CVIČENÍ 5 - možná řešení

Téma: Reprezentace grafu, procházení do šířky a do hloubky, acykličnost, topologické uspořádání.
Cíle: Upevnit pochopení algoritmů procházení grafu, rozdíly při procházení neorientovaných a orientovaných grafů.
Z následujících příkladů lze pro řešení na cvičení provést reprezentativní výběr.

1. **Maticová reprezentace grafu:**

a) Neorientovaný graf G je zadán svou incidenční maticí **A**. Sestavte algoritmus vytvoření jeho matice sousednosti **V**.

```
Vytvoř matici V velikosti |U|*|U| a vynuluj ji
Opakuj pro každý sloupec matice A
   zjisti indexy i, j prvků 1 ve sloupci
   inkrementuj v[i,j]
```

b) Neorientovaný graf G je zadán svou incidenční maticí **V**. Sestavte algoritmus vytvoření jeho matice sousednosti **A**.

```
Počet hran |H| = Suma v[i,j] přes i,j
Vytvoř matici A velikosti |H|*|U| a vynuluj ji
m=0
Pro i=1 až |U| opakuj
  Pro j=i až |U| opakuj
    Když (v[i,j]>0) Pro k=1 až v[i,j] opakuj
                        m++; a[i,m]=1; a[j,m]=1;
```

c) Orientovaný graf G je zadán svou incidenční maticí **A**. Sestavte algoritmus vytvoření jeho matice sousednosti **V**. **– podobně jako a), jen rozlišit +1 a -1 ve sloupci**

d) Orientovaný graf G je zadán svou incidenční maticí **V**. Sestavte algoritmus vytvoření jeho matice sousednosti **A**. **– podobně jako a), jen projít celou matici V do sloupců matice A dávat a[i,m]=+1 a a[j,m]= -1**

e) Sestavte algoritmus výpočtu stupně uzlů neorientovaného (orientovaného) grafu, je-li zadána jeho matice incidence **A.** Jaká je časová složitost výpočtu stupně jednoho zadaného uzlu u?
Počet hodnot 1 (resp. počet 1 a počet -1) v každém řádku, pro jeden uzel je složitost Θ(|H|)

f) Sestavte algoritmus výpočtu stupně uzlů neorientovaného (orientovaného) grafu, je-li zadána jeho matice sousednosti **V.** Jaká je časová složitost výpočtu stupně jednoho zadaného uzlu u?
Součet hodnot v každém řádku (resp. sloupci), pro jeden uzel je složitost Θ(|U|)

2. **BFS A DFS Otázky k řešení:**

a) Je možné, aby po prohledání obyčejného neorientovaného grafu do šířky i do hloubky vznikl stejný kořenový strom? Předpokládejte, že graf je

souvislý, ale není stromem.
Není to možné – graf obsahuje aspoň jednu kružnici mající alespoň 3 hrany, tak se na ni podíváme (viz následující otázka)

b) Jak vypadají DF- a BF- stromy grafu Cn (kružnice o n hranách)?
DF-strom tvoří cesta délky (n-1) od kořene, BF-strom tvoří dvě cesty zhruba poloviční délky vycházející z kořene

c) Jak vypadají DF- a BF- stromy grafu Kn?
DF-strom tvoří cesta délky (n-1) od kořene, BF-strom je hvězdice

d) Jak vypadají BF- a DF stromy grafu Km,n (m, n > 1)?
BF-strom jsou dvě spojené hvězdice uzel → n uzlů → m-1 uzlů, DF-strom je cesta délky 2.min(m,n)-1 dole rozvětvená na |m-n| větví

e) Je možné, aby v nějakém grafu měl DF-strom vždy tvar cesty bez ohledu na to, kde prohledávání začne a v jakém pořadí se vybírají následníci jednotlivých uzlů při prohledávání?
To nastane pro Kn

f) Jaký je vztah hloubky DF-stromu a průměru grafu? Je jedna z těchto veličin vždy větší nebo rovna druhé? (definice průměru grafu viz přednáška 5, snímek 14)
Hloubka DF-stromu není v přímém vztahu k průměru – může být větší (Kn) i menší (strom prohledávaný ze středu)

g) Jaký je vztah hloubky BF-stromu a průměru grafu? Je jedna z těchto veličin vždy větší nebo rovna druhé?
Hloubka BF-stromu je vždy menší nebo rovna průměru (pročpak?)

h) V daném obecném grafu náleží určitému DF-stromu a BF-stromu tytéž hrany. Znamená to nutně, že daný graf je strom?
Může to být např. multigraf, který by po stažení každé skupiny rovnoběžných hran do jedné hrany byl stromem

i) Mohou být v nějakém obyčejném grafu některé dva různé BF stromy (po zrušení orientace jejich hran) hranově disjunktní?
Nemohou – i když budou vycházet z různých uzlů, tak první strom musí obsahovat nějakou hranu, která vede do uzlu, který bude kořenem druhého stromu. Tento strom však bude obsahovat všechny hrany incidující s kořenem, tedy i dotyčnou hran

j) Mohou být v nějakém grafu některé dva různé DF stromy se společným kořenem (po zrušení orientace jejich hran) hranově disjunktní?
Ano, např. K5 – jednou jej obíhám po obvodových hranách, podruhé po vnitřních

k) Mohou v nějakém souvislém grafu, který není stromem, existovat dva BF-stromy, které mají kořen v různých uzlech, ale přesto používají tytéž hrany grafu?
Ano, např. dvě hvězdice, jejichž středy jsou spojené hranou a mají každá aspoň dva obvodové uzly, přičemž některé z nich jsou spojeny hranou (aby to nebyl strom)

Komponenty a procházení

a) Jakou nutnou podmínku musí splňovat orientovaný graf, aby jeho prohledáním do hloubky vycházejícím z libovolného uzlu vznikl jediný strom prohledávání (nikoli les)? Jak tato otázka souvisí s kondenzací grafu?
Prohledávání musí začít v uzlu, z něhož jsou všechny ostatní uzly dosažitelné. V kondenzaci se komponenta obsahující tento uzel kondenzuje na uzel (kořen), z něhož jsou všechny ostatní uzly kondenzace dostupné.

b) V jakém pořadí je třeba vybírat uzly při volání procedury DFS-Projdi, aby vzniklý DF- les byl tvořen maximálním počtem dílčích stromů?
Za výchozí uzel vždy zvolit takový, který má co nejméně dostupných uzlů