3 niveles de verdad

1. φ es satisfacible si existe una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{A}$ y una valuación v de $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A} \models \varphi[v]$

2. φ es verdadera o válida en una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A} \models \varphi$) si $\mathcal{A} \models \varphi[v]$ para cualquier valuación v de $\mathcal{A}$.

   Decimos que $\mathcal{A}$ es un modelo de φ.

3. φ es universalmente válida ($\models \varphi$) si $\mathcal{A} \models \varphi[v]$ para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{A}$ y toda valuación v de $\mathcal{A}$.

Propiedades

- Si φ es una sentencia (no tiene variables libres), $\mathcal{A} \models \varphi$ sii $\mathcal{A} \models \varphi[v]$ para cualquier valuación v de $\mathcal{A}$.
- φ es universalmente válida sii $\neg\varphi$ es insatisfacible.
- Se preserva Modus Ponens en todos los niveles de verdad.
- Clausura universal: $\mathcal{A} \models \varphi$ sii $\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi$
  $\models \varphi$ sii $\models (\forall x)\varphi$

Consecuencia semántica

Sea $\Gamma \subseteq FORM(\mathcal{L})$ y $\varphi \in FORM(\mathcal{L})$

φ es consecuencia semántica de Γ ($\Gamma \models \varphi$)
si para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{A}$ y toda valuación v de $\mathcal{A}$:

si $\mathcal{A} \models \Gamma[v]$ entonces $\mathcal{A} \models \varphi[v]$

$\downarrow$

para toda $\psi \in \Gamma$, $\mathcal{A} \models \psi[v]$

Lenguajes con igualdad

Fijemos un lenguaje $\mathcal{L}$ con igualdad y con ningún otro símbolo. Buscamos $\varphi \in FORM(\mathcal{L})$ tal que $\{\mathcal{A} : \mathcal{A} \models \varphi\}$ sea la clase de modelos:

- con exactamente 1 elemento:
  $\varphi = (\exists x)(\forall y)\ x = y$

- con exactamente 2 elementos:
  $\varphi = (\exists x)(\exists y)(x \neq y \wedge (\forall z)(z = x \vee z = y))$

- con al menos 3 elementos:
  $\varphi = (\exists x)(\exists y)(\exists z)(x \neq y \wedge y \neq z \wedge z \neq x)$