CVIČENÍ 6

Téma: Pokrytí grafu, vlastnosti nezávislých a dominujících podmnožin, barevnost, vzdálenost
Cíle: Zvládnout techniku určování charakteristických čísel a vzdáleností konkrétních typů grafů.

<table>
<tr><td colspan="2">Eulerovy grafy</td></tr>
<tr><td>1.</td><td>Procvičení vlastností Eulerových grafů, např.
každý obyčejný neorientovaný E-graf s neprázdnou množinou hran lze orientovat alespoň dvěma způsoby tak, abychom dostali orientovaný E-graf - jak?
souvislý orientovaný E-graf lze pokrýt jediným uzavřeným orientovaným tahem - dokažte
jak ze souvislého OG přidáním minimálního počtu hran udělat orientovaný Eulerův graf</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Nechť má souvislý neorientovaný graf čtyři uzly lichého stupně. Dokažte, že pak existují nejméně dvě různá minimální pokrytí tohoto grafu (pomocí dvou otevřených tahů).</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Nechť G je souvislý orientovaný Eulerův graf.
a) Dokažte, že je sjednocením hranově disjunktních cyklů.
b) Dokažte, že orientovaný graf G lze pokrýt jedním uzavřeným orientovaným tahem, právě když je Eulerův a (slabě) souvislý.
c) Je (slabě) souvislý orientovaný Eulerův graf silně souvislý?</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Ukažte, jak orientovat neorientovaný Eulerův graf, aby vznikl orientovaný Eulerův graf.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Vlastnosti grafů - nezávislost a dominance</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>Určete nezávislost, klikovost, chromatické číslo a dominanci následujících grafů
a) "hvězdice" s $2n$ obvodovými uzly propojenými/nepropojenými do kružnice
b) úplný graf o n (≥3) uzlech bez jedné hrany
c) úplný graf o n (≥4) uzlech bez dvou sousedních/nesousedních hran
d) kružnice o lichém/sudém počtu hran ($2n+1$) / $2n$, kde $n \geq 2$
e) cesta o lichém/sudém počtu hran ($2n+1$) / $2n$, kde $n \geq 2$</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>Jak se může změnit nezávislost, klikovost, chromatické číslo a dominance vypuštěním jedné hrany/uzlu grafu?</td></tr>
<tr><td>7.</td><td>Kolik hran je třeba minimálně vypustit z úplného grafu o 10-ti uzlech, aby měl výsledný graf chromatické číslo 4 (resp. 3)?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Vlastnosti grafů – poloměr, průměr, střed</td></tr>
<tr><td>8.</td><td>Pro příklady grafů uvedené ve cvičení 5 určete průměr, poloměr a středy.</td></tr>
<tr><td>9.</td><td>Určete charakteristická čísla grafu (hodnost $h(G)=U(G)-p$, cyklomatické číslo $\mu(G)=H(G)-U(G)+p$, kde p je počet komponent grafu G, nezávislost $\alpha(G)$, dominanci $\beta(G)$, chromatické číslo $\chi(G)$), poloměr, průměr a středy pro rodiny grafů definované takto:
<code>G0 = o   G1 = o --- o .. Gn+1 = Gn --- Gn</code></td></tr>
</table>

```
                          |       |             |       |
                          |       | .           |       |
                          o --- o             Gn --- Gn
            Gm,n = o -- o -- o -  ...  - o -- o     (pravoúhlá
                   |    |    |           |    |      mřížka m x n
                   o -- o -- o -  ...  - o -- o      uzlů)
                     ...
                   |    |    |           |    |
                   o -- o -- o -  ...  - o -- o
```

U charakteristických čísel stačí uvést asymptoticky nejvýznamnější člen s koeficientem.

CVIČENÍ 6 - možná řešení

Téma: Pokrytí grafu, vlastnosti nezávislých a dominujících podmnožin, barevnost grafu, vzdálenost na grafech.
Cíle: Zvládnout techniku určování charakteristických čísel a vzdálenostních charakteristik konkrétních typů grafů.

Eulerovy grafy

1. Procvičení vlastností Eulerových grafů, např.
   - každý obyčejný neorientovaný E-graf s neprázdnou množinou hran lze orientovat alespoň dvěma způsoby tak, abychom dostali orientovaný E-graf - jak?
   - souvislý orientovaný E-graf lze pokrýt jediným uzavřeným orientovaným tahem - dokažte
   - jak ze souvislého OG přidáním minimálního počtu hran udělat orientovaný Eulerův graf

2. Nechť má souvislý neorientovaný graf čtyři uzly lichého stupně. Dokažte, že pak existují nejméně dvě různá minimální pokrytí tohoto grafu (pomocí dvou otevřených tahů). Je toto tvrzení možné zesílit?
   Označme dané uzly a,b,c,d. Vzhledem k souvislosti grafu musí existovat nějaká cesta C z uzlu a do uzlu b. Pokud tuto cestu z grafu odebereme, zbude nám graf s právě dvěma uzly c, d lichého stupně. Pokud je souvislý, je možné jej pokrýt jedním otevřeným tahem T z uzlu c do uzlu d. Pokud souvislý není, pak jsou všechny jeho komponenty s výjimkou té, která obsahuje uzly c a d, E-grafy a mají společné uzly s cestou C. Každou z těchto komponent lze pokrýt jediným uzavřeným tahem, který je možné napojit na cestu C, čímž vznikne otevřený tah T'. Dvojice tahů T a T' tvoří minimální pokrytí. Jiné minimální pokrytí dostaneme, pokud úvodní cestu vytvoříme z uzlu a do uzlu c. Ještě jiné pokrytí dostaneme, bude-li výchozí cesta z uzlu a do uzlu d. Máme tedy určitě nejméne tři různá pokrytí.

3. Nechť *G* je orientovaný Eulerův graf.
   a) Dokažte, že je sjednocením hranově disjunktních cyklů.
   Provede se podobně jako v neorientovaném případě.
   b) Dokažte, že orientovaný graf G lze pokrýt jedním uzavřeným orientovaným tahem, právě když je Eulerův a (slabě) souvislý.
   Provede se v obou směrech podobně jako v neorientovaném případě.
   c) Je (slabě) souvislý orientovaný Eulerův graf silně souvislý?
   Ano, uzly lze navzájem propojit odpovídajícími částmi uzavřeného orientovaného tahu, který tvoří jeho minimální pokrytí.

4.	Ukažte, jak orientovat neorientovaný Eulerův graf, aby vznikl orientovaný Eulerův graf. Víme, že neorientovaný E-graf je sjednocením hranově disjunktních kružnic. Důkaz provedeme indukcí podle počtu těchto kružnic n. - Pro n=1 orientujeme hrany kružnice jedním směrem, takže dostaneme cyklus, jehož všechny uzly mají $\delta^+(u)=\delta^-(u)=1$, tím pádem je to orientovaný E-graf - Předpokládáme platnost tvrzení pro grafy tvořené n≥1 kružnicemi a mějme neorientovaný E-graf tvořený (n+1) hranově disjunktními kružnicemi. Odebereme-li z G jednu z těchto kružnic K, můžeme vzniklý graf G’ orientovat tak, aby vznikl orientovaný E-graf G‘. Nyní do G‘ přidáme kružnici K, v níž orientujeme všechny jedním směrem - tím se u všech uzlů kružnice zvýší jejich vstupní i výstupní stupně o 1, a tedy opět platí $\delta^+(u)=\delta^-(u)$ pro všechny uzly, graf je tedy orientovaným E-grafem.
Vlastnosti grafů - nezávislost a dominance	
5.	Určete nezávislost, klikovost, chromatické číslo a dominanci následujících grafů a) "hvězdice" s 2n obvodovými uzly propojenými/nepropojenými do kružnice $\alpha(G)$ = n , resp. 2n , $\omega(G)$ = 3, resp. 2 , $\chi(G)$ = 3, resp. 2 , $\beta(G)$ = 1 v obou případech b) úplný graf o n (≥3) uzlech bez jedné hrany $\alpha(G)$ = 2 , $\omega(G)$ = n-1 , $\chi(G)$ = n-1 , $\beta(G)$ = 1 c) úplný graf o n (≥4) uzlech bez dvou sousedních/nesousedních hran $\alpha(G)$ = 2, resp. 2 , $\omega(G)$ = n-1, resp. n-2 , $\chi(G)$ = n-1, resp. n-2 , $\beta(G)$ = 1 (pro n≥5) d) kružnice o lichém/sudém počtu hran (2n+1) / 2n, kde n≥2 $\alpha(G)$ = n, resp. n , $\omega(G)$ = 2, resp. 2 , $\chi(G)$ = 3, resp. 2 , $\beta(G)$ = horní celá část z (2n+1)/3, resp. z 2n/3 (**„větší třetina“** počtu uzlů!) e) cesta o lichém/sudém počtu hran (2n+1) / 2n , kde n≥2 $\alpha(G)$ = n+1, resp. n , $\omega(G)$ = 2, resp. 2 , $\chi(G)$ = 2, resp. 2 , $\beta(G)$ = horní celá část z (2n+2)/3, resp. z (2n+1)/3
6.	Jak se může změnit nezávislost, klikovost, chromatické číslo a dominance vypuštěním jedné hrany/uzlu grafu? Hrana: nezávislost, dominance – stejná nebo +1, klikovost, chromatické číslo – stejné nebo -1 Uzel: nezávislost, klikovost, chromatické číslo – stejné nebo -1, dominance – stejná, -1 nebo lib. zvětšená
7.	Kolik hran je třeba minimálně vypustit z úplného grafu o 10-ti uzlech, aby měl výsledný graf chromatické číslo 4 (resp. 3)? K_{10} má 10.9/2 = 45 hran. Optimální rozdělení uzlů pro 4 barvy je 2 + 2 + 3 + 3 a úplný 4-partitní graf $K_{2,2,3,3}$ má 2.2+2.3+2.3+2.3+2.3+3.3 = 4+6+6+6+6+9 = 37 hran, vypustíme tedy 45-37= 8 hran. Pro 3 barvy je to $K_{3,3,4}$ se 3.3+3.4+3.4 = 33 hran, vypustíme tedy 45-33= 12 hran.
Vlastnosti grafů – poloměr, průměr, střed	
8.	Pro příklady grafů uvedené ve cvičení 5 určete průměr, poloměr a středy. 5a – průměr 2, resp. 2 , poloměr 1, resp. 1 , jeden střed 5b – průměr 2, poloměr 1, středů n-3 (pro n≥4)

5c – průměr 2, poloměr 1, středů n-2
5d – průměr n, poloměr n, středů 2n+1, resp. 2n
5e – průměr 2n+1, resp. 2n, poloměr n+1, resp. n , středů 2, resp. 1

9. Určete charakteristická čísla grafu (hodnost *h(G)=U(G)-p*, cyklomatické číslo *μ(G)=H(G)-U(G)+p,* kde p je počet komponent grafu G, nezávislost *α(G)*, dominanci *β(G)*, chromatické číslo*χ(G)*), poloměr, průměr a středy pro rodiny grafů definované takto:

-
```
             G1 = o --- o   Gn+1 = Gn --- Gn
                  |     | ..           |      |
    G0 = o        |     | .            |      |
                  o --- o           Gn --- Gn
```

Platí rekurence U(n+1) = 4*U(n), U(0) = 1, H(n+1) = 4*H(n)+4, takže řešení je
U(n)=4^n, H(n)=4/3*(4^n-1). Tím pádem h(Gn) = U(n) – 1 = 4^n -1, μ(G)=H(G)-U(G)+p = 4/3*(4^n-1) – (4^n -1) = (4^n -1)/3, α(G)= U(Gn)/2, B(Gn) = U(Gn)/4 pro n≥2, χ(G)=2, poloměr = průměr = 2*(2^n-1), středy jsou všechny uzly

```
   Gm,n = o -- o -- o - ... - o -- o     (pravoúhlá
          |    |    |         |    |     mřížka m x n
          o -- o -- o - ... - o -- o     uzlů)
            ...
          |    |    |         |    |
          o -- o -- o - ... - o -- o
```

U charakteristických čísel stačí uvést asymptoticky nejvýznamnější člen s koeficientem.
U(Gm,n) = m*n, H(Gm,n) = (m-1)*n + m*(n-1), h(Gm,n) = m*n-1, μ(Gm,n)= (m-1)*(n-1), α(G) ≈ U(Gn)/2, B(Gn) ≈ U(Gn)/5 pro n≥2, χ(G)=2, průměr = m+n-2, poloměr = cca polovina průměru