Teorema de la Deducción

Si $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ entonces $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

Demo

Inducción en el largo de la derivación de $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.

Caso base: derivación trivial de 1 paso

Como la derivación tiene un único paso, es la derivación donde solo aparece ψ. Hay 3 posibilidades:

- ψ es un axioma de SP.

1.	ψ	axioma de SP
2.	$\psi \to \varphi \to \psi$	SP1
3.	$\varphi \to \psi$	MP 1 y 2

$\varphi \to \psi$ resulta un teorema de SP, y en particular vale $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

- $\psi \in \Gamma$. ψ es un axioma propio de Γ.

1.	ψ	axioma de Γ
2.	$\psi \to \varphi \to \psi$	SP1
3.	$\varphi \to \psi$	MP 1 y 2

En este caso $\varphi \to \psi$ resulta un teorema de la teoría Γ, pero eso es justo lo que queremos probar: $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

- $\psi = \varphi$. $\varphi \to \varphi$ es un teorema de SP, luego vale $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

Caso inductivo

Supongamos que $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ con una derivación de $n+1$ pasos: $\varphi_1, \cdots, \varphi_{n+1}$ tal que $\varphi_{n+1} = \psi$.

HI: Para todo $i \leqslant n$: $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi_i$ entonces $\Gamma \vdash \varphi \to \varphi_i$.

QVQ: $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ entonces $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$

Los casos:

- ψ axioma de SP
- $\psi \in \Gamma$
- $\psi = \varphi$

Son iguales al caso base.

Veamos el caso interesante: ψ es consecuencia inmediata de φ_i y φ_j con $i, j \leqslant n$. Es decir φ_i y φ_j aparecen antes en la derivación y entonces vale la HI para ellos.

Sin perdida de generalidad supongamos $i < j$ y que: $\varphi_j = \varphi_i \to \psi$.

$$\text{HI: } \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi_i \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \to \varphi_i$$

$$\uparrow$$

$$\varphi_1, \cdots, \varphi_i, \cdots, \varphi_j, \cdots, \varphi_{n+1} = \psi$$

$$\downarrow$$

$$\text{HI: } \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi_j \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \to \varphi_j$$

Entonces tenemos:

$\Gamma \vdash \varphi \to \varphi_i$

$\Gamma \vdash \varphi \to \varphi_j$

Como $\varphi_j = \varphi_i \to \psi$ entonces $\Gamma \vdash \varphi \to (\varphi_i \to \psi)$

Realizamos la siguiente derivación:

1.	$\varphi \to (\varphi_i \to \psi)$	$\Gamma \vdash \varphi \to (\varphi_i \to \psi)$
2.	$(\varphi \to (\varphi_i \to \psi)) \to ((\varphi \to \varphi_i) \to (\varphi \to \psi))$	SP2
3.	$(\varphi \to \varphi_i) \to (\varphi \to \psi)$	MP 1 y 2
4.	$\varphi \to \varphi_i$	$\Gamma \vdash \varphi \to \varphi_i$ por HI
5.	$\varphi \to \psi$	MP 3 y 4

Entonces $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.