

Lógica y Computabilidad

Práctica 1: Funciones primitivas recursivas y clases PRC

2do cuatrimestre 2022

Ejercicio 1

Para construir una constante k , aplicamos la función s (sucesor) unas k veces, partiendo inicialmente de la función n que nos devuelve el 0.

$$f(x) = k = (\underbrace{s \circ \dots \circ s}_{k \text{ veces}} \circ n)(x) = s^k(n(x))$$

Ejercicio 2

- $f_1(x, y) = \text{suma}(x, y) = x + y$
 $\text{suma}(x, 0) = u_1^1(x) = x$
 $\text{suma}(x, y + 1) = g(\text{suma}(x, y), x, y)$ donde $g(x_1, x_2, x_3) = s(u_1^3(x_1, x_2, x_3))$
 $\Rightarrow \text{suma}(x, y + 1) = s(\text{suma}(x, y))$
- $f_2(x, y) = \text{prod}(x, y) = x \cdot y$
 $\text{prod}(x, 0) = n(x) = 0$
 $\text{prod}(x, y + 1) = g(\text{prod}(x, y), x, y)$ donde $g(x_1, x_2, x_3) = \text{suma}(u_1^3(x_1, x_2, x_3), u_2^3(x_1, x_2, x_3))$
 $\Rightarrow \text{prod}(x, y + 1) = \text{suma}(\text{prod}(x, y), x)$
- $f_3(x, y) = \text{pot}(x, y) = x^y$
 $\text{pot}(x, 0) = s(n(x)) = 1$
 $\text{pot}(x, y + 1) = g(\text{pot}(x, y), x, y)$ donde $g(x_1, x_2, x_3) = \text{prod}(u_1^3(x_1, x_2, x_3), u_2^3(x_1, x_2, x_3))$
 $\Rightarrow \text{pot}(x, y + 1) = \text{prod}(\text{pot}(x, y), x)$
- $f_4(x, y) = \underbrace{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^x}}}}}_{y \text{ veces}}$
 $f_4(x, 0) = 1$
 $f_4(x, y + 1) = g(f_4(x, y), x, y)$ donde $g(x_1, x_2, x_3) = \text{pot}(u_2^3(x_1, x_2, x_3), u_1^3(x_1, x_2, x_3))$
 $\Rightarrow f_4(x, y + 1) = \text{pot}(x, f_4(x, y))$
Esta función a veces se la llama “Power Tower” ([Wikipedia](#))
- $g_1(x) = \text{pred}(x) = x \div 1$
 $\text{pred}(0) = n() = 0$ Permitimos utilizar la función nula n sin parámetros.
 $\text{pred}(x + 1) = g(\text{pred}(x), x)$ donde $g(x_1, x_2) = u_2^2(x_1, x_2) = x_2$
 $\Rightarrow \text{pred}(x + 1) = x$
- $g_2(x, y) = \text{resta}(x, y) = x \div y$
 $\text{resta}(x, 0) = u_1^1(x) = x$
 $\text{resta}(x, y + 1) = g(\text{resta}(x, y), x, y)$ donde $g(x_1, x_2, x_3) = \text{pred}(u_1^3(x_1, x_2, x_3))$
 $\Rightarrow \text{resta}(x, y + 1) = \text{pred}(\text{resta}(x, y))$

- $g_3(x, y) = \max\{x, y\}$

$$g_3(x, y) = \text{suma}(\text{resta}(x, y), y) = (x \dot{-} y) + y$$

Si $x \geq y$, entonces g_3 simplemente resta y suma y a un x que es más grande, y en efecto terminamos con x que era el máximo. En el otro caso $x < y$, al hacer la resta en \mathbb{N} obtenemos $x \dot{-} y = 0$, luego al sumar y obtenemos nuevamente y que era el máximo.

- $g_4(x, y) = \min\{x, y\}$

$$g_4(x, y) = \text{resta}(\text{suma}(x, y), \max\{x, y\}) = x + y - \max\{x, y\}$$

Ejercicio 3

a)

Para la ida (\Rightarrow) hacemos una demostración por inducción estructural. Primero probamos que todas las funciones iniciales (que están en \mathcal{C}_c) cumplen la propiedad.

- Función nula

$f(x) = n(x) = 0$. La función nula cae en el caso $f(x) = k$ donde $k = 0$.

- Función sucesor

$f(x) = s(x) = x + 1$. La función sucesor cae en el caso $f(x) = x + k$ donde $k = 1$.

- Función proyector

$f(x_1, \dots, x_n) = u_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i$. La función proyector cae en el caso $f(x_1, \dots, x_n) = x_i + k$ donde $k = 0$.

Paso inductivo. Supongamos que existen $f, g_1, \dots, g_m \in \mathcal{C}_c$ que cumplen con la propiedad. Como la única operación en \mathcal{C}_c es la composición, esa es la única forma de generar nuevas funciones. Probemos entonces que la función generada por composición $h(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)) \in \mathcal{C}_c$ también cumple con la propiedad.

Miremos todos los posibles casos para f que ya sabemos que cumple con la propiedad por hipótesis inductiva.

- $f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)) = k \Rightarrow h(x_1, \dots, x_n) = k$

- $f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)) = g_j(x_1, \dots, x_n) + k_0$ para algún $j \mid 1 \leq j \leq m$.

Por hipótesis inductiva, $g_j \in \mathcal{C}_c$ cumple con la propiedad. Por lo tanto $g_j(x_1, \dots, x_n) = k_j$ o bien $g_j(x_1, \dots, x_n) = x_i + k_j$ para algún $i \mid 1 \leq i \leq n$. Observar que necesitamos identificar k_j con un subíndice ya que cada g_j puede tener constantes arbitrarias. Además, necesitamos usar un subíndice distinto para el x_i ya que sino estaríamos limitando qué parámetro de entrada puede usar cada g_j .

- $g_j(x_1, \dots, x_n) = k_j \Rightarrow h(x_1, \dots, x_n) = k_j + k_0 = k$

- $g_j(x_1, \dots, x_n) = x_i + k_j \Rightarrow h(x_1, \dots, x_n) = x_i + k_j + k_0 = x_i + k$

Probamos entonces que cualquier función $h(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)) \in \mathcal{C}_c$ cumple con la propiedad. Es decir, vale que si $h \in \mathcal{C}_c \Rightarrow h(x_1, \dots, x_n) = k$ o bien $h(x_1, \dots, x_n) = x_i + k$.

Para la vuelta (\Leftarrow) mostramos que podemos construir cualquier $f(x_1, \dots, x_n) = k$ o $f(x_1, \dots, x_n) = x_i + k$ a partir de composición de las funciones iniciales, y por lo tanto $f \in \mathcal{C}_c$.

- $f(x_1, \dots, x_n) = k = s^k(n(x_i))$ para cualquier i

- $f(x_1, \dots, x_n) = x_i + k = s^k(u_i^n(x_1, \dots, x_n))$

b)

En el ejercicio 2 vimos que la función $\text{suma}(x, y) = x + y$ es P.R. pero $\text{suma} \notin \mathcal{C}_c$ pues no cumple con la propiedad.

Ejercicio 4

Cualquier clase PRC contiene las funciones iniciales y está cerrada por recursión primitiva y composición. Para mostrar que los predicados están en cualquier clase PRC, es suficiente con mostrar que se pueden construir a partir de las funciones iniciales utilizando recursión primitiva y/o composición.

Para simplificar la escritura vamos a utilizar la función $\alpha(x)$ la cual es PR a partir de las iniciales y por lo tanto pertenece a cualquier clase PRC.

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Además, podemos definir el predicado $\neg(x) = \alpha(x)$ que niega otro predicado.

$$\leq) \quad p(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ 0 & \text{si no} \end{cases} = \alpha(x \dot{-} y)$$

$$\geq) \quad p(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq y \\ 0 & \text{si no} \end{cases} = \alpha(y \dot{-} x)$$

$$=) \quad p(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si no} \end{cases} = (x \leq y) \cdot (x \geq y)$$

$$\neq) \quad p(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si no} \end{cases} = \neg(x = y)$$

$$<) \quad p(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < y \\ 0 & \text{si no} \end{cases} = \neg(x \geq y)$$

$$>) \quad p(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > y \\ 0 & \text{si no} \end{cases} = \neg(x \leq y)$$

Ejercicio 5

Podemos escribir h de la siguiente forma equivalente en donde se puede ver más claramente que es composición de funciones, en particular es composición de funciones en \mathcal{C} pues todas las f_i y g están en \mathcal{C} . Como \mathcal{C} es una clase PRC resulta que $h \in \mathcal{C}$.

$$h(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^k f_i(x_1, \dots, x_n) \cdot p_i(x_1, \dots, x_n) + g(x_1, \dots, x_n) \cdot \neg(\sum_{i=1}^k p_i(x_1, \dots, x_n))$$

También podemos analizarlo por casos:

Caso 1: $\exists i : \mathbb{N}, 1 \leq i \leq k$ tal que $p_i(x_1, \dots, x_n)$ es verdadero.

Observemos que si existe i , tiene que ser único pues todos los predicados p_1, \dots, p_k son disjuntos. Luego, vale que $h(x_1, \dots, x_n) = f_i(x_1, \dots, x_n)$ por definición (el predicado $p_i(x_1, \dots, x_n)$ es verdadero y por lo tanto “selecciona” el caso de f_i dentro de la definición de h). Como todas las $f_i \in \mathcal{C}$ por hipótesis $\Rightarrow h \in \mathcal{C}$.

Caso 2: $\forall i : \mathbb{N}, 1 \leq i \leq k \Rightarrow p_i(x_1, \dots, x_n)$ es falso.

Como no existe predicado p_i que resulte verdadero, por definición h “selecciona” el último caso “si no” y luego resulta $h(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n)$. Como $g \in \mathcal{C}$ por hipótesis $\Rightarrow h \in \mathcal{C}$.

Ejercicio 6

Una clase de funciones \mathcal{C} es PRC si contiene las funciones iniciales y está cerrada por composición y recursión primitiva.

Podemos afirmar que una función cualquiera va a estar en **toda** clase PRC si podemos demostrar que pertenece a la clase

PR. La clase PR es la clase PRC más “chica”, son todas las funciones que se pueden construir a partir de las funciones iniciales mediante composición y/o recursión primitiva, y por lo tanto van a pertenecer a cualquier clase PRC.

No obstante, una clase \mathcal{C} puede ser PRC y a su vez contener funciones que no puedan ser construidas a partir de las iniciales. Esto sucede cuando la clase incluye explícitamente alguna función adicional que no pertenece a la clase PR. En esencia, para generar nuevas funciones dentro de esta clase \mathcal{C} , además de tener las 3 funciones iniciales, tendríamos esta función adicional.

a)

$$\text{par}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es par} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$\text{par}(0) = 1$$

$$\text{par}(x+1) = g(\text{par}(x), x) \text{ donde } g(x_1, x_2) = \neg u_1^2(x_1, x_2) \Rightarrow \text{par}(x+1) = \neg \text{par}(x)$$

Definimos $\text{impar}(x) = \neg \text{par}(x)$ para usar en los siguientes items.

b)

$$f(x) = \text{div2}(x) = \lfloor x/2 \rfloor$$

$$\text{div2}(0) = 0$$

$$\text{div2}(x+1) = \begin{cases} \text{div2}(x) & \text{si } \text{par}(x) \\ s(\text{div2}(x)) & \text{si no} \end{cases} = \text{div2}(x) \cdot \text{par}(x) + s(\text{div2}(x)) \cdot \text{impar}(x)$$

c)

$$h(x_1, \dots, x_n, t) = \begin{cases} f(x_1, \dots, x_n) & \text{si } t = 0 \\ g_1(x_1, \dots, x_n, k, h(x_1, \dots, x_n, t-1)) & \text{si } t = 2 \cdot k + 1 \\ g_2(x_1, \dots, x_n, k, h(x_1, \dots, x_n, t-1)) & \text{si } t = 2 \cdot k + 2 \end{cases}$$

Planteamos el caso base del esquema de recursión primitiva para h . Notar que si $t = 0$ siempre entramos en el primer caso de h pues no existe $k \in \mathbb{N}$ para satisfacer los otros 2 casos cuando $t = 0$.

$$h(x_1, \dots, x_n, 0) = f(x_1, \dots, x_n)$$

Para el caso $t > 0$ primero reescribimos la función por casos colocando $t+1$ en donde antes teníamos t para poder ajustarnos al esquema de recursión primitiva.

$$\begin{aligned} h(x_1, \dots, x_n, t+1) &= \begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n, k, h(x_1, \dots, x_n, t+1-1)) & \text{si } t+1 = 2 \cdot k + 1 \\ g_2(x_1, \dots, x_n, k, h(x_1, \dots, x_n, t+1-1)) & \text{si } t+1 = 2 \cdot k + 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n, k, h(x_1, \dots, x_n, t)) & \text{si } t = 2 \cdot k \\ g_2(x_1, \dots, x_n, k, h(x_1, \dots, x_n, t)) & \text{si } t = 2 \cdot k + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ahora necesitamos despejar k en función de t .

$$t = 2 \cdot k \Rightarrow k = \lfloor t/2 \rfloor = \text{div2}(t)$$

$$t = 2 \cdot k + 1 \Rightarrow k = \lfloor (t-1)/2 \rfloor = \text{div2}(t-1) = \text{div2}(t) \text{ pues } t \text{ es impar y div2 redondea hacia abajo}$$

Reescribimos h eliminando por completo la k .

$$h(x_1, \dots, x_n, t+1) = \begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n, \text{div2}(t), h(x_1, \dots, x_n, t)) & \text{si } \text{par}(t) \\ g_2(x_1, \dots, x_n, \text{div2}(t), h(x_1, \dots, x_n, t)) & \text{si } \text{impar}(t) \end{cases}$$

También podemos escribir h como suma de cada caso por su predicado.

$$h(x_1, \dots, x_n, t+1) = g_1(x_1, \dots, x_n, \text{div2}(t), h(x_1, \dots, x_n, t)) \cdot \text{par}(t) + g_2(x_1, \dots, x_n, \text{div2}(t), h(x_1, \dots, x_n, t)) \cdot \text{impar}(t)$$

Conclusión

- h sigue el esquema de recursión primitiva.
- h compone funciones que están en \mathcal{C} (puntualmente f , g_1 y g_2).
- h compone funciones que están en toda clase PRC (puntualmente div2 , par , impar).
- \mathcal{C} es una clase PRC por el enunciado, entonces contiene a las funciones div2 , par , impar .

Por lo tanto cualquier h que cumpla con este esquema pertenece a \mathcal{C} .

Ejercicio 7

Usamos la notación $\bar{x} = x_1, \dots, x_n$ para simplificar la escritura.

- $\text{cantidad}_p(\bar{x}, y, z) = \sum_{t=0}^z p(\bar{x}, t) \cdot (t \geq y) = \sum_{t=y}^z p(\bar{x}, t)$
- $\text{todos}_p(\bar{x}, y, z) = \text{cantidad}_p(\bar{x}, y, z) = z - y$
- $\text{alguno}_p(\bar{x}, y, z) = \text{cantidad}_p(\bar{x}, y, z) > 0$

- Recordemos la definición de la minimización acotada.

$$\min_{t \leq y} p(\bar{x}, t) = \sum_{u=0}^y \prod_{t=0}^u \alpha(p(\bar{x}, t))$$

Usando la minimización acotada definir mínimo_p es trivial.

$$\text{mínimo}_p(\bar{x}, y, z) = \min_{t \leq z} (p(\bar{x}, t) \cdot (t \geq y)) = \min_{y \leq t \leq z} p(\bar{x}, t)$$

- Una opción es reutilizar la misma idea que la minimización acotada, pero buscando el “mínimo” partiendo desde el t más grande yendo hacia la cota inferior. En este contexto, el mínimo es en realidad “el más cercano a la cota superior”, o sea, el máximo, que es lo queremos.

$$\text{máximo}_p(\bar{x}, y, z) = z - \sum_{u=y}^z \prod_{t=0}^u \alpha(p(\bar{x}, z - t))$$

Otra opción es definir el máximo utilizando el mínimo, agregando una condición adicional al predicado: que no exista ningún otro $t' > t$ para el cual también valga el predicado p . En esencia, buscamos primero el mínimo real, y si existe un t más grande para el cual también vale el predicado, tenemos que seguir buscando el próximo mínimo a partir del encontrado, y así hasta eventualmente llegar al máximo.

$$\text{máximo}_p(\bar{x}, y, z) = \text{mínimo}_q(\bar{x}, y, z) \text{ donde } q(\bar{x}, t) = p(\bar{x}, t) \cdot \neg(\exists t')_{t < t' \leq z} p(\bar{x}, t')$$

- Sea $m = \text{mínimo}_p(\bar{x}, y, z)$, $M = \text{máximo}_p(\bar{x}, y, z)$
 $\text{único}_p(\bar{x}, y, z) = (m = M) \cdot m + (m \neq M) \cdot (z + 1)$

Ejercicio 8

- $\text{cociente}(x, y) = \min_{t \leq x} ((t \cdot y + r = x) \wedge (0 \leq r < y))$
- $\text{resto}(x, y) = x - \text{cociente}(x, y) \cdot y$
- $\text{divide}(x, y) = \text{resto}(x, y) = 0$
- $\text{primo}(x) = \neg(\exists t)_{1 < t < x} \text{divide}(x, t)$
- $\text{raíz}(x, y) = \min_{t \leq y} (t + 1)^x > y$
- $\text{nprimo}(0) = 2$

$$\text{nprimo}(n + 1) = \min_{t \leq c} (\text{primo}(t) \wedge t > \text{nprimo}(n))$$

Donde $c = \text{nprimo}(n)! + 1$ funciona como cota porque $\text{nprimo}(n + 1) \leq \text{nprimo}(n)! + 1$ (justificado en la teórica).

Ejercicio 9

Pendiente

Ejercicio 10

Pendiente

Ejercicio 11

Pendiente

Ejercicio 12

Pendiente

Ejercicio 13

Pendiente

Ejercicio 14

Pendiente

Ejercicio 15

Pendiente