Teorema
Si Γ es consistente entonces Γ es satisfacible.

Demo
Dado Γ consistente, construimos $\Gamma' \supseteq \Gamma$ mc por Lindenbaum.

Definimos la valuación v tal que:

$$v(p) = 1 \quad \text{sii} \quad p \in \Gamma'$$

Vamos a probar por inducción en la complejidad de las fórmulas que para toda $\varphi \in FORM$, $v \models \varphi$ sii $\varphi \in \Gamma'$.

Luego habremos probado que $v \models \Gamma'$, es decir Γ' es satisfacible.
Como $\Gamma \subseteq \Gamma'$ entonces Γ también resultará satisfacible.

Caso base: $n=0$
Si φ tiene complejidad 0 entonces es una variable proposicional.
QVQ: $v \models p$ sii $p \in \Gamma'$.
Se cumple trivialmente por def: $v(p) = 1$ sii $p \in \Gamma'$.

Caso inductivo: $n>0$

Sea φ una fórmula de complejidad n.

HI: Para toda fórmula de complejidad $\varphi' < n$ vale $v \models \varphi'$ sii $\varphi' \in \Gamma'$.

QVQ: $v \models \varphi$ sii $\varphi \in \Gamma'$.

Caso $\varphi = \neg\psi$

ψ tiene complejidad $< n$. Por HI:

- $v \models \psi$ sii $\psi \in \Gamma'$.
- Análogamente: $v \not\models \psi$ sii $\psi \notin \Gamma'$.

QVQ: $v \models \neg\psi$ sii $\neg\psi \in \Gamma'$.

($\Rightarrow$) $v \models \neg\psi$

$\Rightarrow v \not\models \psi$	Por def de valuación
$\Rightarrow \psi \notin \Gamma'$	Por HI
$\Rightarrow \neg\psi \in \Gamma'$	Por Γ' mc

($\Leftarrow$) $\neg\psi \in \Gamma'$

$\Rightarrow \psi \notin \Gamma'$	Por Γ' mc
$\Rightarrow v \not\models \psi$	Por HI
$\Rightarrow v \models \neg\psi$	Por def de valuación

Luego $v \models \neg\psi$ sii $\neg\psi \in \Gamma'$.

Caso $\varphi = \psi \to \rho$

ψ y ρ tienen complejidad $< n$. Por HI:

- $V \models \psi$ sii $\psi \in \Gamma'$.
- $V \models \rho$ sii $\rho \in \Gamma'$.

QVQ: $V \models \psi \to \rho$ sii $\psi \to \rho \in \Gamma'$

($\Rightarrow$) $V \models \psi \to \rho$

$\Rightarrow V \not\models \psi$ o $V \models \rho$ Por def de valuación

$\Rightarrow \psi \notin \Gamma'$ o $\rho \in \Gamma'$ Por HI

$\Rightarrow \neg\psi \in \Gamma'$ o $\rho \in \Gamma'$ Por Γ' mc

Caso $\neg\psi \in \Gamma'$

Por derivación trivial de 1 paso: $\neg\psi \in \Gamma' \Rightarrow \Gamma' \vdash \neg\psi$

Por teorema de SP $\neg\psi \to (\psi \to \rho)$ y MP: $\Gamma' \vdash \psi \to \rho$

Por Γ' mc: $\psi \to \rho \in \Gamma'$

Caso $\rho \in \Gamma'$

Por derivación trivial de 1 paso: $\rho \in \Gamma' \Rightarrow \Gamma' \vdash \rho$

Por SP1: $\rho \to (\psi \to \rho)$ y MP: $\Gamma' \vdash \psi \to \rho$

Por Γ' mc: $\psi \to \rho \in \Gamma'$

$(\Leftarrow)$

QVQ: $\psi \to \rho \in \Gamma' \Rightarrow v \models \psi \to \rho$

Por contrarrecíproco basta ver: $v \not\models \psi \to \rho \Rightarrow \psi \to \rho \notin \Gamma'$

$$
\begin{array}{lll}
 & v \not\models \psi \to \rho & \\
\Rightarrow & \text{no}\,(v \models \psi \to \rho) & \\
\Rightarrow & \text{no}\,(v \not\models \psi \ \text{ o } \ v \models \rho) & \\
\Rightarrow & v \models \psi \ \text{ y } \ v \not\models \rho & \text{Por def de valuación} \\
\Rightarrow & \psi \in \Gamma' \ \text{ y } \ \rho \notin \Gamma' & \text{Por HI} \\
\Rightarrow & \psi \in \Gamma' \ \text{ y } \ \neg\rho \in \Gamma' & \text{Por } \Gamma' \text{ mc} \\
\Rightarrow & \Gamma' \vdash \psi \ \text{ y } \ \Gamma' \vdash \neg\rho & \text{Por derivación trivial} \\
\Rightarrow & \Gamma' \vdash \psi \to \neg\rho \to \neg(\psi \to \rho) & \text{Por teorema de SP} \\
\Rightarrow & \Gamma' \vdash \neg(\psi \to \rho) & \text{Por MP 2 veces} \\
\Rightarrow & \neg(\psi \to \rho) \in \Gamma' & \text{Por } \Gamma' \text{ mc} \\
\Rightarrow & \psi \to \rho \notin \Gamma' & \text{Por } \Gamma' \text{ mc}
\end{array}
$$

Luego $\psi \to \rho \in \Gamma' \Rightarrow v \models \psi \to \rho$.

$\therefore$ $v \models \varphi$ sii $\varphi \in \Gamma'$

Γ' es satisfacible

$\Gamma \subseteq \Gamma'$ también es satisfacible.