Consistencia de SP

$\Gamma \subseteq FORM$ es consistente si no existe $\varphi \in FORM$ tal que:

$$\Gamma \vdash \varphi \quad y \quad \Gamma \vdash \neg\varphi$$

A su vez, un sistema axiomático S es consistente si no existe $\varphi \in FORM$ tal que:

$$\vdash_S \varphi \quad y \quad \vdash_S \neg\varphi$$

Teorema
El sistema axiomático SP es consistente.

Demo
Supongamos que existe φ tal que $\vdash \varphi$, es decir φ es un teorema de SP. QVQ: $\nvdash \neg\varphi$ y por lo tanto SP es consistente.

Sea v una valuación cualquiera. Por correctitud de SP:

$$\vdash \varphi \Rightarrow v \models \varphi$$

Por def. de interpretación, si $v \models \varphi$ entonces no puede al mismo tiempo satisfacer a $\neg\varphi$.

$$v \models \varphi \Rightarrow v \nvDash \neg\varphi$$

Finalmente, por el contrarrecíproco de la correctitud de SP:

$$v \nvDash \neg\varphi \Rightarrow \nvdash \neg\varphi$$