

$$\text{TOT} = \{x : \phi_x \text{ es total}\}$$

Demo: TOT no es ce

Supongamos que TOT es ce. Entonces existe una función  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  computable que lo enumera:

$$\text{TOT} = \{f(0), f(1), f(2), \dots\}$$

Sea  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tal que  $g(x) = \phi_{f(x)}(x) + 1$ .  $f(x)$  es el número de programa de alguna función total. Luego  $\phi_{f(x)}$  la computa, y al sumar 1 al resultado obtenemos otra función total.

Sea  $e$  tal que  $\phi_e = g$  pues  $g$  es total.

Como  $\phi_e$  es total,  $e \in \text{TOT}$  por definición de TOT. Además, como estamos suponiendo TOT ce, existe un  $u$  tal que  $f(u) = e$ .

$$\text{Entonces: } \phi_e(x) = \phi_{f(u)}(x) = \phi_{f(x)}(x) + 1$$

$u$  está fijo pero  $x$  es variable. Tomando  $x = u$  tenemos:

$$\phi_{f(u)}(u) = \phi_{f(u)}(u) + 1$$

Absurdo. Entonces TOT no es ce.  $\square$

## Demo: TOT no es co-ce

TOT no es co-ce sii  $\overline{\text{TOT}}$  no es ce.

$$\overline{\text{TOT}} = \{x : \phi_x \text{ no es total}\}$$

Supongamos que  $\overline{\text{TOT}}$  es ce. Entonces existe un programa  $d$  tal que  $\overline{\text{TOT}} = \text{dom } \phi_d$ .

Consideremos el programa  $P$ :

```
[A] IF  $\text{STP}^{(1)}(X, d, T)$  GOTO E  
     $T \leftarrow T+1$   
    GOTO A
```

Notemos que  $\Psi_P(x) \uparrow$  sii  $\phi_d(x) \uparrow$   
sii  $x \notin \overline{\text{TOT}}$   
sii  $x \in \text{TOT}$   
sii  $\phi_x$  es total

Tenemos entonces  $g$  parcial computable:

$$\Psi_P^{(2)}(x, y) = g(x, y) = \begin{cases} \uparrow & \text{si } \phi_x \text{ es total} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Por el Teorema de la Recursión existe  $e$  tal que:

$$\phi_e(y) = g(e, y)$$

- $\phi_e$  es total  $\Rightarrow g(e, y) \uparrow$  para todo  $y$   
 $\Rightarrow \phi_e(y) \uparrow$  para todo  $y$   
 $\Rightarrow \phi_e$  no es total
- $\phi_e$  no es total  $\Rightarrow g(e, y) = 0$  para todo  $y$   
 $\Rightarrow \phi_e(y) = 0$  para todo  $y$   
 $\Rightarrow \phi_e$  es total

Entonces  $\phi_e$  es total sii  $\phi_e$  no es total.

Absurdo.  $\overline{\text{TOT}}$  no es ce, entonces TOT no es co-ce.

Si TOT no es computable, ni ce, ni co-ce... ¿Dónde está TOT?

