## Teorema

Si $\Gamma$ tiene modelos arbitrariamente grandes entonces $\Gamma$ tiene modelo infinito.

Demo

Definimos en el lenguaje solo con igualdad las siguientes fórmulas (son infinitas):

$$\varphi_2 = (\exists x)(\exists y)(x \neq y)$$
$$\varphi_3 = (\exists x)(\exists y)(\exists z)(x \neq y \wedge y \neq z \wedge z \neq x)$$
$$\vdots$$
$$\varphi_i = \text{"hay al menos } i \text{ elementos distintos"} \quad \forall i \geq 2$$

Sea $\Gamma' \subset \Gamma \cup \{\varphi_i : i \geq 2\}$ un subconjunto finito.
Sea $n = \max\{i : \varphi_i \in \Gamma'\} \cup \{0\}$. Si alguna $\varphi_i$ está en $\Gamma'$, $\varphi_n$ es la fórmula que expresa que hay al menos $n$ elementos, y cualquier otra $\varphi_i \in \Gamma'$ expresa que hay al menos $i$ elementos con $i \leq n$. Es decir $n$ es la cantidad mínima de elementos que necesitamos en el modelo para satisfacer $\Gamma'$. Luego, como $\Gamma$ admite modelos arbitrariamente grandes, en particular tiene modelo con al menos $n$ elementos. Entonces $\Gamma'$ es satisfacible.

Por el teorema de Compacidad resulta que $\Gamma \cup \{\varphi_i : i \geqslant 2\}$ es satisfacible, existe un modelo $\mathcal{A} \models \Gamma \cup \{\varphi_i : i \geqslant 2\}$.

Entonces $\mathcal{A}$ tiene que ser infinito. Como $\Gamma \subset \Gamma \cup \{\varphi_i : i \geqslant 2\}$ también vale que $\mathcal{A} \models \Gamma$.

Conclusión: $\mathcal{A}$ es infinito sii $\mathcal{A} \models \{\varphi_i : i \geqslant 2\}$

Ejercicio

Existe un conjunto $\Gamma$ tal que $A \models \Gamma$ sii $A$ es infinito?

Sea $\Gamma = \{ \varphi_i : i \geq 2 \}$ de la demo anterior. $\Gamma$ tiene modelos arbitrariamente grandes por lo tanto tiene modelo infinito. Y cualquier modelo infinito satisface $\Gamma$.
(es en esencia la misma demo)

Ejercicio

Existe un conjunto $\Gamma$ tal que $A \models \Gamma$ sii $A$ es finito?

Supongamos que existe tal conjunto $\Gamma$. Notemos entonces que cualquier $A$ tal que $|A| < \infty$ satisface a $\Gamma$. Luego $\Gamma$ tiene modelos arbitrariamente grandes.

Por el teorema anterior, $\Gamma$ tiene un modelo $B$ infinito tal que $B \models \Gamma$. Absurdo. No se puede expresar que el modelo es finito.

Ejercicio

El conjunto $\Gamma$ que expresa que el modelo es infinito necesariamente tiene que ser infinito.

Supongamos que $\Gamma$ es finito y $A \vDash \Gamma$ sii $A$ es infinito. Dado que $\Gamma$ es finito, podemos conjugar todas las fórmulas de $\Gamma$ en una única fórmula $\varphi$.

$$\varphi = \bigwedge_{\psi \in \Gamma} \psi$$

Si $A \vDash \varphi$ sii $A$ es infinito entonces $A \vDash \neg\varphi$ sii $A$ es finito.

Sea $\Gamma' = \{\neg\varphi\}$. Igual que el ejercicio anterior, como $\Gamma'$ tiene modelos arbitrariamente grandes, por el teorema $\Gamma'$ tiene modelo infinito. Existe $B$ tal que

$$B \vDash \Gamma' = \{\neg\varphi\} \quad \text{sii} \quad B \text{ es infinito}$$

Absurdo porque $\neg\varphi$ afirmaba que el modelo es finito.
No se puede expresar que el modelo es infinito con un conjunto finito de fórmulas. Necesariamente necesitamos un conjunto infinito.