Teorema

La clase de funciones computables es una clase PRC.

Demo

Una clase es PRC si contiene las funciones iniciales y está cerrada por composición y recursión primitiva.

Veamos que las iniciales son computables:

- $n(x) = 0$ la computa el programa vacío
- $s(x) = x+1$ $\quad Y \leftarrow X + 1$
- $u_i^n(x_1, \cdots, x_n)$ $\quad Y \leftarrow X_i$

Clausura por composición

Si $h: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ se obtiene por composición a partir de $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ y $g_1, \cdots, g_k : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ (parcial) computables entonces h es (parcial) computable. Exhibimos el programa.

$Z_1 \leftarrow g_1(X_1, \cdots, X_n)$
$\vdots$
$Z_k \leftarrow g_k(X_1, \cdots, X_n)$
$Y \leftarrow f(Z_1, \cdots, Z_k)$

Luego $h(x_1, \cdots, x_n) = f(g_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, g_k(x_1, \cdots, x_n))$ es (parcial) computable.

Clausura por recursión primitiva

Si $h: \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ se obtiene por recursión primitiva a partir de $f: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ y $g: \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ computables entonces h es computable.

$$
\begin{array}{ll}
 & Y \leftarrow f(X_1, \dots, X_n) \\
 & T \leftarrow 0 \\
[A] & \text{IF } T = X_{n+1} \text{ GOTO } E \\
 & Y \leftarrow g(Y, X_1, \dots, X_n, T) \\
 & T \leftarrow T+1 \\
 & \text{GOTO } A
\end{array}
$$

Luego $h(x_1, \dots, x_n, 0) = f(x_1, \dots, x_n)$

$h(x_1, \dots, x_n, t+1) = g(h(x_1, \dots, x_n, t), x_1, \dots, x_n, t)$

es computable. $\square$

Corolario:

Como las funciones p.r. están en toda clase PRC, en particular están en la clase PRC de funciones computables. Entonces toda función p.r. es computable.