Lógica y Computabilidad

Práctica 3: Funciones no-computables y conjuntos C.E.

2do cuatrimestre 2022

Ejercicio 1

a)

$f_1(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) \downarrow \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

Suponemos que f_1 es computable, y por lo tanto existe un programa P_1 que la computa.

Definimos $g(x) = f_1(x, x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(x) \downarrow \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

Sea Q un programa que computa g:

$X_2 \leftarrow X_1$ `(macro computable)`
P_1

Como asumimos que f_1 es computable, g también lo es pues f_1 computable $\Rightarrow g$ computable.

Definimos ahora un programa Q' tal que $\Psi_{Q'}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(x) \uparrow \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases}$

Q
`[R] IF` $Y \neq 0$ `GOTO R`

Veamos que $\forall x : \Phi_{\#(Q')}^{(1)}(x) \downarrow \iff \Psi_{Q'}(x) \downarrow \iff \Psi_Q(x) = 0 \iff g(x) = 0 \iff \Phi_x^{(1)}(x) \uparrow$

Sea $e = \#(Q')$ y tomando $x = e$ vemos que: $\Phi_e^{(1)}(e) \downarrow \iff \Phi_e^{(1)}(e) \uparrow$ Absurdo

Llegamos al absurdo por suponer que f_1 era computable. Por lo tanto, f_1 no es computable.

b)

$f_2(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) = 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

Suponemos que f_2 es computable, y por lo tanto existe un programa P_2 que la computa.

Definimos $g(x) = f_2(x, x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(x) = 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

Sea Q un programa que computa g:

$X_2 \leftarrow X_1$ `(macro computable)`
P_2

Como asumimos que f_2 es computable, g también lo es pues f_2 computable $\Rightarrow g$ computable.

Definimos ahora un programa Q' tal que $\Psi_{Q'}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(x) > 0 \vee \Phi_x^{(1)}(x) \uparrow \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases}$

```
    Q
[R] IF Y ≠ 0 GOTO R
```

Veamos que $\forall x : \Phi_{\#(Q')}^{(1)}(x) \downarrow \iff \Psi_{Q'}(x) \downarrow \iff \Psi_Q(x) = 0 \iff g(x) = 0 \iff \Phi_x^{(1)}(x) > 0 \vee \Phi_x^{(1)}(x) \uparrow$

Sea $e = \#(Q')$ y tomando $x = e$ vemos que: $\Phi_e^{(1)}(e) \downarrow \iff \Phi_e^{(1)}(e) > 0 \vee \Phi_e^{(1)}(e) \uparrow$

Analizamos cada caso:

- $\Phi_e^{(1)}(e) \downarrow \iff \Phi_e^{(1)}(e) > 0$ Absurdo pues $\Phi_e^{(1)}(e) \downarrow \iff \Phi_e^{(1)}(e) = 0$ (por definición)
- $\Phi_e^{(1)}(e) \downarrow \iff \Phi_e^{(1)}(e) \uparrow$ Absurdo

Llegamos al absurdo por suponer que f_2 era computable. Por lo tanto, f_2 no es computable.

c)

$$f_3(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) \downarrow \wedge \Phi_x^{(1)}(y) > z \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Suponemos que f_3 es computable, y por lo tanto existe un programa P_3 que la computa.

Definimos $g(x) = f_3(x, x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(x) \downarrow \wedge \Phi_x^{(1)}(x) > 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

Sea Q un programa que computa g:

```
    X2 ← X1 (macro computable)
    X3 ← 0 (macro computable)
    P3
```

Como asumimos que f_3 es computable, g también lo es pues f_3 computable $\Rightarrow g$ computable.

Definimos ahora un programa Q' tal que $\Psi_{Q'}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(x) \uparrow \vee \Phi_x^{(1)}(x) = 0 \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases}$

```
    Q
[R] IF Y ≠ 0 GOTO R
    Y ← 1 (macro computable)
```

Veamos que $\forall x : \Phi_{\#(Q')}^{(1)}(x) \downarrow \iff \Psi_{Q'}(x) \downarrow \iff \Psi_Q(x) = 0 \iff g(x) = 0 \iff \Phi_x^{(1)}(x) \uparrow \vee \Phi_x^{(1)}(x) = 0$

Sea $e = \#(Q')$ y tomando $x = e$ vemos que: $\Phi_e^{(1)}(e) \downarrow \iff \Phi_e^{(1)}(e) \uparrow \vee \Phi_e^{(1)}(e) = 0$

Analizamos cada caso:

- $\Phi_e^{(1)}(e) \downarrow \iff \Phi_e^{(1)}(e) = 0$ Absurdo pues $\Phi_e^{(1)}(e) \downarrow \iff \Phi_e^{(1)}(e) = 1$ (por definición)
- $\Phi_e^{(1)}(e) \downarrow \iff \Phi_e^{(1)}(e) \uparrow$ Absurdo

Llegamos al absurdo por suponer que f_3 era computable. Por lo tanto, f_3 no es computable.

d)

$$f_4(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(x) \downarrow \wedge \Phi_x^{(1)}(x) \neq x \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Suponemos que f_4 es computable, y por lo tanto existe un programa P_4 que la computa.

Definimos ahora un programa Q tal que $\Psi_Q(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(x) \uparrow \vee \Phi_x^{(1)}(x) = x \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases}$

```
     P_4
[R] IF Y ≠ 0 GOTO R
```

Veamos que $\forall x : \Phi_{\#(Q)}^{(1)}(x) \downarrow \iff \Psi_{P_4}(x) = 0 \iff f_4(x) = 0 \iff \Phi_x^{(1)}(x) \uparrow \vee \Phi_x^{(1)}(x) = x$

Sea $e = \#(Q)$ y tomando $x = e$ vemos que: $\Phi_e^{(1)}(e) \downarrow \iff \Phi_e^{(1)}(e) \uparrow \vee \Phi_e^{(1)}(e) = e$

Analizamos cada caso:

- $\Phi_e^{(1)}(e) \downarrow \iff \Phi_e^{(1)}(e) = e$ Absurdo pues $\Phi_e^{(1)}(e) \downarrow \iff \Phi_e^{(1)}(e) = 0 \neq e$ pues Q no es el programa vacío
- $\Phi_e^{(1)}(e) \downarrow \iff \Phi_e^{(1)}(e) \uparrow$ Absurdo

Llegamos al absurdo por suponer que f_4 era computable. Por lo tanto, f_4 no es computable.