

## Halting Problem

Sea  $\text{Halt}: \mathbb{N}^2 \rightarrow \{0,1\}$ .  $\text{Halt}(x,y)$  retorna 1 si para la entrada  $x$ , el (único) programa con número  $y$  termina.

$$\text{Halt}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Psi_p^{(1)}(x) \downarrow \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \quad \text{donde } \#(P) = y$$

Teorema: Halt no es computable.

Demo:

Supongamos que Halt es computable.

Sea  $Q$  el siguiente programa tal que  $\#(Q) = e$ :

[A] IF  $\text{Halt}(x,x) = 1$  GOTO A

Entonces:

$$\Psi_Q^{(1)}(x) = \begin{cases} \uparrow & \text{si } \text{Halt}(x,x) = 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Entonces:

$$\text{Halt}(x, e) = 1 \quad \text{sii} \quad \Psi_Q^{(1)}(x) \downarrow \quad \text{sii} \quad \text{Halt}(x, x) \neq 1$$
$$\#(Q) = e$$

$e$  está fijo pero  $x$  es una variable. En particular tomamos  $x = e$ .

$$\text{Halt}(e, e) = 1 \quad \text{sii} \quad \Psi_Q^{(1)}(e) \downarrow \quad \text{sii} \quad \text{Halt}(e, e) \neq 1$$

Absurdo. Entonces Halt no es computable.  $\square$