CVIČENÍ 2

Téma: Operace s neorientovanými grafy, izomorfismus, sousednost, stupně uzlů.
Cíle: Aktivní zvládnutí pojmů zavedených v kapitole 2 (str. 18 – 33) skripta, schopnost základního úsudku o vztazích mezi nimi a odvození jednoduchých vlastností.
POZOR: Pokud není explicite uvedeno jinak, myslíme grafem **neprázdný neorientovaný graf.**

1.	Zahřívací zopakování základních pojmů – vyučující kreslí na tabuli a zjišťuje pochopení definic uvedených na přednášce a znalost jednoduchých vlastností definovaných pojmů ve specifikovaných případech, např. jako: • je zadaný neorientovaný graf: prostý/obyčejný/úplný graf, multigraf, podgraf jiného, izomorfní s nějakým jiným, zřejmé příznaky vylučující izomorfismus • stupeň uzlu, sousedi, soubor stupňů • počet různých grafů určitého typu při zadání počtu/množiny uzlů/hran • existence grafu s požadovanými vlastnostmi
2.	Nakreslete graf s požadovanými vlastnostmi nebo uveďte, proč takový graf neexistuje: a) graf má právě 6 uzlů a všechny jsou stupně 3 b) graf má právě 5 uzlů a všechny jsou stupně 3 c) graf má právě 4 uzly a všechny jsou stupně 1 d) graf má právě 6 uzlů a 4 hrany e) graf má právě 4 uzly se stupni 1, 2, 3, 4 f) graf má právě 4 hrany a 4 uzly se stupni 1, 2, 3, 4 g) graf je prostý a má právě 6 uzlů se stupni 1, 2, 3, 4, 5, 5 h) graf je prostý a má právě 5 uzlů se stupni 2, 3, 3, 4, 4
3.	Určete počet automorfismů následujících grafů: a) úplný graf Kn, z něhož je odstraněna jedna hrana b) úplný graf Kn, z něhož jsou odstraněny dvě sousední hrany c) úplný graf Kn, z něhož jsou odstraněny dvě nesousední hrany d) graf vzniklý propojením úplných grafů Km a Kn (m≠n) jednou přidanou hranou e) graf vzniklý propojením úplných grafů Km a Kn (m≠n) dvěma přidanými nesousedními hranami f) graf vzniklý propojením úplných grafů Km a Kn (m≠n) dvěma přidanými sousedními hranami g) graf vzniklý propojením dvou úplných grafů Kn jednou přidanou hranou h) graf vzniklý propojením dvou úplných grafů Kn dvěma přidanými nesousedními hranami i) graf vzniklý propojením dvou úplných grafů Kn dvěma přidanými sousedními hranami
4.	Vyslovte nějakou charakterizaci grafu, který vznikne jako symetrická diference soustavy (ne nutně disjunktních) kružnic.
5.	Určete vztah mezi relací dosažitelnosti *u* --- *v* a relací sousednosti Γ prostého grafu $G = \langle H,U \rangle$. Relace sousednosti je definována předpisem $u \, \Gamma \, v \Leftrightarrow_{df}$ v H existuje hrana $h = [u,v]$
6.	Nechť *G* je obyčejný graf o pěti uzlech. • Může *G* obsahovat současně uzel stupně 0 a uzel stupně 4? • Má-li *G* právě dva uzly téhož stupně (a ostatní stupně jsou navzájem různé), může to být stupeň 0 nebo 4? • Je možné, aby každý uzel v *G* měl jiný stupeň?
7.	Je dán graf, který má nejméně dva uzly a obsahuje méně hran než uzlů. Dokažte, že takový graf má alespoň jeden uzel stupně 0 nebo 1.
8.	Určete minimální délku kružnice v obecném grafu (se smyčkami), v multigrafu bez smyček a v obyčejném grafu. Čím je omezena maximální délka kružnice v těchto grafech?
9.	Určete všechny

	• neizomorfní souvislé faktory úplného grafu K_5 • neizomorfní faktory grafu K_5 Čím se postupy použité v těchto dvou případech liší?
10.	Kolik různých grafů lze vytvořit, je-li pevně dána množina uzlů U o n prvcích a my k ní dotváříme všemi možnými způsoby množinu hran? (To není zobecnění předchozí úlohy!)

Další příklady k procvičení je možné brát z „kontrolních úloh“ obsažených v prezentacích přednášek s tím, že se neprocvičují červeně vyznačené úlohy, neboť za jejich samostatné řešení uděluje přednášející prémiové body.