Lógica y Computabilidad

2do cuatrimestre 2020 - **A DISTANCIA**

Departamento de Computación - FCEyN - UBA

Lógica de Primer Orden - clase 1

Lenguaje de lógica de primer orden, términos, fórmulas, variables libres y ligadas, interpretación, valuación, niveles de verdad, consecuencia semántica

Lenguajes de primer orden

- símbolos lógicos y auxiliares: $x \quad ' \quad \forall \quad \neg \quad \to \quad (\quad)$
  - $x, x', x'', x''', \ldots$ son variables
    - VAR es el conjunto de variables
  - $\forall$ se llama cuantificador universal
- símbolos de cada lenguaje particular $\mathcal{L} = \mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$, donde
  - $\mathcal{C}$ es un conjunto de símbolos de constantes (puede ser $\mathcal{C} = \emptyset$)
  - $\mathcal{F}$ es un conjunto de símbolos de funciones (puede ser $\mathcal{F} = \emptyset$)
  - $\mathcal{P}$ es un conjunto de símbolos de predicados ($\mathcal{P} \neq \emptyset$)

Términos

Para un lenguaje fijo $\mathcal{L}$, definimos los términos de $\mathcal{L}$:

1. toda variable es un término
2. todo símbolo de constante de $\mathcal{L}$ es un término
3. si f es un símbolo de función n-ádico de $\mathcal{L}$ y $t_1, \ldots, t_n$ son términos de $\mathcal{L}$, entonces $f(t_1, \ldots, t_n)$ es un término de $\mathcal{L}$
4. nada más es un término de $\mathcal{L}$

TERM($\mathcal{L}$) es el conjunto de todos los términos del lenguaje $\mathcal{L}$

Un término es cerrado si no tiene variables.

Por ejemplo, para $\mathcal{L} = \mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$, con $\mathcal{C} = \{c, d\}$, $\mathcal{F} = \{f\}$ y $\mathcal{P} = \{R\}$ (f de aridad 3, R binario) son términos:

$$c \quad , \quad d \quad , \quad x \quad , \quad f(c, d, x') \quad , \quad f(c, f(x''', x'', x''), x')$$

Fórmulas

Para un lenguaje fijo $\mathcal{L}$, definimos las fórmulas de $\mathcal{L}$:

1. si P es un símbolo de predicado n-ádico de $\mathcal{L}$ y $t_1, \ldots, t_n$ son términos de $\mathcal{L}$, entonces $P(t_1, \ldots, t_n)$ es una fórmula de $\mathcal{L}$ (atómica)
2. si φ es una fórmula de $\mathcal{L}$ entonces $\neg\varphi$ es una fórmula de $\mathcal{L}$
3. si φ y ψ son fórmulas de $\mathcal{L}$ entonces $(\varphi \to \psi)$ es una fórmula de $\mathcal{L}$
4. si φ es una fórmula de $\mathcal{L}$ y x una variable entonces $(\forall x)\varphi$ es una fórmula de $\mathcal{L}$
5. nada más es una fórmula de $\mathcal{L}$

FORM($\mathcal{L}$) es el conjunto de todas las fórmulas del lenguaje $\mathcal{L}$

Por ejemplo, para $\mathcal{L} = \mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$, con $\mathcal{C} = \{c, d\}$, $\mathcal{F} = \{f\}$ y $\mathcal{P} = \{R\}$ (f de aridad 3, R binario) son fórmulas:

$$R(d, x') \quad , \quad (\forall x')\ R(d, x'') \quad , \quad (\forall x'')\ R(f(x'', x', x'''), d)$$

Convenciones

- usamos $x, y, z, \ldots$ para variables
- usamos $a, b, c, d, \ldots$ para símbolos de constante
- usamos $f, g, h, \ldots$ para símbolos de función (la aridad siempre va a quedar clara del contexto)
- usamos $P, Q, R, \ldots$ para símbolos de predicado (la aridad siempre va a quedar clara del contexto)
- escribimos $(\exists x)\varphi$ en lugar de $\neg(\forall x)\neg\varphi$
- escribimos $(\varphi \vee \psi)$ en lugar de $(\neg\varphi \to \psi)$
- escribimos $(\varphi \wedge \psi)$ en lugar de $\neg(\varphi \to \neg\psi)$
- escribimos φ en lugar de (φ) cuando convenga

Variables libres y ligadas

- una aparición de una variable x en una fórmula está ligada si está dentro del alcance de un cuantificador. En caso contrario, dicha aparición está libre.
- una variable está libre en una fórmula si todas sus apariciones están libres.
- una variable está ligada en una fórmula si todas sus apariciones están ligadas.
- una fórmula es una sentencia si todas las variables son ligadas (es decir, no hay apariciones libres de variables)

Por ejemplo, (para un lenguaje con un símbolo de predicado binario P)

- en $P(x, y)$, x está libre
- en $(\forall y)\ P(x, y)$, x está libre
- en $(\forall x)\ P(x, y)$, x está ligada
- en $(\forall x)(\forall y)\ P(x, y)$, x está ligada
- en $P(x, y) \to (\forall x)(\forall y)\ P(x, y)$
  - la primera aparición de x está libre
  - la segunda aparición de x está ligada
  - entonces, x no está ni libre ni ligada

Interpretación de un lenguaje

Una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{A}$ de un lenguaje $\mathcal{L} = \mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$ es

- un conjunto A no vacío, se lo llama universo o dominio
- las siguientes asignaciones:
  - para cada símbolo de constante $c \in \mathcal{C}$, un elemento fijo
    $$c_{\mathcal{A}} \in A$$
  - para cada símbolo de función n-aria $f \in \mathcal{F}$, una función
    $$f_{\mathcal{A}} : A^n \to A$$
  - para cada símbolo de predicado n-ario $P \in \mathcal{P}$, una relación
    $$P_{\mathcal{A}} \subseteq A^n$$

Las funciones $f_{\mathcal{A}}$ y predicados $P_{\mathcal{A}}$ son siempre totales.

Ejemplos

Para $\mathcal{L} = \mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$, con $\mathcal{C} = \{c, d\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$ y $\mathcal{P} = \{P\}$
(f unaria, g binaria, P binario)

$\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{A}$

- $A = \mathbb{Z}$
- $c_{\mathcal{A}} = 0$
- $d_{\mathcal{A}} = 1$
- $f_{\mathcal{A}}(x) = -x$
- $g_{\mathcal{A}}(x, y) = x + y$
- $P_{\mathcal{A}}(x, y)$ sii x divide a y

$\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{B}$

- $B = \mathcal{P}(\mathbb{N})$
- $c_{\mathcal{B}} = \emptyset$
- $d_{\mathcal{B}} = \mathbb{N}$
- $f_{\mathcal{B}}(x) = \overline{x}$
- $g_{\mathcal{B}}(x, y) = x \cup y$
- $P_{\mathcal{B}}(x, y)$ sii $x \subseteq y$

No ejemplos

Para $\mathcal{L} = \mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$, con $\mathcal{C} = \{c, d\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$ y $\mathcal{P} = \{P\}$
(f unaria, g binaria, P binario)

$\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M}$

- $M = \mathbb{Z}$
- $c_{\mathcal{M}} = 0$
- $d_{\mathcal{M}} = 1$
- $f_{\mathcal{M}}(x) = 1/x$
- $g_{\mathcal{M}}(x, y) = x^y$
- $P_{\mathcal{M}}(x, y)$ sii x divide a y

en general

- $1/x \notin \mathbb{Z}$
- $x^y \notin \mathbb{Z}$

$\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{N}$

- $N =$ funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $c_{\mathcal{N}} =$ función identidad
- $d_{\mathcal{N}} =$ función 0
- $f_{\mathcal{N}}(x) =$ derivada de x
- $g_{\mathcal{N}}(x, y) = x \circ y$
- $P_{\mathcal{N}}(x, y)$ sii $x = y$

una función $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ puede no ser derivable

Valuaciones

Fijemos una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{A}$ con dominio A.

Una valuación para $\mathcal{A}$ es una función $v : \mathrm{VAR} \to A$

Extendemos v a $\tilde{v} : \mathrm{TERM}(\mathcal{L}) \to A$, que interpreta un término t en una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{A}$:

- si $t = x$ (variable) entonces $\tilde{v}(t) = v(x)$
- si $t = c$ (constante) entonces $\tilde{v}(t) = c_{\mathcal{A}}$
- si $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ (función) entonces

$$\tilde{v}(t) = f_{\mathcal{A}}(\tilde{v}(t_1), \ldots, \tilde{v}(t_n))$$

Sea v una valuación de $\mathcal{A}$ y sea $a \in A$. Definimos la valuación $v(x = a)$ de la siguiente manera

$$v(x = a)\ (y) = \begin{cases} v(y) & x \neq y \\ a & x = y \end{cases}$$

Escribimos v en vez de $\tilde{v}$.

Ejemplos

Para $\mathcal{L} = \mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$, con $\mathcal{C} = \{c, d\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$ y $\mathcal{P} = \{P\}$
(f unaria, g binaria, P binario)

$\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{A}$

- $A = \mathbb{Z}$
- $c_{\mathcal{A}} = 0$
- $d_{\mathcal{A}} = 1$
- $f_{\mathcal{A}}(x) = -x$
- $g_{\mathcal{A}}(x, y) = x + y$
- $P_{\mathcal{A}}(x, y)$ sii x divide a y

Tenemos

- si $v(x) = 2$

  $\tilde{v}\big(g(x, f(d))\big) = 2+(-1) = 1$

- para cualquier v

  $\tilde{v}\big(g(c, f(d))\big) = 0+(-1) = -1$

$\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{B}$

- $B = \mathcal{P}(\mathbb{N})$
- $c_{\mathcal{B}} = \emptyset$
- $d_{\mathcal{B}} = \mathbb{N}$
- $f_{\mathcal{B}}(x) = \overline{x}$
- $g_{\mathcal{B}}(x, y) = x \cup y$
- $P_{\mathcal{B}}(x, y)$ sii $x \subseteq y$

Tenemos

- si $v(x) = \{1, 2\}$

  $\tilde{v}\big(g(x, f(d))\big) = \{1, 2\} \cup \overline{\mathbb{N}} = \{1, 2\}$

- para cualquier v

  $\tilde{v}\big(g(c, f(d))\big) = \emptyset \cup \overline{\mathbb{N}} = \emptyset$

Interpretación de una fórmula

Sea $\mathcal{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura con dominio A y v una valuación de $\mathcal{A}$.
Definimos cuando φ es verdadera en $\mathcal{A}$ bajo la valuación v (notación: $\mathcal{A} \models \varphi[v]$)

1. φ es de la forma $P(t_1, \ldots, t_n)$ (atómica)

$$\mathcal{A} \models P(t_1, \ldots, t_n)[v] \quad \textit{sii} \quad \big(\tilde{v}(t_1), \ldots, \tilde{v}(t_n)\big) \in P_{\mathcal{A}}$$

2. φ es de la forma $\neg\psi$

$$\mathcal{A} \models \neg\psi[v] \quad \textit{sii} \quad \text{no } \mathcal{A} \models \psi[v]$$

3. φ es de la forma $(\psi \to \rho)$

$$\mathcal{A} \models (\psi \to \rho)[v] \quad \textit{sii} \quad \text{no } \mathcal{A} \models \psi[v] \text{ o } \mathcal{A} \models \rho[v]$$

4. φ es de la forma $(\forall x)\psi$

$$\mathcal{A} \models (\forall x)\psi[v] \quad \textit{sii} \quad \text{para cualquier } a \in A,\ \mathcal{A} \models \psi[v(x = a)]$$

Ejemplos

Para $\mathcal{L} = \mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$, con $\mathcal{C} = \{c, d\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$ y $\mathcal{P} = \{P\}$
(f unaria, g binaria, P binario)

$\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{A}$

- $A = \mathbb{Z}$
- $c_{\mathcal{A}} = 0$
- $d_{\mathcal{A}} = 1$
- $f_{\mathcal{A}}(x) = -x$
- $g_{\mathcal{A}}(x, y) = x + y$
- $P_{\mathcal{A}}(x, y)$ sii x divide a y

Tenemos

- para $v(x) = 1$
  $\mathcal{A} \models P(x, d)[v]$
- para $v(x) = 0$
  $\mathcal{A} \not\models P(x, c)[v]$
- para cualquier v
  $\mathcal{A} \not\models (\forall y)P(y, g(y, d))[v]$

$\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{B}$

- $B = \mathcal{P}(\mathbb{N})$
- $c_{\mathcal{B}} = \emptyset$
- $d_{\mathcal{B}} = \mathbb{N}$
- $f_{\mathcal{B}}(x) = \overline{x}$
- $g_{\mathcal{B}}(x, y) = x \cup y$
- $P_{\mathcal{B}}(x, y)$ sii $x \subseteq y$

Tenemos

- para $v(x) = \emptyset$
  $\mathcal{B} \models P(x, d)[v]$
- para $v(x) = \{1, 2, 3\}$
  $\mathcal{B} \not\models P(x, c)[v]$
- para cualquier v
  $\mathcal{B} \models (\forall y)P(y, g(y, d))[v]$

Notación ($\wedge$, $\vee$, $\exists$)

Sea $\mathcal{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura y v una valuación de $\mathcal{A}$. Se deduce:

5. φ es de la forma $(\psi \vee \rho)$

$$\mathcal{A} \models (\psi \vee \rho)[v] \quad \textit{sii} \quad \mathcal{A} \models \psi[v] \quad \textit{o} \quad \mathcal{A} \models \rho[v]$$

6. φ es de la forma $(\psi \wedge \rho)$

$$\mathcal{A} \models (\psi \wedge \rho)[v] \quad \textit{sii} \quad \mathcal{A} \models \psi[v] \quad \textit{y} \quad \mathcal{A} \models \rho[v]$$

7. φ es de la forma $(\exists x)\psi$

$$\mathcal{A} \models (\exists x)\psi[v] \quad \textit{sii} \quad \text{hay un } a \in A \text{ tal que } \mathcal{A} \models \psi[v(x = a)]$$

3 niveles de verdad

Para un lenguaje $\mathcal{L}$ fijo.

1. φ es satisfacible si existe una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{A}$ y una valuación v de $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A} \models \varphi[v]$
2. φ es verdadera (o válida) en una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A} \models \varphi$) si $\mathcal{A} \models \varphi[v]$ para toda valuación v de $\mathcal{A}$
   - decimos que $\mathcal{A}$ es un modelo de φ
3. φ es universalmente válida ($\models \varphi$) si $\mathcal{A} \models \varphi[v]$ para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{A}$ y toda valuación v de $\mathcal{A}$

Ejemplos

- $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Z}; <, 0 \rangle$ con la interpretación usual
  - $\mathcal{A} \models (\forall x)(\exists y)\ x < y$
  - $\mathcal{A} \models (\exists y)\ x < y$
  - $\mathcal{A} \not\models x < y \to (\exists z)\ (x < z \land z < y)$
  - $\mathcal{A} \models (\exists x)\ x < 0$
- $\mathcal{B} = \langle \mathbb{N}; <, 0 \rangle$ con la interpretación usual
  - $\mathcal{B} \not\models x < y \to (\exists z)\ (x < z \land z < y)$
  - $\mathcal{B} \not\models (\exists x)\ x < 0$
- $\mathcal{C} = \langle \mathbb{Q}; <, 0 \rangle$ con la interpretación usual
  - $\mathcal{C} \models x < y \to (\exists z)\ (x < z \land z < y)$
  - $\mathcal{C} \models (\exists x)\ x < 0$
- $(\exists x)(\forall y)\ P(x, y)$ es satisfacible
  - $\mathcal{D} = \langle \{0\}; = \rangle$ con la interpretación usual
  - $\mathcal{E} = \langle \mathbb{N}; \leq \rangle$ con la interpretación usual
- $\models (\forall x)\ P(x) \to P(x)$ se entiende $\big((\forall x)\ P(x)\big) \to P(x)$
- $\not\models P(x) \to (\forall x)\ P(x)$
  - $\mathcal{F} = \langle \mathbb{N}; \mathrm{par} \rangle$ con la interpretación usual, $v(x) = 0$

Algunos resultados sobre satisfacibilidad y validez

- si φ es una sentencia, $\mathcal{A} \models \varphi$ sii $\mathcal{A} \models \varphi[v]$
- φ es universalmente válida sii $\neg\varphi$ es insatisfacible
- preservación de validez del Modus Ponens:
  - $\mathcal{A} \models \varphi[v]$ y $\mathcal{A} \models (\varphi \to \psi)[v]$ entonces $\mathcal{A} \models \psi[v]$
  - $\mathcal{A} \models \varphi$ y $\mathcal{A} \models (\varphi \to \psi)$ entonces $\mathcal{A} \models \psi$
  - $\models \varphi$ y $\models (\varphi \to \psi)$ entonces $\models \psi$
- clausura universal
  - $\mathcal{A} \models \varphi$ sii $\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi$
  - $\models \varphi$ sii $\models (\forall x)\varphi$

Consecuencia semántica

Sea $\Gamma \subseteq \mathsf{FORM}(\mathcal{L})$ y $\varphi \in \mathsf{FORM}(\mathcal{L})$

φ es consecuencia semántica de Γ ($\Gamma \models \varphi$) si para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{A}$ y toda valuación v de $\mathcal{A}$:

$$\text{si } \mathcal{A} \models \Gamma[v] \text{ entonces } \mathcal{A} \models \varphi[v]$$

Notación:

$$\mathcal{A} \models \Gamma[v]$$

significa que para toda $\psi \in \Gamma$,

$$\mathcal{A} \models \psi[v]$$

Ejemplos

$\mathcal{L} = \{P, Q\}$, con P y Q símbolos de predicado 1-arios

- $\Gamma_1 = \{ \quad (\forall x)(P(x) \to Q(x)) \quad \}$
  - $\Gamma_1 \not\models (\exists x)P(x)$
  - $\Gamma_1 \models (\exists x)P(x) \to (\exists x)Q(x)$
  - $\Gamma_1 \models (\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x)$

- $\Gamma_2 = \{ \quad (\forall x)(P(x) \to Q(x)) \quad , \quad (\exists x)P(x) \quad \}$
  - $\Gamma_2 \models (\exists x)Q(x)$
  - $\Gamma_2 \models (\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$
  - $\Gamma_2 \not\models (\exists x)(\neg P(x) \wedge Q(x))$

- $\Gamma_3 = \{ \quad (\forall x)(P(x) \to Q(x)) \quad , \quad (\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x)) \quad \}$
  - $\Gamma_3 \models \varphi \qquad$ para cualquier φ

Lenguajes con igualdad

$\mathcal{L}$ es un lenguaje con igualdad si tiene un símbolo proposicional binario especial (el $=$) que sólo se interpreta como la igualdad.

Fijemos un lenguaje $\mathcal{L}$ con igualdad y con ningún otro símbolo. Buscamos $\varphi \in \mathrm{FORM}(\mathcal{L})$ tal que $\{\mathcal{A} : \mathcal{A} \models \varphi\}$ sea la clase de modelos

- con exactamente 1 elemento

$$\varphi = (\exists x)(\forall y)x = y$$

- con exactamente 2 elementos

$$\varphi = (\exists x)(\exists y)\big(\overbrace{x \neq y}^{\neg x = y} \wedge (\forall z)(z = x \vee z = y)\big)$$

- con al menos 3 elementos

$$\varphi = (\exists x)(\exists y)(\exists z)\big(x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z\big)$$

- con infinitos elementos... con finitos elementos. ¿Se podrá?