CVIČENÍ 3

Téma: Souvislost, rozklad na komponenty, vlastnosti orientovaných grafů
Cíle: Aktivní zvládnutí pojmů zavedených v kapitole 2 skripta, schopnost základního úsudku o vztazích mezi nimi a odvození jednoduchých vlastností.
POZOR: Pokud není explicite uvedeno jinak, myslíme grafem **neprázdný neorientovaný graf.**

1.	Nechť x a y jsou dva různé uzly úplného grafu K5. Určete počet • různých cest délky 2 mezi uzly x a y • různých cest délky 3 mezi uzly x a y.
2.	Nechť x a y jsou dva různé uzly úplného grafu Kn ($n \geq 5$). Určete počet různých cest délky 4 mezi uzly x a y.
3.	Nechť x a y jsou dva sousední uzly úplného bipartitního grafu $K_{3,3}$. Určete počet • různých cest délky 2 mezi uzly x a y • různých cest délky 3 mezi uzly x a y • různých cest délky 4 mezi uzly x a y.
4.	Nechť x a y jsou dva sousední uzly úplného bipartitního grafu $K_{n,n}$ ($n \geq 3$). Určete počet • různých cest délky 2 mezi uzly x a y • různých cest délky 3 mezi uzly x a y • různých cest délky 4 mezi uzly x a y.
5.	Nechť x a y jsou dva nesousední uzly úplného bipartitního grafu $K_{n,n}$ ($n \geq 3$). Určete počet • různých cest délky 2 mezi uzly x a y • různých cest délky 3 mezi uzly x a y různých cest délky 4 mezi uzly x a y.
6.	Silniční síť zahrnuje *2n* měst a z každého měst vede *n* silnic do *n* různých měst. Existuje silniční spojení mezi libovolnými dvěma městy? (Návod: Zkuste použít větu 2.15)
7.	Určete minimální délku kružnice v obecném grafu (se smyčkami), v multigrafu bez smyček a v obyčejném grafu. Čím je omezena maximální délka kružnice v těchto grafech?
8.	Dokažte, že graf, který obsahuje uzavřený tah, obsahuje také kružnici. Platí toto tvrzení pro uzavřený sled?
9.	Nakreslete orientovaný graf reprezentující následující relaci R na množině { -2, -1, 0, 1 }. Zjistěte, zda je R reflexivní, symetrická a tranzitivní. $i \, R \, j \; \Leftrightarrow_{df} \; \lvert i - j \rvert > 1$
10.	Jak poznáme, zda v nějakém orientovaném grafu existuje jen konečně mnoho různých spojení?
11.	Pro zadaný obyčejný orientovaný graf G platí, že každý uzel je počátečním uzlem aspoň jedné hrany a současně i koncovým uzlem aspoň jedné hrany. • Je možné z toho odvodit, že graf G obsahuje aspoň jeden cyklus? • Je možné z toho odvodit, že každým uzlem grafu G prochází nějaký cyklus?
12.	Určete maximální počet hran, které může obsahovat obyčejný orientovaný graf o n uzlech, který nemá žádný cyklus.
13.	Nechť P1 je spojení z uzlu u do uzlu v a P2 spojení z uzlu v do uzlu u ($u \neq v$) v orientovaném grafu G. Je možné prohlásit, že graf G pak obsahuje cyklus procházející oběma uzly u a v?
14.	Orientovaný graf *G'* vznikl sjednocením nějakého (orientovaného) grafu *G* s opačně orientovaným grafem G^{-}. Bude graf *G'* silně souvislý?
15.	Mějme obyčejný orientovaný graf G s n uzly a n-1 (orientovanými) hranami. • Jaký bude minimální možný počet silných komponent tohoto grafu?

	• Jaký bude maximální možný počet silných komponent tohoto grafu?
16.	Předpokládejme, že náhodně orientujeme úplný neorientovaný graf K_n . Jaká bude pravděpodobnost, že vzniklý orientovaný graf bude acyklický?
17.	Nalezněte orientovaný graf, který je symetrický a tranzitivní, a přitom není reflexivní. Určete obecnou charakteristiku takových grafů.