Consistente ⇒ satisfacible

único hipótesis
↓

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje fijo. Sea $\Gamma \subseteq FORM(\mathcal{L})$ consistente.
Vamos a construir un modelo canónico $\mathcal{B}$ y una valuación v de $\mathcal{B}$ tal que:

$$\mathcal{B} \models \varphi[v] \text{ para toda } \varphi \in \Gamma$$

Demostración en 5 pasos:

1. Expandir $\mathcal{L}$ a $\mathcal{L}'$ con nuevas constantes. $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup C$.
   En C hay una cantidad infinita numerable de nuevas constantes. Son "nuevas" porque no estaban en $\mathcal{L}$.

2. Agregar testigos a Γ. Trabajamos con $\Gamma \cup \Theta$, donde Θ es un conjunto de fórmulas especiales que usan a las constantes nuevas de $\mathcal{L}'$.

3. Aplicar el Lema de Lindenbaum para $\Gamma \cup \Theta$. Así obtenemos $\Delta \supseteq \Gamma \cup \Theta$ maximal consistente.

4. Construir el modelo canónico $\mathcal{A}$ y valuación v para el lenguaje $\mathcal{L}'$ tal que $\mathcal{A} \models \varphi[v]$ sii $\varphi \in \Delta$.

5. Restringir $\mathcal{A}$ y v al lenguaje original $\mathcal{L}$ y obtener $\mathcal{B}$.

Paso 1

Teorema

Sea $\Gamma \subseteq FORM(\mathcal{L})$ consistente. Sea C un conjunto de nuevas constantes que no aparecen en $\mathcal{L}$. Si $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup C$ entonces Γ es consistente en el lenguaje $\mathcal{L}'$.

Demo

Por el absurdo. Inconsistente $\Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$ y $\Gamma \vdash \neg\varphi$. Derivación finita, enumero las constantes usadas, por TGC las reemplazo por variables frescas.

Paso 2

Sean Γ y C como en el paso 1. Sea $\langle \varphi_1, x_1 \rangle, \langle \varphi_2, x_2 \rangle, \dots$ una enumeración de $FORM(\mathcal{L}') \times VAR$.

Definimos: $\theta_n = \neg(\forall x_n)\varphi_n \to \neg\varphi_n[x_n / c_n]$

donde c_n es la primera constante de C que:

- No aparece en φ_n y
- No aparece en $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$

Definimos: $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots\}$

Teorema

$\Gamma \cup \Theta \subseteq FORM(\mathcal{L}')$ es consistente.

Θ agrega testigos a Γ. Si ocurre $\neg(\forall x)\varphi$ entonces hay una constante c que atestigua que φ no vale para todo x. Es decir $\neg\varphi[x/c]$.

Paso 3

Teorema

Sean Γ y Θ como en los pasos 1 y 2. Existe un conjunto $\Delta \supseteq \Gamma \cup \Theta$ tal que Δ es maximal consistente.

Demo

Lema de Lindenbaum.

Para toda $\varphi \in FORM(\mathcal{L}')$:

- o bien $\varphi \in \Delta$ o bien $\neg\varphi \in \Delta$
- $\varphi \in \Delta$ sii $\Delta \vdash \varphi$

Paso 4

Construimos el modelo canónico $\mathcal{A}$ en el universo $A = TERM(\mathcal{L}')$. Los términos de $\mathcal{L}'$ son los elementos del universo, y así la interpretación se define de manera natural:

- $A = TERM(\mathcal{L}')$
- $f \in \mathcal{L}' \Rightarrow f_{\mathcal{A}}(\overbrace{t_1, \cdots, t_n}^{\in A^n}) = f(t_1, \cdots, t_n) \in A$
- $c \in \mathcal{L}' \Rightarrow c_{\mathcal{A}} = c \in A$
- $P \in \mathcal{L}' \Rightarrow \underbrace{(t_1, \cdots, t_n)}_{\in A^n} \in P_{\mathcal{A}}$ sii $P(t_1, \cdots, t_n) \in \Delta$

$v: VAR \rightarrow TERM(\mathcal{L}')$ tal que $v(x) = x$

Lema: $v(t) = t$ para todo $t \in TERM(\mathcal{L}')$

QVQ: $\mathcal{A} \models \varphi[v]$ sii $\varphi \in \Delta$

Demo por inducción en la complejidad de las fórmulas.

Paso 5

Definimos $\mathcal{B}$ como la restricción de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{L}$, ya no interpretamos las nuevas constantes.

Por paso 4, para toda $\varphi \in FORM(\mathcal{L}')$: $\mathcal{A} \models \varphi[v]$ sii $\varphi \in \Delta$

Como $\Gamma \subseteq \Delta$, si $\varphi \in \Gamma \subseteq FORM(\mathcal{L})$: $\mathcal{A} \models \varphi[v]$ sii $\mathcal{B} \models \varphi[v]$

Luego Γ es satisfacible.

Corolario

Γ consistente sii Γ satisfacible.

Teorema completitud fuerte

Si $\Gamma \models \varphi$ entonces $\Gamma \vdash \varphi$.

Demo: igual que proposicional.

Corolario

$\Gamma \models \varphi$ sii $\Gamma \vdash \varphi$

Teorema compacidad

Sea $\Gamma \subseteq FORM(\mathcal{L})$. Si todo $\Delta \subseteq \Gamma$ finito es satisfacible, entonces Γ satisfacible.

Demo: igual que proposicional.