



دانشگاه صنعتی شریف  
دانشکده مهندسی مکانیک

پایان نامه مقطع کارشناسی

عنوان  
**پیاده سازی روش ترک گسسته برای  
شبیه سازی جریان دوفازی در محیط  
متخلخل**

نگارش  
شایان هشیاری

استاد راهنما  
دکتر مهرداد تقی زاده منظری

خرداد ۱۳۹۴

## چکیده

در این رساله نحوه پیاده‌سازی یک روش عددی برای شبیه‌سازی جریان دوفازی در محیط متخلخل ناهمگن، ناهمسان و ترک‌دار به روش ترک گسسته بیان خواهد شد. از یک روش حجم محدود گره مرجع برای گسسته‌سازی و از روش IMPES جهت دیکوپل کردن دستگاه معادلات حاکم استفاده شده است. با فرض نازک بودن ترک‌ها نسبت به ماتریس مجاور از المان‌های یک‌بعدی برای مدل‌کردن ترک‌ها استفاده شده است که موجب افزایش راندمان کد محاسباتی می‌شود. در آخر سه مسئله از مراجع معتبر جهت بررسی صحت کد محاسباتی حل شده و پاسخ‌های به دست آمده با پاسخ‌های مراجع مقایسه شده‌اند.

**کلمات کلیدی:** محیط متخلخل، جریان دوفازی، روش ترک گسسته، روش حجم محدود

# فهرست مطالب

۱	مقدمه	۱
۱	۱.۱ انگیزه	۱
۲	۲.۱ هدف	۲
۳	۳.۱ مروری بر کارهای انجام شده	۳
۴	۴.۱ ساختار این رساله	۴
۵	۲ مدل ریاضی	۵
۵	۱.۲ محیط متخلخل	۵
۷	۲.۲ معادلات	۷
۷	۱.۲.۲ قانون پایستگی جرم	۷
۷	۲.۲.۲ قانون دارسی	۷
۸	۳.۲.۲ معادلات تکمیل کننده	۸
۸	۴.۲.۲ شکل تغییر یافته معادلات، مناسب برای شبیه سازی عددی	۸
۹	۳.۲ توابع تراوایی نسبی	۹
۱۰	۴.۲ توابع فشار موینگی	۱۰
۱۱	۵.۲ شرایط مرزی و اولیه	۱۱
۱۱	۱.۵.۲ شرط اولیه	۱۱
۱۱	۲.۵.۲ مرزهای خارجی	۱۱
۱۳	۳.۵.۲ مرزهای داخلی	۱۳
۱۷	۶.۲ مدل ترک گسسته	۱۷
۱۸	۳ روش عددی	۱۸
۱۸	۱.۳ بدون بعد سازی معادلات	۱۸
۱۹	۲.۳ مش مورد نیاز	۱۹
۱۹	۳.۳ معرفی نوتاسیون استفاده شده در روش عددی	۱۹
۲۲	۴.۳ روش IMPES	۲۲
۲۳	۵.۳ معادله حجم محدود	۲۳
۲۴	۱.۵.۳ معادله پتانسیل	۲۴
۲۵	۲.۵.۳ معادله اشباع	۲۵
۲۷	۶.۳ محاسبه ماتریس های محلی	۲۷
۲۷	۱.۶.۳ المان ترک	۲۷
۲۸	۲.۶.۳ المان ماتریس	۲۸
۳۴	۳.۶.۳ المان شرایط مرزی	۳۴
۳۷	۷.۳ انتخاب گام زمانی	۳۷
۳۷	۸.۳ جمع بندی	۳۷

۳۹	۴	مثال‌های عددی
۳۹	۱.۴	مسئله اوّل
۴۱	۲.۴	مسئله دوم
۴۳	۳.۴	مسئله سوم
۴۴	۴.۴	جمع‌بندی
۴۷	۵	نتیجه‌گیری و پیشنهادها
۴۹		کتاب‌نامه

# فهرست تصاویر

۶	شمانتیک حجم نماینده	۱.۲
۶	شمانتیک تغییرات خواص ماکروسکوپیک نسبت به شعاع حجم نماینده	۲.۲
۱۰	مثال‌هایی از منحنی‌های تراوایی نسبی	۳.۲
۱۰	منحنی‌های $J$ برای فشار مویینگی	۴.۲
۱۲	تقسیم مرز خارجی به نواحی مختلف برای اعمال شرایط مرزی	۵.۲
۱۳	دو ناحیه مجاور یکدیگر و مرز مشترک	۶.۲
۱۵	شمانتیک منحنی‌های فشار مویینگی برای دو محیط مجاور	۷.۲
۱۶	اشباع ناحیه برده بر حسب ناحیه ارباب	۸.۲
۱۶	تفاوت مقدار $S_{slave}$ محاسبه شده از طریق توابع $J$ قطع نشده و قطع شده	۹.۲
۱۷	مقایسه مش استفاده شده برای حالت‌های ترک-یک‌بعدی و ترک-دو‌بعدی	۱۰.۲
۱۹	مش مناسب برای شبیه‌سازی عددی	۱.۳
۲۰	مثالی از یک نود به نام $v_i$ و اجزای اطرافش	۲.۳
۲۷	المان ترک و نام‌گذاری‌های محلی	۳.۳
۲۹	المان‌های مثلث و چهارضلعی و المان‌های مرجع در فضای $\xi\eta$	۴.۳
۳۴	یک نود روی مرز هندسه	۵.۳
۴۰	هندسه و مش مسئله اوّل	۱.۴
۴۰	پروفیل اشباع روی خط $y = 0.5$ در $t = 1$ برای مسئله اوّل	۲.۴
۴۲	هندسه مسئله دوم	۳.۴
۴۲	خطوط اشباع ثابت در $t = 3500$ برای مسئله دوم	۴.۴
۴۵	هندسه و مش مسئله سوم	۵.۴
۴۵	منحنی آب تزریقی، نفت برداشتی برای مسئله سوم	۶.۴
۴۶	پروفیل اشباع آب در حالات مختلف برای مسئله سوم	۷.۴

# فهرست جداول

۶	مقایسه چند مدل جریان در محیط متخلخل از نظر فازها و اجزاء	۱.۲
۱۰	توابع تراوایی نسبی	۲.۲
۱۱	توابع $J$ برای فشار موینگی	۳.۲
۱۴	تابع $J^{-1}(RJ(S_{master}))$ برای مدل‌های متفاوت $J$	۴.۲
۳۰	مختصات نودهای اصلی، نقاط $V_i$ و بردارهای $\vec{\Delta}_i$ در فضای $\xi\eta$	۱.۳
۴۱	شرایط مرزی حاکم بر مسئله اول	۱.۴
۴۱	خواص سنگ و پارامترهای بی‌بعد برای مسئله اول	۲.۴
۴۳	شرایط مرزی حاکم بر مسئله دوم	۳.۴
۴۳	خواص سنگ و پارامترهای بی‌بعد برای مسئله دوم	۴.۴
۴۴	شرایط مرزی حاکم بر مسئله سوم	۵.۴
۴۴	خواص سنگ و پارامترهای بی‌بعد برای مسئله سوم	۶.۴

# فصل ۱

## مقدمه

### ۱.۱ انگیزه

در علوم مهندسی، شبیه‌سازی باعث کاهش هزینه‌ها و نوآوری در طراحی می‌شود. یکی از علوم مهندسی که دانش شبیه‌سازی به پیشرفت آن کمک می‌کند، جریان چندفازی در محیط متخلخل است. این علم در صنایع متعددی کاربرد دارد، از جمله: مدیریت آب‌های زیرزمینی، مهندسی مخزن و مهندسی ژئوتکنیک. برای مثال در زمینه آب‌های زیرزمینی انتخاب یک روش مناسب برای دفع زباله‌های شیمیایی به طوری که کمترین آسیب را به این منابع بزند، نیاز به شبیه‌سازی راهکارهای گوناگون دارد [۱]. در مهندسی ژئوتکنیک، با توجه به اینکه رفتار مکانیکی خاک با تغییر میزان اشباع<sup>۱</sup> فازهای مختلف در آن تغییر می‌کند، حل توزیع سیالات در خاک در شبیه‌سازی رفتار مکانیک سازه اهمیت پیدا می‌کند. اما کاربردی که در این رساله مورد توجه ماست، شبیه‌سازی جریان سیالات در مخازن هیدروکربنی است. چرا که مدیریت مناسب منابع هیدروکربنی در گرو پیش‌بینی مناسب توانایی تولید و انتخاب روش بهینه برای افزایش بازدهی منابع می‌باشد و یکی از روش‌های دستیابی به این مهم، شبیه‌سازی فرآیند استخراج نفت و جریان آن در مخزن می‌باشد.

با توجه به اینکه بخش عظیمی از درآمد کشورمان از صنعت نفت تأمین می‌شود، تحقیق و توسعه در این زمینه اهمیت زیادی پیدا می‌کند. این صنعت به دو بخش صنایع بالادستی و صنایع پایین‌دستی تقسیم می‌شود. مهندسی مخزن و شبیه‌سازی مخازن نفتی جزئی از صنایع بالادستی محسوب می‌شود. در این حیطه مخازن نفتی به دو دسته معمولی<sup>۲</sup> و نامعمول<sup>۳</sup> تقسیم می‌شوند. مخازن معمولی، رفتار قابل پیش‌بینی‌تری نسبت به مخازن نامعمول دارند. این مخازن فاقد ترک<sup>۴</sup> هستند و سنگ تشکیل‌دهنده آن‌ها از نظر خواص مهندسی نسبتاً همگن<sup>۵</sup> و همسان<sup>۶</sup> است. شبیه‌سازی مخازن نامعمول به دلیل وجود ترک‌ها، ناهمسانی و ناهمگنی شدید و ... فرآیند پیچیده‌تری می‌باشد. یکی از مثال‌های مخازن نامعمول، مخازن ترک‌دار طبیعی هستند. در این مخازن به دلیل حرکت‌های زمین‌ساختی، ترک‌های

<sup>۱</sup> Saturation

<sup>۲</sup> Conventional

<sup>۳</sup> Unconventional

<sup>۴</sup> Fracture

<sup>۵</sup> Homogenous

<sup>۶</sup> Isotropic

متعددی (از مقیاس‌های خیلی کوچک تا مقیاس‌های بزرگ) به وجود آمده‌اند. دسته مهم دیگری از مخازن نامعمول را مخازن شیل<sup>۷</sup> تشکیل می‌دهند. در این مخازن برای برداشت نفت و گاز باید به طور مصنوعی در اطراف چاه‌ها ترک ایجاد شود. در هر دو حالت ذکر شده مدل‌سازی ترک‌ها و تأثیر آن‌ها در فرآیندهای افزایش برداشت، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

مخازن ترک‌دار طبیعی بخش قابل توجهی از مخازن نفتی خاورمیانه را تشکیل می‌دهند [۲]. دقت در بررسی رفتار این مخازن می‌تواند به سود اقتصادی عظیمی منجر شود در حالی که عدم شناخت مناسب می‌تواند ضررهای هنگفتی را به بار آورد. برای مثال، در سال ۱۹۷۸ در میدان بیورریور<sup>۸</sup> در کانادا، تولید کم و غیر قابل پیش‌بینی بزرگترین میدان گازی ایالت بریتیش کلمبیا باعث تعجب بسیاری شد [۳]. بر خلاف آن، در سال ۱۹۵۱ در میدان نفتی مارالاپاز در ونزوئلا که دارای تخلخل ماتریس کمتر از ۳ درصد و نفوذپذیری در حدود یک دهم میلی داری بود، تولید روزانه ۲۵۰,۰۰۰ بشکه صورت می‌گرفت [۳]. اهمیت عظیم مدل‌سازی مخازن ترک‌دار طبیعی مشوق اصلی این پروژه می‌باشد.

## ۲.۱ هدف

روش‌های متعددی برای مدل‌سازی ترک‌ها وجود دارند که بسیاری از آن‌ها در [۴] عنوان شده‌اند. دو خانواده روش‌های متدوال روش‌های ترک گسسته<sup>۹</sup> و روش‌های ترک پیوسته<sup>۱۰</sup> می‌باشند. در روش‌های ترک پیوسته فرض می‌شود که محیط ترک و محیط ماتریس هر دو محیط‌هایی پیوسته هستند که در محیط متخلخل قرار گرفته‌اند و جریان سیال در هر دو محیط وجود دارد، به علاوه فرض می‌شود که این دو محیط سیال را با یکدیگر نیز مبادله می‌کنند. در روش ترک گسسته مدل کردن ناهمسانی و ناهمگنی خواص در محیط متخلخل اهمیت خیلی بیشتری نسبت به حالت قبلی دارد. زمانی که این ناهمگنی و ناهمسانی مدل شود ترک چیزی جز قسمتی از محیط متخلخل با خواص متفاوت نخواهد بود. معمولاً با فرض اینکه متغیرها در ضخامت ترک تغییر نمی‌کنند (به دلیل ضخامت خیلی کم نسبت به ماتریس) می‌توان روش‌های عددی را پایدارتر و سریعتر کرد. با توجه به این مطلب اهداف این پروژه به شرح زیر هستند.

۱. ساخت یک برنامه محاسباتی برای شبیه‌سازی جریان دوفاز غیرامتزاجی<sup>۱۱</sup> و تراکم ناپذیر، با ویژگی‌های:

- حل مسائل در هندسه‌های یک و دوبعدی.
- استفاده از یک روش حجم محدود<sup>۱۲</sup> بر روی شبکه محاسباتی بدون سازمان<sup>۱۳</sup>.
- استفاده از روش IMPES برای خطی سازی معادلات.
- مدل‌سازی ناهمگنی و ناهمسانی خواص سنگ و خواص سیالات.

<sup>۷</sup>Shale

<sup>۸</sup>Beaver River

<sup>۹</sup>Discrete Fracture

<sup>۱۰</sup>Continuum Fracture

<sup>۱۱</sup>Immiscible

<sup>۱۲</sup>Cell Centered Finite Volume

<sup>۱۳</sup>Unstructured Grid



- قابلیت مدل کردن ترک‌ها با استفاده از المان‌های دوبعدی<sup>۱۴</sup> و المان‌های یک بعدی
- مدل کردن شرایط مرزی مختلف.

۲. بررسی صحت<sup>۱۵</sup> برنامه تولید شده.

در این پروژه سعی شده است که ویژگی‌های برنامه ساخته شده و مدل سیالاتی استفاده شده در عین سادگی پرکاربرد نیز باشند.

## ۳.۱ مروری بر کارهای انجام شده

برنامه‌ای که باید در این پروژه ساخته شود، توسط محققان متعددی به همین روش، روش‌های مشابه و البته روش‌های متفاوتی ساخته شده است. در این قسمت تعدادی از این مقالات را که در انجام این پروژه از آن‌ها کمک گرفته‌ایم و یا اینکه ارتباط نزدیکی با این پروژه دارند، نام خواهیم برد.

دو مقاله [۵] و [۶] از اولین تلاش‌ها برای پیاده‌سازی روش ترک گسسته به شمار می‌روند. در این مقالات جریان سیال تک‌فاز به همراه انتقال حرارت و انتقال محلول در محیط متخلخل ترک‌دار، به روش گالرکین<sup>۱۶</sup> مدل‌سازی شده است. کریمی فرد و فیروزآبادی [۷] همین روش را برای شبیه‌سازی جریان دوفازی غیرامتزاجی تعمیم دادند. روش گالرکین ساده به دلیل conservative نبودن، نمی‌تواند ناهمگنی و ناهمسانی شدید خواص سیال و سنگ را به درستی مدل کند و نسبت به روش‌هایی که در ادامه بیان خواهیم کرد از مقاومت<sup>۱۷</sup> کمتری برخوردار است.

بستیان در [۸، ۱] از یک روش حجم محدود گره مرجع<sup>۱۸</sup> و فرمولاسیون‌های متعدد برای شبیه‌سازی جریان دوفازی در محیط متخلخل با ناهمگنی بالا استفاده کرد. گروه تحقیقاتی همین محقق متعاقباً امکان استفاده از المان‌های با بعد کمتر برای مدل‌سازی ترک‌ها را نیز به روش خود اضافه کردند [۹، ۱۰]. در تمامی این مقالات از روش‌های کاملاً ضمنی<sup>۱۹</sup> برای خطی‌سازی معادلات استفاده شده است. مونتیگودو و فیروزآبادی [۱۱، ۱۲] روشی مشابه با همان قابلیت‌ها را پیاده‌سازی کردند. آن‌ها برخلاف گروه قبلی از روش IMPES برای خطی‌سازی معادلات استفاده کردند. آن‌ها در ادامه از روش کاملاً ضمنی با فرمولاسیون متفاوتی نسبت به گروه اول برای خطی‌سازی معادلات استفاده کردند و این دو روش را با یکدیگر مقایسه نمودند [۱۳، ۱۴]. روش استفاده شده در این پروژه نیز مشابه روش‌های دو گروه نام‌برده می‌باشد. در طول این پروژه دو اشکال قابل توجه در این روش یافت شده‌اند. اول این که روش ما قادر نیست که ترک‌هایی که جلوی جبهه جریان را می‌گیرند مدل کند. اشکال دیگر این است که در این روش با اینکه دو متغیر اشباع و فشار با دقت خوبی محاسبه می‌شوند، متغیرهای شار دقت کمتری دارند. با وجود این کاهش دقت، پاسخ‌های حاصل برای اهداف پروژه کنونی کفایت می‌کنند. کریمی فرد و عزیز [۱۵]، روش حجم محدود سلول مرجعی<sup>۲۰</sup> را برای روش ترک گسسته طراحی کردند که از روش‌های گره مرجع ذکر شده ساده‌تر بود. به علاوه امکان مدل کردن ترک‌هایی که

<sup>۱۴</sup>Fine Mesh Solvers

<sup>۱۵</sup>Verification

<sup>۱۶</sup>Upwinded Galerkin

<sup>۱۷</sup>Robustness

<sup>۱۸</sup>Vertex Centered

<sup>۱۹</sup>Fully Implicit

<sup>۲۰</sup>Cell Centered

مانع جریان هستند را داشت. اشکال این روش این بود که از یک سلول محاسباتی دو نقطه‌ای<sup>۲۱</sup> برای محاسبه شار استفاده می‌کرد و این امر باعث می‌شد که این روش نتواند ناهمسانگردی تراوایی مطلق<sup>۲۲</sup> را مدل کند و فقط برای ماتریس‌های همسانگرد مناسب باشد. آواتسمارک و همکاران و ادواردز و همکاران روش‌های حجم محدود خاص خود را برای شبیه‌سازی محیط بدون ترک طراحی کرده‌اند [۱۶، ۱۷]. این روش‌ها اخیراً برای مدل‌کردن ترک‌های گسسته تعمیم داده شده‌اند. ادعا شده است که این روش جدید هر دو مشکل عنوان شده برای روش ما را حل خواهند کرد [۱۸].

دسته‌ی دیگری از روش‌ها که برای شبیه‌سازی جریان چندفازی در محیط متخلخل به کار می‌روند و دقت بالایی در محاسبه شار دارند، روش‌های ترکیبی هستند. در این روش‌ها که معمولاً به کمک روش IMPES خطی می‌شوند، معادله فشار به کمک روش المان محدود ترکیبی<sup>۲۳</sup> و معادله اشباع به کمک یک روش conservative مثل حجم محدود [۱۹] یا گالرکین گسسته<sup>۲۴</sup> [۲۰] حل می‌شوند. این روش‌ها نیز برای مدل‌سازی ترک‌های گسسته تعمیم داده شده‌اند [۲۱]. تنها عیبی که می‌توان به این روش‌ها گرفت این است که نسبت به روش‌های قبلی بسیار پیچیده‌تر هستند و پیاده‌سازی آن‌ها نیازمند تجربه بالا در زمینه روش‌های المان محدود است.

## ۴.۱ ساختار این رساله

مراحل زیر در این رساله دنبال خواهند شد:

- ابتدا در فصل ۲ خواص مهم سیالات و سنگ‌ها از جمله فشار موینگی بیان خواهند شد. سپس معادلات حاکم بر سیستم و شرایط مرزی معرفی می‌شوند.
- در فصل ۳ روش عددی برای حل معادلات در دو بعد معرفی خواهد شد.
- در فصل ۴ مسائل متعددی از مراجع معتبر برای بررسی صحت برنامه حل خواهند شد.

<sup>۲۱</sup>Two Point Flux Approximation Scheme - TPFA

<sup>۲۲</sup>Absolute Permeability

<sup>۲۳</sup>Mixed Finite Element

<sup>۲۴</sup>Discrete Galerkin

## فصل ۲

# مدل ریاضی

روش‌های متعددی برای مدل‌کردن جریان سیالات در محیط متخلخل وجود دارند. مدل پیچیده‌تر معمولاً منجر به جواب‌های دقیق‌تری می‌شود، اما پیاده‌سازی و حل عددی آن دشوارتر خواهد بود. به علاوه مدل‌های پیچیده نیاز به اندازه‌گیری پارامترهای تجربی بیشتری دارند که ممکن است اندازه‌گیری آن‌ها همیشه عملی نباشد. لذا در انتخاب مدل مناسب باید به همه این عوامل توجه کرد. همانطور که در بخش ۱ عنوان شد، در این پروژه از مدل جریان دوفازی غیرقابل امتزاج و تراکم‌ناپذیر استفاده خواهیم کرد. در این بخش ابتدا مفاهیم کلی استفاده شده در این مدل معرفی خواهند شد. در ادامه نحوه مدل‌سازی ترک‌ها به روش گسسته بیان می‌شوند. لازم به ذکر است که مطالب این فصل مگر در مواردی خاص که به صورت صریح اشاره شده‌اند، از [۱، ۲۲] انتخاب شده‌اند.

### ۱.۲ محیط متخلخل

محیط متخلخل، جسمی است که از یک جامد تکه‌تکه به نام ماتریس و فضای خالی تشکیل شده است. فضای خالی توسط یک یا چند سیال پر می‌شود. خاک، سنگ‌های آهکی، نان، ریه و کلیه‌ها همگی نوعی محیط متخلخل محسوب می‌شوند. بدیهتاً محیط متخلخل مورد نظر در این پروژه سنگ مخازن نفتی می‌باشد. در محیط متخلخل فاز<sup>۱</sup> و جزء<sup>۲</sup> دو تعریف اساسی محسوب می‌شوند. فاز قسمتی از سیستم است که با مرز مشخصی از دیگر قسمت‌ها جدا شده است. برای مثال آب، روغن و ماتریس می‌توانند هر کدام یک فاز را تشکیل دهند در حالی که آب و نمک حل شده در آن فقط یک فاز هستند. جزء قسمتی از یک فاز است که ترکیب شیمیایی متمایزی نسبت به دیگر قسمت‌های آن فاز داشته باشد. لذا مثال آب و نمک عنوان شده یک فاز و دو جزء خواهد بود. لازم به ذکر است که در یک مدل خاص برای ساده‌سازی امکان دارد که وجود چندین جزء داخل یک فاز با یک جزء معادل مدل شود. دو فاز قابل امتزاج هستند در صورتی که ماده بتواند بین مرز آن‌ها تبادل شود. چند مدل استفاده شده برای جریان در محیط متخلخل با توجه به تعاریف بالا در جدول ۱.۲ دسته‌بندی شده‌اند (فاز سنگ در نظر نگرفته نشده است).

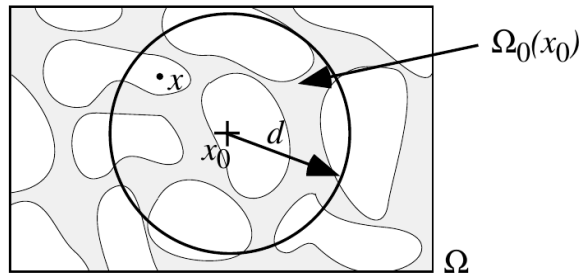
محیط پیوسته می‌تواند در مقیاس‌های متفاوتی مطالعه شود. حالت پرکاربردی که در شبیه‌سازی

<sup>۱</sup>Phase

<sup>۲</sup>Component

جدول ۱.۲: مقایسه چند مدل جریان در محیط متخلخل از نظر فازها و اجزاء

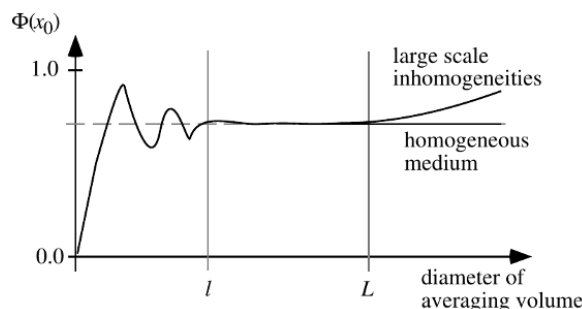
ردیف	نام مدل	مثالی برای فازها	اجزاء حاضر
۱	تک فاز چندجزء	برای مثال آب	انواع رسوبات و آب
۲	دوفاز بدون امتزاج	آب و روغن	آب و روغن
۳	نفت سیاه	آب، نفت و گاز	آب و نفت گاز (یک جزء)
۴	ترکیبی	آب، نفت و گاز	آب، انواع هیدروکربن ها و گازهای دیگر



شکل ۱.۲: شماتیک حجم نماینده

مخازن نفتی استفاده می شود مقیاس ماکروسکوپی نام دارد. در این مقیاس ابعادی که با آن ها سر و کار داریم در حدود ده متر هستند.

برای تعریف خواصی مثل چگالی، لزجت و ... در مقیاس ماکروسکوپی، باید مقدار متناظر این خاصیت در یک حجم نماینده<sup>۳</sup> در اطراف هر نقطه متوسط گیری شود. در شکل ۱.۲ به صورت شماتیک حجم نماینده اطراف نقطه  $x_0$  با نام  $\Omega_0(x_0)$  و شعاع  $d_0$  نمایش داده شده است. در مقیاس ماکروسکوپی، نقطه ای مثل  $x_0$  نماینده تمام نقاط داخل  $\Omega_0(x_0)$  (مثلاً  $x$ ) خواهد بود. در صورتی که نحوه تغییرات خواص متوسط (برای مثال تخلخل  $\phi$ ) نسبت به شعاع حجم نماینده روندی مانند شکل ۲.۲ داشته باشد و خواص ماکروسکوپی به ازای بازه ای از شعاع ها تقریباً ثابت بمانند (برای مثال از  $l$  تا  $L$ )، با انتخاب شعاع حجم نماینده در این بازه می توان محیط متخلخل را از دیدگاه ماکروسکوپی مطالعه کرد. در ادامه قوانین استفاده شده برای مدلسازی جریان دوفازی غیرقابل امتزاج بیان می شوند.



شکل ۲.۲: شماتیک تغییرات خواص ماکروسکوپی نسبت به شعاع حجم نماینده

<sup>۳</sup>Representative Elementary Volume - REV

## ۲.۲ معادلات

### ۱.۲.۲ قانون پایستگی جرم

قانون پایستگی جرم برای هر یک از فازها در محیط متخلخل به صورت معادله (۱.۲) بیان می‌شود.

$$\frac{\partial(\phi \varrho_\alpha S_\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho_\alpha \vec{u}_\alpha) = \varrho_\alpha q_\alpha \quad \alpha = w, o \quad (1.2)$$

$\phi$  پارامتر تخلخل که به صورت میزان حجم خالی به حجم کل در نماینده حجم تعریف می‌شود. به طور کلی این پارامتر می‌تواند تابع فشار، دما، مکان و ... باشد. در این پروژه تخلخل را تابعی از مکان و به صورت قطعه قطعه ثابت<sup>۴</sup> در نظر می‌گیریم.  $S$  پارامتر اشباع است. در واقع اشباع هر فاز برابر است با نسبت میزان حجم آن فاز به کل حجم خالی در حجم نماینده.  $\varrho$  نماینده چگالی هر فاز است. در این پروژه فازها را تراکم ناپذیر فرض می‌کنیم لذا چگالی‌ها ثابت خواهند بود.  $t$  زمان.

$\vec{u}$  سرعت ماکروسکوپی هر فاز.

$q$  ترم‌های چشمه و چاه. در این پروژه از این ترم‌ها استفاده نخواهیم کرد.

$\alpha$  نماینده هر فاز است. در این پروژه فاز آب را با  $w$  و فاز نفت را با  $o$  نمایش می‌دهیم.

### ۲.۲.۲ قانون دارسی

در مدل‌سازی در مقیاس ماکروسکوپی به جای استفاده از قانون پایستگی اندازه حرکت خطی از قانون دارسی استفاده می‌شود. این قانون زمانی که عدد رینولدز کوچک‌تر از یک باشد معتبر است و برای جریان دوفازی به صورت معادله (۲.۲) بیان می‌شود.

$$\vec{u}_\alpha = -\frac{\mathbf{K} k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} \nabla \cdot (p_\alpha + \varrho_\alpha g h) \quad \alpha = w, o \quad (2.2)$$

$\mathbf{K}$  تانسور تراوایی مطلق. در بسیاری از حالات برای ساده‌سازی این ماتریس را قطری در نظر می‌گیرند، اما در این پروژه تمام درایه‌ها می‌توانند در این تانسور حاضر باشند (محیط ناهمسانگرد). در حالت کلی این تانسور می‌تواند تابع مکان، فشار و ... باشد. در این پروژه فرض می‌کنیم که این تانسور در مکان به صورت قطعه قطعه ثابت باشد.

$k_r$  تابع تراوایی نسبی که تابعی از اشباع هر یک از فازهاست. این پارامتر وابستگی تراوایی به اشباع را مدل می‌کند. در ادامه چند مورد از منحنی‌های این تابع را معرفی خواهیم کرد. معمولاً  $k_{r\alpha}/\mu_\alpha$  را با  $\lambda_\alpha$  نمایش می‌دهند و آن را ضریب تحرک<sup>۵</sup> می‌نامند.  $\mu$  لزجت هر فاز. در این پروژه فرض می‌شود که لزجت ثابت می‌ماند.

<sup>۴</sup>Peicewise Constant

<sup>۵</sup>Mobility

$p$  فشار ماکروسکوپیک هر فاز.

$g$  شتاب جاذبه.

$h$  ارتفاع نسبت به مبدا جاذبه. جهت شتاب جاذبه لزومی ندارد که در جهت محور عمودی بوده و می‌تواند دلخواه باشد.

### ۳.۲.۲ معادلات تکمیل کننده

با توجه به این که فضای خالی محیط متخلخل باید توسط دو فاز حاضر پر شود معادله (۳.۲) را خواهیم داشت.

$$S_w + S_o = 1 \quad (3.2)$$

معادله مهم دیگر فشار فازها را به یکدیگر مربوط می‌سازد. همانطور که می‌دانیم به دلیل وجود پدیده کشش سطحی لزومی ندارد که در معادله داری فشار فازها ( $p_o$  و  $p_w$ ) با یکدیگر برابر باشند و اختلاف آن‌ها فشار موینگی ( $p_c$ ) نامیده می‌شود. در حالت میکروسکوپیک فشار موینگی تابع عوامل متعددی از جمله کشش سطحی، انحنای مرز مشترک دو سیال و ... می‌باشد. اما در حالت ماکروسکوپیک فشار موینگی را تابعی از مکان و اشباع در نظر می‌گیرند:  $p_c = p_c(S_w, \vec{X})$ . در این پروژه برای ساده‌تر شدن برنامه‌نویسی فرآیند حل عددی تابعیت فشار موینگی نسبت به زمان و مکان را جدا از هم در نظر می‌گیریم، یعنی:  $p_c(S_w, \vec{X}) = P_d(\vec{X})J(S_w)$ . به علاوه فرض می‌کنیم که ضریب  $P_d$  به صورت قطعه قطعه ثابت باشد. لذا معادله (۴.۲) آخرین معادله مورد نیاز برای مدل کردن جریان دوفازی در محیط متخلخل می‌باشد. در ادامه چند مورد از منحنی‌های  $J$  را معرفی خواهیم کرد.

$$p_o - p_w = P_d(\vec{X})J(S_w) \quad (4.2)$$

معادلات (۱.۲)–(۴.۲) معادلات لازم برای حل مجهولات  $S_w, S_o, p_o, p_w, \vec{u}_w$  و  $\vec{u}_o$  را تشکیل می‌دهند.

### ۴.۲.۲ شکل تغییر یافته معادلات، مناسب برای شبیه سازی عددی

در این قسمت که برگرفته از [۷، ۲۰، ۱۱] است، فرمی از معادلات که برای شبیه سازی عددی استفاده خواهیم کرد را معرفی می‌کنیم. در اولین قدم، برای ساده‌تر شدن مدلسازی جاذبه متغیرهای پتانسیل فاز آب، نفت و موینگی را به صورت معادلات (۵.۲) و (۶.۲) تعریف می‌کنیم:

$$\varphi_\alpha = p_\alpha + \rho_\alpha gh \quad \alpha = w, o \quad (5.2)$$

$$\varphi_c = p_c + (\rho_o - \rho_w)gh \quad (6.2)$$

در ادامه با توجه به اینکه در هر ناحیه از محیط متخلخل امکان دارد آب هم‌زاد<sup>۶</sup> یا نفت مانده<sup>۷</sup>

<sup>۶</sup> Connate Water -  $S_{wc}$

<sup>۷</sup> Residual Oil -  $S_{or}$

وجود داشته باشد، برای مدل کردن آن‌ها اشباع نرمال شده را تعریف می‌کنیم:

$$S = \frac{S_w - S_{wc}}{1 - S_{or} - S_{wc}} \quad (۷.۲)$$

حال با ترکیب معادلات (۱.۲)–(۷.۲)، صفر قرار دادن ترم‌های  $q_\alpha$  و فرض تراکم‌ناپذیری به معادلات زیر می‌رسیم:

$$\nabla \cdot (\lambda \mathbf{K} \nabla \varphi_w + \lambda_o \mathbf{K} \nabla \varphi_c) = 0 \quad (۸.۲)$$

$$\phi \beta \frac{\partial S}{\partial t} - \nabla \cdot (\lambda_w \mathbf{K} \nabla \varphi_w) = 0 \quad (۹.۲)$$

به علاوه با ترکیب معادلات (۲.۲)، (۵.۲) و (۶.۲) سرعت کل و سرعت آب از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$u = -\lambda \mathbf{K} \nabla \varphi_w - \lambda_o \mathbf{K} \nabla \varphi_c \quad (۱۰.۲)$$

$$u_w = -\lambda_w \mathbf{K} \nabla \varphi_w \quad (۱۱.۲)$$

در این معادلات  $\beta$  برابر  $1 - S_{or} - S_{wc}$  و  $\lambda$  برابر  $\lambda_w + \lambda_o$  می‌باشند. هم‌اکنون معادلات (۸.۲) و (۹.۲) دو معادله را برای دو مجهول  $\varphi_w$  و  $S$  تشکیل می‌دهند و معادلات (۱۰.۲) و (۱۱.۲) سرعت‌ها را بر حسب دو متغیر  $\varphi_w$  و  $S$  محاسبه می‌کنند که برای اعمال شرایط مرزی لازم هستند. در این معادلات  $\varphi_c$  متغیر مستقلی نیست و از (۴.۲) و (۶.۲) به دست می‌آید.

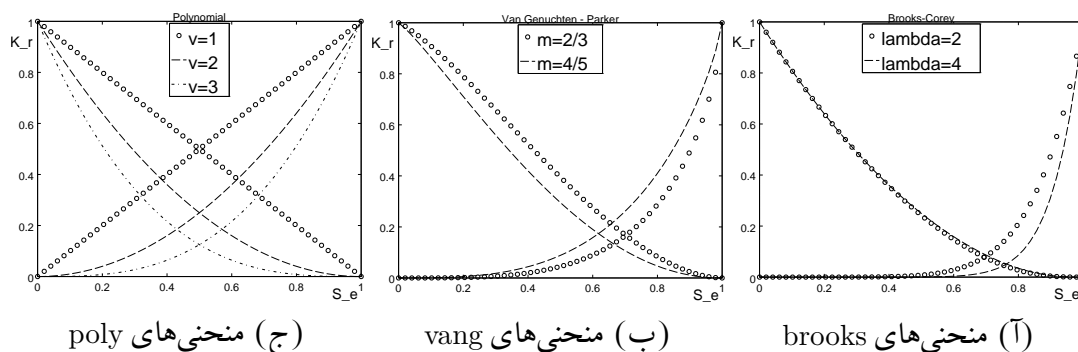
## ۳.۲ توابع تراوایی نسبی

در این قسمت تعدادی از توابعی که برای تراوایی نسبی پیشنهاد شده‌اند را معرفی خواهیم کرد. ویژگی مشترک تمام این منحنی‌ها این است که تراوایی نسبی هر فاز باید تابعی اکیداً صعودی از اشباع همان فاز باشد. با توجه به اینکه در هر ناحیه از محیط متخلخل امکان دارد آب هم‌زاد یا نفت مانده وجود داشته باشد، معمولاً این منحنی‌ها را بر حسب اشباع نرمال شده بیان می‌کنند.

منحنی‌های استفاده شده در این پروژه در جدول ۲.۲ نمایش داده شده‌اند. در این رساله برای اشاره به هر یک از آن‌ها از نام اختصاریشان استفاده خواهد شد. مدل Brooks در [۲۳] معرفی شده‌است. در این معادله  $\lambda$  پارامتری است که وابسته به نوع خاک است و باید عددی بزرگتر از یک باشد. مدل van Genuchten متعلق به یک محقق نمی‌باشد. قسمتی از آن در [۲۴] و قسمتی دیگر از آن در [۲۵] معرفی شده‌اند. در این معادله  $m$  پارامتری است که وابسته به نوع خاک است و باید عددی بین صفر تا یک باشد. منحنی‌های poly با وجود اینکه دقت کمی نسبت به دو منحنی دیگر دارند، بسیار ساده‌تر بوده و رفتار مشابهی را نسبت به آن‌ها نشان می‌دهند، لذا برای بررسی صحت کد محاسباتی مناسب می‌باشند. منحنی‌های poly در مراجع متعددی استفاده شده‌اند. اما شاید اولین آن‌ها [۲۶] باشد. مثال‌هایی از این منحنی‌ها در شکل ۳.۲ به ازای  $k_{rwo} = k_{roo} = 1$  نشان داده شده‌اند.

جدول ۲.۲: توابع تراوایی نسبی

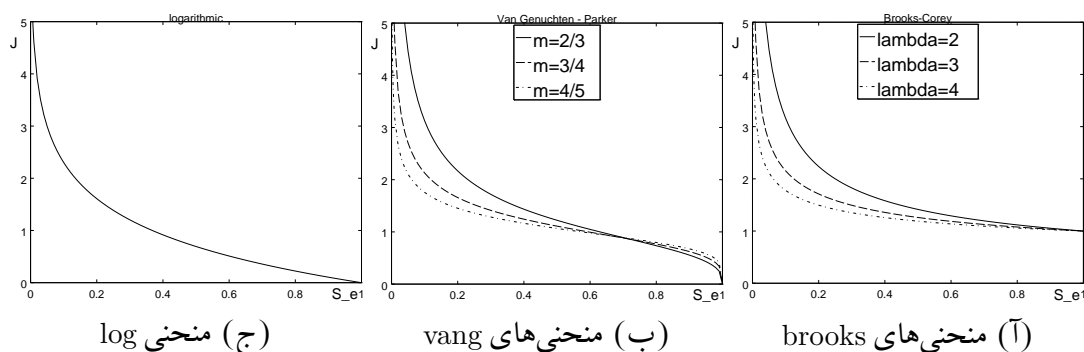
ردیف	نام اختصاری	$k_{rw}$	$k_{ro}$
۱	brooks	$k_{rw} S^{3+2\lambda}$	$k_{ro} (1-S)^2 (1-S^{1+2\lambda})$
۲	vang	$k_{rw} S^{\frac{1}{2}} (1 - (1 - S^{\frac{1}{m}})^m)^2$	$k_{ro} (1-S)^{\frac{1}{2}} (1 - S^{\frac{1}{m}})^{2m}$
۳	poly	$k_{rw} S^v$	$k_{ro} (1-S)^v$



شکل ۳.۲: مثال‌هایی از منحنی‌های تراوایی نسبی به ازای  $k_{rw} = k_{ro} = 1$

## ۴.۲ توابع فشار موینگی

در این قسمت توابع فشار موینگی  $J$  استفاده شده را بیان خواهیم کرد. این توابع در جدول ۳.۲ معرفی شده‌اند. در شکل ۴.۲ نیز منحنی آن‌ها رسم شده‌اند. اگر در این منحنی‌ها  $J(0) \neq 0$  به مقدار  $J(0)$  فشار ورودی<sup>۸</sup> می‌گویند. برای مثال منحنی brooks دارای فشار ورودی است.

شکل ۴.۲: منحنی‌های  $J$  برای فشار موینگی

همانطور که در شکل ۴.۲ مشاهده می‌کنید بیشتر منحنی‌های  $J$  در صفر به سمت بی‌نهایت می‌روند. با توجه به معادله (۸.۲) اگر از این منحنی‌ها برای تخمین فشار موینگی استفاده کنیم، به مشکل برخوردیم خورد. چرا که مقدار بی‌نهایت در این معادله ظاهر خواهد شد. در این پروژه برای رفع این مشکل بجای استفاده از منحنی‌های اصلی از منحنی‌های قطع شده<sup>۹</sup> که در معادله (۱۲.۲) معرفی شده‌اند استفاده می‌کنیم. منحنی‌های قطع شده در بازه  $[\epsilon, \infty]$  همان مقدار توابع عادی را دارند ولی

<sup>۸</sup>Entry Pressure

<sup>۹</sup> $J_{trunc}$



جدول ۳.۲: توابع  $J$  برای فشار موینگی

ردیف	نام اختصاری	$J(S)$	$J^{-1}(y)$
۱	brooks	$S^{-\frac{1}{\lambda}}$	$y^{-\lambda}$
۲	vang	$(S^{-\frac{1}{m}} - 1)^{1-m}$	$(1 + y^{\frac{1}{1-m}})^{-m}$
۳	log	$-\ln(S)$	$\exp(-y)$
۴	poly	$(1 - S)^w$	$1 - y^{1/w}$

در بازه  $[\epsilon, 0]$  مقدار ثابتی خواهند داشت. متغیر  $\epsilon$  به گونه‌ای انتخاب می‌شود که  $J_{trunc}(0)$  مقدار معقولی داشته باشد. این روش مطابق با مراجع [۱۱، ۷] می‌باشد.

$$J_{trunc}(S) = \begin{cases} J(\epsilon) & S < \epsilon \\ J(S) & S \geq \epsilon \end{cases} \quad (12.2)$$

البته راه‌های دیگری نیز برای رفع این مشکل وجود دارد. یکی از آن‌ها استفاده از فرمولاسیونی متفاوت اما معادل با معادلات (۸.۲)–(۱۱.۲) برای شبیه‌سازی عددی است. برای مثال در [۱] استفاده از فشار جهانی<sup>۱۰</sup> به جای فشار موینگی پیشنهاد شده‌است.

## ۵.۲ شرایط مرزی و اولیه

### ۱.۵.۲ شرط اولیه

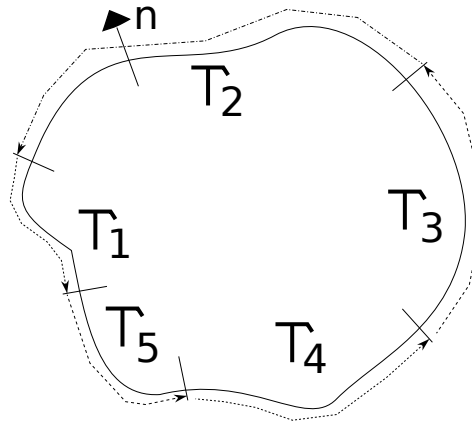
زمانی که فازها را تراکم‌ناپذیر فرض کنیم فقط نیاز به شرایط اولیه برای اشباع داریم. لذا شرط اولیه باید به صورت معادله (۱۳.۲) باشد.

$$S(\vec{X}, t = 0) = S_0(\vec{X}) \quad (13.2)$$

### ۲.۵.۲ مرزهای خارجی

برای حل معادلات (۹.۲)، (۸.۲) نیاز به اعمال شرایط مرزی مناسب برای مرزهای خارجی داریم. به این منظور مرز خارجی هندسه را مانند شکل ۵.۲ به نواحی مختلف تقسیم می‌کنیم و در ناحیه یک شرط برای متغیر  $\varphi_w$  و یک شرط برای متغیر  $S$  اعمال می‌کنیم. شروط استفاده شده باید توجیه فیزیکی داشته باشند، در غیر اینصورت امکان دارد که معادله جواب نداشته باشد. در معادله (۱۴.۲) شروطی که در این پروژه از آن‌ها استفاده کرده‌ایم آمده‌اند:

<sup>۱۰</sup> Global Pressure

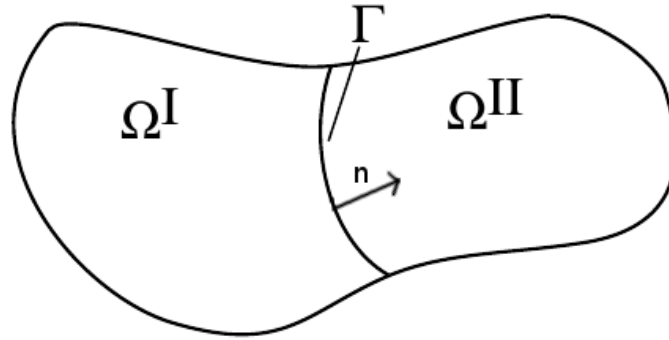


شکل ۵.۲: تقسیم مرز خارجی به نواحی مختلف برای اعمال شرایط مرزی.

$$\begin{aligned}
 u \cdot \vec{n} &= u_N(\vec{X}) & \vec{X} &\in \Gamma_{\varphi N} \\
 \varphi_w &= \varphi_D(\vec{X}) & \vec{X} &\in \Gamma_{\varphi D} \\
 \nabla p_c \cdot \vec{n} &= 0 & \vec{X} &\in \Gamma_{SN} \\
 S &= S_D(\vec{X}) & \vec{X} &\in \Gamma_{SD}
 \end{aligned} \tag{۱۴.۲}$$

$u_N$  مقدار سرعت تعیین شده کل برای شرط مرزی نیومن.  
 $\varphi_D$  مقدار پتانسیل فاز آب تعیین شده بر روی مرز دیریشله.  
 $S_D$  مقدار اشباع نرمال تعیین شده بر روی مرز دیریشله.  
 $\Gamma_{\varphi N}$  مرز نیومن برای متغیر پتانسیل آب. در مرزهایی که این نوع شرط مرزی بر آن‌ها اعمال می‌شود، مقدار کل شار عبوری (آب بعلاوه نفت) بر واحد سطح باید ثابت و برابر مقدار  $u_N$  باشد. این شرط مرزی برای مرزهایی که تزریق از آن‌ها انجام می‌شود مناسب است.  
 $\Gamma_{\varphi D}$  مرز دیریشله برای متغیر پتانسیل آب. در این نوع شرط مرزی مقدار  $\varphi_w$  باید ثابت و برابر  $\varphi_D$  باشد. این نوع شرط مرزی برای مرزهایی که برداشت از آن‌ها انجام می‌شود مناسب می‌باشد. دقت شود که اگر در مسئله‌ای این شرط برای هیچ‌کدام از مرزها وجود نداشته باشد، مسئله جواب نخواهد داشت.

$\Gamma_{SN}$  مرز نیومن برای متغیر اشباع نرمال. در این شرط مرزی گرادیان فشار موینگی نباید مؤلفه‌ای در راستای عمود بر مرز داشته باشد. در حالتی که جاذبه وجود نداشته باشد، این صرفاً به این معنی است که نسبت  $\frac{u_w}{u_o}$  در محل مرز برابر  $\frac{\lambda_w}{\lambda_o}$  می‌باشد. دقت کنید در حالتی که جاذبه وجود داشته باشد این شرط، شرطی قابل قبول از نظر فیزیکی خواهد بود، اما نمی‌توان آن را با شرط  $\nabla \varphi_c \cdot \vec{n} = 0$  جایگزین کرد. چرا که با استفاده از قاعده زنجیری و معادله (۶.۲) این شرط به این معنی خواهد بود که:  $\nabla S \cdot \vec{n} = \left( P_d \frac{\partial J(S)}{\partial S} \right)^{-1} (\rho_o - \rho_w) g \nabla h \cdot \vec{n}$  و این یعنی متغیر اشباع باید در راستای عمود بر مرز تغییر کند. این در حالی است که اگر جبهه آب به مرز نرسیده باشد نباید چنین اتفاقی رخ دهد و اشباع باید در همسایگی مرز صفر باشد. لذا این شرط از نظر فیزیکی قابل قبول نیست. شرط مرزی نیومن برای اشباع برای مرزهای برداشت مناسب است.  
 $\Gamma_{SD}$  مرز دیریشله برای متغیر اشباع نرمال. در این نوع شرط مرزی متغیر اشباع ثابت می‌ماند. این نوع شرط مرزی برای نواحی تزریق مناسب است.



شکل ۶.۲: دو ناحیه مجاور یکدیگر و مرز مشترک

یک شرط مرزی متداول که در شبیه‌سازی‌ها از آن استفاده خواهیم کرد، مرز نفوذناپذیر است. این نوع شرط مرزی ترکیب  $\Gamma_{SN}$  و  $\Gamma_{\varphi N}$  با مقدار  $u_N = 0$  می‌باشد. چون هیچ شاری از این مرز عبور نمی‌کند، اعمال آن در روش حجم محدود که در فصل ۳ به آن اشاره خواهیم کرد، معادل با در نظر نگرفتن آن است. نکته دیگر این است که روش عددی ما فقط قادر است مسائلی را مدل کند که در آن‌ها از بین دو ناحیه شرط مرزی که مجاور یکدیگر هستند حتماً یکی نفوذناپذیر باشد. برای مثال در شکل ۵.۲ اگر مرزهای  $\Gamma_2$  و  $\Gamma_4$  نفوذناپذیر نباشند،  $\Gamma_1$ ،  $\Gamma_3$  و  $\Gamma_5$  باید حتماً نفوذناپذیر باشند.

### ۳.۵.۲ مرزهای داخلی

همانطور که در هنگام معرفی معادله داری اشاره کردیم، خواص محیط متخلخل در این پروژه به صورت قطعه قطعه ثابت تغییر می‌کنند. هر قسمت از محیط متخلخل با خواص ثابت و متفاوت با دیگر قسمت‌ها را یک ناحیه می‌نامیم. در شکل ۶.۲ دو ناحیه مجاور  $\Omega^I$  و  $\Omega^{II}$  و مرز مشترک آن‌ها به نام  $\Gamma$  نمایش داده شده است. بنا به [۱، ۲۶] شرایط خاصی باید بین مرز هر دو ناحیه وجود داشته باشد. به صورت سرانگشتی می‌توان این شرایط را پیوستگی فشار و شار هر دو فاز روی مرزهای داخلی نامید. شروط مربوط به پیوستگی شارها و فشار فاز آب در معادله (۱۵.۲) نشان داده شده‌اند. این شرایط باید بر روی مرز  $\Gamma$  برقرار باشند. در این معادلات بالاوند  $I$  یا  $II$  به معنای حد مقدار ذکر شده روی مرز مشترک در طرف ناحیه  $\Omega^I$  یا  $\Omega^{II}$  است و  $\vec{n}$  بردار نرمال مرز مشترک است. همانطور که در فصل ۳ خواهید دید، برقرار کردن این شروط کار دشواری نخواهد بود و روش عددی استفاده شده در این پروژه، بدون نیاز به استفاده از تدابیر اضافی آن‌ها را برقرار خواهد کرد.

$$\vec{u}^I \cdot \vec{n} = \vec{u}^{II} \cdot \vec{n}, \quad \vec{u}_w^I \cdot \vec{n} = \vec{u}_w^{II} \cdot \vec{n}, \quad \varphi_w^I = \varphi_w^{II} \quad (15.2)$$

پیوستگی فشار فاز نفت در قالب پیوستگی فشار موینگی ظاهر خواهد شد. اما به دلیل وجود پدیده فشار ورودی در منحنی‌های فشار موینگی brooks امکان پیوستگی فشار موینگی برای بعضی از مقادیر اشباع در این منحنی وجود ندارد. به علاوه استفاده از منحنی‌های قطع شده نیز مشکل مشابهی را ایجاد می‌کند، لذا شرط مرزی مربوط به فشار موینگی وابسته به منحنی استفاده شده برای فشار موینگی خواهد بود. لذا این شرط را برای سه حالت مختلف بیان خواهیم کرد.

$$1. \quad \lim_{S \rightarrow 0} J(S) = 0 \text{ و } J(1) = 0 \text{ این حالت را cc می‌نامیم.}$$

جدول ۴.۲: تابع  $J^{-1}(RJ(S_{master}))$  برای مدل‌های متفاوت  $J$

ردیف	مدل	$J^{-1}(RJ(S_{master}))$
۱	brooks	$R^{-\lambda} S$
۲	vang	$\left[ R^{\frac{1}{1-m}} (S^{-\frac{1}{m}} - 1) + 1 \right]^{-m}$
۳	log	$S^R$
۴	poly	$1 - R^{\frac{1}{w}} (1 - S)$

۲.  $\lim_{S \rightarrow 0} J(S) \neq \infty$  و  $J(1) = 0$  این حالت را dc می‌نامیم.

۳.  $\lim_{S \rightarrow 0} J(S) = \infty$  و  $J(1) > 0$  این حالت را cd می‌نامیم.

در هر یکی از این حالات یکی از محیط‌ها ارباب<sup>۱۱</sup> و دیگری برده<sup>۱۲</sup> نام خواهد گرفت و اشباع ناحیه برده بر حسب ناحیه ارباب محاسبه خواهد شد. در حالتی نیز که در یک نقطه چند ناحیه با هم برخورد کنند باز یکی از آن‌ها ارباب خواهد بود و اشباع دیگر نواحی از اشباع این ناحیه به دست خواهد آمد.

### حالت cc

روش مدل‌کردن این حالت از [۱۲] برگرفته شده‌است. در این حالت فشار موینگی می‌تواند برای تمام مقادیر اشباع پیوسته باشد. فقط کافی است که رابطه (۱۶.۲) بین اشباع در دو طرف مرز برقرار باشد. به علاوه در این حالت انتخاب محیط‌های ارباب و برده اختیاری است.

$$P_d^{slave} J(S_{slave}) = P_d^{master} J(S_{master}) \Leftrightarrow \quad (16.2)$$

$$S_{slave} = J^{-1}(RJ(S_{master})) \quad R = \frac{P_d^{master}}{P_d^{slave}}$$

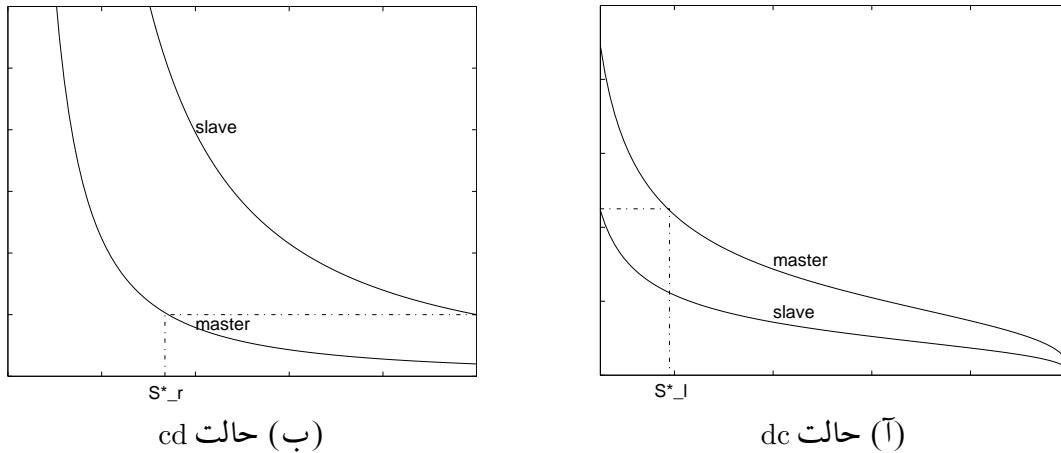
جدول ۱۶.۲ مقادیر تابع  $J^{-1}(RJ(S_{master}))$  را برای توابع  $J$  معرفی شده نشان می‌دهد. با اینکه در این جدول مقدار این تابع را برای تمامی توابع  $J$  محاسبه کرده‌ایم شرط (۱۶.۲) به عنوان شرط مرزی فقط برای مدل‌های log و vang صدق می‌کند چرا که فقط آن‌ها دارای شرایط cc می‌باشند. در شکل ۸.۲ می‌توانید مقدار  $S_{slave}$  بر حسب  $S_{master}$  را برای این مدل‌ها مشاهده کنید.

### حالت dc

در این حالت سعی می‌کنیم فرمولی که برای  $S_{slave}$  در حالت منحنی‌های قطع شده ارائه می‌دهیم، شباهت زیادی به حالت قطع نشده داشته باشد. به همین منظور یک منحنی قطع شده را مانند شکل ۷.۲آ در نظر بگیرید. برای این حالت ناحیه ارباب ناحیه‌ای است که فشار موینگی بیشتری دارد. مقدار  $S_l^*$  را همانند این شکل ۷.۲آ و فرمول (۱۷.۲) تعریف می‌کنیم.

<sup>۱۱</sup> Master

<sup>۱۲</sup> Slave



شکل ۷.۲: شماتیک منحنی‌های فشار موینگی برای دو محیط مجاور.

$$S_l^* = J^{-1}\left(\frac{1}{R}J(0)\right) \quad (۱۷.۲)$$

حال می‌توانیم  $S_{slave}$  را به صورت فرمول (۱۸.۲) تعیین کنیم:

$$S_{slave} = \begin{cases} J^{-1}(RJ(S_{master})) & S_{master} > S_l^* \\ 0 & S_{master} \leq S_l^* \end{cases} \quad (۱۸.۲)$$

در شکل ۹.۲ اختلاف  $S_{slave}$  محاسبه شده برای مدل‌های  $\log$  و  $\text{vang}$  از روش‌های قطع شده و قطع نشده قابل مشاهده است. همانطور که می‌بینید این اختلاف حداکثر به ۰/۰۱ می‌رسد و این نشانه خوبی برای تأیید روش معرفی شده است.

#### حالت cd

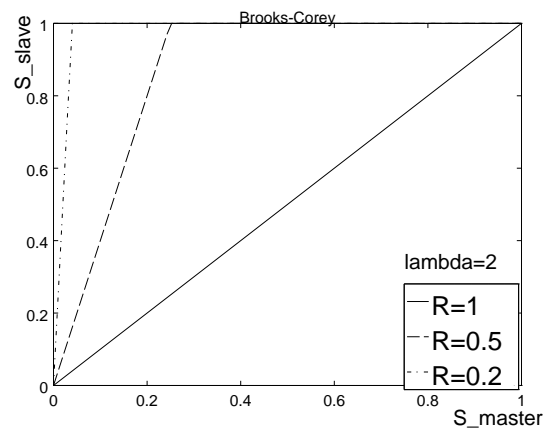
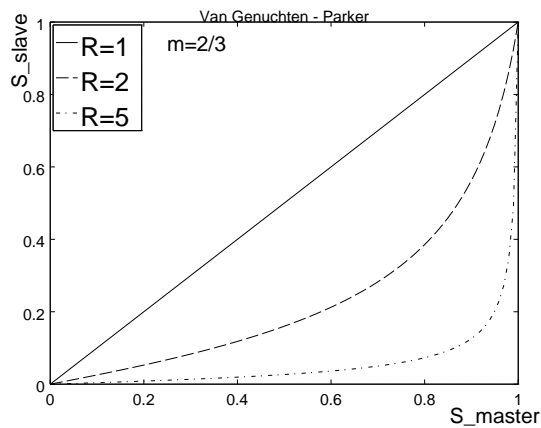
روش مدل کردن این حالت از [۱] برگرفته شده است. در این حالت ناحیه ارباب باید ناحیه‌ای انتخاب شود که کمترین فشار موینگی را دارد. مقدار  $S_r^*$  را مانند شکل ۷.۲ ب و فرمول (۱۹.۲) معرفی می‌کنیم.

$$S_r^* = J^{-1}\left(\frac{1}{R}J(1)\right) \quad (۱۹.۲)$$

حال می‌توانیم  $S_{slave}$  را به صورت فرمول (۱۷.۲) تعیین کنیم:

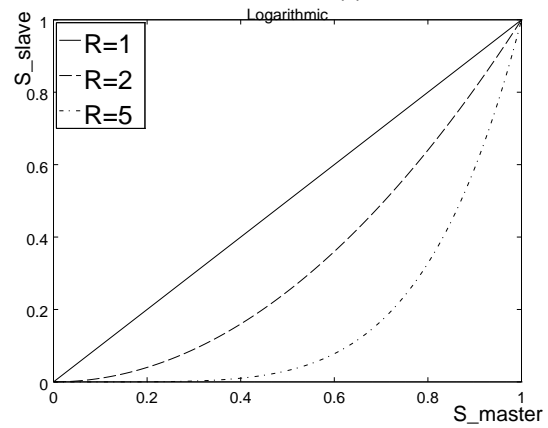
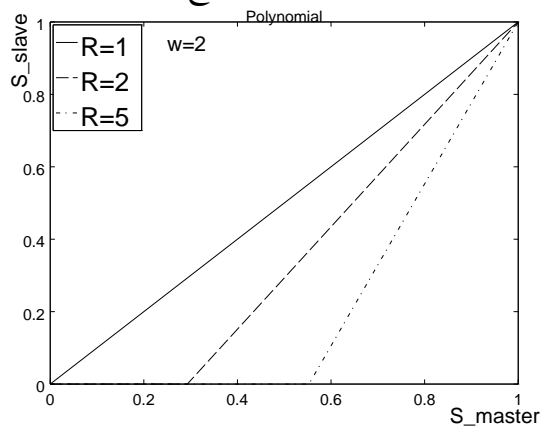
$$S_{slave} = \begin{cases} 1 & S_{master} > S_r^* \\ J^{-1}(RJ(S_{master})) & S_{master} \leq S_r^* \end{cases} \quad (۲۰.۲)$$

در شکل ۸.۲ منحنی  $S_{slave}$  را برای فشار موینگی مدل brooks مشاهده می‌کنید.



(ب) مدل vang قطع نشده

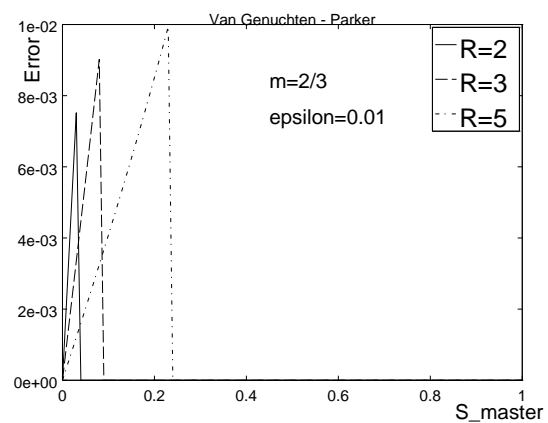
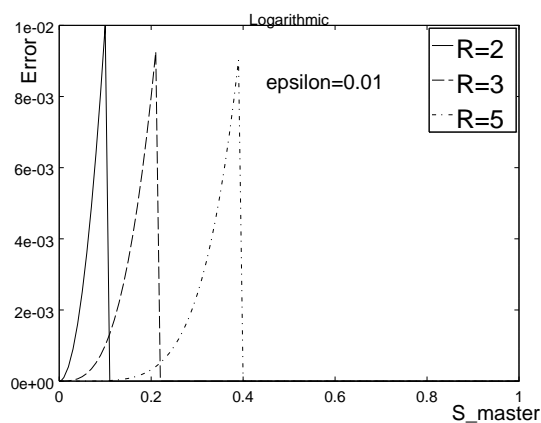
(آ) مدل brooks



(د) مدل poly

(ج) مدل log قطع نشده

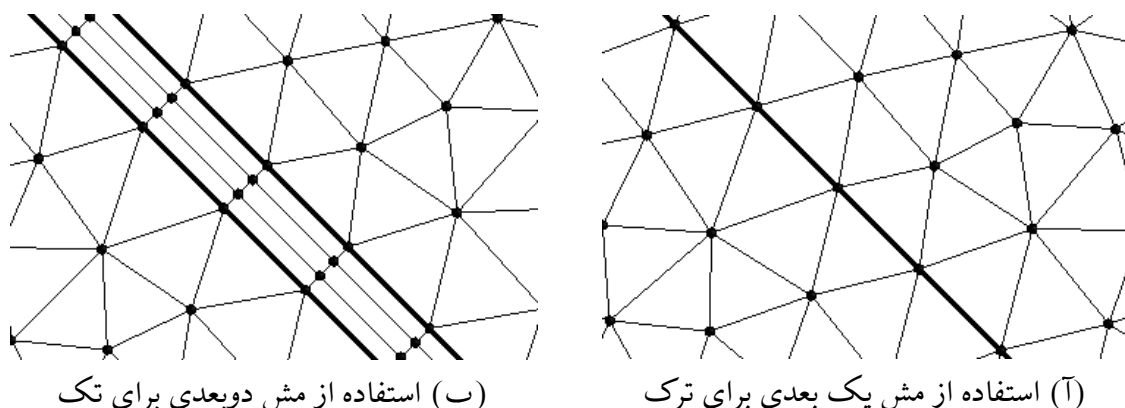
شکل ۸.۲: اشباع ناحیه برده بر حسب ناحیه ارباب برای مدل‌های مختلف تابع  $J$ .



(ب) مدل log

(آ) مدل vang

شکل ۹.۲: تفاوت مقدار  $S_{slave}$  محاسبه شده از طریق توابع  $J$  قطع نشده و قطع شده



شکل ۱۰.۲: مقایسه مش استفاده شده برای حالت‌های ترک-یک‌بعدی و ترک-دوبعدی

## ۶.۲ مدل ترک گسسته

برای مدل کردن ترک‌های موجود در یک محیط متخلخل به روش ترک گسسته صرفاً کافی است که هر ترک را یک ناحیه با خواص خاص خود در محیط متخلخل در نظر بگیریم. لذا در این روش مدل کردن ترک‌ها تفاوتی با مدل کردن دیگر نواحی ماتریس محیط متخلخل ندارد. با توجه به اینکه ضخامت ترک‌ها بسیار کم است، دو روش برای مدل کردن آن‌ها وجود دارد. در روش اول شبکه محاسباتی داخل ترک با شبکه محاسباتی ماتریس هم‌بعد است. این روش هزینه محاسباتی بالایی دارد و کاربرد آن بررسی صحت روش دیگری است که معرفی خواهیم کرد. در روش دوم شبکه محاسباتی ترک بعد کمتری نسبت به شبکه محاسباتی ماتریس دارد. طبیعتاً روش عددی استفاده شده باید به گونه‌ای تعمیم داده شود که بتواند این کار را انجام دهد.

در این رساله با توجه به اینکه هندسه‌های دوبعدی را بررسی خواهیم کرد، روش هم‌بعد را روش ترک-دوبعدی و روش بعد کمتر را ترک-یک‌بعدی می‌نامیم. این در حالی است که در بعضی از مقالات روش ترک-دوبعدی را روش مش ریز [۱۵] یا تک‌تخلخل<sup>۱۳</sup> [۷] و روش ترک-یک‌بعدی را روش ترک گسسته می‌نامند. در شکل ۱۰.۲ مش محاسباتی استفاده شده برای شبیه‌سازی یک ترک را برای هر یک از روش‌ها مشاهده می‌کنید.

<sup>۱۳</sup>Single Porosity

## فصل ۳

# روش عددی

در این قسمت روش عددی استفاده شده برای حل معادلات را شرح خواهیم داد.

### ۱.۳ بدون بعد سازی معادلات

ابتدا برای ساده تر شدن کار با معادلات آن‌ها را بی بعد می سازیم، به همین منظور مقادیر مرجع طول  $L^*$ ، فشار  $P^*$ ، زمان  $T^*$ ، تراوایی مطلق  $K^*$  و سرعت  $u^*$  را تعریف می کنیم. حال می توانیم پارامترهای بدون بعد را به صورت معادله (۱.۳) تعریف کنیم:

$$\tilde{x} = \frac{x}{L^*} \quad \tilde{y} = \frac{y}{L^*} \quad \tilde{h} = \frac{h}{L^*} \quad \tilde{\varphi}_\alpha = \frac{\varphi_\alpha}{P^*} \quad \tilde{t} = \frac{t}{T^*} \quad \tilde{\mathbf{K}} = \frac{\mathbf{K}}{K^*} \quad \tilde{u} = \frac{u}{u^*} \quad (1.3)$$

حال با جایگذاری مقادیر بی بعد در معادلات (۶.۲)، (۸.۲)–(۱۱.۲) خواهیم داشت:

$$\tilde{\nabla} \cdot \left[ \left( k_{rw} + \frac{k_{ro}}{\mathcal{M}} \right) \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\nabla} \tilde{\varphi}_w + \frac{k_{ro}}{\mathcal{M}} \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\nabla} \tilde{\varphi}_c \right] = 0 \quad (2.3)$$

$$\mathcal{N} \tilde{\phi} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{t}} - \tilde{\nabla} \cdot \left[ k_{rw} \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\nabla} \tilde{\varphi}_w \right] = 0 \quad (3.3)$$

$$\tilde{u} = -\frac{1}{\mathcal{P}} \cdot \left[ \left( k_{rw} + \frac{k_{ro}}{\mathcal{M}} \right) \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\nabla} \tilde{\varphi}_w + \frac{k_{ro}}{\mathcal{M}} \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\nabla} \tilde{\varphi}_c \right] \quad (4.3)$$

$$\tilde{u}_w = -\frac{1}{\mathcal{P}} \cdot k_{rw} \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\nabla} \tilde{\varphi}_w \quad (5.3)$$

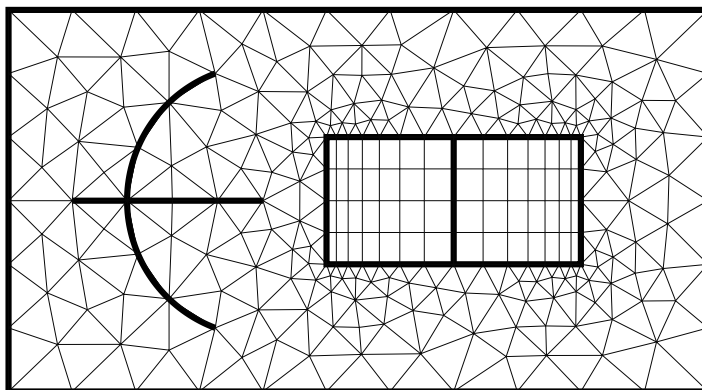
$$\tilde{\varphi}_c = \tilde{P}_d J(S) + \mathcal{G} \tilde{h} \quad (6.3)$$

پارامترهای بدون بعد  $\tilde{\phi}$ ،  $\mathcal{M}$ ،  $\mathcal{N}$ ،  $\mathcal{P}$  و  $\mathcal{G}$  به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\tilde{\phi} = \beta \phi \quad \mathcal{M} = \frac{\mu_o}{\mu_w} \quad \mathcal{N} = \frac{L^* \mu_w}{P^* K^*} \cdot \frac{L^*}{T^*} \quad \mathcal{P} = \frac{L^* \mu_w}{P^* K^*} \cdot u^* \quad \mathcal{G} = \frac{(\varrho_o - \varrho_w) g L^*}{P^*} \quad (7.3)$$

از این جا به بعد دیگر بالاوند مد را برای پارامترهای بدون بعد استفاده نخواهیم کرد، به زبان





شکل ۱.۳: مش مناسب برای شبیه‌سازی عددی

ریاضی:  $(\cdot) \doteq (\tilde{\cdot})$ . معادلات (۲.۳)–(۶.۳) اساس کار ما را تشکیل خواهند داد و برای تعریف یک مسئله کافی است پارامترهای  $\tilde{\phi}$ ,  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{N}$ ,  $\mathcal{P}$  و  $\mathcal{G}$ ، هندسه با طول بی‌بعد و شرایط مرزی (حالت بدون بعد معادلات (۱۴.۲)) داده شوند.

## ۲.۳ مش مورد نیاز

برای حل معادلات (۲.۳)–(۶.۳)، اولین قدم مش زدن هندسه است. مش مورد نیاز باید دو شرط مهم را داشته باشد:

۱. اضلاع المان‌ها مرز محیط‌ها و ترک‌ها را قطع نکنند، یعنی نودها روی مرز نواحی و روی ترک‌ها قرار گیرند.<sup>۱</sup>

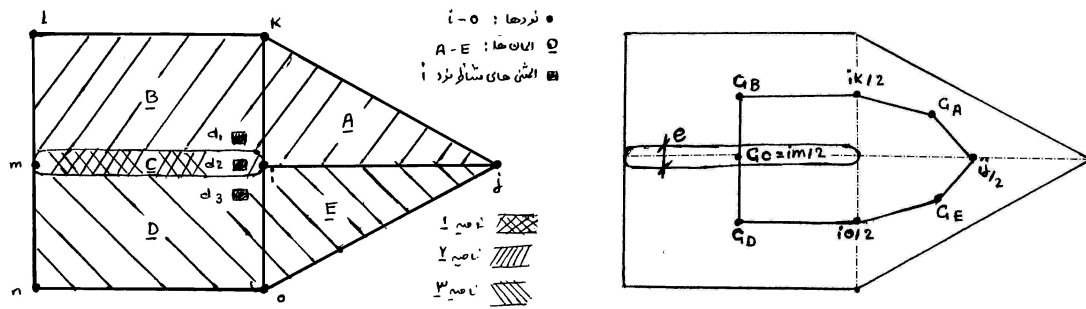
۲. مش از المان‌های مثلثی، چهارضلعی و خطی تشکیل شده باشد و المان‌های مثلثی و چهارضلعی متعلق به نواحی ماتریس و المان‌های خطی مربوط به نواحی ترک باشند.

در شکل ۱.۳ یک نمونه مش مناسب برای شبیه‌سازی عددی را مشاهده می‌کنید. در این مش خطوط نازک المان‌های ماتریس و خطوط کلفت المان ترک یا مرز نواحی ماتریس را نشان می‌دهند.

## ۳.۳ معرفی نوتاسیون استفاده شده در روش عددی

در این قسمت نوتاسیون مورد نیاز برای بیان روش عددی را بیان خواهیم کرد. به همین منظور در شکل ۲.۳ یک نود به نام  $i$  یا  $v_i$  و المان‌ها و نودهای اطراف آن نمایش داده شده‌اند. همانطور که مشاهده می‌کنید امکان دارد که اطراف یک نود المان‌های ترک مثل المان  $C$  یا  $e_C$  نیز وجود داشته باشند. علاوه بر نمایش نام‌گذاری المان‌ها و نودها در شکل ۲.۳ ب، در شکل ۲.۳ آ تعدادی نقطه مهم از جمله وسط اضلاعی که نود  $v_i$  عضوی از آنهاست مثل  $\frac{ij}{4}$  و مراکز هندسی المان‌ها مثل  $G_B$  نمایش داده شده‌اند.

<sup>۱</sup> Conforming Mesh



(آ) نقاط کمکی برای معرفی حجم کنترل و بردارها (ب) اجزای اصلی مش

شکل ۲.۳: مثالی از یک نود به نام  $v_i$  و اجزای اطرافش

اولین مفهوم مهم در مش اضلاع هندسی<sup>۲</sup> هستند. به اضلاع المان‌ها، اضلاع هندسی گفته می‌شوند. برای مثال در شکل ۲.۳ خطوط  $ij$  یا  $ik$  اضلاع هندسی هستند. مفهوم مهم دیگر احجام کنترل هستند. با روشی که ذکر خواهیم کرد متناظر با هر نود یک حجم کنترل خواهیم ساخت: نقاط وسط اضلاع هندسی اطراف هر نود را به مرکز حجم المان متناظرش متصل می‌کنیم. چند ضلعی حاصله حجم کنترل متناظر با نود مذکور خواهد بود. برای مثال در شکل ۲.۳ حجم کنترل متناظر با نود  $i$ ، چند ضلعی  $G_B G_C G_D G_E$  است. مفهوم بعدی اضلاع دوگانه<sup>۳</sup> است. به هر یک از اضلاع احجام کنترل یک ضلع دوگانه می‌گوییم. با دقت در شکل ۲.۳ می‌توان مشاهده کرد که متناظر با هر ضلع هندسی به تعداد المان‌هایی که این ضلع هندسی عضو آن‌هاست، ضلع دوگانه وجود دارد. یعنی به ازای هر ضلع هندسی و هر المان یک ضلع دوگانه وجود دارد. برای مثال ضلع دوگانه  $G_E G_D$  متناظر با ضلع هندسی  $ij$  در المان  $E$  است و یا پاره‌خطی به طول  $e$  (ضخامت المان ترک  $C$ ) که از  $G_C$  می‌گذرد، ضلع دوگانه متناظر با ضلع هندسی  $im$  در المان ترک  $C$  می‌باشد.

مفهوم مهم دیگر المثنی‌ها<sup>۴</sup> هستند. از بخش ۳.۵.۲ می‌دانیم که در هر نود که روی مرز چند ناحیه قرار گیرد، چند مقدار اشباع باید ذخیره شود. به همین منظور مفهومی به نام المثنی‌ها را معرفی می‌کنیم. به ازای هر نود در مش به تعداد نواحی احاطه کننده آن، المثنی وجود خواهد داشت. المثنی‌ها اشیاء فرضی هستند که مقادیری مثل اشباع را به آن‌ها نسبت خواهیم داد. برای مثال در شکل ۲.۳ سه ناحیه مختلف (دو ناحیه ماتریس و یک ناحیه ترک) نود  $i$  را احاطه کرده‌اند. لذا سه المثنی متناظر با این نود وجود خواهد داشت. در این شکل این سه المثنی را  $d_1$ ،  $d_2$  و  $d_3$  نامیده‌ایم. مطابق دستورالعملی که در فصل ۲ بیان شد، یکی از این المثنی‌ها ارباب و بقیه برده خواهند بود و مقدار اشباع برده‌ها وابسته به مقدار اشباع در ارباب خواهد بود. برخلاف اشباع، مقادیری مثل پتانسیل آب  $\varphi_w$  بنابر معادله (۱۵.۲) به نواحی بستگی ندارند، لذا به نودها نسبت داده می‌شوند.

دیگر مفاهیم مورد نیاز، به همراه مثالی از شکل ۲.۳ به شرح زیر هستند:

$v_i$  نود شماره  $i$

$e_i$  المان شماره  $i$

$B_i$  حجم کنترل متناظر با نود شماره  $i$

<sup>۲</sup>Edge

<sup>۳</sup>Dual-edge

<sup>۴</sup>Duplicates

$B_i^j$  قسمتی از حجم کنترل متناظر با نود شماره  $i$  که در المان  $j$  قرار دارد. برای مثال  $B_i^A$  چهار ضلعی  $v_i^{ij} G_A^{ik}$  می باشد.

$n_{ij}^k$  بردار یکه عمود بر ضلع دوگانه متناظر با ضلع هندسی  $ij$  در المان  $k$  که جهت آن از  $i$  به سمت  $j$  است. برای مثال  $n_{im}^C$  برداری یکه در راستای خط  $v_i v_m$  از  $v_i$  به سمت  $v_m$  می باشد و یا  $n_{im}^B$  برداری یکه عمود بر خط  $G_C G_B$  از  $v_i$  به سمت  $v_m$  می باشد.

$g_{ij}^k$  نقطه وسط ضلع دوگانه متناظر با ضلع هندسی  $ij$  در المان  $k$ . برای مثال  $g_{im}^C$  نقطه  $G_C$  و یا  $g_{im}^B$  نقطه وسط پاره خط  $G_C G_B$  می باشد.

$l_{ij}^k$  طول ضلع دوگانه متناظر با ضلع هندسی  $ij$  در المان  $k$ .

NE تعداد المان های موجود در کل مش.

NV تعداد نودهای موجود در کل مش.

$N_i$  تعداد المثنی های متناظر با نود  $v_i$ . برای مثال  $N_i = 3$ .

$N^i$  تعداد نودهای عضو المان  $e^i$ . این مقدار برای المان های ترک، مثلث و چهارضلعی به ترتیب برابر ۲، ۳ و ۴ می باشد.

$d_i$  المثنی شماره  $i$

$d_i^k$  المثنی متناظر با نود  $v_i$  در المان  $e_k$ . برای مثال:  $d_i^A = d_i^B = d_1$ ،  $d_i^C = d_i^D = d_2$  و  $d_i^E = d_3$ .

$d_i^*$  المثنی ارباب متناظر با نود  $v_i$

$\alpha(v_i)$  مجموعه نودهای اطراف نود  $v_i$  و خودش. برای مثال:  $\alpha(v_i) = \{v_i, v_j, v_k, v_l, v_m, v_n, v_o\}$ .

$\theta(v_i)$  مجموعه المان های اطراف نود  $v_i$ . برای مثال:  $\theta(v_i) = \{e_A, e_B, e_C, e_D, e_E\}$ .

$\sigma(e_i)$  مجموعه نودهای عضو المان  $e_i$ . برای مثال:  $\sigma(e_B) = \{v_m, v_i, v_k, v_l\}$  و یا  $\sigma(e_C) = \{v_i, v_m\}$

$\eta(v_i, e_j)$  مجموعه نودهای عضو المان  $e_j$  که با نود  $v_i$  ضلع هندسی مشترک دارند. برای مثال:

$\eta(v_i, e_C) = \{v_m\}$  و یا  $\eta(v_i, e_B) = \{v_k, v_m\}$

$\gamma(v_i)$  مجموعه المثنی های مرتبط با نود  $v_i$ . برای مثال:  $\gamma(v_i) = \{d_1, d_2, d_3\}$

$\mathbf{K}^i$  تراوایی مطلق متناظر با المان  $e_i$

$\phi^i$  تخلخل متناظر با المان  $e_i$

$\chi|_{v_i}$  متغیر  $\chi$  ذخیره شده در نود  $v_i$ . تنها متغیری که متناظر با نودهاست و می تواند به جای  $\chi$  قرار بگیرد  $\varphi_w$  می باشد.

$\chi|_{d_i}$  متغیر  $\chi$  ذخیره شده در المثنی  $d_i$ . متغیرهای  $k_{ro}$ ،  $k_{rw}$ ،  $S$  و  $\varphi_c$  می توانند به جای  $\chi$  قرار گیرند.

$\chi|_{g_{ij}^k}$  مقدار متغیر  $\chi$  در نقطه  $g_{ij}^k$  که به کمک روش upwind و از درونیابی مقادیر  $\chi|_{d_i}$  پیدا می شود.

متغیرهای  $k_{ro}$  و  $k_{rw}$  می توانند به جای  $\chi$  قرار گیرند.

$\nabla \chi|_{g_{ij}^k}$  مقدار گرادیان متغیر  $\chi$  در نقطه  $g_{ij}^k$  که به کمک مقادیر  $\chi|_{d_i}$  و یا  $\chi|_{v_i}$  پیدا می شود. متغیرهای  $\varphi_c$  و  $\varphi_w$  می توانند به جای  $\chi$  قرار گیرند.

$\vec{X}_{v_i}$  مختصات نود  $v_i$

قبل از رفتن به بخش بعدی نحوه محاسبه  $k_{rw}|_{g_{ij}^k}$ ،  $k_{ro}|_{g_{ij}^k}$  و  $\nabla \varphi_c|_{g_{ij}^k}$  را بیان می کنیم.

برای محاسبه  $k_{rw}|_{g_{ij}^k}$  و  $k_{ro}|_{g_{ij}^k}$  از روش upwind استفاده می نماییم. این روش در معادله (۸.۳) بیان شده است.

$$k_{r\alpha}|_{g_{ij}^k} = \begin{cases} k_{r\alpha}|_{d_i^k} & u_\alpha \cdot n_{ij}^k \geq 0 \\ k_{r\alpha}|_{d_j^k} & u_\alpha \cdot n_{ij}^k < 0 \end{cases} \quad \alpha = w, o \quad (8.3)$$

در این معادله مقادیر  $u_\alpha$  باید از معادلات (۴.۳)، (۵.۳) محاسبه شوند. برای محاسبه  $\nabla\varphi_\alpha|_{g_{ij}^k}$  از توابع شکل<sup>۵</sup> استفاده می‌کنیم. به این منظور در هر المان برای هر نود یک تابع شکل تعریف می‌کنیم:  $\psi_i^k$  یعنی تابع شکل نود  $v_i$  در المان  $e_k$ . ویژگی تابع شکل این است که مقدار آن در نود متناظرش باید برابر یک شود ولی در دیگر نودها مقدار آن باید برابر صفر شود. به زبان ریاضی:

$$\psi_i^k(\vec{X}_{v_j}) \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad v_i, v_j \in \sigma(e_k) \quad (9.3)$$

با تعریف توابع شکل می‌توانیم توزیع متغیر  $\varphi_w$  را به صورت معادله (۱۰.۳) در هر المان بازسازی کنیم:

$$\varphi_w(\vec{X}) = \sum_{v_j \in \sigma(e_i)} \psi_j^i(\vec{X}) \varphi_w|_{v_j} \quad \vec{X} \text{ inside } e_i \quad (10.3)$$

لذا با مشتق‌گیری از معادله (۱۰.۳) و قرار دادن مختصات نقاط  $g_{ij}^k$  به جای  $\vec{X}$  مقدار  $\nabla\varphi_w|_{g_{ij}^k}$  محاسبه می‌شود:

$$\nabla\varphi_w|_{g_{ij}^k} = \sum_{v_l \in \sigma(e_k)} \nabla\psi_l^k(\vec{X}_{g_{ij}^k}) \varphi_w|_{v_l} \quad v_i, v_j \in \sigma(e_i) \quad (11.3)$$

به طریقه مشابه برای محاسبه گرادیان پتانسیل موینگی داریم:

$$\nabla\varphi_c|_{g_{ij}^k} = \sum_{v_l \in \sigma(e_k)} \nabla\psi_l^k(\vec{X}_{g_{ij}^k}) \varphi_c|_{d_j^k} \quad v_i, v_j \in \sigma(e_i) \quad (12.3)$$

تنها تفاوت معادلات (۱۱.۳) و (۱۲.۳) این است که مقادیر پتانسیل آب در نودها ذخیره می‌شوند ولی مقادیر پتانسیل موینگی در المثنی‌ها ذخیره می‌شوند.

## ۴.۳ روش IMPES

در این قسمت توضیح خواهیم داد که در هر گام زمانی چه معادلاتی باید حل شوند و مجهولات معادلات چه هستند.

هدف در این پروژه پیدا کردن مقادیر  $S|_{d_i}$  و  $\varphi|_{v_i}$  در هر گام زمانی می‌باشد، اما همانطور که در بخش ۳.۵.۲ نشان دادیم، مقادیر  $d_i \in \gamma(v_j)$  مستقل از یکدیگر نیستند و همگی تابع  $S|_{d_j^*}$  هستند. لذا مجهولات خود را دو بردار  $\vec{\Phi}^k$  و  $\vec{S}^k$  تعریف می‌کنیم، که به ترتیب مقادیر  $\varphi|_{v_i}$  و  $S|_{d_i^*}$  را در گام زمانی  $k$ ام نشان می‌دهند. طول هر دو بردار نیز برابر NV می‌باشد.

<sup>۵</sup>Shape Functions

فرض کنید در گام زمانی  $k$  مقدار  $\vec{S}^k$  مشخص است. روش IMPES برای پیدا کردن دو بردار  $\vec{\Phi}^k$  و  $\vec{S}^{k+1}$  فرآیند ذیل را پیشنهاد می‌دهد:

۱. با گسسته سازی معادله (۲.۳) مقدار  $\vec{\Phi}^k$  را محاسبه کنید. به این منظور باید دستگاهی به صورت زیر را حل نمایید:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_G \vec{\Phi}^k &= \vec{B}_G \\ \mathbf{A}_G &= \mathbf{A}_G(\vec{S}^k, \Gamma_{\varphi N}, \Gamma_{\varphi D}) \\ \vec{B}_G &= \vec{B}_G(\vec{S}^k, \Gamma_{\varphi N}, \Gamma_{\varphi D})\end{aligned}\quad (۱۳.۳)$$

در واقع نام فشار ضمنی به این خاطر به این روش داده شده است که پتانسیل آب در معادله (۱۳.۳) به صورت ضمنی حل می‌شود. همانطور که مشاهده می‌کنید، طرف چپ و راست این معادله صرفاً تابعی از اشباع در بازه زمانی  $k$  و شرایط مرزی پتانسیل آب هستند، لذا معادله کاملاً خطی خواهد بود.

۲. سپس با گسسته سازی معادله (۳.۳) مقدار  $\vec{S}^{k+1}$  را محاسبه کنید. به این منظور باید معادله‌ای به صورت زیر را حل نمایید:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta t} \vec{C}_G \cdot \Delta \vec{S}^k &= \vec{F}_G \\ \vec{S}^{k+1} &= \vec{S}^k + \Delta \vec{S}^k \\ \vec{C}_G &= \vec{C}_G(\vec{S}^k, \vec{\Phi}^k) \\ \vec{F}_G &= \vec{F}_G(\vec{S}^k, \vec{\Phi}^k, \Gamma_{SN}, \Gamma_{SD})\end{aligned}\quad (۱۴.۳)$$

در این معادله اشباع در گام زمانی  $k+1$  به صورت کاملاً صریح حل شده است و برخلاف معادله (۱۳.۳) دیگر یک دستگاه نیست. همین عمل است که باعث خطی شدن معادله می‌شود، اما برای همگرا شدن پاسخها باید گام زمانی کوچک انتخاب شود.

در قسمت بعدی نشان خواهیم داد که بردارهای  $\vec{B}_G$ ،  $\vec{C}_G$ ،  $\vec{F}_G$  و ماتریس  $\mathbf{A}_G$  در هر گام زمانی چگونه محاسبه خواهند شد.

## ۵.۳ معادله حجم محدود

در این قسمت روش حجم محدود را برای محاسبه بردارهای  $\vec{B}_G$ ،  $\vec{C}_G$ ،  $\vec{F}_G$  و ماتریس  $\mathbf{A}_G$  معرفی خواهیم کرد. روش حجم محدود استفاده شده CVFEM<sup>۶</sup> نام دارد و اولین بار در [۲۷] برای حل معادله advection-diffusion به کار رفته است. نحوه تعمیم این روش برای حل معادلات جریان دوفازی در محیط متخلخل از [۱۱] گرفته شده است.

<sup>۶</sup>Control Volume Finite Element

## ۱.۵.۳ معادله پتانسیل

ابتدا نحوه ایجاد معادله (۱۳.۳) را از معادله (۲.۳) بیان خواهیم کرد. به این منظور ابتدا از معادله (۲.۳) در هر حجم کنترل  $B_i$  انتگرال می‌گیریم و از قضیه دیورژانس برای انتقال انتگرال‌های حجمی به مرز استفاده می‌کنیم:

$$\int_{\partial B_i} \left[ \left( k_{rw} + \frac{k_{ro}}{\mathcal{M}} \right) \mathbf{K} \nabla \varphi_w + \left( \frac{k_{ro}}{\mathcal{M}} \right) \mathbf{K} \nabla \varphi_c \right] \cdot \vec{n} d\Gamma = 0 \quad i = 1, \dots, NV \quad (15.3)$$

برای بیان تقریب عددی معادله (۱۵.۳) ابتدا تقریب عددی کل شار عبوری از نود  $v_i$  به سمت نود  $v_j$  در المان  $e_k$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} -\text{TFlux}_{ij}^k &= \left( k_{rw} + \frac{k_{ro}}{\mathcal{M}} \right) \Big|_{g_{ij}^k} \mathbf{K}^k \nabla \varphi_w|_{g_{ij}^k} \cdot (ln)_{ij}^k + \left( \frac{k_{ro}}{\mathcal{M}} \right) \Big|_{g_{ij}^k} \mathbf{K}^k \nabla \varphi_c|_{g_{ij}^k} \cdot (ln)_{ij}^k \\ &= -\mathcal{P}u \cdot (ln)_{ij}^k \quad e_k \in \theta(v_i) \text{ and } v_j \in \eta(v_i, e_k) \end{aligned} \quad (16.3)$$

از حالت اول برای المان‌های داخلی و از حالت دوم برای المان‌های مجازی (اعمال شروط مرزی) استفاده خواهیم کرد. حال تقریب عددی معادله (۱۵.۳) به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\sum_{e_k \in \theta(v_i)} \sum_{v_j \in \eta(v_i, e_k)} -\text{TFlux}_{ij}^k = 0 \quad i = 1, \dots, NV \quad (17.3)$$

معادله (۱۷.۳) به این معنی است که جمع جبری کل شار ورودی و خروجی به هر حجم کنترل برابر صفر باشد. حال برای اینکه بتوان معادلات (۱۷.۳) را به شکل دستگاه معادلات (۱۳.۳) در آورد و ماتریس  $\mathbf{A}_G$  و بردار  $\vec{B}_G$  را از آن استخراج نمود، فرض می‌کنیم که  $\text{TFlux}_{ij}^k$  در هر المان تابعی خطی از مقدار پتانسیل آب در نودهای عضو المان باشد، یعنی:

$$\sum_{v_k \in \eta(v_j, e_i)} -\text{TFlux}_{jk}^i = \sum_{v_k \in \sigma(e_i)} a_{jk}^i \varphi_w|_{v_k} + b_j^i \quad i = 1, \dots, NE \text{ and } v_j \in \sigma(e_i) \quad (18.3)$$

حال نشان می‌دهیم که در صورت وجود مقادیر  $a$  و  $b$  چگونه به کمک آن‌ها ماتریس  $\mathbf{A}_G$  و بردار  $\vec{B}_G$  را بسازیم. خود اینکه مقادیر  $a$  و  $b$  را چگونه پیدا کنیم را در بخش ۶.۳ ذکر خواهیم کرد. اگر معادله (۱۸.۳) را در معادله (۱۷.۳) جایگذاری کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \sum_{e_k \in \theta(v_i)} \sum_{v_j \in \eta(v_i, e_k)} -\text{TFlux}_{ij}^k &= 0 \\ \Rightarrow \sum_{e_k \in \theta(v_i)} \left( \sum_{v_j \in \sigma(e_k)} (a_{ij}^k \varphi_w|_{v_j}) + b_i^k \right) &= 0 \quad i = 1, \dots, NV \end{aligned} \quad (19.3)$$

حال با عوض کردن ترتیب  $\Sigma$  ها به معادله زیر می‌رسیم:

$$\sum_{v_j \in \alpha(v_i)} \left( \sum_{e_k \in \theta(v_i) \cap \theta(v_j)} a_{ij}^k \right) \varphi_w|_{v_j} = - \sum_{e_k \in \theta(v_i)} b_i^k \quad i = 1, \dots, NV \quad (20.3)$$

از مقایسه معادلات (۲۰.۳) و (۱۳.۳) درمی‌یابیم که:

$$\mathbf{A}_{Gij} = \begin{cases} 0 & v_i \notin \alpha(v_j) \\ \sum_{e_k \in \theta(v_i) \cap \theta(v_j)} a_{ij}^k & v_i \in \alpha(v_j) \end{cases} \quad (21.3)$$

$$\vec{B}_{Gi} = - \sum_{e_k \in \theta(v_i)} b_i^k \quad (22.3)$$

معادلات (۲۱.۳) و (۲۲.۳) به این معنا هستند که ماتریس و بردار جهانی  $\mathbf{A}_G$  و  $\vec{B}_G$  را می‌توان از اسمبل کردن ماتریس‌های محلی  $\mathbf{A}^k$  و بردارهای محلی  $\vec{B}^k$  برای هر المان محاسبه کرد. این ماتریس‌ها برای المان شماره  $k$  به صورت معادلات (۲۳.۳) و (۲۴.۳) تعریف شده‌اند. البته در ماتریس‌های محلی برای سادگی از شماره‌گذاری محلی استفاده می‌کنیم.

$$\mathbf{A}^k = [a_{ij}^k] \quad i, j = 1, \dots, N^k, \quad k = 1, \dots, NE \quad (23.3)$$

$$\vec{B}^k = [-b_i^k] \quad i = 1, \dots, N^k, \quad k = 1, \dots, NE \quad (24.3)$$

## ۲.۵.۳ معادله اشباع

در این قسمت نحوه ایجاد معادله (۱۴.۳) را از معادله (۳.۳) بیان خواهیم کرد. مشابه حالت قبلی از معادله (۳.۳) در هر حجم کنترل  $B_i$  انتگرال می‌گیریم و از قضیه دیورژانس برای انتقال انتگرال‌های حجمی به مرز استفاده می‌کنیم:

$$\mathcal{N} \int_{B_i} \phi \frac{\partial S}{\partial t} d\Omega = \int_{\partial B_i} k_{rw} \mathbf{K} \nabla \varphi_w \cdot \vec{n} d\Gamma \quad i = 1, \dots, NV \quad (25.3)$$

برای محاسبه تقریب عددی طرف راست معادله (۲۵.۳)، تقریب عددی شار آب عبوری از نود  $v_i$  به سمت نود  $v_j$  در المان  $e_k$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} -\text{SFlux}_{ij}^k &= k_{rw}|_{g_{ij}^k} \mathbf{K}^k \nabla \varphi_w|_{g_{ij}^k} \\ &= -\mathcal{P} u_w \cdot (l\vec{n})_{ij}^k \quad e_k \in \theta(v_i) \text{ and } v_j \in \eta(v_i, e_k) \end{aligned} \quad (26.3)$$

مثل معادله پتانسیل، از حالت اول برای المان‌های داخلی و از حالت دوم برای المان‌های مجازی

(اعمال شروط مرزی) استفاده خواهیم کرد. حال اعداد  $f_i^k$  را مشابه اعداد  $b_i^k$  تعریف می‌نماییم:

$$\sum_{v_k \in \eta(v_j, e_i)} -\text{SFlux}_{jk}^i = f_j^i \quad i = 1, \dots, \text{NE and } v_j \in \sigma(e_i) \quad (27.3)$$

حال تقریب عددی طرف راست معادله (۲۵.۳) به صورت زیر در می‌آید:

$$\int_{\partial B_i} k_{rw} \mathbf{K} \nabla \varphi_w \cdot \vec{n} d\Gamma \approx \sum_{e_k \in \theta(v_i)} \sum_{v_j \in \eta(v_i, e_k)} -\text{SFlux}_{ij}^k = \sum_{e_k \in \theta(v_i)} f_i^k \quad (28.3)$$

معادله (۲۸.۳) به این معناست که بردار جهانی  $\vec{F}_G$  را می‌توان از اسمبل کردن بردارهای محلی  $\vec{F}^k$  برای هر المان محاسبه کرد. این بردار برای المان شماره  $k$  به صورت معادله (۲۹.۳) تعریف شده‌است.

$$\vec{F}^k = [f_i^k] \quad i = 1, \dots, N^k, \quad k = 1, \dots, \text{NE} \quad (29.3)$$

نحوه محاسبه مقادیر  $f$  را در بخش ۶.۳ بیان خواهیم کرد. اکنون تقریب عددی طرف چپ معادله (۲۵.۳) را بیان خواهیم کرد. به این منظور از روش forward Euler برای تقریب مشتق اشباع در زمان استفاده می‌کنیم:

$$\int_{B_i} \phi \frac{\partial S}{\partial t} d\Omega \approx \sum_{e_j \in \theta(v_i)} \phi^j \text{Volume}(B_i^j) \frac{\Delta S|_{d_i^j}}{\Delta t} \quad (30.3)$$

همانطور که در بخش ۳.۵.۲ نشان دادیم، مقادیر اشباع برده تابعی از مقادیر اشباع ارباب هستند، لذا با فرض کوچک بودن  $\Delta t$  می‌توانیم بنویسیم:

$$\Delta S|_{d_i^j} \approx \frac{dS|_{d_i^j}}{dS|_{d_i^*}} \Delta S|_{d_i^*} \quad e_j \in \theta(v_i) \quad (31.3)$$

مقدار  $\frac{dS|_{d_i^j}}{dS|_{d_i^*}}$  از معادلات معرفی شده در بخش ۳.۵.۲ به دست می‌آید. با جایگذاری معادله (۳۱.۳) در (۳۰.۳) خواهیم داشت:

$$\sum_{e_j \in \theta(v_i)} \phi^j \text{Volume}(B_i^j) \frac{\Delta S|_{d_i^j}}{\Delta t} \approx \sum_{e_j \in \theta(v_i)} \phi^j \text{Volume}(B_i^j) \frac{dS|_{d_i^j}}{dS|_{d_i^*}} \frac{\Delta S|_{d_i^*}}{\Delta t} \quad (32.3)$$

از مقایسه معادله (۳۲.۳) و (۱۴.۳) آرایه‌های بردار  $\vec{C}_G$  نیز مطابق معادله (۳۳.۳) به دست می‌آیند.

$$\vec{C}_{Gi} = \sum_{e_j \in \theta(v_i)} \phi^j \text{Volume}(B_i^j) \frac{dS|_{d_i^j}}{dS|_{d_i^*}} \quad i = 1, \dots, \text{NV} \quad (33.3)$$



تنها قسمت باقی مانده معرفی روش محاسبه مقادیر  $a, b$  و  $f$  می باشد. در قسمت بعدی نحوه محاسبه این مقادیر را بیان خواهیم کرد.

### ۶.۳ محاسبه ماتریس های محلی

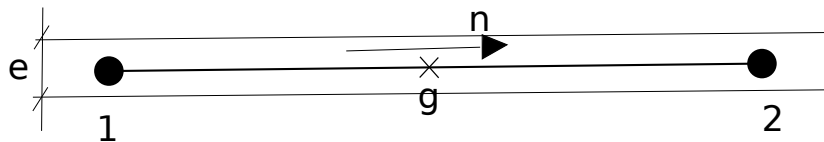
در این قسمت نحوه محاسبه ماتریس های محلی را برای المان های ترک، ماتریس (مثلث و چهارضلعی) و شرایط مرزی شرح، خواهیم داد. از این به بعد چون فقط در مورد المان صحبت خواهیم کرد دیگر بالاوند شماره المان را نمی نویسیم. به علاوه در پسوندهای شماره نود نیز به جای شماره جهانی نود از شماره محلی نود در المان مورد بحث استفاده می کنیم. اگر شماره جهانی نود محلی  $i$  در المان  $k$  برابر  $G_i^k$  باشد، معادل ریاضی گزاره های بیان شده به صورت زیر می باشد:

$$(\cdot)_{ij} := (\cdot)_{G_i^k G_j^k}, \quad (\cdot)_i := (\cdot)_{G_i^k}, \quad (\cdot) := (\cdot)^k, \quad (\cdot)_i := (\cdot)|_{v_{G_i}} \text{ OR } (\cdot)|_{d_{G_i}^k}$$

به علاوه مقادیر  $\lambda_w, \lambda_o$  و  $\lambda$  را به ترتیب برابر  $k_{rw}$ ،  $\frac{k_{ro}}{\mathcal{M}}$  و  $k_{rw} + \frac{k_{ro}}{\mathcal{M}}$  تعریف می نماییم.

### ۱.۶.۳ المان ترک

در شکل ۳.۳ یک المان ترک را مشاهده می کنید. برای محاسبه مقادیر  $A, \vec{B}$  و  $\vec{C}$  ابتدا تعاریف زیر را ارائه می دهیم:



شکل ۳.۳: المان ترک و نام گذاری های محلی

$e$  ضخامت ترک. به علاوه از تعریف طول اضلاع دوگانه داریم:  $l_{12} = l_{21} = e$   
 $\vec{n}$  بردار یکه از نود ۱ به نود ۲. به علاوه از تعاریف قبلی داریم:  $\vec{n} = \vec{n}_{12} = -\vec{n}_{21}$   
 $l$  طول المان ترک که برابر است با  $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$   
 $g$  نقطه وسط المان ترک. به علاوه از تعاریف قبلی داریم:  $g_{12} = g_{21} = g$   
 حال توابع شکل را به صورت معادله (۳۴.۳) تعریف می نماییم:

$$\psi_1(x, y) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2}, \quad \psi_2(x, y) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (34.3)$$

از ترکیب معادلات (۱۱.۳)، (۱۲.۳) و (۳۴.۳) نتیجه می شود که مقدار گرادیان پتانسیل ها برابر خواهد بود با:

$$\nabla \varphi_\alpha|_g = \frac{\varphi_\alpha|_2 - \varphi_\alpha|_1}{l} \vec{n} \quad \alpha = w, c \quad (35.3)$$

اکنون می‌توانیم به کمک مقادیر گرایان پتانسیل‌ها جهت سرعت هر فاز را تعیین کرده و از روش upwind مقادیر  $\lambda_{\alpha|g}$  را بیابیم. اگر معادلات (۴.۳)، (۵.۳)، (۸.۳) و (۳۵.۳) را ترکیب کنیم، خواهیم داشت:

$$\lambda_{w|g} = \begin{cases} \lambda_{w|1} & \varphi_{w|1} > \varphi_{w|2} \\ \lambda_{w|2} & \text{otherwise} \end{cases} \quad \lambda_{o|g} = \begin{cases} \lambda_{o|1} & \varphi_{w|1} + \varphi_{c|1} > \varphi_{w|2} + \varphi_{c|2} \\ \lambda_{o|2} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (۳۶.۳)$$

اکنون مقادیر  $a_{11}$ ،  $a_{12}$  و  $b_1$  را محاسبه می‌نماییم. از معادله (۱۸.۳)، داریم:

$$-\text{TFlux}_{12} = a_{11}\varphi_{w|1} + a_{12}\varphi_{w|2} + b_1 \quad (۳۷.۳)$$

از طرفی از ترکیب معادلات (۱۶.۳) و (۳۵.۳) داریم:

$$\begin{aligned} -\text{TFlux}_{12} &= \lambda_{|g} K \frac{\varphi_{w|2} - \varphi_{w|1}}{l} \vec{n} \cdot (e\vec{n}) + \lambda_{o|g} K \frac{\varphi_{c|2} - \varphi_{c|1}}{l} \vec{n} \cdot (e\vec{n}) \\ &= -\lambda_{|g} \frac{Ke}{l} \varphi_{w|1} + \lambda_{|g} \frac{Ke}{l} \varphi_{w|2} + \lambda_{o|g} \frac{Ke}{l} (\varphi_{c|1} - \varphi_{c|2}) \end{aligned} \quad (۳۸.۳)$$

از مقایسه (۳۷.۳) و (۳۸.۳) واضح است که:

$$a_{11} = -\lambda_{|g} \frac{Ke}{l}, \quad a_{12} = \lambda_{|g} \frac{Ke}{l}, \quad b_1 = \lambda_{o|g} \frac{Ke}{l} (\varphi_{c|1} - \varphi_{c|2}) \quad (۳۹.۳)$$

به طریقه مشابه می‌توان دیگر مقادیر  $a$ ،  $b$  و مقادیر  $f$  را محاسبه نمود و به ماتریس‌های محلی زیر رسید:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -\lambda_{|g} \frac{Ke}{l} & \lambda_{|g} \frac{Ke}{l} \\ \lambda_{|g} \frac{Ke}{l} & -\lambda_{|g} \frac{Ke}{l} \end{bmatrix} \quad \vec{B} = \begin{bmatrix} \lambda_{o|g} \frac{Ke}{l} (\varphi_{c|1} - \varphi_{c|2}) \\ \lambda_{o|g} \frac{Ke}{l} (\varphi_{c|2} - \varphi_{c|1}) \end{bmatrix} \\ \vec{F} &= \begin{bmatrix} \lambda_{w|g} \frac{Ke}{l} (\varphi_{w|2} - \varphi_{w|1}) \\ \lambda_{w|g} \frac{Ke}{l} (\varphi_{w|1} - \varphi_{w|2}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (۴۰.۳)$$

در آخر نحوه محاسبه مقادیر  $\text{Volume}(B_i)$  را بیان می‌کنیم. در المان ترک به سادگی داریم:

$$\text{Volume}(B_1) = \text{Volume}(B_2) = \frac{el}{2} \quad (۴۱.۳)$$

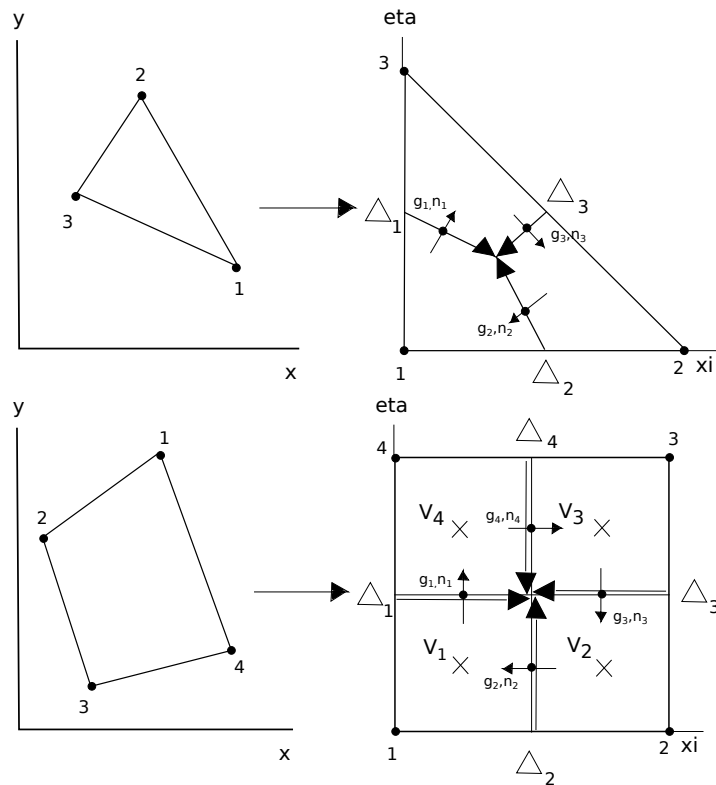
### ۲.۶.۳ المان ماتریس

در این قسمت نحوه محاسبه ماتریس‌های محلی برای المان‌های دوبعدی را بیان خواهیم کرد (هر چند معمولاً این المان‌ها متعلق به ناحیه ماتریس هستند اگر از روش ترک-دوبعدی استفاده کنیم، می‌توانند متعلق به ناحیه ترک نیز باشند). روشی که بیان خواهیم کرد کلی بوده و برای هر دو شکل مثلث و

چهارضلعی قابل پیاده سازی خواهد بود. این روش از [۲۸] برگرفته شده است. اول از همه برای تعریف توابع شکل از فضای مرجع  $\xi\eta$  استفاده می کنیم. برای برقراری ارتباط بین این فضا و فضای  $xy$  از یک تبدیل isoparametric استفاده می کنیم. به زبان ریاضی:

$$x = \sum_{i=1}^N x_i \psi_i(\xi, \eta), \quad y = \sum_{i=1}^N y_i \psi_i(\xi, \eta) \quad (۴۲.۳)$$

همان طور که در ابتدای بخش ۶.۳ اشاره کردیم،  $N$  تعداد نودهای عضو المان مورد بحث است. در ادامه در موارد مورد نیاز  $xy$  و  $\xi\eta$  را با  $x_1, x_2$  و  $\xi_1, \xi_2$  نیز نشان می دهیم. به علاوه منظور از  $\vec{\xi}$  یک بردار در فضای  $\xi\eta$  منظور از  $\vec{x}$  بردار متناظر در فضای  $xy$  می باشد.  $\Omega_x$  نیز یک حجم در فضای  $xy$  و  $\Omega_\xi$  حجم متناظر آن در فضای  $\xi\eta$  خواهد بود.



شکل ۴.۳: المان های مثلث و چهارضلعی و المان های مرجع در فضای  $\xi\eta$

در شکل ۴.۳ یک المان مثلث و یک المان چهارضلعی در فضای  $xy$  و المان های مرجع متناظرشان در فضای  $\xi\eta$  نشان داده شده اند. همانطور که مشاهده می کنید، مثلث مرجع یک مثلث قائم الزاویه و چهارضلعی مرجع یک مربع می باشند. مختصات رئوس آنها در جدول ۱.۳ آمده است. نکته مهم این است که نام گذاری نودها در هر دو فضا باید پادساعتگرد باشد. اکنون تعاریف جدید مورد نیاز را ارائه می دهیم.

جدول ۱.۳: مختصات نودهای اصلی، نقاط  $V_i$  و بردارهای  $\vec{\Delta}_i$  در فضای  $\xi\eta$

ردیف	نودها - چهارضلعی	نودها - مثلث	$V_i$ - چهارضلعی	$\vec{\Delta}_i$ - چهارضلعی	$\vec{\Delta}_i$ - مثلث
۱	۰, ۰	۰, ۰	$1/4, 1/4$	$1/2, 0$	$1/3, -1/6$
۲	۱, ۰	۱, ۰	$3/4, 1/4$	$0, 1/2$	$-1/6, 1/3$
۳	۱, ۱	۰, ۱	$3/4, 3/4$	$-1/2, 0$	$-1/6, -1/6$
۴	۰, ۱	-	$1/4, 3/4$	$0, -1/2$	-

### نقاط انتگرال گیری حجم

نقطه مرکز هندسی زیر حجم کنترل  $B_i$  در فضای  $\xi\eta$  را نقطه انتگرال گیری حجم یا  $V_i$  می نامیم. مختصات این نقطه در المان های چهارضلعی برای محاسبه حجم  $B_i$  استفاده می شوند ولی در المان های مثلثی نیازی به آنها نیست. مختصات این نقاط برای المان مرجع مربع در جدول ۱.۳ آمده است.

### ماتریس توابع شکل

ماتریس توابع شکل  $\Psi_{1 \times N}$  را به صورت  $[\psi_1 \dots \psi_N]$  تعریف می کنیم. این ماتریس برای المان ها به صورت معادله (۴۳.۳) خواهد بود.

$$\begin{aligned} \text{quad : } \Psi &= \begin{bmatrix} 1 - \xi - \eta & \xi & \eta \end{bmatrix} \\ \text{triangle : } \Psi &= \begin{bmatrix} (1 - \xi)(1 - \eta) & \xi(1 - \eta) & \xi\eta & (1 - \xi)\eta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (43.3)$$

### ماتریس مشتق توابع شکل

ماتریس مشتق توابع شکل یا  $\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}$  به صورت معادله تعریف می شود:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = \left[ \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi_j} \right]_{N \times 2} \quad i = 1, \dots, N \quad j = 1, 2 \quad (44.3)$$

اگر معادله (۴۳.۳) را در معادله (۴۴.۳) جایگذاری کنیم، ماتریس مشتق توابع شکل برای المان های مثلث و چهارضلعی به دست می آید:

$$\left( \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right)_{\text{triangle}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right)_{\text{quad}} = \begin{bmatrix} -(1 - \eta) & -(1 - \xi) \\ 1 - \eta & -\xi \\ \eta & \xi \\ -\eta & 1 - \xi \end{bmatrix} \quad (45.3)$$

## ماتریس مختصات

مختصات همه نقاط را داخل یک ماتریس قرار داده و آن را ماتریس مختصات می‌نامیم و با  $\mathbf{X}$  نمایش می‌دهیم. به زبان ریاضی:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_N \\ y_1 & \dots & y_N \end{bmatrix} \quad (46.3)$$

## ماتریس یاکوبی

ماتریس یاکوبی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{J} = \left[ \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right]_{2 \times 2} \quad i, j = 1, 2 \quad (47.3)$$

این ماتریس سه خاصیت بسیار مهم دارد که از آن‌ها استفاده خواهیم کرد:

$$d\Omega_x = \det(\mathbf{J}) d\Omega_\xi \quad (48.3)$$

$$d\vec{x} = \mathbf{J} d\vec{\xi} \quad (49.3)$$

$$(\nabla_x \varphi_\alpha)^T = (\nabla_\xi \varphi_\alpha)^T \mathbf{J}^{-1} \quad (50.3)$$

با ترکیب معادلات (42.3)، (43.3) و استفاده از قاعده زنجیره‌ای می‌توان نشان داد که ماتریس یاکوبی را می‌توان از معادله زیر محاسبه کرد:

$$\mathbf{J} = \mathbf{X} \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{\xi}} \quad (51.3)$$

## پارامترهای مربوط به اضلاع دوگانه

مقادیر  $\vec{n}_i$ ،  $g_i$  و  $l_i$  به ترتیب متناظر بردار یک‌ه نرمال، نقطه وسط و طول اضلاع دوگانه داخل المان هستند. نحوه نام‌گذاری اضلاع دوگانه و جهت بردارهای  $\vec{n}_i$  در شکل ۴.۳ نشان داده شده‌است. برای مثال برای المان مثلث رابطه بردارهای  $\vec{n}_i$  و  $\vec{n}_{ij}$  به صورت  $\vec{n}_1 = \vec{n}_{13}$ ،  $\vec{n}_2 = \vec{n}_{21}$  و  $\vec{n}_3 = \vec{n}_{32}$  می‌باشد.

بردارهای  $\vec{\Delta}$ 

در فضای  $\xi\eta$  بردار  $\vec{\Delta}$  را برداری تعریف می‌کنیم که هم‌راستا با ضلع دوگانه‌ای است که نقطه وسط آن  $g_i$  باشد و جهت آن به سمت داخل المان باشد. در شکل ۴.۳ راستا و جهت و در جدول ۱.۳ مختصات این بردارها برای المان‌های مرجع مثلث و مربع نشان داده شده‌اند. از رابطه (۴۹.۳) می‌توان ثابت

کرد:

$$l_i \vec{n}_i = \mathbf{R} \mathbf{J} \vec{\Delta}_i, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (52.3)$$

در این رابطه  $\mathbf{R}$  ماتریس دوران ۹۰ درجه در راستای خلاف عقربه‌های ساعت است.

### بردار مقادیر محلی

مقادیر محلی  $\varphi_\alpha$  را در یک بردار قرار داده و آن را بردار مقادیر المان می‌نامیم. به زبان ریاضی:

$$\vec{\varphi}_\alpha = [\varphi_\alpha|_1 \quad \dots \quad \varphi_\alpha|_N]^T \quad \alpha = w, o \quad (53.3)$$

### ماتریس شار

برای هر المان ماتریس شار  $\mathbf{H}_{N \times N}$  را ماتریسی تعریف می‌کنیم که در رابطه زیر صدق کند ( $\mathbf{H}_i$  یعنی سطر  $i$  ام  $\mathbf{H}$ ):

$$\mathbf{H}_i \vec{\varphi}_\alpha = \mathbf{K} \nabla \varphi_\alpha|_{g_i} \cdot l_i \vec{n}_i \quad i = 1, \dots, N \quad (54.3)$$

با استفاده از روابط (52.3) و (50.3) می‌توان ثابت کرد که ماتریس  $\mathbf{H}_i$  را می‌توان از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$\mathbf{H}_i = \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \Big|_{g_i} \mathbf{J}^{-1}|_{g_i} \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{J}|_{g_i} \vec{\Delta}_i \right)^T \quad i = 1, \dots, N \quad (55.3)$$

با کمک تعاریفی که ارائه دادیم می‌توانیم محاسبه ماتریس‌های محلی را شروع کنیم. ابتدا نحوه محاسبه مقادیر upwind را نشان می‌دهیم. با استفاده از روابط (8.3) و (54.3) می‌توان نشان داد که مقادیر  $\lambda|_{g_i}$  را می‌توان از روابط زیر محاسبه نمود:

$$\lambda_w|_{g_i} = \begin{cases} \lambda_w|_i & -\mathbf{H}_i \vec{\varphi}_w > 0 \\ \lambda_w|_{i-1} & -\mathbf{H}_i \vec{\varphi}_w < 0 \& i \geq 2 \\ \lambda_w|_N & -\mathbf{H}_i \vec{\varphi}_w < 0 \& i = 1 \end{cases} \quad \lambda_o|_{g_i} = \begin{cases} \lambda_o|_i & -\mathbf{H}_i(\vec{\varphi}_o + \vec{\varphi}_w) > 0 \\ \lambda_o|_{i-1} & -\mathbf{H}_i(\vec{\varphi}_o + \vec{\varphi}_w) < 0 \& i \geq 2 \\ \lambda_o|_N & -\mathbf{H}_i(\vec{\varphi}_o + \vec{\varphi}_w) < 0 \& i = 1 \end{cases} \quad (56.3)$$

اکنون نحوه محاسبه مقادیر  $a$  و  $b$  را برای نود شماره ۱ نشان می‌دهیم. به این منظور از رابطه (18.3) داریم:

$$\sum_{j=2,4} -\text{TFlux}_{1j} = [a_{11} \quad \dots \quad a_{1N}] \begin{bmatrix} \varphi_w|_1 \\ \vdots \\ \varphi_w|_N \end{bmatrix} + b_1 \quad (57.3)$$

از طرفی از ترکیب معادلات (۱۶.۳) داریم :

$$\sum_{j=2,4} -\text{TFlux}_{1j} = +\lambda|_{g_1} \mathbf{K} \nabla \varphi_w|_{g_1} \cdot (l\vec{n})_1 + \lambda_o|_{g_1} \mathbf{K} \nabla \varphi_c|_{g_1} \cdot (l\vec{n})_1 \quad (58.3)$$

$$- \lambda|_{g_2} \mathbf{K} \nabla \varphi_w|_{g_2} \cdot (l\vec{n})_2 - \lambda_o|_{g_2} \mathbf{K} \nabla \varphi_c|_{g_2} \cdot (l\vec{n})_2$$

حال با ترکیب (۵۸.۳) و (۵۴.۳) داریم:

$$\sum_{j=2,4} -\text{TFlux}_{1j} = (\lambda|_{g_1} \mathbf{H}_1 - \lambda|_{g_2} \mathbf{H}_2) \begin{bmatrix} \varphi_w|_1 \\ \vdots \\ \varphi_w|_N \end{bmatrix} + (\lambda_o|_{g_1} \mathbf{H}_1 - \lambda_o|_{g_2} \mathbf{H}_2) \begin{bmatrix} \varphi_c|_1 \\ \vdots \\ \varphi_c|_N \end{bmatrix} \quad (59.3)$$

از مقایسه دو معادله (۵۷.۳) و (۵۹.۳) مقادیر  $a$  و  $b$  را برای نود شماره ۱ به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_N \end{bmatrix} = (\lambda|_{g_1} \mathbf{H}_1 - \lambda|_{g_2} \mathbf{H}_2), \quad b_1 = (\lambda_o|_{g_1} \mathbf{H}_1 - \lambda_o|_{g_2} \mathbf{H}_2) \begin{bmatrix} \varphi_c|_1 \\ \vdots \\ \varphi_c|_N \end{bmatrix} \quad (60.3)$$

به طریقه مشابه می‌توان دیگر مقادیر  $a, b$  و  $f$  را محاسبه کرد و ماتریس  $\mathbf{A}$  و بردارهای  $\vec{B}$  و  $\vec{F}$  را به صورت زیر به دست آورد:

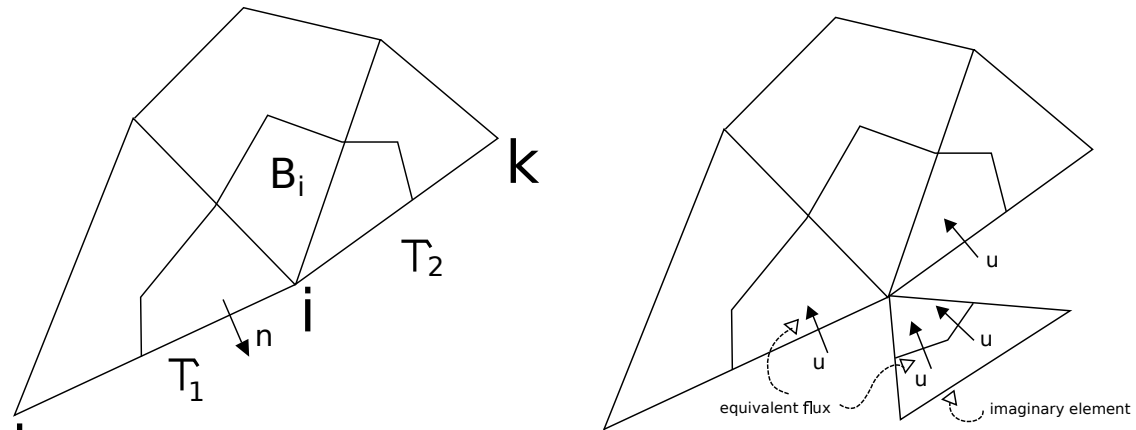
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda|_{g_1} \mathbf{H}_1 - \lambda|_{g_2} \mathbf{H}_2 \\ \vdots \\ \lambda|_{g_{N-1}} \mathbf{H}_{N-1} - \lambda|_{g_N} \mathbf{H}_N \\ \lambda|_{g_N} \mathbf{H}_N - \lambda|_{g_1} \mathbf{H}_1 \end{bmatrix} \quad \vec{B} = \begin{bmatrix} -(\lambda_o|_{g_1} \mathbf{H}_1 - \lambda_o|_{g_2} \mathbf{H}_2) \vec{\varphi}_c \\ \vdots \\ -(\lambda_o|_{g_{N-1}} \mathbf{H}_{N-1} - \lambda_o|_{g_N} \mathbf{H}_N) \vec{\varphi}_c \\ -(\lambda_o|_{g_N} \mathbf{H}_N - \lambda_o|_{g_1} \mathbf{H}_1) \vec{\varphi}_c \end{bmatrix} \quad (61.3)$$

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} (\lambda_w|_{g_1} \mathbf{H}_1 - \lambda_w|_{g_2} \mathbf{H}_2) \vec{\varphi}_w \\ \vdots \\ (\lambda_w|_{g_{N-1}} \mathbf{H}_{N-1} - \lambda_w|_{g_N} \mathbf{H}_N) \vec{\varphi}_w \\ (\lambda_w|_{g_N} \mathbf{H}_N - \lambda_w|_{g_1} \mathbf{H}_1) \vec{\varphi}_w \end{bmatrix}$$

در آخر نحوه محاسبه حجم  $B_i$  ها را ذکر می‌کنیم. با استفاده از رابطه (۴۸.۳) تقریب مقدار میانی برای محاسبه انتگرال‌ها می‌توانیم بنویسیم:

$$\text{Volume}(B_i) = \int_{B_i} d\Omega_x = \int_{B_i} \det(\mathbf{J}) d\Omega_\xi \approx \begin{cases} \frac{1}{6} \det(\mathbf{J})|_{V_i} & \text{quad} \\ \frac{1}{6} \det(\mathbf{J}) & \text{triangle} \end{cases} \quad (62.3)$$

در مثلث‌ها ماتریس یاکوبی تابعی از مکان نیست، اما در المان‌های چهارضلعی دترمینان این ماتریس باید در نقاط انتگرال‌گیری حجم محاسبه شود.



(آ) فرض می‌شود شار ورودی به حجم کنترل از یک المان فرضی وارد آن می‌شود

(ب) نام‌گذاری نودها و حجم کنترل

شکل ۵.۳: یک نود روی مرز هندسه

### ۳.۶.۳ المان شرایط مرزی

شکل ۵.۳ ب یک نود که روی مرز قرار دارد و حجم کنترل متناظرش را نمایش می‌دهد. نام این نود  $i$  و نام نودهای مجاورش که روی مرز قرار دارند  $j$  و  $k$  می‌باشد. به علاوه نیمی از ضلع  $ij$  به ناحیه مرزی  $\Gamma_1$  و نیمی از ضلع  $ik$  به ناحیه مرزی  $\Gamma_2$  تعلق دارد. هدف ما این است که شاری که از اضلاع  $ij$  و  $ik$  وارد حجم کنترل می‌شوند را محاسبه کنیم و تعیین کنیم که وجود این شارها چه تغییراتی در  $\vec{F}_G$  و  $\vec{B}_G$ ،  $\vec{A}_G$  ایجاد می‌کنند. به علاوه این شارها نشان می‌دهند که در هر گام زمانی چه مقدار سیال به مخزن وارد یا از مخزن خارج شده است. حالات زیر را در نظر بگیرید:

۱. در هر دو ناحیه مرزی  $\Gamma_1$  و  $\Gamma_2$  شرط مرزی نفوذناپذیر حاکم باشد. در این حالت هیچ شاری از  $ij$  و  $ik$  عبور نمی‌کند. لذا این نود تأثیری در  $\vec{F}_G$  و  $\vec{B}_G$ ،  $\vec{A}_G$  و یا سیال ورودی و خروجی به مخزن نخواهد داشت.

۲. در نواحی  $\Gamma_1$  و  $\Gamma_2$  دو شرط مرزی نفوذپذیر و متفاوت حاکم باشد. روش عددی ما قادر به مدل کردن چنین حالتی نیست. لذا در صورت بروز چنین حالتی بهتر است یک ناحیه کوچک نفوذناپذیر بین دو ناحیه  $\Gamma_1$  و  $\Gamma_2$  ایجاد کنیم.

۳.  $\Gamma_1$  نفوذپذیر باشد و  $\Gamma_2$  یا نفوذناپذیر باشد یا همان  $\Gamma_1$  باشد. از بین حالات عنوان شده این حالت است که نیاز به اعمال تدابیر ویژه‌ای دارد و در ادامه فقط لازم است به این حالت بپردازیم.

با توجه به فرضیات عنوان شده در حالت سوم، بردار مرزی نود  $i$  یا همان  $(ln)_i$  را به صورت معادله (۶۳.۳) تعریف می‌کنیم.

$$(l\vec{n})_i = \begin{cases} \frac{1}{V} (\text{length}(ij)\vec{n}_{ij} + \text{length}(ik)\vec{n}_{ik}) & \Gamma_1 = \Gamma_2 \\ \frac{1}{V} \text{length}(ij)\vec{n}_{ij} & \Gamma_2 = \text{impermeable} \end{cases} \quad (63.3)$$

در این معادله بردارهای  $\vec{n}$  بردارهای یکه عمود بر ضلع متناظر به سمت خارج مرز هستند. به علاوه  $l_i$  را برابر طول  $\partial B_i \cap \Gamma_1$  تعریف می‌کنیم. میزان شار آب و کل عبوری از  $\partial B_i \cap \Gamma_1$  را به ترتیب با



$u_{\Gamma i}$  و  $u_{w\Gamma i}$  نشان می‌دهیم. مطابق شکل ۳.۵.۲ می‌توانیم فرض کنیم این شار از یک المان مجازی وارد  $B_i$  می‌شود. اگر این المان را  $e_{bnd}$  بنامیم، با توجه به معادلات (۱۸.۳) و (۲۷.۳) داریم:

$$\begin{aligned} u_{w\Gamma i} &= \sum_{v_j \in \eta(v_i, e_{bnd})} -\frac{1}{\mathcal{P}} \text{SFlux}_{ij}^{bnd} = \frac{1}{\mathcal{P}} f_i^{bnd} \\ u_{\Gamma i} &= \sum_{v_j \in \eta(v_i, e_{bnd})} -\frac{1}{\mathcal{P}} \text{TFlux}_{ij}^{bnd} = \frac{1}{\mathcal{P}} b_i^{bnd} \end{aligned} \quad (۶۴.۳)$$

دقت کنید که برای المان فرضی  $e_{bnd}$  مقادیر  $a_{ij}$  برابر صفر هستند. حال به کمک معادلات (۲۴.۳) و (۲۳.۳) می‌توانیم شروط مرزی را با اسمبل کردن بردارهای محلی المان  $e_{bnd}$  اعمال کنیم. نحوه انجام این کار را برای هر نوع شرط مرزی به صورت جداگانه بیان خواهیم کرد.

### شرط مرزی نیومن برای پتانسیل

در این حالت چون مقدار سرعت روی مرز داده شده است (رجوع شود به معادله (۱۴.۲)) ابتدا می‌توانیم مقدار  $u_{\Gamma i}$  را محاسبه کنیم:

$$u_{\Gamma i} = -u_N l_i \quad (۶۵.۳)$$

وجود علامت منفی به این خاطر است که  $u_N$  مؤلفه سرعت به سمت خارج مرز را نشان می‌دهد اما  $u_{\Gamma i}$  شار ورودی را نشان می‌دهد. لذا از معادله (۶۴.۳) بردار محلی المان فرضی که تنها عضوش نود  $v_i$  است، برابر است با:

$$\vec{B} = [-\mathcal{P} u_{\Gamma i}] \quad (۶۶.۳)$$

### شرط مرزی دیریشله برای پتانسیل

در این حالت مقدار  $\varphi_w|_{vi} = \varphi_D$  را با قرار دادن  $\vec{B}_{Gi}$  برابر  $\varphi_D$  و برابر کردن سطر  $i$ م ماتریس  $\mathbf{A}_G$  با ماتریس همانی، به دستگاه (۱۳.۳) اعمال می‌کنیم. برای محاسبه  $u_{\Gamma i}$  بعد از حل دستگاه (۱۳.۳)، فرض کنید که جواب دستگاه برابر  $\vec{\Phi}$  و  $\vec{B}_{Gi}$  و  $\mathbf{A}_{Gi}$  به ترتیب برابر درایه و سطر  $i$ م  $\vec{B}_G$  و  $\mathbf{A}_G$  قبل از اعمال شرط مرزی باشند. آن گاه می‌توانیم بنویسیم:

$$u_{\Gamma i} = \frac{1}{\mathcal{P}} (\vec{B}_{Gi} - \mathbf{A}_{Gi} \vec{\Phi}) \quad (۶۷.۳)$$

### شرط مرزی نیومن برای اشباع

در این حالت مقدار  $u_{\Gamma_i}$  از قبل توسط یکی از معادلات (۶۵.۳) یا (۶۵.۳) محاسبه شده است. حال برای محاسبه  $u_{w\Gamma_i}$  از ترکیب (۴.۳)، (۵.۳) و (۱۴.۲) می توان نوشت:

$$u_{w\Gamma_i} = \left( u_{\Gamma_i} - \frac{1}{\mathcal{P}} \lambda_o |d_i^*| \mathcal{G} \mathbf{K} \nabla h \cdot (l \vec{n})_i \right) \times \frac{\lambda_w |d_i^*|}{\lambda |d_i^*|} \quad (۶۸.۳)$$

در این معادله  $\mathbf{K}$  تراوایی مطلق المان هایی است که  $v_i$  عضو آنهاست. سپس بردار محلی المان فرضی برابر خواهد بود با:

$$\vec{F} = [\mathcal{P} u_{w\Gamma_i}] \quad (۶۹.۳)$$

### شرط مرزی دیریشله برای اشباع

در این حالت مقدار  $\Delta S_i = 0$  را به دستگاه (۱۴.۳) با صفر کردن درایه  $i$  ام  $\vec{F}_G$  اعمال می کنیم. یعنی:

$$\mathcal{F}_{Gi} = 0 \quad (۷۰.۳)$$

سپس برای محاسبه  $u_{w\Gamma_i}$  اگر  $\mathcal{F}_{Gi}$  درایه  $i$  ام  $\vec{F}_G$  قبل از صفر کردن باشد می نویسیم:

$$u_{w\Gamma_i} = \frac{1}{\mathcal{P}} \mathcal{F}_{Gi} \quad (۷۱.۳)$$

### محاسبه میزان سیال ورودی به و خروجی از مخزن

فرض کنید  $Q_{w,in}^k$ ،  $Q_{w,out}^k$ ،  $Q_{in}^k$  و  $Q_{out}^k$  به ترتیب برابر میزان آب ورودی، میزان آب خروجی، کل سیال ورودی و کل سیال خروجی از آغاز تا گام زمانی  $k$  به مخزن باشند. می توان نوشت:

$$\begin{aligned} Q_{w,in}^{k+1} &= Q_{w,in}^k + \Delta t \sum \max(u_{w\Gamma}, 0) \\ Q_{w,out}^{k+1} &= Q_{w,out}^k - \Delta t \sum \min(u_{w\Gamma}, 0) \\ Q_{in}^{k+1} &= Q_{in}^k + \Delta t \sum \max(u_{\Gamma}, 0) \\ Q_{out}^{k+1} &= Q_{out}^k - \Delta t \sum \min(u_{\Gamma}, 0) \end{aligned} \quad (۷۲.۳)$$

در این معادله اپراتور جمع باید بر روی تمامی نودهایی که روی مرز قرار دارند اعمال شود.

## ۲.۳ انتخاب گام زمانی

روش IMPES بسیار حساس به گام زمانی است و در صورتی که گام زمانی بیش از حد بزرگ شود، پاسخ‌ها واگرا خواهند شد. لذا از الگوریتم ۱ برای محاسبه گام زمانی استفاده می‌کنیم [۱۱]. در این این پروژه معمولاً مقادیر  $0.001$ ،  $0.005$  و  $1/2$  برای مقادیر  $\Delta S_{min}$ ،  $\Delta S_{max}$  و  $\beta$  در نظر گرفته شده‌اند.

### الگوریتم ۱ انتخاب گام زمانی $\Delta t$

**ورودی:**  $\vec{C}$ ،  $\vec{F}$ ، حدس اولیه برای  $\Delta t$ ،  $\Delta S_{min}$ ،  $\Delta S_{max}$ ،  $\beta$ ،  $\Delta t_{min}$  و  $\Delta t_{max}$ .

**خروجی:**  $\Delta \vec{S}$  و  $\Delta t$

۱:  $\Delta \vec{S}$  را از معادله (۱۴.۳) با استفاده از حدس اولیه برای  $\Delta t$  محاسبه کن.

۲: محاسبه کن:  $x = \|\Delta \vec{S}\|_{\infty}$

۳: اگر  $x < \Delta S_{min}$  آنگاه

۴: جواب را قبول کن و برای گام زمانی بعدی قرار بده:  $\Delta t = \min(\beta \Delta t, \Delta t_{max})$ .

۵: وگرنه اگر  $\Delta S_{min} < x < \Delta S_{max}$  آنگاه

۶: پاسخ را قبول کن و تغییری در  $\Delta t$  ایجاد نکن.

۷: وگرنه اگر  $\Delta t / \beta > \Delta t_{min}$  آنگاه

۸: قرار بده:  $\Delta t = \Delta t / \beta$  و به مرحله ۱ برگرد.

۹: وگرنه

۱۰: پیام خطا چاپ کن و پروسه شبیه‌سازی را متوقف کن.

۱۱: پایان اگر

## ۸.۳ جمع‌بندی

در این فصل در ابتدا معادلات حاکم بر مسئله را به حالت بدون بعد در آورديم و نشان دادیم که پارامترهای بدون بعد حاکم بر مسئله مانند معادله (۷.۳) می‌باشند. پس از آن به بررسی شبکه محاسباتی پرداختیم و تعاریف مورد نیاز مربوط به آن را ارائه دادیم. در ادامه روش‌های IMPES و حجم محدود معرفی و نحوه استفاده از آن‌ها برای حل مسئله بیان شد. در این قسمت روش عددی خود را در الگوریتم ۲ خلاصه می‌نماییم. این الگوریتم در قالب یک کد به زبان C++ پیاده‌سازی شده است.

برای پیاده‌سازی کد محاسباتی از کتابخانه‌ها و برنامه‌های متن‌باز مختلفی استفاده شده است. برای تولید شبکه محاسباتی از نرم‌افزارهای Gmsh [۲۹] و Triangle [۳۰] استفاده شده است. برای حل دستگاه معادلات (۱۳.۳) و ذخیره ماتریس‌های اسپارس از کتابخانه Petsc [۳۱، ۳۲] بهره گرفته شده است. این کتابخانه ابزارهای مناسبی برای رفع اشکال کد را نیز در اختیار مؤلف قرار داده است. جبر ماتریسی مورد نیاز برای محاسبه ماتریس‌های محلی المان‌های مثلثی و چهارضلعی به کمک کتابخانه Armadillo [۳۳] برنامه‌نویسی شده است. در آخر نرم‌افزارهای Paraview [۳۴]، Octave [۳۵] و VisIt [۳۶] ابزار مناسب برای رسم گرافیکی پاسخ‌های آمده در فصل ۴ را فراهم کردند.

## الگوریتم ۲ خلاصه روش عددی

ورودی:

هندسۀ مسئله

شبکه محاسباتی

شرایط مرزی مطابق معادله (۱۴.۲)

شرایط اولیه مطابق معادله (۱۳.۲)

اعداد بی بعد مطابق معادله (۷.۳) و جهت جاذبه:  $\nabla h$ ویژگی‌های هر ناحیه سنگ مخزن:  $\mathbf{K}$ ,  $\phi$ ,  $P_d$ ,  $k_{rw}$ ,  $k_{ro}$  و ضخامت نواحی ترک:  $e$ منحنی فشار موینگی:  $J$ 

پارامترهای کنترل گام زمانی مطابق الگوریتم ۱

زمان اتمام شبیه‌سازی:  $t_{final}$ خروجی:  $\vec{S}$ ,  $\vec{\Phi}$  و میزان سیال خروجی از ورودی به مخزن در  $t = t_{final}$ ۱: قرار بده  $t = 0$ ,  $Q_{w,in}^k = Q_{w,out}^k = Q_{in}^k = Q_{out}^k = 0$  و  $\vec{\Phi} = \vec{0}$ ۲: مقدار  $(ln)$  را برای نودهایی که روی مرز قرار دارند، مطابق معادله (۶۳.۳) محاسبه کن.۳: مقدار  $u_{\Gamma i}$  را برای نودهایی که روی مرز  $\Gamma_{\varphi N}$  قرار دارند، مطابق معادله (۶۵.۳) محاسبه کن.۴: ماتریس  $\mathbf{H}$  را برای تمام المان‌های چهارضلعی و مثلثی، مطابق معادله (۵۵.۳) محاسبه کن.۵: تا زمانی که  $t < t_{final}$  انجام بده۶: مقادیر  $\lambda_{\alpha|gi}$  را از معادلات (۳۶.۳) و (۵۶.۳) محاسبه کن.۷:  $\vec{B}_G$  و  $\vec{A}_G$  را به کمک ماتریس‌های محلی در معادلات (۴۰.۳) و (۶۱.۳) اسمبل کن.۸: شرایط مرزی  $\Gamma_{\varphi}$  را بر روی  $\vec{B}_G$  و  $\vec{A}_G$  از معادله (۶۶.۳) اعمال کن.۹: معادله (۱۳.۳) را حل کن و  $\vec{\Phi}$  را پیدا کن.۱۰: مقادیر  $u_{\Gamma i}$  را برای نودهای روی مرز  $\Gamma_{\varphi D}$  مطابق معادله (۶۷.۳) محاسبه کن.۱۱: مقادیر  $\lambda_{\alpha|gi}$  را دوباره محاسبه کن.۱۲: بردارهای  $\vec{C}_G$  و  $\vec{F}_G$  را از معادلات (۴۰.۳)، (۶۱.۳) و (۳۳.۳) محاسبه کن.۱۳: مقادیر  $u_{w\Gamma i}$  را از معادلات (۷۱.۳) و (۶۸.۳) محاسبه کن.۱۴: شرایط مرزی  $\Gamma_S$  را بر روی  $\vec{F}_G$  مطابق معادلات (۷۰.۳) و (۶۹.۳) اعمال کن.

۱۵: معادله (۱۴.۳) را با استفاده از گام زمانی مناسب، مطابق الگوریتم ۱ حل کن.

۱۶: مقادیر سیال تزریقی و برداشتی را از معادله (۷۲.۳) به روزرسانی کن.

۱۷: قرار بده:  $t = t + \Delta t$ 

۱۸: پایان تا زمانی که

۱۹: برگردان  $\vec{S}$ ,  $\vec{\Phi}$ ,  $Q_{w,in}$ ,  $Q_{w,out}$ ,  $Q_{in}$  و  $Q_{out}$ .

## فصل ۴

# مثال‌های عددی

در این قسمت سه مسئله از مراجع معتبر برای بررسی صحت کد محاسباتی حل خواهند شد.

### ۱.۴ مسئله اول

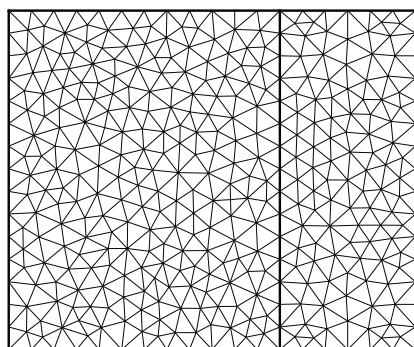
این مسئله از [۳۷، ۳۸] انتخاب شده است. در این مسئله ناپیوستگی اشباع به خاطر ناهمگنی فشار موینگی بررسی خواهد شد. هندسه مسئله از دوناچه مجاور مطابق شکل ۱.۴ آ تشکیل شده است. در زمان  $t = 0$  ناحیه - پر از آب و ناحیه + پر از نفت است. این یعنی شرط اولیه برابر است با:

$$S_o(x, y) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

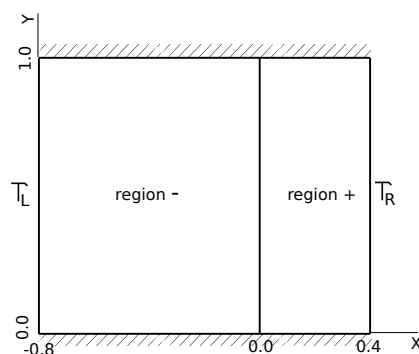
به دلیل پدیده فشار موینگی آب از ناحیه + به ناحیه - نفوذ خواهد کرد. برای مدل کردن این پدیده شرایط مرزی را مطابق جدول ۱.۴ اعمال می‌کنیم. این شرایط به این معنی هستند که آبی از مرزها به محیط متخلل تزریق نمی‌شود و دو فاز صرفاً به خاطر پدیده موینگی جابجا می‌شوند. هندسه این مسئله در راستای  $y$  متقارن است لذا این مسئله را یک بار با یک مش یک بعدی با ۱۲۰۰ نود و یک بار با یک مش بدون سازمان دو بعدی، مشابه آنچه در شکل ۱.۴ ب نشان داده شده است و با ۴۰۰۰ نود و المان‌های مثلثی حل می‌نماییم.

خواص در نظر گرفته شده برای نواحی +، - و پارامترهای بدون بعد حاکم بر مسئله در جدول ۲.۴ آمده‌اند. همانطور که مشاهده می‌کنید، دو حالت را برای توابع فشار موینگی و تراوایی نسبی در نظر می‌گیریم. در یک حالت از توابع vang استفاده می‌نماییم. منحنی فشار موینگی در این حالت از نوع cc است. در حالت دیگر از توابع brooks استفاده می‌نماییم که منحنی فشار موینگی آن از نوع cd است و پدیده فشار ورودی در آن وجود دارد و فشار موینگی می‌تواند در محل ناهمگنی پرش داشته باشد.

پروفیل‌های اشباع در  $t = 1$  در شکل ۲.۴ آمده‌اند. در هر دو حالت هماهنگی خوبی بین پاسخ ما و پاسخ نیمه‌تحلیلی [۳۷، ۳۸] مشاهده می‌شود. همانطور که انتظار داریم مقدار خطا در مش بدون سازمان دوبعدی از حالت مش یک‌بعدی بیشتر است.

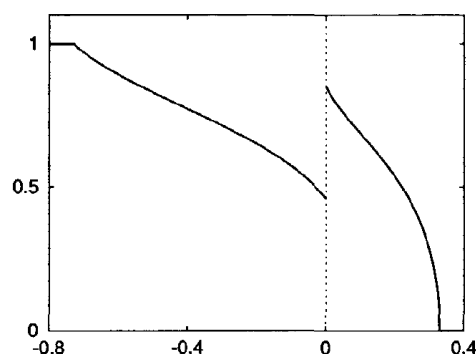
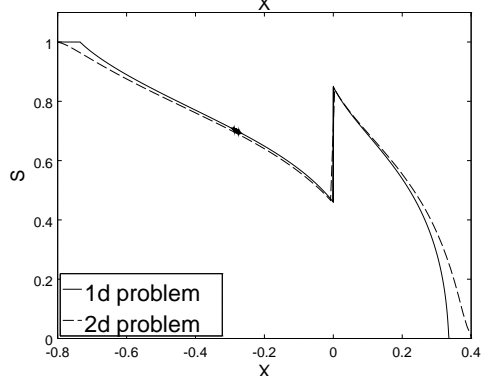
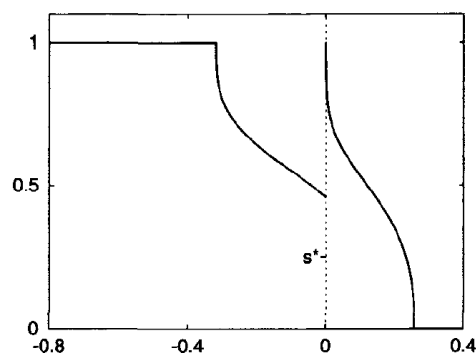
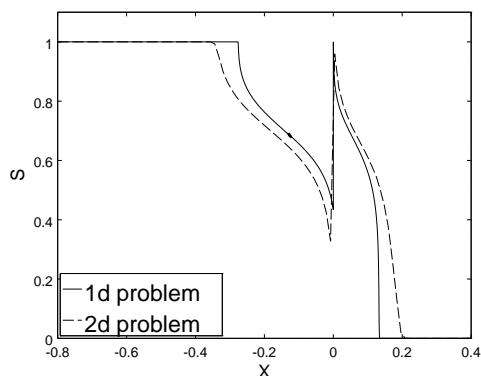


(ب) نمونه مش دوبعدی



(آ) هندسه مسئله

شکل ۱.۴: هندسه و مش مسئله اول. همانطور که مشاهده می‌کنید هندسه در راستای محور  $y$  متقارن است لذا می‌توان مسئله را در یک بعد نیز حل کرد. با توجه به اینکه مش ریز در چاپ مشخص نخواهد شد مشی که در قسمت (ب) نمایش داده‌ایم درشت‌تر از مشی است که برای حل مسئله استفاده کرده‌ایم.



(ب) پاسخ محاسبه شده توسط روش این پروژه

(آ) پاسخ نیمه‌تحلیلی مراجع [۳۷، ۳۸]

شکل ۲.۴: پروفیل اشباع روی خط  $y = 0.5$  در  $t = 1$  برای مسئله اول. در شکل‌های بالا از توابع تراوایی نسبی و فشار موینگی brooks و در شکل‌های پایین از توابع vang استفاده شده است.

جدول ۱.۴: شرایط مرزی حاکم بر مسئله اول

نام مرز	شرط مرزی اشباع	شرط مرزی پتانسیل آب
مرز حاشور خورده	$\Gamma_{SN}$	$\Gamma_{\varphi N}$ with $u_N = 0$
$\Gamma_L$	$\Gamma_{SD}$ with $S_D = 1$	$\Gamma_{\varphi N}$ with $u_N = -1$
$\Gamma_R$	$\Gamma_{SN}$	$\Gamma_{\varphi D}$ with $\varphi_D = 0$

جدول ۲.۴: خواص سنگ و پارامترهای بی‌بعد برای مسئله اول

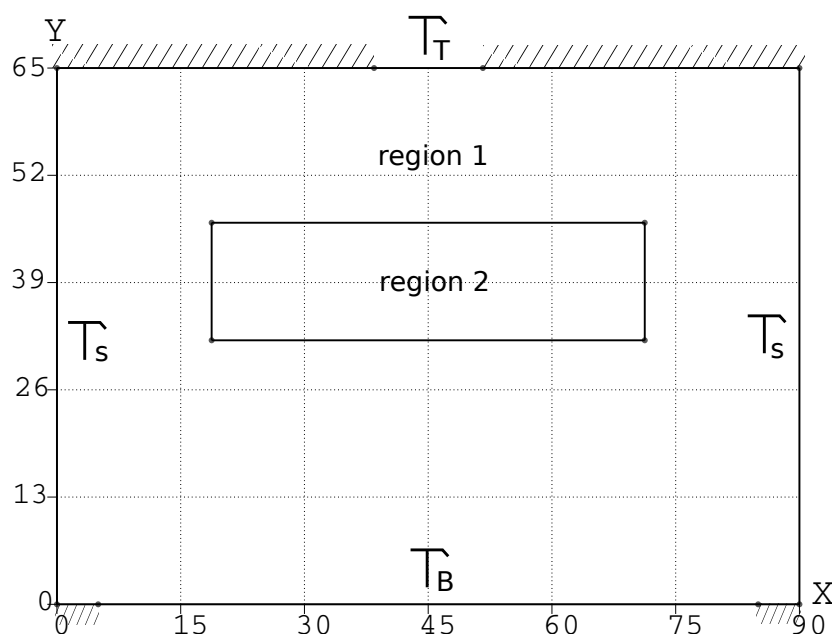
نام	مقدار
پارامترهای بی‌بعد	$\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathcal{P} = 1, \mathcal{G} = 0, \nabla h = (0, 1)$
<b>K</b>	$- : [1 \text{ } 1], \quad + : [0.25 \text{ } 0.25]$
$P_d$	$- : 1 \quad + : 2$
$\phi$	$- : 1 \quad + : 1$
$k_r, J$	$-, + :$ case(I): brooks with $\lambda = 2$ case(II): vang with $m = 2/3$

## ۲.۴ مسئله دوم

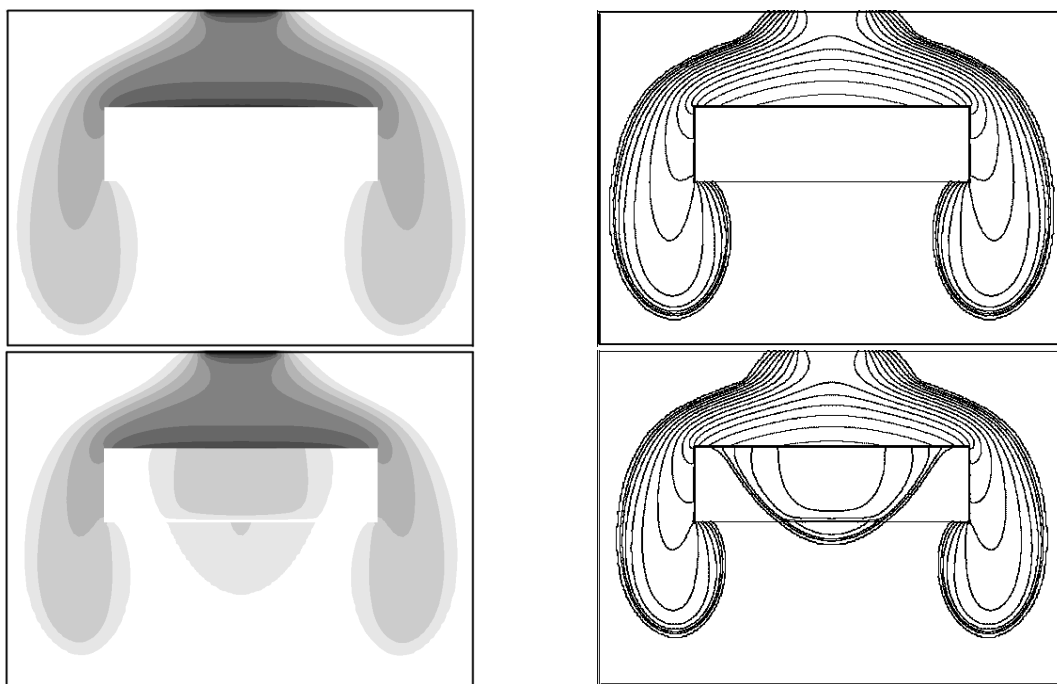
این مسئله از [۸، ۱] انتخاب شده است و مدل کردن جاذبه را بررسی خواهد کرد. در این مسئله یک محیط متخلخل مطابق شکل ۳.۴ متشکل از دو ناحیه متفاوت وجود دارد. ناحیه ۱ تراوایی بالا و فشار مویینگی کم و ناحیه ۲ تراوایی کم و فشار مویینگی بالایی دارد. در  $t = 0$  تمام محیط از آب پر شده است:  $S_o(x, y) = 1$ . یک سیال DNAPL<sup>۱</sup> و سنگین‌تر از آب از مرز  $\Gamma_T$  به محیط تزریق می‌شود و آب از دیگر مرزها خارج می‌شوند. فشار در مرز  $\Gamma_S$  از رابطه فشار هیدرواستاتیکی پیروی می‌کند، یعنی هندسه مسئله در این مرز در مجاورت آب ساکن قرار دارد. به مرور زمان DNAPL ناحیه ۱ را پر می‌کند ولی به دلیل فشار مویینگی بالای ناحیه ۲ نمی‌تواند وارد آن شود. دو حالت را برای فشار مویینگی ناحیه ۲ در نظر می‌گیریم. در یکی از این حالات DNAPL به هیچ وجه وارد ناحیه ۲ نمی‌شود ولی در حالت دیگر اندکی DNAPL وارد این ناحیه خواهد شد.

در جدول ۳.۴ شرایط مرزی مسئله مشخص شده است. پارامترهای بدون بعد و خواص سنگ‌ها به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که بسیار به مقادیر داده شده در [۸، ۱] نزدیک باشند. در جدول ۴.۴ این مقادیر داده شده‌اند. برای حل این مسئله از یک مش سازمان یافته  $90 \times 65$  استفاده شده است. در شکل ۴.۴ پروفیل اشباع برای هر دو حالت فشار مویینگی در  $t = 3500$  نمایش داده شده‌اند. همانطور که انتظار داشتیم زمانی که فشار مویینگی ناحیه ۲ کمتر است اندکی فاز DNAPL وارد آن می‌شود. نتایج به دست آمده هم‌خوانی خوبی با نتایج [۸، ۱] دارند. هر چند در حالتی که ورود سیال به ناحیه ۲ را داریم اندکی تفاوت بین پاسخ‌ها مشاهده می‌شود.

<sup>۱</sup>Dense non-aqueous phase liquid. example: trichloroethylene or extra heavy crude oil



شکل ۳.۴: هندسه مسئله دوم. در این مسئله یک ناحیه با تراوایی کم در میان ماتریس اصلی قرار گرفته است.



(ب) پاسخ محاسبه شده توسط روش این پروژه

(آ) پاسخ مراجع [۸، ۹]

شکل ۴.۴: خطوط اشباع ثابت در  $t = 3500$  برای مسئله دوم. در شکل‌های بالا مقدار  $Pd$  برای ناحیه ۲ بیشتر از شکل‌های پایین است. در قسمت (ب) رنگ سیاه نشان دهنده بیشترین مقدار اشباع DNAPL و رنگ سفید نشان دهنده کمترین مقدار اشباع DNAPL هستند.



جدول ۳.۴: شرایط مرزی حاکم بر مسئله دوم

نام مرز	شرط مرزی اشباع	شرط مرزی پتانسیل آب
مرز حاشور خورده	$\Gamma_{SN}$	$\Gamma_{\varphi N}$ with $u_N = 0$
$\Gamma_T$	$\Gamma_{SD}$ with $S_D = 0$	$\Gamma_{\varphi N}$ with $u_N = -5/14$
$\Gamma_S$	$\Gamma_{SD}$ with $S_D = 1$	$\Gamma_{\varphi D}$ with $\varphi_D = 0$
$\Gamma_B$	$\Gamma_{SD}$ with $S_D = 1$	$\Gamma_{\varphi N}$ with $u_N = 0$

جدول ۴.۴: خواص سنگ و پارامترهای بی‌بعد برای مسئله دوم

نام	مقدار
پارامترهای بی‌بعد	$\mathcal{M} = 0.9, \mathcal{N} = 100, \mathcal{P} = 100, \mathcal{G} = 45/1, \nabla h = (0, 1)$
$\mathbf{K}$	$1 : \begin{bmatrix} 66/4 & 66/4 \\ 66/4 & 66/4 \end{bmatrix}, \quad 2 : \begin{bmatrix} 33/2 & 33/2 \\ 33/2 & 33/2 \end{bmatrix}$
$P_d$	$1 : 755 \quad 2 : \text{case(I)} 1466/1 \quad \text{case(II)} 1163/5$
$\phi$	$1 : 0.360 \quad 2 : 0.343$
$k_r$	$1 : \text{brooks with } \lambda = 2/7$
$J$	$2 : \text{brooks with } \lambda = 2$
	$\text{brooks with } \lambda = 2/5$

### ۳.۴ مسئله سوم

این مسئله از [۲۱، ۷] انتخاب شده است. همانطور که در فصل ۱ اشاره کردیم، در [۷] از روش گالرکین برای حل مسئله استفاده شده است. اما در [۲۱] از روش المان محدود ترکیبی برای حل معادله فشار و از روش گالرکین گسسته برای حل معادله اشباع استفاده شده است و به دلیل conservative بودن روش دوم و استفاده از slope limiter در آن، ادعا شده است که دقت آن بالاتر و از مرتبه ۲ خواهد بود. پاسخ‌های دو مرجع اندکی متفاوت هستند لذا پاسخ‌های [۲۱] را برای مقایسه با پاسخ‌های خود انتخاب می‌کنیم.

در این مسئله مدل‌سازی ترک‌ها را بررسی خواهیم کرد. هندسه مسئله در شکل ۵.۴ آ نمایش داده شده است. در این مسئله ۶ ترک با تراوایی بسیار بالا و فشار موینگی کم در محیط ماتریس قرار دارند که مختصات آن‌ها در همین شکل قابل مشاهده هستند. در  $t = 0$  تمام محیط متخلخل پر از نفت است  $S_o(x, y) = 0$ . آب از گوشه سمت چپ پایین به محیط تزریق شده و برداشت از گوشه سمت راست بالا انجام می‌شود. دو حالت را برای این مسئله در نظر می‌گیریم. در یک حالت فشار موینگی در ترک و ماتریس صفر است ولی در حالت دیگر فشار موینگی در هر دو محیط وجود دارد.

در جدول ۶.۴ شرایط مرزی مسئله مشخص شده‌اند. پارامترهای بدون بعد و خواص ماتریس و ترک به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که بسیار به مقادیر داده شده در [۲۱] نزدیک باشند. در جدول ۵.۴ این مقادیر داده شده‌اند. در این مسئله المان‌های چهارضلعی را نیز امتحان می‌کنیم. مش استفاده شده در شکل ۵.۴ ب نمایش داده شده است.

در شکل ۷.۴ پروفیل اشباع برای هر دو حالت بدون و با فشار موینگی بعد از تزریق آب به میزان ۲۵٪ و ۵۰٪ حجم خالی مخزن نمایش داده شده‌اند. زمانی که فشار موینگی وجود داشته باشد آب

جدول ۵.۴: شرایط مرزی حاکم بر مسئله سوم

نام مرز	شرط مرزی اشباع	شرط مرزی پتانسیل آب
مرز حاشور خورده	$\Gamma_{SN}$	$\Gamma_{\varphi N}$ with $u_N = 0$
نقطه تزریق	$\Gamma_{SD}$ with $S_D = 1$	$\Gamma_{\varphi N}$ with $lu_N = 0.02$ see eq. (63.3)
نقطه برداشت	$\Gamma_{SN}$	$\Gamma_{\varphi D}$ with $\varphi_D = 0$

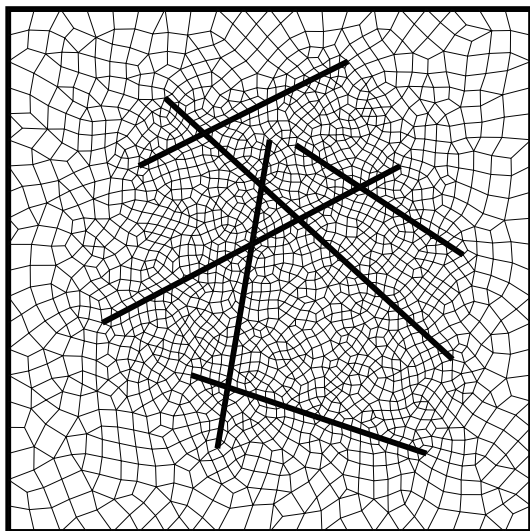
جدول ۶.۴: خواص سنگ و پارامترهای بی‌بعد برای مسئله سوم

نام	مقدار
پارامترهای بی‌بعد	$\mathcal{M} = 0.45, \mathcal{N} = 198/2, \mathcal{P} = 198/2, \mathcal{G} = -1/35, \nabla h = (0, 1)$
<b>K</b>	$m : \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad f : 800000$
<b>e</b>	$f : 4 \times 10^{-6}$
$P_d$	$m: \text{case(I)} \circ \text{case(II)} \circ 3 \quad f: \text{case(I)} \circ \text{case(II)} \circ 0.04$
$\phi$	$m : 0.85 \quad f : 0.17$
$k_r w$	$m : 0.2 S^5 \quad f : S$
$k_r n$	$m : 0.6(1 - S)^3 \quad f : 1 - S$
$J$	$-\ln(S)$

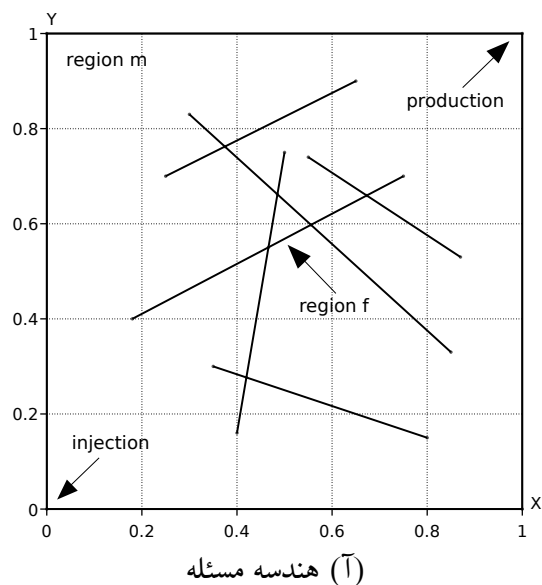
دیرتر وارد ترک‌ها می‌شود و این امر باعث می‌شود که جبهه آب دیرتر به ناحیه برداشت برسد. در شکل ۶.۴ منحنی‌های تزریق-برداشت نمایش داده شده‌اند. رسیدن دیرتر جبهه آب به ترک‌ها که منجر به برداشت نفت بیشتر می‌شود در این منحنی‌ها نیز قابل مشاهده است. هماهنگی خوبی بین پاسخ به دست‌آمده در این پروژه و پاسخ‌های داده‌شده در [۲۱] وجود دارد. هر چند در حالتی که فشار موینگی وجود نداشته باشد روش ما برداشت نفت را اندکی بیشتر پیش‌بینی می‌کند.

## ۴.۴ جمع‌بندی

در این قسمت سه مثال عددی از مراجع [۲۱، ۷، ۸، ۱، ۳۷، ۳۸] حل نمودیم تا صحت کد محاسباتی نوشته شده در این پروژه را بررسی کنیم. در مسئله اول توانایی کد در مدل کردن ناهمگنی فشار موینگی با شبیه‌سازی نفوذ آب از یک ناحیه با فشار موینگی کم به ناحیه دیگر با فشار موینگی بالا بررسی شد. در مسئله دوم مدل کردن جاذبه و ناهمگنی فشار موینگی با شبیه‌سازی نفوذ سیال DNAPL در یک ناحیه پر از آب بررسی شد. در مسئله سوم توانایی کد در مدل کردن ترک‌ها با شبیه‌سازی تزریق و برداشت آب به یک مخزن ترک‌دار بررسی شد. در تمامی مسائل نتایج به دست‌آمده از کد محاسباتی تطابق خوبی با پاسخ‌های آورده شده از مراجع داشتند. این نشان می‌دهند که کد محاسباتی به درستی پیاده‌سازی شده‌است.

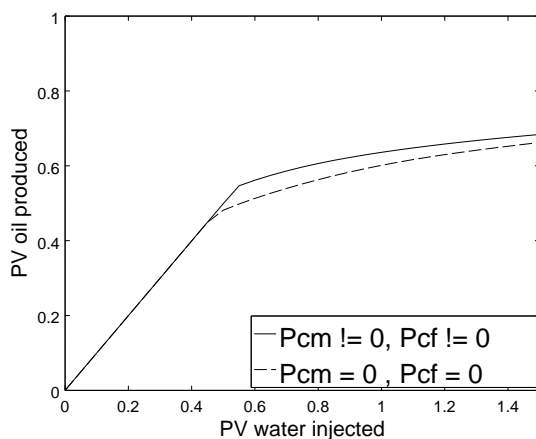


(ب) مش محاسباتی استفاده شده برای حل مسئله

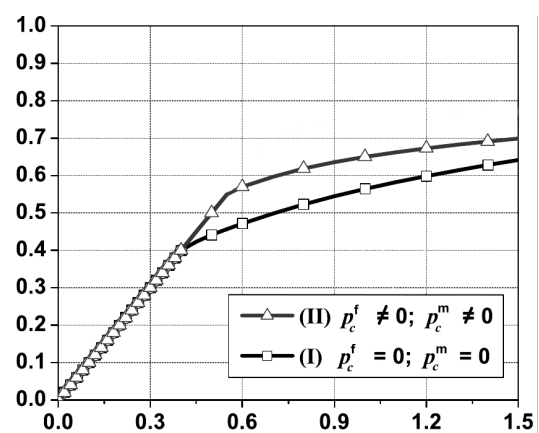


(آ) هندسه مسئله

شکل ۵.۴: هندسه و مش مسئله سوم. در این مسئله ۶ ترک در محیطی به ابعاد  $1 \times 1$  قرار دارند.

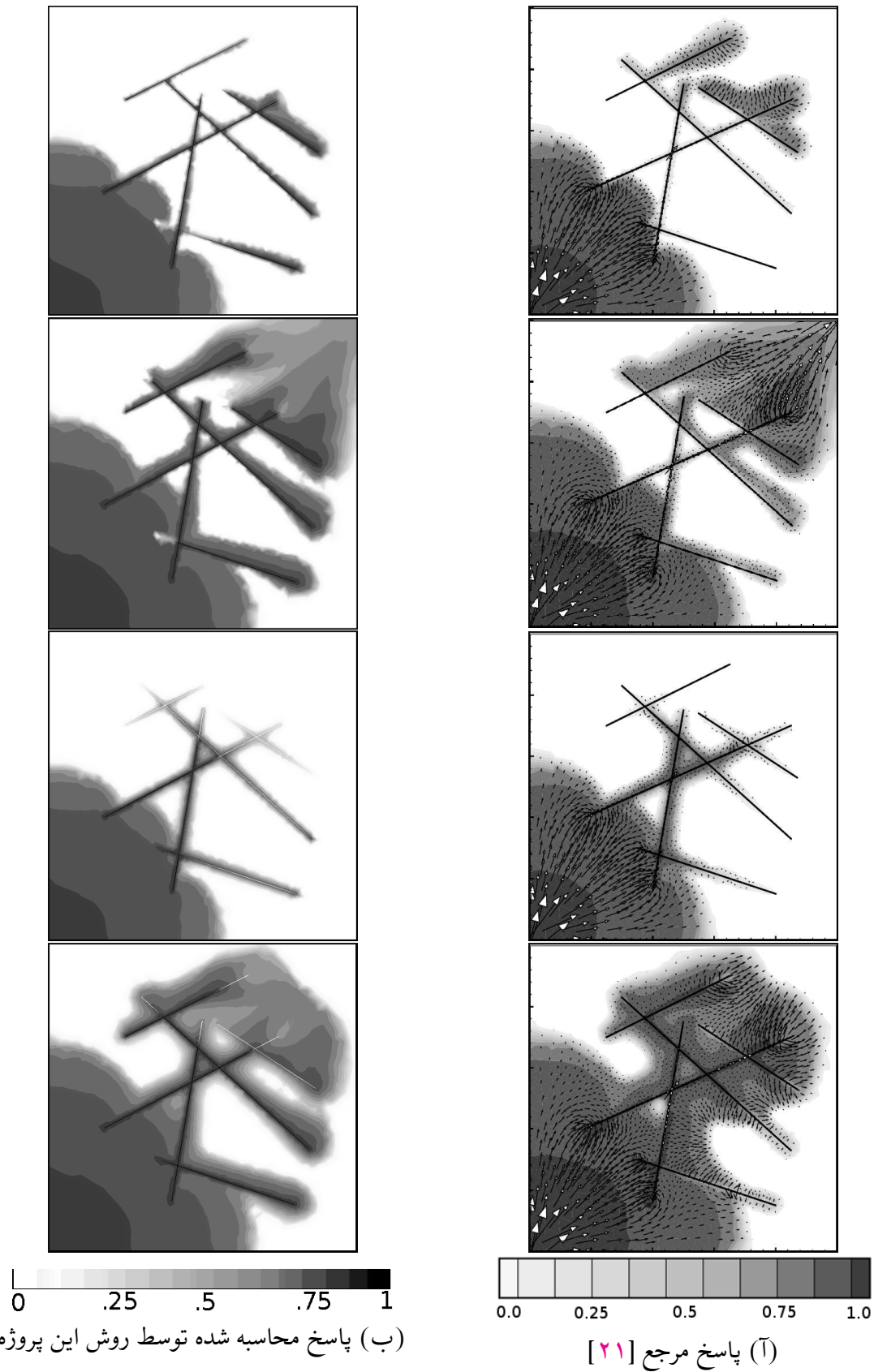


(ب) پاسخ محاسبه شده توسط روش این پروژه



(آ) پاسخ مرجع [۲۱]

شکل ۶.۴: منحنی آب تزریقی، نفت برداشتی برای مسئله سوم. واحد تزریق و برداشت حجم بدون بعد ناحیه متخلخل است.



شکل ۷.۴: پروفیل اشباع آب در حالات مختلف برای مسئله سوم. اشکال از بالا به پایین تزریق  $25PV$  بدون فشار موینگی، تزریق  $50PV$  بدون فشار موینگی، تزریق  $25PV$  با فشار موینگی و تزریق  $50PV$  با فشار موینگی را نمایش می‌دهند.

## فصل ۵

### نتیجه گیری و پیشنهادها

در این رساله یک روش حجم محدود برای شبیه سازی جریان دوفازی در محیط متخلخل ترک دار به روش ترک گسسته بیان شد. با اندکی کار جبری معادلات حاکم بر مسئله به یک معادله بیضوی برای فشار (پتانسیل آب) و یک معادله هذلولوی برای اشباع آب تبدیل گشتند. سپس این معادلات به یک روش حجم محدود گره مرجع CVFEM گسسته سازی شدند. از روش IMPES نیز برای دیکوپل کردن دستگاه معادلات استفاده شد. روش CVFEM می تواند بدون تدابیر اضافی ناهمگنی و ناهمسانی تراوایی مطلق را مدل کند، اما برای مدل کردن ناهمگنی فشار موینگی تدابیر اضافی را اتخاذ نمودیم. در آخر برای بررسی صحت کد محاسباتی سه مسئله شاخص را حل نمودیم. دو مسئله اول به بررسی ناهمگنی فشار موینگی و جاذبه می پرداختند و در مسئله آخر مدل کردن ترک ها بررسی گشت. کارهای ذیل جهت ادامه تحقیق حاضر پیشنهاد می شوند:

- روش ترک گسسته قادر است که وجود ترک ها را با دقت بالایی مدل کند، اما با زیاد شدن تعداد ترک ها زمان محاسباتی مورد نیاز آن بسیار زیاد می شود. لذا در پروژه ها صنعتی از روش های دیگری که به نام روش های ترک پیوسته شناخته می شوند، استفاده می شود. در این روش ها پارامترهایی به نام توابع انتقال وجود دارند که معمولاً تقریبی از آن ها به صورت تجربی و یا تحلیلی محاسبه می شود. روش ترک گسسته می تواند راه جدیدی را برای محاسبه توابع انتقال ارائه دهد. لذا پیشنهاد می شود که این دو روش با یکدیگر مقایسه شوند و سعی شود که از روش ترک گسسته جهت ارتقا روش های ترک پیوسته استفاده شود.
- مدل جریان دوفاز غیرامتزاجی برای شروع تحقیق در زمینه روش ترک گسسته مناسب می باشد. اما برای حل مسائل واقعی و پر کاربرد در صنعت نیاز به تعمیم روش ترک گسسته برای حل مدل های جریان پیشرفته تر مثل نفت سیاه احساس می شود. لذا پیشنهاد می شود که روش پروژه حاضر برای حل معادلات نفت سیاه تعمیم داده شود.
- در تحقیق حاضر ناهمگنی فشار موینگی به کمک حل تحلیلی تعدادی معادله مرتبط با فشار موینگی در بخش ۲.۵.۳ مدل شد. به دلیل استفاده از حل تحلیلی محدودیتی در کار وجود دارد که تمام نواحی باید دارای یک منحنی  $J(S)$  باشند. در صورتی که بتوانیم معادلات حاضر را به روش عددی حل نماییم این محدودیت برطرف می شود. به علاوه می توانیم به جای توابع ریاضی از درون یابی نقاط گسسته برای محاسبه مقادیر  $J(S)$  استفاده نماییم. این کار شاید در مدل جریان دوفاز غیرامتزاجی اهمیت زیادی نداشته باشد اما در مدل های پیشرفته تر مثل نفت

سیاه الزامی است.

- روش CVFEM محدودیت‌هایی دارد. مهمترین آن‌ها این است که سرعت فازها را با دقت خیلی کمتری نسبت به متغیرهای اشباع و فشار حل می‌نماید. در صورت نیاز به دقت بالاتر برای محاسبه شارها می‌توان به سراغ روش حجم محدود ارائه شده در [۱۸] و یا روش MFE [۲۰، ۲۱] برای حل معادله فشار رفت. از بین این دو پیاده‌سازی روش اول ساده‌تر می‌باشد و پیشنهاد می‌شود که از آن استفاده شود. محدودیت دیگر عدم امکان مدل کردن ترک‌هایی است که جلوی جریان را می‌گیرند. استفاده از روش‌های سلول مرجع به جای گره مرجع [۱۵، ۱۸] می‌تواند این مشکل را برطرف سازد.
- استفاده از روش کاملاً ضمنی به جای روش IMPES نیز می‌تواند زمان محاسباتی را کاهش دهد و راندمان کد محاسباتی را افزایش دهد.

## کتابنامه

- [1] Bastian, P. Numerical computation of multiphase flow in porous media. Habilitationsschrift, [https://conan.iwr.uni-heidelberg.de/people/peter/pdf/Bastian\\_habilitationthesis.pdf](https://conan.iwr.uni-heidelberg.de/people/peter/pdf/Bastian_habilitationthesis.pdf), 1999. 1, 3, 5, 11, 13, 15, 41, 42, 44
- [2] Sarma, Pallav. *New transfer functions for simulation of naturally fractured reservoirs with dual porosity models*. Ph.D. thesis, Stanford University, 2003. 2
- [3] van Golf-Racht, Theodor D. *Fundamentals of fractured reservoir engineering*. Elsevier, 1982. 2
- [4] Berkowitz, Brian. Characterizing flow and transport in fractured geological media: A review. *Advances in water resources*, 25(8):861–884, 2002. 2
- [5] Baca, RG, Arnett, RC, and Langford, DW. Modelling fluid flow in fractured-porous rock masses by finite-element techniques. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 4(4):337–348, 1984. 3
- [6] Noorishad, Jahan and Mehran, Mohsen. An upstream finite element method for solution of transient transport equation in fractured porous media. *Water Resources Research*, 18(3):588–596, 1982. 3
- [7] Karimi-Fard, Mohammad, Firoozabadi, Abbas, et al. Numerical simulation of water injection in fractured media using the discrete-fracture model and the galerkin method. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, 6(02):117–126, 2003. 3, 8, 11, 17, 43, 44
- [8] Bastian, Peter and Helmig, Rainer. Efficient fully-coupled solution techniques for two-phase flow in porous media: Parallel multigrid solution and large scale computations. *Advances in Water Resources*, 23(3):199–216, 1999. 3, 41, 42, 44
- [9] Reichenberger, Volker, Jakobs, Hartmut, Bastian, Peter, and Helmig, Rainer. A mixed-dimensional finite volume method for two-phase flow in fractured porous media. *Advances in Water Resources*, 29(7):1020–1036, 2006. 3
- [10] Reichenberger, Volker. *Numerical simulation of multiphase flow in fractured porous media*. Ph.D. thesis, 2003. 3
- [11] Monteagudo, JEP and Firoozabadi, A. Control-volume method for numerical simulation of two-phase immiscible flow in two-and three-dimensional discrete-fractured media. *Water Resources Research*, 40(7), 2004. 3, 8, 11, 23, 37



- [12] Monteagudo, Jorge EP, Firoozabadi, Abbas, et al. Control-volume model for simulation of water injection in fractured media: incorporating matrix heterogeneity and reservoir wettability effects. *Spe Journal*, 12(03):355–366, 2007. [3](#), [14](#)
- [13] Monteagudo, JEP and Firoozabadi, A. Comparison of fully implicit and impes formulations for simulation of water injection in fractured and unfractured media. *International journal for numerical methods in engineering*, 69(4):698–728, 2007. [3](#)
- [14] Monteagudo, JEP, Firoozabadi, A, et al. Numerical simulation of water injection in disconnected and connected fractured media using jacobian-free fully implicit control volume method. in *SPE/DOE Symposium on Improved Oil Recovery*. Society of Petroleum Engineers, 2004. [3](#)
- [15] Karimi-Fard, M, Durlofsky, LJ, Aziz, K, et al. An efficient discrete-fracture model applicable for general-purpose reservoir simulators. *SPE Journal*, 9(02):227–236, 2004. [3](#), [17](#), [48](#)
- [16] Aavatsmark, Ivar, Barkve, Tor, Bøe, O, and Mannseth, Trond. Discretization on unstructured grids for inhomogeneous, anisotropic media. part i: Derivation of the methods. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 19(5):1700–1716, 1998. [4](#)
- [17] Edwards, Michael G and Rogers, Clive F. Finite volume discretization with imposed flux continuity for the general tensor pressure equation. *Computational Geosciences*, 2(4):259–290, 1998. [4](#)
- [18] Ahmed, R, Edwards, MG, Lamine, S, Huisman, BAH, and Pal, M. Mixed-dimensional model-cvd-mpfa coupled with a lower-dimensional fracture model. in *ECMOR XIV-14th European conference on the mathematics of oil recovery*, 2014. [4](#), [48](#)
- [19] Huber, R and Helmig, R. Multiphase flow in heterogeneous porous media: A classical finite element method versus an implicit pressure–explicit saturation-based mixed finite element–finite volume approach. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 29(8):899–920, 1999. [4](#)
- [20] Hoteit, Hussein and Firoozabadi, Abbas. Numerical modeling of two-phase flow in heterogeneous permeable media with different capillarity pressures. *Advances in Water Resources*, 31(1):56–73, 2008. [4](#), [8](#), [48](#)
- [21] Hoteit, Hussein and Firoozabadi, Abbas. An efficient numerical model for incompressible two-phase flow in fractured media. *Advances in Water Resources*, 31(6):891–905, 2008. [4](#), [43](#), [44](#), [45](#), [46](#), [48](#)
- [22] Bear, Jacob. *Dynamics of fluids in porous media*. Courier Corporation, 2013. [5](#)
- [23] Brooks, Rl H. Properties of porous media affecting fluid flow. in *Journal of the Irrigation and Drainage Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, vol. 92, pp. 61–88, 1966. [9](#)



- [24] Van Genuchten, M Th. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil science society of America journal*, 44(5):892–898, 1980. 9
- [25] Parker, JC, Lenhard, RJ, and Kuppusamy, T. A parametric model for constitutive properties governing multiphase flow in porous media. *Water Resources Research*, 23(4):618–624, 1987. 9
- [26] Van Duijn, CJ, Molenaar, Johannes, and De Neef, MJ. The effect of capillary forces on immiscible two-phase flow in heterogeneous porous media. *Transport in Porous Media*, 21(1):71–93, 1995. 9, 13
- [27] Baliga, BR and Patankar, SV. A control volume finite-element method for two-dimensional fluid flow and heat transfer. *Numerical Heat Transfer*, 6(3):245–261, 1983. 23
- [28] Cordazzo, Jonas and Maliska, Cordazzo. An element based conservative scheme using unstructured grids for reservoir simulation. in *SPE International Student Paper Contest, The SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Houston, Texas*, 2004. 29
- [29] Geuzaine, Christophe and Remacle, Jean-François. Gmsh: A 3-d finite element mesh generator with built-in pre-and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(11):1309–1331, 2009. 37
- [30] Shewchuk, Jonathan Richard. Triangle: Engineering a 2d quality mesh generator and delaunay triangulator. in *Applied computational geometry towards geometric engineering*, pp. 203–222. Springer, 1996. 37
- [31] Balay, Satish, Abhyankar, Shrirang, Adams, Mark F., Brown, Jed, Brune, Peter, Buschelman, Kris, Eijkhout, Victor, Gropp, William D., Kaushik, Dinesh, Knepley, Matthew G., McInnes, Lois Curfman, Rupp, Karl, Smith, Barry F., and Zhang, Hong. PETSc users manual. Tech. Rep. ANL-95/11 - Revision 3.5, Argonne National Laboratory, 2014. 37
- [32] Balay, Satish, Gropp, William D., McInnes, Lois Curfman, and Smith, Barry F. Efficient management of parallelism in object oriented numerical software libraries. in Arge, E., Bruaset, A. M., and Langtangen, H. P., eds. , *Modern Software Tools in Scientific Computing*, pp. 163–202. Birkhäuser Press, 1997. 37
- [33] Sanderson, Conrad. Armadillo: An open source c++ linear algebra library for fast prototyping and computationally intensive experiments. 2010. 37
- [34] Ayachit, U. The paraview guide: A parallel visualization application, 2015. 37
- [35] Octave community. GNU Octave 3.8.1, 2014. [www.gnu.org/software/octave/](http://www.gnu.org/software/octave/). 37

- [36] Childs, Hank, Brugger, Eric, Whitlock, Brad, Meredith, Jeremy, Ahern, Sean, Pugmire, David, Biagas, Kathleen, Miller, Mark, Harrison, Cyrus, Weber, Gunther H., Krishnan, Hari, Fogal, Thomas, Sanderson, Allen, Garth, Christoph, Bethel, E. Wes, Camp, David, Rübel, Oliver, Durant, Marc, Favre, Jean M., and Navrátil, Paul. VisIt: An End-User Tool For Visualizing and Analyzing Very Large Data. in *High Performance Visualization—Enabling Extreme-Scale Scientific Insight*, pp. 357–372. Oct 2012. 37
- [37] De Neef, Michel Jacques. *Modelling capillary effects in heterogeneous porous media*. Ph.D. thesis, 2000. <http://repository.tudelft.nl/view/ir/uuid%3A5a7eaac7-6521-4b77-8667-f77ab5931880/>. 39, 40, 44
- [38] van Duijn, Cornelius J and De Neef, MJ. Self-similar profiles for capillary diffusion driven flow in heterogeneous porous media. 1996. 39, 40, 44

## Abstract

A numerical method for simulation of two-phase immiscible flow in heterogeneous, inhomogeneous, two-dimensional porous media containing discrete fractures is provided. A cell-vertex finite volume method is used to discretize the governing equations and the coupling of equations is handled by the IMPES (Implicit Pressure Explicit Saturations) method. Assuming that fractures are very thin compared to the adjacent matrix, one-dimensional elements have been used for modeling fractures, making the numerical method faster and robust. In order to verify the proposed method, three benchmark problems are solved and the results are compared to related references.

**Keywords:** *two-phase flow, porous media, cell-vertex finite volume method, discrete fracture method*



Sharif University of Technology  
Mechanical Engineering Department

Bachelor of Science Thesis

Topic

# **Implementing The Discrete Fracture Method for Simulation of Two-Phase Flow in Porous Media**

By

Shayan Hoshyari

Supervisor

Dr. Mehrdad T. Manzari

June 2015