Introdução à Física Computacional 1S/2018

Projeto 4 — Leis de Kepler e o problema de três corpos

Início: 23 de Abril de 2018

Prof.: Eric C. Andrade

Data da entrega do relatório: 21 de Maio de 2018

Descrição:

Discutiremos nesse problema o movimento planetário que é regido pela lei de Gravitação de Newton

$$\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_{12}|^3}\vec{r}_{12}, \tag{1}$$

onde $\vec{r}_{1(2)}$ é a posição do planeta $1\,(2)$, $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ é o vetor posição relativa entre os dois planetas, $m_{1(2)}$ é a massa do planeta $1\,(2)$ e G é a constante gravitacional. Nesse problema, consideraremos os planetas se movendo em um plano, o que é uma excelente aproximação para o sistema solar, e, portanto, uma simulação bidimensional será suficiente.

Como a órbita dos planetas é periódica, não podemos utilizar o método de Euler, uma vez que ele não conserva a energia e leva a órbitas instáveis. Por isso, implementaremos então o método de Euler-Cromer.

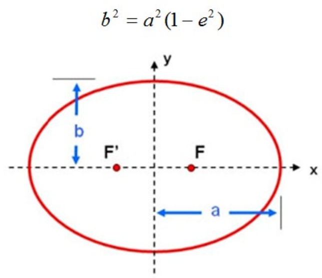
Na primeira parte do projeto exploraremos a órbita de um único planeta movendo ao redor do Sol. Na segunda parte, veremos alguns exemplos para o problema de três corpos.

Sugestão de execução:

Exercício 1: Aula 8. Exercício 2: Aula9. Exercício 3: Aula 10

1) Órbitas circulares e elípticas

Desde os trabalhos pioneiros de Kepler, sabemos que os planetas se movem em órbitas elípticas com o Sol em um dos focos. Na figura ao lado, mostramos uma elipse com seus focos F e F', semieixos maior (a) e menor (b) bem como excentricidade e. No limite em que $e = 0$, recuperamos uma órbita circular. Sabemos que esse resultado segue triunfalmente da lei da gravitação de Newton na Eq. (1) e queremos aqui reimplementar essa solução de modo numérico. Antes de discutirmos o método numérico, contudo, vamos estabelecer as unidades mais convenientes para estudarmos o problema. Por se tratar de um problema astronômico, utilizaremos, não muito surpreendentemente, a chamada Unidade Astronômica (UA) para medirmos comprimento.



Uma unidade astronômica de comprimento, ou simplesmente 1 UA, é definida como a distância média Terra-Sol $\left(1.5 \times 10^{11}\ \text{m}\right)$. O tempo é convenientemente medido em anos $\left(1\ \text{ano}\ \approx 3.2 \times 10^7\ \text{s}\right)$, o que corresponde, naturalmente, ao período de rotação da Terra ao redor do Sol. Já a unidade de massa, pode ser facilmente calculada aproximando-se a órbita da Terra como circular

$$\frac{M_T v^2}{r} = \frac{GM_T M_S}{r^2}, \tag{2}$$

donde vem que

$$GM_S = v^2 r = \left(\frac{2\pi r}{\text{ano}}\right)^2 r = 4\pi^2 \frac{(\text{UA})^3}{\text{ano}^2}, \tag{3}$$

ou seja $GM_S = 4\pi^2$, em unidades astronômicas. Observe que as grandezas G e M_S aparecem apenas no produto GM_S e, portanto, não há a necessidade de especificarmos cada uma delas separadamente.

Planeta	massa (kg)	semieixo maior (UA)	excentricidade (e)
Mercúrio	2.4×10^{23}	0.39	0.206
Vênus	4.9×10^{24}	0.72	0.007
Terra	6.0×10^{24}	1.00	0.017
Marte	6.6×10^{23}	1.52	0.093
Júpiter	1.9×10^{27}	5.20	0.048
Saturno	5.7×10^{26}	9.24	0.056
Urano	8.8×10^{25}	19.19	0.046
Netuno	1.0×10^{26}	30.06	0.010

Tabela I: Dados planetários úteis. A massa do Sol é $M_S = 2.0 \times 10^{30}$ kg.

Vamos considerar inicialmente o problema de dois corpos, Planeta + Sol. Pelo fato de a massa do Sol ser muito maior que a massa dos planetas, vamos tomar o Sol parado na origem: $v_S = 0$ e $(x_S, y_S) = (0, 0)$. A equação de movimento para as coordenadas (x, y) de um dado planeta é então obtida por meio da Eq. (1)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -GM_S \frac{x}{r^3} \text{ e } \frac{d^2y}{dt^2} = -GM_S \frac{y}{r^3}, \tag{4}$$

onde

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{5}$$

é a posição instantânea do planeta com relação ao Sol.

Seguimos então o nosso mantra usual e reescrevemos as duas equações diferenciais de segunda ordem em (4) como quatro equações diferenciais de primeira ordem

$$\frac{dx}{dt} = v_x \quad \text{e} \quad \frac{dv_x}{dt} = -GM_S \frac{x}{r^3}, \tag{6}$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y \quad \text{e} \quad \frac{dv_y}{dt} = -GM_S \frac{y}{r^3}, \tag{7}$$

onde v_x e v_y são, respectivamente, as velocidades ao longo das direções x e y. Dentro do método de Euler-Cromer, as quatro diferenciais do problema em (6) e (7) são aproximadas por

$$v_{x,i+1} = v_{x,i} - 4\pi^2 \frac{x_i}{r_i^3} \Delta t, \tag{8}$$

$$x_{i+1} = x_i + v_{x,i+1} \Delta t, \tag{9}$$

$$v_{y,i+1} = v_{y,i} - 4\pi^2 \frac{y_i}{r_i^3} \Delta t, \tag{10}$$

$$y_{i+1} = y_i + v_{y,i+1} \Delta t, \tag{11}$$

onde escrevemos $GM_S = 4\pi^2$. Novamente Δt é o passo temporal que utilizamos para resolver as equações, naturalmente medido em anos.

(a) Escreva um programa FORTRAN que calcule a posição $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ e velocidade $\vec{v}(t) = (v_x(t), v_y(t))$ de um planeta como função do tempo por meio das Eqs. (8)-(11).

(b) Considere agora a Tabela I. Determine a velocidade que cada planeta deveria ter para que sua órbita fosse circular com o raio dado pelo semieixo maior da elipse. Você deve se certificar que a órbita permanece circular após muitas revoluções. Para tal, uma escolha cuidadosa de Δt é necessária. Determine, numericamente, o período T dessas órbitas e calcule a razão T^2/R^3 (3^{a} Lei de Kepler). Apresente seus resultados na forma de uma tabela e discuta-os cuidadosamente.

(c) No caso de Mercúrio, a aproximação de órbitas circulares parece não ser uma boa aproximação pois sua órbita possui excentricidade $e = 0.206$. Determine as condições iniciais para que sua órbita seja elíptica como dada na Tabela I. Grafique essa órbita a comparando com a órbita circular obtida em *(b)*. (Certifique-se que, ao graficar a órbita, a origem do sistema de coordenadas das duas figuras coincida). Calcule o período T dessa órbita e a razão T^2/a^3. Discuta seus resultados.

Dica: Nesse caso é imperativo que vocês utilizem a conservação da energia e do momento angular para determinarem as condições iniciais. Lembrem-se que a distância do Sol (foco) ao centro é $f = ea$. Certifique-se também que a proporção de tela (aspect ratio) de seu programa gráfico esteja em 1. Do contrário, as figuras ficarão distorcidas.

2) Satélite geoestacionário e os efeitos da Lua

Podemos generalizar a discussão anterior para considerarmos o problema de três planetas. Diferentemente do problema de dois corpos, esse caso não possui solução analítica no caso geral e nem sempre podemos encontrar órbitas fechadas. O problema de 3 corpos, ou de maneira mais geral o de N corpos, é, de fato, o problema da mecânica celeste.

Para começar nossa discussão, vamos considerar o problema no qual temos a Terra, a Lua e um satélite geoestacionário. Em uma órbita geoestacionária ideal, um satélite aparenta ficar parado em um ponto fixo ao longo do equador pois o tempo para ele completar uma órbita ao redor da Terra é igual ao período de rotação da Terra ao redor de seu eixo, ou seja, um dia. O raio de uma órbita geoestacionária circular ideal pode ser facilmente determinado a partir da Eq. 2, lembrando que $T = 2\pi r/v$

$$r_{\text{geo}} = \left(\frac{GM_T T_S^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \approx 42244 \text{ km}, \tag{12}$$

onde $M_T = 5.9736 \times 10^{24}$ kg é a massa da Terra, $G = 6.6743 \times 10^{-11}$ m^3/kg.s^2 é a constante gravitacional e $T_S = 24 \times 60 \times 60 = 86400$ s é a duração de um dia. Note que, nesse caso, não há justificativa para utilizarmos unidades astronômicas e empregaremos o SI.

Queremos agora investigar os efeitos da Lua sobre essa órbita geoestacionária. Vamos considerar o caso mais simples no qual a Lua descreve um movimento circular ao longo do equador, de tal forma que o movimento se dê em um plano como ilustrado na figura abaixo

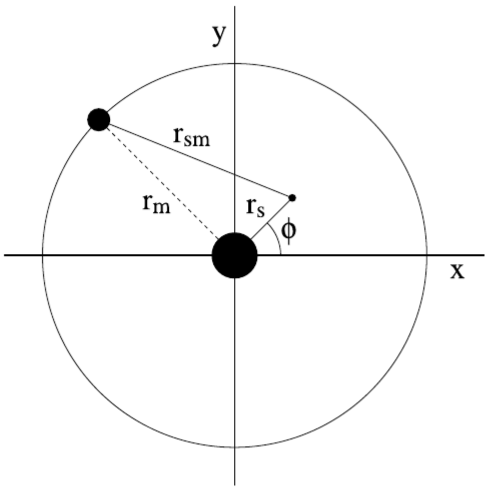


Figura 1: Ilustração esquemática do movimento de um satélite geoestacionário localizado em r_s. Em uma primeira aproximação, consideramos a Terra como parada e a Lua descrevendo um movimento circular ao longo do equador. As distâncias r_m, r_s e r_{sm} são medidas a partir do centro da Lua e da Terra. Em uma órbita geoestacionária, o valor de ϕ deve se manter inalterado após um dia.

As equações de movimento para as coordenadas o satélite são então dadas por

$$\frac{d^2x_s}{dt^2} = -GM_T\frac{x_s}{r_s^3} - GM_L\frac{(x_s - x_m)}{r_{sm}^3} \quad \text{e} \quad \frac{d^2y_s}{dt^2} = -GM_T\frac{y_s}{r_s^3} - GM_L\frac{(y_s - y_m)}{r_{sm}^3}, \tag{13}$$

onde M_L é a massa da Lua, com $GM_L = 1.23 \times 10^{-2} GM_T$. $r_s = \sqrt{x_s^2 + y_s^2}$ é a distância instantânea do satélite com relação à Terra e $r_{sm} = \sqrt{(x_s - x_m)^2 + (y_s - y_m)^2}$ é a distância instantânea satélite-Lua.

(a) Escreva explicitamente em seu relatório o análogo das Eqs. 8-11 para a Eq. 13. Encontre também a expressão analítica para a posição instantânea da Lua assumindo uma órbita circular ao redor da terra. Sua resposta deve

ser dada em termos do raio r_m e do período T_m dessa órbita circular da Lua. Para os cálculos numéricos seguintes, considere $r_m = 384400$ km e $T_m = 27.32 \times T_S$.

(b) Escreva um programa FORTRAN que calcule a órbita da satélite colocando a Lua na posição e velocidade que teria caso sua órbita fosse circular, como determinado no exercício anterior. Como condição inicial, assuma que a Lua e o satélite estejam ao longo de uma mesma linha e que ambos girem no sentido anti-horário (ϕ aumenta com o tempo). Calcule a trajetória do satélite para um período longo, $t > 100$ dias, e verifique se sua órbita continua geoestacionária. Você diria que a Lua é uma perturbação relevante para essa órbita?

(c) Uma outra maneira de estudarmos esse problema é investigarmos diretamente os desvios da órbita geoestacionária, caracterizada por $(r_{\text{geo}}, \phi_{\text{geo}}(t))$, ao longo do tempo

$$\Delta\phi(t) = \phi(t) - \phi_{\text{geo}}(t) \;\text{ e }\; \Delta r(t) = r(t) - r_{\text{geo}}.$$

Faça um gráfico mostrando $\Delta\phi(t)$ e $\Delta r(t)$ como função do tempo para um intervalo de 100 dias. Discuta seus resultados. Dica: para o cálculo do ângulo, use a função atan2 tomando cuidado para restringir seus resultados ao intervalo $[0, 2\pi]$.

(d) Mostre um gráfico com os resultados para $\Delta\phi(t)$ considerando diferentes valores do passo Δt para o método de Euler-Cromer. Justifique sua escolha do passo ótimo. Utilize o número de passos por dia como sua unidade para Δt.

3) Coreografias celestes

Vamos agora considerar um limite um pouco diferente no problema da mecânica celeste. Estudaremos a órbita de corpos de mesma massa M que se atraem gravitacionalmente. Por simplicidade, tomaremos $GM = 1$. Nesse caso, é mais conveniente definirmos a origem do sistema de coordenadas sobre o centro de massa (CM) do sistema, pois todas as partículas irão se mover agora. (Nota: você **não** precisa calcular a posição do CM!)

(a) O que faremos aqui é considerar diferente condições iniciais e estudar a órbita resultante. Inicialmente, vamos estudar uma realização do problema de Lagrange, na qual as três partículas se movem em um círculo sempre mantendo distâncias iguais entre si, formando portanto um triângulo equilátero. As condições iniciais para esse caso são

Partícula	$x(t=0)$ (UA)	$y(t=0)$ (UA)	$v_x(t=0)$ (UA/ano)	$v_y(t=0)$ (UA/ano)
1	1.0	0.0	0.0	0.759836
2	-0.5	0.866025	-0.658037	-0.379918
3	-0.5	-0.866025	0.658037	-0.379918

Mostre que as órbitas dos planetas são, de fato, circulares. Escolha alguns instantes de tempo e mostre como a posição instantânea de cada partícula evolui. Certifique-se de que os planetas sempre estão a uma mesma distância em qualquer instante de tempo.

(b) Modifique suas condições iniciais para essas abaixo

Partícula	$x(t=0)$ (UA)	$y(t=0)$ (UA)	$v_x(t=0)$ (UA/ano)	$v_y(t=0)$ (UA/ano)
1	0.97000436	-0.24308753	0.466203685	0.43236573
2	-0.97000436	0.24308753	0.466203685	0.43236573
3	0	0	-0.93240737	-0.86473146

Calcule e grafique a órbita resultante nesse caso. Escolha alguns instantes de tempo e mostre como a posição instantânea de cada partícula evolui. Essa solução só foi descoberta em 1993! C. Moore, Phys. Rev. Lett. **70**, 3675 (1993). Por falta de criatividade, ela é conhecida como “O Oito”.

(c) Mude agora a posição inicial $x(t=0)$ da partícula 1 do item (b) de 0.97000436 UA para 0.95000436 UA. O que acontece com o nosso Oito?

Breve discussão sobre a execução dos problemas

Problema de três corpos restrito ao plano. Considere três massas M_α localizadas, no tempo t nas posições $\vec{r}_\alpha$ com $\alpha = 1, 2, 3$. Assumiremos que a origem do nosso sistema esteja em seu centro de massa (CM). Vamos agora escrever as equações de movimento para o problema

$$\frac{d^2\vec{r}_\alpha}{dt^2} = \frac{1}{M_\alpha}\sum_{\alpha\neq\beta}\vec{F}_{\alpha\beta} = -\sum_{\alpha\neq\beta}\frac{GM_\beta}{|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta|^3}\left(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta\right), \tag{14}$$

com $\alpha, \beta = 1, 2, 3$. Como de praxe, quebramos as equações de segunda ordem em duas equações de primeira ordem

$$\frac{d\vec{r}_\alpha}{dt} = \vec{v}_\alpha \text{ e } \frac{dv_\alpha}{dt} = -\sum_{\alpha\neq\beta}\frac{GM_\beta}{|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta|^3}\left(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta\right). \tag{15}$$

Novamente, consideraremos o problema planar e utilizaremos o método de Euler-Cromer para sua solução, o que nos leva às seguintes equações

$$\begin{aligned}
v_{x,\alpha}^{(i+1)} &= v_{x,\alpha}^{(i)} - \Delta t\cdot\sum_{\alpha\neq\beta}\frac{GM_\beta}{|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta|^3}\left(x_\alpha - x_\beta\right), && (16)\\
v_{y,\alpha}^{(i+1)} &= v_{y,\alpha}^{(i)} - \Delta t\cdot\sum_{\alpha\neq\beta}\frac{GM_\beta}{|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta|^3}\left(y_\alpha - y_\beta\right), && (17)\\
x_\alpha^{(i+1)} &= x_\alpha^{(i)} + \Delta t\cdot v_{x,\alpha}^{(i+1)}, && (18)\\
y_\alpha^{(i+1)} &= y_\alpha^{(i)} + \Delta t\cdot v_{y,\alpha}^{(i+1)}. && (19)
\end{aligned}$$