ALGEBRE BOOLE

ALT ENUNȚ ȘI ALTĂ REZOLVARE PENTRU EXERCIȚIUL DE LA PAGINA 43 DIN SEMINARUL AL VIII-LEA, PARTEA I:

Exercițiu: Fie T o mulțime. Pt. fiecare $X \in T$, notăm cu $\overline{X} = T \setminus X$. Să se determine cardinalele filtrelor principale ale algebrei Boole $(\mathcal{P}(T), \cup, \cap, \bar{\cdot}, \subseteq, \emptyset, T)$.

REZOLVARE: Fie $M \in \mathcal{P}(T)$. Filtrul principal al algebrei Boole $\mathcal{P}(T)$ generat de M: $[M) = \{X \in \mathcal{P}(T) \mid M \subseteq X\}$.

$$|[M)| \underset{\#}{=} |\mathcal{P}(\overline{M})| = 2^{|\overline{M}|}.$$

Fie $f : \mathcal{P}(\overline{M}) \to [M)$ și $g : [M) \to \mathcal{P}(\overline{M})$,

$$\begin{cases} (\forall X \in \mathcal{P}(\overline{M}))\,(f(X) \overset{\text{def}}{=} X \cup M) \\ \text{și} \\ (\forall Y \in [M))\,(g(Y) = Y \setminus M). \end{cases}$$

Pt. orice $X \in \mathcal{P}(\overline{M})$ și $Y \in [M)$:

$$f(X) = \underbrace{\overbrace{\underbrace{X}_{\subseteq \overline{M}} \cup M}^{\supseteq M}}_{\subseteq \overline{M} \cup M = T} \Rightarrow f(X) \in [M) \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ este corect definită;

$$g(Y) = Y \setminus M = Y \cap \overline{M} \subseteq \overline{M} \Rightarrow g \text{ e corect definită;}$$

$$g(f(X)) = g(X \cup M) = (X \cup M) \setminus M =$$

$$= (X \cup M) \cap \overline{M} = \underbrace{(\underbrace{X}_{\subseteq \overline{M}} \cap \overline{M})}_{= X} \cup \underbrace{(M \cap \overline{M})}_{= \emptyset} = X; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g \circ f = id_{\mathcal{P}(\overline{M})}; \quad (*)$$

$$f(g(Y)) = f(Y \setminus M) = (Y \setminus M) \cup M =$$

$$= (Y \cap \overline{M}) \cup M = \underbrace{(\underbrace{Y}_{\supseteq M} \cup M)}_{= Y} \cap \underbrace{(\overline{M} \cup M)}_{= T} = Y; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f \circ g = id_{[M)}; \quad (**)$$

$(*), (**) \Rightarrow g = f^{-1} \Rightarrow f$ e inversabilă $\Leftrightarrow f$ e bijectivă. $\Rightarrow \mathcal{P}(\overline{M}) \underset{\text{în bijecție}}{\cong} [M). \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \underbrace{|\mathcal{P}(\overline{M})|}_{= 2^{|\overline{M}|}} = |[M)|.$$

Exemplu: În cazul în care T este finită: $|T| = n \in \mathbb{N}$, avem: dacă $M \in \mathcal{P}(T) \Rightarrow |M| = k \in \overline{0,n}$, $\Rightarrow |\overline{M}| = n-k\ (\in \overline{0,n}) \Rightarrow |[M)| = 2^{n-k}$ în algebra Boole $\mathcal{P}(T)$.

Exercițiu temă: Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Folosind exemplul de mai sus și faptul că funcția $f : \mathcal{P}(\overline{1,n}) \to L_2^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in L_2 = \{0,1\}\}$, definită prin:

$$(\forall M \in \mathcal{P}(\overline{1,n}))\left(f(M) = \underbrace{(\chi_M(1), \ldots, \chi_M(n))}_{\text{vectorul caracteristic al lui } M}\right),$$

este izomorfism boolean de la $\mathcal{P}(\overline{1,n})$ la $\mathcal{L}_2^n$, să se deducă faptul că, pt. orice $x_1, \ldots, x_n \in L_2 = \{0,1\}$, în algebra Boole $\mathcal{L}_2^n$,

$$|[(x_1, \ldots, x_n))| = 2^{n-(x_1+\ldots+x_n)}.$$

Se va folosi observația următoare: pt. orice $x_1, \ldots, x_n \in L_2 = \{0,1\}$, dacă notăm cu $M = \{i \in \overline{1,n} \mid x_i = 1\}$, atunci $x_1 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} \chi_M(i) = |M|$, unde, ca și mai sus, χ_M e funcția caracteristică a lui M raportat la $\overline{1,n}$.

ANEXA) PG. 4

Observaţie privind EXERCIŢIUL 10/PG. 27/SEMINARUL VIII, PARTEA I:

Dacă A şi B sunt algebre Boole, iar $f : A \to B$ este un morfism boolean, atunci congruenţa asociată filtrului $f^{-1}(\{1\})$ al lui A este:

$$\sim_{f^{-1}(\{1\})} = \{(x,y)\in A^2 \mid x\leftrightarrow y \in f^{-1}(\{1\})\} = \{(x,y)\in A^2 \mid f(x\leftrightarrow y)\in\{1\}\} = \{(x,y)\in A^2 \mid f(x\leftrightarrow y)=1\} = \{(x,y)\in A^2 \mid f(x)\leftrightarrow f(y)=1\} = \{(x,y)\in A^2 \mid f(x)=f(y)\} = Ker(f)$$

: nucleul de săgeată dublă al lui f – a se vedea proprietatea de universalitate a mulţimii factor, în capitolul/secţiunea cursului privind relaţiile de echivalenţă şi partiţiile asociate lor.

Pt. orice funcţie $h : X \to Y$, $Ker(h) \in Eq(X)$. Pt. orice morfism boolean $f : A \to B$, $Ker(f) \in Con(A)$. (A se revedea notaţiile din curs.)

Existența izomorfismului boolean $\underbrace{A/f^{-1}(\{1\})}_{=A/\sim_{f^{-1}(\{1\})}} \cong f(A)$ este

$$= A/\sim_{f^{-1}(\{1\})} = A/_{Ker(f)}$$

<u>teorema fundamentală de izomorfism pentru algebre Boole.</u>

(A se vedea, de exemplu, <u>teorema fundamentală de izomorfism pentru grupuri</u>, în cursul de algebră.)

<u>Observație</u> privind EXERCIȚIUL 8/PG. 20/SEMINARUL VIII, PARTEA I:

Avem o mulțime T și filtrul F al algebrei Boole $\mathcal{P}(T)$ format din părțile cofinite ale lui T. Am demonstrat că, congruența lui $\mathcal{P}(T)$ asociată acestui filtru este:

$$\sim_F = \{(A,B) \in (\mathcal{P}(T))^2 \mid |A \Delta B| < \infty\}.$$

Au loc următoarele egalități, pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$:

$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ $\xrightarrow{}$ $(A\setminus B)\cap(B\setminus A)=\emptyset$ PG. 6

$\Rightarrow |A\Delta B| = |A\setminus B| \cup |B\setminus A|$,

$A\setminus B = A\setminus(A\cap B)\subseteq A\subseteq T$,

$B\setminus A = B\setminus(A\cap B)\subseteq B\subseteq T$,

$A=(A\cap B)\cup(A\setminus(A\cap B))$,

$B=(A\cap B)\cup(B\setminus(A\cap B))$.

Prin urmare: $\sim_F = \{(A,B)\in(\mathcal{P}(T))^2 \mid |A\setminus B|<\infty$ și $|B\setminus A|<\infty\} =$
$= \{(A,B)\in(\mathcal{P}(T))^2 \mid |A\setminus(A\cap B)|<\infty$ și $|B\setminus(A\cap B)|<\infty\}\subseteq\{(A,B)\in(\mathcal{P}(T))^2 \mid (\exists M,N\in\mathcal{P}(T))(|M|<\infty, |N|<\infty, A=(A\cap B)\cup M, B=(A\cap B)\cup N)\} \stackrel{not.}{=} S$

(am luat $M=A\setminus(A\cap B)$, $N=B\setminus(A\cap B)$). (*)

Dacă $A=(A\cap B)\cup M$, cu $M\in\mathcal{P}(T)$, având $|M|<\infty$, atunci $A\setminus B = A\setminus(A\cap B) =$
$= A\cap\overline{(A\cap B)} = ((A\cap B)\cup M)\cap\overline{(A\cap B)} =$
$= \underbrace{((A\cap B)\cap\overline{(A\cap B)})}_{=\emptyset}\cup(M\cap\overline{(A\cap B)}) = M\cap\overline{(A\cap B)}\subseteq$
$\subseteq M$, așadar $|A\setminus B|\le|M|<\infty$. Analog, dacă $B=(A\cap B)\cup N$, cu $N\in\mathcal{P}(T)$, având $|N|<\infty$, atunci $|B\setminus A|\le|N|<\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow S \subseteq \{(A,B) \in (\mathcal{P}(T))^2 \mid |A \setminus B| < \infty$ și $|B \setminus A| < \infty\} = \sim_F$ (**)

PG. 7

(*), (**) $\Rightarrow \sim_F = S = \{(A,B) \in (\mathcal{P}(T))^2 \mid (\exists M, N \in \mathcal{P}(T))\ (|M| < \infty,\ |N| < \infty,\ A = (A \cap B) \cup M,\ B = (A \cap B) \cup N)\}$. (I)

Să mai observăm următorul fapt, pentru demonstrarea căruia se poate folosi oricare dintre exprimările lui $\sim_F$ de mai sus: pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$:

(a) dacă $|A| < \infty, \Rightarrow A/_F \subseteq \{B \in \mathcal{P}(T) \mid |B| < \infty\}$; //

(b) dacă $|A| \not< \infty, \Rightarrow A/_F \subseteq \{B \in \mathcal{P}(T) \mid |B| \not< \infty\}$. //

Într-adevăr, fie $A \in \mathcal{P}(T)$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow A/_F = A/_{\sim_F} = \{B \in \mathcal{P}(T) \mid |A \Delta B| < \infty\} \overset{(I)}{=} \{B \in \mathcal{P}(T) \mid (\exists M, N \in \mathcal{P}(T))\ (|M| < \infty,\ |N| < \infty,\ A = (A \cap B) \cup M,$

$B = (A \cap B) \cup N \}$. (II)

(a) Presupunem că $|A| < \infty$. Fie

$B \in A/_F \xRightarrow{\text{(II)}} (\exists N \in \mathcal{P}(T))(|N| < \infty$ și $B = (A \cap B) \cup N) \Rightarrow$

$\Rightarrow |B| \leq \underbrace{|\overbrace{A \cap B}^{\subseteq A}|}_{\leq |A| < \infty} + \underbrace{|N|}_{< \infty} < \infty$.

(b) Presupunem că $|A| \not< \infty$. Fie

$B \in A/_F \xRightarrow{\text{(II)}} (\exists M \in \mathcal{P}(T))(|M| < \infty$ și $A = (A \cap B) \cup M) \Rightarrow$

$\Rightarrow |A| \leq \underbrace{|\overbrace{A \cap B}^{\subseteq B}|}_{\leq |B|} + |M| \leq |B| + \underbrace{|M|}_{< \infty}$. $\Rightarrow$

Presupunem prin absurd că $|B| < \infty$ $\Rightarrow |A| < \infty$, Abs. $\Rightarrow |B| \not< \infty$.

Așadar, pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$

dacă $\underbrace{A \sim_F B}_{\overset{\text{II}}{A/_F = B/_F}}$, $\Rightarrow \begin{cases} |A| < \infty \text{ și } |B| < \infty \\ \text{sau} \\ |A| \not< \infty \text{ și } |B| \not< \infty. \end{cases}$