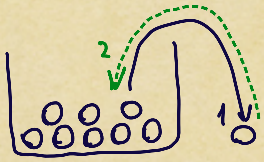
1) Schema cu revenire (cu întoarcere)

Urnă cu n bile $1 \dots n$ și efectuăm k-extrageri <u>cu revenire</u>

În câte moduri?



<u>Reformulare</u>: k bile $(1 \dots k)$ și n urne

$(x_1, \dots, x_k)$

x_i - nr urnei în care am pus bila i

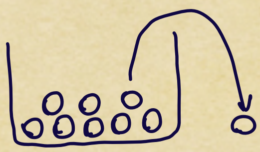
n^k moduri

- nr de șiruri de lungime k cu termeni oarecare din $\{1, \dots, n\}$

2) Schema de extragere fără revenire (fără întoarcere)

Urnă n bile $1 \dots n$ și efectuăm k extrageri <u>fără întoarceri</u>

În câte moduri?



<u>Reformulare</u>: nr de șiruri de lungime k cu termeni distincți din $\{1, \dots, n\}$

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

	ordinea contează	ordinea <u>NU</u> contează
cu revenire	n^k	Exemple
fără revenire	$\frac{n!}{(n-k)!}$	C_n^k

Bose-Einstein

Exp 1) MATE

$\boxed{M, A, T, E}$ — cu revenire $4^4 = 256$

— fără revenire $4!$

2) Cărți:

- 4 matematică
- 3 Fizică
- 2 Istorie
- 1 Geografie

Vrem să păstrăm grupate cărțile din același domeniu

$4! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!$

în ce ordine punem domeniile

Exp (Problema aniversărilor) n persoane. Vrem să vedem care este prob ca cel puțin două să fie născute în aceeași zi

Ipoteze: → 365 zile

→ echirepartiție

→ nu vrem gemeni

Câmpul de probabilitate

$$\Omega = \{ (z_1, z_2, \dots z_n) \mid z_i \in \{1, \dots 365\} \}$$

$$|\Omega| = 365^n$$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ → mulțimea ev. posibile

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$$

$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{365^n}$ echirep

A – cel puțin 2 persoane s-au născut în aceeași zi

$$A = \{ (z_1, \dots, z_n) \mid \exists\, i, j,\ i \neq j \text{ a.î. } z_i = z_j \}$$

$\mathbb{P}(A) = ?$ $\quad \frac{|A|}{|\Omega|}$

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \frac{\frac{365!}{(365-n)!}}{365^n}$$

A^c – toate cele n persoane s-au născut în zile diferite

$$\mathbb{P}(A^c) = \frac{|A^c|}{|\Omega|} = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365-n)+1}{365^n} = 1 - \frac{\frac{365!}{(365-n)!}}{365^n}$$

$n = 23$

$\mathbb{P}(A) \simeq 51\%$

Exp Avem n persoane și vrem să formăm comisii de câte k persoane

Reformulare: Nr de submulțimi cu k elem a unei mulțimi cu n elem

Ordinea nu contează!

$$C_n^k \Leftrightarrow \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_k) \rightarrow \frac{n!}{(n-k)!}$$

Exp 1) 52 cărți

câte mâini de 5 cărți

$\binom{52}{5} = C_{52}^5$

2) Câte mâini de 5 cărți conțin 2 Ași, 2 Popi și o Damă

$$C_4^2 \cdot C_4^2 \cdot C_4^1$$

52 cărți de joc
- 4 culori (♥ ♠ ♦ ♣)
- 13 figuri (2, 3, ... J, Q, K, A)

3) La Poker, vrem să determinăm prob. să obținem Full House

FullHouse : $\{Q, Q, 3, 3, 3\}$

$\Omega = \{ \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\} \mid w_i \in$ cărților de joc$\}$

$|\Omega| = C_{52}^5$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$, $P(\{w_1, \dots, w_5\})$ echirep $= \frac{1}{C_{52}^5}$

$A =$ ev. prin care am obținut FullHouse

$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

$|A| =$ putem alege figura pt pereche în $\binom{13}{1}$ iar culoarea în $\binom{4}{2}$ ori

iar pt cele 3 cărți avem $\binom{12}{1}$ moduri de alegere a figurii și $\binom{4}{3}$ moduri de alegere a culorii

$|A| = \binom{13}{1}\binom{4}{2}\binom{12}{1}\binom{4}{3}$

4) O pereche

B - ev. prin care avem o pereche

$\binom{13}{1}\binom{4}{2}\binom{12}{3}\binom{4}{1}$

Exp : Problema lui Newton - Pepys

a) Cel puțin un 6 apare atunci când aruncăm 6 zaruri

b) Cel puțin 2 valori de 6 atunci când aruncăm 12 zaruri

c) Cel puțin 3 valori de 6 atunci când aruncăm 18 zaruri

a) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^6$

A - ev de interes

$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \frac{5^6}{6^6} \approx 0,66$

b) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^{12}$

B - cel puțin 2 val de 6 în 12 zaruri

$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B^c)$

$\mathbb{P}(B^c) = \mathbb{P}(\underbrace{\text{nicio valoare de 6}} \underset{\cup}{\text{sau}} \underbrace{\text{exact o valoare de 6}})$

$= \mathbb{P}(\text{nicio valoare de 6}) + \mathbb{P}(\text{exact o valoare de 6}) =$

$= \frac{5^{12}}{6^{12}} + \frac{C_{12}^1}{6^{12}}$

c) C - cel puțin 3 val de 6 în 18 zaruri

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^{18}$

$\mathbb{P}(C) = 1 - \mathbb{P}(C^c)$

$\to$ niciuna sau exact 1 sau exact 2

$\frac{5^{18}}{6^{18}}$

$C_{18}^1 \cdot \frac{5^{17}}{6^{18}}$

$C_{18}^2 \cdot \frac{5^{16}}{6^{18}}$

Partiții - coef. multinomial

Avem o mulțime cu n elem și fie $n_1, n_2, \dots, n_K \in \mathbb{N}$ a.î. $n_1 + n_2 + \dots + n_K = n$

Considerăm o partiție cu K submulțimi a.î. submulțimea i să aibă n_i elemente

$K=2$ $\quad n_1 + n_2 = n$

$C_n^{n_1}$

Echivalent cu: mulțimea șirurilor de lungime n

cu n_1 elem de tip 1

cu n_2 elem de tip 2

$\vdots$

n_K elem de tip K

$$\underbrace{\binom{n}{n_1}}_{A_1} \cdot \underbrace{\binom{n-n_1}{n_2}}_{A_2} \cdot \underbrace{\binom{n-n_1-n_2}{n_3}}_{A_3} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\binom{n-n_1-n_2-\dots-n_{K-1}}{n_K}}_{A_K}$$

$$= \frac{n!}{n_1!\cancel{(n-n_1)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-n_1)!}}{n_2!\cancel{(n-n_1-n_2)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-n_1-n_2)!}}{n_3!\cancel{(n-n_1-n_2-n_3)!}} \cdot \ldots \cdot \frac{\cancel{(n-n_1-n_2-\dots-n_{K-1})}}{n_K!(n-n_1-n_2-\dots-n_K)!} =$$

$$= \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_K!} = \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_K}$$

Ex: 1) MATEMATICA

M → 2
A → 3
T → 2
E → 1
I → 1
C → 1

$$\binom{10}{2,3,2,1,1,1}$$

2) 4 băieți și 12 fete

Prof. formează în mod aleator 4 subgrupe de câte 4 studenți

Care este probabilitatea ca în fiecare subgrupă să fie 1 băiat?

$$\binom{16}{4,4,4,4} = \frac{16!}{4! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 4!}$$

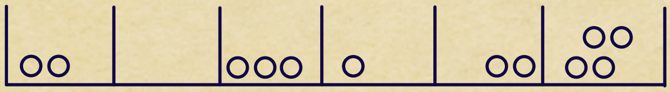
$$\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{\binom{16}{4,4,4,4}} \text{ echirep.}$$

$$\frac{4! \cdot \binom{12}{3,3,3,3}}{\binom{16}{4,4,4,4}}$$

Extragere cu revenire & ordinea nu contează

În câte moduri putem plasa k bile (care nu se disting între ele) în n urne

n-1 pereți



$n = 6$

$k = 12$

$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$

$x_i \in \mathbb{N}$

$$\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$$

Apl: Problema de

n plicuri

n scrisori

Prob ca cel puțin o scrisorii să fi ajuns la destinatorul de drept

$\Omega = S_n = \{\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\} \mid \sigma \text{ bij}\}$ $\quad |\Omega| = n!$ $\quad \mathbb{P}$ echiprob

$A = \{\sigma \in S_n \mid \exists\ i \in \{1, \dots, n\} \text{ a.î. } \sigma(i) = i\}$ $\quad n \to \infty \quad 1 - \frac{1}{e}$

Fie A_j - ev prin care destinatorul j a primit scrisoarea destinată lui

$= \{\sigma \in S_n \mid \sigma(j) = j\}$ $\quad A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) + \dots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n)$$

F lui Poincaré

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{|A_i|}{|\Omega|} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \frac{|A_i \cap A_j|}{n!} = \frac{(n-2)!}{n!}$$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{i_1<\ldots<i_k} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{i_1<\ldots<i_k} \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} 1-\frac{1}{e}$$