Teorema de Compacidad

Sea $\Gamma \subseteq FORM$. Si todo subconjunto finito de Γ es satisfacible entonces Γ es satisfacible.

Demo

Supongamos que todo subconjunto finito de Γ es satisfacible pero Γ resulta insatisfacible.

Por completitud de SP, si Γ es consistente entonces Γ es satisfacible. Por el contrarrecíproco, si Γ es insatisfacible entonces Γ es inconsistente. Luego existe φ tal que:

$$\Gamma \vdash \varphi \quad y \quad \Gamma \vdash \neg\varphi$$

Las demostraciones de φ y $\neg\varphi$ requieren de finitos pasos. Sea $\Delta \subseteq \Gamma$ el subconjunto de Γ lo suficientemente grande tal que contenga todas las hipótesis necesarias tal que:

$$\Delta \vdash \varphi \quad y \quad \Delta \vdash \neg\varphi$$

Entonces Δ es inconsistente. Por correctitud de SP, si Δ es satisfacible entonces Δ es consistente. Por el contrarrecíproco si Δ es inconsistente entonces Δ es insatisfacible.

Absurdo pues todos los subconjuntos finitos de Γ eran satisfacibles. Luego Γ es satisfacible.