CVIČENÍ 8

Téma: Minimální kostry, hladové algoritmy, minimální cesty.
Cíle: Zvládnout algoritmy určování minimálních koster (Borůvka, Jarník), návrh hladových algoritmů, algoritmy pro hledání minimálních cest (Dijkstra).

Minimální kostry:

1. Zjistěte, zda jsou následující tvrzení pravdivá či nikoliv. Pravdivá tvrzení dokažte, nepravdivá vyvraťte co nejjednodušším protipříkladem:
   a) Jsou-li ohodnocení všech hran v souvislém neorientovaném grafu navzájem různá, je jeho minimální kostra určena jednoznačně.
   b) Jsou-li ohodnocení všech hran v souvislém neorientovaném grafu navzájem různá, pak mají každé dvě jeho různé kostry různá ohodnocení.

2. Nechť *h* je hrana s minimálním ohodnocením *w(h)* v neorientovaném grafu *G*. Dokažte, že existuje minimální kostra grafu *G* obsahující hranu *h*. Musí hranu *h* obsahovat každá minimální kostra?

3. Nechť *h* je hrana s maximálním ohodnocením *w(h)* v nějaké kružnici neorientovaného grafu *G*. Dokažte, že existuje minimální kostra grafu *G*, která neobsahuje hranu *h*. Může existovat minimální kostra, která hranu *h* obsahuje?

4. Nechť *T je* minimální kostra grafu *G* s ohodnocením hran *w* a označme jako $(w_1, w_2, ..., w_{n-1})$ vzestupně uspořádanou posloupnost ohodnocení jejích hran. Dokažte, že i každé jiné minimální kostře *T'* grafu *G* bude odpovídat stejná uspořádaná posloupnost ohodnocení hran.

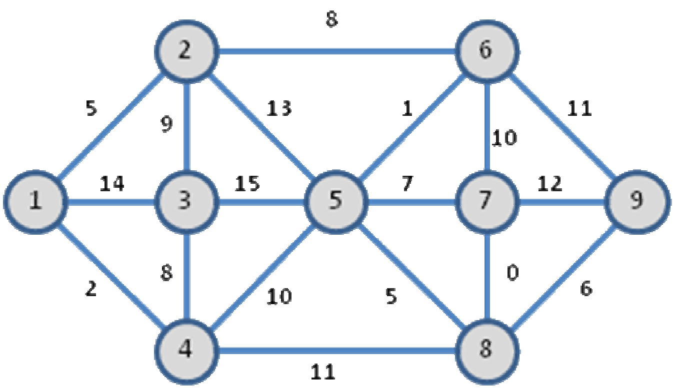
5. Předpokládejte, že ohodnocení hran grafu *G* jsou celá čísla z intervalu $\langle 1, |U| \rangle$. Jak je možné zrychlit v tomto případě Borůvkův-Kruskalův algoritmus? Je možné ke zrychlení využít informace, že ohodnocení hran jsou celá čísla z intervalu $\langle 1, W \rangle$ pro nějakou konstantu *W*?

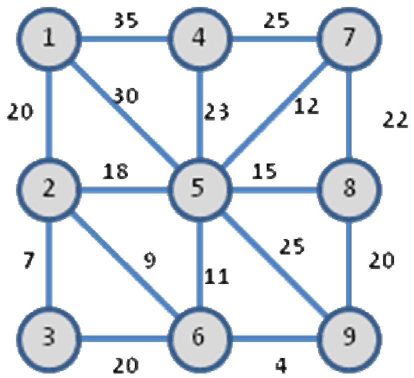
6. Máme daný souvislý neorientovaný graf G = ⟨H,U⟩, pro který jsme určili minimální kostru T. Graf G’ vznikl tak, že jsme ke grafu G přidali jeden uzel a propojili ho pomocí p nových hran s uzly grafu G. Navrhněte postup, jak určit minimální kostru grafu G’. Jaká bude složitost tohoto postupu?

7. Máme daný souvislý neorientovaný graf G = ⟨H,U⟩, pro který jsme určili minimální kostru T. Graf G’ vznikl tak, že jsme ke grafu G **přidali jednu hranu** mezi existujícími uzly grafu G. Navrhněte postup, jak určit minimální kostru grafu G’. Jaká bude složitost tohoto postupu?

8. Máme daný souvislý neorientovaný graf G = ⟨H,U⟩, pro který jsme určili minimální kostru T. Graf G’ vznikl tak, že jsme z grafu G **odebrali jednu hranu** mezi existujícími uzly grafu G. Navrhněte postup, jak určit minimální kostru grafu G’. Jaká bude složitost tohoto postupu?

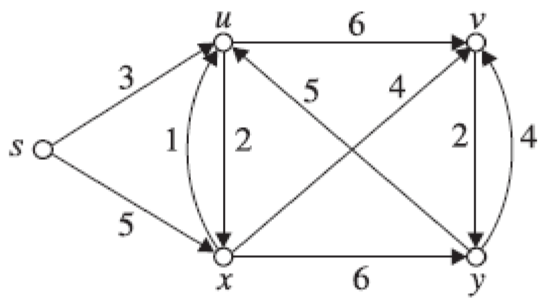
9. Určete minimální kostry následujících dvou grafů pomocí Borůvkova-Kruskalova a Jarníkova-Primova algoritmu.





Hladové algoritmy:

10. Upravte Huffmanův algoritmus tak, aby vytvářel minimální pravidelný strom se zadaným stupněm r.

<table>
<tr><td>11.</td><td>Dokažte, že hodnotu E_w vnější w-délky pravidelného stromu vytvořeného Huffmanovým algoritmem lze spočítat jako součet ohodnocení všech jeho vnitřních uzlů.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Hledání minimálních cest:</td></tr>
<tr><td>12.</td><td>Na rozehřátí
W-vzdálenost $\boldsymbol{d_w(u, v)}$ je definována jako w-délka nejkratší cesty v grafu s ohodnocením $\boldsymbol{w : H \rightarrow R}$, nechť graf G obsahuje záporně ohodnocené hrany, ale žádný záporně ohodnocený cyklus. Napište znění trojúhelníkové nerovnosti pro $\boldsymbol{d_w}$ a uveďte, zda v tomto případě platí.
Předpokládejme, že hrany kružnice jsou ohodnoceny (kladnými) přirozenými čísly. Jak se změní vlastnosti týkající se poloměru r, průměru T a počtu středů takové kružnice oproti situaci, kdy každá její hrana má délku (ohodnocení) rovnou jedné?</td></tr>
<tr><td>13.</td><td>Dijkstrův algoritmus
Určete alespoň dva různé stromy minimálních cest z uzlu s grafu na následujícím obrázku.

</td></tr>
<tr><td>14.</td><td>(Zopakování principu Dijkstrova algoritmu) Pomocí Dijkstrova algoritmu zjistěte pro graf na předchozím obrázku vzdálenosti $\boldsymbol{d_w(x, ...)}$ a $\boldsymbol{d_w(v, ...)}$.</td></tr>
<tr><td>15.</td><td>Najděte příklad grafu obsahujícího hrany se záporným ohodnocením, pro který bude výsledek získaný Dijkstrovým algoritmem nesprávný.</td></tr>
<tr><td>16.</td><td>Najděte příklad grafu, kde jsou některé (případně i všechny) hrany záporně ohodnocené a přitom Dijkstrův algoritmus správně určí výsledek.</td></tr>
</table>