Teorema

A es computable sii A es ce y co-ce.

Demo

($\Rightarrow$)

Si A es computable existe un programa P tal que:

$$\Psi_P^{(1)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Construimos el programa Q:

$$\phi_P(x)=1$$
$$\Uparrow$$

$$[A] \quad \text{IF } \phi_P(x) = 0 \text{ GOTO } A \qquad \Psi_Q^{(1)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases}$$

Luego A es ce. Para ver que es co-ce razonamos de forma análoga construyendo un programa que se indefine sii $\phi_P(x)=1$.

($\Leftarrow$)

Si A es ce y co-ce entonces A y $\bar{A}$ son el dominio de alguna Función parcial computable. Sean p y q programas tales que:

$$A = \{x : \Phi_p(x)\downarrow\} \qquad \bar{A} = \{x : \Phi_q(x)\downarrow\}$$

Construimos el programa R que va probando de a pasos con STP si p o q terminan. Sabemos que siempre va a pasar que o termina p o bien termina q pues $x \in A$ o bien $x \in \bar{A}$. Dependiendo de cuál termina retornamos 1 o 0.

```
[A]   IF STP^(1)(X, p, Z) GOTO F
      IF STP^(1)(X, q, Z) GOTO E
      Z ← Z+1
      GOTO A
[F]   Y ← 1
```

Luego $\Psi_R^{(1)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_p(x)\downarrow \text{ sii } x \in A \\ 0 & \text{si } \Phi_q(x)\downarrow \text{ sii } x \in \bar{A} \text{ sii } x \notin A \end{cases}$

Entonces A es computable. $\square$