\ w_i \mathbf{X}_i^\top & \mathbf{0}^\top & -x_i \mathbf{X}_i^\top \\ -y_i \mathbf{X}_i^\top & x_i \mathbf{X}_i^\top & \mathbf{0}^\top \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{1, row} \\ \mathbf{p}_{2, row} \\ \mathbf{p}_{3, row} \end{pmatrix} = 0 \quad (143)$$

이 된다. 이 때 좌측 행렬의 마지막 행(row)은 선형의존이므로 첫 번째 행과 두 번째 행만 표현하면

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}^\top & -w_i \mathbf{X}_i^\top & y_i \mathbf{X}_i^\top \\ w_i \mathbf{X}_i^\top & \mathbf{0}^\top & -x_i \mathbf{X}_i^\top \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{1, row} \\ \mathbf{p}_{2, row} \\ \mathbf{p}_{3, row} \end{pmatrix} = 0 \quad (144)$$

과 같다. 이 때, 행렬  $\mathbf{A}$ 는  $\mathbb{R}^{2n \times 12}$  크기이고 벡터  $\begin{pmatrix} \mathbf{p}_{1, row} \\ \mathbf{p}_{2, row} \\ \mathbf{p}_{3, row} \end{pmatrix}$ 는  $12 \times 1$  크기이다. 위 방정식은  $\mathbf{Ap} = 0$  형태이므로 특이값 분해(SVD) 같은 방법을 통해 벡터  $\mathbf{p}$ 를 구할 수 있다.

## Minimal solution

벡터  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{12}$ 를 스케일을 제외하고(up to scale) 구하기 위해서는 총 11개의 식이 필요하다. 하나의 대응점 쌍  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{X}_i)$ 을 사용하면 2개의 식이 도출되므로  $\mathbf{p}$ 를 구하기 위해서는 최소 5.5개의 대응점 쌍이 필요하다. 노이즈가 없는 5.5개의 대응점 쌍이 주어진 경우 행렬  $\mathbf{A}$ 의 rank가 11가 되어 Null Space 벡터가 유일한 해 벡터  $\mathbf{p}$ 가 된다.

## Over-determined solution

일반적으로 대응점 쌍  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{X}_i)$ 은 6개보다 훨씬 많은 개수를 얻을 수 있으며 데이터가 노이즈를 포함하고 있으므로 행렬  $\mathbf{A}$ 의 rank가 12가 된다. 따라서 Null Space가 존재하지 않으므로 해 벡터  $\mathbf{p}$ 를 구할 수 없다. 이러한  $\mathbf{Ap} = 0$  선형 시스템을 Over-determined 시스템이라고 하며 이 때는  $\|\mathbf{p}\| = 1$ 인 경우에 대하여  $\|\mathbf{Ap}\|$ 의 크기가 최소가 되는 근사해  $\hat{\mathbf{p}}$ 를 구해야 한다.

## Degenerate configurations

5.5개 이상의 대응점 쌍  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{X}_i)$ 이 서로 선형독립이 아닐 경우 유일한 해 벡터  $\mathbf{p}$ 를 결정할 수 없게 되고 이러한 대응점 쌍들을 Degenerate Configuration이라고 한다. 유일한 해 벡터  $\mathbf{p}$ 를 결정할 수 없다는 의미는 월드 상의 한 점  $\mathbf{X}$ 에 대하여

$$\begin{gathered} {}^3\mathbf{P}', \quad \mathbf{P} \neq \mathbf{P}' \\ \mathbf{P}\mathbf{X}_i = \mathbf{P}'\mathbf{X}_i \quad \forall i \end{gathered} \quad (145)$$

를 만족하는 임의의 다른 카메라 행렬  $\mathbf{P}'$ 이 존재한다는 의미이다. 이는 특정 상수  $\theta$ 에 대해  $\mathbf{P}\mathbf{X} = -\theta\mathbf{P}'\mathbf{X}$  또한 성립한다는 의미와 동일하므로 이를 정리하면

$$\underbrace{(\mathbf{P} + \theta\mathbf{P}')}_{\mathbf{P}_\theta} \mathbf{X} = 0 \quad \text{for some } \theta \quad (146)$$

와 같고  $\mathbf{P}_\theta \mathbf{X} = 0$ 을 만족하는 월드 상의 점  $\mathbf{X}$ 는  $\mathbf{P}$ 와  $\mathbf{P}'$ 을 구분할 수 없다. 이와 같이  $\mathbf{P}, \mathbf{P}'$ 에 의해 같은 이미지 평면 상의 점으로 옮겨지는  $\mathbf{X}$ 의 집합을  $\mathcal{S}_\theta$ 라고 하면

$$\mathcal{S}_\theta = \{\mathbf{X} \mid \mathbf{P}_\theta \mathbf{X} = 0\} \quad (147)$$

$\mathcal{S}_\theta$ 를 만족하는 월드 상의 점  $\mathbf{X}$ 는 다음과 같다.

- 모든  $\mathbf{X}_i$ 들이 Twisted Cubic 상에 위치한 경우
- 모든  $\mathbf{X}_i$ 들이 동일한 평면 위에 존재하며 카메라 중심점을 포함한 직선 위에 존재하는 경우

Twisted Cubic이란  $\mathbb{P}^3$  공간 상에 존재하는 곡선을 의미한다. Twisted Cubic  $\mathbf{C}_\theta$ 으로 구성된 집합  $\mathcal{C}_\theta$ 는

$$\mathcal{C}_\theta = \{\mathbf{C}_\theta \mid \mathbf{P}_\theta \mathbf{C}_\theta = 0 \text{ and } \mathbf{P}_\theta \text{'s rank is 3}\} \quad (148)$$

을 만족하는 집합을 의미한다. 이 때,  $\mathbf{C}_\theta$ 는 3차식의 형태로 나타나는데 중근으로 인해 Twisted Cubic이 아닌 경우도 있으나 일반적으로 Twisted Cubic을 의미한다.  $\mathbf{P}_\theta \mathbf{C}_\theta = 0$ 이고  $\mathbf{P}_\theta$ 의 rank가 3이므로  $\mathbf{C}_\theta$ 는  $\mathbf{P}_\theta$ 의 행공간(row space)에 들어가 있다는 의미가 된다.

$$\mathbf{C}_\theta = \text{Row } \mathbf{P}_\theta \quad (149)$$

따라서  $\mathbf{C}_\theta = (c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4)$  일 때

$$\det \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ - & - & - & - \\ - & \mathbf{P}_\theta & - & - \\ - & - & - & - \end{pmatrix} = 0 \quad (150)$$

이 성립한다. 이를 전개하면  $\det(2 3 4)c_1 - \det(1 3 4)c_2 + \det(1 2 4)c_3 - \det(1 2 3)c_4 = 0$ 이 되고 이 때,  $\det(a \ b \ c)$ 는 행렬  $\mathbf{P}_\theta$ 의  $a, b, c$  행과 열의 서브행렬식(sub-determinant, subminor)를 의미한다. 이를 통해  $\mathbf{C}_\theta$ 를 다시 정리하면

$$\mathbf{C}_\theta = (\det(2 3 4), -\det(1 3 4), \det(1 2 4), -\det(1 2 3)) \quad (151)$$

으로 나타낼 수 있고 각각의 항들이 전부 3차식인 Twisted Cubic이 된다.  $\mathbf{P}, \mathbf{P}'$ 에 따라  $\mathbf{C}_\theta$ 의 모든 항들이 공통근을 가질 수 있고 각 항들의 차수가 3차 이하로 떨어질 수 있다. 이러한 경우를  $\mathbf{C}_\theta$ 의 Degenerate Configuration이라고 부르며 이러한  $\mathbf{C}_\theta$ 는 Twisted Cubic이 아니다.

### Line correspondences

월드 상의 한 직선  $\mathbf{L}$ 을 카메라 행렬  $\mathbf{P}$ 로 프로젝션하여 이미지 평면 상의 직선  $\mathbf{l}$ 을 얻었을 경우 점과 달리 직선은  $\mathbf{l} \neq \mathbf{PL}$ 이다.

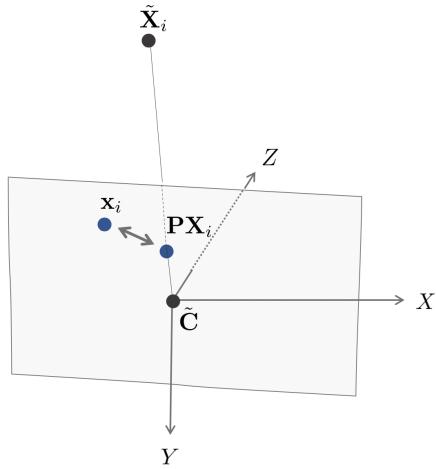
$$\mathbf{x} = \mathbf{PX} \quad \text{but, } \mathbf{l} \neq \mathbf{PL} \quad (152)$$

직선  $\mathbf{L}$  상의 한 점  $\mathbf{X}$ 를 카메라에 프로젝션하여 얻은 점  $\mathbf{x}$ 는 직선  $\mathbf{l}$  위에 존재하므로

$$\begin{aligned} \mathbf{l}^\top \mathbf{x} &= \mathbf{l}^\top \mathbf{PX} = 0 \\ \Rightarrow \mathbf{Ap} &= 0 \end{aligned} \quad (153)$$

와 같은 벡터  $\mathbf{p}$ 에 대한 선형 방정식이 성립한다. 따라서 월드 상의 직선  $\mathbf{L}$  위에 존재하는 여러 점들  $\mathbf{X}_i$ 를 사용하면 벡터  $\mathbf{p}$ 에 대한 선형 방정식이 성립하여 이를 통해 카메라 행렬  $\mathbf{P}$ 를 구할 수 있다.

## Geometric error



앞서 설명한 방법과 같이 대응점 쌍  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{X}_i)$ 를 이용하여  $\mathbf{Ap} = 0$  형태의 Over-determined 선형시스템을 구성한 후  $\|\mathbf{p}\| = 1$ 이면서  $\|\mathbf{Ap}\|$ 의 크기를 최소화하는 근사해 벡터  $\hat{\mathbf{p}}$ 를 구할 수 있다. 해당 섹션에서는 더욱 정확한 카메라 행렬  $\mathbf{P}$ 를 구하기 위해 기하학적 에러(geometric error)를 최소화하는 방법에 대해 설명한다. **기하학적 에러는 이미지 평면 상에서 이미 주어진  $\mathbf{x}_i$ 와 월드 상의 점  $\mathbf{X}_i$ 를 프로젝션한  $\mathbf{PX}_i$  사이의 피셀 거리를 의미한다.** 실제 데이터에서는 노이즈로 인해  $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{PX}_i$ 이므로 두 점 사이의 거리  $d(\mathbf{x}_i, \mathbf{PX}_i)$ 를 최소화해주는 최적의 카메라 행렬  $\mathbf{P}$ 를 찾아야 한다.

$$\min_{\mathbf{P}} d(\mathbf{x}_i, \mathbf{PX}_i)^2 \quad (154)$$

$d(\mathbf{x}_i, \mathbf{PX}_i)^2$ 는 일반적으로 비선형이므로 비선형 최소제곱법(non-linear least squares) 방법들인 Gauss-Newton(GN) 또는 Levenberg-Marquardt(LM) 등과 같은 방법을 통해 최적의 카메라 행렬  $\mathbf{P}$ 를 구할 수 있다.

### Algorithm 7.1

- **Objective:** 주어진 대응점 쌍  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{X}_i)$ ,  $i = 1, \dots, 6, \dots$ 에 대하여  $\mathbf{P}$ 에 대한 MLE(maximum likelihood estimation) 값을 찾는다. 즉,  $\sum_i d(\mathbf{x}_i, \mathbf{PX}_i)^2$ 를 최소로하는 카메라 행렬  $\mathbf{P}$ 를 찾는다.
- **Normalization:** 이미지 포인트  $\mathbf{x}_i$ 를 정규화하는 행렬  $\mathbf{T}$ 를 통해  $\mathbf{x}_i \rightarrow \bar{\mathbf{x}}_i$ 로 정규화시키고 월드 상의 점  $\mathbf{X}_i$ 를 정규화하는 행렬  $\mathbf{U}$ 를 통해  $\mathbf{X}_i \rightarrow \bar{\mathbf{X}}_i$ 로 정규화시킨다. 정규화를 수행하지 않고 DLT(direct linear transformation)을 수행하는 경우  $\mathbb{P}^2, \mathbb{P}^3$  공간의 특성상 마지막 항의 값이 1로 매우 작고 나머지 항들은 매우 크므로 정상적인 해가 도출되지 않는다.
- **DLT:** 정규화된 대응점 쌍들을 앞서 설명한 Over-determined 시스템  $\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{p}} = 0$ 으로 구성한다. 다음으로  $\|\bar{\mathbf{p}}\| = 1$ 이며  $\|\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{p}}\|$ 를 최소화하는 근사해  $\bar{\mathbf{p}}$ 를 DLT를 통해 구한 후 이를 초기값  $\bar{\mathbf{P}}_0$ 으로 설정한다.
- **Minimize geometric error:** 다음과 같은 기하학적 에러를 GN 또는 LM 방법을 통해 최소화하여 최적의 정규화된 카메라 행렬  $\bar{\mathbf{P}}$ 를 계산한다.

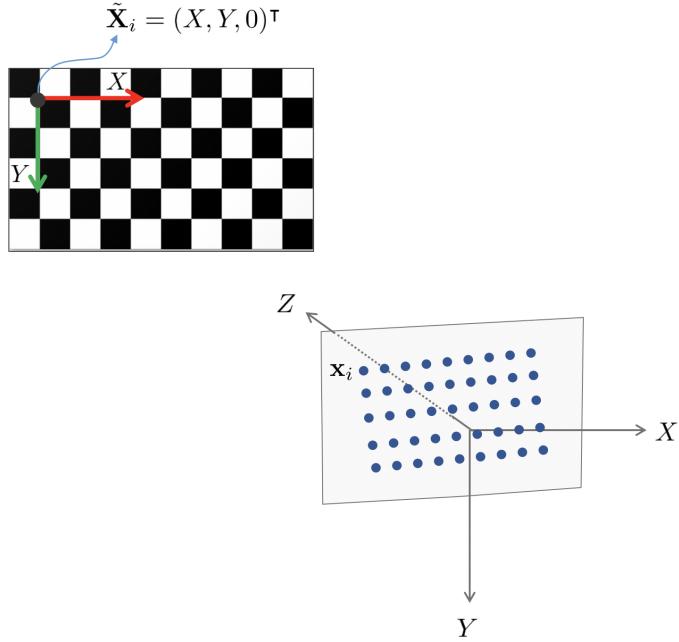
$$\min_{\mathbf{P}} \sum_i d(\bar{\mathbf{x}}_i, \bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{X}}_i)^2 \quad \text{start at } \bar{\mathbf{P}}_0 \quad (155)$$

- **Denormalization:** 정규화된 카메라 행렬을 다시 원래 카메라 행렬로 복원한다.

$$\mathbf{P} = \mathbf{T}^{-1} \bar{\mathbf{P}} \mathbf{U} \quad (156)$$

위 알고리즘을 일반적으로 **The Gold Standard algorithm for estimating P라고 한다.**

## Zhang's method



실제로 Gold Standard 알고리즘을 사용할 때는 임의의 대응점 쌍을 사용하는 것이 아닌 체커보드 상의 대응점 쌍을 사용한다. 이렇게 **체커보드를 통해 카메라 행렬 P를 추정하는 알고리즘을 Zhang's Method라고 한다.** 월드 상의 체커보드 평면  $\pi_0$ 가 주어졌을 때 월드 상의 원점을 체커보드의 좌측 상단으로 설정하고 체커보드의 평면이  $Z = 0$ 인 평면으로 설정한다.

$$\pi_0 = \{\mathbf{X} = (X, Y, Z)^\top \mid Z = 0\} \quad (157)$$

이에 따라 체커보드 평면  $\pi_0$  위의 임의의 점  $\mathbf{X}_i$ 들은  $Z = 0$ 인 점이 된다.

$$\mathbf{X}_i = (*, *, 0)^\top \quad (158)$$

체커보드 상의 한 점  $\mathbf{X} = (X, Y, 0, 1)^\top$ 를 프로젝션하면

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\mathbf{X} &= \mathbf{P} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{K}[\mathbf{R} \mid \mathbf{t}] \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{K}[\mathbf{r}_{1,col} \ \mathbf{r}_{2,col} \ \mathbf{t}] \mathbf{X} \end{aligned} \quad (159)$$

가 된다.  $z = 0$ 으로 행렬  $\mathbf{R}$ 의 세 번째 열벡터(column vector)는  $0$  된다. 행렬  $\mathbf{K}[\mathbf{r}_{1,col} \ \mathbf{r}_{2,col} \ \mathbf{t}] \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  는 체커보드 평면  $\pi_0$ 에서 이미지 평면  $\pi$ 로 변환하는 Homography  $\mathbf{H}$ 로 볼 수 있다.

$$\mathbf{H} = \mathbf{K}[\mathbf{r}_{1,col} \ \mathbf{r}_{2,col} \ \mathbf{t}] \quad (160)$$

체커보드는 패턴의 길이와 갯수를 모두 알고 있기 때문에 자동적으로 체커보드 평면  $\pi_0$  상의 점  $\mathbf{x}_i, i = 1, \dots$ 를 알 수 있다. 다음으로 Feature Extraction 알고리즘을 사용하면 이미지 평면  $\pi$  상에서 본  $\pi_0$ 의 점  $\mathbf{x}'_i, i = 1, \dots$ 들을 알 수 있다. 따라서 대응점 쌍  $\mathbf{x}_i \in \pi_0 \leftrightarrow \mathbf{x}'_i \in \pi$ 을 얻을 수 있다. 이를 통해  $\pi_0 \leftrightarrow \pi$ 로 가는 Homography  $\mathbf{H}$ 를 계산해보면

$$\mathbf{H} = [\mathbf{h}_{1,col} \ \mathbf{h}_{2,col} \ \mathbf{h}_{3,col}] = \mathbf{K} [\mathbf{r}_{1,col} \ \mathbf{r}_{2,col} \ \mathbf{t}] \quad (161)$$

가 된다. 이를 정리하면

$$\mathbf{K}^{-1} [\mathbf{h}_{1,col} \ \mathbf{h}_{2,col} \ \mathbf{h}_{3,col}] = [\mathbf{r}_{1,col} \ \mathbf{r}_{2,col} \ \mathbf{t}] \quad (162)$$

가 된다. 이 때, 직교행렬  $\mathbf{R}$ 의 열벡터인  $\mathbf{r}_{1,col}$ 과  $\mathbf{r}_{2,col}$ 은 서로 직교하므로  $\mathbf{r}_{1,col}^\top \mathbf{r}_{2,col} = 0$  성립한다. 해당 제약조건을 이용하면  $\mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_{1,col} = \mathbf{r}_{1,col}$ 이고  $\mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_{2,col} = \mathbf{r}_{2,col}$ 므로 직교조건에 의해

$$\mathbf{h}_{1,col}^T \mathbf{K}^{-\top} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_{2,col} = 0 \quad (163)$$

이 성립한다. 또한 직교행렬 조건에 의해 스케일을 제외하고(up to scale)  $\mathbf{r}_{1,col}^T \mathbf{r}_{1,col} = \mathbf{r}_{2,col}^T \mathbf{r}_{2,col}$  이므로

$$\mathbf{h}_{1,col}^T \mathbf{K}^{-\top} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_{1,col} = \mathbf{h}_{2,col}^T \mathbf{K}^{-\top} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_{2,col} \quad (164)$$

공식이 성립한다. 한 개의 체커보드 사진으로 부터 위와 같은 두 개의 방정식을 얻을 수 있다. 일반적인 카메라 캘리브레이션 행렬  $\mathbf{K}$ 는

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} f_x & s & x_0 \\ & f_y & y_0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad (165)$$

과 같이 5개의 변수를 가지고 있으므로  $\mathbf{K}^{-\top} \mathbf{K}^{-1}$  또한 5개의 변수를 가지고 있는 행렬이 된다. 따라서 최소 세 개 이상의 Homography  $\mathbf{H}_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ 가 주어졌을 때  $\mathbf{K}^{-\top} \mathbf{K}^{-1}$ 를 결정할 수 있다.

- 5개의 파라미터를 갖고 있는 행렬  $\mathbf{K}$ 를 구하기 위해 최소 세 개 이상의 체커보드 이미지를 획득한다. 하나의 이미지 당 두 개의 방정식을 얻을 수 있으므로 세 장 이상을 획득해야 한다. 각각의 이미지마다 Homography  $\mathbf{H}_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ 을 구할 수 있고 공식 (163), (164)를 구한다.
- $\mathbf{S} = \mathbf{K}^{-\top} \mathbf{K}^{-1}$ 로 설정한다. 행렬  $\mathbf{S}$ 에 Cholesky Decomposition 또는 특이값 분해(SVD)를 수행하여  $\mathbf{K}^{-1}$ 을 구한다. 행렬  $\mathbf{S}$ 는 대칭이면서 Positive Definite 행렬이므로  $\mathbf{U}^\top \mathbf{D} \mathbf{U}$ 와 같이 분해되며 대각행렬  $\mathbf{D}$ 의 제곱근 행렬이 존재한다.

$$\text{SVD}(\mathbf{S}) = \mathbf{U}^\top \mathbf{D} \mathbf{U} = (\mathbf{U} \sqrt{\mathbf{D}})(\mathbf{U} \sqrt{\mathbf{D}})^\top \quad (166)$$

이를 통해  $\mathbf{K}$ 를 구할 수 있다.

- $\mathbf{K}^{-1} \mathbf{H} = [\mathbf{r}_{1,col} \ \mathbf{r}_{2,col} \ \mathbf{t}]$  식을 통해  $\mathbf{r}_{1,col}, \mathbf{r}_{2,col}, \mathbf{t}$ 를 구한 다음

$$\mathbf{r}_{3,col} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 \quad (167)$$

를 통해 구한다. 결론적으로 각각의 Homography  $\mathbf{H}_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ 을 통해 카메라의 회전  $\mathbf{R}$ 과 이동  $\mathbf{t}$  그리고 내부 파라미터 행렬  $\mathbf{K}$ 를 구할 수 있다.

## Radial distortion

실제 카메라 이미지는 이상적인 편홀 카메라 모델과 다르게 방사형 왜곡(radial distortion)을 포함하고 있기 때문에 이를 바로 캘리브레이션하면 정확한  $\mathbf{R}, \mathbf{t}, \mathbf{K}$ 를 구할 수 없다. 실제 툴킷을 사용하여 캘리브레이션을 수행해보면 앞서 구한  $\mathbf{R}, \mathbf{t}, \mathbf{K}$  외에도 Distortion 파라미터들을 구할 수 있다. 해당 파라미터들이 이미지의 방사형 왜곡을 보정해주는 파라미터들이다.

초점거리(focal length)  $f$ 가 작은 경우 Field of View(FOV)가 넓어지고 이 때 이미지의 가장자리 부근에서 방사형 왜곡이 크게 발생한다. 반대로 초점거리  $f$ 가 작으면 FOV가 작아지고 왜곡이 상대적으로 덜 발생한다.

왜곡이 존재하는 이미지 평면 상에서 한 점을  $(\check{u}, \check{v})$ 라고 하고 왜곡이 보정된 이미지 평면 상의 점을  $(u, v)$ 라고 하자. 두 점들의 단위는 [pixel]이다. 그리고 정규화된 이미지 평면(normalized image plane) 상의 왜곡이 존재하는 한 점을  $(\check{x}, \check{y})$ 라고 하고 왜곡이 보정된 점을  $(x, y)$ 라고 하자. 두 정규화된 점들의 단위는 [mm]이다. 정규화되었다는 말의 의미는 이미지 평면의 원점  $u_0, v_0$ 가 모두 0이라는 의미이다. 정규화된 점들 사이에는

$$\begin{aligned} \check{x} &= x + x(k_1 r^2 + k_2 r^4) \\ \check{y} &= y + y(k_1 r^2 + k_2 r^4) \quad \text{where, } r^2 = x^2 + y^2 \end{aligned} \quad (168)$$

가 성립한다.  $r^2$  값은 원점에서 거리가 멀어질 수록 왜곡이 크게 발생하는 것을 의미한다. 해당 정규화된 점들을 픽셀 단위 이미지 평면 상의 점들로 다시 표현하면

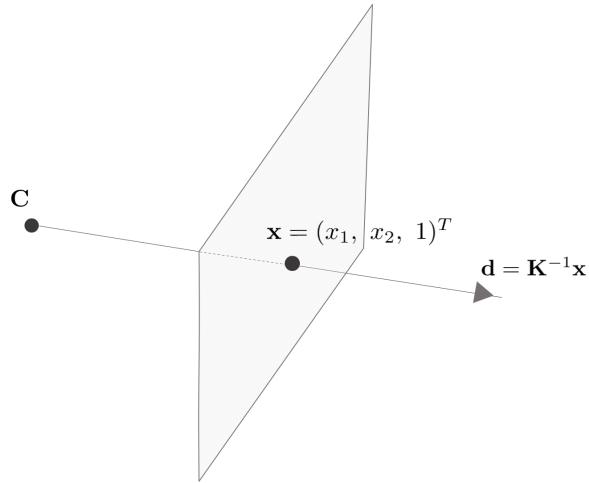
$$\begin{aligned} \check{u} &= u_0 + \alpha \check{x} \\ \check{v} &= v_0 + \beta \check{y} \end{aligned} \quad (169)$$

가 된다. 이 때  $u_0, v_0$ 는 이미지 평면의 원점을 의미하며  $\alpha, \beta$ 는 mm 단위의 점들을 pixel 단위로 변환해주는 계수를 의미한다. 따라서 방사형 왜곡 파라미터  $k_1, k_2$ 를 구함으로써 왜곡된 점들과 실제 점들 사이의 관계를 알 수 있다.

## 5 More Single View Geometry

Camera calibration and the image of the absolute conic

Result 8.15

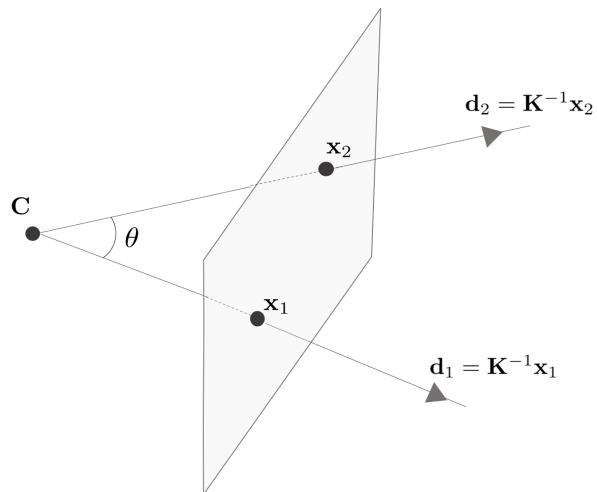


원점에 위치한 카메라  $C$ 가 있을 때 한 점  $x$ 를 Back-projection하면 카메라 중심을 지나는 직선  $d$ 가 생성되는데 이 때,  $d = K^{-1}x$ 의 관계를 가진다.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{P} \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{d} \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{K}[\mathbf{I}|0] \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{d} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K}\mathbf{d} \end{aligned} \quad (170)$$

따라서 다음의 공식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{K}\mathbf{d} \\ \mathbf{d} &= \mathbf{K}^{-1}\mathbf{x} \end{aligned} \quad (171)$$



이미지 평면 상의 두 점  $x_1, x_2$ 를 Back-projection하면 각각  $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ 의 직선이 생성되는데 이 때 두 직선이 이루는 각도는 다음과 같이 계산할 수 있다.

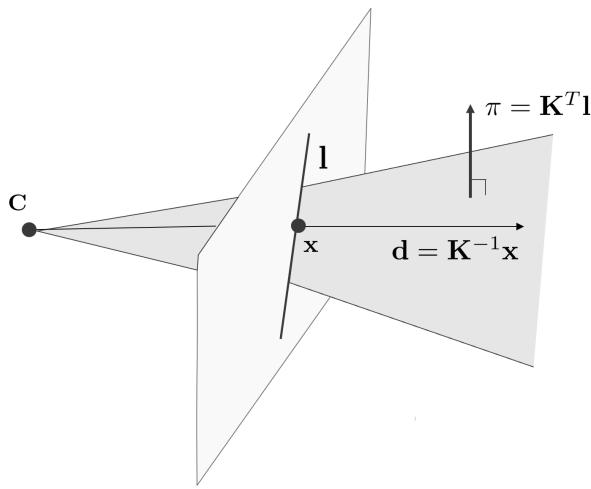
$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\mathbf{d}_1^T \mathbf{d}_2}{\sqrt{\mathbf{d}_1^T \mathbf{d}_1} \sqrt{\mathbf{d}_2^T \mathbf{d}_2}} = \frac{(\mathbf{K}^{-1} \mathbf{x}_1)^T (\mathbf{K}^{-1} \mathbf{x}_2)}{\sqrt{(\mathbf{K}^{-1} \mathbf{x}_1)^T (\mathbf{K}^{-1} \mathbf{x}_1)} \sqrt{(\mathbf{K}^{-1} \mathbf{x}_2)^T (\mathbf{K}^{-1} \mathbf{x}_2)}} \\ &= \frac{\mathbf{x}_1^T (\mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1}) \mathbf{x}_2}{\sqrt{\mathbf{x}_1^T \mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{x}_1} \sqrt{\mathbf{x}_2^T \mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{x}_2}}\end{aligned}\quad (172)$$

이 때,  $\mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1}$ 은 **Image of Absolute Conic**을 의미한다.

### Result 8.16

이미지 평면에 있는 직선  $\mathbf{l}$  위에 한 점  $\mathbf{x}$ 가 위치할 때, 점과 직선 사이에는 다음 공식이 성립한다.

$$\mathbf{x}^T \mathbf{l} = 0 \quad (173)$$



이 때,  $\mathbf{l}$ 를 Back-projection하면 평면  $\pi$ 가 생성되고  $\mathbf{x}$ 를 Back-projection하면  $\mathbf{d} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{x}$ 가 생성되는데 평면  $\pi$ 와 직선  $\mathbf{d}$  사이에는  $(\mathbf{K}^{-1} \mathbf{x})^T \pi = 0$ 이 성립하고 이를 정리하면  $\mathbf{x}^T (\mathbf{K}^{-T} \pi) = 0$ 가 성립한다.  $\mathbf{x}^T \mathbf{l} = 0$ 의 공식에 따라 결론적으로 다음 공식이 성립한다.

$$\begin{aligned}\mathbf{K}^{-T} \pi &= \mathbf{l} \\ \pi &= \mathbf{K}^T \mathbf{l}\end{aligned}\quad (174)$$

### The image of the absolute conic

무한대 평면  $\pi_\infty$ 가 있을 때  $\pi_\infty$  위에 위치한 무한대 점  $\mathbf{X}_\infty = (\mathbf{d}^T, 0)^T$ 이 있다고 하면 이를 카메라  $\mathbf{P} = \mathbf{KR}[\mathbf{I}] - \tilde{\mathbf{C}}$ 에 프로젝션시키면 다음과 같다.

$$\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{X}_\infty = \mathbf{KR}[\mathbf{I}] - \tilde{\mathbf{C}} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{KRd} \quad (175)$$

즉, 무한대 평면  $\pi_\infty$  위의 점  $\mathbf{d}$ 에 대해  $\mathbf{x} = \mathbf{Hd}$ 인 Homography가 존재한다고 했을 때 Homography  $\mathbf{H}$ 는  $\mathbf{H} = \mathbf{KR}$ 과 같다. 무한대에 위치한 Absolute Conic  $\Omega_\infty$ 는  $\mathbf{I}_3 \in \pi_\infty$ 이다.  $\Omega_\infty$ 를 Homography 변환하면

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(\Omega_\infty) &= \mathbf{H}^{-T} \mathbf{I}_3 \mathbf{H}^{-1} \\ &= (\mathbf{KR})^{-T} \mathbf{I}_3 (\mathbf{KR})^{-1} \\ &= \mathbf{K}^{-T} \mathbf{R}^{-T} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{K}^{-1} \\ &= \mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1}\end{aligned}\quad (176)$$

### Result 8.17

이에 따라 **Image of Absolute Conic  $w = K^{-\top}K^{-1}$** 이 된다.

이미지 상의 두 점  $x_1, x_2$ 를 Back-projection 했을 때, 두 직선이 이루는 각도는

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{x}_1^T \mathbf{w} \mathbf{x}_2}{\sqrt{\mathbf{x}_1^T \mathbf{w} \mathbf{x}_1} \sqrt{\mathbf{x}_2^T \mathbf{w} \mathbf{x}_2}} \quad (177)$$

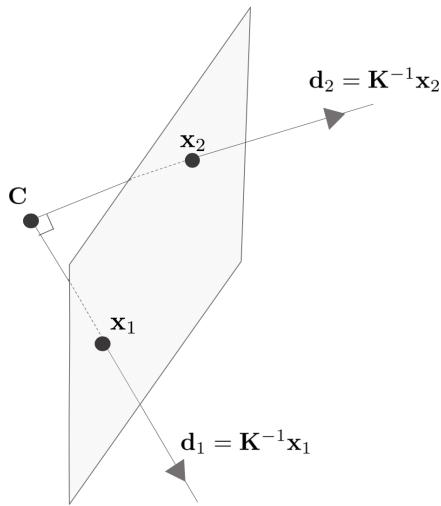
가 되고 이를 Homography 변환하면

$$\cos \theta = \frac{(\mathbf{H}x_1)^\top \mathbf{H}^{-\top} \mathbf{w} \mathbf{H}^{-1} (\mathbf{H}x_2)}{\sqrt{*} \sqrt{*}} \quad (178)$$

이 되므로 Homography 변환을 해도 두 각도는 여전히 보존된다. 만약 두 직선  $K^{-1}x_1$ 과  $K^{-1}x_2$ 가 직교하는 경우 다음 공식이 성립한다.

$$\mathbf{x}_1^T \mathbf{w} \mathbf{x}_2 = 0 \quad (179)$$

### Orthogonality and $w$



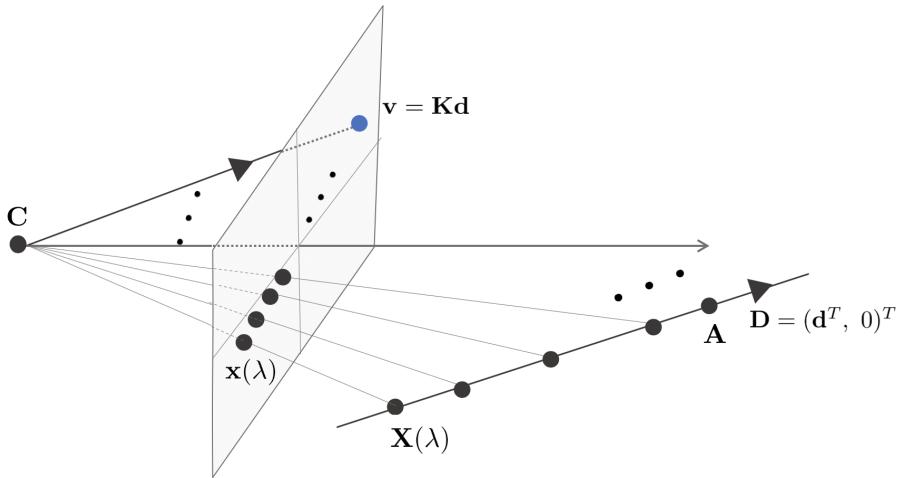
이미지 평면 상의 두 점  $x_1, x_2$ 를 Back-projection하면 두 직선  $K^{-1}x_1, K^{-1}x_2$ 가 생성된다. 만약 두 직선이 직교하는 경우  $\mathbf{x}_1^T \mathbf{w} \mathbf{x}_2 = 0$ 의 공식이 성립한다. 그리고  $x_1$ 가 직선 l에 포함되어 있으면  $\mathbf{x}_1^T \mathbf{l} = 0$ 이 성립한다.

### Result 8.19

위 두 공식을 결합하면

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1^T \mathbf{w} \mathbf{x}_2 &= 0 \\ \mathbf{x}_1^T \mathbf{l} &= 0 \\ \therefore \mathbf{l} &= \mathbf{w} \mathbf{x}_2 \end{aligned} \quad (180)$$

## Vanishing points and vanishing lines



월드 상의 점  $\mathbf{A}$ 와 직선의 방향  $\mathbf{D} = (\mathbf{d}^T, 0)^T$ 가 존재할 때 직선 위에 존재하는 점  $\mathbf{X}(\lambda)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{X}(\lambda) = \mathbf{A} + \lambda \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}} + \lambda \mathbf{d} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (181)$$

점  $\mathbf{X}(\lambda)$ 를 이미지 평면에 프로젝션한 점  $\mathbf{x}(\lambda) = \mathbf{P}\mathbf{X}(\lambda)$ , where  $\mathbf{P} = \mathbf{K}[\mathbf{I}|0]$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{x}(\lambda) = \mathbf{P}\mathbf{X}(\lambda) = \mathbf{P}\mathbf{A} + \lambda \mathbf{P}\mathbf{D} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{K}\mathbf{d} \quad (182)$$

이 때,  $\mathbf{a}$ 는 Image of  $\mathbf{A}$ 를 의미한다.

### Result 8.20

결론적으로 소실점(vanishing point)  $\mathbf{v}$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathbf{x}(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\mathbf{a} + \lambda \mathbf{K}\mathbf{d}) = \mathbf{K}\mathbf{d} \\ \mathbf{v} &= \mathbf{K}\mathbf{d} \end{aligned} \quad (183)$$

### Camera rotation from vanishing points

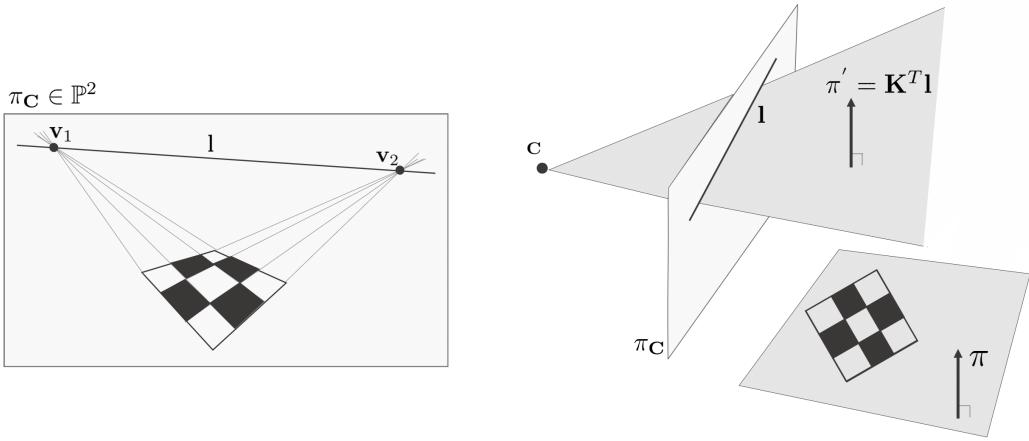
소실점을 사용하여 카메라의 회전을 계산할 수 있다. 이미지 1에서 추출한 소실점  $\mathbf{v}_1$ 과 이미지 2에서 추출한 소실점  $\mathbf{v}_2$ 이 있을 때,  $\mathbf{v}_1$ 의 방향은  $\mathbf{d}_1 = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{v}_1$ 이 되고  $\mathbf{v}_2$ 의 방향은  $\mathbf{d}_2 = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{v}_2$ 가 된다.

$\mathbf{K}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 의 값을 모두 알고 있다고 가정하면  $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ 의 값을 계산할 수 있게 되고 두 방향벡터는 다음과 같은 관계를 가진다.

$$\mathbf{d}_2 = \mathbf{R}\mathbf{d}_1 \quad (184)$$

이 때, 회전행렬  $\mathbf{R}$ 의 자유도는 3이므로 2개 이상의 소실점 쌍을 사용하면 회전행렬을 복원할 수 있다.

## Vanishing Lines



두 개 이상의 소실점(vanishing point)  $v_i, i = 1, 2, \dots$  를을 이어준 직선을 소실선(vanishing line)  $l$ 이라고 한다. 예를 들어 이미지 상의 체크보드가 있고 이로 인해 2개의 소실점  $v_1, v_2$ 를 구한 경우를 생각해보자. 이 경우, 두 소실점  $v_1, v_2$ 를 이어주는 직선  $l$ 을 체크보드 평면  $\pi$ 의 소실선이라고 한다.

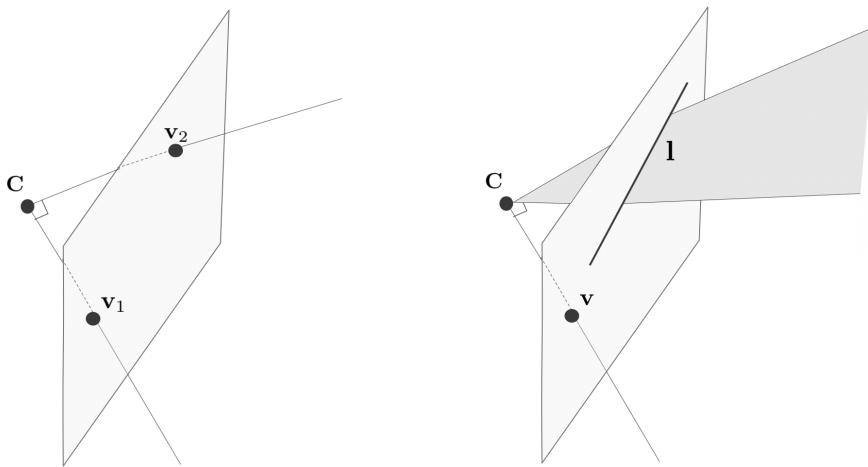
$$l = \text{image of } \pi \cap \pi_\infty \quad (185)$$

결론적으로 소실선  $l$ 은 카메라 중심을 포함하고 체크보드 평면  $\pi$ 과 평행인 평면  $\pi'$ 와 이미지 평면의 교집합을 의미한다.  $\pi'$ 는 소실선  $l$ 을 Back-projection함으로써 계산할 수 있다. 이 때 평면과 직선의 관계에 따라

$$\pi' = K^T l \quad (186)$$

과 같이 계산할 수 있다.

## Orthogonality relationships amongst vanishing points and lines



이미지 평면에서 두 개의 소실점  $v_1, v_2$ 를 Back-projection한 직선들이 서로 직교하는 조건은 다음과 같다.

$$v_1^\top w v_2 = 0 \quad (187)$$

이 때,  $w = K^{-\top} K^{-1}$ 은 Image of Absolute Conic이다.

이미지 평면에서 소실점  $v$ 을 Back-projection한 직선과 소실선  $l$ 을 Back-projection한 평면이 직교하는 조건은 다음과 같다.

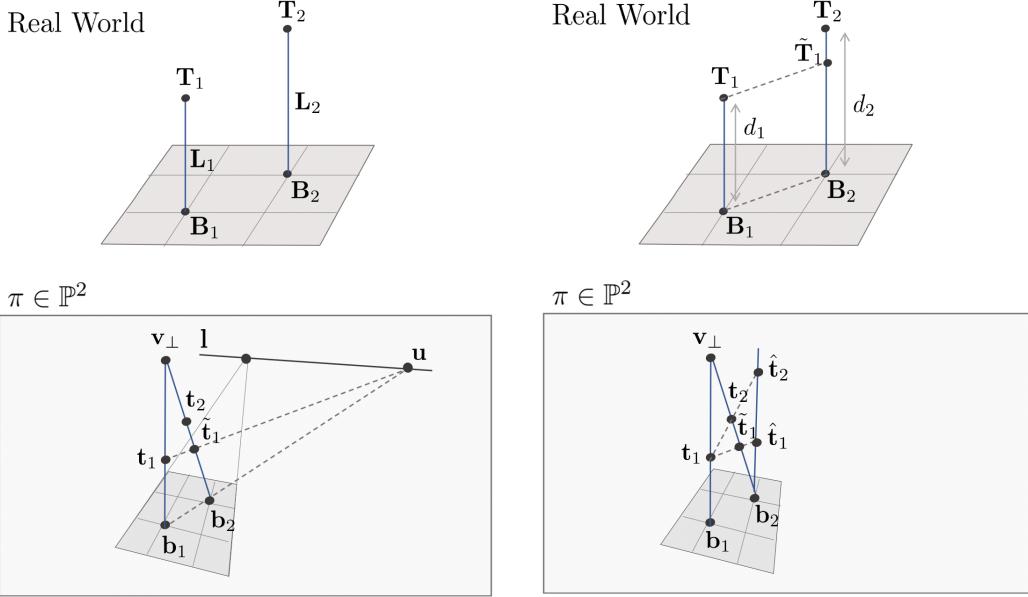
$$l = w v \quad (188)$$

이미지 평면에서 두 개의 직선  $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2$ 를 Back-projection한 두 평면들이 서로 직교하는 경우 다음을 만족 한다.

$$\mathbf{l}_1^T \mathbf{w}^* \mathbf{l}_2 = 0 \quad (189)$$

이 때,  $\mathbf{w}^*$ 는 Image of Dual Absolute Conic이다.

## Affine 3D measurements and reconstruction



3차원 공간 상의 평면  $\pi$ 에 수직인 물체들의 소실점을 수직소실점(vertical vanishing point)  $\mathbf{v}_\perp$ 라고 한다.

### Result 8.24

평면  $\pi$ 의 소실선  $\mathbf{l}$ 과 수직소실점을 이용하면 물체의 크기를 스케일을 제외한 파라미터(up to scale)까지 계산할 수 있다. 정확하게 말하면 **소실선  $\mathbf{l}$ 과 수직소실점  $\mathbf{v}_\perp$ 를 알면 평면  $\pi$ 에 수직한 선분들의 상대적 길이를 알 수 있다.**

예를 들면, 3차원 공간 상의 평면  $\pi$ 에 위치한 두 점  $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ 가 있고 이를 지나면서  $\pi$ 에 수직인 직선  $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$ 가 있다고 가정한다. 그리고 두 직선  $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$ 의 끝점  $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$ 가 있을 경우 **소실선  $\mathbf{l}$ 과 수직소실점  $\mathbf{v}_\perp$ 를 사용하여  $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$ 의 상대적 길이를 측정할 수 있다.**

우선, 모든 요소들을 이미지 평면에 프로젝션시킨다. 이 때,  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ 를 잇는 직선과 소실선  $\mathbf{l}$ 이 만나는 점을  $\mathbf{u}$ 라고 정의한다. 그리고  $\mathbf{t}_1$ 에서  $\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2$ 에 평행한 직선을 그으면 해당 직선은  $\mathbf{u}$ 와 접한다. 이 때  $\mathbf{t}_1 \mathbf{u}$ 와  $\mathbf{v}_\perp \mathbf{b}_2$ 가 만나는 교점을  $\tilde{\mathbf{t}}_1$ 이라고 한다.

다음으로  $\mathbf{v}_\perp \mathbf{b}_2$  직선을  $\mathbb{P}^1$  공간의 수직소실점  $\mathbf{v}_\perp$ 는 무한대의 점  $(1, 0)$ 이 되고  $\mathbf{b}_1$ 은 원점  $(0, 1)$ 되는 직선으로 프로젝션시킨다. 이 때 사용하는 Homography  $\mathbf{H}_{2 \times 2}$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{H}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\mathbf{v}_\perp \end{bmatrix} \quad (190)$$

$\mathbf{H}_{2 \times 2}$ 는 Cross-Ratio를 보장한다. 다음으로 길이의 비를 이용하여  $d_1 : d_2 = \mathbf{b}_1 \tilde{\mathbf{t}}_1 : \mathbf{b}_1 \mathbf{t}_2$ 의 비율을 구한다.

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\tilde{\mathbf{t}}_1(\mathbf{v}_\perp - \mathbf{t}_2)}{\mathbf{t}_2(\mathbf{v}_\perp - \tilde{\mathbf{t}}_1)} \quad (191)$$

만약, 수직소실점  $\mathbf{v}_\perp$ 와 카메라의 주축(principal axis)이 수직인 경우 이미지 상에서 수직소실점은 만나지 않게 되고 아래와 같이 단순하게 비율을 계산할 수 있다.

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\tilde{\mathbf{t}}_1 - \mathbf{b}_2}{\mathbf{t}_2 - \mathbf{b}_2} \quad (192)$$

## Determining camera calibration $\mathbf{K}$ from a single view

단안 이미지에서 내부 파라미터  $\mathbf{K}$ 를 결정하기 위해서는 2가지 제약조건이 필요하다. [이미지 제약조건\(scene constraint\)](#)과 [내부 파라미터의 제약조건\(internal constraint\)](#)이 있다.

이미지 제약조건으로는 이미지 평면에 존재하는 서로 수직인 두 소실점  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 가 있을 경우  $\mathbf{v}_1^\top \mathbf{w} \mathbf{v}_2 = 0$  가 있고, 소실선  $\mathbf{l}$ 과 소실점  $\mathbf{v}$ 가 직교하는 경우 이들의 Back-projection은  $\mathbf{l} = \mathbf{w}\mathbf{x}$ 가 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1^\top \mathbf{w} \mathbf{v}_2 &= 0 \\ \mathbf{l} \times (\mathbf{w} \mathbf{v}) &= 0 \end{aligned} \quad (193)$$

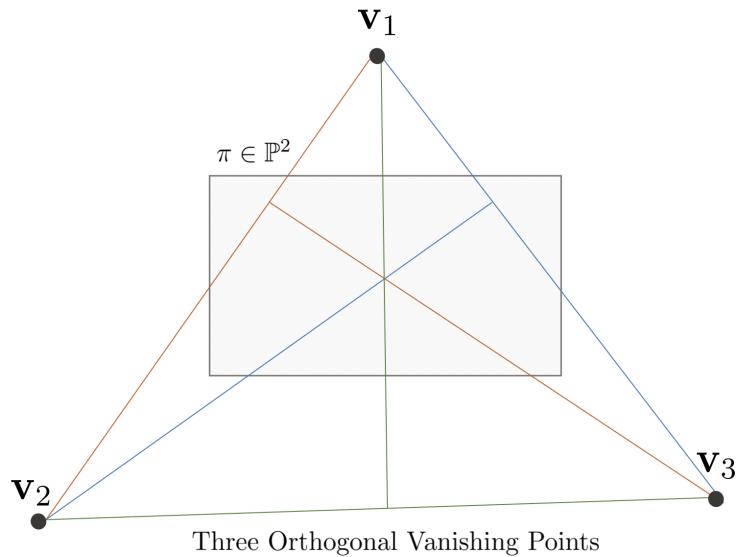
### Result 8.26

내부 파라미터 제약조건으로는  $\mathbf{K}$ 가 Zero-Skew인 경우  $w_{12} = w_{21} = 0$  있고 또한, Square Pixels인 경우  $w_{12} = w_{21} = 0, w_{11} = w_{22}$ 가 있다.

$$\begin{aligned} w_{12} &= w_{21} \quad \text{for zero skew} \\ w_{12} &= w_{21} = 0, w_{11} = w_{22} \quad \text{for square pixel} \end{aligned} \quad (194)$$

위와 같이  $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_4 \\ w_2 & w_3 & w_5 \\ w_4 & w_5 & w_6 \end{bmatrix}$  파라미터를 찾기 위해 충분한 제약조건을 확보한 후  $\mathbf{w}$ 를 6차원 벡터로 정렬하여  $\mathbf{Ax} = 0$  형태의 선형 시스템을 만든다. 다음으로 [특이값 분해\(SVD\)를 사용하여  \$\mathbf{w} = \mathbf{K}^{-\top} \mathbf{K}^{-1}\$  값을 계산한 후 Cholesky Decomposition을 사용하여  \$\mathbf{K}^{-\top} \mathbf{K}^{-1}\$ 를 분해한다.](#) 이를 통해 내부 파라미터  $\mathbf{K}$ 를 계산할 수 있다.

## Calibration from three orthogonal vanishing points

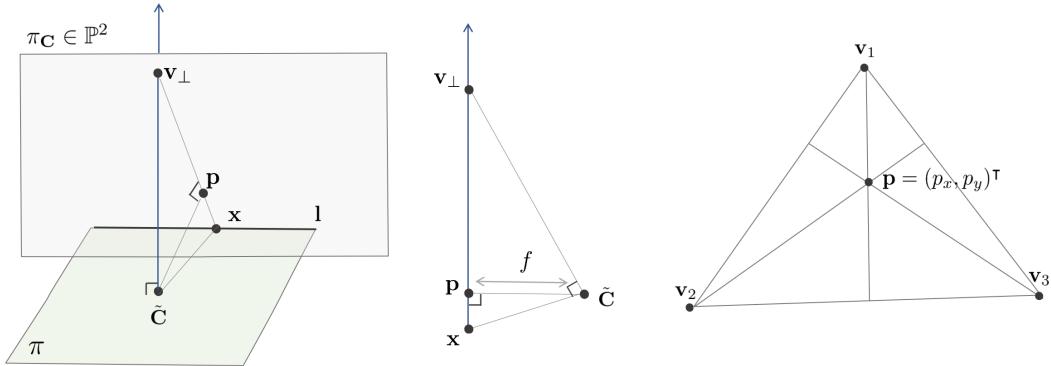


내부 파라미터  $\mathbf{K}$ 가 Zero-Skew이고 Square Pixel일 때 세 개의 서로 직교하는 수직소실점들  $\mathbf{v}_i, i = 1, 2, 3$  을 사용하여  $\mathbf{K}$ 를 계산할 수 있다. 우선  $\mathbf{K}$ 가 Zero-Skew이고 Square Pixel이므로 다음이 성립한다.

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & w_2 \\ 0 & w_1 & w_3 \\ w_2 & w_3 & w_4 \end{bmatrix} \quad (195)$$

이와 같이 총 4개의 자유도를 가지므로 세 개의 수직소실점을 사용하여  $\mathbf{K}$ 를 결정할 수 있다. 우선, 각각의 수직소실점들의 직교 특성을 사용하여  $\mathbf{v}_i^\top \mathbf{w} \mathbf{v}_j, \forall i \neq j$ 를 계산한다. 이 때  $\mathbf{w}$ 를 벡터화하여  $\mathbf{Ax} = 0$  형태의 선형 시스템으로 변환한 후 Nul ( $\mathbf{A}$ )를 계산함으로써  $\mathbf{w}$ 를 구한다. 다음으로 Cholesky Decomposition 을 사용하여  $\mathbf{w} = \mathbf{K}^{-\top} \mathbf{K}^{-1}$ 를 분해한다. 이와 같이 내부 파라미터  $\mathbf{K}$ 를 계산할 수 있다.

## Computation of focal length and principal point using vanishing point and vanishing line

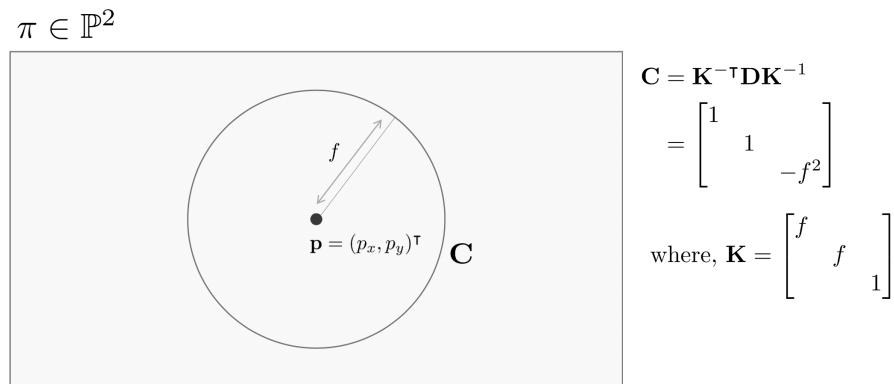


3차원 공간 상의 평면  $\pi$ 로부터 구할 수 있는 소실선  $l$ 이 있고  $\pi$ 와 수직인 수직소실점  $v_{\perp}$ 가 있다고 하면 이를 활용하여 초점거리  $f$ 와 주점(principal point)을 구할 수 있다.

초점거리  $f$ 를 구하는 방법은 다음과 같다. 수직소실점을  $v_{\perp}$ 이라고 하고 이미지 평면  $\pi_C$ 과 평면  $\pi$ 의 교차선을  $l$ 이라고 하면  $v_{\perp}C$ 와  $x\tilde{C}$ 는 서로 직교한다. 그리고 카메라 중심에서 이미지 평면으로 수선을 내린 점  $P$ 가 있으면  $\tilde{C}P$ 의 길이가 곧 초점거리  $f$ 가 된다.  $v_{\perp}x$ 를 지름으로 하는 원을 그린 후 점  $p$ 에 수평으로 그린 선과 원의 교점을 각각  $a, b$ 라고 하면 두 점 중 하나가 곧 카메라의 중심  $C$ 가 되고 이는 곧  $ap = bp$  가 초점거리  $f$ 가 된다.

주점(principal point)  $P$ 를 구하는 방법은 다음과 같다. 수직소실점을  $v_1$ 라고 하고 이미지 평면과  $\pi$  평면의 교차선을  $l_1$ 라고 하면  $v_1$ 에서  $l_1$ 에 수선을 내리면 해당 수선에 주점(principal point)  $p$ 가 위치한다. 이러한 특징으로 인해 서로 다른 세 개의 수직소실점이 존재하는 경우 이들의 수심(orthocenter of the triangle)이 곧 주점  $p$ 가 된다.

### The calibrating conic



IAC(image of absolute conic)은 이미지 평면의 점을 Back-projection한 직선들 간의 각도를 구할 수 있고 Metric Rectification도 수행할 수 있는 유용한 도구이지만 Circular Point의 특성상 실수의 근을 갖지 않아서 시각화가 불가능하다는 단점이 있다. 이를 보완하기 위해 고안된 것이 Calibration Conic이다. Calibration Conic은  $X^2 + Y^2 = Z^2$ 의 Cone을 프로젝션시킨 Image Conic을 의미하고 시각화가 가능한 장점이 존재한다.

카메라 프로젝션  $\mathbf{P} = \mathbf{K}[\mathbf{I}|0]$ 이 있을 때 Calibration Conic 위의 점들은 다음과 같이 프로젝션된다.

$$\mathbf{C} = \mathbf{K}^{-T} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{K}^{-1} \quad (196)$$

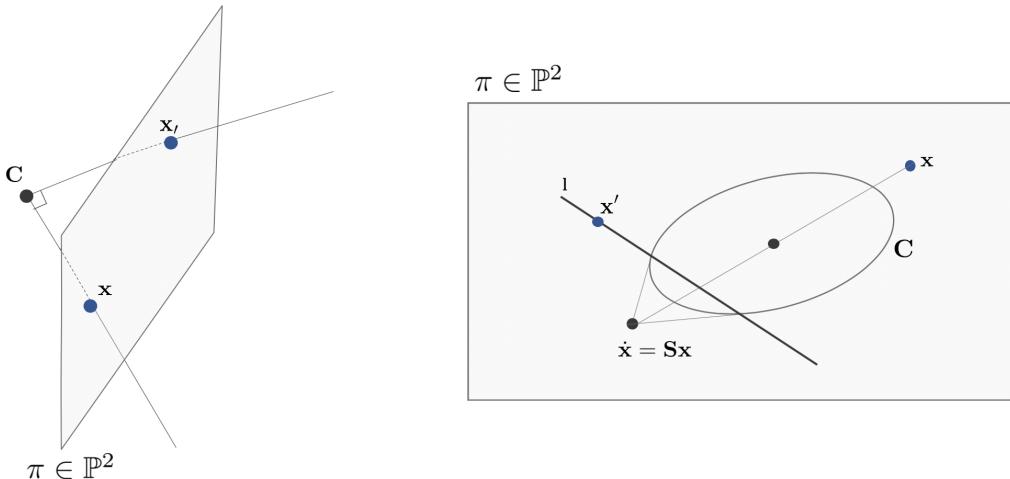
이 때,  $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ 라고 하면  $\mathbf{C} = \mathbf{K}^{-T} \mathbf{D} \mathbf{K}^{-1}$ 와 같이 나타낼 수 있다. 만약  $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} f & f & 1 \end{bmatrix}$ 인 경우 Calibration Conic은

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -f^2 \end{bmatrix} \quad (197)$$

으로 나타낼 수 있고 이 때, **Calibration Conic**은 원점이 주점(principal point)이면서 반지름이 초점거리  $f$ 인 이미지 상의 원을 의미한다.

$\mathbf{C}$ 를 분해하면 다음과 같이 다시 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{K}^{-\top} \mathbf{D} \mathbf{K}^{-1} = \mathbf{K}^{-\top} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{D} \mathbf{K}^{-1} \\ \mathbf{C} &= \mathbf{w} \mathbf{S} \quad \text{where, } \mathbf{S} = \mathbf{K} \mathbf{D} \mathbf{K}^{-1} \end{aligned} \quad (198)$$



이 때 이미지 상의 임의의 점  $\mathbf{x} = \mathbf{K}\tilde{\mathbf{X}}$ 에 대하여  $\mathbf{S}\mathbf{x}$ 는 Calibration Conic에 의해 반사된 점(reflected point)을 의미한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{S}\mathbf{x} &= \mathbf{K}\mathbf{D}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{X}} \\ &= \mathbf{KD} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ -Z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (199)$$

이미지 평면 상의 두 점  $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ 에 대하여 두 점의 Back-projection된 직선들이 서로 직교하는 경우  $\mathbf{x}'^\top \mathbf{w}\mathbf{x} = 0$ 이 성립한다. 이 식을 다시 작성하면

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'^\top \mathbf{w}\mathbf{x} &= \mathbf{x}'^\top \mathbf{C}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{x}'^\top \mathbf{C}\mathbf{S}\mathbf{x} = \mathbf{x}'^\top \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} \\ &\because \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S} \end{aligned} \quad (200)$$

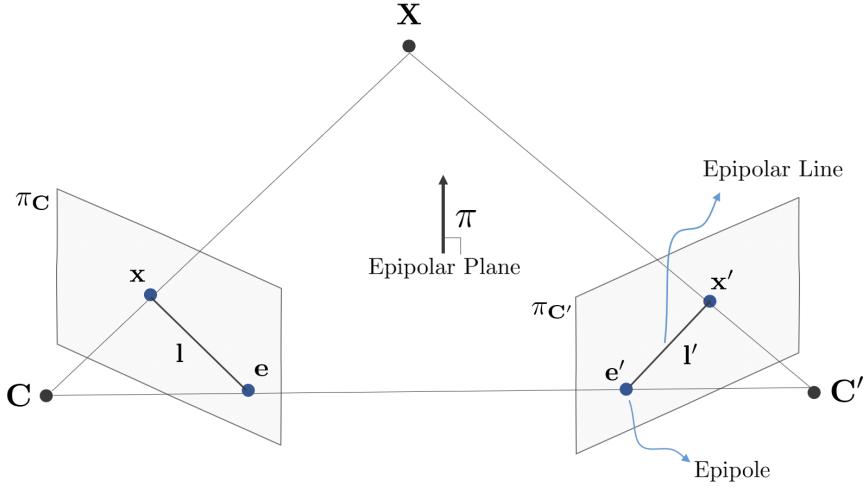
이 때,  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{S}\mathbf{x}$ 는 점  $\mathbf{x}$ 가 Calibration Conic에 의해 반사된 점을 의미한다.

### Result 8.30

결론적으로, 직선  $\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}$ 는 반사된 점  $\dot{\mathbf{x}}$ 와 Calibration Conic의 접선들을 이어주는 직선이 되고 점  $\mathbf{x}'$ 는 직선  $\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}$  위에 존재한다.

## 6 Epipolar Geometry and the Fundamental Matrix

### Epipolar geometry



Epipolar geometry는 2개의 카메라 이미지 사이에 정의되는 기하학 관계를 의미한다. 이는 3차원 물체의 구조와는 독립적이며 **오로지 카메라의 내부 파라미터와 두 카메라 사이의 상대 포즈에만 의존한다.** 위 그림과 같이 3차원 공간 상에 두 카메라의 중심점  $C, C'$ 과 점  $X$ 가 주어졌을 때 세 점을 통해 유일하게 결정되는 평면을 **Epipolar Plane**  $\pi$ 라고 한다. 또한 카메라의 중심점  $C$ 를  $P'$ 를 통해 프로젝션한 점  $P'C = e'$ 을 이미지 평면  $\pi_{C'}$ 의 **Epipole**  $e'$ 라고 한다. 그리고  $e'$ 과  $x'$ 을 잇는 직선을 **Epipolar Line**  $l'$ 이라고 한다.  $e, l$  또한 마찬가지로 이미지 평면  $\pi_C$ 의 Epipole과 Epipolar Line을 의미한다.

### The fundamental matrix $F$

Fundamental Matrix는 **2개의 주어진 카메라의 중심점  $C, C'$ 이 주어질 때  $F \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 이며 rank 2를 가지는 행렬**을 의미한다.  $F$ 는 두 카메라의 이미지 평면에 있는 점들의 대응쌍  $x, x'$ 에 대하여

$$x'^T F x = 0 \quad (201)$$

을 만족한다. 이 때 곱해지는 순서에 따라 의미가 달라지며  $x'^T F x = 0$ 인 경우 두 카메라  $C, C'$  사이의 Fundamental Matrix라고 하고  $x^T F' x' = 0$ 인 경우 두 카메라  $C', C$  사이의 Fundamental Matrix라고 한다. 이 때,  $F^T = F'$  관계가 성립한다.

기하학적 측면에서 보면,  $x'^T F x = 0$ 에서  **$Fx$ 는 카메라  $C$ 의 이미지 평면  $\pi_C$  위의 점  $x$ 가 존재할 때 이와 상응하는 Epipolar Line  $l' \in \pi_{C'}$ 를 의미한다.** 따라서  **$F$ 는 이미지 평면  $\pi_C$  위의 점  $x$ 를 Epipolar Line  $l'$ 으로 매핑하는 함수로 생각할 수 있다.**

$$\begin{aligned} F : x &\mapsto l' \\ \text{where, } x &\in \pi_C \in \mathbb{P}^2 \\ l' &\in (\mathbb{P}^2)^\vee \end{aligned} \quad (202)$$

### Proof

( $\Rightarrow$ )  $l' = Fx$ 인 경우 Epipolar Line  $l'$ 에 위치한 점  $x'$ 에 대하여 다음이 성립한다.

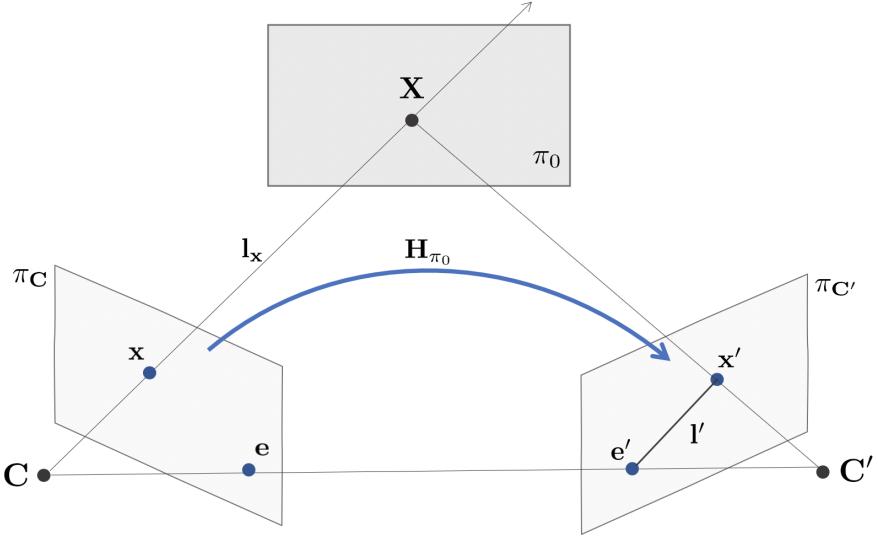
$$x'^T l' = x'^T F x = 0 \quad \forall x \leftrightarrow x' \quad (203)$$

( $\Leftarrow$ ) 이미지 평면  $\pi_C$  위의 점  $x$ 를 Back-projection하여  $X_1, X_2$  점이 생성되었다고 했을 때, 이를  $\pi_{C'}$ 에 프로젝션시키면 각각  $x'_1 = P'X_1, x'_2 = P'X_2$  점들이 생성된다. 이 때 Fundamental Matrix  $F$ 에 의해

$$\begin{aligned} x'_1^T F x &= 0 \\ x'_2^T F x &= 0 \end{aligned} \quad (204)$$

의 관계가 성립하므로  $Fx$ 는  $x_i^T, i = 1, 2$ 와 수직인 Epipolar Line  $l'$ 을 의미한다.

## Geometric derivation



두 카메라  $C, C'$ 가 있을 때 이미지 평면  $\pi_C$  위의 점  $x$ 를 Back-projection한 직선  $l_x$ 가 3차원 공간 상에서 임의의 평면  $\pi_0$ 와 한 점에서 만난다고 가정한다. 이 때  $C, C'$ 의 이미지 점들을 연결해주는 Homography  $H_{\pi_0}$ 를 생각해보면

$$\begin{aligned} H_{\pi_0} : \pi_C &\mapsto \pi_{C'} \\ x &\mapsto x' \\ x &\mapsto P'(l_x \cap \pi_0) \end{aligned} \tag{205}$$

$\pi_{C'}$  위에 프로젝션된 점을  $x' = P'(l_x \cap \pi_0)$ 라고 하고 Epipolar Line  $l'$ 을  $x'$ 와 Epipole  $e'$ 를 이어주는 직선이라고 정의하면

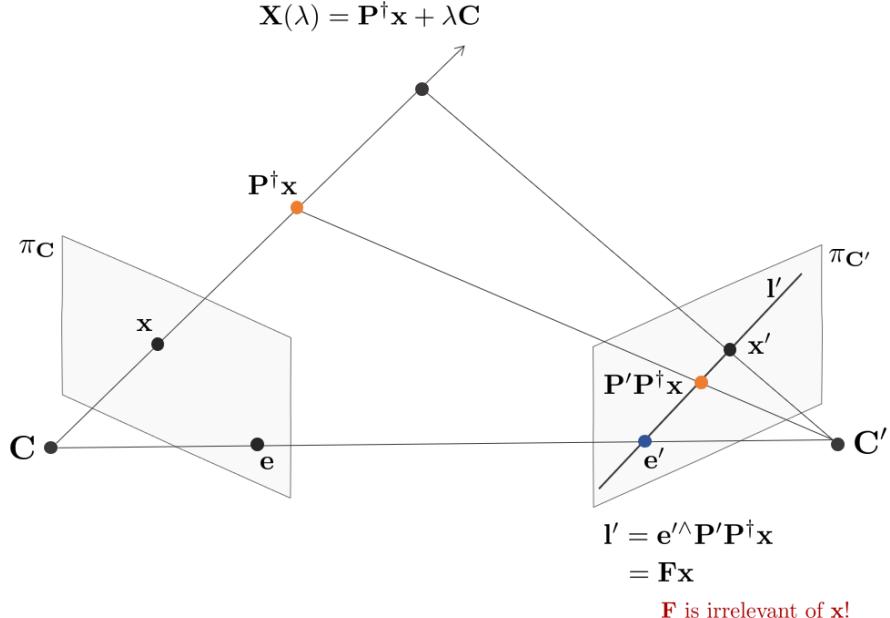
$$\begin{aligned} e' \times x' &= e'^\wedge x' \\ &= e'^\wedge H_{\pi_0}(x) \quad \text{is Epipolar Line.} \end{aligned} \tag{206}$$

와 같이 나타낼 수 있다. 이 때  $l' = Fx$ 의 공식을 사용하면

$$\begin{aligned} l' &= Fx \\ &= e'^\wedge H_{\pi_0} x \end{aligned} \tag{207}$$

과 같다. 따라서  $F = e'^\wedge H_{\pi_0}$ 가 성립한다. 이 때,  $H_{\pi_0}$ 는 rank 3인 행렬이며  $e'^\wedge$ 는 rank 2인 행렬이므로  $F$ 는 rank 2인 행렬이 된다.

## Algebraic derivation



Epipolar Line  $\mathbf{l}' = \mathbf{P}'(\mathbf{X}(\lambda))$ 와 같다. 이 때  $\mathbf{X}(\lambda)$ 는 카메라  $\mathbf{C}$ 의 중심점을 지나는  $\mathbf{x}$ 의 Back-projection 직선을 의미한다.  $\mathbf{X}(\lambda)$ 는 다음과 같이 다시 작성할 수 있다.

$$\mathbf{X}(\lambda) = \mathbf{P}^\dagger \mathbf{x} + \lambda \mathbf{C} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (208)$$

여기서  $\mathbf{P}^\dagger$ 는  $\mathbf{P}$ 의 Pseudo Inverse를 의미하고

$$\mathbf{P}^\dagger = \mathbf{P}^\top (\mathbf{P} \mathbf{P}^\top)^{-1} \quad (209)$$

이 때,  $\mathbf{l}' = \mathbf{P}'(\mathbf{X}(\lambda))$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}'(\mathbf{X}(\lambda)) &= \mathbf{P}' \mathbf{P}^\dagger \mathbf{x} + \lambda \mathbf{P}' \mathbf{C} \\ &= \mathbf{P}' \mathbf{P}^\dagger \mathbf{x} + \lambda \mathbf{e}' \end{aligned} \quad (210)$$

$\mathbf{P}' \mathbf{C}$ 는 카메라  $\mathbf{C}$ 의 중심점을  $\pi_C$ 에 프로젝션시킨 점을 의미하므로 Epipole  $\mathbf{e}'$ 가 된다.  $\lambda = 0$ 일 때  $\mathbf{P}'(\mathbf{X}(0)) = \mathbf{P}' \mathbf{P}^\dagger \mathbf{x}^0$ 이고  $\lambda = \infty$ 일 때  $\mathbf{P}'(\mathbf{X}(\infty)) = \mathbf{P}' \mathbf{C} = \mathbf{e}'$ 가 된다. 따라서 Epipolar Line  $\mathbf{l}'$ 는 두 점을 잇는 직선이므로

$$\begin{aligned} \mathbf{l}' &= \mathbf{e}'^\wedge \mathbf{P}' \mathbf{P}^\dagger \mathbf{x} \\ &= \mathbf{F} \mathbf{x} \\ \therefore \mathbf{F} &= \mathbf{e}'^\wedge \mathbf{P}' \mathbf{P}^\dagger \end{aligned} \quad (211)$$

이 된다. 추가적으로 Epipole  $\mathbf{e}'$ 는 Epipolar Line  $\mathbf{l}'$ 에 포함되어 있고 모든  $\mathbf{x}_i$ 에 대해

$$\mathbf{e}'^\top \mathbf{F} \mathbf{x}_i = (\mathbf{e}'^\top \mathbf{F}) \mathbf{x}_i = 0 \quad \forall \mathbf{x}_i \quad (212)$$

이 성립하므로  $\mathbf{e}'^\top \mathbf{F} = 0$ 이 성립한다. 결론적으로  $\mathbf{e}'$ 는  $\mathbf{F}$ 의 Left null vector이다. 또한  $\mathbf{e}$ 는  $\mathbf{F}$ 의 (right) null vector가 된다.

## Properties of the fundamental matrix

Fundamental Matrix  $\mathbf{F}$ 의 성질은 다음과 같다.

- **Transpose:**  $\mathbf{F}$ 가 두 카메라  $(\mathbf{P}, \mathbf{P}')$ 에 대한 Fundamental Matrix라고 했을 때  $\mathbf{F}^\top$ 은  $(\mathbf{P}', \mathbf{P})$ 에 대한 Fundamental Matrix가 된다.

- **Epipolar Lines:** 첫번째 이미지의 대응점  $x$ 에 대해 이와 상응하는 두번째 이미지의 Epipolar Line은  $l' = Fx$ 와 같이 나타낼 수 있다. 이와 유사하게 두번째 이미지의 대응점  $x'$ 에 대해 이와 상응하는 첫번째 이미지의 Epipolar Line은  $l = F^T x'$ 와 같이 나타낼 수 있다.
- **The Epipole:**  $e$ 가 아닌 모든 점  $x$ 에 대한 Epipolar Line  $l' = Fx$ 는 항상  $e'$ 를 지나간다. 따라서  $e'$ 는 모든  $x$ 에 대해  $e'^T(Fx) = (e'^T F)x = 0$ 가 성립한다. 이는 즉,  $e'^T F = 0$ 의 성질을 만족하므로  $e'$ 는  $F$ 의 Left null-vector가 된다. 이와 유사하게  $Fe = 0$ 에 따라  $e$ 는  $F$ 의 Right null-vector가 된다.
- **Fundamental Matrix는 rank 2인 Homogeneous 행렬이며 7자유도(DOF)를 갖는다. 그리고 rank 2 행렬이므로 역행렬이 존재하지 않는다.** 3x3 행렬의 마지막 원소는 Homogeneous 좌표계의 스케일 모호성(Scale Ambiguity)에 의해 1자유도를 하나 잃고  $\det F = 0$  제약조건에 의해 추가적으로 1자유도를 잃어서 7자유도를 가진다.

## The epipolar line homography

두 카메라  $C, C'$ 이 존재하고 이미지 평면 위의 한 점을 각각  $x, x'$ 라고 하면 이에 상응하는 Epipolar Line  $l, l'$ 이 존재한다. 이 때,  $l$ 과  $l'$  사이에는 별도의 대응 관계가 성립하는데 이는

$$\mathbb{P}(\pi)^\vee \mapsto \mathbb{P}(\pi')^\vee \quad (213)$$

매핑 관계인 Homography 행렬로 주어진다.

### Result 9.5

카메라 중심점  $C$ 를 통과하면서 Epipole  $e$ 를 지나지 않는 직선  $k$ 가 있을 때  $k$ 는 Epipolar Line  $l$ 과 반드시 한 점  $p$ 에서 만난다.  $p$ 는

$$p = k \wedge l \quad (214)$$

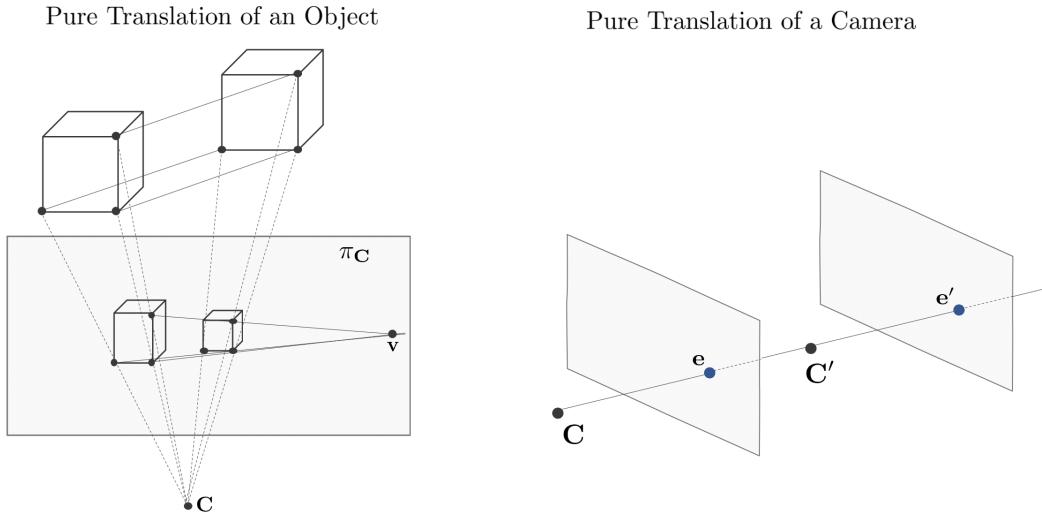
과 같이 구할 수 있고  $p$ 는 Fundamental Matrix에 의해 Epipolar Line  $l'$ 으로 프로젝션되므로

$$\begin{aligned} l' &= Fk \wedge l \\ &= Hl \end{aligned} \quad (215)$$

의 관계가 성립한다. 따라서  $l, l'$ 은  $H = Fk \wedge l$ 인 Homography 행렬에 의해 대응 관계가 성립한다.

## Fundamental matrices arising from special motions

### Pure translation



순수 이동(pure translation)이란 카메라 센터를 회전하지 않고 이동만 하는 것을 의미한다. 이 때, 월드의 모든 물체를 고정시킨 채로 카메라를 움직이는 것과 카메라를 고정시킨 채로 월드의 모든 물체를 이동시키는 것은 동일하다. 처음 위치의 카메라 행렬과 카메라 센터를 각각  $P, C$ 라고 하고 순수 이동 후 카메라 행렬과

카메라 센터를 각각  $\mathbf{P}', \mathbf{C}'$ 라고 할 때 두 카메라의 베이스라인의 길이는 카메라 중심점의 순수 이동량과 동일하다.

또한 두 카메라의 Epipole을 각각  $\mathbf{e}, \mathbf{e}'$ 이라고 하면 두 Epipole의 위치는 동일하며 이는 곧 소실점 (vanishing point)을 의미한다.

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}' = \mathbf{v} \quad (216)$$

이러한 순수 이동 상황에서  $\mathbf{e} = \mathbf{e}'$ 를 Auto Epipolar라고 한다.

대수적으로 Fundamental Matrix를 유도해보면 처음 카메라 행렬을  $\mathbf{P} = \mathbf{K}[\mathbf{I}|0]$ 이라고 하고 순수 이동 후 카메라 행렬을  $\mathbf{P}' = \mathbf{K}[\mathbf{I}|\mathbf{t}]$ 라고 하면 이전 섹션에서 Fundamental Matrix  $\mathbf{F}$ 는  $\mathbf{F} = \mathbf{e}'^\wedge \mathbf{P}' \mathbf{P}'^\dagger$  이므로

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{e}'^\wedge \mathbf{P}' \mathbf{P}'^\dagger \\ &= \mathbf{e}'^\wedge \mathbf{K} \mathbf{K}^{-1} \\ &= \mathbf{e}'^\wedge \end{aligned} \quad (217)$$

따라서 순수 이동 상황에서 Fundamental Matrix는  $\mathbf{F} = \mathbf{e}'^\wedge$ 이다.

## Retrieving the camera matrices

### Projective invariance and canonical cameras

#### Result 9.8

두 카메라  $\mathbf{C}, \mathbf{C}'$ 에 대응하는 이미지 평면 상의 점들  $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ 과 Fundamental Matrix  $\mathbf{F}$ 가 존재할 때  $\mathbf{F}$ 는  $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$  대응쌍의 Homography 변환에 상관없이 동일하다. 다시 말하면,  $\mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ 을 만족하는 Homography 변환  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ 가 존재할 때  $\mathbf{H}$ 는

$$(\mathbf{P}, \mathbf{P}') \mapsto (\mathbf{PH}, \mathbf{P}'\mathbf{H}) \quad (218)$$

를 만족하는데 이러한  $\mathbf{H}$ 에 관계없이 Fundamental Matrix  $\mathbf{F}$ 는 동일하다.

#### Proof

$(\mathbf{PH}, \mathbf{P}'\mathbf{H})$ 에 해당하는 대응점쌍  $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$ 에 대해서

$$\mathbf{x}'^\top \tilde{\mathbf{F}} \mathbf{x} = 0 \quad (219)$$

이 성립한다. 이 때  $\mathbf{x} = \mathbf{PHX}, \mathbf{x}' = \mathbf{P}'\mathbf{HX}$ 이므로 이를 위 식에 대입하면

$$\mathbf{X}^\top \mathbf{H}^\top \mathbf{P}'^\top \tilde{\mathbf{F}} \mathbf{P} \mathbf{H} \mathbf{X} = 0 \quad (220)$$

을 만족하고 위 식은 모든  $\mathbf{X} \in \mathbb{P}^3$ 에 대해서 성립한다.  $\mathbf{X} = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{HX}), \tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{HX}$ 로 치환하여 다시 위 식에 대입하면

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{X}}^\top \mathbf{H}^{-\top} \mathbf{H}^\top \mathbf{P}'^\top \tilde{\mathbf{F}} \mathbf{P} \mathbf{H} \mathbf{H}^{-1} \tilde{\mathbf{X}} &= 0 \\ \tilde{\mathbf{X}}^\top \mathbf{P}'^\top \tilde{\mathbf{F}} \mathbf{P} \tilde{\mathbf{X}} &= 0 \\ \tilde{\mathbf{x}}'^\top \tilde{\mathbf{F}} \tilde{\mathbf{x}} &= 0 \end{aligned} \quad (221)$$

이 되어 결론적으로  $\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{F}}$ 가 성립한다.

## Canonical form of camera matrices

위와 같은 성질에 따라 동일한 Fundamental Matrix  $\mathbf{F}$ 에 여러  $(\mathbf{P}, \mathbf{P}')$  쌍이 대응되므로  $\mathbf{F}$ 와  $(\mathbf{P}, \mathbf{P}')$ 는 One-to-Many Correspondence 관계가 된다. 따라서 이러한 모호성에도 불구하고  $\mathbf{F}$ 의 정확한 변환을 표현하기 위해  $\mathbf{P} = [\mathbf{I}|0], \mathbf{P}' = [\mathbf{M}|\mathbf{m}]$ 과 같이 처음 카메라 행렬  $\mathbf{P}$ 를 단순하게 나타내는 방법을 Canonical Form이라고 한다. 하지만  $\mathbf{P} = [\mathbf{I}|0]$ 이라고 해서  $\mathbf{P}'$ 의 유일하게 결정되는 것은 아니다.

임의의 카메라 행렬  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ 가 주어졌을 때 이를 역행렬이 존재하는 행렬  $\mathbf{P}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{r}_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ 로 변경한 다음

$$\mathbf{P}^* \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (222)$$

을 만족하는  $\mathbf{H}$ 가 존재한다고 하면  $\mathbf{P}\mathbf{H} = [\mathbf{I}|0]$ 을 만족한다. 따라서  $\mathbf{H}$ 가 존재한다는 가정 하에 모든 임의의 카메라 행렬  $\mathbf{P}$ 는 Canonical Form으로 쓸 수 있다.

그렇다면 Fundamental Matrix  $\mathbf{F}$ 는  $\mathbf{M}, \mathbf{m}$ 에 대하여 어떻게 쓸 수 있을까?

우선 임의의 두 카메라 행렬  $\mathbf{P} = \mathbf{K}[\mathbf{I}|0], \mathbf{P}' = \mathbf{K}'[\mathbf{R}|\mathbf{t}]$ 가 존재할 때 다음의 공식들이 성립한다.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\mathbf{P}^\top &= \mathbf{K}^2 \\ \mathbf{P}^\dagger &= \mathbf{P}^\top(\mathbf{P}\mathbf{P}^\top)^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= [0 \ 1]^\top \\ \mathbf{e}' &= \mathbf{P}'\mathbf{C} = \mathbf{K}'\mathbf{t}\end{aligned}\tag{223}$$

따라서 이에 대응하는 Fundamental Matrix  $\mathbf{F}$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{e}'^\wedge \mathbf{P}' \mathbf{P}^\dagger \\ &= (\mathbf{K}'\mathbf{t})^\wedge \mathbf{K}'[\mathbf{R}|\mathbf{t}] \mathbf{K}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= (\mathbf{K}'\mathbf{t})^\wedge \mathbf{K}'\mathbf{R}\mathbf{K}^{-1}\end{aligned}\tag{224}$$

### Result 9.9

Canonical Form에 상응하는 Fundamental Matrix  $\mathbf{F}$ 를 구해보면 두 카메라 행렬  $\mathbf{P} = [\mathbf{I}|0], \mathbf{P}' = [\mathbf{M}|\mathbf{m}]$ 에 대해 다음 공식이 성립한다.

$$\mathbf{F} = \mathbf{m}^\wedge \mathbf{M}\tag{225}$$

Canonical Form의  $\mathbf{F}$ 는  $\mathbf{F} = \mathbf{m}^\wedge \mathbf{M}$ 이다.

### Projective ambiguity of cameras given $\mathbf{F}$

#### Theorem 9.10

Fundamental Matrix  $\mathbf{F}$ 는 Homography 변환에 상관없이 동일하기 때문에 필연적으로 모호성이 발생하게 된다. 만약 카메라 행렬 대응쌍  $(\mathbf{P}, \mathbf{P}')$ 의  $\mathbf{F}$ 와  $(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{P}}')$ 의  $\mathbf{F}$ 가 동일한 경우,  $(\mathbf{P}, \mathbf{P}')$ 와  $(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{P}}')$ 를 연결하는 Homography  $\mathbf{H}$ 가 존재한다.

$$\begin{aligned}{}^3\mathbf{H} &\in \text{PGL}_4 \\ (\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{P}}') &= (\mathbf{P}, \mathbf{P}')\mathbf{H}\end{aligned}\tag{226}$$

#### Proof

두 카메라 행렬 대응쌍  $(\mathbf{P}, \mathbf{P}'), (\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{P}}')$ 이 주어졌을 때 이를 Canonical Form으로 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \tilde{\mathbf{P}} = [\mathbf{I}|0] \\ \mathbf{P}' &= [\mathbf{A}|\mathbf{a}] \\ \tilde{\mathbf{P}}' &= [\tilde{\mathbf{A}}|\tilde{\mathbf{a}}]\end{aligned}\tag{227}$$

이 때, Fundamental Matrix  $\mathbf{F}$ 는

$$\mathbf{F} = \mathbf{a}^\wedge \mathbf{A} = \tilde{\mathbf{a}}^\wedge \tilde{\mathbf{A}}\tag{228}$$

가 성립한다.  $\mathbf{F}$ 의 성질에 의해  $\mathbf{a}^\top \mathbf{F} = 0, \tilde{\mathbf{a}}^\top \mathbf{F} = 0$ 이 만족하게 되고

$$\begin{aligned}\mathbf{a}^\top \mathbf{F} &= \mathbf{a}^\top \mathbf{a}^\wedge \mathbf{A} = 0 \\ \tilde{\mathbf{a}}^\top \mathbf{F} &= \tilde{\mathbf{a}}^\top \tilde{\mathbf{a}}^\wedge \tilde{\mathbf{A}} = 0\end{aligned}\tag{229}$$

이 때,  $\mathbf{a}$ 와  $\tilde{\mathbf{a}}$ 는 각각 rank 1인  $\mathbf{F}$ 의 Left Null Space가 된다. 따라서  $\mathbf{a}, \tilde{\mathbf{a}}$ 는

$$\tilde{\mathbf{a}} = k\mathbf{a}, \quad k \neq 0 \in \mathbb{R}\tag{230}$$

인 관계가 성립한다.  $\tilde{\mathbf{a}}$ 를 치환하여 다시 표현하면

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = \mathbf{a}^\wedge \mathbf{A} &= \tilde{\mathbf{a}}^\wedge \tilde{\mathbf{A}} = k \mathbf{a}^\wedge \tilde{\mathbf{A}} = 0 \\ &= \mathbf{a}^\wedge (k \tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A}) = 0 \end{aligned} \quad (231)$$

따라서  $(k \tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A})$ 은  $\mathbf{a}$ 와 평행하다. 즉, 각 행렬의 열들이 배수 관계에 있다.

$$k \tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A} = \mathbf{a} \mathbf{v}^\top \quad \text{for some } \mathbf{v} \quad (232)$$

따라서  $\tilde{\mathbf{A}} = k^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{a} \mathbf{v}^\top)$ 가 된다. 카메라 행렬 대응쌍은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \tilde{\mathbf{P}} = [\mathbf{I}|0] \\ \mathbf{P}' &= [\mathbf{A}|\mathbf{a}] \\ \tilde{\mathbf{P}}' &= [k^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{a} \mathbf{v}^\top) | k \mathbf{a}] \end{aligned} \quad (233)$$

결론적으로 카메라 행렬 대응쌍  $(\mathbf{P}, \mathbf{P}')$ 를 Canonical Form으로 변환하는 행렬을  $\mathbf{H}_1$ ,  $(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{P}}')$ 를 Canonical Form으로 변환하는 행렬을  $\mathbf{H}_2$ 라고 하면

$$(\mathbf{P}, \mathbf{P}') \mathbf{H}_1 \mathbf{H} = (\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{P}}') \mathbf{H}_2 \quad (234)$$

를 만족하는 Homography  $\mathbf{H}$ 가 존재하고 이에 따라  $(\mathbf{P}, \mathbf{P}')$ 과  $(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{P}}')$ 는 사영적으로 동등하다(projectively equivalent).

$$(\mathbf{P}, \mathbf{P}') \sim (\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{P}}') \quad (235)$$

### Canonical cameras given $\mathbf{F}$

#### Result 9.12

임의의 정방행렬  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 가 카메라 행렬 대응쌍  $(\mathbf{P}, \mathbf{P}')$ 에 대응하는 Fundamental Matrix일 필요충분 조건은  $\mathbf{P}'^\top \mathbf{F} \mathbf{P}$ 가 반대칭 행렬(skew symmetric matrix)일 때이다.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' \mathbf{F} \mathbf{x} &= 0 \\ \Leftrightarrow \mathbf{X}^\top \mathbf{P}'^\top \mathbf{F} \mathbf{P} \mathbf{X} &= 0 \quad \forall \mathbf{X} \\ \Leftrightarrow \mathbf{P}'^\top \mathbf{F} \mathbf{P} &\text{ is a skew symmetric matrix.} \end{aligned} \quad (236)$$

#### Result 9.13

임의의 정방행렬  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 가 주어지고 임의의 반대칭행렬  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 이 주어졌을 때 카메라 행렬 대응쌍  $(\mathbf{P}, \mathbf{P}')$ 이 다음과 같다면

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= [\mathbf{I}|0] \\ \mathbf{P}' &= [\mathbf{SF}|\mathbf{e}'] \quad \text{where, } \mathbf{e}' \text{ is epipole.} \end{aligned} \quad (237)$$

이 때  $(\mathbf{P}, \mathbf{P}')$ 는  $\mathbf{F}$ 를 Fundamental Matrix로 갖는다.

이를 증명하기 위해  $\mathbf{P}'^\top \mathbf{F} \mathbf{P}$ 를 전개해보면

$$\begin{aligned} \mathbf{P}'^\top \mathbf{F} \mathbf{P} &= [\mathbf{SF}|\mathbf{e}']^\top \mathbf{F} [\mathbf{I}|0] \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{F}^\top \mathbf{S}^\top \mathbf{F} & \mathbf{0} \\ \mathbf{e}'^\top \mathbf{F} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{F}^\top \mathbf{S}^\top \mathbf{F} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (238)$$

과 같이 반대칭행렬이므로 위 정리에 의해  $\mathbf{F}$ 가 Fundamental Matrix임을 알 수 있다.

반대칭행렬  $\mathbf{S}$ 는 3차원 벡터  $\mathbf{s}^\wedge$  형태로 나타낼 수 있고 이 때,  $\mathbf{s}^\top \mathbf{e}' \neq 0$ 이면  $\mathbf{P}' = [\mathbf{s}^\wedge \mathbf{F}|\mathbf{e}']$ 의 rank는 3이 된다.  $\mathbf{P}'$ 의 rank가 3이 되기 위해서는  $\mathbf{s}^\wedge \mathbf{F}$ ,  $\mathbf{e}'$ 의 rank는 각각 2, 1이 되어야 한다. 우선,  $\mathbf{s}^\wedge \mathbf{F}$ 가 rank 2라는 것을 증명해보면 Fundamental Matrix 성질에 의해  $\mathbf{e}'^\top \mathbf{F} = 0$ 을 만족하므로  $\mathbf{F}$ 의 열공간  $\text{Col } \mathbf{F}$ 와  $\mathbf{e}'$ 는 수직한다.

$$\text{Col } \mathbf{F} \perp \mathbf{e}' \quad (239)$$

또한,  $s^\wedge e' \neq 0$ 이므로  $s$ 는  $\text{Col } F$  안에 존재하지 않는다.  $s^\wedge F$ 의 열공간은

$$\begin{aligned} \text{Col } s^\wedge F &= s^\wedge \text{Col } F \\ &= s \times \text{Col } F \end{aligned} \quad (240)$$

이고 이 때  $\text{Col } F$ 가 rank 2이므로  $s \times \text{Col } F$  또한 rank 2가 된다. 다음으로  $e'$ 가 다른 열벡터들과 선형독립임을 증명해보면  $s^\top \text{Col } s^\wedge F = 0$ 이고  $s^\wedge e' \neq 0$ 이므로

$$e' \notin \text{Col } s^\wedge F \quad (241)$$

결론적으로  $P' = [s^\wedge F | e']$ 의 rank는 3이 된다.

### Result 9.14

$P'$ 의 rank가 3이 되는  $s$ 를 선택할 때  $e'$ 의 수직이 아닌  $s$ 를 사용해야 하므로  $s = e'$ 로 설정하면

$$\begin{aligned} P &= [\mathbf{I}|0] \\ P' &= [e'^\wedge F | e'] \end{aligned} \quad (242)$$

가 된다. 따라서, Fundamental Matrix  $F$ 가 주어졌을 때  $F$ 의 Left Null Space  $e'$ 를 계산함으로써 카메라 대응쌍 ( $P, P'$ )를 계산할 수 있다.

앞서 정의한 카메라 행렬 대응쌍의 비례식

$$\begin{aligned} (P, P') &= ([\mathbf{I}|0], [\mathbf{A}|a]) \\ (\tilde{P}, \tilde{P}') &= ([\mathbf{I}|0], [k^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{a}\mathbf{v}^\top) | k\mathbf{a}]) \end{aligned} \quad (243)$$

을 사용하여 일반적인 형태로 나타내면 다음과 같다.

### Result 9.15

$$\begin{aligned} (P, P') &= ([\mathbf{I}|0], [e'F | e']) \\ (\tilde{P}, \tilde{P}') &= ([\mathbf{I}|0], [e'F + e'\mathbf{v}^\top | \lambda e']) \end{aligned} \quad (244)$$

Null Space 값인  $e'$ 는 스케일에 불변하므로  $\frac{1}{k}e'$ 를 이용해도 결과는 동일하다. 따라서 위와 같은 형태로 나타낼 수 있다. 위 수식이 의미하는 바는 기존  $F$ 에 임의의 벡터  $e'\mathbf{v}^\top$ 와 임의의 스케일 값  $\lambda$ 를 곱해도 Fundamental Matrix에는 변화가 없다는 것을 의미한다. 이는  $F = e'^\wedge P' P^\dagger = e'^\wedge \tilde{P}' \tilde{P}^\dagger$ 에 대입해보면 두 값에 관계없이  $F$ 가 일정하게 나오기 때문이다. 즉, 위 식은 Fundamental Matrix의 사영모호성(Projective Ambiguity)을 내포하는 공식이 된다.

## The essential matrix

Essential Matrix  $E$ 는 대응점 쌍  $x \leftrightarrow x'$ 가 정규 이미지 좌표계일 때 Fundamental Matrix를 의미한다. 역사적으로 Essential Matrix는 Longuet-Higgins에 의해 Fundamental Matrix보다 먼저 소개되었으며 이후 Essential Matrix의 일반화 버전으로 캘리브레이션되지 않은 대응점 쌍들에 대한 Fundamental Matrix가 소개되었다.

### Normalized coordinates

임의의 카메라 행렬  $P = K[R|t]$ 가 주어졌을 때 이미지 평면 상의 점  $x$ 에 대해  $\bar{x} = P\bar{X} = K[R|t]\bar{X}$ 가 성립한다. 이 때, 정규화된 이미지 평면 위의 점을  $\bar{x}$ 라고 하면

$$\bar{x} = K^{-1}x \quad (245)$$

가 성립한다. 이 때,

$$K^{-1}P = [R|t] \quad (246)$$

를 정규카메라(normalized camera)라고 한다. 정규카메라에서 카메라 행렬은  $K = I$ 인 경우로 생각할 수 있다. 정규카메라 행렬의 대응쌍 ( $P, P'$ )는

$$(P, P') = ([\mathbf{I}|0], [R|t]) \quad (247)$$

가 되므로 이 때 Fundamental Matrix  $\mathbf{F} = \mathbf{t}^\wedge \mathbf{R}$ 이고 해당 행렬을 특별히 Essential Matrix  $\mathbf{E}$ 라고 한다.

$$\mathbf{E} = \mathbf{t}^\wedge \mathbf{R} \quad (248)$$

### Definition 9.16.

Essential Matrix은  $3 \times 3$  크기의 정방행렬이며  $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  정규화된 이미지 좌표계에서 점들 간의 상관 관계  $\bar{\mathbf{x}} \leftrightarrow \bar{\mathbf{x}'}$ 를 표현할 때 사용한다.

$$\bar{\mathbf{x}}'^\top \mathbf{E} \bar{\mathbf{x}} = 0 \quad (249)$$

이 때,  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{x}$ ,  $\bar{\mathbf{x}'} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{x}'$ 이므로

$$\mathbf{x}'^\top \mathbf{K}'^{-\top} \mathbf{E} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{x} = 0 \quad (250)$$

이 성립하여 Fundamental Matrix  $\mathbf{F}$ 와 Essential Matrix  $\mathbf{E}$ 의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{K}'^{-\top} \mathbf{E} \mathbf{K}^{-1} \\ \mathbf{E} &= \mathbf{K}'^\top \mathbf{F} \mathbf{K} \end{aligned} \quad (251)$$

### Properties of the essential matrix

- Essential Matrix  $\mathbf{E} = \mathbf{t}^\wedge \mathbf{R}$ 는 5자유도(DOF)를 가진다. 회전  $\mathbf{R}$ 과 이동  $\mathbf{t}$  각각 3개의 자유도를 갖지만 Fundamental Matrix와 동일하게 Homogeneous 성질에 의해 스케일 모호성(Scale Ambiguity)를 가지므로 1자유도를 잃는다. 줄어든 자유도는 Fundamental Matrix와 비교했을 때 Essential Matrix에 추가적인 제약조건을 형성한다.

- Essential Matrix를 특이값 분해(SVD) 했을 때 대각행렬  $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \sigma_3 \end{bmatrix}$ 의 가장 큰 두 특이값  $\sigma_1, \sigma_2$  값은 서로 동일하고 세번째 특이값  $\sigma_3 = 0$ 을 만족한다. 자세한 내용은 다음 섹션에서 설명한다.

### Result 9.17

임의의 정방행렬  $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 이 Essential Matrix이기 위한 필요충분조건은  $\mathbf{E}$ 의 가장 큰 두 특이값  $\sigma_1, \sigma_2$  값이 동일하고 세번째 특이값  $\sigma_3 = 0$ 인 조건이다.

### Proof

**Forward Proof:** 카메라 행렬 대응쌍  $(\mathbf{P}, \mathbf{P}') = ([\mathbf{I}|0], [\mathbf{R}|\mathbf{t}])$ 에 대한 Fundamental Matrix  $\mathbf{F}$ 가 있다고 하면

$$\mathbf{F} = \mathbf{t}^\wedge \mathbf{R} = \mathbf{S} \mathbf{R} \quad (252)$$

이 된다. 반대칭행렬  $\mathbf{t}^\wedge = \mathbf{S}$ 가 rank 2를 가지는 경우  $\mathbf{S}$ 는 항상 기저(basis)를 변경하여 다음과 같은 형태로 변경할 수 있다.

$$\mathbf{S} = k \mathbf{U} \mathbf{Z} \mathbf{U}^\top \quad (253)$$

이 때,  $k$ 는 임의의 스케일 값을 의미하고 일반적으로 고려하지 않는다.  $\mathbf{U}$ 는 임의의 직교 행렬이며  $\mathbf{Z}$ 는 반대칭 행렬이다.  $\mathbf{U} \mathbf{Z} \mathbf{U}^\top$ 를 SVD 형태에 맞게 변경하기 위해 약간의 대수적 트릭을 이용한다. 반대칭행렬  $\mathbf{Z}$ 와 직교행렬  $\mathbf{W}$ 를 아래와 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= \begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & \end{bmatrix} \\ \mathbf{W} &= \begin{bmatrix} & -1 \\ 1 & \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (254)$$

두 행렬 사이에는 다음과 같은 유용한 성질이 존재한다. 해당 성질들은 본 섹션의 증명 과정에서 자주 등장하니 익혀두는 것을 권장한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \mathbf{W} \quad \text{up to sign} \\ &= \text{diag}(1, 1, 0) \mathbf{W} \quad \text{up to sign} \end{aligned} \tag{255}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}\mathbf{W} &= -\mathbf{Z}\mathbf{W}^\top \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \\ &= \text{diag}(1, 1, 0) \end{aligned} \tag{256}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^\top &= \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \mathbf{W} \\ \mathbf{W}\mathbf{W}^\top &= \mathbf{I} \end{aligned} \tag{257}$$

위 식에 따라  $\mathbf{U}\mathbf{Z}\mathbf{U}^\top = \mathbf{U}\text{diag}(1, 1, 0)\mathbf{W}\mathbf{U}^\top$ 과 같이 나타낼 수 있다. 이를 사용하여 Fundamental Matrix  $\mathbf{F}$ 를 다시 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{S}\mathbf{R} \\ &= \mathbf{U}\mathbf{Z}\mathbf{U}^\top\mathbf{R} \\ &= \mathbf{U}\text{diag}(1, 1, 0)\mathbf{W}\mathbf{U}^\top\mathbf{R} \\ &\sim \mathbf{U}\text{diag}(1, 1, 0)\mathbf{V}^\top \quad \text{up to similarity} \end{aligned} \tag{258}$$

위 식에 따라 **F의 가장 큰 두 특이값은 같으며 마지막 특이값은 0이 된다. 이에 따라 Fundamental Matrix F는 Essential Matrix E의 성질을 만족하므로 Essential Matrix가 된다.**

**Reverse Proof:** 반대로 임의의 정방행렬  $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 의 특이값 분해(SVD)가

$$\mathbf{E} \sim \mathbf{U} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \mathbf{V}^\top \tag{259}$$

을 만족하는 경우 이는

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &\sim \mathbf{U} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \mathbf{V}^\top \\ &= \mathbf{U}\text{diag}(1, 1, 0)\mathbf{V}^\top \\ &= \mathbf{U}\mathbf{Z}\mathbf{W}\mathbf{V}^\top \quad \because \mathbf{Z}\mathbf{W} = \text{diag}(1, 1, 0) \\ &= \mathbf{U}\mathbf{Z}\mathbf{U}^\top(\mathbf{W}\mathbf{V}^\top) \quad \because \mathbf{U}^\top\mathbf{U} = \mathbf{I} \\ &= \mathbf{S}\mathbf{R} \\ &= \mathbf{t}^\wedge\mathbf{R} \end{aligned} \tag{260}$$

이 된다. 네번째 행에서 3개의 직교행렬의 곱  $\mathbf{W}\mathbf{V}^\top$ 은 회전행렬의 성질을 만족하므로  $\mathbf{R}$ 로 표시할 수 있다. 따라서 이 때 **E는 카메라 행렬 대응쌍  $(P, P') = ([I|0], [R|t])$ 에 대응하는 Fundamental Matrix가 된다.**

## Extraction of cameras from the essential matrix

### Result 9.18

Essential Matrix  $\mathbf{E}$ 가 다음과 같이 주어졌을 때

$$\mathbf{E} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \mathbf{V}^\top \tag{261}$$

행렬  $\mathbf{E}$ 는 SR Factorization을 통해  $\mathbf{R}, \mathbf{t}$ 를 분해할 수 있다. 이 때,  $\mathbf{R}$ 는 서로 부호가 다른 두 개의 SR Factorization 해를 가진다(up to sign).

$$\mathbf{R} = \mathbf{U}\mathbf{W}\mathbf{V}^\top \quad \text{or} \quad \mathbf{U}\mathbf{W}^\top\mathbf{V}^\top \quad (262)$$

### Proof

(260)에서 Essential Matrix  $\mathbf{E}$ 는 다음과 같이 2개의 행렬로 분해가 가능하다.

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= (\mathbf{U}\mathbf{Z}\mathbf{U}^\top)(\mathbf{U}\mathbf{W}\mathbf{V}^\top) = \mathbf{S}_0\mathbf{R}_0 \\ &= (\mathbf{U}\mathbf{Z}\mathbf{U}^\top)(\mathbf{U}\mathbf{W}^\top\mathbf{V}^\top) = \mathbf{S}_0\mathbf{R}'_0 \end{aligned} \quad (263)$$

위 식에서 두번째 행의  $(\mathbf{U}\mathbf{W}^\top\mathbf{V}^\top)$ 는  $-\mathbf{Z}\mathbf{W}^\top$ 을 사용하여  $\text{diag}(1, 1, 0)$ 을 표현했을 때 얻는 행렬이다(up to sign). Essential Matrix  $\mathbf{E}$ 가 위 두 가지 케이스로만 분해된다는 것을 증명하려면

$$\mathbf{E} = \mathbf{S}_0\mathbf{R}_0 = \mathbf{SR} \quad (264)$$

에 대하여  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_0, \mathbf{R} = \mathbf{R}_0 = \mathbf{R}'_0$ 임을 증명해야 한다.

반대칭행렬  $\mathbf{S}, \mathbf{S}_0$ 는 rank가 2인 행렬이므로  $\mathbf{S}^\top = \mathbf{s}_0^\wedge, \mathbf{S}^\top = \mathbf{s}^\wedge$ 과 같이 벡터 형태로 나타낼 수 있고

$$\mathbf{s}, \mathbf{s}_0 \in \text{Nul } \mathbf{E}^\top \quad (265)$$

과 같이  $\mathbf{E}$ 의 Left Null Space에 포함된다. 따라서  $\mathbf{s}, \mathbf{s}_0$ 는 비례관계가 성립한다.

$$\mathbf{s} = \alpha\mathbf{s}_0 \quad \alpha \neq 0 \in \mathbb{R} \quad (266)$$

위 식에 따라  $\mathbf{SR} = \alpha\mathbf{S}_0\mathbf{R}_0$ 이 성립하고 이 때  $\|\mathbf{R}\| = \|\mathbf{R}_0\| = 1$ 이므로 Frobenius Norm을 비교해보면  $\alpha = \pm 1$ 인 것을 알 수 있다.

$$\mathbf{S} = \pm\mathbf{S}_0 \quad (267)$$

다음으로  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 = \mathbf{R}'_0$ 라는 것을 증명한다. 지금까지 구한 결과에 따라 Essential Matrix  $\mathbf{E}$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{U} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \mathbf{V}^\top \\ &= \mathbf{S}_0\mathbf{R} \\ &= \mathbf{S}_0(\mathbf{U}\mathbf{X}\mathbf{V}^\top) \quad \because \mathbf{R} = \mathbf{U}\mathbf{X}\mathbf{V}^\top \\ &= \mathbf{U}\mathbf{Z}\mathbf{U}^\top\mathbf{U}\mathbf{X}\mathbf{V}^\top \quad \because \mathbf{U}^\top\mathbf{U} = \mathbf{I} \\ &= \mathbf{U}(\mathbf{Z}\mathbf{X})\mathbf{V}^\top \end{aligned} \quad (268)$$

이 때, 회전행렬  $\mathbf{R}$ 은  $\mathbf{R} = \mathbf{U}\mathbf{X}\mathbf{V}^\top$ 와 같이 서로 다른 3개의 직교행렬로 분해가 가능하다.

$$\mathbf{Z}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & \end{bmatrix} \mathbf{X} = \text{diag}(1, 1, 0) \text{이므로 이를 전개하면}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \begin{bmatrix} & -1 \\ 1 & \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{W} = -\mathbf{W}^\top \end{aligned} \quad (269)$$

이므로 **따라서 부호의 변화를 포함한(up to sign)  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 = \mathbf{R}'_0$ 가 성립한다.**

$$\mathbf{R} = \mathbf{U}\mathbf{W}\mathbf{V}^\top \quad \text{or} \quad \mathbf{U}\mathbf{W}^\top\mathbf{V}^\top \quad (270)$$

다음으로  $\mathbf{t}$ 를 구해보자. 반대칭행렬  $\mathbf{S} = \mathbf{U}\text{diag}(1, 1, 0)\mathbf{U}^\top = \mathbf{t}^\wedge$ 이므로 다음이 성립한다.

$$\mathbf{S}\mathbf{t} = \mathbf{t}^\wedge\mathbf{t} = 0 \quad (271)$$

위 식에서  **$\mathbf{t}$ 의 해는  $\mathbf{S}$ 의 Null Space가 되므로 행렬  $\mathbf{U}$ 의 세 번째 열(third column)인  $\mathbf{u}_3$ 가 된다.** 하지만  $\mathbf{S} = \pm\mathbf{S}_0$ 이므로

$$\mathbf{t} = \pm\mathbf{u}_3 \quad (272)$$

이 되어 정확한  $\mathbf{t}$  값을 결정할 수 없다.

### Result 9.19

따라서  $t = \pm u_3$ 와 앞서 구한  $R = UWV^T$  또는  $R = UW^T V^T$ 에 의해 Essential Matrix  $E = t^R$ 에 대한 총 네 가지 경우의 수가 존재한다.

두 개의 카메라 행렬  $P, P'$ 와 Essential Matrix  $E$ 가 주어졌을 때,  $P = [I | 0]$ 이라고 하면  $P'$ 에 대한 다음과 같은 네 가지 해가 존재한다.

$$P' = [UWV^T + u_3] \text{ or } [UWV^T - u_3] \text{ or } [UW^T V^T + u_3] \text{ or } [UW^T V^T - u_3] \quad (273)$$

### Geometrical interpretation of the four solutions

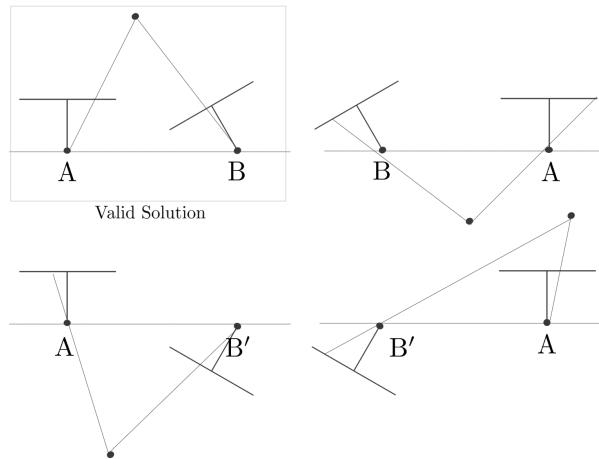
위 네가지 해에서 처음 두 개의 솔루션을 보면  $u_3$ 의 부호만 다른 것을 알 수 있는데 이는 첫 번째와 두 번째 카메라가 반대 방향으로 뒤집혀 있는 상태를 의미한다.

첫 번째 해와 세 번째 해는 다음과 같은 관계를 가진다.

$$\begin{aligned} E &= [UW^T V^T | u_3] && \cdots 3rd \text{ solution} \\ &= [U(WV^T V W^T)W^T V^T | u_3] && \because WV^T V W^T = I \\ &= [UWV^T | u_3] \begin{bmatrix} VW^T W^T V^T & \\ & 1 \end{bmatrix} && (274) \\ &= [UWV^T | u_3] \begin{bmatrix} V & \\ \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} & V^T \\ & & 1 \end{bmatrix} && \cdots 1st \text{ solution} \cdot [*] \end{aligned}$$

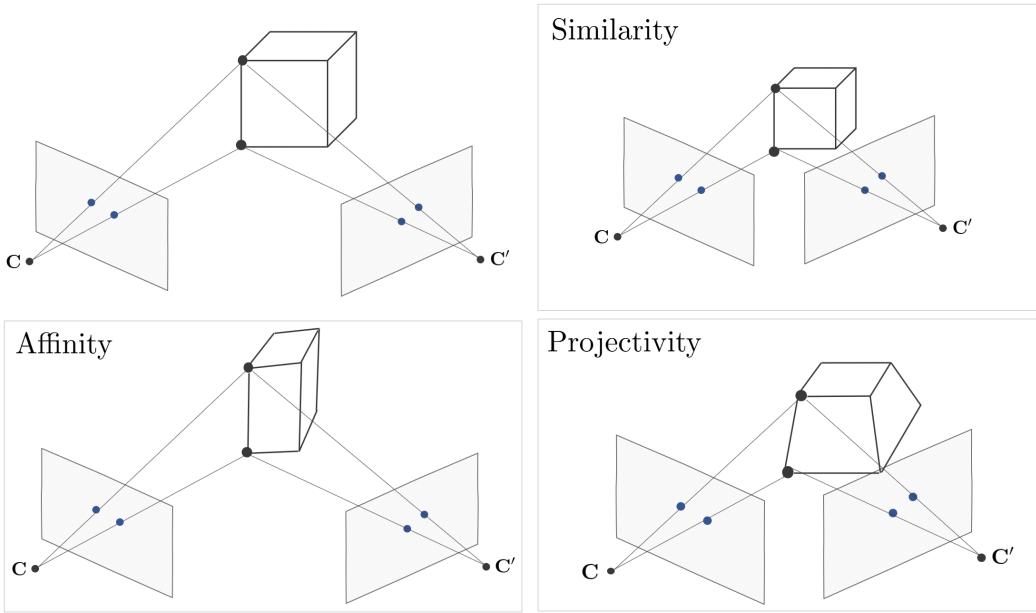
이 때  $VW^T W^T V^T$ 는 Baseline의 수직한 방향 2개를 상하대칭하는 행렬이 된다. 즉, Baseline을 축으로 180 degree 회전하는 형태가 된다.

Four Solutions of Essential Matrix



네 개의 해를 기하학적으로 표현하면 위 그림과 같다. 수학적으로는 총 네 개의 해가 도출되지만 실제 유효한 값은 하나만 존재한다. 따라서 3차원 공간 상의 점 X가 두 카메라 앞에 존재하는 유일한 해를 선택하면 Essential Matrix E를 분해한 R, t를 성공적으로 얻을 수 있다.

## 7 3D Reconstruction of Cameras and Structure



이전 섹션에서 언급했듯이 **Fundamental Matrix  $\mathbf{F}$** 는 여러 카메라 행렬 대응쌍 ( $\mathbf{P}, \mathbf{P}'$ )에 대하여 사영 모호성(**projective ambiguity**)이 존재하기 때문에 결과물인  $\mathbf{P}, \mathbf{P}'$ 를 통해 계산한 3차원 공간 상의 점 또한 모호성을 가지게 된다. 해당 섹션에서는 Scene Constraint와 Internal Constraint를 사용하여 모호성을 제거하는 방법에 대해서 설명한다.

### The projective reconstruction theorem

#### Theorem 10.1 (Projective reconstruction theorem)

두 카메라의 이미지 평면 상 대응점 쌍들인  $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ 이 충분히 주어져서 이를 통해 Fundamental Matrix  $\mathbf{F}$ 를 구했다고 가정해보자. 이 때, 사영모호성으로 인해 다음과 같은 두 카메라 행렬 대응쌍

$$(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}'_1, \{\mathbf{X}_{1,i}\}) \\ (\mathbf{P}_2, \mathbf{P}'_2, \{\mathbf{X}_{2,i}\}) \quad (275)$$

이 동일한 Fundamental Matrix  $\mathbf{F}$ 를 갖게 되는 경우

$$(\mathbf{P}_2, \mathbf{P}'_2, \{\mathbf{X}_{2,i}\}) = \mathbf{H} \cdot (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}'_1, \{\mathbf{X}_{1,i}\}) \quad (276)$$

를 만족하는 Homography 행렬  $\mathbf{H} \in \text{PGL}_4$ 가 반드시 존재한다. 이 때 연산은 다음과 같이 성립한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_2 &= \mathbf{H} \cdot \mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_1 \mathbf{H}^{-1} \\ \mathbf{P}'_2 &= \mathbf{H} \cdot \mathbf{P}'_1 = \mathbf{P}'_1 \mathbf{H}^{-1} \\ \mathbf{X}_{2i} &= \mathbf{H} \cdot \mathbf{X}_{1i} = \mathbf{H} \mathbf{X}_{1i} \end{aligned} \quad (277)$$

#### Proof

이전 섹션에서 동일한 Fundamental Matrix  $\mathbf{F}$ 를 공유하는 카메라 행렬 대응쌍 사이에  $\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1 \mathbf{H}^{-1}, \mathbf{P}'_2 = \mathbf{P}'_1 \mathbf{H}^{-1}$ 를 만족하는 Homography 행렬  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ 가 존재한다는 것을 증명하였다. 이를 적용해보면

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_2 \mathbf{X}_{2i} &= \mathbf{P}_1 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{X}_{2i} = \mathbf{x}_i = \mathbf{P}_1 \mathbf{X}_{1i} \\ \mathbf{P}'_2 \mathbf{X}_{2i} &= \mathbf{P}'_1 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{X}_{2i} = \mathbf{x}'_i = \mathbf{P}'_1 \mathbf{X}_{1i} \end{aligned} \quad (278)$$

가 성립한다.  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ 에 의해 Back Projection된 직선을  $\mathcal{R}$ 이라고 하고  $\mathbf{P}'_1, \mathbf{P}'_2$ 에 의해 Back Projection된 직선을  $\mathcal{R}'$ 이라고 하면

$$\{\mathbf{H}^{-1} \mathbf{X}_{2i}, \mathbf{X}_{1i}\} \in \mathcal{R} \cap \mathcal{R}' \quad (279)$$

와 같이 3차원 공간 상의 점  $\{\mathbf{H}^{-1}\mathbf{X}_{2i}, \mathbf{X}_{1i}\}$ 는 두 직선의 교차점이 된다. 따라서 **두 직선  $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ 이 Baseline과 같이 동일한 직선인 경우를 제외하면  $\{\mathbf{H}^{-1}\mathbf{X}_{2i}, \mathbf{X}_{1i}\}$ 는 교차점인 한 점을 의미**하므로

$$\begin{aligned}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{X}_{2i} &= \mathbf{X}_{1i} \\ \mathbf{X}_{2i} &= \mathbf{H}\mathbf{X}_{1i}\end{aligned}\quad (280)$$

가 성립한다. 따라서 추가적인 기하학적 원리를 사용하지 않으면 위와 같은 상황에서는 사영모호성을 포함하여(up to projectivity) 복원할 수 있다.

### Stratified reconstruction

Fundamental Matrix  $\mathbf{F}$ 를 사용하여 계산한 카메라 행렬 대응쌍  $(\mathbf{P}, \mathbf{P}')$ 의 사영모호성 문제를 해결하기 위해 Ground Truth 카메라 행렬 대응쌍인

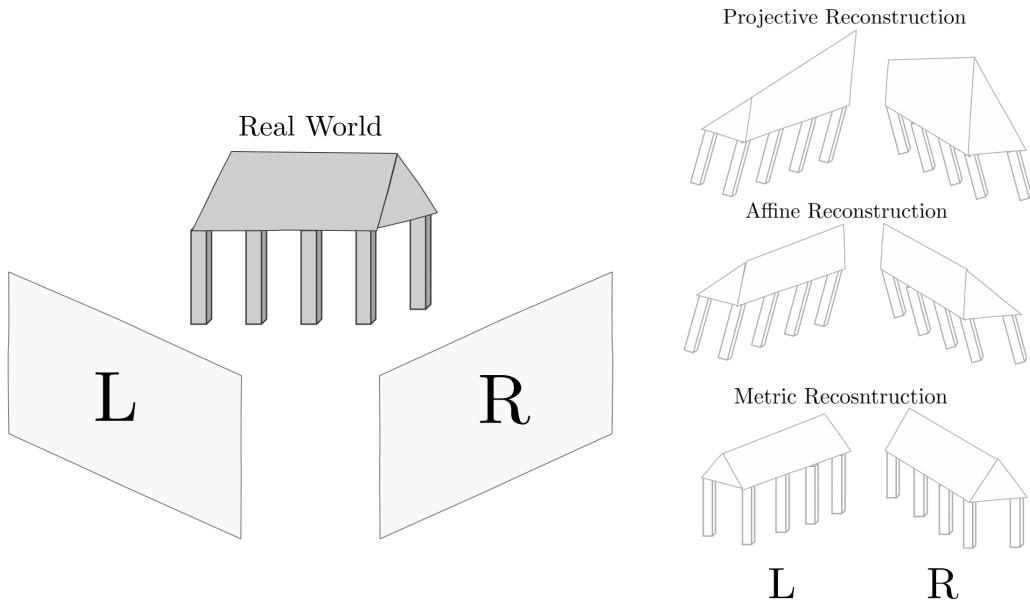
$$(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}'_0, \{\hat{\mathbf{X}}_i\}) \quad (281)$$

이 존재한다고 가정하면

$$\begin{aligned}(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}'_1, \{\mathbf{X}_i\}) &= \mathbf{H} \cdot (\mathbf{P}_0, \mathbf{P}'_0, \{\hat{\mathbf{X}}_i\}) \\ \mathcal{T} &= \mathbf{H} \cdot \mathcal{T}_0\end{aligned}\quad (282)$$

을 만족하는 Homography 행렬  $\mathbf{H}$ 가 존재한다. 이 때, 이미지 평면 상에서 평행한 직선의 특성을 활용하여 Affine Reconstruction을 수행한 다음, 이미지 평면 상에서 직교한 선들의 특성을 사용하여 Similarity Reconstruction을 순차적으로 수행한다.

### The step to affine reconstruction



Affine Reconstruction 단계에서는 평행한 직선들의 특성을 보존하는 Homography 행렬  $\mathbf{H}_A$ 를 찾아야 한다.

$$\mathbf{H}_A(\pi_\infty) = \pi_\infty \quad (283)$$

3차원 공간 상의 점들의 집합  $\{\mathbf{X}_i\}$ 를 사용하여 소실점을 3개 이상 구한 경우 이미지 평면에 프로젝션된 무한대 평면  $\pi'_\infty$ 를 계산할 수 있다. 이미지 평면 상에 프로젝션된 무한대 평면  $\pi'_\infty$ 를

$$\pi'_\infty = [a \ b \ c \ 1]^\top \quad (284)$$

라고 하면 실제 무한대 평면  $\pi_\infty = (0 \ 0 \ 0 \ 1)^\top$ 을  $\pi'_\infty$ 로 보내는 Homography 행렬  $\mathbf{H}_A$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{H}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & 0 \\ \pi'_\infty & \mathbf{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & 0 \\ a & b & c & 1 \end{bmatrix} \quad (285)$$

이 때  $\mathbf{H}_A^\top \pi_\infty = \pi'_\infty$  관계가 성립한다.

$$\pi_\infty = \mathbf{H}_A^{-\top} \pi'_\infty \quad (286)$$

이를  $\mathcal{T}$ 에 적용하면

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_a &= \mathbf{H} \cdot \mathcal{T} \\ (\mathbf{P}\mathbf{H}_A^{-1}, \mathbf{P}'\mathbf{H}_A^{-1}, \{\mathbf{H}_A \mathbf{X}_i\}) &= \mathbf{H} \cdot (\mathbf{P}, \mathbf{P}', \{\mathbf{X}_i\}) \end{aligned} \quad (287)$$

연산을 통해 이미지를 Affine Reconstruction할 수 있다. 여기까지 진행했다면 Ground Truth  $\mathcal{T}_0$ 와  $\mathcal{T}_a$ 는 Affine만큼만 차이가 나게 된다. 즉, 평행한 직선들은 모두 복원되었으나 아직 직교한 직선들은 복원되지 않은 상태이다.

### The step to metric reconstruction

Metric Reconstruction 단계에서는 직교하는 선들을 보존하는 Homography 행렬  $\mathbf{H}_S$ 를 찾아야 한다.

$$\mathbf{H}_S(\Omega_\infty) = \Omega_\infty \quad (288)$$

이 때,  $\Omega_\infty$ 는 무한대 평면상에 존재하는 Absolute Conic을 의미한다. Affine Reconstruction 단계에서 얻은  $\mathcal{T}_a$ 는 무한대 평면  $\pi_\infty$ 가 실제 무한대에 위치하게 된다. 이 때,  $\{\mathbf{X}_i\}$ 를 중 직교하는 점들을 사용하여  $\Omega_\infty$ 를 구할 수 있다. 직교하는 점들의 대응쌍을  $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ 라고 하면

$$\mathbf{d}_1^\top \omega \mathbf{d}_2 = 0 \quad (289)$$

을 만족하는  $\omega$ 를 찾을 수 있고  $\omega$ 는 이미지 평면 상에 프로젝션된 Absolute Conic  $\Omega_\infty$  (Image of Absolute Conic, IAC)가 된다.

카메라 행렬  $\mathbf{P} = \mathbf{K}[\mathbf{R}|\mathbf{t}] = [\mathbf{M} \mid \mathbf{m}]$ 가 주어졌을 때 무한대 평면  $\pi_\infty$ 는  $\mathbf{M}$ 에 의해 이미지 평면  $\pi$ 에 프로젝션된다.

$$\mathbf{M} : \pi_\infty \mapsto \pi \quad (290)$$

반대로  $\mathbf{M}^{-1}$ 는  $\pi$  평면 상의 점들을 무한대 평면  $\pi_\infty$ 으로 보내는 매핑이라고 할 수 있다.

$$\mathbf{M}^{-1} : \pi \mapsto \pi_\infty \quad (291)$$

이 때, 이미지 평면에 프로젝션된 Absolute Conic에  $\mathbf{M}^{-1}$ 을 적용하면  $\mathbf{M}^{-1}(\omega) = \tilde{\Omega}_\infty$ 가 된다.  $\tilde{\Omega}_\infty$ 는 아직 Metric Reconstruction이 되기 전이므로  $\Omega_\infty \neq \tilde{\Omega}_\infty$ 이다. 둘 사이에는 다음 공식이 성립한다.

$$\mathbf{H}_S(\tilde{\Omega}_\infty) = \Omega_\infty = \mathbf{I}_3 \quad (292)$$

### Result 10.5

이미지 평면에 프로젝션된 Absolute Conic을  $\omega$ 라고 하고 Affine Reconstruction으로 구한 카메라 행렬을  $\mathbf{P} = [\mathbf{M} \mid \mathbf{m}]$ 이라고 할 때 Metric Reconstruction을 수행하는 Homography  $\mathbf{H}_S$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{H}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \\ & 1 \end{bmatrix} \quad (293)$$

이 때,  $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top = (\mathbf{M}^\top \omega \mathbf{M})^{-1}$ 이고  $\mathbf{A}$ 는 이를 Cholesky Decomposition을 통해 얻을 수 있다.

### Proof

Metric Reconstruction을 수행하는 Homography  $\mathbf{H}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \\ & 1 \end{bmatrix}$ 이라고 하고 이 때 이미지 평면을  $\pi_s$ , 카메라 행렬을  $\mathbf{P}_s$ 라고 하면  $\mathbf{H}_S(\pi) = \pi_s$  관계가 성립하고 무한대 평면을 Homography 변환한 공식은

$$\begin{aligned}\pi_\infty \mathbf{A}^{-1} &= \pi_{\infty,s} \\ \mathbf{H}_S|_{\pi_\infty} &= \mathbf{A}^{-1}\end{aligned}\quad (294)$$

가 된다. 각각 무한대 평면  $\pi_\infty, \pi_{\infty,s}$ 을 이미지 평면  $\pi, \pi_s$ 에 투영하는 공식은

$$\begin{aligned}\mathbf{P}|_{\pi_\infty} &= \mathbf{M} \\ \mathbf{P}_s|_{\pi_\infty} &= \mathbf{M}\mathbf{A}\end{aligned}\quad (295)$$

과 같이 변형된다. 따라서  $\mathbf{H}_S(\tilde{\Omega}_\infty)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_S(\tilde{\Omega}_\infty) &= (\mathbf{A}^{-1})^{-\top} \tilde{\Omega}_\infty \mathbf{A} \\ &= \mathbf{A}^\top (\mathbf{M}^\top \omega \mathbf{M}) \mathbf{A}\end{aligned}\quad (296)$$

따라서 Absolute Conic 특성에 의해  $\mathbf{A}^\top (\mathbf{M}^\top \omega \mathbf{M}) \mathbf{A}$ 는  $\mathbf{I}^o$  되어야 하므로

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^\top (\mathbf{M}^\top \omega \mathbf{M}) \mathbf{A} &= \mathbf{I} \\ (\mathbf{M}^\top \omega \mathbf{M})^{-1} &= \mathbf{A} \mathbf{A}^\top\end{aligned}\quad (297)$$

가 성립한다. 결론적으로  $\mathbf{H}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \\ & 1 \end{bmatrix}$ 를 구하기 위해서는 이미지 평면 상에서 직교하는 직선들의 특성을 사용하여  $\omega$ 를 구한 후,  $(\mathbf{M}^\top \omega \mathbf{M})^{-1}$ 를 Cholesky Decomposition하여  $\mathbf{A} \mathbf{A}^\top$ 를 구한다. 이를 통해  $\mathbf{A}^{-1}$  값을 구할 수 있고 최종적으로 Metric Reconstruction을 수행하는 Homography  $\mathbf{H}_S$ 를 구할 수 있다.

## 8 Computation of the Fundamental Matrix F

### Basic equations

두 카메라의 대응점쌍  $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'^o$  존재할 때

$$\mathbf{x}'^\top \mathbf{F} \mathbf{x} = 0 \quad (298)$$

을 만족하는  $3 \times 3$  크기의 행렬  $\mathbf{F}$ 를 Fundamental Matrix라고 한다. 만약 세 개의 대응점쌍  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3)^o$  주어졌을 때  $\mathbf{x}'^\top \mathbf{F} \mathbf{x} = 0$ 이를 다시 정리하면  $\sum \mathbf{x}'_i \mathbf{x}_j \mathbf{f}_{ij} = 0$ 과 같이 정리할 수 있다. 해당 식은 선형시스템

$$\mathbf{A} \mathbf{f} = 0 \quad (299)$$

꼴로 나타낼 수 있고 이 때  $\mathbf{A}$ 와  $\mathbf{f}$ 를 풀어쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= (\mathbf{a}_{ik}) \in \mathbb{R}^{N \times 9}, \quad i\text{-th row is } (x'_{i1} x_{i1}, x'_{i1} x_{i2}, \dots, x'_{i3} x_{i3}) \\ \mathbf{f} &= (\mathbf{f}_{11}, \mathbf{f}_{12}, \mathbf{f}_{13}, \dots, \mathbf{f}_{33})^\top \in \mathbb{R}^{9 \times 1}\end{aligned}\quad (300)$$

만약 주어진 대응점쌍의 개수  $N$ 이 8보다 크고 노이즈가 없는 완벽한 데이터로 생성이 되었으면  $\mathbf{A}$ 는 rank 8 행렬이 되고 유일한 해  $\mathbf{f}$ 가 존재한다. 이 때  $\mathbf{f}$ 는  $\mathbf{A}$ 의 Null Space의 원소가 된다.

하지만 대부분의 경우 주어진 데이터에는 항상 노이즈가 존재하므로  $\mathbf{A}$  행렬은 rank 9인 full rank 행렬이 된다. 이 때 해를 구하면  $\mathbf{f}$ 는 항상 영벡터가 계산되므로  $\|\mathbf{f}\| = 1$ 이라는 조건하에  $\|\mathbf{A}\mathbf{f}\|$ 의 크기를 최소화하는 근사해  $\mathbf{f}$ 를 찾아야 한다. 해를 찾는 방법은  $\mathbf{A}$ 를 특이값 분해(SVD)한 다음

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^\top \quad (301)$$

대각행렬  $\mathbf{D}$ 의 eigenvalue 중 가장 절대값이 작은 것에 대응되는  $\mathbf{V}$ 의 열벡터를  $\mathbf{f}$ 의 일반해로 간주한다. 해당 열벡터  $\mathbf{f}$ 가  $\|\mathbf{A}\mathbf{f}\|$ 의 크기를 최소화하는 벡터가 되며 이를 Linear Solution이라고 부른다.

하지만 이 때, Linear Solution  $\mathbf{f}$ 로 복원한  $\mathbf{F}_0$ 가 rank 2 행렬임을 보장할 수 없다. 수치적으로 해를 구하면 일반적으로 rank 3인 행렬이 나온다. 따라서 한 번 더 SVD를 사용하여  $\mathbf{F}_0$ 와 가장 가까운 rank 2 행렬을 찾아야 한다.

$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{U}_0 \mathbf{D}_0 \mathbf{V}_0^\top \quad (302)$$

이 때 대각행렬  $\mathbf{D}_0 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \sigma_3 \end{bmatrix}$ 는 일반적으로 마지막 특이값  $\sigma_3$ 가 0이 아니므로 rank 3인 행렬이 된다. 따라서 임의로  $\sigma_3 = 0$ 으로 변경한 행렬이  $\mathbf{F}_0$ 과 가장 가까운 rank 2 행렬이 된다.

### The minimum case - seven point correspondences

7개의 대응점쌍이 주어진 경우  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{7 \times 9}$ 인 rank 7 행렬이 된다. 이에 따라 Null Space의 차원이 2가 되므로 무수한 해가 존재한다.  $\mathbf{Af} = 0$ 의 풀어서 두 개의 선형독립인 Fundamental Matrix  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ 를 구하고

$$\mathbf{F} = \alpha \mathbf{F}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{F}_2 \quad (303)$$

를 통해  $\mathbf{F}$ 를 구한다.  $\mathbf{F}$  행렬의 rank는 2이므로  $\det(\mathbf{F}) = 0$ 을 만족하게 되고 이에 따라  $\alpha$ 에 대한 3차 방정식을 얻는다. 3차 방정식이 세 개의 실수해를 가지는 경우는 Degenerate Configuration이 된다.

### The normalized 8-point algorithm

행렬  $\mathbf{A}$ 는 주어진 대응점쌍  $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$ 으로 구성된 행렬이므로 대응점쌍들을 정규화(normalization)하지 않고 바로 해를 구하는 경우  $\mathbf{x}_i = (1000000, 2000000, 1)$ 과 같이 마지막 값에 비해서 처음 두 값의 크기가 매우 크게 되므로 수치적으로 불안정한 문제를 가진다. 따라서  $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_i$ 를 Centroid가 0이고 Centroid로부터 평균거리가  $\sqrt{2}$ 가 되도록 하는 Homography 변환  $\mathbf{H}, \mathbf{H}'$ 를 적용한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i &\rightarrow \mathbf{H}\mathbf{x}_i \\ \mathbf{x}'_i &\rightarrow \mathbf{H}'\mathbf{x}'_i \end{aligned} \quad (304)$$

이렇게 변환된 대응점쌍들을 사용하여 수치적으로 안정적인 Fundamental Matrix  $\mathbf{F}'$  계산할 수 있다. 앞서 설명한 내용을 따라  $\mathbf{F}'$ 를 계산한 다음 다시 원래의 대응점쌍  $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$ 으로 복원하기 위해

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathbf{H}'\mathbf{x}')^\top \mathbf{F}'(\mathbf{H}\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{x}^\top (\mathbf{H}'^\top \mathbf{F}' \mathbf{H}) \mathbf{x} \end{aligned} \quad (305)$$

처럼  $\mathbf{F} = \mathbf{H}'^\top \mathbf{F}' \mathbf{H}$ 를 통해 원래 대응점쌍의 Fundamental Matrix  $\mathbf{F}$ 를 계산할 수 있다.

### Degenerate configurations

두 개의 카메라 행렬 대응쌍  $(\mathbf{P}, \mathbf{P}', \{\mathbf{X}_i\}), (\mathbf{Q}, \mathbf{Q}', \{\mathbf{Y}_i\})$ 가 다음의 조건을 만족하면 서로 Conjugate Configuration이라고 한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\mathbf{X}_i &= \mathbf{Q}\mathbf{Y}_i, \quad \mathbf{P}'\mathbf{x}_i = \mathbf{Q}'\mathbf{y}'_i \quad \forall s \\ (\mathbf{P}, \mathbf{P}'), (\mathbf{Q}, \mathbf{Q}') &\text{ share the same } \mathbf{F} \end{aligned} \quad (306)$$

이 때, Conjugate Configuration이 있는 카메라 행렬 대응쌍  $(\mathbf{P}, \mathbf{P}', \{\mathbf{X}_i\})$ 을 Critical Triple이라고 부른다.

임의의 카메라 대응쌍  $\mathbf{P}, \mathbf{P}', \{\mathbf{X}_i\}$ 가 Critical Triple일 필요충분조건은 각각의 카메라 중심점  $\mathbf{C}, \mathbf{C}'$ 와 3차원 공간 상의 점  $\mathbf{X}_i$ 가 어떤 Ruled Quadric Surface, 즉 직선을 포함하는 Quadric Surface 상에 포함되는 것이다.

### Proof

임의의 카메라 행렬 대응쌍  $(\mathbf{P}, \mathbf{P}', \{\mathbf{X}_i\})$ 이 Critical Triple이라는 것을 보이기 위해서는 이와 대응하는 카메라 행렬 대응쌍  $(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}', \{\mathbf{Y}_i\})$ 이 같은 Fundamental Matrix  $\mathbf{F}$ 를 가진다는 사실을 사용해야 한다.  $\mathbb{P}^3$  공간에서 이차곡면은 4x4 크기의 행렬로 정의된다.

$$\mathbf{S}_p := \mathbf{P}' \mathbf{F}_{QQ'} \mathbf{P} \quad (307)$$

여기서 이차곡면  $\mathbf{S}_p \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ 는 카메라 중심점  $\mathbf{C}, \mathbf{C}'$ 와 3차원 공간 상의 점  $\{\mathbf{X}_i\}$ 를 포함해야 한다.

$\mathbf{S}_p$ 는 Ruled Quadric Surface이므로 직선을 포함하고 있음을 보이면 되므로 카메라 중심선을 연결한 직선인 baseline을  $\mathbf{S}_p$ 가 포함하고 있음을 보이면 된다. baseline 위에 있는 임의의 점  $\mathbf{X}$ 가 존재할 때

$$\mathbf{S}_p \mathbf{X} = \mathbf{P}' \mathbf{F}_{QQ'} \mathbf{P} \mathbf{X} = 0 \quad \because \mathbf{F}_{QQ'} \mathbf{P} \mathbf{X} = 0 \quad (308)$$

을 만족하므로  $\mathbf{S}_p$ 는 Ruled Quadric Surface임을 알 수 있다.

반대로, 카메라 중심점  $\mathbf{C}, \mathbf{C}'$ 와 3차원 공간 상의 점  $\{\mathbf{X}_i\}$ 가  $\mathbf{S}_p$ 에 속하면 다음 공식이 성립한다.

$$(\mathbf{P}' \mathbf{X}_i)^\top \mathbf{F}_{QQ'} (\mathbf{P} \mathbf{X}_i) = 0 \quad (309)$$

여기서  $\mathbf{x}' = \mathbf{P}' \mathbf{X}_i, \mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{X}_i$ 이고  $\mathbf{F}_{QQ'}$ 이므로  $\mathbf{F}_{QQ'}$ 에 대한 대응점 쌍이  $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$  존재한다는 의미이다. 따라서

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{P}' \mathbf{X}_i = \mathbf{Q}' \mathbf{Y}_i \\ \mathbf{x} &= \mathbf{P} \mathbf{X}_i = \mathbf{Q} \mathbf{Y}_i \end{aligned} \quad (310)$$

를 만족하므로 카메라 행렬 대응쌍  $(\mathbf{P}, \mathbf{P}', \{\mathbf{X}_i\})$ 과  $(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}', \{\mathbf{Y}_i\})$ 는 같은 Fundamental Matrix  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{PP'} = \mathbf{F}_{QQ'}$ 를 공유하는 Conjugate Triple이라는 것을 알 수 있다.

### The Gold Standard method

이미지 평면 상의 대응점 쌍  $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$ 는 일반적으로 노이즈를 포함하고 있으므로 이를 통해 Fundamental Matrix  $\mathbf{F}$ 를 정확하게 계산할 수 없고  $\|\mathbf{A}\mathbf{f}\|$ 의 크기를 최소화하는 근사해  $\mathbf{F}'$ 를 계산할 수밖에 없다. 따라서 **F'를 더 정확하게 계산하기 위해 2D Homography 문제와 마찬가지로 주어진 데이터  $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ 를 Ground Truth  $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}}'$ 과 가까워지게 보정하는 방법을 The Gold Standard method라고 한다.**

- 8개 이상의 대응점 쌍  $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$ 이 주어졌을 때 우선 앞서 설명한 것과 같이 총 두 번 SVD를 사용하여 rank가 2인 Fundamental Matrix  $\mathbf{F}_0$ 를 계산한다. 이 때,  $\mathbf{F}_0$ 를 Linear Solution이라고 부른다.
- 다음으로 Epipole  $\mathbf{e}, \mathbf{e}'$ 에 대하여 다음 공식이 성립한다.

$$\mathbf{e}' \mathbf{F}_0 = 0, \quad \mathbf{F}_0 \mathbf{e} = 0 \quad (311)$$

- 위 공식으로부터  $\mathbf{e}, \mathbf{e}'$ 를 각각 계산한다.
- Epipole을 계산하면 Caninocal Form의 카메라 행렬  $\mathbf{P}, \mathbf{P}'$ 를 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= [\mathbf{I}|0], \quad \mathbf{P}' = [\mathbf{M}|\mathbf{m}] \\ \text{where, } \mathbf{M} &= \mathbf{e}'^\wedge \mathbf{F}, \quad \mathbf{m} = \mathbf{e}' \end{aligned} \quad (312)$$

- 이를 통해  $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ 의 Back-projection된 직선들을 각각 구할 수 있다.
- 두 Back-projection 직선과 가장 근접한 3차원 공간 상의 점  $\mathbf{X}_i$ 를 계산할 수 있다.
- 이미지 평면에 3차원 공간 상의 점  $\mathbf{X}_i$ 를 재투영(reprojection) 한다.

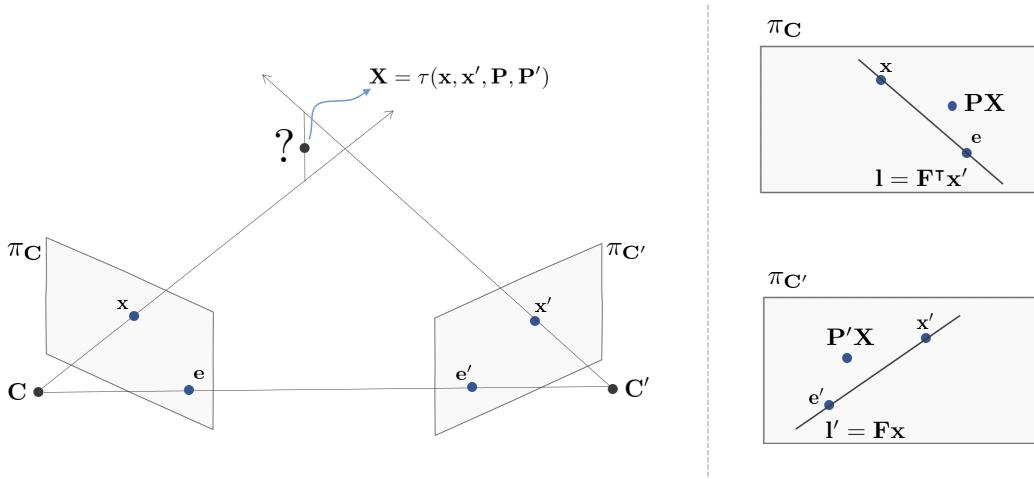
$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{P} \mathbf{X}_i \\ \hat{\mathbf{x}}' &= \mathbf{P}' \mathbf{X}_i \end{aligned} \quad (313)$$

다음과 같이 재투영 오차(reprojection error)를 Gauss-Newton, Levenberg-Marquardt 등과 같은 비선형 최적화 방법을 사용하여 최소화한다.

$$\sum_i d(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})^2 + d(\mathbf{x}', \hat{\mathbf{x}}')^2 \quad (314)$$

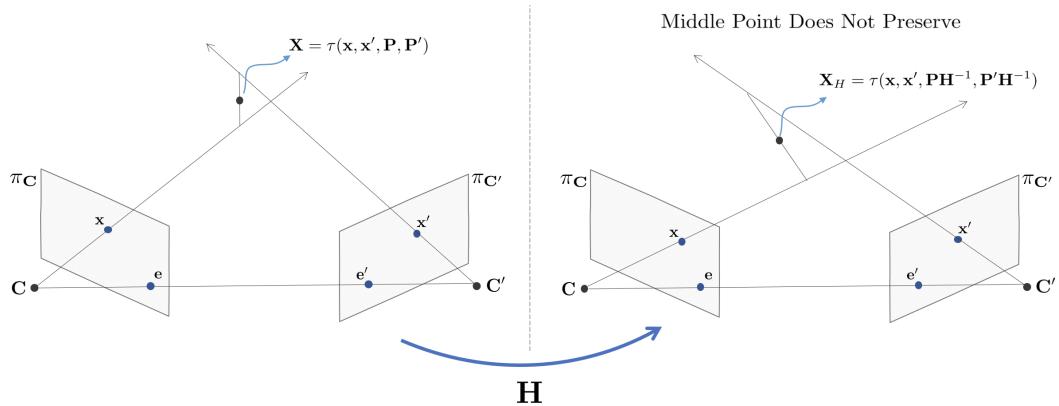
이 때 최적화되는 파라미터는  $\mathbf{X}_i$ 와 카메라 행렬  $\mathbf{P}' = [\mathbf{M}|\mathbf{m}]$ 이다.

## 9 Structure Computation



### Problem statement

해당 섹션에서는 두 카메라 행렬 대응쌍 ( $\mathbf{P}, \mathbf{P}'$ )와 이미지 평면의 대응점 쌍 ( $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ )가 주어진 경우  $\mathbb{P}^3$  공간 상의 점  $\mathbf{X}$ 를 구하는 방법에 대해 설명한다. 이론적으로는 대응점 쌍  $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ 를 Back-projection하여 얻은 두 직선의 교차점을 통해  $\mathbf{X}$ 를 계산할 수 있으나 실제 데이터는 노이즈가 존재하기 때문에 두 Back-projection 직선이 교차하지 않는다. 또한 노이즈로 인해 두 이미지 평면 상에서 Epipolar Line  $\mathbf{l}, \mathbf{l}'$  또한  $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ 와 만나지 않는다.



이를 해결하기 위해서 두 Back-projection 직선들에 동시에 수직인 최단거리 직선을 구한 다음 최단거리 직선의 중점(mid-point)를 계산하여  $\mathbf{X}$ 를 계산하는 방법이 존재한다. 해당 방법은 체크보드를 이용한 캘리브레이션 방법과 같이  $\mathbf{P}, \mathbf{P}'$ 가 고정된 경우에는 사용하면 좋은 방법이지만, 대부분의 경우  $\mathbf{P}, \mathbf{P}'$ 는 사영모호성(projective ambiguity)으로 인해 유일하게 결정되지 않는다.

현실 세계에서는 카메라 행렬을 Affinity 또는 Projectivity까지 알고 있는 경우(up to affinity, projectivity)가 대부분이다. 정확한  $\mathbf{X}$ 를 구하기 위해서는 triangulation이 사영모호성에 대해서도 불변이어야 한다. Triangulation  $\tau$ 은 주어진 대응점 쌍과 카메라 행렬 대응쌍으로부터  $\mathbf{X} \in \mathbb{P}^3$ 를 계산하는 방법을 말한다.

$$\mathbf{X} = \tau(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{P}, \mathbf{P}') \quad (315)$$

$\tau$ 가 사영모호성에 불변이기 위해서는 임의의 Homography  $\mathbf{H} \in \text{PGL}_4$ 에 대하여

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_H &= \tau(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{P}\mathbf{H}^{-1}, \mathbf{P}'\mathbf{H}^{-1}) \\ &= \mathbf{H} \cdot \tau(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{P}, \mathbf{P}') \\ &= \mathbf{H}\mathbf{X} \end{aligned} \quad (316)$$

공식이 성립해야 한다. 위와 같이 불변성이 성립하는 경우

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{X}_H &= \mathbf{P}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{X} \\
&= \mathbf{P}\mathbf{X} \\
&= \mathbf{x}
\end{aligned} \tag{317}$$

이 된다. 마찬가지로  $\mathbf{P}'\mathbf{H}^{-1}\mathbf{X}_H = \mathbf{x}'$ 이 된다. 예를 들어, Fundamental Matrix  $\mathbf{F}$ 와 카메라 행렬 대응쌍  $(\mathbf{P}, \mathbf{P}')$ , 대응점 쌍  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ 이 주어졌을 때  $(\mathbf{P}, \mathbf{P}')$ 를 Homography 변환한 카메라 행렬 대응쌍  $(\mathbf{PH}^{-1}, \mathbf{P}'\mathbf{H}^{-1})$  또한 동일한  $\mathbf{F}$ 를 공유한다. 이를 통해

$$\begin{aligned}
\{\mathbf{X}\} &: 3D \text{ Points from } (\mathbf{x}, \mathbf{x}') \text{ and } (\mathbf{P}, \mathbf{P}'). \\
\{\mathbf{X}_H\} &: 3D \text{ Points from } (\mathbf{x}, \mathbf{x}') \text{ and } (\mathbf{PH}^{-1}, \mathbf{P}'\mathbf{H}^{-1}).
\end{aligned} \tag{318}$$

과 같이 두 PointCloud  $\{\mathbf{X}\}, \{\mathbf{X}_H\}$ 를 구할 수 있고 PointCloud가 Homography에 불변이기 위해서는 두 PointCloud 사이에

$$\mathbf{H}\{\mathbf{X}\} = \{\mathbf{X}_H\} \tag{319}$$

**인 변환 성질을 만족해야 한다.** 앞서 설명한 중점(mid-point)을 사용한 방법은 두 Back-projection 직선들에 서로 수직인 최단거리 직선이 Homography 변환을 수행하면 더 이상 직교하지 않게 되고 중점 또한 더 이상 중심이 위치하지 않게 된다. 따라서 중점을 사용한 방법은 Homography에 불변하지 않다.

### Linear triangulation methods

해당 섹션에서는  $\mathbf{X} \in \mathbb{P}^3$ 를 구하기 위해 선형방정식을 사용하는 방법을 설명한다.  $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{X}, \mathbf{x}' = \mathbf{P}'\mathbf{X}$ 로부터

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^\wedge(\mathbf{P}\mathbf{X}) &= 0 \\
\mathbf{x}'^\wedge(\mathbf{P}'\mathbf{X}) &= 0
\end{aligned} \tag{320}$$

공식이 성립한다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= [x \ y \ 1]^\top \\
\mathbf{P} &= [\mathbf{p}_{1, \text{row}}^\top \ \mathbf{p}_{2, \text{row}}^\top \ \mathbf{p}_{3, \text{row}}^\top]^\top \\
\mathbf{X} &= [X \ Y \ Z \ W]^\top
\end{aligned} \tag{321}$$

$\mathbf{p}_{i, \text{row}}^\top$  를  $\mathbf{P}$ 의 i번째 행(row)라고 했을 때  $\mathbf{x}^\wedge(\mathbf{P}\mathbf{X})$ 를 전개한 후 정리하면

$$\begin{aligned}
x(\mathbf{p}_{3, \text{row}}^\top \mathbf{X}) - (\mathbf{p}_{1, \text{row}}^\top \mathbf{X}) &= 0 \\
y(\mathbf{p}_{3, \text{row}}^\top \mathbf{X}) - (\mathbf{p}_{2, \text{row}}^\top \mathbf{X}) &= 0 \\
x(\mathbf{p}_{2, \text{row}}^\top \mathbf{X}) - y(\mathbf{p}_{1, \text{row}}^\top \mathbf{X}) &= 0
\end{aligned} \tag{322}$$

과 같고 이를  $\mathbf{x}'^\wedge(\mathbf{P}'\mathbf{X})$ 도 같이 구한 후  $\mathbf{X}$ 에 대한 선형시스템으로 다시 작성하면

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x\mathbf{p}_{3, \text{row}}^\top - \mathbf{p}_{1, \text{row}}^\top \\ y\mathbf{p}_{3, \text{row}}^\top - \mathbf{p}_{2, \text{row}}^\top \\ x'\mathbf{p}_{3, \text{row}}^\top - \mathbf{p}_{1, \text{row}}^\top \\ y'\mathbf{p}_{3, \text{row}}^\top - \mathbf{p}_{2, \text{row}}^\top \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{X} = 0 \tag{323}$$

같이  $\mathbf{AX} = 0$  형태로 정리할 수 있다. 데이터에 노이즈가 없는 경우  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ 의 rank가 3이 되어 Null Space 벡터를 통해 유일한  $\mathbf{X}$ 를 계산할 수 있지만 노이즈가 존재하는 경우  $\mathbf{A}$ 의 rank는 4가 되어 무수히 많은 해가 존재한다. 따라서  $\mathbf{A}$ 를 특이값 분해(SVD)하여  $\|\mathbf{X}\| = 1$ 일 때  $\|\mathbf{AX}\|$ 의 크기를 최소화하는 근사해  $\hat{\mathbf{X}}$ 를 계산해야 한다.

선형 방법에 Homography를 적용해보면

$$\begin{aligned}
y(\mathbf{p}_{3, \text{row}}) - \mathbf{p}_{2, \text{row}} &\rightarrow y(\mathbf{pH}^{-1})_{3, \text{row}} - (\mathbf{pH}^{-1})_{2, \text{row}} \\
&= y(\mathbf{p}_{3, \text{row}})\mathbf{H}^{-1} - \mathbf{p}_{2, \text{row}}\mathbf{H}^{-1} \\
&= (y(\mathbf{p}_{3, \text{row}}) - \mathbf{p}_{2, \text{row}})\mathbf{H}^{-1}
\end{aligned} \tag{324}$$

과 같아  $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{AH}^{-1}$ 로 변환되어  $\mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{X}_H$ 로 변환이 된다. 이를 통해

$$\|\mathbf{AX}\| = \|\mathbf{AH}^{-1}\mathbf{X}_H\| \quad (325)$$

이 성립하지만 Homography 변환을 할 때  $\|\mathbf{X}_H\| \neq 1$ 이 되어  $\|\mathbf{X}\| = 1$ 의 성질을 보존하지 않는다. 따라서 선형방정식을 통한 방법은 Homography에 대해 불변이 아니므로 최적의 솔루션이 아니다.

### Inhomogeneous method

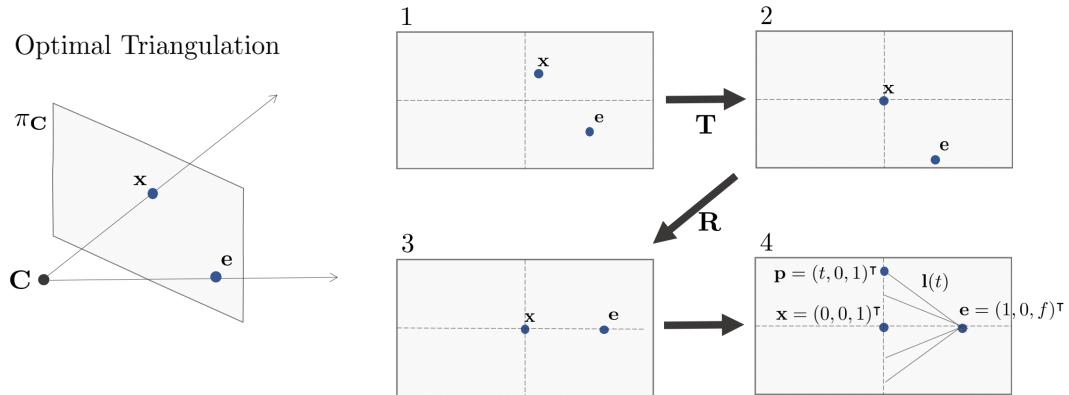
카메라 행렬 대응쌍  $\mathbf{P}, \mathbf{P}'$ 의 Affine 변환까지(up to affinity) 결정되는 경우  $\mathbf{X} = (X, Y, Z, 1)^T$ 로 놓고  $\|\mathbf{AX}\|$ 를 최소화하는 근사해  $\hat{\mathbf{X}}$ 를 구하는 방법을 Inhomogeneous method라고 한다.  $\mathbf{X}$ 는 Affine Point이므로  $\|\mathbf{X}\| = 1$  제약조건이 사라지게 된다. 따라서, Inhomogeneous method는 임의의 Affine 변환  $\mathbf{H}_A$ 에 대해 불변인 특성을 지닌다.

### An optimial solution

해당 섹션에서는 최적의  $\mathbf{X} \in \mathbb{P}^3$ 을 구하기 위한 Optimal Triangulation 방법에 대해 설명한다. 우선 비선형 최소제곱법(non-linear least square)을 통해  $\mathbf{X}$ 를 구하는 방법이 있다.

- 주어진 카메라 행렬 대응쌍  $(\mathbf{P}, \mathbf{P}')$ 와 대응점 쌍  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ 에 대하여 이전 섹션에서 설명한 선형방정식  $\mathbf{AX} = 0$ 을 통해 구한 근사해  $\hat{\mathbf{X}}$ 를 초기값  $\mathbf{X}_0$ 로 설정한다.
- $\mathbf{X}_0$ 를 각각 카메라에 프로젝션하면  $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}'}$ 가 생성되는데 이 때  $d(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})^2 + d(\mathbf{x}', \hat{\mathbf{x}'})^2$ 를 최소화한다.  $d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ 는  $\mathbf{x}_1$ 과  $\mathbf{x}_2$  사이의 거리를 의미한다.
- Gauss-Newton 또는 Levenberg-Marquardt와 같은 비선형 최소제곱법을 통해 반복적으로(iterative) 최적해  $\mathbf{X}^*$ 를 구한다.

### Reformulation of the minimization problem



반복법을 사용하지 않고도(non-iterative) Optimal Triangulation을 수행할 수 있다. 해당 방법은  $d(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})$ 를 최적화하는 대신  $\mathbf{x}$ 와 파라미터화된 Epipolar Line  $l(t)$  사이의 거리  $d(\mathbf{x}, l(t))$ 를 최적화한다. 즉,  $\mathbf{x}$ 와  $l(t)$  사이의 거리를 최소화하는 파라미터  $t$ 를 구함으로써 최적해를 구한다.

$$\min_t d(\mathbf{x}, l(t))^2 + d(\mathbf{x}', l'(t))^2 \quad (326)$$

### Details of the minimization

우선  $\mathbf{x} = (x, y, 1)^T$ 와  $\mathbf{x}' = (x', y', 1)^T$ 를 각각 원점  $(0, 0, 1)^T$ 로 변환시킨다.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (x, y, 1)^T \rightarrow (0, 0, 1)^T \\ \mathbf{x}' &= (x', y', 1)^T \rightarrow (0, 0, 1)^T \end{aligned} \quad (327)$$

이를 변환해주는 행렬을

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -x \\ 1 & -y \\ 1 & \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}' = \begin{bmatrix} 1 & -x' \\ 1 & -y' \\ 1 & \end{bmatrix} \quad (328)$$

로 설정한다. 다음으로 Epipole  $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)^\top$ ,  $\mathbf{e}' = (e'_1, e'_2, e'_3)^\top$ 을 각각 x축 상의 점인  $(1, 0, f)^\top$ ,  $(1, 0, f')^\top$ 로 변환한다.

$$\begin{aligned}\mathbf{e} &= (e_1, e_2, e_3)^\top \rightarrow (1, 0, f)^\top \\ \mathbf{e}' &= (e'_1, e'_2, e'_3)^\top \rightarrow (1, 0, f')^\top\end{aligned}\quad (329)$$

이는 이미지 평면에서 각각  $(1/f, 0)^\top$ ,  $(1/f', 0)^\top$ 을 의미한다. 우선  $e_1^2 + e_2^2 = e'^2_1 + e'^2_2 = 1$ 이 되도록 Epipole을 정규화한 다음, 이를 x축 상의 점으로 회전하는 행렬을  $\mathbf{R}, \mathbf{R}'$  다음과 같이 정의한다.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \\ -e_2 & e_1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}' = \begin{bmatrix} e'_1 & e'_2 & \\ -e'_2 & e'_1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad (330)$$

이를 통해  $\mathbf{R}\mathbf{e} = (1, 0, e_3)^\top$ ,  $\mathbf{R}'\mathbf{e}' = (1, 0, e'_3)^\top$ 로 변환한다. 이 때,  $e_3 = f, e'_3 = f'$ 이다. 다음으로 Epipolar Line  $\mathbf{l}$ 을  $\mathbf{l}(t)$ 로 파라미터화한다. Epipole  $\mathbf{e} = (1, 0, f)^\top$ 은 x축 선상에 위치한 점이므로 이를 지나는 Epipolar Line은 y축을 기준으로  $(0, t, 1)^\top$ 과 같이 파라미터화할 수 있다. 따라서  $\mathbf{l}(t)$ 는

$$\begin{aligned}\mathbf{l}(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} tf \\ 1 \\ -t \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (331)$$

가 된다. 이전 단계에서  $\mathbf{x}$ 를 원점  $(0, 0, 1)^\top$ 로 옮겼으므로  $d(\mathbf{x}, \mathbf{l}(t))$ 는

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{l}(t)) = \frac{t^2}{1^2 + (tf)^2} \quad (332)$$

이 된다. 다음으로  $\mathbf{l}'(t)$ 를 계산해야 한다. Fundamental Matrix  $\mathbf{F}$ 를 사용하여  $\mathbf{l}'(t)$ 를 계산하면

$$\mathbf{l}'(t) = \mathbf{F} \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \quad (333)$$

$\therefore \mathbf{l}(t)$  is the epipolar line of  $(0 \quad t \quad 1)^\top$ .

과 같다.  $\mathbf{F}$ 는 주어진 카메라 행렬 대응쌍에서  $\mathbf{F}_0$ 를 계산한 후  $\mathbf{F}_0$ 로부터  $\mathbf{T}, \mathbf{R}, \mathbf{T}', \mathbf{R}'$ 을 이용하여 계산할 수 있다. Epipole과  $\mathbf{F}$  사이에는

$$\begin{aligned}\mathbf{F} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f \end{pmatrix} &= 0 \\ (1 &\quad 0 &\quad f') \mathbf{F} = 0\end{aligned}\quad (334)$$

이 성립하므로  $\mathbf{F}_{1,col} = -f\mathbf{F}_{3,col}$  그리고  $\mathbf{F}_{1,row} = -f'\mathbf{F}_{3,row}$ 가 되고 이를 정리하면

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f'fd & -f'c & -f'd \\ -fb & a & b \\ -fd & c & d \end{bmatrix} \quad (335)$$

가 된다. 이를 통해  $\mathbf{l}'(t)$ 를 다시 표현하면

$$\begin{aligned}\mathbf{l}'(t) &= \mathbf{F} \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} = t\mathbf{F}_{2,col} + \mathbf{F}_{3,col} \\ &= \begin{pmatrix} -f'(ct+d) \\ at+b \\ ct+d \end{pmatrix}^\top\end{aligned}\quad (336)$$

이 된다. 다음으로 원점  $\mathbf{x}'$ 와  $\mathbf{l}'(t)$  사이의 거리  $d(\mathbf{x}', \mathbf{l}'(t))$ 를 구하면

$$d(\mathbf{x}', \mathbf{l}'(t))^2 = \frac{(ct+d)^2}{(at+b)^2 + f'^2(ct+d)^2} \quad (337)$$

이 된다. 이를 통해 최적화하고자 하는 목적함수  $d(\mathbf{x}, \mathbf{l}(t))^2 + d(\mathbf{x}', \mathbf{l}'(t))^2$ 는

$$s(t) = \frac{t^2}{1+f^2t^2} + \frac{(ct+d)^2}{(at+b)^2 + f'^2(ct+d)^2} \quad (338)$$

가 되고 이를 미분하여  $0(s'(t) = 0)$ 이 되는  $t$ 를 찾으면 총 6개의  $t_i, i = 1, \dots, 6$ 이 나오고 이 때  $s(t_i)$  값을 비교하여 최소가 되는  $t_i$ 를 찾는다. 이렇게 찾은  $t_{\min}$  값을 사용한  $\mathbf{l}(t_{\min}), \mathbf{l}'(t_{\min})$ 가 최적의 Epipolar Line이 된다. 다음으로

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{l}(t_{\min}) \\ \hat{\mathbf{x}}' &= \mathbf{l}'(t_{\min}) \\ \hat{\mathbf{x}} &\leftarrow \mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}^{-1}\hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{x}}' &\leftarrow \mathbf{T}'^{-1}\mathbf{R}'^{-1}\hat{\mathbf{x}}' \end{aligned} \quad (339)$$

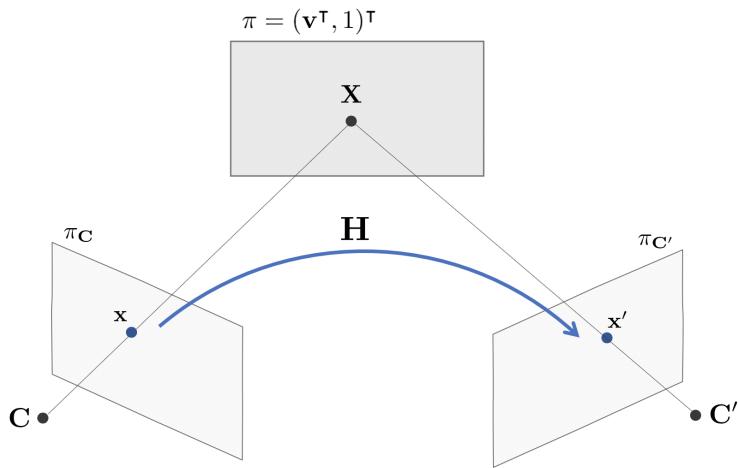
순서대로 변환하기 전 원래의  $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}}'$ 을 복원한 다음

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{P}\hat{\mathbf{X}} &= 0 \\ \hat{\mathbf{x}}' \times \mathbf{P}\hat{\mathbf{X}}' &= 0 \end{aligned} \quad (340)$$

식을  $\mathbf{A}\hat{\mathbf{X}} = 0$  꼴로 정리하여 최종적으로 특이값 분해(SVD)를 통해 최적해  $\hat{\mathbf{X}}$ 를 구한다. 이와 같이  $\mathbf{X}$ 의 근사해를 구하는 방법을 Optimal Triangulation 방법이라고 한다.

## 10 Scene planes and homographies

Homographies given the plane and vice versa



해당 섹션에서는 월드 상의 평면  $\pi$ 이 주어졌을 때 이를 사용하여 하나의 이미지 평면에서 다른 이미지 평면으로 가는 Homography 변환에 대해 설명한다.

### Result 13.1

Canonical Form으로 변환한 카메라 행렬 대응쌍  $(\mathbf{P}, \mathbf{P}')$ 과 월드 상의 평면  $\pi$  다음과 같이 주어졌을 때

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= [\mathbf{I} \mid 0] \\ \mathbf{P}' &= [\mathbf{A} \mid \mathbf{a}] \\ \pi &= (\mathbf{v}^\top, 1)^\top \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \end{aligned} \quad (341)$$

이 때, Homography  $\mathbf{H}$ 는

$$\mathbf{H} = \mathbf{A} - \mathbf{a}\mathbf{v}^\top \quad (342)$$

로 주어진다.

## Proof

두 카메라의 이미지 평면  $\pi_P, \pi_{P'}$ 가 주어졌을 때, 월드 평면 상의 점  $\mathbf{X} \in \pi$ 를  $\pi_P$  평면으로 프로젝션한 점  $\mathbf{x}$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\mathbf{X} &= [\mathbf{I} \mid 0] \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}} \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{x}\end{aligned}\tag{343}$$

따라서 임의의 스칼라  $\rho$ 에 대해  $\tilde{\mathbf{X}} = \rho^{-1}\mathbf{x}$ 가 성립한다.  $\mathbf{X}$ 를 다시 쓰면  $\mathbf{X} = [x \quad \rho]^\top$ 이 되고  $\mathbf{X}$ 는  $\pi$  평면 위의 점이므로

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}^\top & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \rho \end{bmatrix} = 0\tag{344}$$

이 성립한다. 위 식을 풀면  $\rho = -\mathbf{v}^\top \mathbf{x}$ 이 된다.  $\mathbf{X}$ 를  $\pi_{P'}$ 에 프로젝션하면

$$\begin{aligned}\mathbf{x}' &= \mathbf{P}'\mathbf{X} = [\mathbf{A} \mid \mathbf{a}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ -\mathbf{v}^\top \mathbf{x} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{Ax} - \mathbf{av}^\top \mathbf{x} \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{av}^\top) \mathbf{x}\end{aligned}\tag{345}$$

이 되므로 따라서  $\mathbf{H} = \mathbf{A} - \mathbf{av}^\top$ 이 된다.

## A calibrated stereo rig

캘리브레이션 된 스테레오 카메라 행렬 대응쌍 ( $\mathbf{P}, \mathbf{P}'$ )가 다음과 같이 주어지고

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \mathbf{K}[\mathbf{I} \mid 0] \\ \mathbf{P}' &= \mathbf{K}'[\mathbf{R} \mid \mathbf{t}]\end{aligned}\tag{346}$$

월드 상의 평면  $\pi = (\mathbf{n}^\top, d)^\top$ 이 주어진 경우,  $\pi$  평면 상의 점  $\mathbf{X}$ 는

$$\mathbf{n}^\top \tilde{\mathbf{X}} + d = 0\tag{347}$$

이 성립한다. 이를 다시 정리하면  $-\frac{\mathbf{n}^\top \tilde{\mathbf{X}}}{d} = 1$ 이 된다.  $\mathbf{X}$ 를 이미지 평면  $\pi_P$  상에 프로젝션한 점  $\mathbf{x}$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \mathbf{P}\mathbf{X} = \mathbf{K}[\mathbf{I} \mid 0] \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}} \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{K}\tilde{\mathbf{X}}\end{aligned}\tag{348}$$

따라서  $\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{x}$ 가 되고 다음으로  $\mathbf{X}$ 를 이미지 평면  $\pi_{P'}$ 에 프로젝션한 점  $\mathbf{x}'$ 는

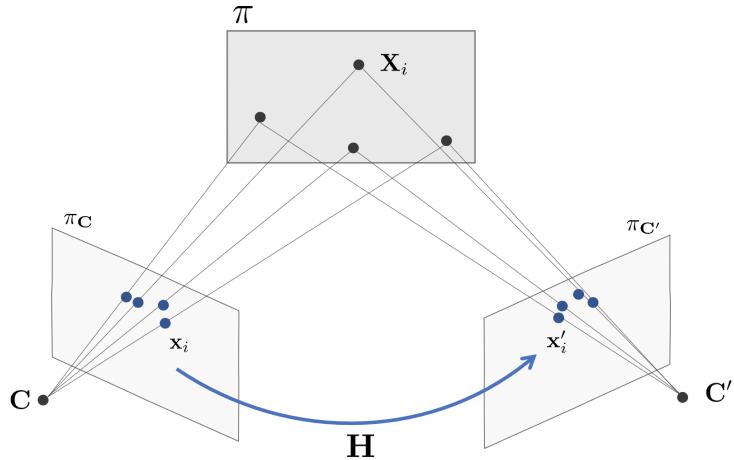
$$\begin{aligned}\mathbf{x}' &= \mathbf{P}'\mathbf{X} = \mathbf{K}'[\mathbf{R} \mid \mathbf{t}] \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}} \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{K}'\mathbf{R}\tilde{\mathbf{X}} + \mathbf{K}'\mathbf{t}\left(-\frac{\mathbf{n}^\top \tilde{\mathbf{X}}}{d}\right) \\ &= \mathbf{K}'\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{tn}^\top}{d}\right)\tilde{\mathbf{X}} \\ &= \mathbf{K}'\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{tn}^\top}{d}\right)\mathbf{K}^{-1}\mathbf{x}\end{aligned}\tag{349}$$

가 되어 결론적으로 캘리브레이션된 스테레오 카메라에서 Homography  $\mathbf{H}$ 는

$$\mathbf{H} = \mathbf{K}'\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{tn}^\top}{d}\right)\mathbf{K}^{-1}\tag{350}$$

가 된다.

## Homographies compatible with epipolar geometry



월드 상의 평면  $\pi$  위에 존재하는 4개의 대응점 쌍  $(x_i, x'_i)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ 가 주어졌다고 가정해보자. 4개의 대응점 쌍으로부터 8개의 제약조건을 얻을 수 있으며 이를 통해 Homography  $H$ 를 유일하게 결정할 수 있다.

다음으로 월드 상에 서로 일직선으로 있지 않은(no three are collinear) 임의의 4개의 대응점 쌍  $(x_i, x'_i)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ 가 주어졌다고 가정해보자. 이 때, 한 이미지 평면  $\pi_P$ 에서 다른 이미지 평면  $\pi_{P'}$ 으로 점들을 변환하는 Homography  $H$ 가 존재하게 되는데 이러한  $H$ 가 두 카메라 사이의 Fundamental Matrix  $F$ 와 서로 호환(compatible)이 되기 위해서는  $H$ 가 월드 평면  $\pi$ 에 대한 Homography 변환이어야 한다. 다시 말하면,  $H$ 가 Epipolar Geometry를 따르기 위해서는  $H$ 가  $\pi$ 에 대한 Homography이어야 한다. Epipolar Geometry에 의해  $x$ 가  $Hx$ 와 대응이 되기 위한 조건은

$$(Hx)^T F x = 0 \quad (351)$$

이다. 즉,  $x^T H^T F x = 0$ 을 만족해야 하므로  $H^T F$ 가 반대칭행렬(skew-symmetric)이어야 한다.

$$H^T F + F^T H = 0 \quad (352)$$

위 조건은  $H$ 가 Epipolar Geometry를 따르기 위한 필요충분조건이다.

### Result 13.3

일반적으로  $F = e'^\wedge A$ 와 같이 주어졌을 때  $H$ 는

$$H = A - e' v^\top \quad (353)$$

이 된다. 이 때,  $H$ 는  $v \in \mathbb{R}^3$ 로부터 3자유도를 가진다.

### Proof

$F = e'^\wedge A$ 와 같이 주어진 경우 Projective Reconstruction을 수행하면 두 카메라 행렬 대응쌍을

$$\begin{aligned} P &= [I \mid 0] \\ P' &= [A \mid e'] \end{aligned} \quad (354)$$

과 같이 구할 수 있다. 월드 상의 평면  $\pi = (v^\top, 1)^\top$ 이 주어졌을 때 앞의 정리에 의해

$$H = A - e' v \quad (355)$$

와 같이 구할 수 있다. 이를  $F^T H$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} F^T H &= -A^\top e'^\wedge (A - e' v) \\ &= -A^\top e'^\wedge A \quad \because e'^\wedge e' = 0 \end{aligned} \quad (356)$$

와 같이 반대칭행렬(skew-symmetric)이 된다.

### Corollary

두 카메라 사이의 임의의 Homography  $\mathbf{H}$ 가 Epipolar Geometry를 따르기 위해서는  $\mathbf{H}$ 가 월드 상의 평면  $\pi$ 에 대한 Homography이어야 한다.  $\mathbf{H}$ 가 월드 상의 평면  $\pi$ 에 대한 Homography이기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.

$$\mathbf{F} = \mathbf{e}'^\wedge \mathbf{H} \quad (357)$$

### Proof

$(\Rightarrow)$   $\mathbf{H}$ 가 월드 상의 평면  $\pi = (\mathbf{v}^\top, 1)^\top$ 에 대한 Homography이면서  $\mathbf{F} = \mathbf{e}'^\wedge \mathbf{A}$ 일 때 앞서 정리에 의해

$$\mathbf{H} = \mathbf{H} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A} - \mathbf{e}'^\top \mathbf{v} \quad (358)$$

가 성립한다. 따라서

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'^\wedge \mathbf{H} &= \mathbf{e}'^\wedge (\mathbf{A} - \mathbf{e}'^\top \mathbf{v}) \\ &= \mathbf{e}'^\wedge \mathbf{A} = \mathbf{F} \quad \because \mathbf{e}'^\wedge \mathbf{e}' = 0 \end{aligned} \quad (359)$$

가 된다.

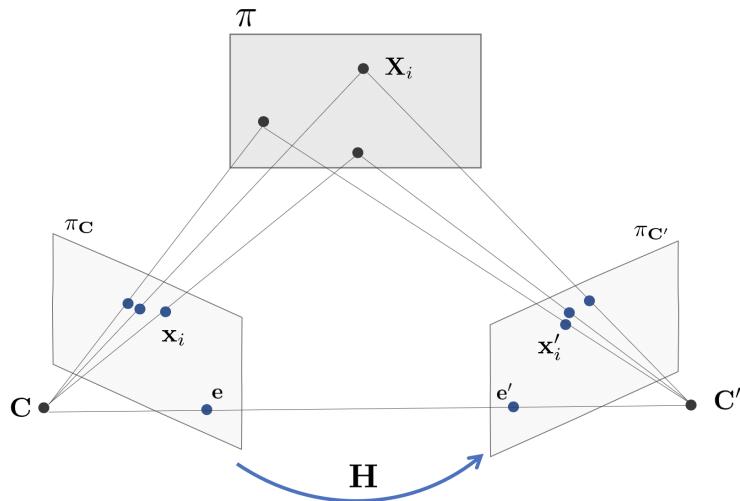
$(\Leftarrow)$   $\mathbf{F} = \mathbf{e}'^\wedge \mathbf{H}$ 인 경우  $\mathbf{H}$ 는 월드 상의 임의의 평면  $\pi$ 에 의한 Homography이다. 예를 들어,  $\mathbf{H}$ 가 무한대 평면  $\pi_\infty = (\mathbf{0}^\top, 1)^\top$ 에 의한 Homography라고 하면

$$\mathbf{H} = \mathbf{H} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{H} - \mathbf{e}' \cdot 0 = \mathbf{H} \quad (360)$$

가 된다.

### Plane induced homographies given F and image correspondences

#### Three points



두 개의 이미지 평면  $\pi_P, \pi_{P'}$ 에 세 개의 대응점 쌍  $(x_i, x'_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ 이 주어졌을 때 이들을 Back-projection한 월드 상의 점  $X_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ 을 통해 월드 상의 평면  $\pi$ 를 유일하게 결정할 수 있고 이를 통한 Homography  $\mathbf{H}$ 를 계산할 수 있다. 해당 섹션에서는 이러한 Homography  $\mathbf{H}$ 를 구하는 방법에 대해 설명한다.

$\mathbf{H}$ 를 구하는 방법에는 크게 두 가지 방법이 존재한다. 첫 번째 방법은 월드 상의 평면  $\pi$ 를 직접 구하는 방법이 있다. 세 개의 대응점 쌍  $(x_i, x'_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ 과 Fundamental Matrix  $\mathbf{F} = \mathbf{e}'^\wedge \mathbf{A}$ 가 주어진 경우 이를 통해 카메라 행렬을 구할 수 있다(projective reconstruction). 주어진 대응점 쌍  $(x_i, x'_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ 과  $\mathbf{F}$ 를 통해

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= [\mathbf{I} \mid 0] \\ \mathbf{P}' &= [\mathbf{A} \mid \mathbf{e}']\end{aligned}\tag{361}$$

을 사영모호성을 포함하여(up to projectivity) 결정할 수 있다. 그리고  $\mathbf{P}, \mathbf{P}'$ 를 사용하여 Back-projection 한 월드 상의 점  $\mathbf{X}_i, i = 1, 2, 3$  또한 계산할 수 있다. 이 때,  $\mathbf{X}_i, i = 1, 2, 3$ 은 동일한 직선 상에 존재하면 안 된다(not colinear). 다음으로 월드 상의 세 개의 점  $\mathbf{X}_i, i = 1, 2, 3$ 을 포함하는 월드 상의 평면  $\pi$ 를 유일하게 결정할 수 있고  $\pi = (\mathbf{v}^\top, d)^\top$  일 때

$$\mathbf{H} = \mathbf{A} - \mathbf{e}' \mathbf{v}^\top\tag{362}$$

과 같이  $\pi$ 를 기반으로  $\pi_{\mathbf{P}} \leftrightarrow \pi_{\mathbf{P}'}$  사이의 점들을 변환하는 Homography  $\mathbf{H}$ 를 계산할 수 있다.

**두 번째 방법은  $\mathbf{Hx}_i = \mathbf{x}'_i, i = 1, 2, 3$ 을 대수적으로 푸는 방법이다.** 이 때  $\mathbf{x}'_i \times (\mathbf{Hx}_i) = 0$ 의 공식을 선형방정식의  $\mathbf{Ah} = 0$  형태로 변형함으로써 Homography  $\mathbf{H}$ 를 구할 수 있다. 하지만 Homography  $\mathbf{H}$ 를 구하려면 총 네 개의 대응점 쌍이 필요한데 주어진 대응점 쌍은 세 개이므로 추가적으로 한 개의 대응점 쌍이 필요하다. 미리 알고 있는 Fundamental Matrix  $\mathbf{F}$ 를 사용하여 두 이미지 평면의 Epipole  $\mathbf{e}, \mathbf{e}'$ 를 구하고 이를 Back-projection함으로써 한 개의 대응점쌍을 추가하여 Homography  $\mathbf{H}$ 를 계산할 수 있다. 단, 이 때 대응점 쌍  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_i), i = 1, 2, 3$ 들이 Epipolar Line 위에 존재하면 안된다는 가정이 필요하다.

### Result 13.6

Fundamental Matrix  $\mathbf{F}$ 와 세 개의 대응점 쌍  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_i), i = 1, 2, 3$ 이 주어졌을 때 이들을 통해 계산한 월드 상의 평면  $\pi$ 로 인한 Homography  $\mathbf{H}$ 는

$$\mathbf{H} = \mathbf{A} - \mathbf{e}'(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b})^\top\tag{363}$$

와 같이 계산할 수 있다. 이 때,

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{b} &= (\mathbf{x}'_i \times (\mathbf{Ax}_i))^\top (\mathbf{x}'_i \times \mathbf{e}') / \|\mathbf{x}'_i \times \mathbf{e}'\|\end{aligned}\tag{364}$$

### Proof

Canonical 카메라 행렬  $\mathbf{P} = [\mathbf{I} \mid 0], \mathbf{P}' = [\mathbf{A} \mid \mathbf{e}']$  일 때 Fundamental Matrix  $\mathbf{F} = \mathbf{e}'^\wedge \mathbf{A}$ 와 같이 구할 수 있고 이 때  $\mathbf{e}'^\wedge \mathbf{F} = \mathbf{e}'^\wedge \mathbf{e}'^\wedge \mathbf{A}$ 가 되어서

$$\mathbf{e}'^\wedge \mathbf{F} = \mathbf{e}'^\wedge \mathbf{e}'^\wedge \mathbf{A} \sim \mathbf{A}\tag{365}$$

와 같이  $\mathbf{A}$ 와 비례 관계가 된다. 따라서  $\mathbf{A} = \mathbf{e}'^\wedge \mathbf{F}$ 가 성립한다.

월드 상의 평면  $\pi = (\mathbf{v}^\top, d)^\top$ 이 주어졌을 때 임의의 Homography  $\mathbf{H}$ 는  $\mathbf{H} = \mathbf{A} - \mathbf{e}' \mathbf{v}$ 와 같이 나타낼 수 있고 이 때  $\mathbf{v}$ 를 구하기 위해

$$\mathbf{x}'_i \times \mathbf{Hx}_i = 0\tag{366}$$

식을 세운 후 정리하면

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'_i \times \mathbf{Hx}_i &= 0 \\ \mathbf{x}'_i \times (\mathbf{Ax}_i - \mathbf{e}' \mathbf{v}^\top \mathbf{x}_i) &= 0 \\ \mathbf{x}'_i \times \mathbf{Ax}_i &= (\mathbf{x}_i \times \mathbf{e}') \mathbf{v}^\top \mathbf{x}_i\end{aligned}\tag{367}$$

꼴이 된다. 양변에  $(\mathbf{x}_i \times \mathbf{e}')^\top$ 을 곱한 후 정리하면

$$\mathbf{x}_i^\top \mathbf{v} = \mathbf{b}_i\tag{368}$$

형태가 나온다. 이를 세 개의 점에 대해 모두 적용하면

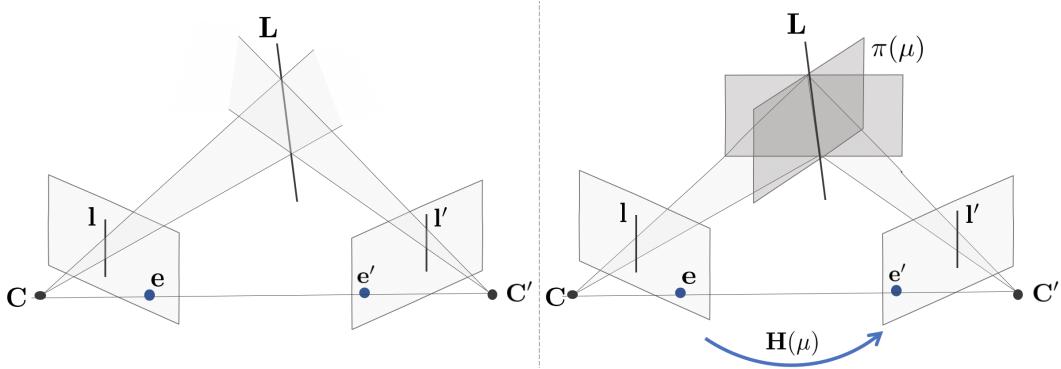
$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{bmatrix}\tag{369}$$

가 된다 이 때,  $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{bmatrix}$  를 행렬  $\mathbf{M}$ 으로 치환하면

$$\mathbf{M}\mathbf{v} = \mathbf{b} \quad (370)$$

꼴이 되고 이를 정리하면 결론적으로  $\mathbf{v} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}$ 가 된다. 이에 따라 Homography  $\mathbf{H}$ 는  $\mathbf{H} = \mathbf{A} - \mathbf{e}'(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b})^\top$ 과 같이 나타낼 수 있다.

### A point and line



해당 섹션에서는 월드 상에 하나의 선과 하나의 점이 주어졌을 때 Homography  $\mathbf{H}$ 를 구하는 방법에 대해 설명한다.

### Result 13.7

월드 상에 직선  $\mathbf{L}$ 에 대응하는 이미지 평면 상에 대응선 쌍  $\mathbf{l} \leftrightarrow \mathbf{l}'$ 이 주어졌을 때 월드 상의 직선  $\mathbf{L}$ 을 사용하여  $\mathbf{l}$ 을  $\mathbf{l}'$ 로 변환하는 Homography  $\mathbf{H}$ 는

$$\mathbf{H}(\mu) = \mathbf{l}'^\top \mathbf{F} + \mu \mathbf{e}' \mathbf{l}^\top \quad (371)$$

과 같이 나타낼 수 있다. 이 때,  $\mathbf{l}'^\top \mathbf{e}' \neq 0$ 이어야 하며  $\mu$ 는  $\mu \in \mathbb{P}^1$ 인 파라미터이다.

### Proof

카메라 행렬 대응쌍  $\mathbf{P} = [\mathbf{I} \mid 0]$ ,  $\mathbf{P}' = [\mathbf{A} \mid \mathbf{e}']$ 이 주어졌을 때 이미지 평면 상의 직선  $\mathbf{l}, \mathbf{l}'$ 을 Back-projection 한 평면  $\pi_1 = \mathbf{P}^\top \mathbf{l}$ ,  $\pi_{l'} = \mathbf{P}'^\top \mathbf{l}'$ 과 같이 나타낼 수 있다. 두 개의 Back-projection 평면들은  $\pi_1, \pi_{l'}$ 가 교차하는 선이 월드 상의 직선  $\mathbf{L}$ 이 되고 이 때  $\mathbf{L}$ 을 포함하는 평면  $\pi$ 는

$$\begin{aligned} \pi(\mu) &= \mu \mathbf{P}^\top \mathbf{l} + \mathbf{P}'^\top \mathbf{l}' \\ &= \mu \begin{pmatrix} \mathbf{l} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{A}^\top \mathbf{l}' \\ \mathbf{e}'^\top \mathbf{l}' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mu \mathbf{l} + \mathbf{A}^\top \mathbf{l}' \\ \mathbf{e}'^\top \mathbf{l}' \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (372)$$

과 같이  $\mu$ 로 파라미터화하여  $\mathbf{L}$ 을 포함하는 무수한 평면을 나타낼 수 있다. Result 13.1로부터 평면  $\pi(\mu)$ 를 사용한 Homography  $\mathbf{H}$ 는

$$\mathbf{H}(\mu) = \mathbf{A} - \mathbf{e}' \mathbf{v}(\mu)^\top \quad (373)$$

과 같이 나타낼 수 있고 이 때,  $\mathbf{v}$ 는 위에서 설명한  $\pi(\mu)$  공식에 따라  $\mathbf{v}(\mu) = (\mu \mathbf{l} + \mathbf{A}^\top \mathbf{l}') / (\mathbf{e}'^\top \mathbf{l}')$ 이 된다. 위 공식에 행렬  $\mathbf{A}$ 에  $\mathbf{A} = \mathbf{e}'^\top \mathbf{F}$ 를 대입하여 다시 정리하면

$$\mathbf{H}(\mu) = -(\mathbf{l}'^\top \mathbf{F} + \mu \mathbf{e}' \mathbf{l}^\top) / (\mathbf{e}'^\top \mathbf{l}') \sim \mathbf{l}'^\top \mathbf{F} + \mu \mathbf{e}' \mathbf{l}^\top \quad (374)$$

이 된다. 따라서  $\mathbf{H}$ 는 따라서  $\mathbf{H}(\mu) = \mathbf{l}'^\top \mathbf{F} + \mu \mathbf{e}' \mathbf{l}^\top$ 에 비례하므로 해당 식과 같이 쓸 수 있다.

### The homography for a corresponding point and line

앞서 설명한 대응선 쌍  $\mathbf{l} \leftrightarrow \mathbf{l}'$ 을 이용한 Homography  $\mathbf{H}(\mu)$ 는  $\mu$  값에 따라 Homography가 변하는 특징이 있다.

#### Result 13.8

하나의 대응선 쌍  $\mathbf{l} \leftrightarrow \mathbf{l}'$ 과 하나의 대응점 쌍  $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$ 이 주어지면 이를 통해  $\mu$  값을 특정되어 다음과 같은 유일한 Homography  $\mathbf{H}$ 가 도출된다.

$$\mathbf{H} = \mathbf{l}' \wedge \mathbf{F} + \frac{(\mathbf{x}' \times \mathbf{e}')^\top (\mathbf{x}' \times ((\mathbf{F}\mathbf{x}) \times \mathbf{l}'))}{\|\mathbf{x}' \times \mathbf{e}'\|^2 (\mathbf{l}'^\top \mathbf{x})} \mathbf{e}' \mathbf{l}'^\top \quad (375)$$

대응선 쌍  $\mathbf{l} \leftrightarrow \mathbf{l}'$ 를 사용하면 월드 상의 평면  $\pi(\mu)$ 를 통해  $\mathbf{H}(\mu) = \mathbf{l}' \wedge \mathbf{F} + \mu \mathbf{e}' \mathbf{l}'^\top$ 와 같이 Homography를 구할 수 있다. 이 때,  $\mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{x}'$  식을 통해  $\mathbf{x}' \times (\mathbf{H}\mathbf{x}) = 0$  식을 전개해보면

$$\mathbf{x}' \times (\mathbf{l}' \wedge \mathbf{F}\mathbf{x} + \mu \mathbf{e}' \mathbf{l}'^\top \mathbf{x}) = 0 \quad (376)$$

이 된다. 이를 전개 후 정리해보면

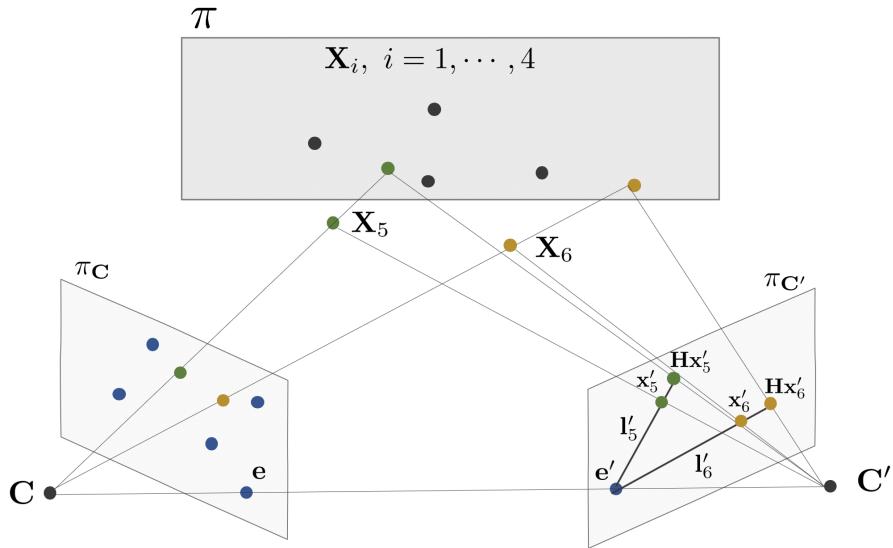
$$\begin{aligned} (\mathbf{x}' \times \mathbf{e}') \mathbf{l}'^\top \mathbf{x} \cdot \mu &= -\mathbf{x}' \times \mathbf{l}' \times \mathbf{F}\mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}' \times \mathbf{F}\mathbf{x} \times \mathbf{l}' \end{aligned} \quad (377)$$

이 되고 양변에  $(\mathbf{x}' \times \mathbf{e}')^\top$ 을 곱하여  $\mu$ 에 대하여 정리 후  $\mathbf{H}(\mu)$ 식에 넣어주면

$$\mathbf{H} = \mathbf{l}' \wedge \mathbf{F} + \frac{(\mathbf{x}' \times \mathbf{e}')^\top (\mathbf{x}' \times ((\mathbf{F}\mathbf{x}) \times \mathbf{l}'))}{\|\mathbf{x}' \times \mathbf{e}'\|^2 (\mathbf{l}'^\top \mathbf{x})} \mathbf{e}' \mathbf{l}'^\top \quad (378)$$

공식을 얻을 수 있다.

### Computing F given the homography induced by a plane



일반적으로 두 개의 카메라 행렬 대응쌍  $(\mathbf{P}, \mathbf{P}')$ 에 대한 Fundamental Matrix  $\mathbf{F}$ 를 계산하기 위해서는 최소 8개의 대응점 쌍  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_i)$ ,  $i = 1, \dots, 8$ 이 필요하다. 하지만 **Scene Plane Homography를 이용하면 6개의 대응점 쌍만 사용해도 F를 계산할 수 있다.** 단, 6개의 대응점 쌍들 중 4개 대응점 쌍  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_i)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ 에 해당하는 월드 상의 점들의 동일한 평면  $\pi$  위에 존재해야 한다는 제약조건이 있다.

6개의 대응점 쌍으로 Fundamental Matrix  $\mathbf{F}$ 를 계산하는 알고리즘의 순서는 다음과 같다.

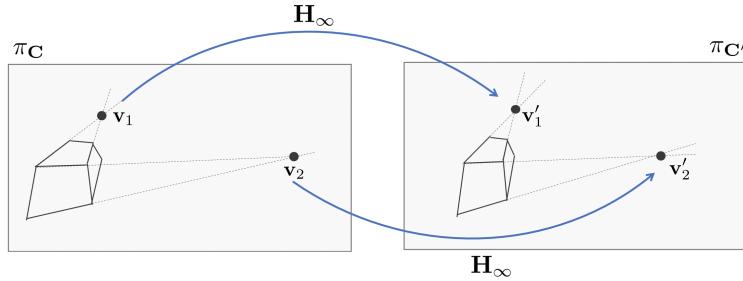
- 월드 상의 평면  $\pi$  위에 존재하는 4개의 점들  $\mathbf{X}_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ 를 프로젝션한 대응점 쌍들  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_i)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ 를 사용하여  $\mathbf{x}'_i = \mathbf{H}\mathbf{x}_i$ 를 만족하는 Homography  $\mathbf{H}$ 를 계산한다. 이 때 4쌍의 대응점은 Homography  $\mathbf{H}$ 를 유일하게 결정한다.

- 남은 2개의 대응점 쌍  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_i)$ ,  $i = 5, 6$ 을 사용하여 Epipole  $\mathbf{e}'$ 를 구한다.  $\mathbf{x}_5$ 를 Homography 변환한  $\mathbf{Hx}_5$ 와  $\mathbf{x}'_5$ 를 사용하여 두 점을 잇는 직선을  $(\mathbf{Hx}_5) \times \mathbf{x}'_5$ 와 같이 구한다.  $\mathbf{x}_6$ 에 대해서도 마찬가지로 적용하여 직선  $(\mathbf{Hx}_6) \times \mathbf{x}'_6$ 을 구한 다음 두 직선이 교차하는 점을 구하면 그 점이 곧 Epipole  $\mathbf{e}'$ 가 된다.

$$\mathbf{e}' = (\mathbf{Hx}_5) \times \mathbf{x}'_5 \cap (\mathbf{Hx}_6) \times \mathbf{x}'_6 \quad (379)$$

- Fundamental Matrix  $\mathbf{F}$ 를  $\mathbf{F} = \mathbf{e}' \wedge \mathbf{H}$ 를 통해 구한다.

### The infinite homography $\mathbf{H}_\infty$



#### Definition 13.10

Scene Plane이 무한대 평면(plane at infinity)  $\pi_\infty$ 인 경우, 이 때 계산한 Homography를 Infinity Homography  $\mathbf{H}_\infty$ 라고 한다.

카메라 행렬 대응쌍  $(\mathbf{P}, \mathbf{P}')$ 가 다음과 같이 주어졌을 때

$$\mathbf{P} = \mathbf{K}[\mathbf{I} \mid 0] \quad \mathbf{P}' = \mathbf{K}'[\mathbf{R} \mid \mathbf{t}] \quad (380)$$

월드 상의 평면  $\pi(d) = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ d \end{pmatrix}$ 에 대해 Homography는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{H}_{\pi(d)} = \mathbf{K}'(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{t}\mathbf{n}^\top}{d})\mathbf{K}^{-1} \quad (381)$$

Inifinite Homography  $\mathbf{H}_\infty$ 는  $d$ 가 무한대인 경우에 해당하므로

$$\mathbf{H}_\infty = \lim_{d \rightarrow \infty} \mathbf{H}_{\pi(d)} = \mathbf{K}'\mathbf{R}\mathbf{K}^{-1} \quad (382)$$

가 된다. 따라서  $\mathbf{H}_\infty$ 는  $\mathbf{t}$ 에 의존하지 않고 오직 카메라의 회전에만 의존한다는 것을 알 수 있다.

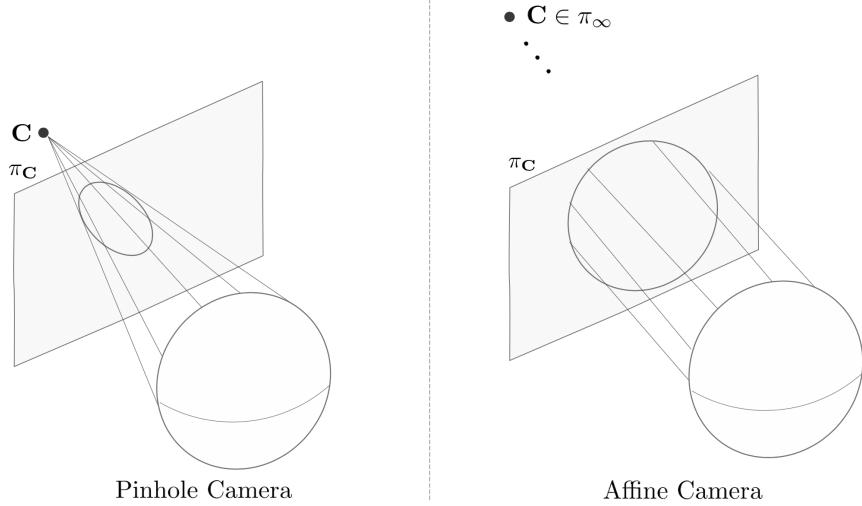
#### Affine and metric reconstruction

만약 월드좌표계가 Affine인 경우  $\pi_\infty$ 는  $\pi_\infty = (0, 0, 0, 1)^\top$ 과 같이 나타낼 수 있고 두 카메라 행렬이  $\mathbf{P} = [\mathbf{M} \mid \mathbf{m}]$ ,  $\mathbf{P}' = [\mathbf{M}' \mid \mathbf{m}']$ 으로 주어진 경우 무한대 평면 상의 점  $\mathbf{X} \in \pi_\infty$ 를 각각 카메라에 프로젝션하면

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{P}\mathbf{X} = [\mathbf{M} \mid \mathbf{m}] \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{M}\tilde{\mathbf{X}} \\ \mathbf{x}' &= \mathbf{P}'\mathbf{X} = [\mathbf{M}' \mid \mathbf{m}'] \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{M}'\tilde{\mathbf{X}} = (\mathbf{M}'\mathbf{M}^{-1})\mathbf{x} \end{aligned} \quad (383)$$

따라서  $\mathbf{x}' = (\mathbf{M}'\mathbf{M}^{-1})\mathbf{x}$ 가 되어 월드좌표계가 Affine일 때 두 카메라 사이의 Infinite Homography는  $\mathbf{H}_\infty = \mathbf{M}'\mathbf{M}^{-1}$ 가 된다.

## 11 Affine Epipolar Geometry



핀홀 카메라(pinhole camera)는 월드 상의 물체가 이미지 평면 상에 프로젝션될 때 초점이라 부르는 하나의 점을 통과하여 이미지 평면상에 투과되는 카메라 모델을 의미한다. 따라서 핀홀 카메라 모델은 사영공간 (projective space)  $\mathbb{P}^3 \mapsto \mathbb{P}^2$ 로 매핑하는 함수로 모델링 할 수 있고 원근법에 의한 왜곡이 발생한다. 이와 반대로 **Affine 카메라는 월드 상의 물체가 이미지 평면 상에 프로젝션 될 때 마치 무한대 광원에 의한 그림자 상이 맷히는 것과 같이 이미지 평면에 프로젝션되는 카메라를 의미한다.** 따라서 **Affine 카메라는 원근법에 의한 왜곡이 발생하지 않는다.**

Affine 카메라도 Canonical Form으로 나타낼 수 있다. 두 개의 Affine 카메라  $\mathbf{P}_A, \mathbf{P}'_A$ 가 주어졌을 때 월드 좌표계와 카메라 좌표계가 동일한 경우  $\mathbf{P}_A$ 의 주축(principal axis)은 Z축이 되고 이 때의 프로젝션은 XY 평면으로 프로젝션이 된다. 그리고  $\mathbf{P}'_A$ 는 Affine 변환  $\mathbf{M}$ 과 카메라 이동  $\mathbf{t}$ 를 통해 표현할 수 있다. **이 때, 두 개의 Affine 카메라는 모두 마지막 행(row)이  $(0, 0, 0, 1)$ 인 성질을 지닌다.**

$$\mathbf{P}_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}'_A = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{where, } \mathbf{M} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}, \mathbf{t} \in \mathbb{R}^2 \quad (384)$$

Affine 카메라 행렬  $\mathbf{P}_A$ 는 Affine 변환의 특성 상 무한대 평면(plane at infinity)  $\pi_\infty = (X, Y, Z, 0)^\top$  상의 한 점을 무한대 직선(line at infinity)  $\mathbf{l}_\infty$  상의 한 점으로 변환한다. 즉, 월드 상 물체의 평행한 성질이 보존된다.

$$\mathbf{P}_A \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ * \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{l}_\infty \quad (385)$$

일반적인 Affine 카메라 행렬  $\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{m} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ 에서 행렬  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ 의 rank는 2이므로

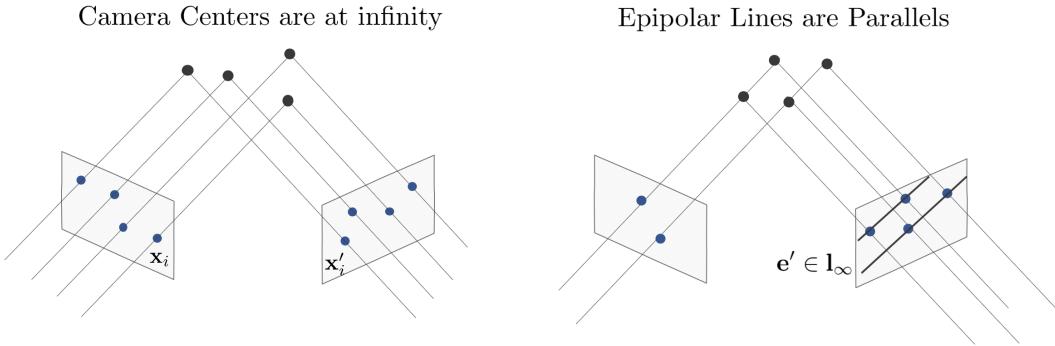
$$\mathbf{M}\tilde{\mathbf{C}} = 0 \quad (386)$$

을 만족하는 Affine 카메라의 중심점  $\mathbf{C}$ 이 존재한다. **이 때,  $\mathbf{C}$ 는 무한대 평면 상에 존재한다.**

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{C}} \\ 0 \end{pmatrix} \in \pi_\infty \quad (387)$$

Affine 카메라 행렬  $\mathbf{P}_A$ 의 중심점  $\mathbf{C}$ 는  $\mathbf{C} = [0 \ 0 \ 1 \ 0]^\top$ 이다. 즉, **Affine 카메라의 중심점은 주축(principal axis)의 방향과 동일하다.**

## Affine epipolar geometry



### Epipolar lines

두 개의 동일한 Affine 카메라가 주어졌을 때, 이들의 Back-projection 직선을 생각해보자. 첫 번째 Affine 카메라의 이미지 평면 상의 한 점  $\mathbf{x}$ 를 Back-projection하면

$$\mathbf{X}(\lambda) = \mathbf{P}_A^\dagger \mathbf{x} + \lambda \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (388)$$

이 되므로 Back-projection 직선들의 방향이 곧 Affine 카메라의 중심점 방향  $\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}} \\ 0 \end{bmatrix}$ 이 된다. 즉, Affine 카메라의 이미지 평면 상 모든 점들의 Back-projection 직선들은 평행하므로 이를 두 번째 Affine 카메라에 프로젝션한 Epipolar Line들을 또한 모두 평행하다.

### The epipoles

Epipolar Line들이 모두 평행하므로 Epipole들은 모두 무한대 직선(line at infinity) 상에 존재한다.

### The affine fundamental matrix

#### Result 14.1

두 개의 동일한 Affine 카메라가 주어졌을 때 이를 통해 Affine Fundamental Matrix  $\mathbf{F}_A$ 를 정의할 수 있다. 이 때,  $\mathbf{F}_A$ 는

$$\mathbf{F}_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \quad (389)$$

꼴로 나타난다. \*는 0이 아닌 값을 의미한다. 일반적으로  $\mathbf{F}_A$ 는

$$\mathbf{F}_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ c & d & e \end{bmatrix} \quad (390)$$

와 같이 작성한다.  $\mathbf{F}_A$ 는 일반적인 Fundamental Matrix와 동일하게 rank 2를 가진다.

### Derivation

#### Geometric derivation

두 개의 Affine 카메라 행렬  $\mathbf{P}_A, \mathbf{P}'_A$ 가 주어졌을 때 둘 사이에는 Affine 변환의 성질에 의해 평행한 선들이 보존된다. 따라서 두 이미지 평면의 Homography  $\mathbf{H}_A$ 는 Affine Homography가 되어

$$\mathbf{x}' = \mathbf{H}_A \mathbf{x} \quad \text{where, } \mathbf{H}_A = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (391)$$

을 만족한다. Affine 카메라의 Epipole  $e'$ 은 무한대 직선(line at infinity) 상에 존재하므로  $e'$ 의 Cross Product는

$$e'^\wedge = \begin{bmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ * & * & 0 \end{bmatrix} \quad (392)$$

꼴이다. Affine Fundamental Matrix  $\mathbf{F}_A$ 는  $\mathbf{F}_A = e'^\wedge \mathbf{H}_A$ 를 통해 계산할 수 있으므로

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_A &= e'^\wedge \mathbf{H}_A \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ * & * & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (393)$$

와 같은 형태가 된다.

## Properties

### The epipoles

Affine Fundamental Matrix  $\mathbf{F}_A$ 가 주어졌을 때 이를 통해 Epipole  $e, e'$ 를 계산할 수 있다.  $\mathbf{F}_A$ 가

$$\mathbf{F}_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ c & d & e \end{bmatrix} \quad (394)$$

일 때 Fundamental Matrix의 성질로 인해  $\mathbf{F}_A e = 0$ 과  $e'^\top \mathbf{F}_A = 0$ 가 성립하므로 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} e &= [-d \quad c \quad 0]^\top \\ e' &= [-b \quad a \quad 0]^\top \end{aligned} \quad (395)$$

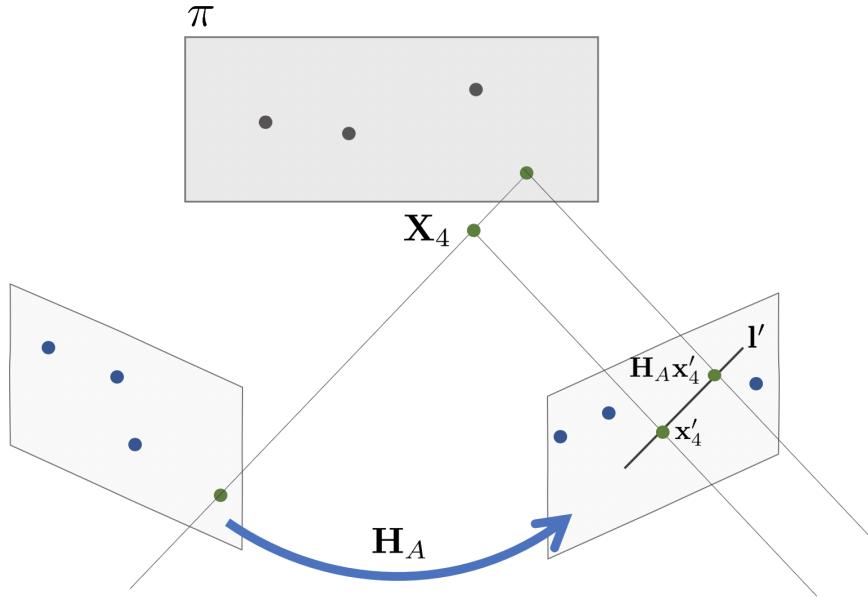
### Epipolar lines

첫 번째 Affine 이미지 평면 상의 점  $x$ 와 Affine Fundamental Matrix  $\mathbf{F}_A$ 가 주어졌을 때 두 번째 Affine 이미지 평면 상의 Epipolar Line  $l'$ 는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} x &= (x \quad y \quad 1)^\top \\ \mathbf{F}_A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ c & d & e \end{bmatrix} \\ l' &= \mathbf{F}_A x = (a \quad b \quad cx + dy + e)^\top \end{aligned} \quad (396)$$

Epipolar Line  $l'$ 의 처음 두 개의 항  $(a, b)$ 가 이미지 평면 상의 점  $x = (x, y, 1)^\top$ 에 독립적이므로 이는 곧  $x$ 에 관계없이 Epipolar Line들이 평행하다는 것을 의미한다.

## Estimating $\mathbf{F}_A$ from image point correspondences



Projective 카메라의 Fundamental Matrix  $\mathbf{F}$ 를 계산하기 위해서는 두 이미지 평면 사이에 대응점 쌍  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  가 최소 8개 이상이 필요하다. 하지만 Affine 카메라의 Affine Fundamental Matrix  $\mathbf{F}_A$ 는 앞서 설명한 것과 같이 좌상단  $2 \times 2$  항이 0이므로 최소 4개 이상의 대응점 쌍  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ 만으로도  $\mathbf{F}_A$ 를 구할 수 있다.

### Algorithm 14.2

- **Objective:** Affine 이미지 평면에서 4개의 대응점 쌍  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_i)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ 가 주어졌을 때 이를 통해 Affine Fundamental Matrix를 구한다.
- 우선 처음 세 개의 대응점 쌍  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ 을 Back-projection함으로써 월드 상의 점  $\mathbf{X}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ 을 구할 수 있고 이 점들을 Span함으로써 유일한 평면  $\pi$ 가 결정할 수 있다.

$$\pi = \text{Span}\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3\} \quad (397)$$

- 월드 상의 평면  $\pi$ 에 대해  $\mathbf{x}' = \mathbf{H}_A \mathbf{x}$ 를 만족하는 Affine Homography  $\mathbf{H}_A$ 를 구한다. 일반적으로 Homography를 구하기 위해서는 네 개 이상의 대응점 쌍이 필요하지만 Affine Homography는 마지막 행이 항상  $(0, 0, 1)$ 이므로 세 개의 대응점 쌍을 통해서도  $\mathbf{H}_A$ 를 계산할 수 있다.
- 나머지 한 점  $\mathbf{x}_4$ 를 사용하여  $\mathbf{H}_A \mathbf{x}_4$ 와  $\mathbf{x}_4$ 를 잇는 Epipolar Line  $l'$ 을 계산한다.

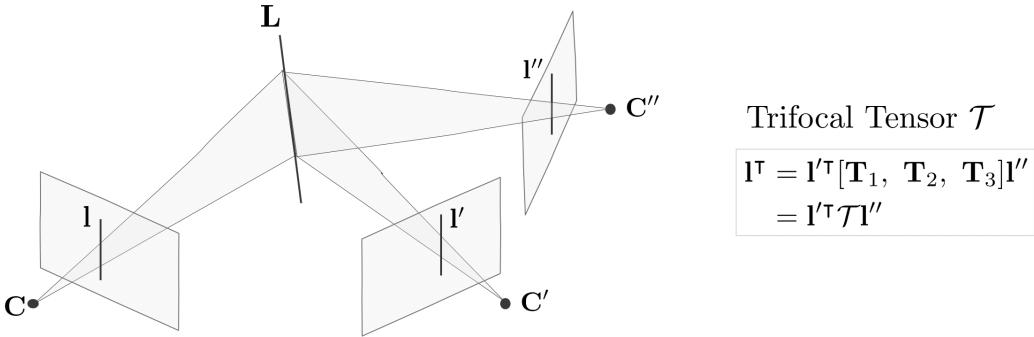
$$l' = \mathbf{H}_A \mathbf{x}_4 \times \mathbf{x}'_4 \quad (398)$$

Epipolar Line  $l'$ 를 계산했으면 이를 통해 Epipole  $\mathbf{e}' = (-l'_2, l'_1, 0)^\top$ 를 계산할 수 있다. 만약  $\mathbf{x}_4$ 를 Back-projection한 월드 상의 점  $\mathbf{X}_4$ 가 월드 상의 평면  $\pi$  위에 존재하는 경우 Epipolar Line을 구할 수 없다.

- $\mathbf{F}_A = \mathbf{e}'^\wedge \mathbf{H}_A$ 를 통해 Affine Fundamental Matrix를 계산한다.

$$\mathbf{F}_A = [-l'_2 \quad l'_1 \quad 0]^\top \wedge \mathbf{H}_A \quad (399)$$

## 12 The Trifocal Tensor



### The geometric basis for the trifocal tensor

Three-View Geometry에서 Trifocal Tensor  $\mathcal{T}$ 는 Two-View Geometry에서 Fundamental Matrix  $\mathbf{F}$ 와 유사한 역할을 한다.  $\mathbf{F}$ 와 유사하게  $\mathcal{T}$ 은 서로 다른 세 개의 카메라 이미지 평면들을 특별한 제약조건으로 구속시킨다.

#### Incidence relations for lines

월드 평면 상의 한 직선  $\mathbf{L}$ 과 이를 바라보고 있는 서로 다른 세 개의 카메라가 주어졌다고 가정하자. 세 개의 카메라의 이미지 평면을 각각  $\pi_P, \pi_{P'}, \pi_{P''}$ 이라고 하고  $\mathbf{L}$ 을 이미지 평면 상에 프로젝션한 직선들은  $\mathbf{l}, \mathbf{l}', \mathbf{l}''$ 이라고 했을 때  $\mathbf{l} \leftrightarrow \mathbf{l}' \leftrightarrow \mathbf{l}''$  사이의 관계를 알아보자.

카메라 행렬을 각각  $(\mathbf{P}, \mathbf{P}', \mathbf{P}'')$ 이라고 했을 때 이를 Canonical Form으로 나타내면

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= [\mathbf{I} \mid 0] \\ \mathbf{P}' &= [\mathbf{A} \mid \mathbf{a}_4] \\ \mathbf{P}'' &= [\mathbf{B} \mid \mathbf{b}_4] \end{aligned} \tag{400}$$

와 같이 항상 사영모호성을 포함하여(up to projectivity) 나타낼 수 있다. 월드 상의 직선  $\mathbf{L}$ 은  $\mathbf{l}, \mathbf{l}', \mathbf{l}''$ 을 Back-projection한 평면들  $\pi, \pi', \pi''$ 의 교차선이므로  $\mathbf{l}, \mathbf{l}', \mathbf{l}''$ 를 Back-projection 해보면

$$\begin{aligned} \pi &= \mathbf{P}^T \mathbf{l} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \pi' &= \mathbf{P}'^T \mathbf{l}' = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{l}' \\ \mathbf{a}_4^T \mathbf{l}' \end{pmatrix} \\ \pi'' &= \mathbf{P}''^T \mathbf{l}'' = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{l}'' \\ \mathbf{b}_4^T \mathbf{l}'' \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{401}$$

같은 평면들의 법선벡터(normal vector)를 얻을 수 있다. 이러한 세 평면의 법선벡터를 열벡터로 가지는 행렬  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ 이 다음과 같이 주어졌을 때

$$\mathbf{M} = [\pi \quad \pi' \quad \pi''] \tag{402}$$

$\mathbf{M}$ 의 열공간(column space)은 월드 상의 직선  $\mathbf{L}$ 과 수직인 2차원 평면을 의미하므로  $\mathbf{M}$ 의 rank는 2이다. 따라서

$$\mathbf{M} = [\mathbf{m}_1 \quad \mathbf{m}_2 \quad \mathbf{m}_3] = \begin{bmatrix} \mathbf{l} & \mathbf{A}^T \mathbf{l}' & \mathbf{B}^T \mathbf{l}'' \\ 0 & \mathbf{a}_4^T \mathbf{l}' & \mathbf{b}_4^T \mathbf{l}'' \end{bmatrix} \tag{403}$$

에서  $\mathbf{m}_1 = \alpha \mathbf{m}_2 + \beta \mathbf{m}_3$ 가 성립한다. 이 때, 행렬  $\mathbf{M}$ 의 두 번째 행에서 첫번째 열 (2, 1) 값이 0이므로  $\alpha, \beta$ 를 구할 수 있다.

$$0 = k(\mathbf{b}_4^T \mathbf{l}'') \mathbf{m}_2 - (k \mathbf{a}_4^T \mathbf{l}') \mathbf{m}_3 \tag{404}$$

따라서 임의의 상수  $k$ 에 대하여  $\alpha = k(\mathbf{b}_4^T \mathbf{l}')$ ,  $\beta = k(\mathbf{a}_4^T \mathbf{l}')$ 이 된다. 다음으로 행렬  $\mathbf{M}$ 의 첫번째 행을 전개해보면

$$\begin{aligned} l &= (\mathbf{b}_4^T l'') \mathbf{A}^T l' - (\mathbf{a}_4^T l') \mathbf{B}^T l'' \\ &= (l''^T \mathbf{b}_4) \mathbf{A}^T l' - (l'^T \mathbf{a}_4) \mathbf{B}^T l'' \end{aligned} \quad (405)$$

이 된다.  $\mathbf{a}_4^T l'$ ,  $\mathbf{b}_4^T l''$ 은 스칼라 값이므로 전치(transpose)를 취해도 같은 값을 나타낸다. 직선  $l$ 의  $i$ 번째 좌표값을  $l_i$ 라고 하면

$$\begin{aligned} l_i &= l''^T (\mathbf{b}_4 \mathbf{a}_i^T) l' - l'^T (\mathbf{a}_4 \mathbf{b}_i^T) l'' \\ &= l'^T (\mathbf{a}_i \mathbf{b}_4^T) l'' - l'^T (\mathbf{a}_4 \mathbf{b}_i^T) l'' \\ &= l'^T (\mathbf{a}_i \mathbf{b}_4^T - \mathbf{a}_4 \mathbf{b}_i^T) l'' \end{aligned} \quad (406)$$

과 같이 나타낼 수 있다. 이 때  $\mathbf{a}_i \mathbf{b}_4^T - \mathbf{a}_4 \mathbf{b}_i^T$ 를  $\mathbf{T}_i$ 로 치환하면

$$l_i = l'^T \mathbf{T}_i l'' \quad (407)$$

으로 간결하게 표현할 수 있다.

### Definition 15.1

이 때, 행렬의 집합  $\{\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3\}$ 은 Trifocal Tensor  $\mathcal{T}$ 을 행렬로 표현한 것을 의미한다. 이를 사용하여 직선  $l$ 을 다시 표현해보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} l^T &= l'^T [\mathbf{T}_1 \quad \mathbf{T}_2 \quad \mathbf{T}_3] l'' \\ &= (l'^T \mathbf{T}_1 l'', l'^T \mathbf{T}_2 l'', l'^T \mathbf{T}_3 l'') \end{aligned} \quad (408)$$

### Homographies induced by a plane

#### Result 15.2

서로 다른 세 카메라의 이미지 평면을 각각  $\pi_P, \pi_{P'}, \pi_{P''}$  하자. 두 번째 카메라 이미지 평면 상의 직선  $l'$ 을 Back-projection하여 얻은 월드 상의 평면을  $\pi'$ 이라고 하면  $\pi'$ 을 통해  $\pi_P$ 에서  $\pi_{P''}$ 으로 변환하는 Homography  $\mathbf{H}_{13}$ 가 존재한다. 해당 섹션에서는  $\mathbf{H}_{13}$ 를  $l'$ 을 통해 기술하는 방법에 대해 설명한다.

첫 번째 이미지 평면 상의 직선  $l$ 은 Trifocal Tensor에 의해

$$l^T = l'^T [\mathbf{T}_1 \quad \mathbf{T}_2 \quad \mathbf{T}_3] l'' \quad (409)$$

과 같이 나타낼 수 있고 이를 정리하여  $l = \mathbf{H}_{13}^T l''$  꼴로 나타내면

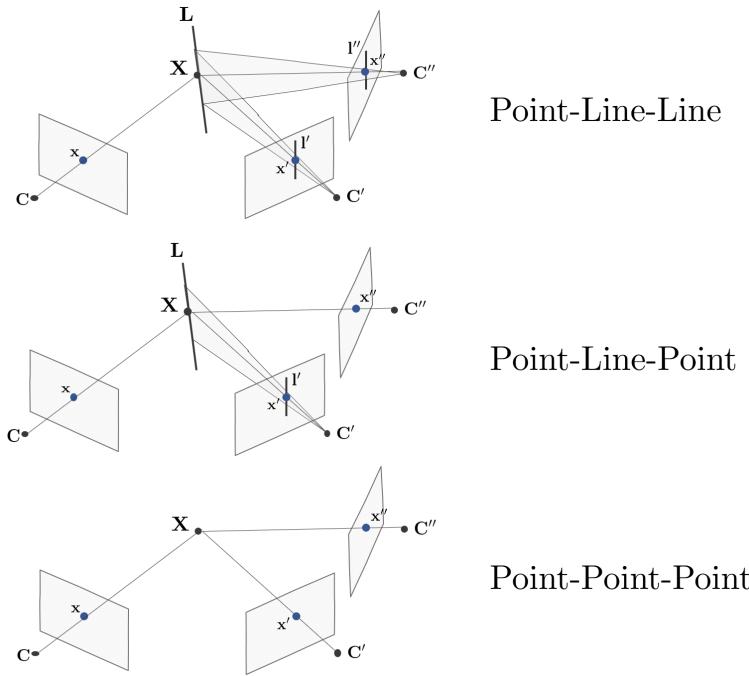
$$\begin{aligned} l^T &= l'^T [\mathbf{T}_1 \quad \mathbf{T}_2 \quad \mathbf{T}_3] l'' \\ &= ([\mathbf{T}_1^T \quad \mathbf{T}_2^T \quad \mathbf{T}_3^T] l')^T l'' \\ &= \mathbf{H}_{13}^T l'' \end{aligned} \quad (410)$$

이 된다. 따라서  $\mathbf{H}_{13} = [\mathbf{T}_1^T \quad \mathbf{T}_2^T \quad \mathbf{T}_3^T] l'$ 과 같다.  $\mathbf{H}_{13}$ 를 사용하면  $\mathbf{x}'' = \mathbf{H}_{13} \mathbf{x}$ 와 같이  $\pi_P \rightarrow \pi_{P''}$ 으로 Homography 변환을 할 수 있다.

$\mathbf{x}' = \mathbf{H}_{12} \mathbf{x}$  공식을 만족하며 다음과 같다.

$$\mathbf{H}_{12} = [\mathbf{T}_1 \quad \mathbf{T}_2 \quad \mathbf{T}_3] l'' \quad \forall l'' \quad (411)$$

## Point and line incidence relations



이전 섹션에서는  $\mathbf{l} = \mathbf{l}'^\top \mathcal{T} \mathbf{l}''$  공식을 통해 세 이미지 평면에 존재하는 직선들이 Trifocal Tensor  $\mathcal{T}$ 에 의해 제약된다는 것에 대해 설명했다. 해당 섹션에서는 세 개의 직선들 뿐만 아니라 점과 직선들의 관계들이 Trifocal Tensor  $\mathcal{T}$ 에 의해 어떻게 제약되는지 설명한다.

직선  $\mathbf{l}$  위에 존재하는 임의의 점  $\mathbf{x}$ 에 대해  $\mathbf{x}^\top \mathbf{l} = 0$  이 성립하고 이를 Tensor 표현법으로 다시 나타내면

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^\top \mathbf{l} &= \sum_i x^i l_i \\ &= \sum_i x^i \mathbf{l}'^\top \mathbf{T}_i \mathbf{l}'' \quad \because l_i = \mathbf{l}'^\top \mathbf{T}_i \mathbf{l}'' \\ &= \mathbf{l}'^\top (\sum_i x^i \mathbf{T}_i) \mathbf{l}'' = 0\end{aligned}\tag{412}$$

같이 나타낼 수 있고 이는 한 점과 두 직선(point-line-line) 사이의 관계를 의미한다.

이전 섹션에서 설명한  $\mathbf{H}_{13}$ 은 첫 번째 이미지 평면에서 세 번째 이미지 평면으로 변환하는 Homography 를 의미한다. 이를 통해  $\mathbf{x}'' = \mathbf{H}_{13}\mathbf{x}$ 와 같이 세 번째 이미지 평면 상의 점  $\mathbf{x}''$ 을 구할 수 있고

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{H}_{13}\mathbf{x} = [\mathbf{T}_1^\top \mathbf{l}' \quad \mathbf{T}_2^\top \mathbf{l}' \quad \mathbf{T}_3^\top \mathbf{l}'] \mathbf{x} = (\sum_i x^i \mathbf{T}_i^\top) \mathbf{l}'\tag{413}$$

같이 전개할 수 있다. 이 때,  $\mathbf{x}''$ 은 Scale Factor를 포함하고 있으므로 유일하게  $\mathbf{x}''$ 를 결정하기 위해  $\mathbf{x}''^\wedge$  를 곱하면

$$\mathbf{x}''^\top \mathbf{x}''^\wedge = \mathbf{l}'^\top (\sum_i x^i \mathbf{T}_i) \mathbf{x}''^\wedge = \mathbf{0}^\top\tag{414}$$

이 된다. 이는 두 개의 점과 하나의 직선 사이(point-line-point)의 관계를 의미한다.

이와 유사하게 세 개의 점이 주어졌을 때

$$\mathbf{x}'^\wedge (\sum_i x^i \mathbf{T}_i) \mathbf{x}''^\wedge = \mathbf{0}\tag{415}$$

을 통해 Scale Factor를 제거하여 유일한  $\mathbf{x}'$ 을 구할 수 있으며 해당 공식은 세 점 사이(point-point-point)의 관계를 의미한다.

## Epipolar lines

### Result 15.3

Trifocal Tensor  $\mathcal{T}$ 를 통해 두 카메라의 Epipoar Line을 구할 수 있다. 세 이미지 평면  $\pi_P, \pi_{P'}, \pi_{P''}$ 에 주어지고  $\pi_P$  위의 한 점  $x$ 가 존재하며  $\pi_{P'}, \pi_{P''}$  평면에 Epipolar Line  $l', l''$ 이 존재한다고 가정하면 이들 사이에는

$$\begin{aligned} l'^\top (\sum_i x^i \mathbf{T}_i) &= 0 \\ (\sum_i x^i \mathbf{T}_i) l'' &= 0 \end{aligned} \quad (416)$$

관계가 성립한다. 즉,  $l'^\top$ 은  $(\sum_i x^i \mathbf{T}_i)$ 의 Left Null Vector이며  $l''$ 은  $(\sum_i x^i \mathbf{T}_i)$ 의 Right Null Vector가 된다.

### Proof

두 번째 이미지 평면  $\pi_{P'}$  상의 Epipolar Line  $l'$ 을 Back-projection하여 생성된 평면을  $\pi'$ 라고 하면  $\pi'$ 과  $\pi_P$  사이에는 교차선이 생성되고 해당 교차선은  $\pi_P$  평면의 Epipolar Line  $l$ 이 된다. 이 때 세 번째 이미지 평면  $\pi_{P''}$  상의 임의의 직선  $l''$ 을 Back-projection한 평면  $\pi''$ 과  $\pi'$ 은 월드 평면 상의 직선  $L$ 에서 교차선을 생성하며 이를 다시  $\pi_P$ 로 프로젝션하면  $L$ 은 항상 Epipolar Line  $l$  위에 한 점  $x \in l$ 로 프로젝션된다.

이러한  $l \leftrightarrow l' \leftrightarrow l''$  관계를 통해 Trifocal Tensor  $\mathcal{T}$ 을 구할 수 있으며 이전 섹션에서 설명한 한 점  $x$ 와 두 직선 사이(point-line-line)의 관계 공식이 성립한다.

$$\begin{aligned} x \in l &= l'^\top \mathcal{T} l'' \\ l'^\top (\sum_i x^i \mathbf{T}_i) l'' &= 0 \quad \forall l'' \\ \therefore l'^\top (\sum_i x^i \mathbf{T}_i) &= 0 \end{aligned} \quad (417)$$

위와 같이 모든  $l''$ 에 대해 위 공식을 만족해야 하므로  $l'^\top (\sum_i x^i \mathbf{T}_i) = 0$  공식이 성립하게 된다. 이를 모든  $l'$ 에 대해서도 마찬가지로 성립하므로  $(\sum_i x^i \mathbf{T}_i) l'' = 0$  또한 성립한다.

### Result 15.4

추가적으로 Epipole  $e', e''$ 은 모든  ${}^\forall x$ 에 대해 구할 수 있는  $l', l''$ 들의 교차점을 계산함으로써 구할 수 있다.

### Extracting the fundamental matrices

이전 섹션에서 설명한 것과 같이 여러 점과 직선들과 관계를 통해 세 개의 이미지 평면에 대한 Trifocal Tensor  $\mathcal{T}$ 를 구할 수 있다. 해당 섹션에서는  $\mathcal{T}$ 를 통해 세 카메라에 대한 Fundamental Matrix  $\mathbf{F}$ 를 구하는 방법에 대해 설명한다.

Fundamental Matrix  $\mathbf{F}_{21}$ 은  $\mathbf{F}_{21} = e'^\wedge \mathbf{H}_{21}$ 를 통해 구할 수 있다.  $\mathbf{F}_{ij}$ 는 i번째 이미지 평면과 j번째 이미지 평면 사이의 Fundamental Matrix를 의미한다.  $e'$ 은 이전 섹션에서 설명한 방법대로  $\mathbf{T}_i$ 의 Left Null Vector를 계산하여  $l', e'$ 을 통해 구하고  $\mathbf{H}_{21}$ 은  $[\mathbf{T}_1 \quad \mathbf{T}_2 \quad \mathbf{T}_3] l''$ 과 같이 구할 수 있으므로

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{21} &= e'^\wedge \mathbf{H} \\ &= e'^\wedge [\mathbf{T}_1 \quad \mathbf{T}_2 \quad \mathbf{T}_3] l'' \quad {}^\exists l'' \end{aligned} \quad (418)$$

이 된다. 이 때  $l''$ 은  $\mathbf{T}_i$ 의 Null Space에 존재하면 안된다. 즉  $\mathbf{T}_i l'' \neq 0$ 이어야 한다. 다시 말하면  $[\mathbf{T}_1 \quad \mathbf{T}_2 \quad \mathbf{T}_3] l''$ 의 rank가 3이어야 한다. 이 때, Epipole  $e''$ 은  $l''$ 의 Null Space에 존재하므로  $e''^\top l'' = 0$ 을 만족한다. 따라서

$$e'' \perp \text{Nul } \mathbf{T}_i \quad {}^\forall i \quad (419)$$

를 만족하므로  $l''$  대신  $e''$ 을 대입하면 항상 행렬의 rank가 3이 된다. 결론적으로 Fundamental Matrix  $\mathbf{F}_{21}$ 은

$$\mathbf{F}_{21} = e'^\wedge [\mathbf{T}_1 \quad \mathbf{T}_2 \quad \mathbf{T}_3] e'' \quad (420)$$

을 통해 구할 수 있다. 동일한 방법을 사용하여  $\mathbf{F}_{31} = e''^\wedge [\mathbf{T}_1^\top \quad \mathbf{T}_2^\top \quad \mathbf{T}_3^\top] e'$ 을 구할 수 있다.

## Retrieving the camera matrices

Two-view Geometry에서는 Fundamental Matrix  $\mathbf{F}$ 가 주어지면 카메라 행렬 대응쌍  $(\mathbf{P}, \mathbf{P}')$ 을 사영모호성을 포함하여(up to projectivity) 구할 수 있었다.

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= [\mathbf{I} \mid 0] \\ \mathbf{P}' &= [\mathbf{A} \mid \mathbf{e}'] \\ \text{where, } \mathbf{F} &= \mathbf{e}'^\wedge \mathbf{A} \text{ in two-view.}\end{aligned}\tag{421}$$

Three-view Geoemtry에서는 Trifocal Tensor  $\mathcal{T}$ 를 통해  $\mathbf{F}_{21} = \mathbf{e}''^\wedge [\mathbf{T}_1 \quad \mathbf{T}_2 \quad \mathbf{T}_3] \mathbf{e}''$  그리고  $\mathbf{F}_{31} = \mathbf{e}''''^\wedge [\mathbf{T}_1^\top \quad \mathbf{T}_2^\top \quad \mathbf{T}_3^\top] \mathbf{e}'$ 을 구했을 때

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= [\mathbf{I} \mid 0] \\ \mathbf{P}' &= [[\mathbf{T}_1 \quad \mathbf{T}_2 \quad \mathbf{T}_3] \mathbf{e}'' \mid \mathbf{e}'] \\ \text{but, } \mathbf{P}'' &\neq [[\mathbf{T}_1^\top \quad \mathbf{T}_2^\top \quad \mathbf{T}_3^\top] \mathbf{e}' \mid \mathbf{e}''] \text{ in three-view.}\end{aligned}\tag{422}$$

관계가 성립한다. 다시 말하면  $(\mathbf{P}, \mathbf{P}')$ 을 계산하면 월드좌표계가 고정되고 따라서  $\mathbf{P}''$ 은 고정된 월드좌표계에 대해서 다시 표현해야 한다는 것을 의미한다. p256 공식 (9.10)에 의해 Canonical Form에 대한 가장 일반적인 카메라 행렬은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{P}'' = [\mathbf{H} + \mathbf{e}'' \mathbf{v}^\top \mid \lambda \mathbf{e}''']\tag{423}$$

이를 전개하면

$$\begin{aligned}\mathbf{P}'' &= [\mathbf{H} + \mathbf{e}'' \mathbf{v}^\top \mid \lambda \mathbf{e}'''] \\ &= [\underbrace{[\mathbf{T}_1^\top \quad \mathbf{T}_2^\top \quad \mathbf{T}_3^\top] \mathbf{e}' + \mathbf{e}'' \mathbf{v}^\top}_{\mathbf{B}} \mid \underbrace{\lambda \mathbf{e}'''}_{\mathbf{b}_4}]\end{aligned}\tag{424}$$

이 되고  $\mathbf{P}' = [\mathbf{A} \mid \mathbf{a}_4]$ 은

$$\begin{aligned}\mathbf{P}' &= [\mathbf{A} \mid \mathbf{a}_4] \\ &= [\underbrace{[\mathbf{T}_1 \quad \mathbf{T}_2 \quad \mathbf{T}_3] \mathbf{e}''}_{\mathbf{A}} \mid \underbrace{\mathbf{e}'}_{\mathbf{a}_4}]\end{aligned}\tag{425}$$

이므로  $\mathbf{T}_i$ 의 정의에 의해

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_i &= \mathbf{a}_i \mathbf{b}_4^\top + \mathbf{a}_4 \mathbf{b}_i^\top \\ &= \mathbf{T}_i \mathbf{e}'' \mathbf{e}''^\top - \mathbf{e}' \mathbf{b}_i^\top\end{aligned}\tag{426}$$

이 된다. 이를 정리하면

$$\mathbf{T}_i (\mathbf{I} - \mathbf{e}'' \mathbf{e}''^\top) = -\mathbf{e}' \mathbf{b}_i^\top\tag{427}$$

이 된다. 이 때  $\|\mathbf{e}'\| = 1$ 이라고 가정하고 양 변에  $\mathbf{e}'^\top$ 을 곱하면

$$\mathbf{b}_i^\top = \mathbf{e}'^\top \mathbf{T}_i (\mathbf{e}'' \mathbf{e}''^\top - \mathbf{I})\tag{428}$$

가 된다. 최종적으로  $\mathbf{P}''$ 은 다음과 같다.

$$\mathbf{P}'' = [(\mathbf{e}'' \mathbf{e}''^\top - \mathbf{I}) [\mathbf{T}_1^\top \quad \mathbf{T}_2^\top \quad \mathbf{T}_3^\top] \mathbf{e}' \mid \mathbf{e}''']\tag{429}$$

## The trifocal tensor and tensor notation

Trifocal Tensor  $\mathcal{T}$ 를 Tensor 표현법으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_i^{jk} &= (j, k) \text{ entry of } \mathbf{T}_i \\ &= a_i^j b_4^k - a_4^j b_i^k\end{aligned}\tag{430}$$

행렬로 표현한 직선  $\mathbf{l}$ 의  $i$ 번째 좌표는  $l_i = \mathbf{l}^\top \mathbf{T}_i \mathbf{l}''$ 과 같이 나타낼 수 있고 이를 Tensor 표현법으로 나타내면

$$\begin{aligned} l_i &= l'_i \mathcal{T}_i^{jk} l''_k \\ &= l'_i l''_k \mathcal{T}_i^{jk} \end{aligned} \quad (431)$$

가 된다. Tensor 표현법을 통해 첫 번째 카메라의 직선  $\mathbf{l}$ 을 세 번째 카메라의 직선  $\mathbf{l}''$ 으로 변환하는 Homography  $\mathbf{H} : \pi_{\mathbf{P}} \mapsto \pi_{\mathbf{P}''}$ 을 구할 수 있다.

$$l_i = l''_k (l'_j \mathcal{T}_i^{jk}) = l''_k h_i^k \quad (432)$$

이 때,  $h_i^k = l'_j \mathcal{T}_i^{jk}$ 를 의미한다. Homography  $\mathbf{H}$ 를 사용하여 점을 변환하는 경우

$$x''^k = h_i^k x^i \quad (433)$$

가 된다.

Tensor 표현법을 나타내는데 유용한  $\epsilon_{ijk}$ 에 대해 설명하면

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{unless } i,j,k \text{ are all distinct} \\ +1 & \text{i,j,k are even permutation of 1,2,3} \\ -1 & \text{i,j,k are odd permutation of 1,2,3} \end{cases} \quad (434)$$

과 같다. 다시 말하면  $\epsilon_{ijk}$ 는  $i, j, k$ 가 전부 다르지 않은 이상 0의 값을 가지며  $i, j, k$ 가  $(1, 2, 3), (3, 1, 2)$  또는  $(2, 3, 1)$ 과 같이 순차적일 때는 +1의 값을 가지고 아닌 경우에는 -1의 값을 가진다. 이를 통해  $3 \times 3$  벡터들의 Cross Product를 표현해보면  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 일 때

$$c_i = \epsilon_{ijk} a^j b^k \quad (435)$$

와 같이 나타낼 수 있다. 이는  $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$ 을 Tensor 표현법으로 나타낸 것이다. 따라서  $(\mathbf{a}^\wedge)_{ik}$ 는 Tensor 표현법으로

$$(\mathbf{a}^\wedge)_{ik} = \epsilon_{ijk} a^j \quad (436)$$

같이 나타낼 수 있다.

### The trilinearities

Tensor 표현법을 사용해서 이전 섹션에서 설명한 여러 점들과 직선의 관계를 다시 표현할 수 있다. 예를 들어 두 점과 한 직선 사이(point-line-point)의 관계 공식을 일반적인 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{l}'^\top (\sum_i x^i \mathbf{T}_i) \mathbf{x}''^\wedge = \mathbf{0}^\top \quad (437)$$

이를 Tensor 표현법으로 나타내면  $(\mathbf{x}''^\wedge)_{qs} = -x''^k \epsilon_{kqs}$ 가 되므로 이를 다시 정리하면

$$l'_j x^i \mathcal{T}_i^{jq} x''^k \epsilon_{kqs} = 0_s \quad (438)$$

과 같이 나타낼 수 있다. 이는 세 개의(tri-) 서로 다른 이미지에 존재하는 점 또는 직선을 사용하여 선형방정식(linear)을 도출했으므로 다른 용어로 Trilinearities라고 한다.

### Transfer

세 개의 카메라가 주어졌을 때 이 중 두 개의 이미지 평면에서 점 또는 직선의 위치를 알고 있을 때 Trifocal Tensor  $\mathcal{T}$ 를 사용하여 나머지 한 개의 이미지 평면 상의 점 또는 직선의 위치를 결정하는 방법을 Transfer라고 한다.

## Point transfer using fundamental matrices

Point Transfer는 세 개의 이미지 평면  $\pi_P, \pi_{P'}, \pi_{P''}$ 에 대한 Fundamental Matrix  $F_{21}, F_{31}, F_{32}$ 가 주어졌을 때 이미 알고 있는  $x, x'$ 의 위치를 통해  $x''$ 의 위치를 결정하는 것을 말한다. 이는 Epipolar Geometry를 통해 결정할 수 있다. 세 번째 이미지 평면  $\pi_{P''}$  상에 존재하는 Epipolar Line  $l''$ 은

$$\begin{aligned} l''_{31} &= F_{31}x \\ l''_{32} &= F_{32}x' \end{aligned} \quad (439)$$

이므로  $\pi_{P''}$  위에 존재하는 한 점  $x''$ 은

$$x'' \in l''_{31} \text{ and } l''_{32} \quad (440)$$

을 만족해야 한다. 따라서  $x''$ 은 위 두 직선의 교차점으로 결정된다.

$$x'' = (F_{31}x) \times (F_{32}x') \quad (441)$$

이 때, 위 공식에서  $F_{21}$ 은 사용되지 않았는데 실제로는 대응점 쌍  $(x, x')$ 에 노이즈가 존재하기 때문에 이를 개선시키기 위해 사용된다. 대응점 쌍의 노이즈로 인해  $x^T F_{21} x' = 0$  공식을 만족하지 않으므로 이전 섹션에서 설명한 Optimal Triangulation 방법을 사용하여  $d(x, l(t))^2 + d(x', l'(t))^2$  값이 최소가 되는  $\hat{x} \leftrightarrow \hat{x}'$ 를 구한 후 이를 통해  $x''$ 을 계산한다.

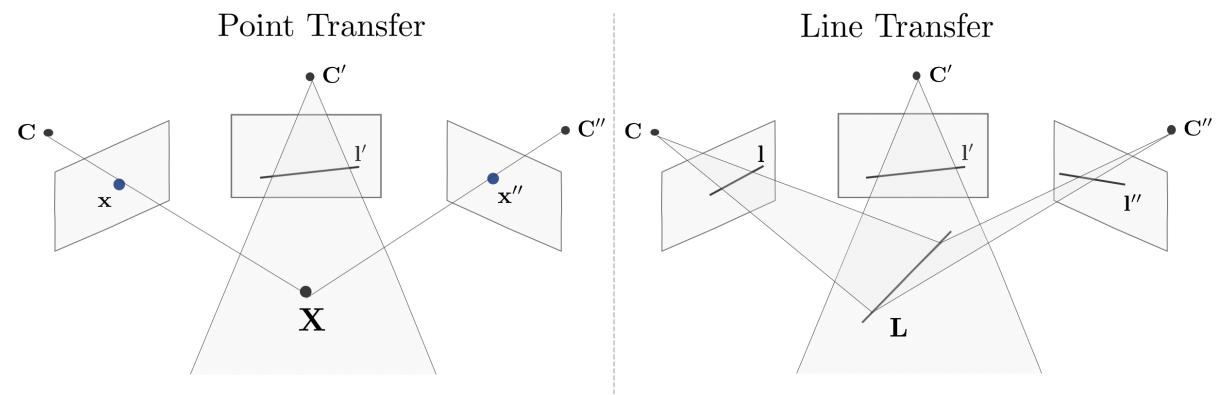
$$x'' = (F_{31}\hat{x}) \times (F_{32}\hat{x}') \quad (442)$$

하지만 해당 Point Transfer는 세 개의 카메라의 중심점  $C, C', C''$ 이 이루는 Trifocal 평면에 대응점 쌍  $x, x'$ 이 존재하는 경우  $\pi_{P''}$ 에 프로젝션되는 Epipolar Line이 다음과 같이 동일하게 생성되어

$$F_{31}x = F_{32}x' \quad (443)$$

이를 통해  $x''$ 의 유일한 위치를 결정할 수 없다. 이는 Fundamental Matrix를 이용한 Point Transfer의 한계점으로 볼 수 있다.

## Point transfer using the trifocal tensor



Fundamental Matrix  $F_{ij}$ 가 아닌 Trifocal Tensor  $T$ 를 사용하면 더욱 다양한 경우에 Transfer를 수행할 수 있다.  $T$ 를 이용해 Point Transfer를 하는 방법은 다음과 같다.

- $T$ 를 이용해  $F_{21}$ 를 계산한다.

$$F_{21} = e'^T [T_1 \ T_2 \ T_3] e'' \quad (444)$$

- Optimal Triangulation 방법을 사용하여 노이즈를 제거한 최적의 대응점 쌍을 계산한다.

$$(x, x') \rightarrow (\hat{x}, \hat{x}') \quad (445)$$

- 두 번째 이미지 평면  $\pi_{P'}$ 의 Epipolar Line  $l'_e$ 을 계산한다.  $l'_e = F_{21}\hat{x}$ . 다음으로  $l'_e$ 과 수직이고  $\hat{x}'$ 를 통과하는 직선  $l'$ 을 계산한다.

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}' &= (x'_1, x'_2, 1)^\top & \mathbf{l}'_e &= [l_1 \quad l_2 \quad l_3]^\top \\ \Rightarrow \mathbf{l}' &= \begin{bmatrix} l_2 \\ -l_1 \\ -l_2 x'_1 + l_1 x'_2 \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{446}$$

- $\mathbf{l}'$ 을 사용하여  $\mathbf{x}'$ 을 Point Transfer한다.

$$x''^{ik} = x'^i l'_j \mathcal{T}_i^{jk}\tag{447}$$

### Degenerate configurations

Trifocal Tensor  $\mathcal{T}$ 를 사용하는 경우에도 두 카메라의 중심점  $\mathbf{C}, \mathbf{C}'$ 을 잇는 baseline 직선 상 위에 3차원 공간상의 점  $\mathbf{X}$ 가 존재하는 경우 이를 통해  $\mathbf{x}''$ 을 결정할 수 없다.

### Line transfer using the trifocal tensor

Trifocal Trnsor  $\mathcal{T}$ 를 사용하면 점 뿐만 아니라 직선 또한 Transfer할 수 있다. 세 이미지 평면 상의 직선  $\mathbf{l} \leftrightarrow \mathbf{l}' \leftrightarrow \mathbf{l}''$ 이 대응관계를 가지는 경우

$$l_i = l'_j l''_k \mathcal{T}_i^{jk}\tag{448}$$

와 같이  $\mathcal{T}$ 를 통해 표현할 수 있고 이는 곧 직선  $\mathbf{l}$ 의 벡터  $[l'_j l''_k \mathcal{T}_i^{jk}]$ 과 평행하다는 의미이다.

$$\mathbf{l} \parallel [l'_j l''_k \mathcal{T}_i^{jk}]_{3 \times 1}, \quad i = 1, 2, 3\tag{449}$$

평행한 직선들은 Cross Product가 0이 되어야 하므로

$$\begin{aligned}(\mathbf{l}^\wedge)_{si} l'_j l''_k \mathcal{T}_i^{jk} &= 0 \\ (l_s \epsilon^{ris}) l'_j l''_k \mathcal{T}_i^{jk} &= 0\end{aligned}\tag{450}$$

이 성립한다. 이는 곧  $\mathbf{l}''$ 에 대한 선형방정식이므로 이를 다시 정리하면

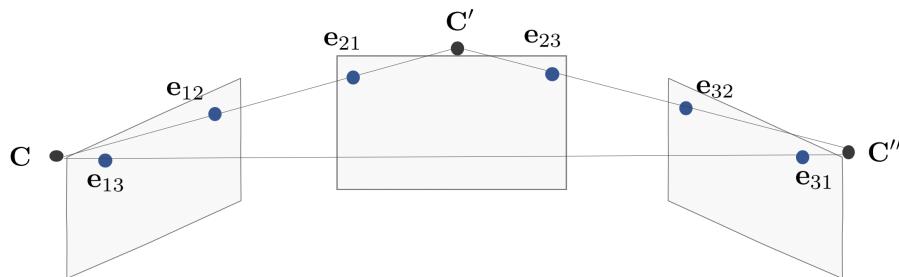
$$(l_s \epsilon^{ris} l'_j \mathcal{T}_i^{jk}) l''_k = 0\tag{451}$$

**선형방정식을 풀어주어  $\mathbf{l} \leftrightarrow \mathbf{l}'$ 이 주어진 경우  $\mathbf{l}''$ 을 계산할 수 있다.**

### Degeneracies

직선  $\mathbf{l}, \mathbf{l}'$ 이 Epipolar Line인 경우 이를 Back-projection한 평면  $\pi$ 는  $\pi'$ 과 동일한 Epipolar Plane이 되고 이 경우 세 번째 이미지 평면  $\pi_{P''}$  상의 직선  $\mathbf{l}''$ 을 유일하게 결정할 수 없다.

### The fundamental matrices for three views



세 개의 카메라에 대한 Fundamental Matrix  $\mathbf{F}_{21}, \mathbf{F}_{31}, \mathbf{F}_{32}$ 가 주어졌을 때 이들은 서로 독립적이지 않다. 세 개의 이미지 평면에 대해 총 6개의 Epipole이 생성되고

$$\mathbf{e}_{23}^\top \mathbf{F}_{21} \mathbf{e}_{13} = \mathbf{e}_{31}^\top \mathbf{F}_{32} \mathbf{e}_{21} = \mathbf{e}_{32}^\top \mathbf{F}_{31} \mathbf{e}_{12} = 0\tag{452}$$

공식을 만족한다.

---

### Definition 15.5

세 개의 Fundamental Matrix  $\mathbf{F}_{21}, \mathbf{F}_{31}, \mathbf{F}_{32}$ 가 독립적이지 않고 서로 상호호환(compatible)하기 위해 서는 위 공식이 성립해야 한다.

#### Uniqueness of camera matrices given three fundamental matrices

만약 세 개의 Fundamental Matrix가 상호호환인 경우 이를 생성하는 세 개의 카메라 행렬  $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3)$ 이 사영모호성을 포함하여(up to projectivity) 유일하게 결정된다.

$$\begin{aligned} & \exists (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3) \text{ such that fundamental matrix of } (\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_j) \text{ is } \mathbf{F}_{ij} \\ & (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3) \text{ are unique up to projectivity.} \end{aligned} \quad (453)$$

이를 증명하기 위해 다음 순서대로 진행한다.

- Two-view Geometry의 원리를 사용하면  $\mathbf{F}_{21} = \mathbf{e}_{21}^\wedge \mathbf{A}$  일 때 카메라 행렬  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &= [\mathbf{I} \mid 0] \\ \mathbf{P}_2 &= [\mathbf{A} \mid \mathbf{e}_{21}] \end{aligned} \quad (454)$$

- $\mathbf{x}'^\top \mathbf{F}_{21} \mathbf{x} = 0$ 을 만족하는 대응점 쌍  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_i)$ 을 생성한다. 이를 통해 월드 공간 상의 점  $\mathbf{X}_i$ 를 Triangulation한다.
- 세 점 사이(point-point-point)의 관계 공식을 사용하여  $\mathbf{x}''_i$ 를 구한다.

$$\mathbf{x}''_i = (\mathbf{F}_{31} \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{F}_{32} \mathbf{x}'_i) \quad (455)$$

- $\mathbf{P}_3 \mathbf{X}_i = \mathbf{x}''_i$  공식을 사용하여  $\mathbf{P}_3$ 을 계산할 수 있다.

단, 월드 공간 상의 점  $\mathbf{X}_i$ 가 세 카메라의 중심점  $\mathbf{C}, \mathbf{C}', \mathbf{C}''$ 을 포함하는 Trifocal 평면에 존재하는 경우  $\mathbf{x}''_i$ 를 유일하게 결정할 수 없다.

## 13 Revision log

- 1st: 2020-05-12
- 2nd: 2020-06-06
- 3rd: 2020-06-07
- 4th: 2020-06-09
- 5th: 2020-06-10
- 6th: 2020-06-11
- 7th: 2020-06-12
- 8th: 2020-06-14
- 9th: 2020-06-15
- 10th: 2020-06-16
- 11th: 2020-06-20
- 12th: 2020-06-22
- 13th: 2020-06-23
- 14th: 2022-06-28
- 15th: 2022-12-20

- 
- 16th: 2023-01-01
  - 17th: 2023-01-21
  - 18th: 2024-03-20
  - 19th: 2024-03-23

## 14 References

Hartley, Richard, and Andrew Zisserman. Multiple view geometry in computer vision. Cambridge university press, 2003

## 15 Closure

Check out alida.tistory.com for the web version posting.