Paralelní řadící sítě, 0-1 lemma, mřížkové a hyperkubické paralelní algoritmy pro řazení

0-1 lemma: Jestli-že dokáži datově necitlivý algoritmus seřadit binární posloupnost, tak dokáže seřadit jakoukoliv

- Používá se monotónní rostoucí funkce → tak je výsledek stejný

Důkaz: Vytvořím mon. fce a seřadím špatně binár. pol., to vede na špatné seřazení vytvořené binární posloupnosti. Fce musí být binární.

SPOREM: Pokud algor. neseřadí jednu nebinární, ale binární seřadí, tak existují dvě čísla x_i, x_j taková, že x_j je na výstupu před x_i

Definujeme fci $f(z)$ a hranici z

f: 0 $z \leq x_i$ ⇒ jsme pod / nad hranicí?

1 $z > x_i$

Funkce f je monotónní a navíc binární. $f(x_i) = 0$ $f(x_j) = 1$. Na výstupu je však 1 před 0 ⇒ Spor s předpokladem, že seřadí ∀ binární posloupnost.

Nepřímé sítě: Složená z komparátorů, dva vstupy (min, max).

HW implementace CE principu

CE elementů je stejně jako dat a jsou ve sloupcích

Počet kroků = hloubka sítě = nejdelší cesta

Pokud je na vstupu více čísel, tak se rozdělí a zase tak sloučí

Datově necitlivé, spodní mez roven hloubce

Přímé sítě: Složená z p procesorů, které mají lineární indexování

V ∀ kroku se provede výměna párování a ∀ dvojice udělá CE operaci

REALIZACE: FullDuplex: P_i a P_j si vymění podposl., ∀ provede Merge-Split a nechá si svou půlku

HalfDuplex: P_i pošle P_j svou podposl, ten provede Merge-Split a vrátí první půlku výsledku

Spodní mez: Průměr sítě

Statická, Datově necitlivá

Naivní PRAM algoritmus: P_1 rozdělí data všem ostatním ⇒ ∀ má svůj kus ($O(\log(p))$)

Všechny CPU setřídí svou posloupnost v čase $\frac{N}{p}\log\frac{N}{p}$, $\frac{N}{p}$ je velikost pole dat

Nyní budeme $\log p$ krát slučovat

⇒ Špatně škálovatelný

⇒ Jde o paralelní merge sort

ŘAZENÍ NA MŘÍŽKÁCH:

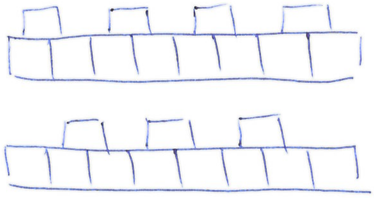
1D - Paralelní Bubble sort

- používá sudo liché transpozice na lineárním poli
- celkem p kroků
  kde tam $p \times \frac{N}{p}$ (Merge - Split)

$T(n,N) = O(\frac{N}{p} \log \frac{N}{p}) + O(n)$

- Špatně škálovatelný – jako naivní APRAM algo

⇒ Porovnává všechny páry paralelně
  ⇒ proto je tu sudá a lichá fáze



SUDÁ

LICHÁ

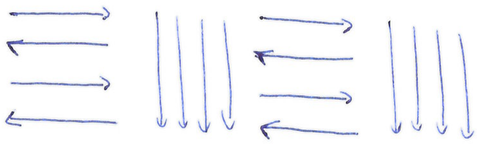
⇒ Paralelní čas pro n procesorů je $O(N)$

⇒ Typicky se iteruje do 2n... kvůli střídání!

2D - ShearSort na $M(n,n)$

⇒ použijeme $N = n \cdot n$ procesorů

- řadíme data hadovitě v řádcích ⇒ STŘÍDAVĚ!



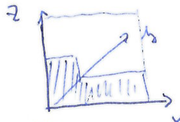
⇒ Bez střídavého řazení řádků to NEFUNGUJE!

Složitost je: $n(2\lceil \log n \rceil + 1)$ ← řádky + sloupce

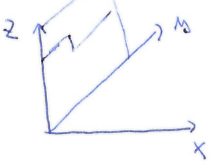
Důkaz: - Pomocí nečistých řádků, kdy se jejich počet půlí ⇒ log

3D - 3D Sort - Lexikografické řazení!

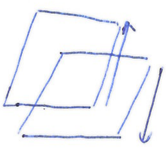
- na každou řadíme po rovinách ⇒ jiným 2D algoritmem



1. setřídíme xz (v pořadí zx)



2. seřadíme yz (v zy pořadí)



3. seřadíme xy (v yx pořadí, střídání podle y)

4. Provedeme jednu licho-sudou a sudo lichou transpozici ve všech sloupcích paralelně

5. Seřadíme xy (v pořadí yx)

na $M(n,n,n)$ setřídí $N=n^3$ čísel v čase $O(3\sqrt[3]{N} \cdot \log(N))$, za předpokladu, že jsme použili ShearSort

ŘAZENÍ NA HYPERKUBICKÝCH SÍTÍCH

- základem je klasický sekvenční Merge Sort

Batcherovy Algoritmy – Sudo-lichý merge sort EOMS
– Sudo-sudý -||- EEMS
– Bitonický -||- BMS

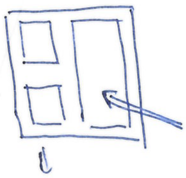
Realizace: řadící nepřímá síť
motýlek
hyperkostka
simulace na mřížce

SUDO LICHÝ MS

⇒ pro $N = 2^k$ čísel $O(\log^2 N)$ kroků a $O(N \log^2 N)$ komparátorů

$EOMS(a_0 \dots a_{2N-1}) = EOMerge(EOMS(a_0 \dots a_{N-1}); EOMS(a_N \dots a_{2N-1}))$

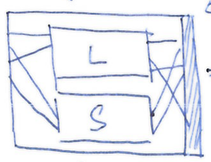
EOMS(2N) ⇒



EOMerge

2×EOMS(N)

EOMerge(2N, 2N) ⇐ vrstva CE



⇒ Data na střídačku
L do vrchního
S do spodního

2×EOMerge(N, N)

⇒ v první části OEMerge je prokládání a kroky pro CE po dvojicích

⇒ Potřebujeme $N(\log N + 1)$ komparátorů a $\log N + 1$ kroků

⇒ odvozeno pomocí rekurze ⇒ Binární půlení a ∀ vrstva přidá jednu linii komparátorů

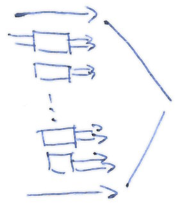
SUDO SUDÝ MS

⇒ Stejný princip

⇒ Sudé vstupy do prvního EEMerge a liché do druhého

⇒ Opět následuje SL prokládání a CE VRSTVA

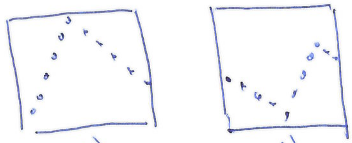
Rozdíl je v tom, že odpadá jeden komparátor CE v poslední vrstvě



není vnitřní CE

BITONICKÝ MERGESORT BMS

- Posloupnost je Bitonická právě když má jedno údolí a jeden vrchol (nezávisle na posunutí)



a) b)

Je-li posl. A bitonická $(a_0 \dots a_{2N-1})$, její bitonické rozdělení je $A' = A_L A_H$

$$A_L = \min(a_0, a_N), \min(a_1, a_{N+1}) \dots \min(a_{N-1}, a_{2N-1})$$

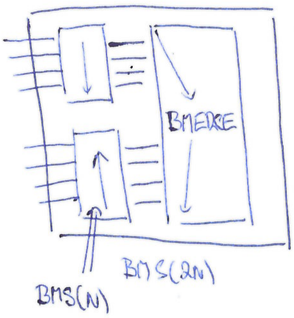
$$A_H = \max(a_0, a_N), \max(a_1, a_{N+1}) \dots \max(a_{N-1}, a_{2N-1})$$

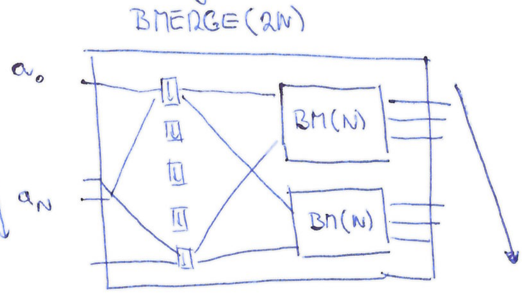
=> A_L i A_H jsou bitonické

=> $\forall$ číslo v A_L je menší než lib. v A_H

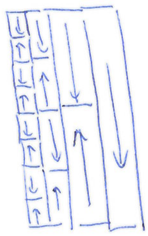
=> Rekurzivní aplikací bitonického rozdělení na bitonickou A ji změníme na monotónní.

=> Vytvoříme síť!





ROZVINUTÍ:



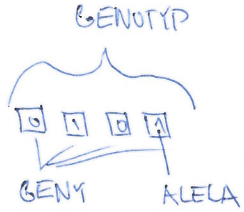
=> hloubka ~~[illegible]~~ $\log^2 N$

=> lze implementovat pomocí CE komparátorů

-> Je BMS na sdíl. paměti optimální?

Není <=> má složitost $O(\log^2 N)$ vs optimální $O(\log N)$!

Princip genetických algoritmů, význam selekčního tlaku



JEDINEC – fenotyp

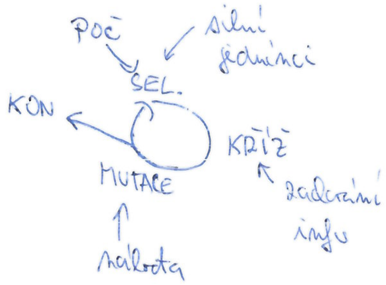
KONFIGURACE – genotyp –

GENOTYP je z GENŮ

GEN je proměnná jejíž hodnotou je ALELA

POPULACE je z jedinců

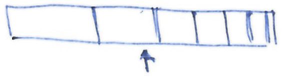
DEGENERACE – lokální minimum



1. INICIALIZACE
   a) – pomocí předepsaných pravidel
   b) náhodná
   c) generace zadaná někým (zadáním)
2. SELEKCE
   - přežijí zdatnější jedinci
   - ovlivněna selekčním tlakem → KONVERGENCE / UVÍZNUTÍ
   - výpočet musí být rychlý, snadný

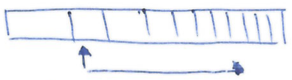
3. VÝBĚROVÝ MECHANISMUS

a) Ruletový výběr



- nese s sebou ale problémy
  - škálování, velká populace
- různé způsoby přepočtu zdatnosti na pravděpodobnost

b) Univerzální stochastické vzorkování



- vybereme bod
- od něj odměříme $m-1 \times \frac{2\pi}{m}$ ⇒ m prvků celkem

c) Turnajový výběr
- k jedinců náhodně
- z nich nejlepšího

4. KŘÍŽENÍ
- výměna informace mezi jedinci
- vývoj lepšího chromozomu

a) dvoubodové TÁTA | MÁMA | TÁTA

b) uniformní M | T | M | M | T – podle vektoru

c) jednobodové MÁMA | TÁTA

5. MUTACE
- zdroj náhody
- zdroj ztracené informace
- zabraňuje předčasné konvergenci
- náhodná změna jednoho bitu s pravd. P

6. REPRODUKCE
- kódování: bin. vektor, permutace abecedy
- ŘÍZENÍ POPULACE
  - náhrada kus za kus – celá populace
  - část za část
  - ustálená pop – jedinec nahradí nejslabšího
  - elitismus – zachování BEST jedince

- velikost POP – roste exponenciálně s velikostí problému

UKONČENÍ: konvergence
počet generací

UVÁZNUTÍ V LOK. MINIMU

- vývoj by neměl být moc rychlý – uváznutí v min.
- ADAPTIVNÍ MUTACE – v závislosti na stavu populace
- DISASTERS – nahrazení jedinců za náhodné
- GENEROVÁNÍ NÁH. POTOMKŮ – když je populace moc stejná

Odhady parametrů statistických rozdělení a modelů, odhady hustoty a distr. funkce

ZÁKL. POPULACE: zkoumaná množina, má své vlastnosti

VÝBĚROVÝ SOUBOR: vzorek ze základní populace

BODOVÝ ODHAD: odhad konkrétní hodnoty - zatížen chybou

INTERVALOVÝ ODHAD: odhadujeme hranice intervalu, do kterého hodnota spadá - chyba α

CENTRÁLNÍ LIMITNÍ VĚTA: Taháme náhodné hodnoty s jedním rozdělením $\Rightarrow$ jejich součet se v lim. případě blíží normálnímu rozdělení

KONFID. INTERVALY: Určujeme střední hodnotu, či rozptyl neznámého rozdělení
Interval ve kterém se daná hodnota nachází - HLADINA VÝZNAMNOSTI α
100% $(1-\alpha)$ je ten interval

BODOVÝ ODHAD a) Střední hodnoty - TJ funkce náhodného výběru

$$\mu \doteq \frac{1}{n}\sum X_i = \bar{X}$$

b) Rozptylu

$$\sigma^2 \doteq \operatorname{var} X = \frac{1}{n-1}\sum (X_i - \bar{X})^2$$

str. h. odhadu

NESTRANNOST: odhad je nestranný pokud $E[T] = \Theta$ ← parametr

KONZISTENCE: $E[T_n] \to \Theta$ $\operatorname{var} T_n \to 0$ ... odhad se s daty zpřesňuje

INTERVALOVÝ ODHAD a) Střední hodnoty

1. známe rozptyl
   $\Rightarrow$ normalizujeme a použijeme normální rozdělení

$$\mu \in \left(\bar{X}_n - q_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{X}_n + q_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \text{oboustranný s přesností } \alpha$$

$\bar{X}_n \Rightarrow$ výběrový průměr

$P(X < \mu < Y) = 1-\alpha$

2. neznáme rozptyl
   $\Rightarrow$ vypočítáme průměr a použijeme studentovo rozdělení
   a také spočítáme rozptyl

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x}_n)^2$$

$$\mu \in \left(\bar{X}_n - t_{\alpha/2; n-1} \frac{s_n}{\sqrt{n}} ; \bar{X}_n + t_{\alpha/2; n-1} \cdot \frac{s_n}{\sqrt{n}}\right)$$

ODHADY PARAMETRŮ ZNÁMÝCH ROZDĚLENÍ

a) Momentová metoda

- 1. moment je EX
  1. výběrový m. je $\bar{X}$
  2. moment je $\operatorname{var} X = \sigma$

$\Rightarrow \forall$ rozdělení je def. parametry

$\Rightarrow$ my z dat odhadneme (spočítáme) momenty a kotovo

b) Metoda maximální věrohodnosti

– Ke výběru X vypočítáme hustotu pravd. tak $f(X,\theta)$, že chceme maximalizovat pravděpodobnost výskytu

... Pro nezávislé X_i => $f(X,\theta) = \prod f_i(X,\theta)$

$$p(X,\theta) = \prod p_i(X,\theta)$$

... tyto dvě funkce maximalizujeme

=> většinou pomocí derivace, protože to nezmění výsledek!

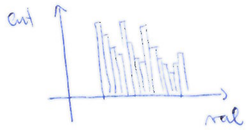
+ zlogaritmování :)

STANDARDIZACE

$$Z = \frac{Y-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

ODHADY ROZDĚLENÍ => HUSTOTY

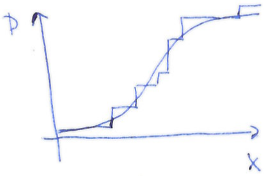
HISTOGRAM => tahám hodnoty a počítám četnost



EMPIRICKÁ DISTRIB. FUNKCE

=> odhad distribuční fce na základě výběru (měření)

=> spočítáme podle naměřeného množství a celk. měření



=> možná lepší než HIST <=> PEVNÉ HRANICE (0,1)

KERNELOVÝ ODHAD HUSTOTY

$X_1 \dots X_n$ – i.i.d. s hustotou f

odhad hustoty $\hat{f}_h(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_h(x-X_i) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K(x-X_i)$

h... vyhlazovací parametr

K... Kernel

h často volíme tak, aby se minimalizovala čtvercová chyba $MISE(h) = E\int_{-\infty}^{\infty} (\hat{f}_h(x) - f(x))^2 \, dx$

~~Pn~~ Statistické testy hypotéz o parametrech modelu, t-testy, testy nezávislosti, testy dobré shody

NÁHODNÁ PROMĚNNÁ: funkce $X: \Omega \to \mathbb{R}$

PRAVĎ PROSTOR Ω

PRAVĎ FUNKCE / FCE HUSTOTY $p_x = P(X = x)$

CDF – DISTR FUNKCE $F_x = P(X \leq x)$

VLASTNOSTI: a) $\lim_{x \to -\infty} F_x = 0$ $\lim_{x \to \infty} F_x = 1$

b) $x < y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$

c) spojitá zprava

STŘ HODNOTA $EX = \sum x p_x$ or $\int x f(x)$

ROZPTYL $var X = \sum (x - EX)^2 p_x$ or $\int (x - EX)^2 f x$

$E(aX + Y) =$ $aEX + EY$

$var(aX + b) = a^2 var X$

NEKORELOVANOST: $E(XY) = EXEY$

nezávislost $P(X \text{ a } Y) = P(x) \cdot P(y)$

HYPOTÉZA: předpoklad o něčem – tvrzení o parametrech, funkci, rozdělení

$\Rightarrow$ nulová hypotéza H_0 – dokazujeme zda platí

$\Rightarrow$ alternativní hypotéza H_A – popírá H_0

ST. TEST: ověření platnosti nulové hypotézy

1. zamítáme $H_0 \to$ platí H_A = chybu si určíme

2. nezamítáme $H_0 \Rightarrow$ chybu neznáme

$H_A \ldots$ tu potvrzujeme

CHYBA 1. DRUHU

– zamítneme přestože platí

$\Rightarrow$ chybu volíme jako α

CHYBA 2. DRUHU

– nezamítneme, přestože neplatí

$\Rightarrow$ POČÍTÁME Z NAMĚŘ. HODNOT

$\Rightarrow$ stačí udělat intervalový odhad s nějakým α

STUDENTOVY T-TESTY:

- založené na střed. rozdělení => přijatelné závěry i pro malý vzorke

a) JEDNOVÝBĚROVÝ

- srovnávání střed. hodnotu s konst $\mu = \mu_0$

b) DVOUVÝBĚROVÝ

- stř. hodnotu jednoho v. srovnává se stř. hodnotou druhého

$\mu_1 - \mu_2 = konst$

- např. => TLAK u kuřáků a nekuřáků

c) PÁROVÝ T-TEST

- počítá střední hodnotu rozdílů jednotlivých párů => stejná velikost výběru

- stř. hodnota tlaku kuřáků před LÉČBOU a po ní

a) JEDNOVÝBĚROVÝ

=> ověřujeme, zda výběr pochází z populace se stř. hodnotou => ta je známá

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_1}{s_X}\sqrt{n}$$ s_X musíme spočítat, $\bar{X}$ také neznáme

$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$

Zamítáme v případě, že $|T| > t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$

=> pokud známe rozptyl, tak můžeme použít σ a norm. rozdělení

b) DVOUVÝB. TEST

=> provedeme dvě měření a předpokládáme, aby obě byla nezávislá a měla stejný rozptyl (konečný). A byla z norm. rozdělení!

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = d$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq d$ $d \dots$ konstanta

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - d}{\sqrt{(n-1)\sigma_X^2 + (m-1)\sigma_Y^2}} \cdot \sqrt{\frac{nm \cdot (n+m-2)}{n+m}}$$

výběrové rozptyly s

Zamítáme pokud $|T| > t_{1-\frac{\alpha}{2}; (n+m-2)}$

=> kvantil t-rozdělení

c) PÁROVÝ T-TEST

=> pokud jsou měření závislá - testy na jednom člověku

=> pouze pro dvojice měření

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = d$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq d$

Funguje jako jednovýběrový test: $T = \left|\frac{\bar{Z} - d}{s_Z}\sqrt{n}\right|$ $\bar{Z} = \bar{X} - \bar{Y}$

TEST DOBRÉ SHODY – PEARS. CHÍ-KVADRÁT

- neparametrický – nemusíme znát rozdělení
- testujeme, zda od dýlka odkadu je náhodná, nebo je měření zlé
- test má k výsledků a tyj mají jedn. pravděpodobnosti $p_1 \dots p_k$

H_0: $p_1 = p_1^0$; $p_2 = p_2^0$ ---- $p_k = p_k^0$

H_1: rozdíl alespoň v jednom známání

$p_1^0 \dots p_k^0$ jsou konstanty $\sum p_i^0 = 1$

$$X^2 = \sum \frac{(n_j - o_j)^2}{o_j} \qquad o_j = n p_j^0$$

$n_j \dots$ četnosti výsledků
$n \dots$ naměřená skutečnost – počet pokusů
$o \dots$ odkad v teorii

ZAMÍTÁME POKUD $X^2 > X^2_{1-\alpha, k-1}$

TEST NEZÁVISLOSTI: RUNS ABOVE/BELOW THE MEAN

Máme náh. proměnné $X_1 \dots X_n$

Předpoklad je, že půlka z nich je $> \mu$ a půlka je $<$

$\Leftrightarrow P(X_i = \mu) = 0 \qquad P(X_i > \mu) = P(X_i < \mu) = 1/2$

$R_i = 1$ pokud hodnota „skočí" z více na méně, či obráceně
$= 0$ pokud zůstala pod, či nad

$N_n \dots$ počet míst se změnou $= \sum R_i$

Pokud jsou $X_1 \dots X_n$ nezávislé $\Rightarrow$ počet běhů nad / pod je $\sim$ NORM

$$N_n = N\left(\mu = \frac{n+1}{2}, \sigma^2 = \frac{n-1}{4}\right)$$

1. Vypočteme N_n
2. $Z_n = \dfrac{N_n - E(N_n)}{\sqrt{\operatorname{var} N_n}}$
3. H_0: Z_n je $\sim$ NORM – udeláme si interval
   H_A: Z_n není normální

Markovské řetězce s diskrétním a spojitým časem. Limitní vlastnosti.

NÁH PROCES: Soustava náh veličin často indexovaná časem

POISS. PROCES: Náh proces, kt je čítací, homogenní a bez paměti - exponenciální časy příchodů.

MARKOV. ŘET: Náh. proces, kt. splňuje Markovovu podmínku

$\Rightarrow$ MARK. ŘET. se spojitým časem je časován Poissonovým procesem

Pravd prostor $\mathcal{E} = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Náhodný proces je $\{X_t, t \in T\}$ X_t jsou náh veličiny $\in (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a $\mathbb{T}$ je čas

$\Rightarrow$ indexovaná posl. náh. veličin

$\Rightarrow$ obecně jsou $X(t_1)$ a $X(t_2)$ nezávislé pro $t_1 \neq t_2$

$\Rightarrow$ realizací je řada, či funkce

$\Rightarrow$ zobrazení, které $P: T \to S$ přiřadí k času nějaký jev, často náh. veličinu

Homogenní n. proces - jeho charakteristika zůstává v čase stejná

čítací proces - trvání událostmi stejného typu - zajímá nás pouze jejich časové rozložení na ose $\mathbb{T}$

- platí: $t \geq 0$

$\Rightarrow N(t) \geq 0$

$\Rightarrow N(t)$ jsou celá čísla

$\Rightarrow N(s) \leq N(t)$ $s < t$ ... neklesající

$s < t \Rightarrow N(t) - N(s)$ je počet událostí za čas $t - s$

Poissonův proces: počet měřených událostí závisí na úseku, ne na pozici v čase

$\searrow$ ke délce úseku!

$\Rightarrow$ ROZPAD ČÁSTIC

$\Rightarrow$ BUSOVÉ LINKY

$\Rightarrow$ OBSLUHA SÍTĚ

$\to$ spojitý čas a diskrétní celá čísla

Vlastnosti:

$N = \{N(t), t \geq 0\}$ s intenzitou $\lambda > 0$, nabývá hodnoty z $S = \{0, 1, 2, \dots\}$

1. $N(0) = 0$ $s < t \Rightarrow N(s) \leq N(t)$
2. nezávislé přírůstky
3. počet událostí v čase t (délky intervalu) $\Leftrightarrow N(s+t) - N(s) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$

$\Rightarrow$ Přijde 2. definice, která říká, že časy příchodů jsou exponenciální.

MARKOVOVŮV ŘETĚZEC S DISK. ČASEM

– posloupnost $X = \{X_0, X_1 \dots\}$ náh. veličin ze spoč. množiny, musí splňovat Markovskou podmínku

→ Množina stavů, Matice přechodů P, vektor poč. rozdělení

= PODMÍNKA: Pravděpodobnosti přechodu do dalšího stavu závisí pouze na současném stavu. Nezáleží na HISTORII!

– ZNÁZORNĚNÍ: DIAGRAM | MATICE

– VLASTNOSTI: HOMOGENNÍ – pravd. se v čase nemění $P(X_{n+1}=j \mid X_n=i) = P(X_1=j \mid X_0=i)$

NEHOMOGENNÍ – pravd. se v čase může vyvíjet

IREDUCIBILNÍ – pokud se z lib. stavu lze dostat do $\forall$ jiného

– JINÝ TVAR MARK. PODMÍNKY – $P(X_n=s_j \mid X_0=s_0, X_1=s_1 \dots X_{n-1}=s_i) = P(X_n=s_j \mid X_{n-1}=s_i) = P_{ij}$

: matice P =

DO

OD

⇒ podmíněné pravd.

⇒ matice lze umocnit na více kroků

· ABSORPČNÍ ŘETĚZCE

⇒ po opuštění stavu je pravd., že se do toho stavu někdy vrátí p

$p < 1$ ... TRANZIENTNÍ

$p = 1$ ... REKURENTNÍ – přes den kdekoliv, večer v posteli

ABSORPČNÍ – stav, který nelze opustit $\Leftrightarrow P_{ii} = 1$

⇒ absorp. řetězec obsahuje alespoň jeden absorp. stav.

$$P = \begin{array}{c|c} Q & R \\ \hline 0 & 1 \end{array}$$

Q – tranzientní stavy

R – absorpční stavy – nelze uniknout

Q^n = pravd., že po n krocích nejsme v absorpčních stavech

$N = (E - Q)^{-1}$ ... fundamentální m. ⇒ kolikrát se v prům. ocitnu v tranz. stavech

$N_{ij} = E$(poč. průchodů j, pokud začínám v i)

$B = N \cdot R$ = pravd., že spadneme do abs. stavu, když začínám v i

⇒ $B_{ij} = P$(pohlcení v j | začátek v i)

– není čtvercová

MARKOVOVY ŘETĚZCE SE SPOJITÝM ČASEM

- časování Poisson. procesem = exponenciální časy

⇒ MATICE PRAVD. PŘECHODŮ P_t ... prvky jsou funkce v čase
... suma v řádku je 1

⇒ MATICE SKOKOVÝCH INTENZIT Q ... prvky jsou intenzity přechodu λ
... součet je 0
... na diagonále jsou záporné λ

⇒ MATICE DISK. PŘECH. PRAVD. v čase t U ⇒ slouží k převodu na diskrétní MAR. ŘETĚZCE

$$U_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_{ij}}{\lambda_{max}} = \dfrac{Q_{ij}}{\lambda_{max}} & i \neq j \\ 1 + \dfrac{\lambda_{ij}}{\lambda_{max}} & i = j \end{cases}$$

Platí, že $Q = P_t'(t=0)$

$P_t' = Q P_t$ ⇒ Kolmogorova zpětná rovnice

$P_t' = P_t \cdot Q$ ⇒ Kolmogorova dopředná rovnice

Y_t ... disk MŘ $\qquad N(t)$ je nezávislý na $Y(t)$

⇒ $X_t = Y_{N(t)}$ ⇒ časujeme skoky Poissonovým rozdělením

MARKOVOVA PODMÍNKA PRO SPOJITÝ ČAS:

⇒ opět nezáleží na HISTORII

$$P(X_{t+s} = j \mid X_s = i, X_{s_n} = i_n \ldots X_{s_0} = i_0) = P(X_{t+s} = j \mid X_s = i) = P(X_t = j \mid X_0 = i)$$

⇒ změna ⇒ nezačínáme v před. stav, ale v 0

⇒ nejdeme do násl. stavu, ale do času t

KOLMOGOROV – CHAPMANOVA ROVNICE

⇒ provést přechod v n krocích ⇔ mocnění P ⇒ zdlouhavé!

⇒ nás zajímají pouze cesty, které vedou k žádanému stavu

DISK: $\underbrace{p_{m+n}(i,j)}_{\text{ze stavu } i \text{ do } j} = \sum_{k} \underbrace{p_m(i,k)\, p_n(k,j)}_{\text{všechny cesty vedou do ŘÍMA}}$

kroky

SPOJ: $p_{s+t}(i,j) = \sum_{k} p_s(i,k)\, p_t(k,j)$

všechny mezi-stavy $\qquad$ v čase s do k $\qquad$ v čase $s+t$ do j

STACIONÁRNÍ ROZDĚLENÍ (DISTRIBUCE)

DISKRÉTNÍ ČAS:

$\sum_i \pi_i p_{ij} = \pi_j$ => MŘ se vlastně ustálí

=> tj maticově $\pi P = \pi$

$\sum_{\forall i} \pi_i = 1$

=> tzn. řešíme soustavu rovnic
+ přičtáme součet na 1

-> APERIOD, IREDUC a MÁ STAC. DIST => $\lim_{n \to \infty} (P^n)_{ij} = \pi_j$

Pokud π splňuje podmínku detailní rovnováhy => tak je stac. distribucí

=> $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji} \quad \forall i, j$

SPOJITÝ ČAS

$\pi = \pi P_t$ pro $\forall t \geq 0$ ... nepraktické počítat

Podmínka det. rovnováhy:

$$\pi_i q_{ij} = \pi_j q_{ji} \quad \forall i, j$$

π je stacionární právě tehdy, když $\pi Q = 0$ a vše součet $= 1$

Systémy hromadné obsluhy, jejich limitní vlastnosti a stabilita. Souvislost s Poisson. procesem a MŘ

TEORIE FRONT: a) Paralelní servery

b) Sériové servery

MARKOVOVIV Ř – POISSONŮV PROCES

A|B|X|Y|Z : A – vstupní tok, EX příchodu

B – střední doba obsluhy

X – # počet serverů

Y – kapacita fronty – ∞

Z – chování – FCFS

M|M|1

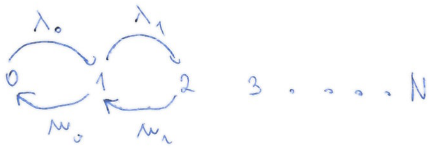
M|M|m

M|G|∞

$\Uparrow$ obecné

BIRTH AND DEATH ŘETĚZCE

– markovy řetězce se spojitým časem



λ_i ... PŘÍCHODY

μ_i ... OBSLUHA

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & \dots \\ \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda & \dots \\ \dots & & \dots \end{pmatrix} \begin{matrix} \Sigma = 0 \\ \Sigma = 0 \\ \Sigma = 0 \end{matrix}$$

=> můžeme spočítat stacionární rozdělení

=> Pro BD MŘ $\pi(n) = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}\pi(n-1)$

Platí také podmínky detailní rovnováhy: $\pi_i \cdot q(i,j) = \pi_j q_{j,i} \quad \forall i,j$

CHARAKTERISTIKY:

=> intenzita / míra vytížení $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ (počty příchodů / rychl. obsluhy) $\rho < 1$, aby to fungovalo

=> stř. doba transakce $T_s = \frac{1}{\mu}$

=> počet zák. v systému $= N = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$

=> stř. počet zákazníků ve frontě $= N_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$

poč. zák. u obsluhy $= N_s = \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \cdot \frac{1}{\mu} = \rho$

$\Downarrow$ T_s

$\lambda \cdot T$

=> stř. doba čekání ve frontě $\frac{\rho}{\mu-\lambda}$

$N_q = N - N_s$

$T = \frac{N}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda}$

LITTLEHO VĚTA: Ve všech systémech s neom. zásobníkem a homog. vstupem platí

$N = \lambda T$

N ... prům. počet zák. v systému

λ ... příchody

T ... prům. doba, kt. zák. stráví v systému

$$P(W \mid W > 0) \sim Exp(\mu - \lambda) \Rightarrow P(W > s) = \frac{\lambda}{\mu} e^{-(\mu-\lambda)s}$$