Teorema de Cantor

El conjunto de funciones totales $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ no es numerable.

Demo

Supongamos que podemos numerar todas las funciones totales de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$: $f_0, f_1, f_2, \cdots$

Ahora las listamos a todas y además las evaluamos en todos los puntos:

$$
\begin{array}{llllll}
f_0(0) & f_0(1) & f_0(2) & \cdots & & \\
f_1(0) & f_1(1) & f_1(2) & & & \\
f_2(0) & f_2(1) & f_2(2) & \cdots & & \\
\vdots & & & \ddots & & \\
f_K(0) & f_K(1) & f_K(2) & \cdots & f_K(K) & \cdots \\
\vdots & & & & & \ddots
\end{array}
$$

Sea $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ total. $g(x) = f_x(x) + 1$

Es claro que g es total pues f_x es total para cualquier x.

Como g es total, aparece en la numeración de las funciones totales. Sea e tal que $f_e = g$.

$$f_e(x) = g(x) = f_x(x) + 1$$

e está fijo pero x es variable. Tomando $x = e$:

$$f_e(e) = f_e(e) + 1 \quad \text{Absurdo}$$

Entonces las funciones totales $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ no son numerables.
Es decir, hay más funciones totales que los números naturales.

Como cada $n \in \mathbb{N}$ se corresponde con un programa, sabemos que hay tantas funciones computables como números naturales.

Entonces hay funciones $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totales que no son computables.