CVIČENÍ 4

Téma: Silná souvislost, silné komponenty, kondenzace, silně souvislé komponenty, acykličnost, topologické uspořádání.
Cíle: Upevnit pochopení vlastností komponent a silných komponent, vliv počtu hran na členění grafu do komponent.
Z následujících příkladů lze pro řešení na cvičení provést reprezentativní výběr.

1.	Zahřívací úlohy na 5 minut:
	• je zadán pomocí matice A / V nějakého grafu, sestavte jeho matici V / A (bez kreslení grafu)
	• je zadán pomocí matice A / V nějakého grafu, určete nějakou jeho vlastnost (bez kreslení grafu) nebo uveďte, jak se o něm něco zjistí
	  o například zda je pravidelný, úplný, zda je to kružnice, pro orientované grafy
	  o kolik má kořenů a listů
	• prověřte pochopení pojmů, nakreslete jednoduché grafy do 8 uzlů na tabuli a ptejte se na: orientaci NG, zrušení orientace OG, spojení v OG, orientovaný tah/cesta/cyklus, silná souvislost/ komponenta, vstupní/výstupní stupeň, acyklický graf, složení orientovaných grafů

2.	**Acykličnost - otázky k řešení pro orientované grafy:** a) Může existovat cyklus v kondenzaci grafu? Kdy? b) Čím se liší kondenzace acyklického grafu od grafu samotného? c) Kondenzace grafu obsahuje jediný uzel. Jaký je původní graf? d) Kondenzace grafu je s původním grafem izomorfní. Jaký je původní graf? e) Existuje acyklický graf bez kořenů nebo listů? f) Existuje graf se stejným počtem kořenů a listů? Může mít graf více kořenů než listů? Nebo naopak? g) Existuje graf bez kořenů a listů? Jen s kořenem (kořeny) a bez listů? Jen s listy (listem) a bez kořenů? h) Každou hranu neorientované kružnice libovolně orientujeme. Jaký je vztah mezi počtem kořenů a listů v takto vzniklém grafu? i) Vstupní i výstupní stupeň všech uzlů v grafu bez smyček je 1. Jak tento graf vypadá? Je souvislý? j) Existuje graf, v němž existuje nekonečně mnoho různých spojení? Existuje nějaký, v němž nelze nalézt nekonečně mnoho spojení? Čím se obecně liší? k) Každý graf obsahuje množství různých acyklických podgrafů (např. můžeme mnoha způsoby odebrat všechny hrany až na jednu). Je pravda, že každý orientovaný graf obsahuje acyklický faktor? l) Uvažme slabě souvislý graf, který není acyklický. Je možno z něj odebrat nějaké hrany tak, aby výsledek byl acyklický a přitom stále ještě slabě souvislý? m) Nakreslete všechny navzájem neizomorfní orientované kružnice s 5 uzly. (Pozor, ne cykly, ale kružnice!). Kolik z nich bude acyklickým grafem? n) Orientujte kružnici se 6 uzly tak, aby vznikl acyklický graf. Kolika

	navzájem neizomorfními způsoby to lze udělat?
	o) Acyklický faktor grafu nazveme maximální, pokud se již nedá zvětšit, tj. pokud přidáním libovolné hrany původního grafu vznikne ve faktoru cyklus. Najděte graf, ve kterém existují dva různé maximální faktory s různým počtem hran.
	p) K programu v určitém programovacím jazyce zkonstruujeme orientovaný graf tak, že za uzly grafu prohlásíme všechny funkce a procedury a vedeme hranu z uzlu x do y, právě když funkce či procedura odpovídající uzlu x volá funkci či proceduru odpovídající uzlu y. Co lze o prohlásit o programu, v jehož příslušném grafu se vyskytují cykly nebo smyčky? Předpokládejme navíc, že tělo každé funkce a procedury musí být deklarováno ještě předtím, než je funkce či procedura volána. Je pak nutně každý graf příslušející libovolnému programu acyklický?
	q) Považte následující jednoduchý algoritmus:
	`while (graf obsahuje alespoň jeden uzel s výstupním stupněm 0, tedy list) {`
	`   odstraň tento uzel a všechny s ním incidující hrany`
	`}`
	`If (výsledkem je prázdný graf)`
	`  then pak původní graf byl acyklický`
	`  else původní graf nebyl acyklický`
	Dává tento algoritmus vždy správné výsledky? Proč? Jaká je jeho asymptotická složitost?
	r) Dokažte, že když je výstupní stupeň každého uzlu nenulový, pak graf obsahuje cyklus. Platí stejné tvrzení pro vstupní stupeň?
	s) V grafu existuje spojení oběma směry mezi dvěma určitými uzly. Dokažte, že graf obsahuje cyklus. Existuje také cyklus obsahující oba dané uzly?
	t) Dokažte: Graf bez izolovaných uzlů je silně souvislý právě tehdy, když obsahuje uzavřené spojení procházející všemi hranami (tj. každou hranou alespoň jednou).
	u) Najděte nutnou a postačující podmínku pro to, aby neorientovaný graf mohl být orientován nějakým způsobem tak, že vznikne silně souvislý graf.
	v) Acyklický (slabě) souvislý graf má jeden kořen a jeden list. Přidáme hranu vedoucí z listu do kořene. Bude výsledek silně souvislý? Rozhodněte.
	w) Silně souvislý graf má alespoň tolik hran jako uzlů (není-li graf jediným uzlem). Dokažte.
	x) Najděte graf, v němž je vstupní i výstupní stupeň každého uzlu nenulový a přitom graf obsahuje uzel, kterým neprochází žádný cyklus.

3.	**Silné komponenty – opět „graf“ znamená „orientovaný graf“** a) Jak se změní počet silných komponent v grafu, když všechny jeho hrany orientujeme opačně? b) Zkuste orientovat hrany úplného neorientovaného grafu Kn pokaždé jinak tak, aby vzniklý graf měl přesně k ($1 \leq k \leq n$) silných komponent. Lze nalézt řešení pro každé k= 1,2, … n? Odstraňte z Kn jednu hranu a úlohu zopakujte. Lze nalézt řešení pro každé k = 1,2, … n? c) Nakreslete obyčejný graf s 5 silnými komponentami, který se stane silně souvislým po změně orientace jedné určité hrany.

d) Graf má k (> 1) silných komponent. Po změně orientace jedné jeho hrany (nikoli libovolné!) bude mít již jen m < k komponent. Je možno nalézt příklad takového grafu pro libovolná k, m ? (Graf nemusí být nutně obyčejný.)

e) Dva grafy prohlásíme za ekvivalentní, pokud jsou jejich kondenzace izomorfní. Kolik tříd ekvivalence existuje pro grafy na 4 uzlech a jak jsou velké?

f) Obyčejný graf má 10 uzlů a 2 silné komponenty. Jaký je maximální a minimální počet hran v něm? Řešte otázku také pro případ, že silná komponenta musí obsahovat alespoň 2 uzly.

g) Každá silná komponenta v grafu s 12 komponentami je cyklus s 9 uzly. Jaký je pak maximální a minimální možný počet hran v grafu?

CVIČENÍ 4 - Možná řešení

Téma: Silná souvislost, silné komponenty, kondenzace, reprezentace grafu, procházení do šířky a do hloubky, silně souvislé komponenty, acykličnost, topologické uspořádání.
Cíle: Upevnit pochopení algoritmů procházení grafu, rozdíly při procházení neorientovaných a orientovaných grafů, vlastnosti komponent a silných komponent, vliv počtu hran na členění grafu do komponent.
Z následujících příkladů lze pro řešení na cvičení provést reprezentativní výběr.

1.	Zahřívací úlohy na 5 minut:
	• je zadán pomocí matice A / V nějakého grafu, sestavte jeho matici V / A (bez kreslení grafu)
	• je zadán pomocí matice A / V nějakého grafu, určete nějakou jeho vlastnost (bez kreslení grafu) nebo uveďte, jak se o něm něco zjistí
	  o například zda je pravidelný, úplný, zda je to kružnice, pro orientované grafy
	  o kolik má kořenů a listů
	• prověřte pochopení pojmů, nakreslete jednoduché grafy do 8 uzlů na tabuli a ptejte se na: orientaci NG, zrušení orientace OG, spojení v OG, orientovaný tah/cesta/cyklus, silná souvislost/ komponenta, vstupní/výstupní stupeň, acyklický graf, složení orientovaných grafů

2.	**Acykličnost - otázky k řešení pro orientované grafy:** a) Může existovat cyklus v kondenzaci grafu? Kdy? -- **nemůže** b) Čím se liší kondenzace acyklického grafu od grafu samotného? – **nebude obsahovat smyčky ani případné skupiny rovnoběžných hran stáhne do jediné** c) Kondenzace grafu obsahuje jediný uzel. Jaký je původní graf? – **silně souvislý** d) Kondenzace grafu je s ním izomorfní. Jaký je původní graf? **graf nemá cykly ani rovnoběžné hrany** e) Existuje acyklický graf bez kořenů nebo listů? – **každý acyklický graf musí obsahovat alespoň jeden kořen a alespoň jeden list** f) Existuje graf se stejným počtem kořenů a listů? Může mít graf více kořenů než listů? Nebo naopak? – **všechny případy jsou možné , nakreslete příklady** g) Existuje orientovaný graf bez kořenů a listů? Jen s kořenem (kořeny) a bez listů? Jen s listy (listem) a bez kořenů? – **všechny případy jsou možné , nakreslete příklady** h) Každou hranu neorientované kružnice libovolně orientujeme. Jaký je vztah mezi počtem kořenů a listů v takto vzniklém grafu? **– je jich stejný počet (důkaz pomocí věty o součtu stupňů)** i) Vstupní i výstupní stupeň všech uzlů v grafu bez smyček je 1. Jak tento graf vypadá? Je souvislý? – **je to sjednocení disjunktních cyklů, nemusí být souvislý** j) Existuje orientovaný graf, v němž existuje nekonečně mnoho různých spojení? Existuje nějaký, v němž nelze nalézt nekonečně mnoho spojení?

Čím se obecně liší? **– je to libovolný graf obsahující cyklus, konečně mnoho spojení má acyklický graf**

k) Každý orientovaný graf obsahuje množství různých acyklických podgrafů (např. můžeme mnoha způsoby odebrat všechny hrany až na jednu). Je pravda, že každý orientovaný graf obsahuje acyklický faktor? – **ano, můžeme např. vybrat faktor tvořený izolovanými uzly nebo pro každou (obyčejnou) komponentu vybereme faktor, který je stromem**

l) Uvažme souvislý orientovaný graf, který není acyklický. Je možno z něj odebrat nějaké hrany tak, aby výsledek byl acyklický a přitom stále ještě souvislý? – **ano, např. když po odebrání zbude kostra**

m) Nakreslete všechny navzájem neizomorfní orientované kružnice s 5 uzly. (Pozor, ne cykly, ale kružnice!). Kolik z nich bude acyklickým grafem? – **4 neizomorfní orientace: všechny hrany ve směru pohybu hodinových ručiček, jedna hrana proti, dvě sousední hrany proti, dvě nesousední hrany proti, poslední tři jsou acyklické**

n) Orientujte kružnici se 6 uzly tak, aby vznikl acyklický graf. Kolika navzájem neizomorfními způsoby to lze udělat? – **jedna hrana proti, dvě sousední hrany proti, dvě nesousední hrany proti, tři sousední hrany proti, jedna extra a dvě sousední hrany proti, tři nesousední hrany proti – celkem tedy (snad!) 6 možností**

o) Acyklický faktor grafu nazveme maximální, pokud se již nedá zvětšit, tj. pokud přidáním libovolné hrany původního grafu vznikne ve faktoru cyklus. Najděte graf, ve kterém existují dva různé maximální faktory s různým počtem hran. – **řešení mne zatím nenapadlo** …

p) K programu v určitém programovacím jazyce zkonstruujeme orientovaný graf tak, že za uzly grafu prohlásíme všechny funkce a procedury a vedeme hranu z uzlu x do y, právě když funkce či procedura odpovídající uzlu x volá funkci či proceduru odpovídající uzlu y. Co lze o prohlásit o programu, v jehož příslušném grafu se vyskytují cykly nebo smyčky?
-- **Definice funkcí/procedur obsahuje rekurzi.**
Předpokládejme navíc, že tělo každé funkce a procedury musí být deklarováno ještě předtím, než je funkce či procedura volána. Je pak nutně každý graf příslušející libovolnému programu acyklický?
-- ano

q) Považte následující jednoduchý algoritmus:

```
while (graf obsahuje alespoň jeden uzel s výstupním stupněm 0, tedy list)
{
   odstraň tento uzel a všechny s ním incidující hrany
}
If (výsledkem je prázdný graf)
  then pak původní graf byl acyklický
  else původní graf nebyl acyklický
```

Dává tento algoritmus vždy správné výsledky? Proč? Jaká je jeho asymptotická složitost? –
Doufám, že funguje. Složitost je O(|H|+|U|) za předpokladu konstantního času ke každému předchůdci uzlu, to by se zařídilo vytvořením reprezentace grafu prostřednictvím seznamu předchůdců.

r) Dokažte, že když je výstupní stupeň každého uzlu nenulový, pak graf obsahuje cyklus. Platí stejné tvrzení pro vstupní stupeň? – **jdu po výstupní hraně, až se dostanu do uzlu, kde už jsem byl, pro vstupní stupeň bych šel zpětně po vstupní hraně**

s) V grafu existuje spojení oběma směry mezi dvěma určitými uzly. Dokažte, že graf obsahuje cyklus. Existuje také cyklus obsahující oba dané uzly? – **složením vznikne uzavřené spojení, z něho lze určitě vybrat cyklus (vyhazujeme „zbytečné okliky“), žádný cyklus nemusí nutně procházet oba výchozí uzly**

t) Dokažte: Graf bez izolovaných uzlů je silně souvislý právě tehdy, když obsahuje uzavřené spojení procházející všemi hranami (tj. každou hranou alespoň jednou). – **Z libovolného uzlu u se po tomto spojení lze dostat do libovolného uzlu v, protože se všemi hranami se na něm nacházejí i všechny uzly**

u) Najděte nutnou a postačující podmínku pro to, aby neorientovaný graf mohl být orientován určitým způsobem tak, že vznikne silně souvislý graf. – **Graf je souvislý a každá jeho hrana je obsažena v nějaké kružnici.**

v) Acyklický (slabě) souvislý graf má jeden kořen a jeden list. Přidáme hranu vedoucí z listu do kořene. Bude výsledek silně souvislý? Rozhodněte. – **Bude silně souvislý. Má-li souvislý acyklický orientovaný graf jeden kořen u a jeden list v, pak každý z ostatních uzlů se nachází na nějaké cestě z u do v. Přidáním hrany v --> u vzniká propojitelnost libovolné dvojice uzlů**

w) Silně souvislý graf má alespoň tolik hran jako uzlů (není-li graf jediným uzlem). Dokažte. --
Pokud by měl méně hran než uzlů, pak buď není (slabě) souvislý, nebo je stromem - v žádném případě tedy není silně souvislý

x) Najděte graf, v němž je vstupní i výstupní stupeň každého uzlu nenulový a přitom graf obsahuje uzel, kterým neprochází žádný cyklus. – O -> o -> O (O je cyklus, o uzel)

3. **Silné komponenty - opět „graf“ znamená „orientovaný graf“**

a) Jak se změní počet silných komponent v grafu, když všechny jeho hrany orientujeme opačně? **– zůstane stejný**

b) Zkuste orientovat hrany úplného grafu Kn pokaždé jinak tak, aby vzniklý orientovaný graf měl přesně k ($1 \le k \le n$) silných komponent. Lze nalézt řešení pro každé k= 1,2, … n? Odstraňte z Kn jednu hranu a úlohu zopakujte. Lze nalézt řešení pro každé k = 1,2, … n?
– **Pro k silných komponent orientujeme hrany incidující s prvními (k-1) uzly od nižšího k vyššímu a ve zbývajících (n-k+1) vytvoříme cyklus, to je ale možné jen pro $k \neq n-1$. Při vypuštěné hraně nepůjde např. pro K3 vytvořit jedna ani dvě silné komponenty, jinak je to obdobné jako v Kn.**

c) Nakreslete obyčejný orientovaný graf s 5 silnými komponentami, který se stane silně souvislým po změně orientace jedné určité hrany. **– skoro cyklus s jednou hranou v protisměru, tu obrátím a dostanu cyklus = silně souvislý graf.**

d) Orientovaný graf má k (> 1) silných komponent. Po změně orientace jedné jeho hrany (nikoli libovolné!) bude mít již jen $m < k$ komponent. Je možno nalézt příklad takového grafu pro libovolná k, m ? (Graf nemusí být nutně obyčejný.) **Ty silné komponenty jsou za sebou propojeny v jednom „topologickém“ pořadí, od každé vede hrana ke všem následujícím. Změnou orientace jedné takové hrany se vytvoří „cyklus“ spojující c silných komponent, takže zbude m = k-c+1 silných komponent.**

e) Dva grafy prohlásíme za ekvivalentní, pokud jsou jejich kondenzace izomorfní. Kolik tříd ekvivalence existuje pro grafy na 4 uzlech a jak jsou velké? – **Jednotlivé třídy reprezentují neizomorfní acyklické grafy o 4, 3, 2 a 1 uzlu. Těch grafů je poměrně dost …**

f) Obyčejný orientovaný graf má 10 uzlů a 2 silné komponenty. Jaký je maximální a minimální počet hran v něm? Řešte otázku také pro případ, že silná komponenta musí obsahovat alespoň 2 uzly. – **minimálně 9 hran (cyklus a izolovaný uzel), maximálně 9.8 + 9 = 81 hran, pro aspoň dva uzly v silné komponentě to bude min. 10 hran a max. 8.7 + 8.2 = 72**

g) Každá silná komponenta v grafu s 12 komponentami je cyklus s 9 uzly. Jaký je pak maximální a minimální možný počet hran v grafu? – **minimum = samotné cykly =12.9 = 108 hran, maximum = 12.9 + 12.11/2 = 108 + 66 = 174 hran**