Lógica y Computabilidad

2do cuatrimestre 2020 - **A DISTANCIA**

Departamento de Computación - FCEyN - UBA

Lógica de Primer Orden - clase 3

Completitud de SQ, compacidad

Consistente $\Rightarrow$ satisfacible

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje fijo. Sea $\Gamma \subseteq \mathrm{FORM}(\mathcal{L})$ consistente. Queremos construir un modelo canónico $\mathcal{B}$ y una valuación v de $\mathcal{B}$ tal que:

$$\mathcal{B} \models \varphi[v] \text{ para toda } \varphi \in \Gamma$$

Demostración en 5 pasos:

- Paso 1. expandir $\mathcal{L}$ a $\mathcal{L}'$ con nuevas constantes. $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \mathcal{C}$. En $\mathcal{C}$ hay una cantidad infinita numerable de nuevas constantes ("nuevas" porque no aparecen en $\mathcal{L}$)
- Paso 2. agregar testigos a Γ. Trabajamos con $\Gamma \cup \Theta$, donde Θ es un conjunto de formulas especiales que usan las constantes nuevas de $\mathcal{L}'$
- Paso 3. aplicar el Lema de Lindenbaum para $\Gamma \cup \Theta$. Obtener $\Delta \supseteq \Gamma \cup \Theta$ maximal consistente
- Paso 4. construir el modelo canónico $\mathcal{A}$ y valuación v (para el lenguaje $\mathcal{L}'$) tal que $\mathcal{A} \models \varphi[v]$ sii $\varphi \in \Delta$
- Paso 5. restringir $\mathcal{A}$ y v al lenguaje original $\mathcal{L}$ y obtener $\mathcal{B}$

Paso 1: expandir de $\mathcal{L}$ a $\mathcal{L}'$ con nuevas constantes

Teorema

Sea $\Gamma \subseteq \text{FORM}(\mathcal{L})$ consistente. Sea $\mathcal{C}$ un conjunto de nuevas constantes que no aparecen en $\mathcal{L}$. Si $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \mathcal{C}$ entonces Γ es consistente en el lenguaje $\mathcal{L}'$.

Demostración.

- supongamos Γ inconsistente en el nuevo lenguaje $\mathcal{L}'$. Entonces existe $\varphi \in \text{FORM}(\mathcal{L}')$ tal que $\quad \Gamma \vdash \varphi \quad$ y $\quad \Gamma \vdash \neg\varphi$
- cada una de estas derivaciones usa fórmulas en $\text{FORM}(\mathcal{L}')$, pero aparecen solo finitas constantes nuevas
- por el TGC, cada constante nueva utilizada (por hipótesis no aparece en Γ) puede reemplazarse por una variable nueva
- obtenemos una derivación de

  $$\Gamma \vdash \varphi[c_1, \ldots, c_n / x_1, \ldots, x_n] \text{ y } \Gamma \vdash \neg\varphi[c_1, \ldots, c_n / x_1, \ldots, x_n]$$

  en el lenguaje original $\mathcal{L}$ (c_i son nuevas constantes; x_i son nuevas variables)
- entonces Γ es inconsistente en el lenguaje $\mathcal{L}$ $\square$

Paso 2: agregar testigos a Γ

Sean Γ y $\mathcal{C}$ como en el paso 1. Sea

$$\langle \varphi_1, x_1 \rangle, \langle \varphi_2, x_2 \rangle, \dots$$

una enumeración de $\text{FORM}(\mathcal{L}') \times \text{VAR}$

Definimos

$$\theta_n = \neg(\forall x_n)\varphi_n \to \neg(\varphi_n[x_n/c_n])$$

donde c_n es la primera constante de $\mathcal{C}$ que

- no aparece en φ_n y
- no aparece en $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$

Definimos

$$\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots\}$$

Teorema

$\Gamma \cup \Theta \subseteq \text{FORM}(\mathcal{L}')$ *es consistente.*

Observar que Θ agrega testigos a Γ. Si ocurre $\neg(\forall x)\varphi$ entonces hay una constante c que atestigua que φ no vale para todo x, i.e. $\neg(\varphi[x/c])$

Demostración del paso 2

Supongamos Γ consistente. Recordemos que $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots\}$

- supongamos $\Gamma \cup \Theta$ inconsistente
- debe existir i tal que $\Gamma \cup \{\theta_1, \dots, \theta_{i+1}\}$ es inconsistente
- sea n el mínimo tal i
- observar que $\Gamma \cup \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ es consistente
- $\Gamma \cup \{\theta_1, \dots, \theta_n\} \vdash \neg \underbrace{\left(\neg(\forall x)\varphi \to \neg(\varphi[x/c])\right)}_{\theta_{n+1}}$

  donde c no aparece en $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ ni en φ
- las siguientes son instancias de esquemas tautológicos:
  - $\neg\theta_{n+1} \to \neg(\forall x)\varphi$
  - $\neg\theta_{n+1} \to (\varphi[x/c])$
- por lo tanto
  - $\vdash \neg\theta_{n+1} \to \neg(\forall x)\varphi \overset{\text{MP}}{\Rightarrow} \Gamma \cup \{\theta_1, \dots, \theta_n\} \vdash \neg(\forall x)\varphi$
  - $\vdash \neg\theta_{n+1} \to (\varphi[x/c]) \overset{\text{MP}}{\Rightarrow} \Gamma \cup \{\theta_1, \dots, \theta_n\} \vdash \varphi[x/c]$
- por el corolario del TGC, $\quad \Gamma \cup \{\theta_1, \dots, \theta_n\} \vdash (\forall x)\varphi$

  (notar que c no aparece en $\Gamma \cup \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ ni en φ)
- entonces $\Gamma \cup \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ es inconsistente

Paso 3: Lema de Lindenbaum para $\Gamma \cup \Theta$

Teorema

Sean Γ y Θ como en los pasos 1 y 2. Existe un conjunto $\Delta \supseteq \Gamma \cup \Theta$ tal que Δ es maximal consistente.

Demostración.

Igual que para el caso proposicional. $\square$

Como en el caso proposicional, para toda $\varphi \in \mathrm{FORM}(\mathcal{L}')$

- $\varphi \in \Delta$ o bien $\neg\varphi \in \Delta$
- $\varphi \in \Delta$ sii $\Delta \vdash \varphi$

Paso 4: construcción del modelo canónico $\mathcal{A}$

Definimos el modelo canónico $\mathcal{A}$:

- $A = \mathrm{TERM}(\mathcal{L}')$
- para cada símbolo de función n-aria $f \in \mathcal{L}'$,

$$f_{\mathcal{A}}(\underbrace{t_1, \ldots, t_n}_{\in A^n}) = f(t_1, \ldots, t_n) \in A$$

- para cada símbolo de constante $c \in \mathcal{L}'$,

$$c_{\mathcal{A}} = c \in A$$

- para cada símbolo de predicado n-ario $P \in \mathcal{L}'$,

$$\underbrace{(t_1, \ldots, t_n)}_{\in A^n} \in P^{\mathcal{A}} \quad \text{sii} \quad P(t_1, \ldots, t_n) \in \Delta$$

Paso 4: definición de la valuación v

Definimos la valuación $v : \mathrm{VAR} \to \underbrace{\mathrm{TERM}(\mathcal{L}')}_{A}$ como

$$v(x) = x$$

Lema

Para todo $t \in \mathrm{TERM}(\mathcal{L}')$, $\tilde{v}(t) = t$.

Demostración.

Por inducción en la complejidad de t (fácil). $\square$

Teorema

Para toda $\varphi \in \mathrm{FORM}(\mathcal{L}')$, $\mathcal{A} \models \varphi[v]$ sii $\varphi \in \Delta$.

Demostración.

Por inducción en la complejidad de φ (detalles a continuación). $\square$

Paso 4: $\mathcal{A} \models \varphi[v]$ sii $\varphi \in \Delta$ (caso base)

Si φ es una fórmula atómica $P(t_1, \dots, t_n)$:

$$\begin{array}{llll} \mathcal{A} \models P(t_1, \dots, t_n)[v] & \text{sii} & \big(\tilde{v}(t_1), \dots, \tilde{v}(t_n)\big) \in P^{\mathcal{A}} & \\ & \text{sii} & \big(t_1, \dots, t_n\big) \in P^{\mathcal{A}} & \text{pues } \tilde{v}(t) = t \\ & \text{sii} & P(t_1, \dots, t_n) \in \Delta & \text{por def. de } \mathcal{A} \end{array}$$

Paso 4: $\mathcal{A} \models \varphi[v]$ sii $\varphi \in \Delta$ (paso inductivo; $\varphi = \neg\psi$)

$$
\begin{array}{llll}
\mathcal{A} \models \varphi[v] & \text{sii} & \mathcal{A} \not\models \psi[v] & \\
& \text{sii} & \psi \notin \Delta & \text{por HI} \\
& \text{sii} & \neg\psi \in \Delta & \text{por propiedad de } \Delta
\end{array}
$$

Paso 4: $\mathcal{A} \models \varphi[v]$ sii $\varphi \in \Delta$ (paso inductivo; $\varphi = \psi \to \rho$)

$$
\begin{array}{llll}
\mathcal{A} \models \varphi[v] & \text{sii} & \mathcal{A} \not\models \psi[v] \text{ o } \mathcal{A} \models \rho[v] & \\
 & \text{sii} & \psi \notin \Delta \text{ o } \rho \in \Delta & \text{por HI} \\
 & \text{sii} & \neg\psi \in \Delta \text{ o } \rho \in \Delta & \text{por propiedad de } \Delta \\
 & \Rightarrow & \Delta \vdash \psi \to \rho & \text{(ejercicio)} \\
 & \Rightarrow & \psi \to \rho \in \Delta & \text{por propiedad de } \Delta
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
\varphi \in \Delta & \Rightarrow & \psi \notin \Delta \text{ o } (\psi \in \Delta \text{ y } \Delta \vdash \rho) & \text{MP en 2do caso} \\
 & \Rightarrow & \psi \notin \Delta \text{ o } (\psi \in \Delta \text{ y } \rho \in \Delta) & \text{por propiedad de } \Delta \\
 & \Rightarrow & \psi \notin \Delta \text{ o } \rho \in \Delta & \\
 & \text{sii} & \mathcal{A} \not\models \psi[v] \text{ o } \mathcal{A} \models \rho[v] & \text{por HI} \\
 & \text{sii} & \mathcal{A} \models \psi \to \rho[v] &
\end{array}
$$

Paso 4: $\mathcal{A} \models \varphi[v]$ sii $\varphi \in \Delta$ (paso inductivo ($\Rightarrow$) ; $\varphi = (\forall x)\psi$)

- supongamos $\mathcal{A} \models (\forall x)\psi[v]$
- para todo $t \in A$, $\mathcal{A} \models \psi[v(x = t)]$
- supongamos $\neg(\forall x)\psi \to \neg(\psi[x/c]) \in \Theta$
- en particular, $\mathcal{A} \models \psi[v(x = c)]$
- por definición de v, $\mathcal{A} \models \psi[v(x = \tilde{v}(c))]$
- por el Lema de Sustitución, $\mathcal{A} \models (\psi[x/c])[v]$
- por HI, $\psi[x/c] \in \Delta$
- por propiedad de Δ, $\neg(\psi[x/c]) \notin \Delta$
- veamos que $\neg(\forall x)\psi \notin \Delta$:
  - supongamos que $\neg(\forall x)\psi \in \Delta$
  - $\Delta \vdash \neg(\forall x)\psi$
  - como $\Delta \supseteq \Theta$, $\neg(\forall x)\psi \to \neg(\psi[x/c]) \in \Delta$
  - $\Delta \vdash \neg(\forall x)\psi \to \neg(\psi[x/c])$
  - por MP tenemos $\Delta \vdash \neg(\psi[x/c])$
  - por propiedad de Δ, $\neg(\psi[x/c]) \in \Delta$
- concluimos $(\forall x)\psi \in \Delta$

Paso 4: $\mathcal{A} \models \varphi[v]$ sii $\varphi \in \Delta$ (paso inductivo ($\Leftarrow$) ; $\varphi = (\forall x)\psi$)

- supongamos $\mathcal{A} \not\models \varphi[v]$
- existe $t \in A$, $\mathcal{A} \not\models \psi[v(x = t)]$
- sea ψ' una variante alfabética de ψ tal que x sea reemplazable por t en ψ')
- $\mathcal{A} \not\models \psi'[v(x = t)]$
- como $\tilde{v}(t) = t$, $\mathcal{A} \not\models \psi'[v(x = \tilde{v}(t))]$
- por el Lema de Sustitución $\mathcal{A} \not\models (\psi'[x/t])[v]$
- por HI, $\psi'[x/t] \notin \Delta$
- veamos que $(\forall x)\psi' \notin \Delta$:
  - supongamos que $(\forall x)\psi' \in \Delta$
  - $\Delta \vdash (\forall x)\psi'$
  - sabemos $\vdash (\forall x)\psi' \rightarrow \psi'[x/t]$ por SQ4
  - por MP concluimos $\Delta \vdash \psi'[x/t]$
  - por propiedad de Δ, $\psi'[x/t] \in \Delta$
- por equivalencia de variantes alfabéticas, $(\forall x)\psi \notin \Delta$

Paso 5: restringir $\mathcal{A}$ y v al lenguaje original $\mathcal{L}$

Volvemos al lenguaje original $\mathcal{L}$.

Definimos $\mathcal{B}$ como la restricción de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{L}$ (i.e. ya no interpreto las nuevas constantes).

Del paso 4 sabemos que para toda $\varphi \in \mathrm{FORM}(\mathcal{L}')$,

$$\mathcal{A} \models \varphi[v] \quad \text{sii} \quad \varphi \in \Delta.$$

Recordar que $\Delta \supseteq \Gamma$. Si $\varphi \in \Gamma \subseteq \mathrm{FORM}(\mathcal{L})$ tenemos

$$\mathcal{A} \models \varphi[v] \quad \text{sii} \quad \mathcal{B} \models \varphi[v]$$

Luego, para Γ consistente, encontramos una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{B}$ tal que

$$\mathcal{B} \models \varphi[v] \text{ para toda } \varphi \in \Gamma$$

Concluimos que Γ es satisfacible.

Teorema de Löwenheim-Skolem

Corolario

Γ es consistente sii Γ es satisfacible

Teorema (sin igualdad)

Sea $\mathcal{L}$ numerable y sin igualdad. Si $\Gamma \subseteq \mathrm{FORM}(\mathcal{L})$ es satisfacible, es satisfacible en un modelo infinito numerable.

Demostración.

Es lo que acabamos de ver. Si $\mathcal{L}$ es numerable, $A = \mathrm{FORM}(\mathcal{L})$ es infinito numerable. $\square$

Teorema (con igualdad)

Sea $\mathcal{L}$ numerable y con igualdad. Si $\Gamma \subseteq \mathrm{FORM}(\mathcal{L})$ es satisfacible, es satisfacible en un modelo finito o infinito numerable.

Se puede probar algo más fuerte

Teorema (ascendente)

Si $\mathcal{L}$ es numerable y $\Gamma \subseteq \mathrm{FORM}(\mathcal{L})$ tiene modelo infinito, tiene modelo de cualquier cardinalidad.

Completitud y Compacidad

Teorema (Completitud fuerte, Gödel)

Si $\Gamma \models \varphi$ entonces $\Gamma \vdash \varphi$.

Demostración.

Igual que para proposicional $\square$

Corolario

$\Gamma \models \varphi$ *sii* $\Gamma \vdash \varphi$.

Teorema (Compacidad)

Sea $\Gamma \subseteq \mathrm{FORM}(\mathcal{L})$. Si todo Δ finito, $\Delta \subseteq \Gamma$ es satisfacible, entonces Γ es satisfacible.

Demostración.

Igual que para proposicional $\square$