

Teorema de Completitud

Si $\Gamma \models \phi$ entonces $\Gamma \vdash \phi$.

Demo

Ya probamos que:

- Γ consistente sii Γ satisfacible
- $\Gamma \cup \{\neg \phi\}$ es inconsistente sii $\Gamma \vdash \phi$

Teorema: Si $\Gamma \models \phi$ entonces $\Gamma \vdash \phi$.

Demo

Supongamos que $\Gamma \models \phi$. Luego, $\Gamma \cup \{\neg \phi\}$ resulta insatisfacible, pues cualquier interpretación que satisface a Γ no puede al mismo tiempo hacer verdadera a ϕ y su negación $\neg \phi$.

Como ya probamos que consistente \Rightarrow satisfacible, vale el contrarrecíproco insatisfacible \Rightarrow inconsistente. Entonces $\Gamma \cup \{\neg \phi\}$ insatisfacible $\Rightarrow \Gamma \cup \{\neg \phi\}$ inconsistente.

Por último, si $\Gamma \cup \{\neg \phi\}$ inconsistente entonces $\Gamma \vdash \phi$.