Teorema: Si $A \neq \emptyset$ es ce entonces A es el rango de una función p.r. Es decir, existe una función $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ p.r. tal que:

$$A = \{f(0), f(1), f(2), \cdots\}$$

Demo:

Por el Teo de la enumeración, como A es ce entonces existe un e tal que $A = W_e = \{x : \Phi_e(x)\downarrow\}$.

Sea $P: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ el predicado: $P(x,t) = STP^{(1)}(x,e,t)$.
P es p.r. pues STP es p.r.

Entonces, podemos definir a A en función de P.

$$A = \{x : (\exists t)\, P(x,t)\}$$

Como $A \neq 0$, existe $a \in A$. Luego definimos $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ p.r.

$$f(u) = \begin{cases} l(u) & \text{si } P(l(u), r(u)) \\ a & \text{si no} \end{cases}$$

Equivalentemente:

$$f(\langle x,t\rangle) = \begin{cases} x & \text{si } P(x,t) \\ a & \text{si no} \end{cases}$$

Veamos que $A = \{F(0), F(1), F(2), \dots\}$.

- Si $x \in A$ entonces $(\exists t)\, P(x,t)$ por ser A ce.
  Tomamos $u = \langle x, t \rangle$ luego $F(u) = x$.

- Si $x = F(u)$ para algún $u = \langle x', t \rangle$ pueden pasar 2 cosas:
  - o bien vale $P(x', t)$ y entonces $x = x'$ y $x \in A$.
  - o bien no vale $P(x', t)$ y entonces $x = a \in A$.

$\square$