



Introdução à Física Computacional 1S/2018

Projeto 3 — Movimento realístico

Início: 02 de Abril de 2018

Data da entrega do relatório: 23 de Abril de 2018

Prof.: Eric C. Andrade

Descrição:

Discutiremos aqui como resolver as equações diferenciais referentes à segunda lei de Newton para partículas pontuais em situações um pouco mais realísticas, por exemplo envolvendo a resistência do ar. Como método de solução de equações diferenciais, implementaremos o método de Euler.

Sugestão de execução:

Exercício 1: Aula 5. Exercício 2: Aulas 5 e 6. Exercício 3: Aulas 6 e 7.

1) Efeito resistivo do ar em bicicletas

Estudaremos o movimento de um ciclista pontual (descrição de seu centro de massa) se movendo em uma linha reta em um terreno plano. Nosso objetivo é determinar a velocidade do ciclista como função do tempo. A segunda lei de Newton para o problema nos dá

$$m \frac{dv}{dt} = F, \quad (1)$$

onde m é a massa do sistema ciclista + bicicleta e F é a força que o ciclista emprega para realizar o movimento às custas de suas calorias. Consideraremos aqui uma bicicleta ideal que não possua qualquer tipo de atrito em suas engrenagens. Desprezaremos também o atrito do pneu da bicicleta com o chão. Os efeitos hidrodinâmicos da resistência do ar serão considerados em breve. Mesmo com tantas simplificações, ainda é difícil calcularmos a força F . Por isso, trataremos o problema de uma outra forma. Se multiplicarmos os dois lados da Eq. (1) por v obtemos

$$\frac{dE}{dt} = P, \quad (2)$$

onde introduzimos a energia cinética do sistema ciclista + bicicleta $E = mv^2/2$ e a potência $P = Fv$ produzida pelo ciclista. Experimentalmente, é sabido que atletas de alto desempenho são capazes de produzir uma potência média de 400 W para atividades que durem cerca de 1 hora (vejam, por exemplo, esse [link](#)). Assumindo uma potência constante no tempo podemos então resolver a Eq. (2) para determinarmos a velocidade

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) &= P, \\ \frac{d}{dt} (v^2) &= \frac{2P}{m}, \\ v^2(t) &= v_0^2 + \frac{2P}{m} t. \end{aligned} \quad (3)$$

Vamos agora considerar o efeito da resistência do ar. Em geral, esperamos que a força resistiva tenha a seguinte relação

$$F_{\text{res}} = -\gamma_1 v - \gamma_2 v^2, \quad (4)$$

que se parece muito com uma expansão em série de Taylor. Nessa discussão, o primeiro termo, que pode ser estimado pela lei de Stokes para o escoamento hidrodinâmico de objetos simples, pode ser desprezado frente ao segundo termo que domina para velocidades moderadas e altas. Temos assim

$$F_{\text{res}} = -\gamma_2 v^2, \quad (5)$$

O coeficiente γ_2 pode ser estimado de maneira simples para nossos presentes objetivos. A combinação ciclista + bicicleta se move com velocidade v e empurra, em um intervalo de tempo dt , uma massa de ar dada por $dm_{\text{ar}} = \rho dV = \rho A v dt$, onde A é a área de frontal do objeto que entra em contato com o ar e ρ é a densidade do ar. A energia cinética dada à massa de ar é então $dE_{\text{ar}} = dm_{\text{ar}} v^2 / 2$, que nada mais é do que o trabalho feito pela força de resistência do ar $W_{\text{res}} = -F_{\text{res}} v dt = dE_{\text{ar}}$, donde vem que $\gamma_2 = \rho A / 2$ e, portanto,

$$F_{\text{res}} = -\frac{1}{2} \rho A v^2. \quad (6)$$

A equação diferencial que precisamos resolver é então dada por

$$\frac{dv}{dt} = \frac{P}{mv} - \frac{\rho A v^2}{2m}. \quad (7)$$

Para resolvermos a Eq. (7) numericamente a discretizaremos por meio da derivada de dois pontos para frente, em uma aproximação que é conhecida como **método de Euler**:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\ &\approx \frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta t}, \quad t_i = i \Delta t \quad i = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Combinando as Eqs. (7) e (8) vem então que

$$v_{i+1} = v_i + \frac{P}{m v_i} \Delta t - \frac{\rho A v_i^2}{2m} \Delta t. \quad (9)$$

Esse é o resultado da aplicação do método de Euler para nosso problema. Para um Δt suficientemente pequeno, damos então um palpite inicial para v em $t = 0$ e iteramos esse valor para tempos posteriores para construirmos a solução do problema. Vamos agora explorar esse resultado numericamente.

Considere que $m = 70$ kg e que $P = 400$ W. A duração do exercício será de 5 min, 300 s, e você pode empregar passos de tempo $\Delta t = 0.1$ s. Assuma que a velocidade inicial da bicicleta seja de 4 m/s (dentro de nossa formulação o ciclista não pode partir do repouso, porquê?).

(a) Escreva um programa FORTRAN que calcule a velocidade como função do tempo para o caso sem resistência do ar, Eq. (9) com $\rho = 0$. Grafique seus resultados, comparando-os com a solução exata, Eq. (3). Existe um limite para a velocidade nesse caso? Qual é a distância percorrida pelo ciclista após 5 min?

(b) Escreva um programa FORTRAN que calcule a velocidade como função do tempo para o caso com resistência do ar, Eq. (9) com $\rho = 1.3$ kg/m³ e $A = 0.333$ m². Grafique seus resultados. Calcule a velocidade terminal nesse caso e a compare com o resultado analítico, Eq. (33). Quando essa velocidade terminal é atingida? Qual é a distância percorrida pelo ciclista após 5 min?

(c) Calcule agora a velocidade como função do tempo para o caso com resistência do ar, Eq. (9), variando o valor da área A e mantendo $\rho = 1.3$ kg/m³. Faça um gráfico de $v \times t$ para pelo menos três valores diferentes de A . Discuta seus resultados e os correlacione com pelo menos uma das técnicas empregadas por ciclistas profissionais durante as corridas.

2) Lançamento de projéteis

O método de Euler discutido no problema anterior pode ser facilmente adaptado para problema em duas dimensões. Como exemplo, estudaremos o lançamento de projéteis. Nesse caso, as equações do movimento, na ausência de resistência do ar, são dadas por

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -g, \quad (10)$$

onde x e y são as coordenadas horizontal e vertical do projétil, respectivamente, e g é a aceleração da gravidade. Para utilizarmos o método de Euler desenvolvido previamente, transformaremos esse par de equações diferenciais de segunda ordem quatro equações diferenciais de primeira ordem

$$\frac{dx}{dt} = v_x \quad \text{e} \quad \frac{dv_x}{dt} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y \quad \text{e} \quad \frac{dv_y}{dt} = -g, \quad (12)$$

onde v_x e v_y são, respectivamente, as velocidades ao longo das direções x e y . Se utilizarmos o método de Euler, as quatro diferenciais do problema são aproximadas por

$$x_{i+1} = x_i + v_{x,i} \Delta t, \quad (13)$$

$$v_{x,i+1} = v_{x,i}, \quad (14)$$

$$y_{i+1} = y_i + v_{y,i} \Delta t, \quad (15)$$

$$v_{y,i+1} = v_{y,i} - g \Delta t. \quad (16)$$

Para um Δt suficientemente pequeno, damos então um palpite inicial para x , y , v_x e v_y e iteramos esses valores para tempos posteriores para construirmos a solução do problema. Como no caso anterior da bicicleta, vamos estudar os efeitos da resistência do ar sobre o movimento de projéteis para altas velocidades. Como essa é uma força que sempre se opõe ao movimento, a escrevemos como

$$\vec{F}_{\text{res}} = -\gamma_2 v \vec{v}, \quad (17)$$

onde $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ e assumiremos o coeficiente γ_2 como uma constante determinada experimentalmente. Note que agora as coordenadas x e y ficam acopladas via \vec{F}_{res} e seu movimento não é mais independente. As equações de Euler ficam então

$$x_{i+1} = x_i + v_{x,i} \Delta t, \quad (18)$$

$$v_{x,i+1} = v_{x,i} - \frac{\gamma_2}{m} \sqrt{v_{x,i}^2 + v_{y,i}^2} v_{x,i} \Delta t, \quad (19)$$

$$y_{i+1} = y_i + v_{y,i} \Delta t, \quad (20)$$

$$v_{y,i+1} = v_{y,i} - g \Delta t - \frac{\gamma_2}{m} \sqrt{v_{x,i}^2 + v_{y,i}^2} v_{y,i} \Delta t. \quad (21)$$

Vamos explorar esse problema numericamente. Considere que o projétil parta de $x = y = 0$ com $v_{x,0} = v \cos \theta$, $v_{y,0} = v \sin \theta$ e $v = 700$ m/s. Assuma $g = 9.8$ m/s², $\gamma_2/m = 0.00004$ m⁻¹ e $\Delta t = 0.01$ s.

(a) Escreva um programa FORTRAN que calcule a trajetória do projétil no caso em que não há resistência do ar, Eqs. (13) à (16). Grafique a trajetória nesse caso para diferentes ângulos de lançamento θ . Qual é o ângulo de lançamento θ_{max} que corresponde ao alcance máximo A_{max} do projétil?

(b) Escreva um programa FORTRAN que calcule a trajetória do projétil no caso em que consideramos resistência do ar, Eqs. (18) à (21). Grafique a trajetória nesse caso para diferentes ângulos de lançamento θ . Quais são θ_{max} e A_{max} nesse caso? θ_{max} é maior ou menor do que aquele no caso sem resistência do ar? Discuta seus resultados.

Dica: Determine A_{max} e θ_{max} por meio de um gráfico de $A \times \theta$.

(c) Os itens anteriores mostraram que a resistência do ar é um importante ingrediente para uma abordagem realística do problema de lançamento de projéteis. Contudo, há um outro aspecto importante da física do problema que não levamos em consideração que é a variação da densidade do ar com a altitude. Essa é uma observação importante porque o projétil alcança alturas consideráveis, nas quais sabemos que a densidade do ar é menor em comparação àquela ao nível do mar. Da Eq. (6) decorre então que a resistência do ar é menor em altitudes elevadas. Um modelo simples para essa variação é obtida dentro da aproximação adiabática na qual temos

$$\rho = \rho_0 \left(1 - a \frac{y}{T_0} \right)^\alpha, \quad (22)$$

onde $a = 6.5 \times 10^{-3}$ K/m é a taxa de variação da temperatura com a altitude, T_0 é a temperatura ao nível do mar (que tomaremos como 300 K) e o expoente $\alpha = 2.5$ para o ar. Faça agora a seguinte substituição em seu código

$$\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 \left(1 - a \frac{y}{T_0} \right)^\alpha, \quad (23)$$

para incluir os efeitos da densidade do ar. Novamente, grafique a trajetória do projétil para diferentes ângulos de lançamento θ . Quais são agora θ_{max} e A_{max} ? Discuta seus resultados.

(d) Considerando $\theta = \theta_{\text{max}}$, como determinado no item (c), varie a velocidade de lançamento em $\pm 1\%$ e obtenha os novos alcances A . Baseado nesses resultados, você diria que é fácil aterrissar (acertar) em um ponto (alvo) específico?

3) Pêndulo simples

Estudaremos agora o movimento do pêndulo simples como mostrado na figura ao lado. Nele temos uma massa m presa no ponto P por uma corda inextensível de tamanho L . Definimos como a variável dinâmica do problema o ângulo θ com relação à vertical. A equação do movimento para a componente tangencial da aceleração é então dada por

$$ma_\theta = mL \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin\theta,$$

e assim a equação diferencial para o movimento do pêndulo é

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin\theta, \quad (24)$$

e sua energia mecânica é dada por

$$E = \frac{1}{2}mL^2\omega^2 + mgL(1 - \cos\theta), \quad (25)$$

onde

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}, \quad (26)$$

é a velocidade angular.

No limite em que $\theta \rightarrow 0$, pequenas oscilações, sabemos que o movimento é harmônico com período $T = 2\pi\sqrt{L/g}$. O que queremos fazer aqui é estudar o período no caso geral. Podemos utilizar a mesma ideia do problema anterior e escrever a Eq. (24) como duas equações diferenciais de primeira ordem para aplicarmos o método de Euler

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{L} \sin\theta \rightarrow \omega_{i+1} = \omega_i - \frac{g}{L} \sin\theta_i \Delta t, \quad (27)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \rightarrow \theta_{i+1} = \theta_i + \omega_i \Delta t. \quad (28)$$

Considere agora $m = 1$ kg, $L = 1$ m e $g = 10$ m/s. O período do movimento harmônico correspondente é $T_o = 1.98692$ s.

(a) Escreva um código FORTRAN que implemente as Eqs. (27) e (28). Se soltarmos o pêndulo a partir do repouso para $\theta_o = 30^\circ$, calcule o ângulo e a energia mecânica do sistema como função do tempo para $0 \leq t \leq 20$ s considerando $\Delta t = 0.005$ s. Grafique e discuta seus resultados.

(b) Como vimos no item (a), o método de Euler falha miseravelmente para movimentos periódicos. Para sanar esse problema, podemos fazer uma pequena modificação no método, que nos leva ao chamado método de Euler-Cromer

$$\omega_{i+1} = \omega_i - \frac{g}{L} \sin\theta_i \Delta t, \quad (29)$$

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \omega_{i+1} \Delta t. \quad (30)$$

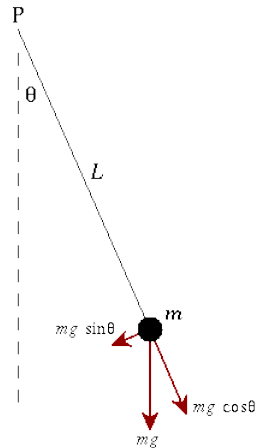
Repita o item (a), agora implementando as Eqs. (29) e (30).

(c) Calcule o período do pêndulo simples pelo método de Euler-Cromer como função de θ_o , sempre assumindo que ele parta do repouso. Faça um gráfico de seus resultados e discuta cuidadosamente a escolha de Δt nesse caso. Compare seus resultados com o valor obtido por meio da integral elíptica

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}, \quad (31)$$

que você deve avaliar numericamente dado que

$$k = \sin \frac{\theta_o}{2}. \quad (32)$$



Breve discussão sobre a execução dos problemas

Velocidade terminal

Cálculo da velocidade terminal da bicicleta. Para o cálculo da velocidade terminal, assumimos que todas as forças atuantes no problema estejam em equilíbrio de modo que $dv/dt = 0$. Pela Eq. (7) obtemos então

$$\frac{P}{mv_{\text{terminal}}} = \frac{\rho A v_{\text{terminal}}^2}{2m},$$

donde vem que

$$v_{\text{terminal}} = \left(\frac{2P}{\rho A} \right)^{1/3}. \quad (33)$$

Lançamento de projéteis

Para o caso do movimento dos projéteis, podemos resolver facilmente as Eqs.(10) para encontrarmos

$$x = 0 + v_{x,o}t = v_o \cos\theta \cdot t. \quad (34)$$

$$y = 0 + v_{y,o}t - \frac{1}{2}gt^2 = v_o \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (35)$$

As equações do movimento para as duas componentes são independentes. O tempo t^* no qual o projétil atinge o solo, conhecido como tempo de voo, pode ser obtido fazendo-se $y = 0$, donde

$$t^* = \frac{2v_o \sin\theta}{g}. \quad (36)$$

O alcance é então dado por

$$A = v_o \cos\theta \cdot t^* = \frac{v_o^2 \sin 2\theta}{g}, \quad (37)$$

Para determinarmos a equação da trajetória podemos eliminar o tempo das Eqs. (34) e (35) para escrevermos

$$\begin{aligned} y &= v_o \sin\theta \cdot \left(\frac{x}{v_o \cos\theta} \right) - \frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v_o \cos\theta} \right)^2 \\ &= \tan\theta \cdot x - \frac{g}{2v_o^2 \cos^2\theta} \cdot x^2, \end{aligned} \quad (38)$$

que nada mais é do que uma parábola com a concavidade para baixo.

Atmosfera adiabática

Em um processo adiabático, não há troca de calor entre o sistema e o ambiente. Nesse caso, podemos escrever, para um gás ideal, que

$$PV^\gamma = \text{constante} \text{ ou } TP^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{constante}. \quad (39)$$

Uma aplicação simples da expansão adiabática de um gás é o cálculo da dependência da temperatura do ar da atmosfera com a altura acima do nível do mar. A principal razão para essa variação de temperatura é que existem correntes de convecção que constantemente transportam o ar de regiões mais baixas para mais altas e vice-versa. Quando o ar do nível do mar chega a regiões mais altas, e de mais baixa pressão, ele se expande. Como o ar não é um bom condutor de calor, muito pouco calor é transferido pelo ou para o ar em expansão. Daí a aproximação adiabática. Consequentemente, a temperatura do ar ascendente diminui. Para calcularmos a taxa de mudança da temperatura, consideramos uma coluna de ar com uma área de seção transversal unitária e de altura dy , com sua face

inferior a uma altura y acima do nível do mar. Se P é a pressão na face inferior, temos que $P + dP$ é a pressão na face superior. Essa variação dP da pressão é devida ao peso de ar contido nessa coluna. Se g é a aceleração da gravidade e ρ é a densidade do ar, então o peso do ar nessa coluna é $\rho g dy$. Como um aumento de altura é acompanhado por uma diminuição na pressão, temos

$$dP = -\rho g dy. \quad (40)$$

Se agora nos lembramos que

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{nM}{nRT/P} = \frac{M}{R} \frac{P}{T}, \quad (41)$$

onde M é a massa molar do ar, com n sendo o número de mols. Temos assim que

$$dP = -\frac{gM}{R} \frac{P}{T} dy. \quad (42)$$

A derivada logarítmica da Eq. (39) dá

$$\frac{dT}{T} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dP}{P}, \quad (43)$$

que combinada com a Eq. (42) nos dá

$$\frac{dT}{dy} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{gM}{R}, \quad (44)$$

que dá a taxa de variação da temperatura com a altura y . Podemos integrar essa equação para obtermos

$$T = T_0 \left(1 - \frac{ay}{T_0} \right), \quad (45)$$

onde $a = \frac{\gamma-1}{\gamma} gM/R$ e T_0 é a temperatura ao nível do mar, $y = 0$. Da Eq. (41) temos que $P \propto \rho T$ que se substituída na Eq. (39) leva finalmente a

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{T_0}{T} \right)^{1/(1-\gamma)} = \rho_0 \left(1 - \frac{ay}{T_0} \right)^{1/(\gamma-1)},$$

que é exatamente a Eq. (22) se identificarmos $\alpha = 1/(1-\gamma)$. Como $\gamma = 1.4$ para o ar, chegamos ao valor $\alpha \approx 2.5$. Já a constante a é obtida por meio de um ajuste aos dados experimentais. Seu valor teórico é de 9.8×10^{-3} K/m, o que não é nada mal dado nosso modelo simples. A discrepância vem de desprezarmos os efeitos da condensação do vapor d'água durante a expansão das massas de ar.

Período do pêndulo

Para obtermos a expressão para o período do pêndulo no caso geral, Eq. (31), utilizamos equação para a energia mecânica do sistema em (25). Considere que soltemos o pêndulo, a partir do repouso, de um ângulo $\pm\theta_o$, de modo que a energia do movimento seja dada por $E = mgL(1 - \cos\theta_o)$. Nesse caso, o pêndulo oscila entre os pontos de inversão $\theta = \pm\theta_o$, nos quais $\omega = d\theta/dt = 0$. Daí vem que

$$mgL(1 - \cos\theta_o) = \frac{1}{2}mL^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + mgL(1 - \cos\theta),$$

donde tiramos que

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2g}{L} (\cos\theta - \cos\theta_o)}. \quad (46)$$

O sinal de $+$ vale durante metade do período, digamos que de 0 até $T/2$, quando o pêndulo oscila de $-\theta_o$ até θ_o , e o sinal de $-$ para o retorno. Integrando a Eq. (46) sobre a primeira metade do movimento temos

$$\int_0^{T/2} dt = \frac{T}{2} = \sqrt{\frac{L}{2g}} \int_{-\theta_o}^{+\theta_o} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_o}}, \quad (47)$$

donde

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{2g}} \int_0^{\theta_o} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_o}}, \quad (48)$$

que ainda não é a expressão mostrada em (31). Para chegarmos lá, faremos uma série de substituições nessa integral. Primeiramente, reescreveremos $\cos(x) = 1 - 2\sin^2(x/2)$

$$T = 2\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\theta_o} \frac{d\theta}{\sin\frac{\theta_o}{2} \sqrt{1 - \frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta_o}{2}}}}, \quad (49)$$

que sugere a seguinte troca de variáveis

$$\operatorname{senu} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{k}, \quad (50)$$

onde $k = \sin\frac{\theta_o}{2}$, Eq. (32). De acordo com a Eq. (50), o limite superior dessa integral corresponde agora a $\operatorname{senu} = 1$, o que leva a $u = \pi/2$. Portanto, senu é sempre positivo. O Jacobiano da transformação é dado por

$$d\theta = \frac{2k \cos u}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} du, \quad (51)$$

e temos assim que

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}, \quad (52)$$

que finalmente corresponde à expressão em (31).

Um teste trivial dessa equação para o período do pêndulo pode ser obtido no limite harmônico, no qual fazemos $\theta_o \rightarrow 0$, o que corresponde a $k \rightarrow 0$ (32), e assim

$$\begin{aligned} T &= 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} \simeq 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{k^2}{2} \sin^2 u\right) du, \\ T &\simeq 4\sqrt{\frac{L}{g}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{k^2}{2} \frac{\pi}{4}\right), \\ T &\simeq 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \left(1 + \frac{\theta_o^2}{16}\right). \end{aligned} \quad (53)$$

Vemos que, de fato, as primeiras correções do período com a amplitude são quadráticas e que no limite de pequenas oscilações recuperamos o resultado harmônico.