Correctitud SP

Si $\Gamma \vdash \varphi$ entonces $\Gamma \models \varphi$. Es decir, si φ es teorema de la teoría Γ entonces φ es válido en toda interpretación de Γ.

Demo

Supongamos $\Gamma \vdash \varphi$. Entonces existe una derivación $\varphi_1, \dots, \varphi_n = \varphi$ a partir de Γ. QVQ: $\Gamma \models \varphi$.

Inducción en el largo de la derivación.

Caso base $n=1$

Es la derivación trivial de 1 paso: $\varphi_1 = \varphi$.

Sea v una valuación cualquiera tal que $v \models \Gamma$. QVQ: $v \models \varphi$.

Hay 2 posibilidades:

1. φ es un axioma de SP. Como los axiomas de SP son tautologías, son válidos en toda interpretación. En particular vale $v \models \varphi$.

2. $\varphi \in \Gamma$. Si φ es un axioma propio de Γ y $v \models \Gamma$, entonces en particular $v \models \varphi$.

Caso inductivo

$\Gamma \vdash \varphi$ con una derivación de n pasos: $\varphi_1, \cdots, \varphi_n = \varphi$.

HI: $\Gamma \vdash \varphi_i$ entonces $\Gamma \models \varphi_i$ para todo $i < n$.

Sea v una valuación cualquiera tal que $v \models \Gamma$. QVQ: $v \models \varphi$.

Hay 3 posibilidades:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \varphi \text{ es un axioma de SP} \\ 2.\ \varphi \in \Gamma \end{array}\right\} \text{igual que el caso base}$$

3. φ se obtiene como consecuencia inmediata de φ_i y φ_j tal que $i, j < n$. Sin pérdida de generalidad supongamos $i < j$ y que $\varphi_j = \varphi_i \rightarrow \varphi$.

$$\text{HI: } v \models \Gamma \Rightarrow v \models \varphi_i$$

$$\uparrow$$

$$\varphi_1, \cdots, \varphi_i, \cdots, \varphi_j, \cdots, \varphi_n = \varphi$$

$$\downarrow$$

$$\text{HI: } v \models \Gamma \Rightarrow v \models \varphi_i \rightarrow \varphi$$

Si v satisface el antecedente de la implicación φ_i y también satisface a la implicación en sí misma $\varphi_i \rightarrow \varphi$, por definición de la interpretación semántica de la implicación necesariamente v satisface el consecuente.

Entonces $v \models \varphi$.

Luego probamos si $\Gamma \vdash \varphi$ entonces $\Gamma \models \varphi$.

Corolario:

$\Gamma \not\models \varphi$ entonces $\Gamma \nvdash \varphi$