Lema de Lindenbaum

Si $\Gamma \subseteq FORM$ es consistente entonces existe Γ' maximal consistente tal que $\Gamma \subseteq \Gamma'$.

Enumeramos todas las fórmulas $\varphi_i \in FORM$: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \cdots$
Podemos hacer esto porque las fórmulas se construyen a partir de finitos símbolos y reglas de producción. De forma similar a la codificación de programas de S, podríamos tener una función biyectiva f que codifica las fórmulas.

Definimos:

- $\Gamma_0 = \Gamma$

- $\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_{n+1}\} & \text{si } \Gamma_n \cup \{\varphi_{n+1}\} \text{ es consistente} \\ \Gamma_n & \text{si no} \end{cases}$

- $\Gamma' = \bigcup_{i \geq 0} \Gamma_i$

La idea es que iterativamente miramos cada fórmula $\varphi \in FORM$, y mientras la construcción actual se mantenga consistente al agrega φ, la agregamos. Como partimos desde Γ que es consistente por hipótesis, en la unión infinita obtenemos Γ' que es consistente y además maximal porque le agregamos todo lo que podíamos.

Demo

Tenemos que probar varias cosas.

1. $\Gamma \subseteq \Gamma'$

$$\Gamma' \overset{def}{=} \bigcup_{i \geq 0} \Gamma_i = \Gamma_0 \cup \bigcup_{i \geq 1} \Gamma_i \overset{\Gamma_0 = \Gamma}{=} \Gamma \cup \bigcup_{i \geq 1} \Gamma_i \Rightarrow \Gamma \subseteq \Gamma'$$

2. Γ_i es consistente

Lo probamos por inducción en i.

Caso base

QVQ: Γ_0 es consistente

$\Gamma_0 = \Gamma$ por def. Γ es consistente por hipótesis, entonces Γ_0 es consistente.

Caso inductivo

QVQ: Γ_{i+1} es consistente

HI: Γ_i es consistente.

Sale directo de la def. de Γ_{i+1}.

- Si $\Gamma_i \cup \{\varphi_{i+1}\}$ es consistente entonces $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{\varphi_{i+1}\}$ es consistente.
- Caso contrario, si agregar φ_{i+1} a Γ_i lo vuelve inconsistente, entonces $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i$ es consistente pues por HI Γ_i es consistente (y por lo tanto la inconsistencia provino de agregar φ_{i+1}).

Entonces Γ_i es consistente para todo $i \in \mathbb{N}$.

3. Γ' es consistente

Sabemos que cada Γ_i es consistente individualmente, pero a priori no podemos afirmar que la unión infinita se mantenga consistente.

Supongamos Γ' inconsistente. Entonces existe $\varphi \in FORM$ tal que $\Gamma' \vdash \varphi$ y $\Gamma' \vdash \neg\varphi$.

En ambas derivaciones se usa una cantidad finita de axiomas propios de Γ' (pues las derivaciones tienen finitos pasos). Sean $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_k\} \subseteq \Gamma'$ estos axiomas.

Como $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_k\}$ es finito y todos los Γ_i también, existe un j lo suficientemente grande tal que $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_k\} \subseteq \Gamma_j$.

Luego $\Gamma_j \vdash \varphi$ y $\Gamma_j \vdash \neg\varphi$. Entonces Γ_j es inconsistente. Absurdo pues ya probamos que Γ_i es consistente para todo i. Entonces Γ' es consistente.

4. Γ' es maximal

Para ver que es maximal intentamos agregar una fórmula que no está y veamos que se vuelve inconsistente.

Sea $\varphi \in FORM$ tal que $\varphi \notin \Gamma'$. Por la enumeración que definimos existe un n tal que $\varphi = \varphi_{n+1}$.

Por def. si $\varphi_{n+1} \notin \Gamma'$ es porque $\Gamma_n \cup \{\varphi_{n+1}\}$ es inconsistente. Como $\Gamma_n \subseteq \Gamma'$, resulta que $\Gamma' \cup \{\varphi_{n+1}\}$ es inconsistente.

Entonces Γ' es maximal.