Lógica y Computabilidad

2do cuatrimestre 2020 - **A DISTANCIA**

Departamento de Computación - FCEyN - UBA

Lógica de Primer Orden - clase 5 - Opcional

Teorema de incompletitud de Gödel

Artimética de Peano

Lenguaje $\mathcal{L} = \{0, S, +, \cdot\}$ con igualdad.

- axiomas (para $x, y \in \mathrm{VAR}, \varphi \in \mathrm{FORM}(\mathcal{L})$ con variable libre x)
  - S1. $0 \neq S(x)$
  - S2. $S(x) = S(y) \to x = y$
  - S3. $x + 0 = x$
  - S4. $x + S(y) = S(x + y)$
  - S5. $x \cdot 0 = 0$
  - S6. $x \cdot S(y) = (x \cdot y) + x$
  - S7. $\big(\varphi[x/0] \wedge (\forall x)(\varphi \to \varphi[x/S(x)])\big) \to (\forall x)\varphi$
- definimos la teoría S:

$$S = \Big\{\psi : \psi \text{ es instanciación de alguno de estos 7 esquemas}\Big\}$$

Sea $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}; 0, S, +, \cdot \rangle$ el modelo estándar de los naturales.

- querríamos capturar todas las verdades de $\mathcal{N}$ con los teoremas de S (en el sistema $SQ^=$)
- querríamos $\quad \mathcal{N} \models \varphi \quad$ sii $\quad S \vdash \varphi$
- se puede ver que $\quad \mathcal{N} \models \varphi \quad \Leftarrow \quad S \vdash \varphi$

Notación (solo para esta clase)

- notamos $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ a una fórmula que tiene variables libres $x_1, \ldots, x_n$
- sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ y sean $t_1, \ldots, t_n$ términos

$$\varphi(t_1, \ldots, t_n) \qquad \text{representa} \qquad \varphi[x_1, \ldots, x_n / t_1, \ldots, t_n]$$

- notación para los numerales:

$$\begin{aligned}
\overline{1} &= S(0) \\
\overline{2} &= S(S(0)) \\
&\vdots \\
\overline{n} &= \underbrace{S(\ldots S}_{n \text{ veces}}(0) \ldots)
\end{aligned}$$

Por ejemplo,

- $\varphi(x) = (\exists y) y + \overline{2} = x$
- $\varphi(\overline{3}) = (\exists y) y + \overline{2} = \overline{3}$

Aritmetización de fórmulas

(	)	$\neg$	$\to$	$\forall$	$=$	0	S	$+$	$\cdot$	x_1	x_2	x_3	$\dots$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$\dots$

Por ejemplo,

	(	$\forall$	x_1	)	$\neg$	S	(	x_1	)	$=$	x_1
	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31
	1	5	11	2	3	8	1	11	2	6	11
$\prod$	2^1	3^5	5^{11}	7^2	11^3	13^8	17^1	19^{11}	23^2	29^6	31^{11}

- toda fórmula de $\mathcal{L}$ se representa con un número natural (se llama número de Gödel de la fórmula)
- de la misma manera, toda demostración en S se representa con un número natural (se llama número de Gödel de la demostración)

Resultados previos

Teorema

Los siguientes predicados son primitivos recursivos

- *var*(x)*: x es el número de Gödel de una expresión que consiste de una variable*
- *term*(x)*: x es el número de Gödel de una expresión que consiste de un término*
- *form*(x)*: x es el número de Gödel de una fórmula de* FORM$(\mathcal{L})$
- *axSQ*$_i(x)$*: x es el número de Gödel de una instanciación del i-ésimo axioma de $SQ^=$*
- *axS*$_i(x)$*: x es el número de Gödel de una instanciación del i-ésimo axioma de S*
- *MP*(x, y, z)*: z es el número de Gödel de una expresión que resulta de MP de las expresiones con número de Gödel x e y*
- *dem*$(x) = x$ *es el número de Gödel de una demostración de S*

Funciones expresables en S

Una relación $R \subseteq \mathbb{N}^n$ es expresable en S si existe una fórmula φ con (únicas) variables libres $x_1, \ldots, x_n$ tal que para todo $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$:

- si $R(k_1, \ldots, k_n)$ es verdadero en $\mathcal{N}$ entonces

$$S \vdash \varphi(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n})$$

- si $R(k_1, \ldots, k_n)$ es falso en $\mathcal{N}$ entonces

$$S \vdash \neg\varphi(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n})$$

Teorema

Toda relación computable es expresable en S.

Consistencia y ω-consistencia

Sea $\Gamma \subseteq \text{FORM}(\mathcal{L})$

Γ es consistente si no existe $\varphi \in \text{FORM}(\mathcal{L})$ tal que

$$\Gamma \vdash \varphi \qquad \text{y} \qquad \Gamma \vdash \neg\varphi$$

Γ es ω-consistente cuando

$$\text{si } \Gamma \vdash \varphi(\overline{n}) \text{ para todo } n, \text{ entonces } \Gamma \nvdash (\exists x)\neg\varphi(x)$$

Proposición

Si Γ es ω-consistente entonces Γ es consistente.

Una teoría es Γ completa si para toda sentencia φ, $\Gamma \vdash \varphi$ o $\Gamma \vdash \neg\varphi$

La fórmula de Gödel

$$\begin{array}{lcl} W(e,y) & : & e \text{ es el número de Gödel de una fórmula } \psi \\ & & \text{con una única variable libre } x_1 \text{ y además} \\ & & y \text{ es el número de Gödel de una demostración en } S \text{ de } \psi(\overline{e}) \end{array}$$

El predicado $W : \mathbb{N}^2 \to \{0,1\}$ es primitivo recursivo, luego es expresable en S por una fórmula $\mathcal{W}(x_1, x_2)$. Consideremos

$$\begin{array}{rcl} \varphi(x_1) & = & (\forall x_2)\neg\mathcal{W}(x_1, x_2) \\ & = & \text{“la fórmula con número de Gödel } x_1 \text{ instanciada en } \overline{x_1} \\ & & \text{no es demostrable en } S\text{”} \end{array}$$

Sea m el número de Gödel de $\varphi(x_1)$. Consideremos

$$\begin{array}{rcl} \varphi(\overline{m}) & = & (\forall x_2)\neg\mathcal{W}(\overline{m}, x_2) \\ & = & \text{“la fórmula con número de Gödel } m \text{ instanciada en } \overline{m} \\ & & \text{no es demostrable en } S\text{”} \\ & = & \text{“}\varphi(\overline{m}) \text{ no es demostrable en } S\text{”} \\ & = & \text{“yo no soy demostrable en } S\text{”} \end{array}$$

Teorema de incompletitud de Gödel (1931)

Recordemos que m es el número de Gödel de

$$\varphi(x_1) = (\forall x_2)\neg\mathcal{W}(x_1, x_2)$$

Teorema

$$\left.\begin{array}{l} \text{1. } \textit{si } S \textit{ es consistente, } S \nvdash \varphi(\overline{m}) \\ \text{2. } \textit{si } S \textit{ es } \omega\textit{-consistente, } S \nvdash \neg\varphi(\overline{m}) \end{array}\right\} \textit{si } S \textit{ es } \omega\textit{-consistente, es incompleto}$$

Demostración.

1. Sup. $S \vdash (\forall x_2)\neg\mathcal{W}(\overline{m}, x_2)$
   - sea k el número de Gödel de alguna demostración en S
   - $W(m, k)$ es verdadero
   - $S \vdash \mathcal{W}(\overline{m}, \overline{k})$
   - como $S \vdash (\forall x_2)\neg\mathcal{W}(\overline{m}, x_2)$ por SQ4, $S \vdash \neg\mathcal{W}(\overline{m}, \overline{k})$
   - S es inconsistente

2. Sup. $S \vdash \neg(\forall x_2)\neg\mathcal{W}(\overline{m}, x_2)$
   - como S es consistente, $S \nvdash (\forall x_2)\neg\mathcal{W}(\overline{m}, x_2)$
   - $W(m, k)$ es falso para todo k
   - $S \vdash \neg\mathcal{W}(\overline{m}, \overline{k})$ para todo k
   - como S es ω-consistente, $S \nvdash (\exists x_2)\neg\neg\mathcal{W}(\overline{m}, x_2)$
   - $S \nvdash \neg(\forall x_2)\neg\mathcal{W}(\overline{m}, x_2)$
   - $S \nvdash \neg\varphi(\overline{m})$

$\square$

Decimos que $\varphi(\overline{m})$ es independiente

Fórmulas verdaderas en $\mathcal{N}$ pero no demostrables en S

Recordemos que m es el número de Gödel de

$$\varphi(x_1) = (\forall x_2)\neg\mathcal{W}(x_1, x_2)$$

de modo que

$$\begin{aligned} \varphi(\overline{m}) &= (\forall x_2)\neg\mathcal{W}(\overline{m}, x_2) \\ &= \text{“}\varphi(\overline{m}) \text{ no es demostrable en } S\text{”} \end{aligned}$$

- si $\varphi(\overline{m})$ fuese falsa en $\mathcal{N}$ (i.e. $\mathcal{N} \not\models \varphi(\overline{m})$), $\varphi(\overline{m})$ sería demostrable en S, pero acabamos de ver que esto no es así
- entonces $\varphi(\overline{m})$ es verdadera en $\mathcal{N}$, pero no demostrable en S:

$$\mathcal{N} \models \varphi(\overline{m}) \qquad \text{y} \qquad S \nvdash \varphi(\overline{m})$$

- esto no contradice el teorema de completitud:

$$\underbrace{S \not\models \varphi(\overline{m})}_{\substack{\text{hay un modelo de } S \\ \text{en donde } \varphi(\overline{m}) \text{ es falsa}}} \qquad \text{sii} \qquad S \nvdash \varphi(\overline{m})$$

Teorema de Gödel-Rosser (1936)

Teorema
Si S es consistente, es incompleta.

Una teoría Γ es recursivamente axiomatizable si existe una teoría Γ' tal que "¿$x \in \Gamma'$?" es computable y $\Gamma \vdash \varphi$ sii $\Gamma' \vdash \varphi$

Corolario
Cualquier teoría recursivamente axiomatizable que extiende a S es incompleta.

Teorías completas para $\mathcal{N}$

Sin embargo, es posible dar teorías completas que capturen todas las verdades de $\mathcal{N}$

Para $\mathcal{L} = \{0, S, +, \cdot\}$ con igualdad, existe $\Gamma \subseteq \text{FORM}(\mathcal{L})$ tal que $\Gamma \vdash \varphi$ sii $\mathcal{N} \models \varphi$:

- $\Gamma = \{\psi : \mathcal{N} \models \psi\}$

Γ es completa, pero no es decidible.

Aritmética de Robinson (1950)

Lenguaje $\mathcal{L} = \{0, S, +, \cdot\}$.

- axiomas (para $x, y \in \text{VAR}$)

  R1. $S(x) = S(y) \rightarrow x = y$
  R2. $0 \neq S(x)$
  R3. $x \neq 0 \rightarrow (\exists y) x = S(y)$
  R4. $x + 0 = x$
  R5. $x + S(y) = S(x + y)$
  R6. $x \cdot 0 = 0$
  R7. $x \cdot S(y) = (x \cdot y) + x$

- definimos la teoría R:

$$R = \Big\{\psi : \psi \text{ es instanciación de alguno de estos 7 esquemas}\Big\}$$

- R es una sub-teoría de S
- R no tiene axioma de inducción
- R es incompleta

Aritmética de Presburger (1929)

Lenguaje $\mathcal{L} = \{0, S, +\}$ con igualdad. Sin $\cdot$

- axiomas (como S pero sin S5 ni S6):

  S1. $0 \neq S(x)$
  S2. $S(x) = S(y) \rightarrow x = y$
  S3. $x + 0 = x$
  S4. $x + S(y) = S(x + y)$
  S7. $\big(\varphi[x/0] \wedge (\forall x)(\varphi \rightarrow \varphi[x/S(x)])\big) \rightarrow (\forall x)\varphi$

- definimos la teoría P:

$$P = \big\{\psi : \psi \text{ es instanciación de alguno de estos 5 esquemas}\big\}$$

- P es completa
- P es decidible

Cuerpos real cerrados - el sistema RCF

Lenguaje $\mathcal{L} = \{0, +, -, *\}$ con igualdad

- $(\forall x, y, z)\ (x+y)+z = x+(y+z)$
- $(\forall x)\ x + 0 = x$
- $(\forall x)\ x - x = 0$
- $(\forall x, y)\ x + y = y + x$
- $(\forall x, y, z)\ (xy)z = x(yz)$
- $(\forall x)\ x1 = x$
- $(\forall x)\ 1x = x$
- $(\forall x, y, z)\ x(y+z) = xy + xz$
- $(\forall x, y, z)\ (x+y)z = xz + yz$
- $(\forall x, y)\ xy = yx$
- $0 \neq 1$
- $(\forall x)(x \neq 0 \to (\exists y)\ xy = 1)$
- $(\forall x_1 \ldots x_n)\ x_1^2 + \cdots + x_n^2 \neq -1$ para todo $n > 0$
- $(\forall x)(\exists y)\ (x = y^2 \vee -x = y^2)$
- $(\forall x_1 \ldots x_n)(\exists y)\ y^n + x_1 y^{n-1} + \cdots + x_{n-1} y + x_n = 0$ para todo n impar

- RCF es una teoría completa.
- Si $\mathcal{R}$ son los reales estándar, entonces $\mathcal{R} \models \varphi$ sii RCF $\vdash \varphi$ para toda sentencia φ
- RCF es decidible (decidir si RCF $\vdash \varphi$ o RCF $\not\vdash \varphi$) pero con complejidad muy alta: peor que cualquier torre $2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{n}}}}}$, donde n es la longitud de la formula φ