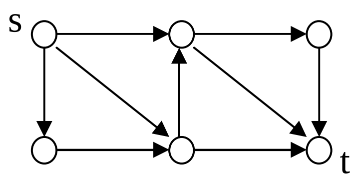
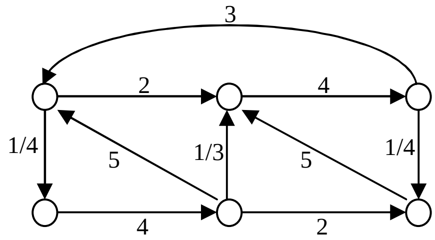
CVIČENÍ 11

Téma: Planární grafy a toky v sítích.
Cíle: Posílit pochopení vlastností planárních grafů, získat praktické zkušenosti se základním algoritmem určování maximálního toku (Ford-Fulkerson) a určením přípustné cirkulace.

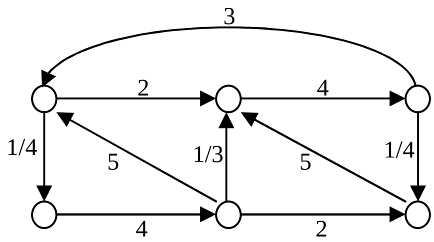
	Planární grafy
1.	Zjistěte a zdůvodněte, zda jsou 3-rozměrná a 4-rozměrná hyperkrychle planárnámi grafy.
2.	Dokažte, že pro jakýkoliv graf lze sestrojit jeho diagram bez průsečíků ve třírozměrném prostoru $\mathbf{R}^3$.
3.	Navrhněte postup, jak sestrojit (obyčejný) neplanární graf se zadaným počtem uzlů $\lvert U \rvert = n$ a počtem hran $\lvert H \rvert = m$.
4.	Máme obyčejný neorientovaný graf $G = \langle H,U \rangle$ s $\lvert U \rvert = n$ (≥ 6) uzly, nechť T_1, T_2 a T_3 jsou tři jeho hranově disjunktní kostry. Může být graf G planární?
	Toky v sítích
5.	Nechte studenty zopakovat definice sítě, maximálního toku, kapacity řezu sítě, zlepšující cesty.
6.	Pro konkrétní příklady jednoduchých sítí určete kapacitu všech jejich hranových řezů.
7.	Pomocí max flow – min cut teorému dokažte platnost následujících tvrzení: • Maximální počet hranově disjunktních cest v orientovaném grafu G z uzlu s do uzlu t je roven minimálnímu počtu $s \to t$ hran v hranovém řezu oddělujícím uzly s a t. • Maximální počet uzlově disjunktních cest v orientovaném grafu G z uzlu s do uzlu t je roven minimálnímu počtu uzlů, jejichž odebráním se zruší všechny orientované cesty z s do t.
8.	Vyslovte se o pravdivosti následujících tvrzení. Správná tvrzení dokažte, pro nesprávná podejte protipříklady. a) Nechť f je maximální tok v síti G a (u,v), (v,u) libovolná dvojice opačně orientovaných hran. Pak platí, že buď $f(u,v) = 0$ nebo $f(v,u) = 0$. b) V každé síti G existuje maximální tok f takový, že buď $f(u,v) = 0$ nebo $f(v,u) = 0$ pro každou dvojici opačně orientovaných hran. c) Jestliže kapacity jednotlivých hran v síti jsou navzájem různé, pak má síť jediný hranový řez s minimální kapacitou. d) Pokud v síti zrušíme orientaci nějaké orientované hrany, hodnota maximálního toku se nezmění. e) Jestliže v síti vynásobíme kapacity všech hran kladným číslem K, složení hranového řezu s minimální kapacitou se nezmění. f) Jestliže v síti přičtem ke kapacitě každé hrany kladné číslo K, složení hranového řezu s minimální kapacitou se nezmění.
9.	**Fordův-Fulkersonův algoritmus** Pro síť na obrázku nalezněte maximální tok a ověřte, že jeho hodnota se rovná hodnotě minimálního řezu sítě. Kapacity hran jsou rovny jedné. 

10. Sestrojte graf, u něhož Fordův-Fulkersonův algoritmus provádí alespoň 5 iterací zlepšující se cesty. (Obecně *k* iterací.)

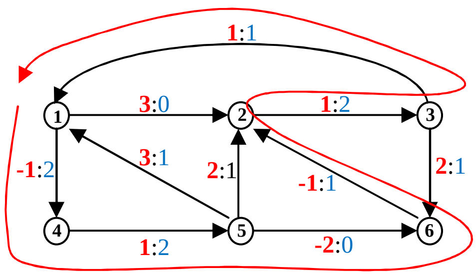
11. Pro konkrétní síť s alespoň 2 hranami s dolní mezí toku (tj. 2 hrany s ohodnoceními **min/max**) proveďte jejich úpravu na úlohu s omezeným minimálním tokem, a tuto úlohu vyřešte.



12. Pro stejnou síť jako v minulém příkladu určete nějakou přípustnou cirkulaci.



13. Zvolte nějak jednotkové ceny toku ve všech hranách sítě z minulého příkladu a pro tyto ceny nalezněte nejlacinější přípustnou cirkulaci. Vycházíme ze získané přípustné cirkulace, jednotkové ceny toku jsou určeny červenými čísly před dvojtečkou, za nimi jsou modře aktuální toky hranami.



13. Katedra s učiteli $u_1, u_2, \ldots, u_n$ zajišťuje v příštím semestru přednášky předmětů $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Každý z učitelů si stanovil dva předměty, které může přednášet. Jakým způsobem zjistí úvazkář katedry, zda je možné přidělit po jedné přednášce každému učiteli s respektováním jeho požadavků?