Teorema: Una función es p.r. sii pertenece a toda clase PRC.

Una clase C de funciones es PRC si:

1) Las funciones iniciales están en C.
2) Si una función f se obtiene a partir de composición o recursión primitiva de otras funciones que están en C, entonces f también está en C.

Por otro lado una función es p.r. si se obtiene a partir de las iniciales con una cantidad finita de composiciones y recursiones primitivas. Es la clase de funciones PRC más chica.

Demo:

($\Leftarrow$) Si una función pertenece a toda clase PRC entonces es p.r.

Como la clase de funciones p.r. es una clase PRC, si una función f pertenece a toda clase PRC, en particular f es p.r.

($\Rightarrow$) Si una función es p.r. entonces pertenece a toda clase PRC.

Sean f una función p.r. y C una clase PRC cualesquiera.
QVQ $f \in C$.

Por definición de p.r. f se puede construir a partir de las iniciales con una cantidad finita de composiciones y recursiones primitivas.

Entonces existe una lista de funciones $f_1, \dots, f_n$ tq:

- f_i o bien es una inicial y por lo tanto está en C, o bien es una aplicación finita de composición y recursión primitiva de las funciones anteriores en la lista: f_j con $j < i$, y por lo tanto también está en C.
- $f_n = f$

Veamos por inducción que todas las $f_i \in C$ para $1 \leqslant i \leqslant n$.

Caso base: $f_1 \in C$

f_1 necesariamente es una función inicial, ya que no existen otras funciones f_j con $j < i$ para hacer composición o recursión primitiva. Por definición de clase PRC, f_1 es inicial entonces $f_1 \in C$.

Caso inductivo: $f_{n+1} \in C$

HI: $f_j \in C$ para $j \leqslant n$

Hay 3 casos:

1) f_{n+1} es una función inicial. Por definición de clase PRC, $f_{n+1} \in C$.

2) f_{n+1} es una composición de funciones anteriores en la lista. Por HI, las funciones anteriores en la lista están en C. Por definición de clase PRC, la clase C está cerrada por composición. Luego $f_{n+1} \in C$.

3) f_{n+1} es una recursión primitiva utilizando funciones anteriores en la lista. Por HI esas funciones están en C. Por definición de PRC, C está cerrada por recursión primitiva. Entonces $f_{n+1} \in C$.

$\therefore$ Como todas las $f_i \in C$, en particular $f = f_n \in C$.