Teorema

Sea Γ consistente.

1. $\Gamma \cup \{\neg \varphi\}$ inconsistente sii $\Gamma \vdash \varphi$
2. $\Gamma \cup \{\varphi\}$ inconsistente sii $\Gamma \vdash \neg \varphi$

Demo 1

($\Leftarrow$)

Si $\Gamma \vdash \varphi$ entonces $\Gamma \cup \{\neg \varphi\} \vdash \varphi$, se demuestra con exactamente la misma derivación. Agregar hipótesis a la teoría no invalida demostraciones previas.

Por otro lado $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$ con una derivación trivial de 1 paso, pues $\neg\varphi$ es una hipótesis.

$$\left.\begin{array}{l} \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi \\ \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi \end{array}\right\} \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ es inconsistente.}$$

($\Rightarrow$)

Si $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente entonces existe ψ tal que:

$$\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \psi \quad \text{y} \quad \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\psi$$

Por el teorema de la Deducción:

$$\Gamma \vdash \neg\varphi \to \psi \quad \text{y} \quad \Gamma \vdash \neg\varphi \to \neg\psi$$

A partir de esas demostraciones llegamos a que $\Gamma \vdash \varphi$.

1.	$\neg\varphi \to \psi$	$\Gamma \vdash \neg\varphi \to \psi$
2.	$\neg\varphi \to \neg\psi$	$\Gamma \vdash \neg\varphi \to \neg\psi$
3.	$(\neg\varphi \to \psi) \to (\neg\varphi \to \neg\psi) \to \varphi$	axioma de SP
4.	$(\neg\varphi \to \neg\psi) \to \varphi$	MP 1 y 3
5.	φ	MP 2 y 4

Entonces $\Gamma \vdash \varphi$.

Demo 2

Análoga a demo 1.