Lógica y Computabilidad

2do cuatrimestre 2020 - **A DISTANCIA**

Departamento de Computación - FCEyN - UBA

Lógica Proposicional - clase 2

Teorema de la deducción, lema de Lindenbaum, completitud de SP, compacidad

Plan

- vimos que SP es correcto: $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$
  Esto prueba
  - Γ satisfacible $\Rightarrow$ Γ consistente
- ahora veremos que SP es completo: $\Gamma \vdash \varphi \Leftarrow \Gamma \models \varphi$
  Para esto:
  - Lema de Lindenbaum
  - Γ satisfacible $\Leftarrow$ Γ consistente
- consecuencia: Teorema de Compacidad

El Teorema de la Deducción

Teorema

Si $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ *entonces* $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$

Demostración.

Por inducción en la longitud de la demostración de $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.
Supongamos que

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$$

es una derivación de ψ $(= \varphi_n)$ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$.

- caso base $(n = 1)$
- paso inductivo
  - HI: para toda derivación de ψ' a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$ de longitud $< n$ tenemos $\Gamma \vdash \varphi \to \psi'$
  - probamos que para una demostración de longitud n de $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ tenemos $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

$\square$

Demostración del Teorema de la Deducción (caso base)

Supongamos

- $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ es una derivación de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$
- $n = 1$ (i.e. la derivación es una sola fórmula $\varphi_1 = \psi$)

Queremos ver que $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. Hay 3 posibilidades:

1. ψ es un axioma de SP

$$\left.\begin{array}{lll} 1. & \psi & \psi \text{ es axioma} \\ 2. & \psi \to (\varphi \to \psi) & \text{SP1} \\ 3. & \varphi \to \psi & \text{MP 1,2} \end{array}\right\} \vdash \varphi \to \psi$$

2. $\psi \in \Gamma$

$$\left.\begin{array}{lll} 1. & \psi & \psi \in \Gamma \\ 2. & \psi \to (\varphi \to \psi) & \text{SP1} \\ 3. & \varphi \to \psi & \text{MP 1,2} \end{array}\right\} \Gamma \vdash \varphi \to \psi$$

3. $\psi = \varphi$
   vimos que $\vdash p \to p$.
   la misma demostración sirve para probar $\vdash \varphi \to \varphi$

Demostración del Teorema de la Deducción (paso inductivo)

Supongamos

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$$

es una derivación de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$

HI: para toda derivación de ψ' a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$ de longitud $< n$ tenemos $\Gamma \vdash \varphi \to \psi'$

Queremos ver que $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. Hay 4 posibilidades:

1. ψ es un axioma de SP: igual que en en caso base
2. $\psi \in \Gamma$: igual que en en caso base
3. $\psi = \varphi$: igual que en en caso base
4. ψ se infiere por MP de φ_i y φ_j $(i, j < n)$
   - sin pérdida de generalidad, $\varphi_j = \varphi_i \to \psi$
   - $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi_i$ y la derivación tiene longitud $< n$
   - por HI $\Gamma \vdash \varphi \to \varphi_i$
   - $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi_j$ y la derivación tiene longitud $< n$
   - por HI $\Gamma \vdash \varphi \to \varphi_j$, i.e. $\Gamma \vdash \varphi \to (\varphi_i \to \psi)$
   - sabemos (SP2) $\vdash (\varphi \to (\varphi_i \to \psi)) \to ((\varphi \to \varphi_i) \to (\varphi \to \psi))$
   - por MP 2 veces $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$

Conjuntos consistentes

Proposición

1. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *es inconsistente sii* $\Gamma \vdash \varphi$
2. $\Gamma \cup \{\varphi\}$ *es inconsistente sii* $\Gamma \vdash \neg\varphi$

Demostración de 1.

$$(\Leftarrow) \quad \left.\begin{array}{lll} \Gamma \vdash \varphi & \Rightarrow & \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi \\ \text{trivialmente} & & \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi \end{array}\right\} \ \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ es inconsistente}$$

$(\Rightarrow)$ existe ψ tal que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \psi$ y $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\psi$
por el Teorema de la Deducción,

$$\Gamma \vdash \neg\varphi \to \psi \quad \text{y} \quad \Gamma \vdash \neg\varphi \to \neg\psi$$

se puede ver que (ejercicio)
$\vdash (\neg\varphi \to \psi) \to ((\neg\varphi \to \neg\psi) \to \varphi)$
por MP 2 veces tenemos $\Gamma \vdash \varphi$

Satisfacible $\Rightarrow$ consistente

Teorema

Si $\Gamma \subseteq \text{FORM}$ *es satisfacible entonces* Γ *es consistente.*

Demostración.

- supongamos v tal que $v \models \Gamma$ pero Γ es inconsistente
- existe ψ tal que $\quad \Gamma \vdash \psi \quad$ y $\quad \Gamma \vdash \neg\psi$
- por correctitud de SP, $\quad \Gamma \models \psi \quad$ y $\quad \Gamma \models \neg\psi$
- $v \models \psi$ y $v \models \neg\psi$

$\square$

Lema de Lindenbaum

$\Gamma \subseteq$ FORM es maximal consistente (m.c.) en SP si

- Γ es consistente y
- para toda fórmula φ
  - $\varphi \in \Gamma$ o
  - existe ψ tal que $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ y $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi$

Lema

Si $\Gamma \subseteq$ FORM *es consistente, existe* Γ' *m.c. tal que* $\Gamma \subseteq \Gamma'$.

Demostración del Lema de Lindenbaum (obtener $\Gamma' \supseteq \Gamma$ m.c.)

Enumeramos todas las fórmulas: $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ Definimos

- $\Gamma_0 = \Gamma$
- $\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_{n+1}\} & \text{si } \Gamma_n \cup \{\varphi_{n+1}\} \text{ es consistente} \\ \Gamma_n & \text{si no} \end{cases}$
- $\Gamma' = \bigcup_{i \geq 0} \Gamma_i$

Tenemos

1. $\Gamma' \supseteq \Gamma$
2. cada Γ_i es consistente
3. Γ' es consistente
    - si no, existe ψ tal que $\quad \Gamma' \vdash \psi \quad$ y $\quad \Gamma' \vdash \neg\psi$
    - en ambas derivaciones aparecen únicamente $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\} \subseteq \Gamma'$.
    - sea j suficientemente grande tal que $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\} \subseteq \Gamma_j$
    - entonces $\quad \Gamma_j \vdash \psi \quad$ y $\quad \Gamma_j \vdash \neg\psi$; $\quad$ contradice 2
4. Γ' es maximal
    - supongamos $\varphi \notin \Gamma'$. Debe existir n tal que $\varphi_{n+1} = \varphi$
    - $\varphi_{n+1} \notin \Gamma_{n+1}$, entonces $\Gamma_n \cup \{\varphi_{n+1}\}$ es inconsistente
    - luego $\Gamma' \cup \{\varphi_{n+1}\}$ es inconsistente (pues $\Gamma' \supseteq \Gamma_n$)

Conjuntos maximales consistentes

Proposición

Si Γ' *es m.c. entonces para toda* $\varphi \in \mathrm{FORM}$, *o bien* $\varphi \in \Gamma'$ *o bien* $\neg\varphi \in \Gamma'$.

Demostración.

- no puede ser que φ y $\neg\varphi$ estén en Γ' porque sería inconsistente
- supongamos que ninguna está. Como Γ' es maximal y por Proposición de la hoja 6,

$$\left.\begin{array}{lcr} \Gamma' \cup \{\varphi\} \text{ es inconsistente} & \Rightarrow & \Gamma' \vdash \neg\varphi \\ \Gamma' \cup \{\neg\varphi\} \text{ es inconsistente} & \Rightarrow & \Gamma' \vdash \varphi \end{array}\right\} \Gamma' \text{ inconsistente}$$

□

Proposición

Sea Γ' *m.c.* $\Gamma' \vdash \varphi$ *sii* $\varphi \in \Gamma'$.

Consistente $\Rightarrow$ satisfacible

Teorema

Si $\Gamma \subseteq \text{FORM}$ *es consistente entonces* Γ *es satisfacible.*

Demostración.

Dado Γ consistente, construimos $\Gamma' \supseteq \Gamma$ m.c. (Lindenbaum)

Definimos la interpretación v tal que

$$v(p) = 1 \text{ sii } \; p \in \Gamma'$$

Veamos $v \models \varphi$ sii $\varphi \in \Gamma'$ por inducción en la complejidad de φ (i.e. cantidad de $\neg$ o $\rightarrow$ que aparecen en φ)

- caso base: $\varphi = p$. Trivial por definición de v.
- paso inductivo:
  HI: $v \models \varphi$ sii $\varphi \in \Gamma'$ para toda φ de complejidad $< m$
  Sea φ de complejidad m. Hay 2 casos:
  1. $\varphi = \neg\psi$
  2. $\varphi = \psi \rightarrow \rho$

Demostración de consistente $\Rightarrow$ satisfacible (caso $\varphi = \neg\psi$)

HI: $v \models \varphi$ sii $\varphi \in \Gamma'$ para toda φ de complejidad $< m$

$\varphi = \neg\psi$ tiene complejidad m.

Quiero probar que $v \models \varphi$ sii $\varphi \in \Gamma'$

($\Rightarrow$) $v \models \varphi \Rightarrow v \not\models \psi \overset{\text{HI}}{\Rightarrow} \psi \notin \Gamma' \Rightarrow \neg\psi \in \Gamma' \Rightarrow \varphi \in \Gamma'$

($\Leftarrow$) $\varphi \in \Gamma' \Rightarrow \psi \notin \Gamma' \overset{\text{HI}}{\Rightarrow} v \not\models \psi \Rightarrow v \models \neg\psi \Rightarrow v \models \varphi$

Demostración de consistente $\Rightarrow$ satisfacible (caso $\varphi = \psi \to \rho$)

HI: $v \models \varphi$ sii $\varphi \in \Gamma'$ para toda φ de complejidad $< m$

$\varphi = \psi \to \rho$ tiene complejidad m.

Quiero probar que $v \models \varphi$ sii $\varphi \in \Gamma'$

($\Rightarrow$) $v \models \varphi \Rightarrow v \models (\psi \to \rho) \Rightarrow v \not\models \psi$ o $v \models \rho$

- $v \not\models \psi \overset{\text{HI}}{\Rightarrow} \psi \notin \Gamma' \Rightarrow \neg\psi \in \Gamma' \Rightarrow \Gamma' \vdash \neg\psi$
  sabemos $\vdash \neg\psi \to (\psi \to \rho)$ (ejercicio)
  por MP $\Gamma' \vdash \psi \to \rho$
  entonces $\psi \to \rho \in \Gamma'$
- $v \models \rho \overset{\text{HI}}{\Rightarrow} \rho \in \Gamma' \Rightarrow \Gamma' \vdash \rho$
  sabemos por SP1 que $\vdash \rho \to (\psi \to \rho)$
  por MP $\Gamma' \vdash \psi \to \rho$
  entonces $\psi \to \rho \in \Gamma'$

($\Leftarrow$) $v \not\models \varphi \Rightarrow v \models \psi$ y $v \not\models \rho \overset{\text{HI}}{\Rightarrow} \psi \in \Gamma'$ y $\rho \notin \Gamma'$

$\psi \in \Gamma'$ y $\neg\rho \in \Gamma' \quad \Rightarrow \quad \Gamma' \vdash \psi$ y $\Gamma' \vdash \neg\rho$

sabemos $\vdash \psi \to (\neg\rho \to \neg(\psi \to \rho))$ (ejercicio)

aplicando MP 2 veces, $\Gamma' \vdash \neg(\psi \to \rho)$

por lo tanto $\neg(\psi \to \rho) \in \Gamma'$

entonces $\psi \to \rho \notin \Gamma'$

Teorema de Completitud (fuerte)

Probamos que

- Γ consistente sii Γ satisfacible (hojas 7 y 11)
- $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente sii $\Gamma \vdash \varphi$ (hoja 6)

Teorema

Si $\Gamma \models \varphi$ entonces $\Gamma \vdash \varphi$.

Demostración.

- supongamos $\Gamma \models \varphi$
- $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es insatisfacible
- $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente
- $\Gamma \vdash \varphi$

$\square$

Consecuencias del Teorema de Completitud

Corolario

$\Gamma \vdash \varphi$ *sii* $\Gamma \models \varphi$

Corolario

$\vdash \varphi$ *sii* $\models \varphi$ *(i.e.* φ *es un teorema de SP sii es tautología)*

Teorema (Compacidad)

Sea $\Gamma \subseteq \mathrm{FORM}$*. Si todo subconjunto finito de* Γ *es satisfacible, entonces* Γ *es satisfacible.*

Demostración.

- supongamos Γ insatisfacible
- Γ es inconsistente
- existe ψ tal que $\quad \Gamma \vdash \psi \quad$ y $\quad \Gamma \vdash \neg\psi$
- se usan solo finitos axiomas de Γ
- existe $\Delta \subseteq \Gamma$ finito tal que $\Delta \vdash \psi$ y $\Delta \vdash \neg\psi$
- Δ es inconsistente
- Δ es insatisfacible $\square$

Resumen

lenguaje P

semántica | método deductivo

tautología (verdadera en toda interpretación) — teorema (tiene demostración en SP)

consecuencia semántica $\models$ — consecuencia sintáctica $\vdash$

conjunto satisfacible (existe modelo para todos sus elementos) — conjunto consistente (no permite probar φ y $\neg\varphi$)

Notas sobre computabilidad

Habíamos visto que el conjunto de teoremas de SP es c.e.

Vemos que, de hecho, es computable:

método de decisión = tablas de verdad

$$\vdash \varphi \quad \textit{sii} \quad \models \varphi$$

$\vdash \varphi$ sii en la tabla de verdad de φ solo hay 1s en la última columna