Lógica y Computabilidad

2do cuatrimestre 2020 - **A DISTANCIA**

Departamento de Computación - FCEyN - UBA

Computabilidad - clase 3

Sumatorias y productorias, cuantificadores acotados, minimización acotada, codificación de pares y secuencias

Sumatorias y productorias (desde 0)

Teorema

Sea $\mathcal{C}$ una clase PRC. Si $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ está en $\mathcal{C}$ entonces también están las funciones

$$g(y, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{t=0}^{y} f(t, x_1, \ldots, x_n)$$

$$h(y, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{t=0}^{y} f(t, x_1, \ldots, x_n)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} g(0, x_1, \ldots, x_n) &= f(0, x_1, \ldots, x_n) \\ g(t+1, x_1, \ldots, x_n) &= g(t, x_1, \ldots, x_n) + f(t+1, x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

Idem para h con $\cdot$ en lugar de $+$. □

Observar que no importa la variable en la que se hace la recursión: podemos definir $g'(x, t)$ como la clase pasada y luego $g(t, x) = g'(u_2^2(t, x), u_1^2(t, x)) = g'(x, t)$.

Sumatorias y productorias (desde 1)

Teorema

Sea $\mathcal{C}$ una clase PRC. Si $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ está en $\mathcal{C}$ entonces también están las funciones

$$g(y, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{t=1}^{y} f(t, x_1, \ldots, x_n)$$

$$h(y, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{t=1}^{y} f(t, x_1, \ldots, x_n)$$

(como siempre, sumatoria vacía = 0, productoria vacía = 1)

Demostración.

$$\begin{aligned} g(0, x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\ g(t+1, x_1, \ldots, x_n) &= g(t, x_1, \ldots, x_n) + f(t+1, x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

Idem para h con $\cdot$ en lugar de $+$ y 1 en lugar de 0 en el caso base. $\square$

Cuantificadores acotados

Sea $p : \mathbb{N}^{n+1} \to \{0,1\}$ un predicado.

$(\forall t)_{\leq y}\ p(t, x_1, \ldots, x_n)$ es verdadero sii

- $p(0, x_1, \ldots, x_n)$ es verdadero y

  $\vdots$

- $p(y, x_1, \ldots, x_n)$ es verdadero

$(\exists t)_{\leq y}\ p(t, x_1, \ldots, x_n)$ es verdadero sii

- $p(0, x_1, \ldots, x_n)$ es verdadero o

  $\vdots$

- $p(y, x_1, \ldots, x_n)$ es verdadero

Lo mismo se puede definir con $< y$ en lugar de $\leq y$.

$$(\exists t)_{<y}\ p(t, x_1, \ldots, x_n) \quad \text{y} \quad (\forall t)_{<y}\ p(t, x_1, \ldots, x_n)$$

Cuantificadores acotados (con $\leq$)

Teorema

Sea $p : \mathbb{N}^{n+1} \to \{0,1\}$ *un predicado perteneciente a una clase PRC* $\mathcal{C}$. *Los siguientes predicados también están en* $\mathcal{C}$:

$$(\forall t)_{\leq y}\ p(t, x_1, \dots, x_n)$$

$$(\exists t)_{\leq y}\ p(t, x_1, \dots, x_n)$$

Demostración.

$(\forall t)_{\leq y}\ p(t, x_1, \dots, x_n)$ sii $\prod_{t=0}^{y}\ p(t, x_1, \dots, x_n) = 1$
$(\exists t)_{\leq y}\ p(t, x_1, \dots, x_n)$ sii $\sum_{t=0}^{y}\ p(t, x_1, \dots, x_n) \neq 0$

- la sumatoria y productoria están en $\mathcal{C}$
- la comparación por $=$ está en $\mathcal{C}$

$\square$

Cuantificadores acotados (con $<$)

Teorema

Sea $p : \mathbb{N}^{n+1} \to \{0,1\}$ *un predicado perteneciente a una clase PRC* $\mathcal{C}$*. Los siguientes predicados también están en* $\mathcal{C}$*:*

$$(\forall t)_{<y}\ p(t, x_1, \ldots, x_n)$$

$$(\exists t)_{<y}\ p(t, x_1, \ldots, x_n)$$

Demostración.

$(\forall t)_{<y}\ p(t, x_1, \ldots, x_n)$ sii $(\forall t)_{\leq y}\ (t = y \vee p(t, x_1, \ldots, x_n))$

$(\exists t)_{<y}\ p(t, x_1, \ldots, x_n)$ sii $(\exists t)_{\leq y}\ (t \neq y \wedge p(t, x_1, \ldots, x_n))$ $\square$

Más ejemplos de funciones primitivas recursivas

- $y|x$ sii y divide a x. Se define como

$$(\exists t)_{\leq x}\ y \cdot t = x$$

  Notar que con esta definición $0|0$.
- $primo(x)$ sii x es primo.

Minimización acotada

Sea $p : \mathbb{N}^{n+1} \to \{0, 1\}$ un predicado de una clase PRC $\mathcal{C}$.

$$g(y, x_1, \dots, x_n) = \sum_{u=0}^{y} \prod_{t=0}^{u} \alpha(p(t, x_1, \dots, x_n))$$

¿Qué hace g?

- supongamos que existe un $t \leq y$ tal que $p(t, x_1, \dots, x_n)$ es verdadero
  - sea t_0 el mínimo tal t
  - $p(t, x_1, \dots, x_n) = 0$ para todo $t < t_0$
  - $p(t_0, x_1, \dots, x_n) = 1$
  - $\prod_{t=0}^{u} \alpha(p(t, x_1, \dots, x_n)) = \begin{cases} 1 & \text{si } u < t_0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$
  - $g(y, x_1, \dots, x_n) = \overbrace{\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{t_0 \text{ veces}} + 0 + 0 + \cdots + 0}^{y+1 \text{ veces}} = t_0$
  - entonces $g(y, x_1, \dots, x_n)$ es el mínimo $t \leq y$ tal que $p(t, x_1, \dots, x_n)$ es verdadero
- si no existe tal t, $g(y, x_1, \dots, x_n) = y + 1$

Minimización acotada

Notamos

$$\min_{t \leq y} p(t, x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \begin{array}{l} \text{mínimo } t \leq y \text{ tal que} \\ p(t, x_1, \ldots, x_n) \text{ es verdadero} \end{array} & \text{si existe tal } t \\ \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Teorema

Sea $p : \mathbb{N}^{n+1} \to \{0, 1\}$ *un predicado de una clase PRC* $\mathcal{C}$*. La función*

$$\min_{t \leq y} p(t, x_1, \ldots, x_n)$$

también está en $\mathcal{C}$*.*

Más ejemplos de funciones primitivas recursivas

- x div y es la división entera de x por y

$$\min_{t \leq x}((t+1) \cdot y > x)$$

  Notar que con esta definición 0 div 0 es 0.

- $x \mod y$ es el resto de dividir a x por y
- p_n es el n-ésimo primo ($n > 0$). Se define $p_0 = 0, p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \ldots$

$$\begin{aligned} p_0 &= 0 \\ p_{n+1} &= \min_{t \leq K(n)} (primo(t) \wedge t > p_n) \end{aligned}$$

  Necesitamos una cota $K(n)$ que sea buena, i.e.
  - suficientemente grande y
  - primitiva recursiva

  $K(n) = p_n! + 1$ funciona (ver que $p_{n+1} \leq p_n! + 1$).

Codificación de pares

Definimos la función primitiva recursiva

$$\langle x, y \rangle = 2^x(2 \cdot y + 1) \dot{-} 1$$

Notar que $2^x(2 \cdot y + 1) \neq 0$.

Proposición

Hay una única solución (x, y) a la ecuación $\langle x, y \rangle = z$.

Demostración.

- x es el máximo número tal que $2^x | (z + 1)$
- $y = ((z + 1)/2^x - 1)/2$

$\square$

Observadores de pares

Los observadores del par $z = \langle x, y \rangle$ son

- $l(z) = x$
- $r(z) = y$

Proposición

Los observadores de pares son primitivas recursivas.

Demostración.

Como $x, y < z + 1$ tenemos que

- $l(z) = \min_{x \leq z} ((\exists y)_{\leq z}\ z = \langle x, y \rangle)$
- $r(z) = \min_{y \leq z} ((\exists x)_{\leq z}\ z = \langle x, y \rangle)$

$\square$

Por ejemplo,

- $\langle 2, 5 \rangle = 2^2(2 \cdot 5 + 1) \dot{-} 1 = 43$
- $l(43) = 2$
- $r(43) = 5$

Codificación de secuencias

El número de Gödel de la secuencia

$$a_1, \ldots, a_n$$

es el número

$$[a_1, \ldots, a_n] = \prod_{i=1}^{n} p_i^{a_i},$$

donde p_i es el i-ésimo primo $(i \geq 1)$.

Por ejemplo el número de Gödel de la secuencia

$$1, 3, 3, 2, 2$$

es

$$[1, 3, 3, 2, 2] = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11^2 = 40020750.$$

Propiedades de la codificación de secuencias

Teorema

Si $[a_1, \ldots, a_n] = [b_1, \ldots, b_n]$ *entonces* $a_i = b_i$ *para todo* $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Demostración.

Por la factorización única en primos. $\square$

Observar que

$$[a_1, \ldots, a_n] = [a_1, \ldots, a_n, 0] = [a_1, \ldots, a_n, 0, 0] = \ldots$$

pero

$$[a_1, \ldots, a_n] \neq [0, a_1, \ldots, a_n]$$

Observadores de secuencias

Los observadores de la secuencia $x = [a_1, \ldots, a_n]$ son

- $x[i] = a_i$
- $|x| = $ longitud de x

Proposición

Los observadores de secuencias son primitivas recursivas.

Demostración.

- $x[i] = \text{mín}_{t \leq x}(\neg p_i^{t+1} | x)$
- $|x| = \text{mín}_{i \leq x}\,(x[i] \neq 0 \land (\forall j)_{\leq x}(j \leq i \lor x[j] = 0))$

$\square$

Por ejemplo,

- $[1, 3, 3, 2, 2][2] = 3 = 40020750[2]$
- $[1, 3, 3, 2, 2][6] = 0 = 40020750[6]$
- $|[1, 3, 3, 2, 2]| = 5 = |40020750|$
- $|[1, 3, 3, 2, 2, 0]| = |[1, 3, 3, 2, 2, 0, 0]| = 5 = |40020750|$
- $x[0] = 0$ para todo x
- $0[i] = 0$ para todo i

En resumen: codificación y decodificación de pares y secuencias

Teorema (Codificación de pares)

- $l(\langle x, y \rangle) = x, r(\langle x, y \rangle) = y$
- $z = \langle l(z), r(z) \rangle$
- $l(z), r(z) \leq z$
- *la codificación y observadores de pares son p.r.*

Teorema (Codificación de secuencias)

- $[a_1, \ldots, a_n][i] = \begin{cases} a_i & si\ 1 \leq i \leq n \\ 0 & si\ no \end{cases}$
- *si* $n \geq |x|$ *entonces* $[x[1], \ldots, x[n]] = x$
- *la codificación y observadores de secuencias son p.r.*