CVIČENÍ 3

Téma: Souvislost, rozklad na komponenty, vlastnosti orientovaných grafů
Cíle: Aktivní zvládnutí pojmů zavedených v kapitole 2 skripta, schopnost základního úsudku o vztazích mezi nimi a odvození jednoduchých vlastností.
POZOR: Pokud není explicite uvedeno jinak, myslíme grafem **neprázdný neorientovaný graf.**

1.	Nechť x a y jsou dva různé uzly úplného grafu K_5. Určete počet • různých cest délky 2 mezi uzly x a y • různých cest délky 3 mezi uzly x a y.
2.	Nechť x a y jsou dva různé uzly úplného grafu Kn (n≥5). Určete počet různých cest délky 4 mezi uzly x a y.
3.	Nechť x a y jsou dva sousední uzly úplného bipartitního grafu $K_{3,3}$. Určete počet • různých cest délky 2 mezi uzly x a y • různých cest délky 3 mezi uzly x a y • různých cest délky 4 mezi uzly x a y.
4.	Nechť x a y jsou dva sousední uzly úplného bipartitního grafu $K_{n,n}$ (n≥3). Určete počet • různých cest délky 2 mezi uzly x a y • různých cest délky 3 mezi uzly x a y • různých cest délky 4 mezi uzly x a y.
5.	Nechť x a y jsou dva nesousední uzly úplného bipartitního grafu $K_{n,n}$ (n≥3). Určete počet • různých cest délky 2 mezi uzly x a y • různých cest délky 3 mezi uzly x a y různých cest délky 4 mezi uzly x a y.
6.	Silniční síť zahrnuje *2n* měst a z každého měst vede *n* silnic do *n* různých měst. Existuje silniční spojení mezi libovolnými dvěma městy? (Návod: Zkuste použít větu 2.15)
7.	Určete minimální délku kružnice v obecném grafu (se smyčkami), v multigrafu bez smyček a v obyčejném grafu. Čím je omezena maximální délka kružnice v těchto grafech?
8.	Dokažte, že graf, který obsahuje uzavřený tah, obsahuje také kružnici. Platí toto tvrzení pro uzavřený sled?
9.	Nakreslete orientovaný graf reprezentující následující relaci R na množině { -2, -1, 0, 1 }. Zjistěte, zda je R reflexivní, symetrická a tranzitivní. $i \, R \, j \;\Leftrightarrow_{df}\; \lvert i - j \rvert > 1$
10.	Jak poznáme, zda v nějakém orientovaném grafu existuje jen konečně mnoho různých spojení?
11.	Pro zadaný obyčejný orientovaný graf G platí, že každý uzel je počátečním uzlem aspoň jedné hrany a současně i koncovým uzlem aspoň jedné hrany. • Je možné z toho odvodit, že graf G obsahuje aspoň jeden cyklus? • Je možné z toho odvodit, že každým uzlem grafu G prochází nějaký cyklus?
12.	Určete maximální počet hran, které může obsahovat obyčejný orientovaný graf o n uzlech, který nemá žádný cyklus.

13.	Nechť P1 je spojení z uzlu u do uzlu v a P2 spojení z uzlu v do uzlu u (u≠v) v orientovaném grafu G. Je možné prohlásit, že graf G pak obsahuje cyklus procházející oběma uzly u a v?
14.	Orientovaný graf *G*' vznikl sjednocením nějakého (orientovaného) grafu *G* s opačně orientovaným grafem G^{-}. Bude graf *G*' silně souvislý?
15.	Mějme obyčejný orientovaný graf G s n uzly a n-1 (orientovanými) hranami. • Jaký bude minimální možný počet silných komponent tohoto grafu? • Jaký bude maximální možný počet silných komponent tohoto grafu?
16.	Předpokládejme, že náhodně orientujeme úplný neorientovaný graf K_n . Jaká bude pravděpodobnost, že vzniklý orientovaný graf bude acyklický?
17.	Nalezněte orientovaný graf, který je symetrický a tranzitivní, a přitom není reflexivní. Určete obecnou charakteristiku takových grafů.

CVIČENÍ 3 – možná řešení

1.	Nechť x a y jsou dva různé uzly úplného grafu K_5. Určete počet • různých cest délky 2 mezi uzly x a y: **3 - zbývají 3 možné vnitřní uzly** • různých cest délky 3 mezi uzly x a y: **6 - pro první vnitřní uzel mám 3 možnosti, pro druhý 2 možnosti, tedy 2.3 = 6**
2.	Nechť x a y jsou dva různé uzly úplného grafu Kn (n≥5). Určete počet různých cest délky 4 mezi uzly x a y. **v duchu předchozího příkladu volíme tři vnitřní uzly V(n-2, 3) = (n-2).(n-3).(n-4) způsoby**
3.	Nechť x a y jsou dva sousední uzly úplného bipartitního grafu $K_{3,3}$. Určete počet • různých cest délky 2 mezi uzly x a y: **0 - sousední uzly patří do „protilehlých“ tříd uzlů** • různých cest délky 3 mezi uzly x a y: **4 = 2 . 2** • různých cest délky 4 mezi uzly x a y: **0**
4.	Nechť x a y jsou dva sousední uzly úplného bipartitního grafu $K_{n,n}$ (n≥3). Určete počet • různých cest délky 2 mezi uzly x a y: **0** • různých cest délky 3 mezi uzly x a y: **(n-1).(n-1)** • různých cest délky 4 mezi uzly x a y: **0**
5.	Nechť x a y jsou dva nesousední uzly úplného bipartitního grafu $K_{n,n}$ (n≥3). Určete počet • různých cest délky 2 mezi uzly x a y: **n** • různých cest délky 3 mezi uzly x a y: **0** různých cest délky 4 mezi uzly x a y: **n.(n-2).(n-1) jak jsou postupně počty možností volby vnitřních uzlů**
6.	Silniční síť zahrnuje *2n* měst a z každého měst vede *n* silnic do *n* různých měst. Existuje silniční spojení mezi libovolnými dvěma městy? (Návod: Zkuste použít větu 2.15) **Jedná se o situaci popsatelnou neorientovaným grafem s 2n uzly, jehož každý uzel má stupeň n, tedy součet stupňů dvou libovolných (tedy i nesousedních) uzlů je roven 2n. Podle Věty 2.15 je takový graf nutně souvislý.**
7.	Určete minimální délku kružnice v obecném grafu (se smyčkami), v multigrafu bez smyček a v obyčejném grafu. Čím je omezena maximální délka kružnice v těchto grafech? **Už bylo asi minule: 1, resp. 2, resp. 3, max. délka kružnice bude min(|H|, |U|)**
8.	Dokažte, že graf, který obsahuje uzavřený tah, obsahuje také kružnici. Platí toto tvrzení pro uzavřený sled? **Eliminací kružnic zjištěných při opakovaném průchodu uzlem. Pro sledy neplatí – tam a zpět po hraně – bylo na přednášce.**
9.	Nakreslete orientovaný graf reprezentující následující relaci R na množině { -2, -1, 0, 1 }. Zjistěte, zda je R reflexivní, symetrická a tranzitivní. $i \, R \, j \;\Leftrightarrow_{df}\; \lvert i - j \rvert > 1$
10	Jak poznáme, zda v nějakém orientovaném grafu existuje jen konečně mnoho

.	různých spojení? **Nesmí tam být žádný cyklus.**
11.	Pro zadaný obyčejný orientovaný graf G platí, že každý uzel je počátečním uzlem aspoň jedné hrany a současně i koncovým uzlem aspoň jedné hrany. • Je možné z toho odvodit, že graf G obsahuje aspoň jeden cyklus? **Ano – z lib. Uzlu postupuju po hranách a někdy se dostanu do uzlu, ve kterém už jsem byl (nemusí to být ten výchozí)** • Je možné z toho odvodit, že každým uzlem grafu G prochází nějaký cyklus? **Není - příklad cyklus → uzel → cyklus**
12.	Určete maximální počet hran, které může obsahovat obyčejný orientovaný graf o n uzlech, který nemá žádný cyklus. **Bude to acyklicky orientovaný Kn, ten má n.(n-1)/2 hran.**
13.	Nechť P1 je spojení z uzlu u do uzlu v a P2 spojení z uzlu v do uzlu u (u≠v) v orientovaném grafu G. Je možné prohlásit, že graf G pak obsahuje cyklus procházející oběma uzly u a v? **není to možné – u a v mohou ležet na různých cyklech**
14.	Orientovaný graf *G*' vznikl sjednocením nějakého (orientovaného) grafu *G* s opačně orientovaným grafem G^{-}. Bude graf *G*' silně souvislý? **Nebude, pokud výchozí graf nebude (slabě) souvislý.**
15.	Mějme obyčejný orientovaný graf G s n uzly a n-1 (orientovanými) hranami. • Jaký bude minimální možný počet silných komponent tohoto grafu? **2 – cyklus a izol. uzel** • Jaký bude maximální možný počet silných komponent tohoto grafu? **n – např. strom**
16.	Předpokládejme, že náhodně orientujeme úplný neorientovaný graf K_n . Jaká bude pravděpodobnost, že vzniklý orientovaný graf bude acyklický? **n! / 2^m, m = n.(n-1)/2**
17.	Nalezněte orientovaný graf, který je symetrický a tranzitivní, a přitom není reflexivní. Určete obecnou charakteristiku takových grafů. **Každá komponenta takového grafu bude tvořena úplným orientovaným grafem, pokud obsahuje více než jeden uzel, pak všechny její uzly mají smyčky, izolované uzly/komponenty mohou (ale nemusí) mít smyčky.**