Lógica y Computabilidad

2do cuatrimestre 2020 - **A DISTANCIA**

Departamento de Computación - FCEyN - UBA

Lógica Proposicional - clase 1

Lenguaje de lógica proposicional, semántica, tautología, consecuencia semántica, conjunto satisfacible, sistema axiomático SP, consecuencia sintáctica

El lenguaje P

- símbolos $\quad p \quad ' \quad \neg \quad \rightarrow \quad (\quad)$
  - $p, p', p'', p''', \ldots$ son símbolos proposicionales
- fórmulas
  1. todo símbolo proposicional es una fórmula
  2. si φ es una fórmula entonces $\neg\varphi$ es una fórmula
  3. si φ y ψ son fórmulas entonces $(\varphi \rightarrow \psi)$ es una fórmula
  4. nada más es una fórmula
- convenciones
  - escribimos $\quad q$ por $p' \quad r$ por $p'' \quad s$ por p'''...
  - escribimos $(\varphi \vee \psi)$ en lugar de $(\neg\varphi \rightarrow \psi)$
  - escribimos $(\varphi \wedge \psi)$ en lugar de $\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$
  - escribimos φ en lugar de (φ) cuando convenga
- llamamos PROP al conjunto de todos los símbolos proposicionales
- llamamos FORM al conjunto de todas las fórmulas

Semántica

Una interpretación es una función

$$v : \mathrm{PROP} \to \{0, 1\}$$

A v también se la llama valuación.

Definimos la noción de verdad de una fórmula para una valuación.

Si $\varphi \in \mathrm{FORM}$ y v es una valuación, notamos

- $v \models \varphi$ si φ es verdadera para v
- $v \not\models \varphi$ si φ es falsa para v

La definición de $\models$ es recursiva:

1. si $p \in \mathrm{PROP}$, $v \models p$ sii $v(p) = 1$
2. $v \models \neg\psi$ sii $v \not\models \psi$
3. $v \models (\psi \to \rho)$ sii $v \not\models \psi$ o $v \models \rho$

Semántica

Observar que, por la convención,

5. $v \models (\psi \wedge \rho)$ sii $v \models \psi$ y $v \models \rho$
6. $v \models (\psi \vee \rho)$ sii $v \models \psi$ o $v \models \rho$

Por ejemplo, si $v(p) = 1 \quad , \quad v(q) = 0 \quad , \quad v(r) = 1$

- $v \models (p \rightarrow r)$
- $v \models (q \rightarrow r)$
- $v \not\models \neg p$
- $v \not\models (p \wedge q)$

Tautologías y método de decisión

Una fórmula φ es una tautología ($\models \varphi$) si φ es verdadera para toda interpretación, i.e. para toda valuación v, $v \models \varphi$.

Proposición

Sea $\varphi \in \mathrm{FORM}$ y sean v y w son dos valuaciones tal que $v(p) = w(p)$ para toda variable proposicional que aparece en φ. Entonces $v \models \varphi$ sii $w \models \varphi$.

Existe un método de decisión para saber si φ es tautología o no:

- supongamos que φ tiene variables proposicionales $p_1, \ldots, p_n$
- sea $\mathcal{P}(\{p_1, \ldots, p_n\}) = \{V_1, \ldots, V_{2^n}\}$
- para $i \in \{1, \ldots, 2^n\}$ definimos $v_i(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \in V_i \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$
- φ es tautología sii

$$v_i \models \varphi \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, 2^n\}$$

Consecuencia semántica y conjunto satisfacible

Sea $\Gamma \subseteq \text{FORM}$ y $\varphi \in \text{FORM}$

φ es consecuencia semántica de Γ ($\Gamma \models \varphi$) si para toda interpretación v:

$$\underbrace{\text{si } v \models \psi \text{ para toda } \psi \in \Gamma}_{\text{lo notamos } v \models \Gamma}, \text{ entonces } v \models \varphi$$

Γ es satisfacible si existe una interpretación v tal que $v \models \psi$ para toda $\psi \in \Gamma$ (i.e. tal que $v \models \Gamma$)

Por ejemplo

- $\{q\} \models q$
- $\{q\} \models p \to q$
- $\{r, p \vee q\} \not\models p$
- $\{r, p \vee q\} \not\models s$

- $\emptyset$ es satisfacible
- $\{p, q\}$ es satisfacible
- $\{\neg p, p \wedge q\}$ no es satisfacible
- $\{p, p \to q, \neg q\}$ no es satisfacible

Algunos resultados sobre $\models$

Proposición

1. $\emptyset \models \varphi$ *sii* $\models \varphi$ *(i.e. φ es tautología)*
2. *si* $\models \varphi$ *entonces* $\Gamma \models \varphi$
3. $\{\varphi\} \models \varphi$
4. *si* $\Gamma \subseteq \Delta$ *y* $\Gamma \models \varphi$ *entonces* $\Delta \models \varphi$
5. *si* $\Gamma \models \varphi$ *y* $\Gamma \models \varphi \to \psi$ *entonces* $\Gamma \models \psi$

Demostración de 5.

- sea v una interpretación tal que $v \models \Gamma$
- sabemos $v \models \varphi$
- sabemos $v \models \varphi \to \psi$
- concluimos $v \models \psi$

$\square$

Mecanismo deductivo *SP*

- axiomas. Sean $\varphi, \psi, \rho \in$ FORM

  SP1 $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

  SP2 $(\varphi \to (\psi \to \rho)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \rho))$

  SP3 $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$

- regla de inferencia

  MP Sean $\varphi, \psi \in$ FORM. ψ es una consecuencia inmediata de $\varphi \to \psi$ y φ

Una demostración de φ en *SP* es una cadena finita y no vacía

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$$

de fórmulas de *P* tal que $\varphi_n = \varphi$ y

- φ_i es un axioma o
- φ_i es una consecuencia inmediata de φ_k, φ_l, $k, l < i$

En este caso, decimos que φ es un teorema ($\vdash \varphi$)

Ejemplo: demostración de $p \to p$

Recordar

SP1 $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

SP2 $(\varphi \to (\psi \to \rho)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \rho))$

SP3 $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$

MP Sean $\varphi, \psi \in$ FORM. ψ es una consecuencia inmediata de $\varphi \to \psi$ y φ

Demostración:

1.	$p \to ((p \to p) \to p)$	SP1
2.	$(p \to ((p \to p) \to p)) \to ((p \to (p \to p)) \to (p \to p))$	SP2
3.	$(p \to (p \to p)) \to (p \to p)$	MP 1 y 2
4.	$p \to (p \to p)$	SP1
5.	$p \to p$	MP 3 y 4

Concluimos $\vdash p \to p$ (i.e. $p \to p$ es un teorema)

Consecuencia sintáctica

Sea $\Gamma \subseteq \text{FORM}$ y $\varphi \in \text{FORM}$

φ es una consecuencia sintáctica de Γ ($\Gamma \vdash \varphi$) si existe una cadena finita y no vacía

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$$

de fórmulas de P tal que $\varphi_n = \varphi$ y

- φ_i es un axioma o
- $\varphi_i \in \Gamma$ o
- φ_i es una consecuencia inmediata de φ_k, φ_l, $k, l < i$

Aquí, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ se llama derivación de φ a partir de Γ. Γ se llama teoría. Decimos que φ es un teorema de la teoría Γ.

Correctitud de *SP*

Teorema

Si $\Gamma \vdash \varphi$ *entonces* $\Gamma \models \varphi$ *(i.e. si es teorema de la teoría* Γ*, es válido en toda interpretación de* Γ*).*

Demostración.

Supongamos $\Gamma \vdash \varphi$. Es decir, existe una cadena finita y no vacía

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$$

de fórmulas de P tal que $\varphi_n = \varphi$ y

- φ_i es un axioma o
- $\varphi_i \in \Gamma$ o
- φ_i es una consecuencia inmediata de φ_k, φ_l, $k, l < i$

Demostramos que $\Gamma \models \varphi$ por inducción en n (la longitud de la demostración). Detalles a continuación.

$\square$

Demostración de Correctitud de SP

Propiedad a demostrar:

$P(n) =$ *"si* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n = \varphi$ *es una derivación de* φ *a partir de* Γ *entonces* $v \models \Gamma \Rightarrow v \models \varphi$*"*

Demostramos que vale $P(n)$ por inducción en n.

1. caso base. Veamos que vale $P(1)$. Sup. v tal que $v \models \Gamma$. Queremos ver que $v \models \Gamma \Rightarrow v \models \varphi$. Hay 2 posibilidades
   1.1 φ is axioma de SP: en este caso, $v \models \varphi$;
   1.2 $\varphi \in \Gamma$: en este caso, también $v \models \varphi$.
2. paso inductivo. Sup. v tal que $v \models \Gamma$. Sup. que vale $P(m)$ para todo $m \leq n$. Queremos ver que vale $P(n+1)$.Sup. $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi_{n+1} = \varphi$ es una derivación de φ a partir de Γ. Hay 3 posibilidades
   2.1 φ is axioma de SP: igual que en caso base;
   2.2 $\varphi \in \Gamma$: igual que en caso base;
   2.3 φ es consecuencia inmediata de φ_i y $\varphi_j = \varphi_i \to \varphi$ $(i, j \leq n)$. Por HI ($P(i)$ y $P(j)$), sabemos $v \models \varphi_i$ y $v \models \varphi_i \to \varphi$. Entonces necesariamente $v \models \varphi$.

Ejemplos

- $\Gamma_1 = \{p\} \vdash p$

1.	p	$p \in \Gamma_1$

- $\Gamma_2 = \{p\} \vdash \varphi \to p$

1.	p	$p \in \Gamma_2$
2.	$p \to (\varphi \to p)$	SP1
3.	$\varphi \to p$	MP 1 y 2

- $\Gamma_3 = \{p\} \nvdash q$
  porque $\Gamma_3 \not\models q$ (considerar $v(p) = 1; v(q) = 0$)

- $\Gamma_4 = \{p, \neg p\} \vdash \varphi$

1.	$\neg p \to (\neg\varphi \to \neg p)$	SP1
2.	$\neg p$	$\neg p \in \Gamma_4$
3.	$\neg\varphi \to \neg p$	MP 1 y 2
4.	$(\neg\varphi \to \neg p) \to (p \to \varphi)$	SP3
5.	$p \to \varphi$	MP 3 y 4
6.	p	$p \in \Gamma_4$
7.	φ	MP 5 y 6

Conjuntos y sistemas consistentes

$\Gamma \subseteq \text{FORM}$ es consistente si no existe $\varphi \in \text{FORM}$ tal que

$$\Gamma \vdash \varphi \qquad \text{y} \qquad \Gamma \vdash \neg\varphi$$

Un sistema S es consistente si no existe $\varphi \in \text{FORM}$ tal que

$$\vdash_S \varphi \qquad \text{y} \qquad \vdash_S \neg\varphi$$

Teorema

El sistema SP es consistente.

Demostración.

- sea v cualquier valuación
- por correctitud, todo teorema de SP es verdadero para v

$$\vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad v \models \varphi \quad \Rightarrow \quad v \not\models \neg\varphi \quad \Rightarrow \quad \not\vdash \neg\varphi$$

- luego no puede pasar que φ y $\neg\varphi$ sean teoremas

$\square$

Algunos resultados sobre $\vdash$

Proposición

1. $\emptyset \vdash \varphi$ *sii* $\vdash \varphi$ *(i.e.* φ *es teorema)*
2. *si* $\vdash \varphi$ *entonces* $\Gamma \vdash \varphi$
3. $\{\varphi\} \vdash \varphi$
4. *si* $\Gamma \subseteq \Delta$ *y* $\Gamma \vdash \varphi$ *entonces* $\Delta \vdash \varphi$
5. *si* $\Gamma \vdash \varphi$ *y* $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ *entonces* $\Gamma \vdash \psi$

Si reemplazamos $\vdash$ por $\models$, obtenemos los mismos resultados (ver hoja 7)

Resumen

lenguaje P

semántica

tautología
(verdadera en toda interpretación)

consecuencia semántica $\models$

conjunto satisfacible
(existe modelo para todos sus elementos)

método deductivo

teorema
(tiene demostración en SP)

consecuencia sintáctica $\vdash$

conjunto consistente
(no permite probar φ y $\neg\varphi$)

Notas sobre computabilidad

Se pueden codificar las fórmulas de P con números naturales.

- a cada fórmula φ se le asigna un número $\#\varphi > 0$
- cada número positivo representa una única fórmula

Se puede decidir algorítmicamente si una fórmula es un axioma o no

- es computable la función

$$ax(x) = \begin{cases} 1 & \text{si la fórmula de número } x \text{ es un axioma de } SP \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Se puede decidir algorítmicamente si una formula es consecuencia inmediata de otras dos

- es computable la función

$$mp(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \begin{array}{l}\text{si la fórmula de número } z \text{ es consecencia} \\ \text{inmediata de las fórmulas de números } x \text{ e } y\end{array} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Notas sobre computabilidad

Las demostraciones son listas (finitas) de fórmulas.

- la demostración $\varphi_1 \dots \varphi_n$ se codifica como $[\#\varphi_1, \dots, \#\varphi_n]$

Se puede decidir algorítmicamente si una lista de fórmulas es una demostración válida o no

- es computable la función

$$dem(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ es una demostración válida} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

- en efecto,

$$\begin{array}{rcl} dem(x) & = & (\forall k \in \{1, \dots, |x|\})[ax(x[k]) \vee cons(x, k)] \\ cons(x, k) & = & (\exists i, j \in \{1, \dots, k-1\})[mp(x[i], x[j], x[k])] \end{array}$$

Notas sobre computabilidad

- considerar el siguiente programa P:

$$
\begin{array}{ll}
[A] & \text{IF } \mathit{dem}(D) = 1 \wedge D[|D|] = X \text{ GOTO } E \\
 & D \leftarrow D + 1 \\
 & \text{GOTO } A
\end{array}
$$

- P busca una demostración para la fórmula con número X
  - si la encuentra, se detiene
  - si no, se indefine
- $\vdash \varphi$ sii $\Psi_P(\#\varphi)\downarrow$, o equivalentemente

$$\varphi \text{ es teorema} \qquad \text{sii} \qquad \#\varphi \in \mathrm{dom}\Psi_P$$

- el conjunto de teoremas de SP es c.e.
- esto pasa en general para cualquier sistema axiomático
  - es decir, cualquier sistema de deducción con un conjunto computable de axiomas y reglas de inferencia computables tiene un conjunto de teoremas c.e.
- ¿será computable el conjunto de teoremas de SP?