CVIČENÍ 2

Téma: Operace s neorientovanými grafy, izomorfismus, sousednost, stupně uzlů.
Cíle: Aktivní zvládnutí pojmů zavedených v kapitole 2 (str. 18 – 33) skripta, schopnost základního úsudku o vztazích mezi nimi a odvození jednoduchých vlastností.
POZOR: Pokud není explicite uvedeno jinak, myslíme grafem **neprázdný neorientovaný graf.**

1.	Zahřívací zopakování základních pojmů – vyučující kreslí na tabuli a zjišťuje pochopení definic uvedených na přednášce a znalost jednoduchých vlastností definovaných pojmů ve specifikovaných případech, např. jako: • je zadaný neorientovaný graf: prostý/obyčejný/úplný graf, multigraf, podgraf jiného, izomorfní s nějakým jiným, zřejmé příznaky vylučující izomorfismus • stupeň uzlu, sousedi, soubor stupňů • počet různých grafů určitého typu při zadání počtu/množiny uzlů/hran • existence grafu s požadovanými vlastnostmi
2.	Nakreslete graf s požadovanými vlastnostmi nebo uveďte, proč takový graf neexistuje: a) graf má právě 6 uzlů a všechny jsou stupně 3 b) graf má právě 5 uzlů a všechny jsou stupně 3 c) graf má právě 4 uzly a všechny jsou stupně 1 d) graf má právě 6 uzlů a 4 hrany e) graf má právě 4 uzly se stupni 1, 2, 3, 4 f) graf má právě 4 hrany a 4 uzly se stupni 1, 2, 3, 4 g) graf je prostý a má právě 6 uzlů se stupni 1, 2, 3, 4, 5, 5 h) graf je prostý a má právě 5 uzlů se stupni 2, 3, 3, 4, 4
3.	Určete počet automorfismů následujících grafů: a) úplný graf Kn, z něhož je odstraněna jedna hrana b) úplný graf Kn, z něhož jsou odstraněny dvě sousední hrany c) úplný graf Kn, z něhož jsou odstraněny dvě nesousední hrany d) graf vzniklý propojením úplných grafů Km a Kn ($m \neq n$) jednou přidanou hranou e) graf vzniklý propojením úplných grafů Km a Kn ($m \neq n$) dvěma přidanými nesousedními hranami f) graf vzniklý propojením úplných grafů Km a Kn ($m \neq n$) dvěma přidanými sousedními hranami g) graf vzniklý propojením dvou úplných grafů Kn jednou přidanou hranou h) graf vzniklý propojením dvou úplných grafů Kn dvěma přidanými nesousedními hranami i) graf vzniklý propojením dvou úplných grafů Kn dvěma přidanými sousedními hranami
4.	Vyslovte nějakou charakterizaci grafu, který vznikne jako symetrická diference soustavy (ne nutně disjunktních) kružnic.
5.	Určete vztah mezi relací dosažitelnosti *u* --- *v* a relací sousednosti Γ prostého grafu $G = \langle H,U \rangle$. Relace sousednosti je definována předpisem $u \; \Gamma \; v \Leftrightarrow_{df}$ v H existuje hrana $h = [u,v]$
6.	Nechť *G* je obyčejný graf o pěti uzlech. • Může *G* obsahovat současně uzel stupně 0 a uzel stupně 4?

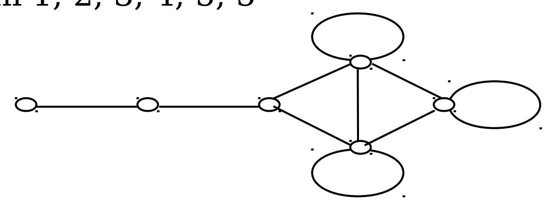
	• Má-li *G* právě dva uzly téhož stupně (a ostatní stupně jsou navzájem různé), může to být stupeň 0 nebo 4? • Je možné, aby každý uzel v *G* měl jiný stupeň?
7.	Je dán graf, který má nejméně dva uzly a obsahuje méně hran než uzlů. Dokažte, že takový graf má alespoň jeden uzel stupně 0 nebo 1.
8.	Určete minimální délku kružnice v obecném grafu (se smyčkami), v multigrafu bez smyček a v obyčejném grafu. Čím je omezena maximální délka kružnice v těchto grafech?
9.	Určete všechny • neizomorfní souvislé faktory úplného grafu K_5 • neizomorfní faktory grafu K_5 Čím se postupy použité v těchto dvou případech liší?
10.	Kolik různých grafů lze vytvořit, je-li pevně dána množina uzlů *U* o *n* prvcích a my k ní dotváříme všemi možnými způsoby množinu hran? (To není zobecnění předchozí úlohy!)

Další příklady k procvičení je možné brát z „kontrolních úloh“ obsažených v prezentacích přednášek s tím, že se neprocvičují červeně vyznačené úlohy, neboť za jejich samostatné řešení uděluje přednášející prémiové body.

CVIČENÍ 2 – možná řešení

1. Zahřívací zopakování základních pojmů – vyučující kreslí na tabuli a zjišťuje pochopení definic uvedených na přednášce a znalost jednoduchých vlastností definovaných pojmů ve specifikovaných případech, např. jako:
   - je zadaný neorientovaný graf: prostý/obyčejný/úplný graf, multigraf, podgraf jiného, izomorfní s nějakým jiným, zřejmé příznaky vylučující izomorfismus
   - stupeň uzlu, sousedi, soubor stupňů
   - počet různých grafů určitého typu při zadání počtu/množiny uzlů/hran
   - existence grafu s požadovanými vlastnostmi

2. Nakreslete graf s požadovanými vlastnostmi nebo uveďte, proč takový graf neexistuje:
   a) graf má právě 6 uzlů a všechny jsou stupně 3 – např. šestiúhelník s diagonálními hranami
   b) graf má právě 5 uzlů a všechny jsou stupně 3 – neexistuje – 5 x 3 není sudé číslo
   c) graf má právě 4 uzly a všechny jsou stupně 1 – dvě oddělené hrany
   d) graf má právě 6 uzlů a 4 hrany – např. cesta s 5 uzly a izolovaný uzel (nebo dvě cesty, atd.)
   e) graf má právě 4 uzly se stupni 1, 2, 3, 4 – např. 1—2—3==4O (kolem 4 je smyčka)
   f) graf má právě 4 hrany a 4 uzly se stupni 1, 2, 3, 4 – nelze, součet stupňů 10 není 2.|H|=8
   g) graf je prostý a má právě 6 uzlů se stupni 1, 2, 3, 4, 5, 5



   h) graf je prostý a má právě 5 uzlů se stupni 2, 3, 3, 4, 4 – např. K4 s přidaným uzlem připojeným dvěma hranami ke dvěma jeho různým uzlům

   POZOR – pokud bychom požadovali **OBYČEJNÉ grafy**, pak
   – úloha e) nemá řešení (v obyčejném grafu se čtyřmi uzly neexistuje uzel stupně 4)
   – úloha g) nemá řešení (od uzly stupně 5 musí vést hrany ke všem zbývajícím uzlům, tím pádem nemůže existovat uzel stupně 1)

3. Určete počet automorfismů následujících grafů:
   a) úplný graf Kn, z něhož je odstraněna jedna hrana – 2.(n-2)! – je dobré si to představit na doplňku – to je graf s n uzly a jedinou hranou.
   b) úplný graf Kn, z něhož jsou odstraněny dvě sousední hrany – 2.(n-3)! – opět radši přes doplněk
   c) úplný graf Kn, z něhož jsou odstraněny dvě nesousední hrany – 8.(n-4)! - doplněk
   d) graf vzniklý propojením úplných grafů Km a Kn (m≠n) jednou přidanou hranou – (m-1)!.(n-1)!
   e) graf vzniklý propojením úplných grafů Km a Kn (m≠n) dvěma přidanými nesousedními hranami – 4.(m-2)!.(n-2)!
   f) graf vzniklý propojením úplných grafů Km a Kn (m≠n) dvěma přidanými sousedními hranami – 2.(m-1)!.(n-2)! nebo 2.(m-2)!.(n-1)! podle toho, zda ty dvě hrany v Km nebo v Kn sousedí

g) graf vzniklý propojením dvou úplných grafů Kn jednou přidanou hranou – 2.(n-1)!.(n-1)!

h) graf vzniklý propojením dvou úplných grafů Kn dvěma přidanými nesousedními hranami –
8.(n-2)!.(n-2)!

i) graf vzniklý propojením dvou úplných grafů Kn dvěma přidanými sousedními hranami -
2.(n-1)!.(n-2)!

4\. Vyslovte nějakou charakterizaci grafu, který vznikne jako symetrická diference soustavy (ne nutně disjunktních) kružnic.
Symetrická diference soustavy kružnic je graf, jehož všechny uzly mají sudý stupeň (ověřte!), a to je sjednocení hranově disjunktních kružnic.

5\. Určete vztah mezi relací dosažitelnosti u --- v a relací sousednosti Γ prostého grafu $G = <H,U>$. Relace sousednosti je definována předpisem

$u\ \Gamma\ v \Leftrightarrow_{df}$ v H existuje hrana $h = [u,v]$

Relace dosažitelnosti je reflexivně-tranzitivním uzávěrem relace sousednosti.

6\. Nechť G je obyčejný graf o pěti uzlech.

- Může G obsahovat současně uzel stupně 0 a uzel stupně 4? – nemůže – uzel stupně 4 musí sousedit se všemi zbylými uzly, takže žádný u nich nemůže být izolovaný
- Má-li G právě dva uzly téhož stupně (a ostatní stupně jsou navzájem různé), může to být stupeň 0 nebo 4? – pro stupeň 0 by zbylé tři uzly musely mít stupně 1, 2, 3 a to není možné, pro stupeň 4 mají ostatní uzly stupeň aspoň 2, takže by jejich různé stupně musely být buď 2, 3, 4 (to by ale byl další uzel stupně 4) nebo 2, 3, 5 (to ale není možné – graf má jen 5 uzlů, takže stupně jsou nejvýše rovny 4)
- Je možné, aby každý uzel v G měl jiný stupeň? – není, to by musel obsahovat současně uzel stupně 0 a uzel stupně 4, což nelze podle prvního bodu.

7\. Je dán graf, který má nejméně dva uzly a obsahuje méně hran než uzlů. Dokažte, že takový graf má alespoň jeden uzel stupně 0 nebo 1.
Kdyby bylo $\delta(u) \geq 2$ pro všechny uzly, pak by platilo $2.|H| = \sum\delta(u) \geq 2.|U|$, neboli $|H| \geq |U|$ - to je ale spor s předpokladem, že v grafu je méně hran než uzlů.

8\. Určete minimální délku kružnice v obecném grafu (se smyčkami), v multigrafu bez smyček a v obyčejném grafu. Čím je omezena maximální délka kružnice v těchto grafech?
V obecném grafu 1 (smyčka), v multigrafu bez smyček 2 (dvě rovnoběžné hrany), v obyčejném 3.

9\. Určete všechny

- neizomorfní souvislé faktory úplného grafu K_5
- neizomorfní faktory v K_5

Čím se postupy použité v těchto dvou případech liší?
Lze začít probírkou všech neizomorfních faktorů K5 a pak vybrat jen ty souvislé.
Pro 0 hran máme 1 faktor, pro 1 hranu 1 faktor, pro 2 hrany 2 faktory (dvě sousední a dvě nesousední hrany), pro 3 hrany máme 4 faktory, pro 4 hrany 6 faktorů, pro 5 hran 6 faktorů, pro 6 hran je to jako pro 4 (doplněk!), pro 7 hran jako pro 3, atd.
Souvislé jsou pro 4 hrany 3, pro 5 hran 5, pro 6 hran 5, pro 7, 8, 9 a 10 hran všechny (tedy 4, 2, 1 a 1).

10.	Kolik různých grafů lze vytvořit, je-li pevně dána množina uzlů *U* o *n* prvcích a my k ní dotváříme všemi možnými způsoby množinu hran? (To není zobecnění předchozí úlohy!) Je to stejné, jako bychom vytvářeli všechny **různé faktory** (včetně izomorfních) úplného grafu o n uzlech, máme tedy 2**(n.(n-1)/2) možností.