Notes on On-manifold preintegration for real-time visual-inertial odometry

Gyubeom Edward Im*

Contents

1 Introduction

2 Preliminaries

본 논문에서는 VIO 관련 수식을 최적화하기 위해 MAP 추정을 사용한다. IMU 상태 변수에는 회전, 포즈과 같은 비선형(smooth manifold like SO(3), SE(3)) 항들이 존재하기 때문에 MAP 추정 방법은 결국 비선형 최소제곱법 (non-linear least squares like GN, LM)을 수행하여 풀게 된다. 본격적으로 설명하기에 앞서 자주 사용하는 기하학 지식들을 먼저 설명한다.

*blog: alida.tistory.com, email: criterion.im@gmail.com

2.1 Notions of Riemannian geometry

2.1.1 Special orthogonal group SO(3)

SO(3)군은 3차원 회전 행렬들의 제약 조건을 담고 있는 군을 말한다(자세한 내용은 링크 참조).

$$SO(3) \doteq \{\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3\times3} : \mathbf{R}^\intercal\mathbf{R} = \mathbf{I},\ \det(\mathbf{R}) = 1\} \tag{1}$$

SO(3)군 사이의 연산은 행렬 곱으로 수행하며 역(inverse)는 행렬을 전치(tranpose)함으로써 구할 수 있다. SO(3)는 smooth manifold 상에 존재하며 접평면(tangent space at identity) 상의 원소는 lie algebra so(3)라고 부른다. lie algebra so(3)는 3x3 크기의 반대칭 행렬로 구성되어 있다.

$$\boldsymbol{\omega}^\wedge = \begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{bmatrix}^\wedge = \begin{bmatrix}0 & -\omega_3 & \omega_2\\ \omega_3 & 0 & -\omega_1\\ -\omega_2 & \omega_1 & 0\end{bmatrix} \in so(3) \tag{2}$$

- $(\cdot)^\wedge$: 연산은 3차원 벡터 $\boldsymbol{\omega}$를 3x3 반대칭 행렬 so(3)로 만드는 연산
- $(\cdot)^\vee$: 연산은 3x3 반대칭 행렬 so(3)를 3차원 벡터 $\boldsymbol{\omega}$로 만드는 연산

반대칭 행렬의 유용한 성질은 다음과 같다

$$\mathbf{a}^\wedge\mathbf{b} = -\mathbf{b}^\wedge\mathbf{a}, \quad \forall\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 \tag{3}$$

지수 매핑(exponential mapping at identity) exp : $so(3) \mapsto SO(3)$는 lie algebra so(3)를 lie group SO(3)로 변환해주는 연산이며 둘 사이의 관계를 표현한 Rodrigues' formula가 유명하다

$$\exp(\boldsymbol{\phi}^\wedge) = \mathbf{I} + \frac{\sin(\|\boldsymbol{\phi}\|)}{\|\boldsymbol{\phi}\|}\boldsymbol{\phi}^\wedge + \frac{1-\cos(\|\boldsymbol{\phi}\|)}{\|\boldsymbol{\phi}\|^2}(\boldsymbol{\phi}^\wedge)^2 \tag{4}$$

지수 매핑의 1차 근사는 작은 회전량을 근사할 때 유용하게 사용된다.

$$\exp(\boldsymbol{\phi}^\wedge) \approx \mathbf{I} + \boldsymbol{\phi}^\wedge \tag{5}$$

로그 매핑(logarithm mapping at identity)은 $\mathbf{R} \neq \mathbf{I}$인 SO(3)를 lie albegra so(3)로 변환해주는 매핑이다

$$\log(\mathbf{R}) = \frac{\varphi\cdot(\mathbf{R}-\mathbf{R}^\intercal)}{2\sin(\varphi)} \quad \text{with } \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{\mathrm{tr}(\mathbf{R}-1)}{2}\right) \tag{6}$$

- $\log(\mathbf{R})^\vee = \mathbf{a}\varphi$: $\mathbf{a}$는 회전축 벡터, φ는 회전 각도
- $\mathbf{R} = \mathbf{I}$이면 $\varphi = 0$이 되어 $\mathbf{a}$의 해가 무수히 많아진다

만약 지수 매핑의 정의역을 $\|\boldsymbol{\phi}\| < \pi$로 제한한다면 지수 매핑은 일대일 대응(bijective) 함수가 되며 그 역함수는 로그 매핑이 된다. 하지만 정의역을 제한하지 않으면 지수 매핑은 전사(surjective) 함수가 된다. 왜냐하면 임의의 회전 행렬 $\mathbf{R}$에 대해 angle-axis 표현 $(\mathbf{a},\theta)$가 존재하며, $\boldsymbol{\phi} = (\theta + 2k\pi)\mathbf{a}$, $k \in \mathbb{Z}$ 가 그 $\mathbf{R}$의 허용 가능한 로그가 되기 때문이다.

표기의 편의를 위해 일반적으로 $\exp(), \log()$ 대신 벡터화된 지수 매핑과 로그 매핑 $\mathrm{Exp}(), \mathrm{Log}()$을 자주 사용한다

$$\begin{aligned} \mathrm{Exp}: \quad & \mathbb{R}^3 \to SO(3) \quad ; \quad \boldsymbol{\phi} \mapsto \exp(\boldsymbol{\phi}^\wedge) \\ \mathrm{Log}: \quad & SO(3) \to \mathbb{R}^3 \quad ; \quad \mathbf{R} \mapsto \log(\mathbf{R})^\vee \end{aligned} \tag{7}$$

수식을 유도하다 보면 다음과 같은 지수 매핑의 1차 근사를 사용할 것이다.

$$\mathrm{Exp}(\boldsymbol{\phi} + \delta\boldsymbol{\phi}) \approx \mathrm{Exp}(\boldsymbol{\phi})\mathrm{Exp}(\mathbf{J}_r(\boldsymbol{\phi})\delta\boldsymbol{\phi}) \tag{8}$$

- $\mathbf{J}_r$: SO(3)군의 오른쪽 자코비안(right jacobian). 기존 SO(3)군의 오른쪽에 섭동량(increments)를 곱할 때 유도되는 자코비안 행렬

$$\mathbf{J}_r(\boldsymbol{\phi}) = \mathbf{I} - \left(\frac{1-\cos(\|\boldsymbol{\phi}\|)}{\|\boldsymbol{\phi}\|^2}\right)\boldsymbol{\phi}^\wedge + \left(\frac{\|\boldsymbol{\phi}\|-\sin(\|\boldsymbol{\phi}\|)}{\|\boldsymbol{\phi}\|^3}\right)(\boldsymbol{\phi}^\wedge)^2 \tag{9}$$

로그 매핑에도 유사한 1차 근사가 존재한다

$$\mathrm{Log}(\mathrm{Exp}(\boldsymbol{\phi})\mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\phi})) \approx \boldsymbol{\phi} + \mathbf{J}_r^{-1}(\boldsymbol{\phi})\delta\boldsymbol{\phi} \tag{10}$$

오른쪽 자코비안의 역행렬은 다음과 같다

$$\mathbf{J}_r^{-1}(\boldsymbol{\phi}) = \mathbf{I} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}^\wedge + \left(\frac{1}{\|\boldsymbol{\phi}\|^2} - \frac{1+\cos(\|\boldsymbol{\phi}\|)}{2\|\boldsymbol{\phi}\|\sin(\|\boldsymbol{\phi}\|)}\right)(\boldsymbol{\phi}^\wedge)^2 \tag{11}$$

오른쪽 자코비안 $\mathbf{J}_r$과 그 역행렬 $\mathbf{J}_r^{-1}$은 $\|\boldsymbol{\phi}\| = 0$일 때 항등 행렬 $\mathbf{I}$가 된다.
지수 매핑의 또다른 유용한 성질은 다음과 같다

$$\begin{aligned} &\mathbf{R}\mathrm{Exp}(\boldsymbol{\phi})\mathbf{R}^\intercal = \exp(\mathbf{R}\boldsymbol{\phi}^\wedge\mathbf{R}^\intercal) = \mathrm{Exp}(\mathbf{R}\boldsymbol{\phi}) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Exp}(\boldsymbol{\phi})\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathrm{Exp}(\mathbf{R}^\intercal\boldsymbol{\phi}) \end{aligned} \tag{12}$$

2.1.2 Special euclidean group SE(3)

SE(3)군은 3차원 강체(rigid body)의 변환 행렬과 관련된 제약 조건을 담고 있는 군을 말한다. (자세한 내용은 링크 참조).

$$SE(3) \doteq \{(\mathbf{R}, \mathbf{p}) : \mathbf{R} \in SO(3), \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3\} \tag{13}$$

두 개의 SE(3)군에 속한 변환 행렬 $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$가 주어졌을 때, 군의 연산은 행렬곱으로 표현되며 $\mathbf{T_1T_2} = (\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2, \mathbf{p}_1 + \mathbf{R}_1\mathbf{p}_2)$와 같다. 그리고 역(inverse)는 변환 행렬의 역행렬 $\mathbf{T}_1^{-1} = (\mathbf{R}_1^\intercal, -\mathbf{R}_1^\intercal\mathbf{p}_1)$으로 표현된다. SE(3)군 역시 지수 매핑과 로그 매핑이 존재하지만 이는 본 논문에서 사용되지 않으므로 자세한 설명은 생략하겠다.

2.2 Uncertainty description in SO(3)

SO(3)에서 불확실성을 정의하는 자연스러운 방법은 먼저 접평면(tangent space)에서 분포를 정한 뒤 이를 (7)의 지수 매핑을 통해 SO(3) 군으로 보내는 것이다.

$$\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\mathrm{Exp}(\epsilon), \qquad \epsilon \sim (0, \Sigma) \tag{14}$$

- $\mathbf{R}$: 노이즈가 없는 회전량 (평균)
- ϵ: 평균이 0이고 분산이 Σ인 작은 정규 분포

$\tilde{\mathbf{R}}$의 분포를 명시적으로 얻기 위해 $\mathbb{R}^3$의 적분에서 시작해보자.

$$LX\Xi\Phi Xi\int_{\mathbb{R}^3} p(\epsilon)d\epsilon = \int_{\mathbb{R}^3} \alpha e^{-\frac{1}{2}\|\epsilon\|^2_\Sigma} d\epsilon = 1 \tag{15}$$

- $\alpha = 1/\sqrt{(2\pi)^3\det(\Sigma)}$
- $\|\epsilon\|^2_\Sigma \doteq \epsilon^\intercal\Sigma^{-1}\epsilon$: 마할라노비스 거리의 제곱

위 식에 $\epsilon = \mathrm{Log}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R})$을 대입해보자. 이는 $\|\epsilon\| < \pi$일 때 (14)의 역연산이다.

$$\int_{SO(3)} \beta(\tilde{\mathbf{R}}) e^{-\frac{1}{2}\|\mathrm{Log}(\mathbf{R}^{-1}\tilde{\mathbf{R}})\|^2_\Sigma} d\tilde{\mathbf{R}} = 1 \tag{16}$$

- $\beta(\tilde{\mathbf{R}})$: 정규화 인자(normalization factor). 함수의 적분 면적을 1로 만들어주는 계수

정규화 인자를 자세히 보면 $\beta(\tilde{\mathbf{R}}) = \alpha/|\det(\mathcal{J}(\tilde{\mathbf{R}}))|$과 같다. 이 때, $\mathcal{J}(\tilde{\mathbf{R}}) \doteq \mathbf{J}_r(\mathrm{Log}(\mathbf{R}^{-1}\tilde{\mathbf{R}}))$이다. $\mathbf{J}_r(\cdot)$은 앞서 (9)에서 설명한 SO(3)군의 오른쪽 자코비안이다.

(16)의 형태에서 바로 SO(3) 상의 가우시안 분포를 얻을 수 있다.

$$p(\tilde{\mathbf{R}}) = \beta(\tilde{\mathbf{R}})e^{-\frac{1}{2}\|\mathrm{Log}(\mathbf{R}^{-1}\tilde{\mathbf{R}})\|^2_\Sigma} \tag{17}$$

공분산이 작을 때는 $\tilde{\mathbf{R}} \approx \mathbf{R}$이므로 $\mathbf{J}_r(\mathrm{Log}(\mathbf{R}^{-1}\tilde{\mathbf{R}})) \approx \mathbf{I}$이고 $\beta(\tilde{\mathbf{R}}) \approx \alpha$로 근사할 수 있다. (16)는 이미 $\|\epsilon\| < \pi$와 같이 범위가 정해져 있기 때문에 평균에서 멀리 있는(π를 넘어가는) 각도는 고려하지 않으므로 작은 공분산이라는 가정이 더욱 타당해진다.

만약 β를 상수로 가정하면, $\tilde{\mathbf{R}}$이 (17)처럼 분포할 때 회전 $\mathbf{R}$의 negative log-likelihood는 다음과 같다

$$\mathcal{L}(\mathbf{R}) = \frac{1}{2}\|\mathrm{Log}(\mathbf{R}^{-1}\tilde{\mathbf{R}})\|^2_\Sigma + \mathrm{const} = \frac{1}{2}\|\mathrm{Log}(\tilde{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{R})\|^2_\Sigma + \mathrm{const} \tag{18}$$

이는 기하학적으로 봤을 때 $\tilde{\mathbf{R}}$과 $\mathbf{R}$ 사이의 회전각(SO(3) geodesic 거리)을 의미한다. 그리고 거기에 Σ^{-1} 가중치를 곱한 후 제곱한 거리로 해석할 수 있다.

2.3 Gauss-Newton method on manifold

유클리드 공간에서 일반적인 Gauss-Newton(GN) 방법은 (일반적으로 non-convex)인 목적 함수를 2차 근사(quadratic approximation)로 반복적으로 최적화한다. 2차 근사는 선형 방정식(정규 방정식)을 푸는 문제로 귀결되고 그 해로 현재 추정값을 갱신한다. 이번 섹션에서는 이러한 접근 방법을 변수들이 특정 manifold $\mathcal{M}$ 위에 사는 (제약 없는) 최적화 문제로 확장하는 법에 대해 설명한다.

다음 문제를 생각해보자

$$\min_{x\in\mathcal{M}} f(x) \tag{19}$$

- x는 manifold $\mathcal{M}$ 위에 존재하는 변수
- 편의 상 위 식은 단일 변수로 나타내었지만 다변수로 쉽게 일반화할 수 있다.

유클리드 경우와 달리 위 식은 x에 대해 바로 2차 근사를 만들 수 없다. 주된 이유는 두 가지이다. 첫째로 x 자체로 최적화를 수행하는 경우 over-parameterized 문제가 발생할 수 있다. 예를 들어 회전 행렬은 3자유도이지만 9개의 파라미터를 갖고 있다. 이 때문에 정규 방정식이 under-determined되어 무수한 해를 가질 수 있다. 둘째는 그렇게 얻은 근사 해가 일반적으로 $\mathcal{M}$ 위에 있지 않다.

manifold 최적화의 일반적인 접근 방법은 리트랙션(retraction) $\mathcal{R}_x$를 도입하는 것이다. $\mathcal{R}_x$는 점 x의 접평면 공간의 원소 δx와 x 주변의 $\mathcal{M}$ 상의 한 이웃 사이를 연결하는 일대일 대응 매핑을 의미한다. 리트랙션을 사용하면 문제를 아래와 같이 변경할 수 있다.

$$\min_{x\in\mathcal{M}} f(x) \quad \Rightarrow \quad \min_{\delta x\in\mathbb{R}^n} f(\mathcal{R}_x(\delta x)) \tag{20}$$

위 식과 같이 기존 파라미터를 변경(re-parameterized)하는 것을 흔히 리프팅(lifting)이라고 부른다. 간단히 말하면 현재 상태에서 정의되는 접평면(여기는 국소적으로 유클리드 공간처럼 작동한다)에서 작업을 수행하기 위해 파라미터를 바꾸는 것이다(SO(3)인 경우 $\delta x \in \mathbb{R}^3$).

리프팅이 되었으면 (20) 문제에 일반적인 최적화 기법을 적용한다. GN 프레임워크에서는 현재 상태 주변에서 비용 함수를 제곱한 다음 2차 근사 방법을 통해 접평면 공간에서 δx^*를 구한다. 최종적으로 현재 상태를 다음과 같이 갱신한다.

$$\hat{x} \leftarrow \mathcal{R}_x(\delta x^*) \tag{21}$$

위와 같은 방법론을 흔히 "lift-solve-retraction"이라고 부르며 어떤 trust-region 방법에도 일반화할 수 있다. 또한 항공 역학 필터링 문헌의 에러 상태 모델(error-state model)을 공통된 이론으로 묶어주며 로보틱스 최적화에도 널리 쓰인다.

마지막으로 $\mathcal{R}_x$의 구체적인 방법에 대해 얘기해보자. 지수 매핑(exponential mapping)은 사용 가능한 리트랙션 방법 중 하나이다. 본 논문에서는 다음과 같은 리트랙션을 사용한다.

$$\mathcal{R}_{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\phi}) = \mathbf{R}\mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\phi}), \qquad \delta\boldsymbol{\phi} \in \mathbb{R}^3 \tag{22}$$

SE(3)군의 경우 $\mathbf{T} \doteq (\mathbf{R}, \mathbf{p})$라고 하면 다음과 같이 리트랙션을 정의한다.

$$\mathcal{R}_{\mathbf{T}}(\delta\boldsymbol{\phi}, \delta\mathbf{p}) = (\mathbf{R}\mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\phi}),\ \mathbf{p} + \mathbf{R}\delta\mathbf{p}), \qquad [\delta\boldsymbol{\phi}, \delta\mathbf{p}] \in \mathbb{R}^6 \tag{23}$$

3 Maximum a posteriori visual-inertial state estimation

본 논문에서는 IMU와 단안 카메라가 달린 시스템(모바일 로봇, 드론, 핸드헬드 장치 등)의 상태를 추정하는 VIO 문제를 다룬다. IMU 좌표계 B가 우리가 추적하는 본체의 좌표계와 일치한다고 가정하고 카메라-IMU 변환은 미리 캘리브레이션하여 고정되어 있다고 본다. Front-end에서는 3D 랜드마크에 대한 이미지 측정 값을 제공하며 여러 영상 중 일부를 키프레임으로 고정한다. 우리는 이 키프레임들의 포즈를 추정한다.

3.1 The state

시간 i에서 시스템의 상태는 IMU 기준의 방향, 위치, 속도, bias로 표현된다.

$$\mathbf{x}_i \doteq [\mathbf{R}_i, \mathbf{p}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{b}_i] \tag{24}$$

- $(\mathbf{R}_i, \mathbf{p}_i)$: SE(3)군에 속하는 포즈
- $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^3$: 속도
- $\mathbf{b}_i = [\mathbf{b}_i^g, \mathbf{b}_i^a] \in \mathbb{R}^6$: IMU bias

시간 k까지의 모든 키프레임들의 집합을 $\mathcal{K}_k$라고 할 때 우리가 추정하는 상태들의 집합 $\mathcal{X}_k$는 다음과 같이 표기할 수 있다.

$$\mathcal{X}_k \doteq \{\mathbf{x}_i\}_{i \in \mathcal{K}_k} \tag{25}$$

본 논문의 실제 구현에서는 structureless 기법을 사용하기 때문에 3D 랜드마크는 상태 변수에 포함하지 않는다. 필요하다면 위 방법을 랜드마크 및 카메라 내,외부 파라미터 추정으로도 쉽게 일반화 할 수 있다.

3.2 The measurements

입력 측정값은 IMU와 카메라 센서로부터 들어온다. 키프레임 i의 이미지 집합을 $\mathcal{C}_i$로 표기한다. 시간 i에 카메라는 여러 랜드마크 l을 볼 수 있으므로 $\mathcal{C}_i$에는 여러 측정값 $\mathbf{z}_{il}$이 포함된다. 편의 상 $l \in \mathcal{C}_i$라고 표기하면 i에서 l을 관측했다는 뜻으로 해석한다.

연속 키프레임 i와 j 사이에서 수집된 IMU 측정값들의 집합은 $\mathcal{I}_{ij}$로 쓴다. IMU 업데이트 속도와 키프레임 빈도에 따라 $\mathcal{I}_{ij}$의 수는 수 개에서 수 백개의 측정값이 들어갈 수 있다. 시간 k까지 모인 전체 IMU+이미지 관측값들의 집합 $\mathcal{Z}_k$는 다음과 같다.

$$\mathcal{Z}_k \doteq \{\mathcal{C}_i, \mathcal{I}_{ij}\}_{(i,j) \in \mathcal{K}_k} \tag{26}$$

3.3 Factor graphs and MAP estimation

관측값 $\mathcal{Z}_k$와 상태에 대한 사전 정보 $p(\mathcal{X}_0)$가 주어졌을 때 상태 변수 $\mathcal{X}_k$의 사후 분포(posteriori)는 다음과 같다

$$\begin{aligned} p(\mathcal{X}_k|\mathcal{Z}_k) \propto p(\mathcal{X}_0)p(\mathcal{Z}_k|\mathcal{X}_k) &\stackrel{(a)}{=} p(\mathcal{X}_0) \prod_{(i,j)\in\mathcal{K}_k} p(\mathcal{C}_i, \mathcal{I}_{ij}|\mathcal{X}_k) \\ &\stackrel{(b)}{=} p(\mathcal{X}_0) \prod_{(i,j)\in\mathcal{K}_k} p(\mathcal{I}_{ij}|\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i) \prod_{i\in\mathcal{K}_k} \prod_{l\in\mathcal{C}_i} p(\mathbf{z}_{il}|\mathbf{x}_i) \end{aligned} \tag{27}$$

- (a) : 관측값들 간의 독립이라고 가정했을 때 분해
- (b) : 마르코프 성질을 사용한 분해

관측 $\mathcal{Z}_k$는 이미 관측된 값이므로 더 이상 우리가 추정할 변수가 아니다. 따라서 사후분포는 상태 변수들만을 인수(factor) 로 갖는 likelihood들의 곱으로 정리된다. 이 곱 구조를 그대로 그림으로 나타낸 것이 factor graph이다. 그래프에는 상태(미지수)들을 담는 변수 노드와, 해당 상태들에 의존하는 likelihood(또는 제약)를 나타내는 factor 노드가 있고, 각 factor 노드는 자신이 참조하는 변수 노드들과 연결된다.

MAP 추정값 $\mathcal{X}^*$는 (27)를 최대로 하는 값, 즉 negative log-posterior의 최소값이다. 노이즈가 평균이 0인 가우시안 분포라고 가정하면 이는 residual 제곱들의 합으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_k^* &\doteq \arg\min_{\mathcal{X}_k} \ -\log_e p(\mathcal{X}_k|\mathcal{Z}_k) \\ &= \arg\min_{\mathcal{X}_k} \|\mathbf{r}_0\|^2_{\mathbf{\Sigma}_0^2} + \sum_{(i,j)\in\mathcal{K}_k} \|\mathbf{r}_{\mathcal{I}_{ij}}\|^2_{\mathbf{\Sigma}_{ij}^2} + \sum_{i\in\mathcal{K}_k}\sum_{l\in\mathcal{C}_i} \|\mathbf{r}_{\mathcal{C}_{il}}\|^2_{\mathbf{\Sigma}_C}\end{aligned} \tag{28}$$

- $\mathbf{r}_0$: 사전 항의 residual(초기 상태 제약)
- $\mathbf{r}_{\mathcal{I}_{ij}}$: preintegrated IMU의 residual
- $\mathbf{r}_{\mathcal{C}_{il}}$: 랜드마크의 reprojection residual
- $\mathbf{\Sigma}_0, \mathbf{\Sigma}_{ij}, \mathbf{\Sigma}_c$: 각 residual들의 공분산

간단하게 말해서 residual은 측정값과 예측값의 차이를 수치화한 함수이고 우리는 그 제곱합(+공분산으로 가중된)을 최소화해 상태 $\mathcal{X}_k$를 추정한다.

4 IMU model and motion integration

일반적으로 IMU 센서로부터 얻을 수 있는 정보에는 3축의 가속도와 3축의 각속도 정보가 포함된다. 가속도와 각속도의 측정값(measurement)에는 bias와 노이즈 성분이 포함되어 있기 때문에 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}{}_B\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{WB}(t) &= {}_B\boldsymbol{\omega}_{WB}(t) + \mathbf{b}^g(t) + \boldsymbol{\eta}^g(t) \\ {}_B\tilde{\mathbf{a}}(t) &= \mathbf{R}_{WB}^\intercal(t)({}_W\mathbf{a}(t) - {}_W\mathbf{g}) + \mathbf{b}^a(t) + \boldsymbol{\eta}^a(t)\end{aligned} \tag{29}$$

- ${}_B\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{WB}(t)$: 관측된(measured) 각속도
- ${}_B\tilde{\mathbf{a}}(t)$: 관측된(measured) 가속도
- ${}_B\boldsymbol{\omega}_{WB}(t)$: 실제(true) 각속도
- ${}_W\mathbf{a}(t)$: 실제(true) 가속도
- $\mathbf{b}^g(t), \mathbf{b}^a(t)$: 각속도와 가속도의 bias 값
- $\boldsymbol{\eta}^g(t), \boldsymbol{\eta}^a(t)$: 각속도와 가속도의 노이즈 값

기호 앞에 위치하는 B는 **"B(=IMU) 좌표계에서 바라본"** 것을 의미한다. IMU의 포즈는 $\{\mathbf{R}_{WB}, {}_W\mathbf{p}\}$에 의해 B에서 W로 변환되어 월드 좌표계 기준으로 표현된다. ${}_B\boldsymbol{\omega}_{WB} \in \mathbb{R}^3$는 B 좌표계에서 표현된 "W에서 본 B의" 순간적인 각속도(instantaneous angular velocity)를 의미한다. ${}_W\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$는 월드 좌표계에서 본 센서의 가속도를 의미하며 ${}_W\mathbf{g}$는 월드 좌표계에서 본 중력 벡터를 의미한다.

IMU 측정값으로 부터 아래와 같은 **IMU Kinematic Model**을 사용하면 IMU의 모션을 추정할 수 있다.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{R}}_{WB} &= \mathbf{R}_{WB}\ {}_B\boldsymbol{\omega}_{WB}^\wedge \\ {}_W\dot{\mathbf{v}} &= {}_W\mathbf{a} \\ {}_W\dot{\mathbf{p}} &= {}_W\mathbf{v}\end{aligned} \tag{30}$$

위 모델을 사용하면 시간에 따른 IMU의 포즈와 속도의 변화를 수식으로 나타낼 수 있다. $t + \Delta t$ 시간에 IMU

포즈와 속도는 다음과 같이 (30)를 적분하여 나타낼 수 있다.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R}_{WB}(t+\Delta t) &= \mathbf{R}_{WB}(t)\cdot \mathrm{Exp}\left(\int_t^{t+\Delta t} {}_B\boldsymbol{\omega}_{WB}(\tau)d\tau\right) \\
{}_W\mathbf{v}(t+\Delta t) &= {}_W\mathbf{v}(t) + \int_t^{t+\Delta t} {}_W\mathbf{a}(\tau)d\tau \\
{}_W\mathbf{p}(t+\Delta t) &= {}_W\mathbf{p}(t) + \int_t^{t+\Delta t} {}_W\mathbf{v}(\tau)d\tau + \int\int_t^{t+\Delta t} {}_W\mathbf{a}(\tau)d\tau^2
\end{aligned} \tag{31}
$$

만약 가속도 ${}_W\mathbf{a}$와 각속도 ${}_B\boldsymbol{\omega}_{WB}$가 시간 $[t, t+\Delta t]$ 동안 일정(constant)하다고 가정하면 위 식은 다음과 같이 조금 더 간결하게 쓸 수 있다.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R}_{WB}(t+\Delta t) &= \mathbf{R}_{WB}(t)\cdot \mathrm{Exp}({}_B\boldsymbol{\omega}_{WB}\Delta t) \\
{}_W\mathbf{v}(t+\Delta t) &= {}_W\mathbf{v}(t) + {}_W\mathbf{a}\Delta t \\
{}_W\mathbf{p}(t+\Delta t) &= {}_W\mathbf{p}(t) + {}_W\mathbf{v}\Delta t + {}_W\mathbf{a}\Delta t^2
\end{aligned} \tag{32}
$$

(29)에서 보다시피 실제 IMU 가속도와 각속도 ${}_W\mathbf{a}$, ${}_B\boldsymbol{\omega}_{WB}$는 IMU 측정값 ${}_W\tilde{\mathbf{a}}$, ${}_B\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{WB}$에 대한 함수이므로 위 식을 다시 고쳐쓰면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R}_{WB}(t+\Delta t) &= \mathbf{R}_{WB}(t)\cdot \mathrm{Exp}(({}_B\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{WB}(t) - {}_B\mathbf{b}^g(t) - {}_B\boldsymbol{\eta}^{gd}(t))\Delta t) \\
{}_W\mathbf{v}(t+\Delta t) &= {}_W\mathbf{v}(t) + {}_W\mathbf{g}\Delta t + \mathbf{R}_{WB}(t)({}_W\tilde{\mathbf{a}}(t) - {}_B\mathbf{b}^a(t) - {}_B\boldsymbol{\eta}^{ad}(t))\Delta t \\
{}_W\mathbf{p}(t+\Delta t) &= {}_W\mathbf{p}(t) + {}_W\mathbf{v}(t)\Delta t + \frac{1}{2}{}_W\mathbf{g}\Delta t^2 + \frac{1}{2}\mathbf{R}_{WB}(t)({}_W\tilde{\mathbf{a}}(t) - {}_B\mathbf{b}^a(t) - {}_B\boldsymbol{\eta}^{ad}(t))\Delta t^2
\end{aligned} \tag{33}
$$

아래 첨자로 붙은 좌표계는 자명하기 때문에 가독성을 위하여 이를 생략하여 나타낸다.

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&\mathbf{R}(t+\Delta t) = \mathbf{R}(t)\cdot \mathrm{Exp}((\tilde{\boldsymbol{\omega}}(t) - \mathbf{b}^g(t) - \boldsymbol{\eta}^{gd}(t))\Delta t) \\
&\mathbf{v}(t+\Delta t) = \mathbf{v}(t) + \mathbf{g}\Delta t + \mathbf{R}(t)(\tilde{\mathbf{a}}(t) - \mathbf{b}^a(t) - \boldsymbol{\eta}^{ad}(t))\Delta t \\
&\mathbf{p}(t+\Delta t) = \mathbf{p}(t) + \mathbf{v}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{g}\Delta t^2 + \frac{1}{2}\mathbf{R}(t)(\tilde{\mathbf{a}}(t) - \mathbf{b}^a(t) - \boldsymbol{\eta}^{ad}(t))\Delta t^2
\end{aligned}
} \tag{34}
$$

- $\boldsymbol{\eta}^{gd}, \boldsymbol{\eta}^{ad}$: 이산화 시간(discrete-time) 버전 각속도, 가속도 노이즈

이산화 시간(discrete-time) 버전 노이즈 $\boldsymbol{\eta}^{gd}, \boldsymbol{\eta}^{ad}$의 공분산은 연속 시간 노이즈 $\boldsymbol{\eta}^{g}, \boldsymbol{\eta}^{a}$와 샘플링 주기 Δt와 관련있기 때문에 이에 대한 함수로 나타낼 수 있다.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(\boldsymbol{\eta}^{gd}(t)) &= \frac{1}{\Delta t}\mathrm{Cov}(\boldsymbol{\eta}^{g}(t)) \\
\mathrm{Cov}(\boldsymbol{\eta}^{ad}(t)) &= \frac{1}{\Delta t}\mathrm{Cov}(\boldsymbol{\eta}^{a}(t))
\end{aligned} \tag{35}
$$

5 IMU preintegration on manifold

(34)을 자세히 보면 t 시간과 $t+\Delta t$ 시간의 사이의 상태 변수에 대한 관계식인 것을 알 수 있다. 따라서 (34)를 사용하면 매 IMU 측정값(measurement)가 들어올 때마다 다음 스텝의 상태 변수를 추정(estimation)할 수 있다.

두 키프레임 i, j가 주어졌을 때 두 키프레임 사이에 존재하는 모든 IMU 측정값들을 누적하면 하나의 측정값으로 합칠 수 있으며 이를 **preintegrated IMU 측정값(measurement)**이라고 정의한다. IMU는 카메라와 시간적으로 동기화되어 있다고 가정하고 임의의 이산 시간 k에 대한 측정값을 매 순간 얻는다고 할 때 (34)을 $k=i$부터 $k=j$

까지 누적한 preintegration IMU 측정값은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R}_j &= \mathbf{R}_i \Pi_{k=i}^{j-1} \mathrm{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \mathbf{b}_k^g - \boldsymbol{\eta}_k^{gd}\right)\Delta t\right) \\
\mathbf{v}_j &= \mathbf{v}_i + \mathbf{g}\Delta t_{ij} + \sum_{k=i}^{j-1} \mathbf{R}_k\left(\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_k^a - \boldsymbol{\eta}_k^{ad}\right)\Delta t \\
\mathbf{p}_j &= \mathbf{p}_i + \sum_{k=i}^{j-1}\left[\mathbf{v}_k\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{g}\Delta t^2 + \frac{1}{2}\mathbf{R}_k\left(\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_k^a - \boldsymbol{\eta}_k^{ad}\right)\Delta t^2\right]
\end{aligned}
\tag{36}
$$

- $\Delta t_{ij} \doteq \sum_{k=i}^{j-1}\Delta t$: 키프레임 i 부터 $j-1$까지 모든 Δt를 더한 값
- 가독성을 위해 $(\cdot)(t_i)$를 $(\cdot)_i$로 표기하였다

(36)를 사용하면 두 키프레임 i와 j 사이의 IMU 측정값들을 누적하여 둘 사이의 상대적인 모션을 추정할 수 있다. 하지만 최적화 과정에서 비선형 상태 변수 $\mathbf{R}_i$가 업데이트 될 때마다 $[i,j)$ 구간의 모든 비선형 상태 변수를 선형화(linearization)하는 과정에서 반복적인 연산을 수행해야 한다. 예를 들어 $\mathbf{R}_i$가 변하면 이에 따른 $\mathbf{R}_k, k=i,\cdots,j-1$ 또한 모두 다시 계산해야 한다.

이러한 비효율적인 계산을 피하기 위해 (36)을 바로 사용하는 것이 아닌 아래와 같은 **두 키프레임 i와 j의 상대적인 모션 증가량(relative motion increments)를 정의하여 t_i 시간의 포즈와 속도에 대해 독립적이 되도록 만든다.**

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\Delta\mathbf{R}_{ij} &\doteq \mathbf{R}_i^\intercal\mathbf{R}_j && = \Pi_{k=i}^{j-1}\mathrm{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \mathbf{b}_k^g - \boldsymbol{\eta}_k^{gd}\right)\Delta t\right) \\
\Delta\mathbf{v}_{ij} &\doteq \mathbf{R}_i^\intercal(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g}\Delta t_{ij}) && = \sum_{k=i}^{j-1}\Delta\mathbf{R}_{ik}\left(\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_k^a - \boldsymbol{\eta}_k^{ad}\right)\Delta t \\
\Delta\mathbf{p}_{ij} &\doteq \mathbf{R}_i^\intercal(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i - \mathbf{v}_k\Delta t_{ij} - \frac{1}{2}\sum_{k=i}^{j-1}\mathbf{g}\Delta t^2) && = \sum_{k=i}^{j-1}\left[\Delta\mathbf{v}_{ik}\Delta t + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{R}_{ik}\left(\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_k^a - \boldsymbol{\eta}_k^{ad}\right)\Delta t^2\right]
\end{aligned}
}
\tag{37}
$$

위 식에서 주목해야할 부분은 **$\Delta\mathbf{v}_{ij}$와 $\Delta\mathbf{p}_{ij}$는 실제 속도와 실제 위치의 물리적 변화를 의미하지 않는다는 사실이다.** 두 물리량은 (37) 식의 맨 오른쪽 부분을 t_i 시간의 상태 변수로부터 독립으로 만들기 위해 임의로 정의한 값이다. 식을 자세히 보면 맨 오른쪽 식은 중력 효과 또한 없는 것을 알 수 있다. (37)을 사용하면 t_i에 상관없이 IMU의 측정값으로부터 바로 두 키프레임 사이의 preintegration IMU 측정값을 구할 수 있다.

엄밀하게 말하면 (37) 에서 IMU의 bias 값은 매 순간마다 변화해야 하지만 계산의 편의를 위해 두 키프레임 i,j 사이의 시간은 충분히 짧은 시간이기 때문에 bias 값을 상수로 가정한다.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{b}_i^g &= \mathbf{b}_{i+1}^g = \cdots = \mathbf{b}_{j-1}^g \\
\mathbf{b}_i^a &= \mathbf{b}_{i+1}^a = \cdots = \mathbf{b}_{j-1}^a
\end{aligned}
\tag{38}
$$

5.1 Preintegrated IMU measurements

(37)은 키프레임 i, j의 상태 변수를 나타낸 좌측 항과 이들의 측정값을 나타낸 우측 항으로 이루어져 있기 때문에 이미 하나의 측정 모델(measurement model)이라고 볼 수 있다. 하지만 **(37)는 수식 안에 측정 노이즈(η)들이 복잡하게 섞여 있기 때문에 하나의 깔끔한 MAP 추정 문제로 수식화하기 어려운 단점이 있다.** MAP 추정을 하려면 각 상태변수들을 깔끔한 negative log-likelihood 형태로 변환할 수 있어야 하기 때문에 노이즈항들을 분리할 필요가 있다. 따라서 노이즈항을 분리하기 위한 여러 수학적 테크닉들을 사용할 것이다. 그리고 t_i 시간에서 bias 값은 이미 알고 있다고 가정하고 수식을 유도한다.

우선 $\Delta\mathbf{R}_{ij}$부터 노이즈항을 분리해보자. Preliminaries 섹션에서 언급한 여러 수학적 테크닉들을 사용하여 노이

즈항을 맨 뒤로 옮길 수 있다.

$$
\begin{aligned}
\Delta\mathbf{R}_{ij} &= \Pi_{k=i}^{j-1}\Big[\mathrm{Exp}((\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \mathbf{b}_i^g)\Delta t)\cdot \mathrm{Exp}\Big(-\mathbf{J}_r^k \boldsymbol{\eta}_k^{gd}\Delta t\Big)\Big] \\
&= \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}\cdot \Pi_{k=i}^{j-1}\mathrm{Exp}\Big(-\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^{\intercal}\mathbf{J}_r^k\boldsymbol{\eta}_k^{gd}\Delta t\Big) \\
&\doteq \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}\cdot(-\delta\boldsymbol{\phi}_{ij})
\end{aligned} \tag{39}
$$

- $\mathbf{J}_r^k \doteq \mathbf{J}_r^k((\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \mathbf{b}_i^g)\Delta t)$를 단순화하여 표기
- $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij} \doteq \Pi_{k=i}^{j-1}\mathrm{Exp}((\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \mathbf{b}_i^g)\Delta t)$: preintegrated된 상대 회전량
- $\delta\boldsymbol{\phi}_{ij}$: preintegrated된 상대 회전량의 노이즈

다음으로 (39)를 (37)의 $\Delta\mathbf{v}_{ij}$에 대입한 후 작은 회전량에 대해 $\mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\phi}_{ij}) \approx \mathbf{I} + \delta\boldsymbol{\phi}_{ij}^{\wedge}$ 근사를 적용하면 아래 식과 같다.

$$
\begin{aligned}
\Delta\mathbf{v}_{ij} &= \sum_{k=i}^{j-1}\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}(\mathbf{I} - \delta\boldsymbol{\phi}_{ij})(\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_i^a)\Delta t - \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}\boldsymbol{\eta}_k^{ad}\Delta t \\
&= \Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij} + \sum_{k=i}^{j-1}\Big[\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}(\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_i^a)^{\wedge}\delta\boldsymbol{\phi}_{ij}\Delta t - \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}\boldsymbol{\eta}_k^{ad}\Delta t\Big] \\
&\doteq \Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij} - \delta\mathbf{v}_{ij}
\end{aligned} \tag{40}
$$

- $\delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij} \doteq \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}(\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_i^a)\Delta t$: preintegrated된 상대 속도
- $\delta\mathbf{v}_{ij}$: preintegrated된 상대 속도의 노이즈

유사하게 (39)와 (40)을 (37)의 $\Delta\mathbf{p}_{ij}$에 대입한 후 작은 회전량의 근사식을 적용하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
\Delta\mathbf{p}_{ij} &= \sum_{k=i}^{j-1}\Big[(\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ik} - \delta\mathbf{v}_{ik})\Delta t + \frac{1}{2}\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}(\mathbf{I} - \delta\boldsymbol{\phi}_{ik}^{\wedge})(\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_i^a)\Delta t^2 - \frac{1}{2}\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}\boldsymbol{\eta}_k^{ad}\Delta t^2\Big] \\
&= \Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij} + \sum_{k=i}^{j-1}\Big[-\delta\mathbf{v}_{ik}\Delta t + \frac{1}{2}\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}(\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_i^a)\Delta t^2 - \frac{1}{2}\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}\boldsymbol{\eta}_k^{ad}\Delta t^2\Big] \\
&\doteq \Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij} - \delta\mathbf{p}_{ij}
\end{aligned} \tag{41}
$$

- $\delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij}$: preintegrated된 상대 위치
- $\delta\mathbf{p}_{ij}$: preintegrated된 상대 위치의 노이즈

지금까지 유도한 (39), (40), (41)을 원래 식 (37)에 대입하면 다음과 같은 preintegrated 측정 모델이 나온다.

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij} = \mathbf{R}_i^{\intercal}\mathbf{R}_j\mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\phi}_{ij}) \\
&\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij} = \mathbf{R}_i^{\intercal}(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g}\Delta t_{ij}) + \delta\mathbf{v}_{ij} \\
&\Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij} = \mathbf{R}_i^{\intercal}\Big(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i - \mathbf{v}_i\Delta t_{ij} - \frac{1}{2}\mathbf{g}\Delta t_{ij}^2\Big) + \delta\mathbf{p}_{ij}
\end{aligned}
} \tag{42}
$$

- $\mathrm{Exp}(-\delta\boldsymbol{\phi}_{ij})^{\intercal} = \mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\phi}_{ij})$가 적용되었다
- $[\delta\boldsymbol{\phi}_{ij}^{\intercal}, \delta\mathbf{v}_{ij}^{\intercal}, \delta\mathbf{p}_{ij}^{\intercal}]^{\intercal}$: 랜덤 노이즈 벡터

이전 식 (37)은 상태와 노이즈항이 복잡하게 섞여 있었던 반면에 (42)은 상태와 랜덤 노이즈항이 서로 깔끔하게 분리된 것을 볼 수 있다.

랜덤 노이즈가 평균이 0인 가우시안 분포를 따른다고 가정하면 (측정=상태+가우시안 노이즈) 형태로 분리된 꼴이므로 MAP 추정에서 결론적으로 풀고자하는 negative log-likelihood의 수식이 2차식 $\mathbf{r}^{\intercal}\Sigma^{-1}\mathbf{r}$ 형태로 깔끔하게 계산되기 때문에 이를 활용한 최적화 구현이 비교적 단순해진다. 그리고 회전, 속도, 위치에 대한 노이즈를

하나의 9차원 벡터와 공분산으로 다룰 수 있어 코드, 이론, 디버깅 또한 매우 통일성 있게 정돈된다.

5.2 Noise propagation

이번 섹션에서는 앞서 구한 랜덤 노이즈 벡터 $[\delta\boldsymbol{\phi}_{ij}^\intercal, \delta\mathbf{v}_{ij}^\intercal, \delta\mathbf{p}_{ij}^\intercal]^\intercal$의 특성에 대해 살펴본다. **앞서 이 노이즈 벡터를 평균이 0인 가우시안 노이즈로 가정하면 다루기 편리하다고 하였지만 공분산을 정확히 모델링하는 것은 매우 중요하다.** 공분산의 역행렬은 MAP 최적화에서 각 항의 가중치로 직접 들어가기 때문이다. 그래서 해당 섹션에서는 preintegrated된 측정값의 공분산 $\boldsymbol{\Sigma}_{ij}$을 유도하는 과정에 대해 자세히 설명한다.

$$\boldsymbol{\eta}_{ij}^{\Delta} \doteq [\delta\boldsymbol{\phi}_{ij}^\intercal, \delta\mathbf{v}_{ij}^\intercal, \delta\mathbf{p}_{ij}^\intercal]^\intercal \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}_{9\times1}, \boldsymbol{\Sigma}_{ij}) \tag{43}$$

먼저 $\delta\boldsymbol{\phi}_{ij}$를 고려해보자. (39)를 보면 다음과 같이 정의되어 있다.

$$\mathrm{Exp}(-\delta\boldsymbol{\phi}_{ij}) \doteq \Pi_{k=i}^{j-1}\mathrm{Exp}\Big(-\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^\intercal \mathbf{J}_r^k \boldsymbol{\eta}_k^{gd}\Delta t\Big) \tag{44}$$

양변에 logarithm mapping $\mathrm{Log}(\cdot)$을 취하면 다음과 같다.

$$\delta\boldsymbol{\phi}_{ij} = -\mathrm{Log}\Big(\Pi_{k=i}^{j-1}\mathrm{Exp}\Big(-\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^\intercal \mathbf{J}_r^k \boldsymbol{\eta}_k^{gd}\Delta t\Big)\Big) \tag{45}$$

우측항에 logarithm mapping의 1차 근사를 적용하면 다음과 같다. 이 때, $\boldsymbol{\eta}_k^{gd}$와 $\delta\boldsymbol{\phi}_{ij}$는 충분히 작은 값이기 때문에 오른쪽 자코비안(right jacobian) $\mathbf{J}_r$은 $\mathbf{I}$에 수렴한다.

$$\delta\boldsymbol{\phi}_{ij} \simeq \sum_{k=i}^{j-1}\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^\intercal \mathbf{J}_r^k \boldsymbol{\eta}_k^{gd}\Delta t \tag{46}$$

- $\mathrm{Log}\Big(\mathrm{Exp}(\boldsymbol{\phi})\mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\phi})\Big) \approx \boldsymbol{\phi} + \mathbf{J}_r^{-1}(\boldsymbol{\phi})\delta\boldsymbol{\phi}$ 근사를 적용하였다

1차 근사항까지만 고려하면 상대 회전량에 대한 노이즈 $\delta\boldsymbol{\phi}_{ij}$는 평균이 0인 가우시안 노이즈 $\boldsymbol{\eta}_k^{gd}$의 선형 결합(linear combination)이므로 역시 평균이 0인 가우시안 분포를 지닌다. 이러한 성질이 좋은 이유는 회전에 대한 측정값 (42)이 정확히 (상태+노이즈) 꼴이 되기 때문이다. ($\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\mathrm{Exp}(\epsilon)$)

상대 회전량에 대한 노이즈를 위와 같이 정리하면 속도, 위치에 대한 노이즈 $\delta\mathbf{v}_{ij}, \delta\mathbf{p}_{ij}$는 이해하기 수월해진다. $\delta\mathbf{v}_{ij}, \delta\mathbf{p}_{ij}$ 식을 보면 $\boldsymbol{\eta}_k^{ad}$와 $\delta\boldsymbol{\phi}_{ij}$의 선형 결합으로 구성되어 있기 때문에 역시 평균이 0인 가우시안 분포가 된다.

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{v}_{ij} &\simeq \sum_{k=i}^{j-1}\Big[-\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}(\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_i^a)^\wedge\delta\boldsymbol{\phi}_{ik}\Delta t + \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}\boldsymbol{\eta}_k^{ad}\Delta t\Big] \\
\delta\mathbf{p}_{ij} &\simeq \sum_{k=i}^{j-1}\Big[\delta\mathbf{v}_{ik}\Delta t - \frac{1}{2}\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}(\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_i^a)^\wedge\delta\boldsymbol{\phi}_{ik}\Delta t^2 + \frac{1}{2}\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}\boldsymbol{\eta}_k^{ad}\Delta t^2\Big]
\end{aligned} \tag{47}$$

- 이러한 근사는 고차항을 제외한 1차 근사까지만 유효하다

(46), (47) 식을 보면 **preintegration 노이즈 η_{ij}^{Δ}는 IMU 측정 노이즈 $\eta_k^d \doteq [\eta_k^{ad}, \eta_k^{gd}],\ k = 1, \cdots, j-1$의 선형 함수(linear function)으로 이루어져 있다고 볼 수 있다.** 이는 IMU 데이터시트로부터 얻은 $\boldsymbol{\eta}_k^d$의 공분산 값을 사용하여 선형 전파(linear propagation)을 통해 $\boldsymbol{\eta}_{ij}^{\Delta}$를 구할 수 있다는 것을 의미한다. 이러한 preintegrated 공분산을 $\boldsymbol{\Sigma}_{ij}$라고 부른다. Appendix IX-A를 보면 $\boldsymbol{\Sigma}_{ij}$를 계산하는 방법에 대해 자세히 설명한다. 이런 방법을 통해 새로운 IMU 측정값이 들어올 때마다 $\boldsymbol{\Sigma}_{ij}$를 매 번 새로 계산할 필요없이 이전 상태로부터 반복적(iterative)으로 상태를 업데이트할 수 있다.

5.3 Incorporating bias updates

이전 섹션에서 preintegrationd을 수행하는 동안의 bias $\{\bar{\mathbf{b}}_i^a, \bar{\mathbf{b}}_i^g\}$는 값을 이미 알고 있으며 변하지 않는다고 설명하였다. **하지만 대부분의 경우 최적화를 하는 동안 bias 추정값은 작게 나마 δb만큼 변한다.** 한가지 방법은 bias가

바뀔 때마다 preintegration 결과를 처음부터 다시 적분하는 것이다. 그러나 이는 계산 비용이 크므로 비효율적이다. 대신, bias를 $\mathbf{b} \leftarrow \bar{\mathbf{b}} + \delta\mathbf{b}$로 업데이트한다고 하면 다음과 같이 1차 선형 전개로 preintegration 측정값을 빠르게 갱신할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}(\mathbf{b}_i^g) &\simeq \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}(\bar{\mathbf{b}}_i^g)\mathrm{Exp}\Big(\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}^g\Big) \\
\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}(\mathbf{b}_i^g, \mathbf{b}_i^a) &\simeq \Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}(\bar{\mathbf{b}}_i^g, \bar{\mathbf{b}}_i^a) + \frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}_i^g + \frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^a}\delta\mathbf{b}_i^a \\
\Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij}(\mathbf{b}_i^g, \mathbf{b}_i^a) &\simeq \Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij}(\bar{\mathbf{b}}_i^g, \bar{\mathbf{b}}_i^a) + \frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}_i^g + \frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^a}\delta\mathbf{b}_i^a
\end{aligned} \tag{48}$$

위 갱신 과정은 SO(3)에서 바로 동작한다(회전식에 $\mathrm{Exp}(\cdot)$가 있는 이유). 자코비안 행렬 $\{\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}, \frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}, \cdots\}$은 preintegration 시점의 bias $\bar{\mathbf{b}}$에서 계산한 값이며 bias 값이 변함에 따라 측정값이 얼마나 변하는지를 설명한다. 이 자코비안 행렬들은 상수로 간주되며 preintegration 중 미리 계산해둘 수 있다.이 자코비안들의 유도는 VI-A 섹션에서 썼던 (큰 값 + 작은 섭동) 전개와 거의 동일하며 Appendix IX-B에 자세히 설명되어 있다.

5.4 Preintegrated IMU factors

(42)의 preintegration 측정 모델과 1차 근사에서 측정 노이즈가 평균이 0이고 공분산이 $\mathbf{\Sigma}_{ij}$인 가우시안 분포를 따른다는 점을 사용하면 residual $\mathbf{r}_{\mathcal{I}_{ij}} \doteq [\mathbf{r}^\intercal_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}, \mathbf{r}^\intercal_{\Delta\mathbf{v}_{ij}}, \mathbf{r}^\intercal_{\Delta\mathbf{p}_{ij}}]^\intercal \in \mathbb{R}^9$를 다음과 같이 쉽게 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}} &\doteq \mathrm{Log}\Big(\Big(\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}(\bar{\mathbf{b}}_i^g)\mathrm{Exp}\Big(\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}^g\Big)\Big)^\intercal \mathbf{R}_i^\intercal\mathbf{R}_j\Big) \\
\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{v}_{ij}} &\doteq \mathbf{R}_i^\intercal(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g}\Delta t_{ij}) - \Big[\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}(\bar{\mathbf{b}}_i^g, \bar{\mathbf{b}}_i^a) + \frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}^g + \frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^a}\delta\mathbf{b}^a\Big] \\
\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{p}_{ij}} &\doteq \mathbf{R}_i^\intercal(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i - \mathbf{v}_i\Delta t_{ij} - \frac{1}{2}\mathbf{g}\Delta t_{ij}^2) - \Big[\Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij}(\bar{\mathbf{b}}_i^g, \bar{\mathbf{b}}_i^a) + \frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g}\delta\mathbf{b}^g + \frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^a}\delta\mathbf{b}^a\Big]
\end{aligned} \tag{49}$$

- 위 식에는 (48)에서 설명한 bias 갱신도 포함되어 있다

[2.3] 섹션에서 설명한 "lift-solve-retract" 방법론에 따르면 매 가우스-뉴턴 반복마다 (49)의 파라미터를 변경(re-parameterized)해야 한다. 여기서 re-parameterization이란 기존의 비선형 절대 변수 대신 선형의 국소 증분량으로 문제를 다시 쓰는 것을 말한다. 예를 들어, 회전 $\mathbf{R} \in SO(3)$은 비선형 공간에 존재하므로 $\mathbf{R} \rightarrow \boldsymbol{\theta}$와 같이 선형 공간의 변수로 바꾸는 작업을 말한다 ($\mathbf{R} \approx \mathbf{R}_k\mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\theta})$). 나머지 변수도 마찬가지로 국소 증분량으로 변경한다 ($\mathbf{v} \approx \mathbf{v}_k + \delta\mathbf{v}, \ \mathbf{p} \approx \mathbf{p}_k + \delta\mathbf{p}, \ \mathbf{b} \approx \mathbf{b}_k + \delta\mathbf{b}$).

그 다음 "solve" 단계에서는 현재 추정값 주변에서 이 비용 함수를 선형화(linearize)해야 한다. 선형화를 수월하게 하려면 위 residual들에 대한 자코비안의 해석적 표현을 미리 구해두는 것이 편리하며, 이는 Appendix IX-C에서 유도하였다.

5.5 Bias model

IMU 모델 식 (29)를 소개할 때 bias는 시간에 따라 천천히 변하는 값이라고 설명하였다. 따라서 우리는 bias를 브라운 운동(brownian motion)으로 모델링할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{b}}^g(t) &= \boldsymbol{\eta}^{bg}, \\
\dot{\mathbf{b}}^a(t) &= \boldsymbol{\eta}^{ba}
\end{aligned} \tag{50}$$

연속된 두 키프레임 i와 j 사이의 구간 $[t_i, t_j]$에서 (50)을 적분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_j^g &= \mathbf{b}_i^g + \boldsymbol{\eta}^{bgd} \\
\mathbf{b}_j^a &= \mathbf{b}_i^a + \boldsymbol{\eta}^{bad}
\end{aligned} \tag{51}$$

- $\mathbf{b}_i^g \doteq \mathbf{b}^g(t_i), \ \mathbf{b}_i^a \doteq \mathbf{b}^a(t_i)$로 단순화

$\boldsymbol{\eta}^{bgd}, \boldsymbol{\eta}^{bad}$는 bias 노이즈의 이산화(discrete) 버전으로써 평균이 0이고 공분산이 각각 $\boldsymbol{\Sigma}^{bgd} \doteq \Delta t_{ij}\mathrm{Cov}(\boldsymbol{\eta}^{bg}),\ \boldsymbol{\Sigma}^{bad} \doteq \Delta t_{ij}\mathrm{Cov}(\boldsymbol{\eta}^{ba})$이다.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}^{bgd} &\sim \mathcal{N}(0, \boldsymbol{\Sigma}^{bgd}) \\ \boldsymbol{\eta}^{bad} &\sim \mathcal{N}(0, \boldsymbol{\Sigma}^{bad}) \end{aligned} \tag{52}$$

모델 (51)은 팩터 그래프(factor graph)에 쉽게 포함될 수 있다. 모든 연속 키프레임 쌍에 대해 논문 식(26)에 추가되는 가산항으로 넣으면 된다.

$$\|\mathbf{r}_{\mathbf{b}_{ij}}\|^2 \doteq \|\mathbf{b}^g_j - \mathbf{b}^g_i\|^2_{\boldsymbol{\Sigma}^{bgd}} + \|\mathbf{b}^a_j - \mathbf{b}^a_i\|^2_{\boldsymbol{\Sigma}^{bad}} \tag{53}$$

6 Structureless vision factor

7 References

[1] Forster, Christian, et al. "On-manifold preintegration for real-time visual-inertial odometry." IEEE Transactions on Robotics 33.1 (2016): 1-21.

8 Revision log

- 1st: 2024-11-27
- 2nd: 2024-11-30
- 3rd: 2025-07-25 : Preintegrated IMU measurements 섹션 작성
- 4th: 2025-07-26 : Bias model 섹션까지 작성
- 5th: 2025-07-27 : Preliminaries 섹션 작성