DESIGUALDAD DE CHEBYSHEV

Si la variable aleatoria X tiene $E(X) = \mu$ y $V(X) = \sigma^2$ finita, entonces para cualquier $k > 1$ se cumple:

$$P(|x - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

Prueba:

Sea $\epsilon = k \cdot \sigma$

$\sigma^2 = E(X - \mu)^2$

$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2 \cdot 1_{(|X-\mu| \geq \epsilon)} + (X - \mu)^2 \cdot 1_{(|X-\mu| < \epsilon)}]$

Por la linealidad de la esperanza E(X):

$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2 \cdot 1_{(|X-\mu| \geq \epsilon)}] + E[(X - \mu)^2 \cdot 1_{(|X-\mu| < \epsilon)}]$

Como es la suma de 2 nùmeros reales positivos entonces se cumple:

$\sigma^2 \geq E[(X - \mu)^2 \cdot 1_{(|X-\mu| \geq \epsilon)}] \; \cdots$ (I)

Ademas se cumple que:

$(X - \mu)^2 \geq \epsilon^2$

Entonces:

$E[(X - \mu)^2 \cdot 1_{(|X-\mu| \geq \epsilon)}] \geq E[\epsilon^2 \cdot 1_{(|X-\mu| \geq \epsilon)}] = \epsilon^2 \cdot E[1_{(|X-\mu| \geq \epsilon)}]$

De (I) se tiene que:

$\sigma^2 \geq \epsilon^2 \cdot E[1_{(|X-\mu| \geq \epsilon)}]$

$\epsilon^2 \cdot E[1_{(|X-\mu| \geq \epsilon)}] = \epsilon^2 \cdot P(|X - \mu| \geq \epsilon)) \leq \sigma^2$

Como $\epsilon \neq 0$

$P(|x - \mu| \geq \epsilon) \leq \dfrac{\sigma^2}{\epsilon^2}$

Como $\epsilon = k \cdot \sigma$

$\therefore P(|x - \mu| \geq k\sigma) \leq \dfrac{1}{k^2}$