Teorema de Rice

Conjunto de índices

$A \subseteq \mathbb{N}$ es un conjunto de índices si existe una clase C de funciones $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ parcial computables tal que $A = \{x : \phi_x \in C\}$.

Teorema

Si A es un conjunto de índices no trivial ($A \neq \emptyset$ y $A \neq \mathbb{N}$) entonces A no es computable.

Demo

Supongamos existe una clase C de funciones $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ parcial computables tal que $A = \{x : \phi_x \in C\}$ computable.

Como $A \neq \emptyset \neq \mathbb{N}$, existen f y g funciones $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ parcial computables tal que $f \in C$ y $g \notin C$.

Luego $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ es parcial computable:

$$h(t, x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } t \in A \\ f(x) & \text{si no} \end{cases}$$

Por el Teorema de la Recursión existe un e tal que:

$$\phi_e(x) = h(e, x)$$

Veamos cada caso si e está en A o no.

$$e \in A \Rightarrow \phi_e(x) \overset{\text{Teo. Rec.}}{=} h(e,x) \overset{\text{def}}{=} g(x) \quad \forall x$$
$$\Rightarrow \phi_e = g$$
$$\Rightarrow \phi_e \notin C \qquad \text{Pues } g \notin C$$
$$\Rightarrow e \notin A \qquad \text{Por def } A$$

$$e \notin A \Rightarrow \phi_e(x) \overset{\text{Teo. Rec.}}{=} h(e,x) \overset{\text{def}}{=} f(x) \quad \forall x$$
$$\Rightarrow \phi_e = f$$
$$\Rightarrow \phi_e \in C \qquad \text{Pues } f \in C$$
$$\Rightarrow e \in A \qquad \text{Por def } A$$

Entonces $e \in A$ sii $e \notin A$.
Absurdo, luego A no es computable.

Ejemplos de conjuntos de índices

- $\{x : \phi_x$ es una función constante$\}$
- $\{x : \phi_x$ es una función total$\}$
- $\{x : \phi_x$ es una función estrictamente creciente$\}$

Ejemplos de conjuntos que no son de índices

- $\{x : \phi_x$ tiene a lo sumo 5 instrucciones$\}$
  No es un conjunto de índices porque hay infinitos programas que computan la misma función, y éstos pueden ser tan largos como queramos.

- $\{x : \phi_x(y) = x$ para todo $y\}$
  Supongamos existen 2 programas $e_1 \neq e_2$ tales que $\phi_{e_1} = \phi_{e_2}$. Si $\phi_{e_1}(y) = e_1$ para todo y entonces está en el conjunto. Pero $\phi_{e_2}(y) = e_1 \neq e_2$ para todo y (pues $\phi_{e_1} = \phi_{e_2}$). Luego e_2 no está y el conjunto no es de índices.