Sumatorias y Productorias

Teorema: Sea C una clase PRC. Si $f: \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ está en C entonces también están las funciones:

$$g(y, x_1, \cdots, x_n) = \sum_{t=0}^{y} f(t, x_1, \cdots, x_n)$$

$$h(y, x_1, \cdots, x_n) = \prod_{t=0}^{y} f(t, x_1, \cdots, x_n)$$

Demo: Construir g con recursión primitiva.

$$g(0, x_1, \cdots, x_n) = f(0, x_1, \cdots, x_n)$$
$$g(t+1, x_1, \cdots, x_n) = g(t, x_1, \cdots, x_n) + f(t+1, x_1, \cdots, x_n)$$

cambiar por $\cdot$ para definir h

Teorema: Sea C una clase PRC. Si $f: \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ está en C entonces también están las funciones:

$$g(y, x_1, \cdots, x_n) = \sum_{t=1}^{y} f(t, x_1, \cdots, x_n)$$

$$h(y, x_1, \cdots, x_n) = \prod_{t=1}^{y} f(t, x_1, \cdots, x_n)$$

Demo: Construir g con recursión primitiva.

$g(0, x_1, \cdots, x_n) = 0 \to$ cambiar por 1 para definir h

$g(t+1, x_1, \cdots, x_n) = g(t, x_1, \cdots, x_n) + f(t+1, x_1, \cdots, x_n)$

$\downarrow$

cambiar por $\cdot$ para definir h

Cuantificadores acotados

Teorema: Sea $p: \mathbb{N}^{n+1} \to \{0,1\}$ un predicado perteneciente a una clase PRC $\mathcal{C}$. Los siguientes predicados también están en $\mathcal{C}$:

$$(\forall t)_{\leq y} \; p(t, x_1, \cdots, x_n)$$
$$(\exists t)_{\leq y} \; p(t, x_1, \cdots, x_n)$$

Demo:

$$(\forall t)_{\leq y} \; p(t, x_1, \cdots, x_n) \quad \text{sii} \quad \prod_{t=0}^{y} p(t, x_1, \cdots, x_n) = 1$$

$$(\exists t)_{\leq y} \; p(t, x_1, \cdots, x_n) \quad \text{sii} \quad \sum_{t=0}^{y} p(t, x_1, \cdots, x_n) \neq 0$$

- La Σ y Π están en $\mathcal{C}$
- La comparación $=$ y $\neq$ están en $\mathcal{C}$

Teorema: Sea $p : \mathbb{N}^{n+1} \to \{0,1\}$ un predicado perteneciente a una clase PRC $\mathcal{C}$. Los siguientes predicados también están en $\mathcal{C}$:

$$(\forall t)_{<y} \; p(t, x_1, \dots, x_n)$$
$$(\exists t)_{<y} \; p(t, x_1, \dots, x_n)$$

Demo:

$$(\forall t)_{<y} \; p(t, x_1, \dots, x_n) \quad \text{sii} \quad (\forall t)_{\leq y} \left(t = y \vee p(t, x_1, \dots, x_n)\right)$$

$$(\exists t)_{<y} \; p(t, x_1, \dots, x_n) \quad \text{sii} \quad (\exists t)_{\leq y} \left(t \neq y \wedge p(t, x_1, \dots, x_n)\right)$$

- $(\forall t)_{\leq y}$, $(\exists t)_{\leq y}$ están en $\mathcal{C}$.
- $=, \neq, \wedge, \vee$ están en $\mathcal{C}$.

Más funciones p.r.

$y|x$ sii y divide a x $\qquad y|x = (\exists t)_{\leq x}\ y \cdot t = x$

primo(x) sii x es primo $\qquad$ primo$(x) = (\forall t)_{<x} (x \leq 1 \vee \neg(t|x))$

otra forma:

primo$(x) = \neg(\exists t)_{<x} (t > 1 \wedge t|x)$

Minimización acotada

Sea $p: \mathbb{N}^{n+1} \to \{0,1\}$ un predicado de una clase PRC $\mathcal{C}$.

$$g(y, x_1, \cdots, x_n) = \sum_{u=0}^{y} \prod_{t=0}^{u} \alpha(p(t, x_1, \cdots, x_n))$$

$$\downarrow$$

Retorna el mínimo $t \leq y$ tal que $p(t, x_1, \cdots, x_n)$ es verdadero.
Si no existe retorna $y+1$.

Notamos:

$$\min_{t \leq y} p(t, x_1, \cdots, x_n) = \begin{cases} \text{mínimo } t \leq y \text{ tal que } p(t, x_1, \cdots, x_n) \text{ es verdadero} & \text{si existe } t \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Teorema: Sea $p: \mathbb{N}^{n+1} \to \{0,1\}$ un predicado de una clase PRC $\mathcal{C}$.
La función:

$$\min_{t \leq y} p(t, x_1, \cdots, x_n)$$

también está en $\mathcal{C}$.

Más Funciones p.r.

$x \text{ div } y$: $\min\limits_{t \leq x} ((t+1) \cdot y > x)$

$x \bmod y$: $x \dot{-} (y \cdot (x \text{ div } y))$

p_n es el n-ésimo primo $(n > 0)$:

$$p_0 = 0$$

$$p_{n+1} = \min_{t \leq K(n)} (\text{primo}(t) \wedge t > p_n)$$

$K(n) = p_n! + 1$ $\quad\quad (p_{n+1} \leq p_n! + 1)$

Codificación de pares

$\langle x, y \rangle = 2^x (2 \cdot y + 1) \dot{-} 1$ Obs: $2^x(2\cdot y+1) \neq 0$

Hay una única solución $\langle x, y \rangle$ a la ecuación $\langle x, y \rangle = z$

Demo:

- x es el máximo número tal que $2^x | (z+1)$
- $y = ((z+1)/2^x - 1)/2$

Observadores para el par $z = \langle x, y \rangle$

$l(z) = x$

$r(z) = y$

Los observadores son p.r.

Demo: como $x, y \leq z+1$

- $l(z) = \min\limits_{x \leq z} \left((\exists y)_{\leq z} \; z = \langle x, y \rangle \right)$

- $r(z) = \min\limits_{y \leq z} \left((\exists x)_{\leq z} \; z = \langle x, y \rangle \right)$

Codificación de secuencias

El número de Gödel de la secuencia: $a_1, \cdots, a_n$ es el número:

$$[a_1, \cdots, a_n] = \prod_{i=1}^{n} p_i^{a_i}$$ donde p_i es el i-ésimo primo $(i \geq 1)$

Teorema: Si $[a_1, \cdots, a_n] = [b_1, \cdots, b_n]$ entonces $a_i = b_i \quad \forall i \in \{1, \cdots, n\}$

Demo: Por la factorización única en primos.

Observadores para la secuencia $x = [a_i, \cdots, a_n]$

- $x[i] = a_i$
- $|x| =$ longitud de x

Demo de que los observadores son p.r.

- $$x[i] = \min_{t \leq x} \left(\neg\, p_i^{t+1} \mid x \right)$$

- $$|x| = \min_{i \leq x} \Big(x[i] \neq 0 \wedge (\forall j)_{\leq x} \underbrace{(j \leq i \vee x[j] = 0)}_{j > i \Rightarrow x[j] = 0} \Big)$$