Modelos no estándar

La idea de un modelo no estándar de la aritmética es que podemos construir un modelo y probar que satisface toda la teoría de los números naturales, pero además tiene un elemento inalcanzable, más grande que cualquier otro número. Este elemento por lo tanto no puede ser un número estándar.

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad.
$\mathcal{L} = \{0, s, <, +, \cdot\}$

Sea N una $\mathcal{L}$-estructura.
$N = \langle \mathbb{N}, 0, s, <, +, \cdot \rangle$
Los símbolos tienen su interpretación usual en los números naturales. 0 es el cero, s es la función sucesor, < predicado de menor, + y · la suma y multiplicación.

Definimos $\mathrm{Teo}(N) = \{ \varphi \in \mathrm{FORM}(\mathcal{L}) : \varphi \text{ es sentencia y } N \models \varphi \}$ como toda la teoría de los números naturales. Cualquier propiedad que cumplen los naturales la podemos expresar con alguna fórmula que va a estar en Teo(N).

Ahora viene el truco. Definimos un nuevo lenguaje $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c\}$. $\mathcal{L}'$ simplemente agrega un nuevo símbolo de constante c.

Además definimos el conjunto infinito de fórmulas:

$$\Gamma = \{ 0 < c,\ \underbrace{s(0) < c}_{1<c},\ \underbrace{s(s(0)) < c}_{2<c},\ \underbrace{s(s(s(0))) < c}_{3<c},\ \cdots \}$$

Γ expresa que c es más grande que cualquier número natural estándar, que se construye iterando la función sucesor desde el 0.

Tomemos cualquier subconjunto finito $\Gamma' \subset \Gamma \cup Teo(N)$. Veamos que Γ' es satisfacible. El modelo N satisface las fórmulas de $Teo(N)$ que están en Γ'. Si $\Gamma' \cap \Gamma = \emptyset$ entonces interpretamos c como cualquier número. Caso contrario, como Γ' es finito, solo pueden haber finitas fórmulas de Γ en Γ', y basta con interpretar c como cualquier número lo suficientemente grande tal que satisfaga a la fórmula $s(\cdots s(0)) < c$ "más grande" que está en Γ', y consecuentemente va a satisfacer a cualquier otra.

Entonces por compacidad, como todo subconjunto finito de $\Gamma \cup Teo(N)$ es satisfacible, $\Gamma \cup Teo(N)$ es satisfacible.

Por Löwenheim-Skolem si $\Gamma \cup Teo(N)$ es satisfacible entonces tiene modelo numerable. Es decir podemos saber cuál es el modelo.

Sea $\mathcal{M} = \langle M, 0_{\mathcal{M}}, S_{\mathcal{M}}, <_{\mathcal{M}}, +_{\mathcal{M}}, \cdot_{\mathcal{M}}, c_{\mathcal{M}} \rangle$ tal que $\mathcal{M} \models \Gamma \cup Teo(N)$.

Sea $\mathcal{M}'$ la restricción de $\mathcal{M}$ al lenguaje original $\mathcal{L}$.
Veamos que N y $\mathcal{M}'$ son indistinguibles. Sea $\varphi \in FORM(\mathcal{L})$ sentencia.

$$
\begin{aligned}
N \models \varphi \quad &\Rightarrow \quad \varphi \in Teo(N) && \text{Por def de } Teo(N) \\
&\Rightarrow \quad \varphi \in \Gamma \cup Teo(N) \\
&\Rightarrow \quad \mathcal{M} \models \varphi && \text{Por construcción de } \mathcal{M} \\
&\Rightarrow \quad \mathcal{M}' \models \varphi && \text{Por } \varphi \in FORM(\mathcal{L})\text{: no usa } c
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N \not\models \varphi \quad &\Rightarrow \quad N \models \neg\varphi \\
&\Rightarrow \quad \neg\varphi \in Teo(N) \\
&\Rightarrow \quad \neg\varphi \in \Gamma \cup Teo(N) \\
&\Rightarrow \quad \mathcal{M} \models \neg\varphi \\
&\Rightarrow \quad \mathcal{M}' \models \neg\varphi \\
&\Rightarrow \quad \mathcal{M}' \not\models \varphi
\end{aligned}
$$

Entonces $N \models \varphi$ sii $\mathcal{M}' \models \varphi$, son elementalmente equivalentes.
Toda la teoría de los naturales es válida en $\mathcal{M}'$.
No obstante, no son isomorfos pues en $\mathcal{M}'$ hay un elemento inalcanzable: $c_{\mathcal{M}}$. La lógica de Primer Orden no puede distinguirlos.