Trabalho de Algoritmos em Grafos

UFC - Campus Sobral
Engenharia de Computação
Professor: Josefran Bastos
Aluno: Hugo Silveira Sousa
Matrícula: 378998

Definição:

Isomorfismo entre os grafos G1 e G2.

Sabemos que isomorfismo dos grafos G1 e G2 é uma bijeção entre os conjuntos de vértices de G1 e G2:

$$f: V(G1) \rightarrow V(G2)$$

E para quaisquer dois vértices u e v de G1, que são adjacentes em G1, temos que f(u) e f(v), que são vértices de G2, são adjacentes em G2.

Explicação das Características:

Teste 1: Quantidade de vértices dos grafos.

Se a quantidade de vértices de G1 for diferente da quantidade de vértices de G2, isso implica que G1 não é um isomorfo de G2.

Prova 1:

A definição de isomorfismo afirma que há uma bijeção entre os conjuntos de vértices de G1 e G2. Uma bijeção entre os dois conjuntos implica que a quantidade de vértices de G1 é a mesma de G2:

$$|V(G1)| = |V(G2)|$$

Logo, se a quantidade de vértices de G1 for diferente da quantidade de vértices de G2, temos que G1 não é um isomorfo de G2.

Teste 2: Quantidade de arestas dos grafos.

Se a quantidade de arestas de G1 for diferente da quantidade de arestas de G2, isso implica que G1 não é um isomorfo de G2.

Prova 2:

A definição de isomorfismo afirma que para cada aresta uv $\in$ E(G1), temos a aresta f(u)f(v) $\in$ E(G2), logo, também existe uma bijeção nos conjuntos de arestas de G1 e de G2:

$$h: E(G1) \rightarrow E(G2)$$

Uma bijeção implica na mesma quantidade de arestas dos conjuntos:

$$|E(G1)| = |E(G2)|$$

Logo, se a quantidade de arestas de G1 for diferente da quantidade de arestas de G2, temos que G1 não é um isomorfo de G2.

Teste 3: Se os grafos são conexos ou desconexos.
Se G1 for conexo e G2 for desconexo, ou G1 for desconexo e G2 for conexo, isso implica que G1 não é um isomorfo de G2.

Prova 3:
Analisando o primeiro caso, se G1 for conexo e G2 for desconexo:
Usando as Provas 1 e 2, para G1 ser isomorfos de G2, temos que ter o mesmo número de vértices e o mesmo número de arestas em G1 e G2, logo:

$$|E(G1)| = |E(G2)| \text{ e } |V(G1)| = |V(G2)|$$

Suponha que G1, que é conexo, é isomorfo de G2, que é desconexo, então:

Para cada aresta uv $\in$ E(G1) tem que existir f(u)f(v) $\in$ E(G2).

Como G1 é conexo, entre quaisquer u e v $\in$ V(G1), existe um caminho k que conecta quaisquer u e v. No caminho k temos que o conjunto de arestas que pertencem a esse caminho estão contidas em E(G1):

xy são as arestas que pertencem ao caminho k, xy $\subseteq$ E(G1)

Como afirmamos que G1 é isomorfo de G2, temos que arestas do caminho k, xy $\subseteq$ E(G1), então f(x)f(y) $\subseteq$ E(G2), como o caminho k, é o caminho entre quaisquer x e y $\in$ V(G1), temos existe um caminho entre quaisquer f(x) e f(y) $\in$ V(G2), isso implica que G2 é conexo, o que é um absurdo, logo, a suposição é falsa, e G1, que é conexo, não é isomorfo de G2, que é desconexo.

Obs 1: uv é uma aresta entre os vértices u e v.
Obs 2: Para o segundo caso, se G2 for conexo e G1 for desconexo, é análogo, apenas trocando todos os termos G1 por G2 e G2 por G1.

Teste 4: Se os grafos apresentam circuitos ou não.
Se G1 tiver algum circuito e G2 não tiver circuitos, ou G2 tiver algum circuito e G1 não tiver circuitos, isso implica que G1 não é um isomorfo de G2.

Prova 4:
Analisando o primeiro caso, G1 tiver algum circuito e G2 não tiver circuitos.
Usando as Provas 1 e 2, para G1 ser isomorfos de G2, temos:

$$|E(G1)| = |E(G2)| \text{ e } |V(G1)| = |V(G2)|$$

Suponha que G1, que apresenta algum circuito, é isomorfo de G2, que não tem circuitos, então:

Para cada aresta uv $\in$ E(G1) tem que existir f(u)f(v) $\in$ E(G2).

Como G1 tem circuito, existe algum vértice v_0 $\in$ V(G1), com um caminho k ($v_0, v_1, v_2, ..., v_n, v_0$) que sai de v_0, passa por no mínimo mais 2 vértices diferentes de v_0, e voltam para v_0. No caminho k temos que o conjunto de arestas que pertencem a esse caminho estão contidas em E(G1):

$v_i\ v_j$ são as arestas que pertencem ao caminho k, $v_i\ v_j$ $\subseteq$ E(G1), i, j = 0 ... n

Como afirmamos que G1 é isomorfo de G2, com as arestas do caminho k, $v_i\ v_j \subseteq$ E(G1), e os vértices do caminho k, $v_0, v_1, v_2, ..., v_n, v_0 \in$ V(G1), então f(v_i)f(v_j) $\subseteq$ E(G2), e f(v_0),f(v_1),f(v_2),...,f(v_n),f(v_0) $\in$ V(G2), então existe um caminho que sai de f(v_0) passa por no mínimo mais 2 vértices diferentes de f(v_0), e voltam para f(v_0), implicando em um circuito em G2, o que é um absurdo, logo, a suposição é falsa, e G1, que tem algum circuito, não é isomorfo de G2, que não tem circuitos.

Obs 1: $v_i\ v_j$ é uma aresta entre os vértices v_i e v_j .
Obs 2: Para o segundo caso, G2 tiver algum circuito e G1 não tiver circuitos, é análogo, apenas trocando todos os termos G1 por G2 e G2 por G1.

Teste 5: Quantidade de componentes conexas dos grafos.
Se G1 tiver X componentes conexas, e G2, Y componentes conexas, com X ≠ Y, isso implica que G1 não é isomorfo de G2.

Prova 5:
Suponha G1 isomorfo de G2, com X ≠ Y
Usando as Provas 1 e 2, para G1 ser isomorfos de G2, temos:

|E(G1)| = |E(G2)| e |V(G1)| = |V(G2)|

G1 tem X K caminhos, um Ki para cada componente conexa, uv pertence ao caminho Ki, que u,v ∈ V(G1) e uv ∈ E(G1), então como são isomorfos, f(u),f(v) ∈ V(G1) e f(u)f(v) ∈ E(G2).
Logo, existem Y K caminhos em G2, com Y = X, o que é um absurdo, portanto G1 não é isomorfo de G2.

Teste 6: Análise dos graus de todos os vértices dos grafos.
Se for criado um vetor w, onde em cada posição desse vetor está armazenada o grau de cada vértice de G1, e z com os graus dos vértices de G2, depois de ordenados os vetores, se w for diferente de z, isso implica que G1 não é isomorfo de G2.
Obs: Ou os dois vetores são ordenados de forma crescente, ou os dois são ordenados de forma decrescente.

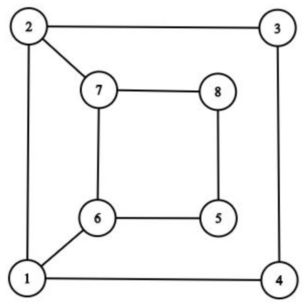
Prova 6:
Usando as Provas 1 e 2, para G1 ser isomorfos de G2, temos:
|E(G1)| = |E(G2)| e |V(G1)| = |V(G2)|
O vetor w deve ser do mesmo tamanho de z.

- O vetor w, tem a seguinte estrutura: [..., a, …., …] de posições 1 à |V(G1)|; e o vetor z: [..., …., a , …] de posições 1 à |V(G2)|.
- w = ordena(w) e z= ordena(z)
- w terá a estrutura: [..., a, …., …]; e z: [..., a, …., …], se w ≠ z

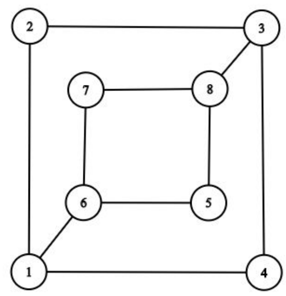
Suponha que G1 é isomorfo de G2, com o vetor w ordenado diferente de z ordenado.
Tome $v_i ,..., v_j \in$ V(G1), tal que d(v_i) =a, sabemos que f(v_i) ,...,f(v_j) $\in$ V(G2), tal que d(f(v_i)) = a.
Para ser isomorfo, w tem que ter os mesmos elementos de z, porque |E(G1)| = |E(G2)|, Σd(V(G1)) = 2.|E(G1)| e Σd(V(G2)) = 2.|E(G2)|.
Logo depois de ordenado w e z devem ser iguais para ser isomorfo.
Obs 2: Suponha que é sem perda de generalidade.

Exemplos de grafos que passam nos testes, mas não são isomorfos:

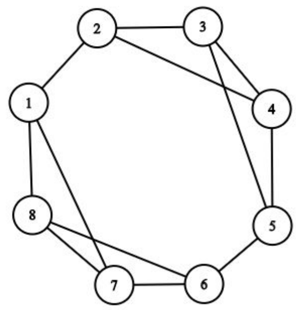
G1:



G2:



G1:



G2:

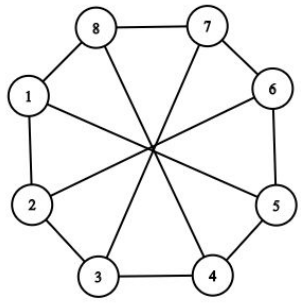


Tabela de Comparação dos Tempos de Execução:

Média com 1000 repetições			
	n = 8	n = 12	n = 16
p = 0.25	3,637 ms	5,642 ms	5,645 ms
p = 0.50	4,462 ms	4,598 ms	6,624 ms
p = 0.75	4,251 ms	4,369 ms	5,934 ms

n é o número de vértices;

p é a probabilidade de gerar uma aresta.

Obs: Média realizada com 1000 repetições, analisando os 6 testes de características. O tempo calculado inclui apenas os testes e as saídas de sistema (prinft) das funções de testes, não foram incluídos as criações dos grafos.
Configurações da máquina de teste:

- Processador: Intel Celeron CPU 1005M 1.90 GHz;
- Memória RAM: 4 GB;
- Sistema Operacional: Windows 10, 64 bits.