Logică Matematică şi Computaţională
Cursurile IX–X

Claudia MUREȘAN
cmuresan@fmi.unibuc.ro, c.muresan@yahoo.com

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
București

2020–2021, Semestrul I

Cuprinsul acestui curs

Conectorii logici derivați și axiomele

Notație

$E :=$ mulțimea enunțurilor.

Notație (conectorii logici derivați)

Pentru orice $\varphi, \psi \in E$:

- $\varphi \vee \psi := \neg\varphi \rightarrow \psi$
- $\varphi \wedge \psi := \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$
- $\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$

((schemele de) axiome)

Pentru orice $\varphi, \psi, \chi \in E$:

$$
\begin{array}{ll}
(A_1) & \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \\
(A_2) & (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)) \\
(A_3) & (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)
\end{array}
$$

Notație

$Ax :=$ mulțimea axiomelor, i. e.: $Ax := \{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi), (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)), (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \mid \varphi, \psi, \chi \in E\}$.

Deducția sintactică: pornind de la axiome și, eventual, ipoteze, pe baza regulii de deducție **modus ponens** (MP)

Notație

$T :=$ mulțimea teoremelor formale (i. e. a adevărurilor sintactice).

Fie $\varphi, \psi, \chi \in E$, $\Sigma \subseteq E$ și $\Delta \subseteq E$, arbitrare.

Notație

- $\vdash \varphi$: φ este teoremă formală.
- $\Sigma \vdash \varphi$: φ este consecință sintactică a mulțimii Σ de ipoteze.

(regula de deducție **modus ponens** (MP))

$$\frac{\psi, \psi \to \varphi}{\varphi}$$

Remarcă

- $Ax \subseteq T$
- $\vdash \varphi \iff \emptyset \vdash \varphi \implies \Sigma \vdash \varphi$
- $(\forall \sigma \in \Sigma)\,(\Sigma \vdash \sigma)$

Propoziție ($\star$)

1. $\Sigma \subseteq \Delta$ *și* $\Sigma \vdash \varphi \Longrightarrow \Delta \vdash \varphi$
2. $\Sigma \vdash \varphi \Longleftrightarrow (\exists \Gamma \subseteq \Sigma)\,(|\Gamma| < \aleph_0, \Gamma \vdash \varphi)$
3. $(\forall \psi \in \Delta)\,(\Sigma \vdash \psi)$ *și* $\Delta \vdash \varphi \Longrightarrow \Sigma \vdash \varphi$

Propoziție

- **principiul identității** *(PI)*: $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$
- **principiul terțului exclus** *(PTE)*: $\vdash \varphi \vee \neg \varphi$

Teoremă (Teorema deducției (TD))

$$\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$$

Propoziție

Au loc următoarele teoreme formale și reguli de deducție:

- **tranzitivitatea implicației**: $\dfrac{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi}{\varphi \rightarrow \chi}$
- **falsul implică orice**: $\vdash (\varphi \wedge \neg \varphi) \rightarrow \psi$
- **orice implică adevărul**: $\vdash \psi \rightarrow (\varphi \vee \neg \varphi)$

- **slăbirea**:
  - $\vdash \varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$ și $\vdash \psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$
  - $\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}$ și $\dfrac{\psi}{\varphi \vee \psi}$
  - $\dfrac{\varphi \rightarrow \chi, \psi \rightarrow \chi}{(\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi}$
- **slăbirea conjuncției**:
  - $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$ și $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$
  - $\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}$ și $\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi}$
  - $\dfrac{\chi \rightarrow \varphi, \chi \rightarrow \psi}{\chi \rightarrow (\varphi \wedge \psi)}$
  - caz particular: $\dfrac{\varphi, \psi}{\varphi \wedge \psi}$
  - **comutativitatea echivalenței**: $\dfrac{\varphi \leftrightarrow \psi}{\psi \leftrightarrow \varphi}$
  - **negarea termenilor unei echivalențe**: $\dfrac{\varphi \leftrightarrow \psi}{\neg\, \varphi \leftrightarrow \neg\, \psi}$
  - **distributivitatea disjuncției față de conjuncție**: $\vdash ((\varphi \wedge \psi) \vee \chi) \leftrightarrow ((\varphi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi))$

Algebra Lindenbaum–Tarski a Logicii Propoziționale Clasice

- Această secțiune a cursului expune construcția unei algebre Boole care este asociată în mod canonic sistemului formal $\mathcal{L}$.
- Prin această asociere, proprietățile sintactice ale lui $\mathcal{L}$ se reflectă în proprietăți booleene, și invers.

- Pe tot parcursul acestei secțiuni, $\Sigma \subseteq E$ va fi o mulțime arbitrară fixată de enunțuri ale lui $\mathcal{L}$.
- Σ va reprezenta o mulțime de ipoteze, ceea ce este adesea numită o *teorie* a lui $\mathcal{L}$.

O relație de echivalență pe mulțimea enunțurilor

Lemă

Pentru orice $\varphi, \psi \in E$, are loc echivalența:

$$\Sigma \vdash \varphi \text{ și } \Sigma \vdash \psi \quad \text{ddacă} \quad \Sigma \vdash \varphi \wedge \psi.$$

Demonstrație: "$\Rightarrow$": Conform regulii de deducție **slăbirea conjuncției**, cazul particular.
"$\Leftarrow$": Conform regulilor de deducție **slăbirea conjuncției** și (MP).

Definiție

Definim o relație binară $\sim_\Sigma$ pe mulțimea E a enunțurilor lui $\mathcal{L}$, astfel: pentru orice $\varphi, \psi \in E$,

$$\varphi \sim_\Sigma \psi \text{ ddacă } \Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi.$$

Remarcă

Conform lemei anterioare, pentru orice $\varphi, \psi \in E$,

$$\varphi \sim_\Sigma \psi \quad \text{ddacă} \quad \Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ și } \Sigma \vdash \psi \rightarrow \varphi,$$

pentru că $\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$.

Lemă

$\sim_\Sigma$ este o relație de echivalență pe E.

Demonstrație: Conform (PI), pentru orice $\varphi \in E$, $\vdash \varphi \to \varphi$, deci $\Sigma \vdash \varphi \to \varphi$, așadar $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi$ conform remarcii anterioare, i. e. $\varphi \sim_\Sigma \varphi$, prin urmare $\sim_\Sigma$ este reflexivă.

Pentru orice $\varphi, \psi \in E$, conform regulii de deducție **comutativitatea echivalenței**, $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ ddacă $\Sigma \vdash \psi \leftrightarrow \varphi$, așadar $\varphi \sim_\Sigma \psi$ ddacă $\psi \sim_\Sigma \varphi$, deci $\sim_\Sigma$ este simetrică.

Fie $\varphi, \psi, \chi \in E$ a. î. $\varphi \sim_\Sigma \psi$ și $\psi \sim_\Sigma \chi$, i. e. $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ și $\Sigma \vdash \psi \leftrightarrow \chi$, ceea ce este echivalent, conform remarcii anterioare, cu $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$, $\Sigma \vdash \psi \to \chi$, $\Sigma \vdash \chi \to \psi$ și $\Sigma \vdash \psi \to \varphi$. Atunci $\Sigma \vdash \varphi \to \chi$ și $\Sigma \vdash \chi \to \varphi$, conform regulii de deducție **tranzitivitatea implicației**. Din remarca anterioară, rezultă că $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \chi$, i. e. $\varphi \sim_\Sigma \chi$, așadar $\sim_\Sigma$ este tranzitivă.

Deci $\sim_\Sigma$ este o relație de echivalență pe E.

Notație

Să notăm, pentru fiecare $\varphi \in E$, cu $\widehat{\varphi}^\Sigma := \{\psi \in E \mid \varphi \sim_\Sigma \psi\}$ clasa de echivalență a lui φ raportat la relația de echivalență $\sim_\Sigma$, și să considerăm mulțimea factor $E/_{\sim_\Sigma} = \{\widehat{\varphi}^\Sigma \mid \varphi \in E\}$.

O relație de ordine pe mulțimea factor

Definiție

Pe mulțimea factor $E/_{\sim_\Sigma}$, definim relația binară $\leq_\Sigma$, prin: oricare ar fi $\varphi, \psi \in E$, $\widehat{\varphi}^\Sigma \leq_\Sigma \widehat{\psi}^\Sigma$ ddacă $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$.

Propoziție

$\leq_\Sigma$ este bine definită.

Demonstrație: Fie $\varphi, \psi, \varphi', \psi' \in E$ a. î. $\varphi \sim_\Sigma \varphi'$ și $\psi \sim_\Sigma \psi'$, i. e. $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'$ și $\Sigma \vdash \psi \leftrightarrow \psi'$, adică $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \varphi'$, $\Sigma \vdash \varphi' \rightarrow \varphi$, $\Sigma \vdash \psi \rightarrow \psi'$ și $\Sigma \vdash \psi' \rightarrow \psi$, conform remarcii anterioare.

Avem de demonstrat că $\widehat{\varphi}^\Sigma \leq_\Sigma \widehat{\psi}^\Sigma$ ddacă $\widehat{\varphi'}^\Sigma \leq_\Sigma \widehat{\psi'}^\Sigma$, i. e. că $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ ddacă $\Sigma \vdash \varphi' \rightarrow \psi'$.

Să presupunem că $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$. Această relație și faptul că $\Sigma \vdash \varphi' \rightarrow \varphi$ și $\Sigma \vdash \psi \rightarrow \psi'$, împreună cu regula de deducție **tranzitivitatea implicației**, implică $\Sigma \vdash \varphi' \rightarrow \psi'$. Implicația reciprocă se demonstrează în mod similar.

Așadar, $\leq_\Sigma$ este bine definită.

Posetul astfel obținut este latice distributivă

Lemă

$\leq_\Sigma$ este o relație de ordine parțială pe $E/_{\sim_\Sigma}$.

Demonstrație: Conform (PI), pentru orice $\varphi \in E$, $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$, deci $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \varphi$, i. e. $\widehat{\varphi}^\Sigma \leq_\Sigma \widehat{\varphi}^\Sigma$, așadar $\leq_\Sigma$ este reflexivă.
Din remarca precedentă, pentru orice $\varphi, \psi \in E$ a. î. $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ și $\Sigma \vdash \psi \rightarrow \varphi$, rezultă că $\varphi \sim_\Sigma \psi$, i. e. $\widehat{\varphi}^\Sigma = \widehat{\psi}^\Sigma$, deci $\leq_\Sigma$ este antisimetrică.
Regula de deducție **tranzitivitatea implicației** ne asigură de faptul că, pentru orice $\varphi, \psi, \chi \in E$ a. î. $\widehat{\varphi}^\Sigma \leq_\Sigma \widehat{\psi}^\Sigma$ și $\widehat{\psi}^\Sigma \leq_\Sigma \widehat{\chi}^\Sigma$, i. e. $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ și $\Sigma \vdash \psi \rightarrow \chi$, rezultă că $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \chi$, i. e. $\widehat{\varphi}^\Sigma \leq_\Sigma \widehat{\chi}^\Sigma$, ceea ce înseamnă că $\leq_\Sigma$ este tranzitivă.
Deci $\leq_\Sigma$ este o relație de ordine pe $E/_{\sim_\Sigma}$.

Propoziție

$(E/_{\sim_\Sigma}, \leq_\Sigma)$ este o latice distributivă, în care, pentru orice $\varphi, \psi \in E$,
$\inf\{\widehat{\varphi}^\Sigma, \widehat{\psi}^\Sigma\} = \widehat{\varphi \wedge \psi}^\Sigma$ *și* $\sup\{\widehat{\varphi}^\Sigma, \widehat{\psi}^\Sigma\} = \widehat{\varphi \vee \psi}^\Sigma$.
Vom nota, pentru orice $\varphi, \psi \in E$, $\widehat{\varphi}^\Sigma \wedge_\Sigma \widehat{\psi}^\Sigma := \widehat{\varphi \wedge \psi}^\Sigma$ și $\widehat{\varphi}^\Sigma \vee_\Sigma \widehat{\psi}^\Sigma := \widehat{\varphi \vee \psi}^\Sigma$.

Demonstrație: Conform lemei precedente, $(E/\sim_\Sigma, \leq_\Sigma)$ este un poset.
Fie $\varphi, \psi \in E$, arbitrare, fixate.

Demonstrăm că, în posetul $(E/\sim_\Sigma, \leq_\Sigma)$, $\widehat{\varphi \wedge \psi}^\Sigma = \inf\{\widehat{\varphi}^\Sigma, \widehat{\psi}^\Sigma\}$, i. e. $\widehat{\varphi \wedge \psi}^\Sigma$ este cel mai mare minorant al elementelor $\widehat{\varphi}^\Sigma$ și $\widehat{\psi}^\Sigma$, i. e.:

(a) $\widehat{\varphi \wedge \psi}^\Sigma \leq_\Sigma \widehat{\varphi}^\Sigma$ și $\widehat{\varphi \wedge \psi}^\Sigma \leq_\Sigma \widehat{\psi}^\Sigma$, i. e. $\Sigma \vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$ și $\Sigma \vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$;

(b) pentru orice $\chi \in E$ a. î. $\widehat{\chi}^\Sigma \leq_\Sigma \widehat{\varphi}^\Sigma$ și $\widehat{\chi}^\Sigma \leq_\Sigma \widehat{\psi}^\Sigma$, rezultă că $\widehat{\chi}^\Sigma \leq_\Sigma \widehat{\varphi \wedge \psi}^\Sigma$, i. e., pentru orice $\chi \in E$ a. î. $\Sigma \vdash \chi \rightarrow \varphi$ și $\Sigma \vdash \chi \rightarrow \psi$, rezultă că $\Sigma \vdash \chi \rightarrow (\varphi \wedge \psi)$.

Condiția (a) rezultă din teoremele formale **slăbirea conjuncției**, iar (b) din regula de deducție **slăbirea conjuncției**.

Acum demonstrăm că, în posetul $(E/\sim_\Sigma, \leq_\Sigma)$, $\widehat{\varphi \vee \psi}^\Sigma = \sup\{\widehat{\varphi}^\Sigma, \widehat{\psi}^\Sigma\}$, i. e. $\widehat{\varphi \vee \psi}^\Sigma$ este cel mai mic majorant al elementelor $\widehat{\varphi}^\Sigma$ și $\widehat{\psi}^\Sigma$, i. e.:

(c) $\widehat{\varphi}^\Sigma \leq_\Sigma \widehat{\varphi \vee \psi}^\Sigma$ și $\widehat{\psi}^\Sigma \leq_\Sigma \widehat{\varphi \vee \psi}^\Sigma$, i. e. $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$ și $\Sigma \vdash \psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$;

(d) pentru orice $\chi \in E$ a. î. $\widehat{\varphi}^\Sigma \leq_\Sigma \widehat{\chi}^\Sigma$ și $\widehat{\psi}^\Sigma \leq_\Sigma \widehat{\chi}^\Sigma$, rezultă că $\widehat{\varphi \vee \psi}^\Sigma \leq_\Sigma \widehat{\chi}^\Sigma$, i. e., pentru orice $\chi \in E$ a. î. $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \chi$ și $\Sigma \vdash \psi \rightarrow \chi$, rezultă că $\Sigma \vdash (\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi$.

Condiția (c) rezultă din teoremele formale **slăbirea**, iar (d) din regula de deducție **slăbirea**.

Așadar, am demonstrat că $(E/{\sim_\Sigma}, \leq_\Sigma)$ este o latice, în care, pentru orice $\varphi, \psi \in E$, conjuncția este $\widehat{\varphi}^\Sigma \wedge_\Sigma \widehat{\psi}^\Sigma = \widehat{\varphi \wedge \psi}^\Sigma$, iar disjuncția este $\widehat{\varphi}^\Sigma \vee_\Sigma \widehat{\psi}^\Sigma = \widehat{\varphi \vee \psi}^\Sigma$. Unicitatea infimumului și a supremumului într–un poset demonstrează că $\vee_\Sigma$ și $\wedge_\Sigma$ sunt bine definite.

Teorema formală **distributivitatea disjuncției față de conjuncție** implică faptul că, pentru orice $\varphi, \psi, \chi \in E$, $\Sigma \vdash ((\varphi \wedge \psi) \vee \chi) \leftrightarrow ((\varphi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi))$, deci $(\widehat{\varphi}^\Sigma \wedge_\Sigma \widehat{\psi}^\Sigma) \vee_\Sigma \widehat{\chi}^\Sigma = (\widehat{\varphi}^\Sigma \vee_\Sigma \widehat{\chi}^\Sigma) \wedge_\Sigma (\widehat{\psi}^\Sigma \vee_\Sigma \widehat{\chi}^\Sigma)$, prin urmare laticea $(E/{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma)$ este distributivă (amintim că, în orice latice, fiecare dintre legile de distributivitate o implică pe cealaltă).

Remarcă

Conform teoremelor formale **falsul implică orice** și **orice implică adevărul:**, pentru orice $\varphi, \psi \in E$, $\Sigma \vdash (\varphi \wedge \neg \varphi) \rightarrow \psi$ și $\Sigma \vdash \psi \rightarrow (\varphi \vee \neg \varphi)$, așadar, pentru orice $\varphi, \psi \in E$, $\widehat{\varphi \wedge \neg \varphi}^\Sigma \leq_\Sigma \widehat{\psi}^\Sigma \leq_\Sigma \widehat{\varphi \vee \neg \varphi}^\Sigma$. Aceasta înseamnă că, indiferent cine este $\varphi \in E$, $\widehat{\varphi \wedge \neg \varphi}^\Sigma$ și $\widehat{\varphi \vee \neg \varphi}^\Sigma$ sunt, respectiv, primul element și ultimul element al laticii $(E/{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma)$. Vom nota $0_\Sigma := \widehat{\varphi \wedge \neg \varphi}^\Sigma$ și $1_\Sigma := \widehat{\varphi \vee \neg \varphi}^\Sigma$, pentru un $\varphi \in E$, arbitrar. Unicitatea minimului și a maximului unui poset arată că această definiție nu depinde de alegerea lui $\varphi \in E$, adică 0_Σ și 1_Σ sunt bine definite.

Posetul astfel obținut este algebră Boole

- Am obținut:

Propoziție

$(E/_{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$ *este o latice distributivă mărginită.*

Definiție

Pentru orice $\varphi \in E$, definim: $\overline{\widehat{\varphi}^\Sigma}^\Sigma := \widehat{\neg\varphi}^\Sigma$.

Remarcă

Conform regulii de deducție **negarea termenilor unei echivalențe**, definiția de mai sus pentru operația unară $\bar{\ }^\Sigma : E/_{\sim_\Sigma} \rightarrow E/_{\sim_\Sigma}$ este corectă, pentru că nu depinde de reprezentanții claselor din $E/_{\sim_\Sigma}$, ceea ce rezultă și din demonstrația următoare și unicitatea complementului în latici distributive mărginite.

Algebra Lindenbaum–Tarski a lui Σ asociată lui $\mathcal{L}$

Propoziție

$(E/_{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, \overline{\cdot}^\Sigma, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$ *este o algebră Boole.*

Demonstrație: Rezultatele anterioare arată că $(E/_{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$ este o latice distributivă mărginită în care, pentru orice $\varphi \in E$, au loc egalitățile:

- $\widehat{\varphi}^\Sigma \wedge_\Sigma \overline{\widehat{\varphi}^\Sigma}^\Sigma = \widehat{\varphi}^\Sigma \wedge_\Sigma \widehat{\neg\varphi}^\Sigma = \widehat{\varphi \wedge \neg\varphi}^\Sigma = 0_\Sigma$ și
- $\widehat{\varphi}^\Sigma \vee_\Sigma \overline{\widehat{\varphi}^\Sigma}^\Sigma = \widehat{\varphi}^\Sigma \vee_\Sigma \widehat{\neg\varphi}^\Sigma = \widehat{\varphi \vee \neg\varphi}^\Sigma = 1_\Sigma$,

prin urmare $\overline{\widehat{\varphi}^\Sigma}^\Sigma$ este complementul lui $\widehat{\varphi}^\Sigma$.
Aceasta înseamnă că $(E/_{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, \overline{\cdot}^\Sigma, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$ este o algebră Boole.

Definiție

Algebra Boole $(E/_{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, \overline{\cdot}^\Sigma, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$ se numește *algebra Lindenbaum–Tarski a lui Σ asociată sistemului formal $\mathcal{L}$.*

Remarcă (surjecția canonica transformă conectorii logici în operații booleene: nu e morfism boolean, pentru că E nu e algebră Boole)

Dacă notăm cu $p_\Sigma : E \to E/_{\sim_\Sigma}$ surjecția canonică ($p_\Sigma(\varphi) := \widehat{\varphi}^\Sigma$ pentru orice $\varphi \in E$), atunci, oricare ar fi $\varphi, \psi \in E$, au loc următoarele identități (unde $\to_\Sigma$ și $\leftrightarrow_\Sigma$ sunt, respectiv, implicația și echivalența booleană în algebra Boole $(E/_{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, \overline{\cdot}^\Sigma, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$):

- (a) $p_\Sigma(\varphi \vee \psi) = p_\Sigma(\varphi) \vee_\Sigma p_\Sigma(\psi)$;
- (b) $p_\Sigma(\varphi \wedge \psi) = p_\Sigma(\varphi) \wedge_\Sigma p_\Sigma(\psi)$;
- (c) $p_\Sigma(\neg\,\varphi) = \overline{p_\Sigma(\varphi)}^\Sigma$;
- (d) $p_\Sigma(\varphi \to \psi) = p_\Sigma(\varphi) \to_\Sigma p_\Sigma(\psi)$;
- (e) $p_\Sigma(\varphi \leftrightarrow \psi) = p_\Sigma(\varphi) \leftrightarrow_\Sigma p_\Sigma(\psi)$.

Într–adevăr, identitățile (a), (b) și (c) sunt chiar definițiile operațiilor algebrei Boole $E/_{\sim_\Sigma}$. Definiția implicației booleene, (a) și (c) arată că $p_\Sigma(\varphi) \to_\Sigma p_\Sigma(\psi) = \overline{p_\Sigma(\varphi)}^\Sigma \vee_\Sigma p_\Sigma(\psi) = p_\Sigma(\neg\,\varphi \vee \psi)$, ceea ce arată că (d) este echivalent cu faptul că $\Sigma \vdash (\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\,\varphi \vee \psi)$, care rezultă din (15), (16) și prima remarcă din această secțiune. (e) se obține, direct, din (b) și (d).
Cele cinci identități de mai sus arată cum conectorii logici sunt convertiți în operații booleene.

Enunțurile deductibile din Σ sunt în 1_Σ

Lemă

Pentru orice $\varphi \in E$, $\Sigma \vdash \varphi$ *ddacă* $\widehat{\varphi}^\Sigma = 1_\Sigma$.

Demonstrație: Fie $\varphi \in E$, arbitrar, fixat.

Au loc echivalențele: $\widehat{\varphi}^\Sigma = 1_\Sigma$ ddacă $\widehat{\varphi}^\Sigma = \widehat{\varphi \vee \neg \varphi}^\Sigma$ ddacă $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow (\varphi \vee \neg \varphi)$.
Așadar, avem de demonstrat că: $\Sigma \vdash \varphi$ ddacă $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow (\varphi \vee \neg \varphi)$.
Să presupunem că $\Sigma \vdash \varphi$. Conform (A_1), $\vdash \varphi \to ((\varphi \vee \neg \varphi) \to \varphi)$, deci $\Sigma \vdash \varphi \to ((\varphi \vee \neg \varphi) \to \varphi)$. Prin (MP), obținem: $\Sigma \vdash (\varphi \vee \neg \varphi) \to \varphi$. Conform teoremei formale **orice implică adevărul**, $\Sigma \vdash \varphi \to (\varphi \vee \neg \varphi)$. Așadar, $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow (\varphi \vee \neg \varphi)$, după cum ne asigură prima remarcă din această secțiune.
Reciproc, să presupunem că $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow (\varphi \vee \neg \varphi)$, sau, echivalent, $\Sigma \vdash (\varphi \vee \neg \varphi) \leftrightarrow \varphi$, așadar $\Sigma \vdash (\varphi \vee \neg \varphi) \to \varphi$, conform aceleiași prime remarci din această secțiune. Dar (PTE) afirmă că $\vdash \varphi \vee \neg \varphi$, și deci $\Sigma \vdash \varphi \vee \neg \varphi$. Prin (MP), obținem $\Sigma \vdash \varphi$.

Remarcă

Lema anterioară ne oferă o metodă algebrică pentru a verifica dacă un enunț este o consecință sintactică a lui Σ.

Pentru $\Sigma = \emptyset$, avem teoremele formale

Notație

În cazul în care $\Sigma = \emptyset$:

- relația de echivalență $\sim_\emptyset$ se notează, simplu, $\sim$, și are următoarea definiție: pentru orice $\varphi, \psi \in E$,

$$\varphi \sim \psi \ \text{ ddacă } \ \vdash \varphi \leftrightarrow \psi\,;$$

- clasele de echivalență ale lui $\sim$, $\widehat{\varphi}^{\emptyset}$ ($\varphi \in E$), se notează $\widehat{\varphi}$;
- relația de ordine $\leq_\emptyset$ se notează $\leq$;
- operațiile $\vee_\emptyset$, $\wedge_\emptyset$, $\bar{\ }^{\emptyset}$, $0_\emptyset$ și $1_\emptyset$ se notează, respectiv, $\vee$, $\wedge$, $\bar{\ }$, 0 și 1.

Definiție

$\sim$ se numește *echivalența logică* sau *echivalența semantică* între enunțuri.
Algebra Boole $(E/_{\sim}, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$ se numește *algebra Lindenbaum-Tarski asociată sistemului formal $\mathcal{L}$*.

Lema anterioară devine, în acest caz, o caracterizare a teoremelor formale:

Lemă

Pentru orice $\varphi \in E$, $\vdash \varphi$ ddacă $\widehat{\varphi} = 1$.

Algebra Lindenbaum–Tarski a Logicii Propoziționale Clasice

Notă

- A se vedea la seminar exemple de **demonstrații algebrice** în logica propozițională clasică (realizate prin calcul boolean, folosind lema anterioară).
- În mod tipic, pentru a folosi lema anterioară în cadrul unei **demonstrații algebrice** pentru o deducție formală din ipoteze: $\Sigma \vdash \varphi$, cu $\Sigma \subseteq E$ și $\varphi \in E$, se folosește faptul că, pentru orice ipoteză $\sigma \in \Sigma$, are loc $\Sigma \vdash \sigma$, așadar $\widehat{\sigma}^{\Sigma} = 1_{\Sigma}$.

Notă

A se vedea, în cărțile de G. Georgescu din bibliografia cursului, construcția algebrei Lindenbaum–Tarski $E/_{\sim}$, efectuată prin raționamentul de mai sus scris în cazul particular $\Sigma = \emptyset$.
Am considerat că tratarea directă a cazului general nu crește dificultatea parcursului anterior, și, din acest motiv, am ales să prezint acest caz general, a cărui particularizare la situația $\Sigma = \emptyset$ este imediată.

Interpretări (evaluări, semantici) pentru logica $\mathcal{L}$

Definiție (o interpretare e o funcție de la mulțimea variabilelor propoziționale la algebra Boole standard: $\mathcal{L}_2 = \{0, 1\}$, cu $0 < 1$, i. e. o funcție care dă valori de adevăr variabilelor propoziționale)

O *interpretare* (*evaluare*, *semantică*) a lui $\mathcal{L}$ este o funcție oarecare $h : V \to \mathcal{L}_2$.

Propoziție (există o unică funcție care prelungește o interpretare la mulțimea tuturor enunțurilor și transformă conectorii logici primitivi în operații Booleene, așadar calculează valorile de adevăr ale tuturor enunțurilor pornind de la cele ale variabilelor propoziționale)

Pentru orice interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$, există o unică funcție $\tilde{h} : E \to \mathcal{L}_2$ care satisface următoarele proprietăți:

- (a) $\tilde{h}(u) = h(u)$, *pentru orice* $u \in V$;
- (b) $\tilde{h}(\neg\, \varphi) = \overline{\tilde{h}(\varphi)}$, *pentru orice* $\varphi \in E$;
- (c) $\tilde{h}(\varphi \to \psi) = \tilde{h}(\varphi) \to \tilde{h}(\psi)$, *pentru orice* $\varphi, \psi \in E$.

Definiție

Funcția $\tilde{h} : E \to \mathcal{L}_2$ din propoziția anterioară se numește tot *interpretare*.

Observație

Condiția (a) din propoziția anterioară spune că $\tilde{h}\mid_V = h$, adică funcția $\tilde{h}$ prelungește pe h la E.
În condițiile (b) și (c), în membrii stângi, în argumentele lui $\tilde{h}$, $\neg$ și $\rightarrow$ sunt conectorii logici primitivi, pe când, în membrii drepți, $\bar{\ }$ și $\rightarrow$ sunt operațiile de complementare și, respectiv, implicație ale algebrei Boole $\mathcal{L}_2$. Așadar, putem spune că funcția $\tilde{h}$ transformă conectorii logici în operații booleene în algebra Boole standard.
Vom păstra notația $\tilde{h}$ pentru această unică funcție depinzând de interpretarea h.

Demonstrația propoziției anterioare: Demonstrăm existența și unicitatea lui $\tilde{h}$ prin inducție după conceptul de enunț. Fie $h : V \rightarrow \mathcal{L}_2$ o interpretare a lui $\mathcal{L}$.
Orice enunț φ se află în una **și numai una** dintre situațiile următoare:

- (E_1) $\varphi \in V$ (φ este variabilă propozițională)
- (E_2) există $\psi \in E$, a. î. $\varphi = \neg\psi$
- (E_3) există $\psi, \chi \in E$, a. î. $\varphi = \psi \rightarrow \chi$

Fiecărui $\varphi \in E$ îi asociem un element al lui $\mathcal{L}_2$, pe care îl notăm cu $\tilde{h}(\varphi)$, astfel:

1. dacă $\varphi \in V$, atunci $\tilde{h}(\varphi) := h(\varphi)$
2. dacă $\varphi = \neg\psi$ pentru un $\psi \in E$ cu proprietatea că $\tilde{h}(\psi)$ a fost definită, atunci $\tilde{h}(\varphi) := \overline{\tilde{h}(\psi)}$
3. dacă $\varphi = \psi \rightarrow \chi$ pentru două enunțuri $\psi, \chi \in E$ cu proprietatea că $\tilde{h}(\psi)$ și $\tilde{h}(\chi)$ au fost definite, atunci $\tilde{h}(\varphi) := \tilde{h}(\psi) \rightarrow \tilde{h}(\chi)$

Principiul inducției după conceptul de enunț ne asigură că, urmând cele trei reguli anterioare, se definesc, recursiv, valorile $\tilde{h}(\varphi)$, pentru toate $\varphi \in E$.
Riguros: definim $\tilde{h} \subseteq E \times \mathcal{L}_2$ ca o funcție parțială (i. e. relație binară funcțională) de la E la $\mathcal{L}_2$ cu cele trei proprietăți de mai sus, și notăm cu D mulțimea enunțurilor pentru care $\tilde{h}$ este definită:

$$D := \{\varepsilon \in E \mid (\exists\, x \in \mathcal{L}_2)\,((\varepsilon, x) \in \tilde{h})\}$$

Conform definiției lui $\tilde{h}$ prin proprietățile ①,②,③ de mai sus, D include mulțimea V a variabilelor propoziționale și este închisă la negație și implicație, așadar $E \subseteq D$, pentru că E este cea mai mică mulțime de cuvinte peste alfabetul A al simbolurilor primitive care include pe V și este închisă la $\neg$ și $\rightarrow$. Cum $D \subseteq E$, rezultă că $D = E$, adică mulțimea enunțurilor pentru care funcția parțială $\tilde{h}$ este definită este egală cu mulțimea E a tuturor enunțurilor, deci $\tilde{h}$ este funcție parțială totală (i. e. peste tot definită pe E), adică funcție $\tilde{h} : E \rightarrow \mathcal{L}_2$.
Să ne amintim că, din faptul că orice $\varphi \in E$ se află în una **și numai una** dintre cele trei situații de mai sus, am observat că φ are un unic arbore binar asociat, așadar lui φ nu i se pot asocia două valori distincte prin această recursie, i. e. valoarea $\tilde{h}(\varphi) \in \mathcal{L}_2$ este unic determinată de φ.
Aceste două proprietăți (existența și unicitatea lui $\tilde{h}(\varphi) \in \mathcal{L}_2$, pentru orice $\varphi \in E$) arată că am obținut o funcție $\tilde{h} : E \rightarrow \mathcal{L}_2$ complet și corect definită, care asociază fiecărui $\varphi \in E$ valoarea $\tilde{h}(\varphi) \in \mathcal{L}_2$.

De asemenea, $\tilde{h}$ satisface condițiile (a), (b) și (c) din enunț, prin chiar definiția ei. Am încheiat demonstrația existenței unei funcții $\tilde{h}$ care satisface cerințele din enunț, și fixăm această funcție pentru cele ce urmează, anume demonstrația unicității ei.

Fie $g : E \to \mathcal{L}_2$ o funcție care satisface aceste trei condiții:

- (a_g) $\quad g(u) = h(u)$, pentru orice $u \in V$;
- (b_g) $\quad g(\neg\,\varphi) = \overline{g(\varphi)}$, pentru orice $\varphi \in E$;
- (c_g) $\quad g(\varphi \to \psi) = g(\varphi) \to g(\psi)$, pentru orice $\varphi, \psi \in E$.

Să notăm cu M mulțimea enunțurilor în care $\tilde{h}$ și g coincid:

$$M := \{\varepsilon \in E \mid \tilde{h}(\varepsilon) = g(\varepsilon)\}$$

Demonstrăm că $M = E$, tot prin inducție după conceptul de enunț.

Pentru orice $\varphi \in V$, conform (a) și (a_g), avem: $\tilde{h}(\varphi) = h(\varphi) = g(\varphi)$, așadar $V \subseteq M$.

Pentru orice $\psi \in M$, conform (b), (b_g) și definiției lui M, avem:
$\tilde{h}(\neg\,\psi) = \overline{\tilde{h}(\psi)} = \overline{g(\psi)} = g(\neg\,\psi)$, așadar $\neg\,\psi \in M$.

Pentru orice $\psi, \chi \in M$, conform (c), (c_g) și definiției lui M, avem:
$\tilde{h}(\psi \to \chi) = \tilde{h}(\psi) \to \tilde{h}(\chi) = g(\psi) \to g(\chi) = g(\psi \to \chi)$, așadar $\psi \to \chi \in M$.

Prin urmare M include pe V și este închisă la $\neg$ și $\rightarrow$, așadar, cum E este cea mai mică submulțime a lui A^+ cu aceste proprietăți, rezultă că $E \subseteq M$, deci, cum $M \subseteq E$, avem $M = E$, adică $\tilde{h}(\varphi) = g(\varphi)$ pentru orice $\varphi \in E$, i. e. $\tilde{h} = g$, așadar $\tilde{h}$ este unica funcție cu proprietatățile din enunț.

Corolar (prelungirea unei interpretări la mulțimea enunțurilor transformă toți conectorii logici în operații booleene)

Pentru orice interpretare h și orice $\varphi, \psi \in E$, au loc:

- (d) $\quad \tilde{h}(\varphi \vee \psi) = \tilde{h}(\varphi) \vee \tilde{h}(\psi)$
- (e) $\quad \tilde{h}(\varphi \wedge \psi) = \tilde{h}(\varphi) \wedge \tilde{h}(\psi)$
- (f) $\quad \tilde{h}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \tilde{h}(\varphi) \leftrightarrow \tilde{h}(\psi)$

Demonstrație: Conform definițiilor conectorilor logici derivați și definiției lui $\tilde{h}$:

- $\tilde{h}(\varphi \vee \psi) = \tilde{h}(\neg \varphi \rightarrow \psi) = \overline{\tilde{h}(\varphi)} \rightarrow \tilde{h}(\psi) = \overline{\overline{\tilde{h}(\varphi)}} \vee \tilde{h}(\psi) = \tilde{h}(\varphi) \vee \tilde{h}(\psi)$
- $\tilde{h}(\varphi \wedge \psi) = \tilde{h}(\neg(\varphi \rightarrow \neg \psi)) = \overline{\tilde{h}(\varphi) \rightarrow \overline{\tilde{h}(\psi)}} = \overline{\overline{\tilde{h}(\varphi)} \vee \overline{\tilde{h}(\psi)}} = \overline{\overline{\tilde{h}(\varphi) \wedge \tilde{h}(\psi)}} = \tilde{h}(\varphi) \wedge \tilde{h}(\psi)$
- $\tilde{h}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \tilde{h}((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)) = (\tilde{h}(\varphi) \rightarrow \tilde{h}(\psi)) \wedge (\tilde{h}(\psi) \rightarrow \tilde{h}(\varphi)) = \tilde{h}(\varphi) \leftrightarrow \tilde{h}(\psi)$

Satisfacere și mulțimi satisfiabile

Fie h o interpretare, φ un enunț și Σ o mulțime de enunțuri.

Definiție (enunțuri adevărate pentru anumite valori de adevăr atribuite variabilelor propoziționale din scrierea lor)

Spunem că φ este *adevărat în interpretarea h* sau că *h satisface* φ ddacă $\tilde{h}(\varphi) = 1$.
φ se zice *fals în interpretarea h* ddacă $\tilde{h}(\varphi) = 0$.
Spunem că *h satisface* Σ sau că h este un *model pentru* Σ ddacă h satisface toate elementele lui Σ.
Spunem că Σ *admite un model* sau că mulțimea Σ este *satisfiabilă* ddacă există un model pentru Σ.
Spunem că φ *admite un model* sau că φ este *satisfiabil* ddacă $\{\varphi\}$ este satisfiabilă.

Notație

Faptul h satisface enunțul φ se notează cu: $h \vDash \varphi$.
Faptul că h satisface mulțimea Σ de enunțuri se notează cu: $h \vDash \Sigma$.

Remarcă

Dacă h este model pentru Σ, atunci h este model pentru orice submulțime a lui Σ.

Vom vedea că orice interpretare satisface mulțimea T a teoremelor formale. Deocamdată, să observăm că:

Remarcă

Orice interpretare satisface $\emptyset$.
Într–adevăr, pentru orice interpretare h, avem:

$$h \vDash \emptyset \iff (\forall\, \varphi \in \emptyset)\,(\tilde{h}(\varphi) = 1) \iff \overbrace{(\forall\, \varphi)\;(\underbrace{\underbrace{\varphi \in \emptyset}_{\text{fals pentru orice } \varphi} \implies \tilde{h}(\varphi) = 1)}_{\text{adevărat pentru orice } \varphi}}^{\text{adevărat}}.$$

Definiție (adevărurile semantice și deducția semantică)

Enunțul φ se zice *universal adevărat* ddacă φ este adevărat în orice interpretare.
Enunțurile universal adevărate se mai numesc *adevărurile semantice* sau *tautologiile* lui $\mathcal{L}$.
Spunem că φ *se deduce semantic din* Σ sau că φ *este o consecință semantică a lui* Σ ddacă φ este adevărat în orice interpretare care satisface pe Σ.

Notație

Faptul că φ este universal adevărat se notează cu: $\vDash \varphi$.
Faptul că φ se deduce semantic din Σ se notează cu: $\Sigma \vDash \varphi$.

Le fel cum adevărurile sintactice (i. e. teoremele formale) sunt exact enunțurile deductibile sintactic din $\emptyset$:

Remarcă (adevărurile semantice sunt exact enunțurile deductibile semantic din $\emptyset$)

$$\vDash \varphi \text{ ddacă } \emptyset \vDash \varphi.$$

Într–adevăr, conform definițiilor de mai sus, remarcii anterioare și faptului că o implicație cu antecedentul adevărat este adevărată ddacă și concluzia implicației este adevărată:

$$\emptyset \vDash \varphi \Leftrightarrow (\forall\, h : V \to \mathcal{L}_2)\,(\underbrace{h \vDash \emptyset}_{\text{adevărat}} \Rightarrow h \vDash \varphi) \Leftrightarrow (\forall\, h : V \to \mathcal{L}_2)\,(h \vDash \varphi) \Leftrightarrow \vDash \varphi.$$

Observație (valorile de adevăr atribuite enunțurilor de o interpretare se calculează pe baza valorilor de adevăr atribuite variabilelor propoziționale de acea interpretare, folosind proprietatea interpretării de a transforma conectorii logici în operații booleene)

Valoarea unei interpretări într–un anumit enunț, uneori numită *interpretarea acelui enunț*, este valoarea de adevăr 0 sau 1 care se obține atunci când se atribuie, prin acea interpretare, valori de adevăr din $\mathcal{L}_2$ tuturor variabilelor propoziționale care apar în acel enunț. Un enunț universal adevărat, i. e. un adevăr semantic, o tautologie, este un enunț a cărui valoare de adevăr este 1 pentru orice valori de adevăr atribuite variabilelor propoziționale care apar în acel enunț.

În cele ce urmează, vom vedea două rezultate deosebit de importante privind sistemul formal $\mathcal{L}$: **Teorema de completitudine** și o generalizare a ei, **Teorema de completitudine tare**, numită și **Teorema de completitudine extinsă**. **Teorema de completitudine a lui** $\mathcal{L}$ afirmă că adevărurile sintactice ale lui $\mathcal{L}$ coincid cu adevărurile semantice ale lui $\mathcal{L}$, i. e. teoremele formale ale lui $\mathcal{L}$ sunt exact enunțurile universal adevărate, tautologiile lui $\mathcal{L}$. **Teorema de completitudine tare pentru** $\mathcal{L}$ afirmă că, în $\mathcal{L}$, consecințele sintactice ale unei mulțimi Σ de enunțuri coincid cu consecințele semantice ale lui Σ, i. e. enunțurile care se deduc sintactic din Σ sunt exact enunțurile care se deduc semantic din Σ.

TCT pentru logica propozițională clasică

Teoremă (Teorema de completitudine tare (extinsă) pentru $\mathcal{L}$ (TCT))

Pentru orice enunț φ și orice mulțime de enunțuri Σ:

$$\Sigma \vdash \varphi \quad \textit{ddacă} \quad \Sigma \vDash \varphi.$$

Demonstrație: Fie Σ o mulțime de enunțuri și φ un enunț, arbitrare.
"$\Rightarrow$:" Notăm cu M mulțimea consecințelor semantice ale lui Σ:

$$M := \{\varepsilon \in E \mid \Sigma \vDash \varepsilon\}$$

Demonstrăm, prin inducție după conceptul de consecință sintactică a mulțimii de ipoteze Σ, că M include mulțimea consecințelor sintactice ale lui Σ:

$$\{\varepsilon \in E \mid \Sigma \vdash \varepsilon\} \subseteq \{\varepsilon \in E \mid \Sigma \vDash \varepsilon\}$$

Fie $h : V \to \mathcal{L}_2$, a. î. $h \vDash \Sigma$, arbitrară.

- (CS_1) Dacă φ este o axiomă, atunci avem subcazurile:

• axioma (A_1): există $\psi, \chi \in E$ a. î. $\varphi = \psi \to (\chi \to \psi)$

În acest subcaz, $\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\psi) \to (\tilde{h}(\chi) \to \tilde{h}(\psi)) = \overline{\tilde{h}(\psi)} \vee \overline{\tilde{h}(\chi)} \vee \tilde{h}(\psi)$
$= 1 \vee \overline{\tilde{h}(\chi)} = 1$, așadar $\varphi \in M$.

• axioma (A_2): există $\alpha, \beta, \gamma \in E$ a. î.
$\varphi = (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
Dacă notăm $a := \tilde{h}(\alpha)$, $b := \tilde{h}(\beta)$ și $c := \tilde{h}(\gamma)$, atunci:
$\tilde{h}(\varphi) = (a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c))$ în $\mathcal{L}_2$, unde $1 \to 0 = 0$, iar celelalte trei implicații au valoarea 1, așadar:
dacă $a = 0$, atunci $\tilde{h}(\varphi) = 1 \to (1 \to 1) = 1 \to 1 = 1$;
dacă $a = 1$ și $b \to c = 0$, atunci $\tilde{h}(\varphi) = 0 \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$;
dacă $b \to c = 1$, atunci $b \leq c$, și deci $a \to b = \overline{a} \vee b \leq \overline{a} \vee c = a \to c$, prin urmare $(a \to b) \to (a \to c) = 1$, deci $\tilde{h}(\varphi) = (a \to 1) \to 1 = 1$.
Așadar $\varphi \in M$ și în acest subcaz.
• axioma (A_3): există $\alpha, \beta \in E$ a. î. $\varphi = (\neg\,\alpha \to \neg\,\beta) \to (\beta \to \alpha)$
Dacă notăm $a := \tilde{h}(\alpha)$ și $b := \tilde{h}(\beta)$, atunci $\tilde{h}(\varphi) = (\overline{a} \to \overline{b}) \to (b \to a) = 1$, pentru că $[b \leq a$ ddacă $\overline{a} \leq \overline{b}]$, și deci $[b \to a = 1$ ddacă $\overline{a} \to \overline{b} = 1]$, iar în caz contrar ambele implicații sunt 0, pentru că ne situăm în $\mathcal{L}_2$, deci $\overline{a} \to \overline{b} = b \to a$, prin urmare $(\overline{a} \to \overline{b}) \to (b \to a) = 1$. Deci rezultă și aici că $\varphi \in M$.

- (CS_0) Dacă $\varphi \in \Sigma$, atunci, cum $h \vDash \Sigma$, rezultă că $\tilde{h}(\varphi) = 1$, deci $\varphi \in M$.
- (CS_2) Dacă există $\psi \in E$, a. î. $\psi, \psi \to \varphi \in M$, adică $\tilde{h}(\psi) = 1$ și $\tilde{h}(\psi \to \varphi) = 1$, atunci $\tilde{h}(\psi) \to \tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\psi \to \varphi) = 1$, așadar $1 = \tilde{h}(\psi) \leq \tilde{h}(\varphi)$, deci $\tilde{h}(\varphi) = 1$, adică $\varphi \in M$.

Prin urmare, mulțimea M a consecințelor semantice ale lui Σ include mulțimea $Ax \cup \Sigma$ și este închisă la regula (MP), așadar M include cea mai mică mulțime de enunțuri cu aceste proprietăți, adică mulțimea consecințelor sintactice ale lui Σ.

Așadar, dacă φ este consecință sintactică lui Σ, atunci φ este consecință semantică lui Σ.

"$\Leftarrow$:" Presupunem că $\Sigma \vDash \varphi$, și presupunem prin absurd că $\Sigma \nvdash \varphi$, ceea ce este echivalent cu $\widehat{\varphi}^\Sigma \neq 1_\Sigma$ în algebra Boole $E/_{\sim_\Sigma}$. Prin urmare $\widehat{\varphi}^\Sigma \in E/_{\sim_\Sigma} \setminus \{1_\Sigma\}$, în particular $|E/_{\sim_\Sigma}| > 1$, deci algebra Boole $E/_{\sim_\Sigma}$ este netrivială.
Aplicând **Teorema de reprezentare a lui Stone** algebrei Boole netriviale $E/_{\sim_\Sigma}$, obținem că există o mulțime $X \neq \emptyset$ și există un morfism boolean injectiv $d : E/_{\sim_\Sigma} \to \mathcal{L}_2^X = \{f \mid f : X \to \mathcal{L}_2\}$.
$\widehat{\varphi}^\Sigma \neq 1_\Sigma$ în $E/_{\sim_\Sigma}$ și $d : E/_{\sim_\Sigma} \to \mathcal{L}_2^X$ este injectiv, prin urmare $d(\widehat{\varphi}^\Sigma) \neq d(1) = 1$, deci $d(\widehat{\varphi}^\Sigma) \neq 1(=$ funcția constantă 1) în $\mathcal{L}_2^X = \{f \mid f : X \to \mathcal{L}_2\}$, așadar există un element $x \in X$ cu $d(\widehat{\varphi}^\Sigma)(x) \neq 1$ în $\mathcal{L}_2$.
Fie $\pi : \mathcal{L}_2^X \to \mathcal{L}_2$, definită prin: pentru orice $f \in \mathcal{L}_2^X$, $\pi(f) := f(x) \in \mathcal{L}_2$.
Se arată ușor că π este un morfism boolean. De exemplu, să verificăm comutarea lui π cu $\vee$, iar comutările lui π cu celelalte operații de algebre Boole se demonstrează analog: pentru orice $f, g \in \mathcal{L}_2^X$,
$\pi(f \vee g) = (f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x) = \pi(f) \vee \pi(g)$ în $\mathcal{L}_2$.
Considerăm următoarele funcții: incluziunea $i : V \to E$ ($i(u) := u$ pentru fiecare $u \in V$), surjecția canonică $p_\Sigma : E \to E/_{\sim_\Sigma}$, morfismul boolean injectiv $d : E/_{\sim_\Sigma} \to \mathcal{L}_2^X$ considerat mai sus și morfismul boolean $\pi : \mathcal{L}_2^X \to \mathcal{L}_2$ considerat mai sus. Să notăm compunerea acestor funcții cu h: $h := \pi \circ d \circ p_\Sigma \circ i$;
$h : V \to \mathcal{L}_2$ este o interpretare.

$$V \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p_\Sigma} E/{\sim_\Sigma} \xrightarrow{d} \mathcal{L}_2^X \xrightarrow{\pi} \mathcal{L}_2 \qquad h := \pi \circ d \circ p_\Sigma \circ i : V \to \mathcal{L}_2$$

Demonstrăm, prin inducție după conceptul de enunț, folosind definiția lui $\tilde{h}$, că, pentru orice $\alpha \in E$, $\tilde{h}(\alpha) = d(\widehat{\alpha}^\Sigma)(x)$, adică:

$$E \xrightarrow{p_\Sigma} E/{\sim_\Sigma} \xrightarrow{d} \mathcal{L}_2^X \xrightarrow{\pi} \mathcal{L}_2 \qquad \tilde{h} = \pi \circ d \circ p_\Sigma : E \to \mathcal{L}_2$$

Așadar demonstrăm că următoarea mulțime este egală cu E:

$$M := \{\alpha \in E \mid \tilde{h}(\alpha) = d(\widehat{\alpha}^\Sigma)(x)\}$$

Fie α un enunț arbitrar.

•(E_1) Dacă $\alpha \in V$, atunci $\tilde{h}(\alpha) = h(\alpha) = \pi(d(p_\Sigma(i(\alpha)))) = \pi(d(p_\Sigma(\alpha))) = \pi(d(\widehat{\alpha}^\Sigma)) = d(\widehat{\alpha}^\Sigma)(x)$, așadar $\alpha \in M$.

•(E_2) Dacă există $\beta \in M$ a. î. $\alpha = \neg\beta$, atunci $\tilde{h}(\beta) = d(\widehat{\beta}^\Sigma)(x)$, prin urmare $\tilde{h}(\alpha) = \tilde{h}(\neg\beta) = \overline{\tilde{h}(\beta)} = \overline{d(\widehat{\beta}^\Sigma)(x)} = (\overline{d(\widehat{\beta}^\Sigma)})(x) = d(\overline{\widehat{\beta}^\Sigma}^\Sigma)(x) = d(\widehat{\neg\beta}^\Sigma)(x) = d(\widehat{\alpha}^\Sigma)(x)$, așadar $\alpha \in M$.

•(E_3) Dacă există $\beta, \gamma \in M$ a. î. $\alpha = \beta \to \gamma$, atunci $\tilde{h}(\beta) = d(\widehat{\beta}^\Sigma)(x)$ și $\tilde{h}(\gamma) = d(\widehat{\gamma}^\Sigma)(x)$, prin urmare
$\tilde{h}(\alpha) = \tilde{h}(\beta \to \gamma) = \tilde{h}(\beta) \to \tilde{h}(\gamma) = d(\widehat{\beta}^\Sigma)(x) \to d(\widehat{\gamma}^\Sigma)(x) = (d(\widehat{\beta}^\Sigma) \to d(\widehat{\gamma}^\Sigma))(x) = d(\widehat{\beta}^\Sigma \to_\Sigma \widehat{\gamma}^\Sigma)(x) = d(\widehat{\beta \to \gamma}^\Sigma)(x) = d(\widehat{\alpha}^\Sigma)(x)$, așadar $\alpha \in M$.

Deci M include pe V și este închisă la $\neg$ și $\rightarrow$, așadar M include cea mai mică mulțime de enunțuri cu aceste proprietăți, anume mulțimea E a tuturor enunțurilor, deci $E \subseteq M \subseteq E$, așadar $M = E$, adică, pentru orice $\alpha \in E$, $\tilde{h}(\alpha) = d(\widehat{\alpha}^{\Sigma})(x)$, în particular $\tilde{h}(\varphi) = d(\widehat{\varphi}^{\Sigma})(x) \neq 1$.
Demonstrăm că $h \vDash \Sigma$. Fie $\sigma \in \Sigma$, arbitrar, fixat.
Conform identității stabilite mai sus, $\tilde{h}(\sigma) = d(\widehat{\sigma}^{\Sigma})(x)$.
Cine este $\widehat{\sigma}^{\Sigma}$ (clasa lui σ în algebra Boole $E/_{\sim_{\Sigma}}$)?
Conform definiției claselor echivalenței $\sim_{\Sigma}$, unei proprietăți a consecințelor sintactice, **Teoremei deducției**, faptului că $\sigma \in \Sigma$, și deci $\Sigma \vdash \sigma$, $\widehat{\sigma}^{\Sigma} = \{\tau \in E \mid \Sigma \vdash \sigma \leftrightarrow \tau\} = \{\tau \in E \mid \Sigma \vdash \sigma \rightarrow \tau$ și $\Sigma \vdash \tau \rightarrow \sigma\} = \{\tau \in E \mid \Sigma \cup \{\sigma\} \vdash \tau$ și $\Sigma \cup \{\tau\} \vdash \sigma\} = \{\tau \in E \mid \Sigma \vdash \tau\} = \widehat{\gamma \vee \neg\gamma}^{\Sigma} = 1_{\Sigma}$, oricare ar fi $\gamma \in E$, pentru că, în conformitate cu **Principiul terțului exclus**, $\vdash \gamma \vee \neg\gamma$, prin urmare $\Sigma \vdash \gamma \vee \neg\gamma$, așadar $\gamma \vee \neg\gamma \in \widehat{\sigma}^{\Sigma}$ conform egalității de mulțimi pe care tocmai am stabilit–o, i. e. $\gamma \vee \neg\gamma \sim_{\Sigma} \sigma$, deci $\widehat{\sigma}^{\Sigma} = \widehat{\gamma \vee \neg\gamma}^{\Sigma} = 1_{\Sigma}$.
Așadar, $\tilde{h}(\sigma) = d(\widehat{\sigma}^{\Sigma})(x) = d(1_{\Sigma})(x) = 1(x) = 1$.
Deci $\tilde{h}(\sigma) = 1$ pentru orice $\sigma \in \Sigma$, adică $h \vDash \Sigma$.
Am găsit o interpretare h cu proprietățile: $h \vDash \Sigma$ și $\tilde{h}(\varphi) \neq 1$, ceea ce înseamnă că $\Sigma \nvDash \varphi$. Am obținut o contradicție cu ipoteza acestei implicații. Așadar, $\Sigma \vdash \varphi$, ceea ce încheie demonstrația teoremei.

Teoremă (Teorema de completitudine pentru $\mathcal{L}$ (TC))

Pentru orice enunț φ,

$$\vdash \varphi \quad \textit{ddacă} \quad \vDash \varphi.$$

Demonstrație: Se aplică **Teorema de completitudine tare** pentru $\Sigma = \emptyset$.

Notă

Uneori,

- implicația $\vdash \varphi \Rightarrow \vDash \varphi$ este numită *corectitudinea lui $\mathcal{L}$*,
- iar implicația $\vdash \varphi \Leftarrow \vDash \varphi$ este numită *completitudinea lui $\mathcal{L}$*.

Dar, cel mai adesea, **echivalența** din teorema anterioară este numită *completitudinea lui $\mathcal{L}$*.

Corolar (noncontradicția lui $\mathcal{L}$ (principiul noncontradicției))

Niciun enunț φ nu satisface și $\vdash \varphi$, și $\vdash \neg \varphi$.

Demonstrație: Presupunem prin absurd că există un enunț φ a. î. $\vdash \varphi$ și $\vdash \neg \varphi$. Atunci, conform **Teoremei de completitudine**, $\vDash \varphi$ și $\vDash \neg \varphi$, i. e., pentru orice interpretare h, avem: $\tilde{h}(\varphi) = 1$ și $1 = \tilde{h}(\neg \varphi) = \overline{\tilde{h}(\varphi)} = \overline{1} = 0$, deci $0 = 1$ în $\mathcal{L}_2$, ceea ce este o contradicție.

Propoziție

Algebra Lindenbaum–Tarski a logicii propoziționale clasice, $E/\sim$, este netrivială.

Demonstrație: $\sim = \sim_{\emptyset}$. Presupunem prin absurd că $0 = 1$ în algebra Boole $E/\sim$. Fie $\psi \in E$ și $\varphi = \psi \vee \neg\,\psi \in E$. Atunci $\widehat{\varphi} = 1$, așadar $\vdash \varphi$, conform lemei de mai sus privind caracterizarea teoremelor formale prin intermediul claselor acestora în algebra Lindenbaum–Tarski $E/\sim$. Corolarul anterior (**noncontradicția logicii propoziționale clasice**) arată că $\nvdash \neg\,\varphi$, așadar, conform aceleiași leme, $1 \neq \widehat{\neg\,\varphi} = \overline{\widehat{\varphi}} = \overline{1} = 0$, prin urmare $|E/\sim| \geq 2$, adică algebra Boole $E/\sim$ este netrivială.

Notă

A se vedea la seminar exemple de **demonstrații semantice** în logica propozițională clasică, realizate atât prin calcul boolean obișnuit în $\mathcal{L}_2$, cât și prin intermediul **tabelelor de adevăr (tabelelor semantice)**.

Notă

A se vedea, în cărțile de G. Georgescu din bibliografia cursului, obținerea **Teoremei de completitudine** prin raționamentul de mai sus efectuat pe cazul particular $\Sigma = \emptyset$, folosind algebra Lindenbaum–Tarski $E/\sim$ asociată lui $\mathcal{L}$, din care, apoi, se obține **Teorema de completitudine tare**.

Propoziție

Pentru orice interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$ și orice $\Sigma \subseteq E$ a. î. $h \vDash \Sigma$, există un unic morfism boolean $\dddot{h}^{\Sigma} : E/_{\sim_\Sigma} \to \mathcal{L}_2$ care face următoarea diagramă comutativă, anume morfismul boolean definit prin: pentru orice $\varphi \in E$, $\dddot{h}^{\Sigma}(\widehat{\varphi}^{\Sigma}) := \tilde{h}(\varphi)$:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, hook] \arrow[dr, "h"'] & E \arrow[r, "p_\Sigma"] \arrow[d, "\tilde{h}"] & E/_{\sim_\Sigma} \arrow[dl, "\dddot{h}^{\Sigma}"] \\
& \mathcal{L}_2 &
\end{tikzcd}$$

Demonstrație: Unicitatea lui $\dddot{h}^{\Sigma}$ rezultă din condiția ca $\dddot{h}^{\Sigma}$ să închidă comutativ această diagramă, care face ca singura definiție posibilă pentru $\dddot{h}^{\Sigma}$ să fie: pentru orice $\varphi \in E$, $\dddot{h}^{\Sigma}(\widehat{\varphi}^{\Sigma}) = \dddot{h}^{\Sigma}(p_\Sigma(\varphi)) := \tilde{h}(\varphi)$.

Cu această definiție, $\dddot{h}^{\Sigma}$ devine morfism Boolean, întrucât, pentru orice $\varphi, \psi \in E$, avem: $\dddot{h}^{\Sigma}(\overline{\widehat{\varphi}^{\Sigma}}) = \dddot{h}^{\Sigma}(\widehat{\neg\varphi}^{\Sigma}) = \tilde{h}(\neg\varphi) = \overline{\tilde{h}(\neg\varphi)} = \overline{\dddot{h}^{\Sigma}(\widehat{\varphi}^{\Sigma})}$,
$\dddot{h}^{\Sigma}(\widehat{\varphi}^{\Sigma} \vee_\Sigma \widehat{\psi}^{\Sigma}) = \dddot{h}^{\Sigma}(\widehat{\varphi \vee \psi}^{\Sigma}) = \tilde{h}(\varphi \vee \psi) = \tilde{h}(\varphi) \vee \tilde{h}(\psi) = \dddot{h}^{\Sigma}(\widehat{\varphi}^{\Sigma}) \vee \dddot{h}^{\Sigma}(\widehat{\psi}^{\Sigma})$ și
$\dddot{h}^{\Sigma}(\widehat{\varphi}^{\Sigma} \wedge_\Sigma \widehat{\psi}^{\Sigma}) = \dddot{h}^{\Sigma}(\widehat{\varphi \wedge \psi}^{\Sigma}) = \tilde{h}(\varphi \wedge \psi) = \tilde{h}(\varphi) \wedge \tilde{h}(\psi) = \dddot{h}^{\Sigma}(\widehat{\varphi}^{\Sigma}) \wedge \dddot{h}^{\Sigma}(\widehat{\psi}^{\Sigma})$,
așadar $\dddot{h}^{\Sigma}$ comută și cu 0 și 1, conform proprietăților morfismelor Booleene.
Rămâne de demonstrat buna definire a lui $\dddot{h}^{\Sigma}$, i. e. independența sa de reprezentanții claselor din $E/_{\sim_\Sigma}$.

Orice interpretare induce un unic morfism boolean de la algebra Lindenbaum–Tarski la algebra Boole standard

Fie $\varphi, \psi \in E$, a. î. $\widehat{\varphi}^{\Sigma} = \widehat{\psi}^{\Sigma}$, ceea ce este echivalent cu $\varphi \sim_{\Sigma} \psi$, i. e. $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$, ceea ce este echivalent cu $\Sigma \vDash \varphi \leftrightarrow \psi$, conform **Teoremei de completitudine tare**. Dar $h \vDash \Sigma$, așadar $\tilde{h}(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$, adică $\tilde{h}(\varphi) \leftrightarrow \tilde{h}(\psi) = 1$, ceea ce este echivalent cu $\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\psi)$, i. e. $\dddot{h}^{\Sigma}(\widehat{\varphi}^{\Sigma}) = \dddot{h}^{\Sigma}(\widehat{\psi}^{\Sigma})$. Așadar $\dddot{h}^{\Sigma}$ este bine definit.

Corolar

Pentru orice interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$, există un unic morfism boolean $\dddot{h} : E/\sim \to \mathcal{L}_2$ care face următoarea diagramă comutativă, anume morfismul boolean definit prin: pentru orice $\varphi \in E$, $\dddot{h}(\widehat{\varphi}) := \tilde{h}(\varphi)$:

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, hook] \arrow[dr, "h"'] & E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\tilde{h}"] & E/\sim \arrow[dl, "\dddot{h}"] \\
& \mathcal{L}_2 &
\end{tikzcd}
$$

Demonstrație: Se aplică propoziția precedentă pentru $\Sigma = \emptyset$.

Sisteme deductive

Definiție

O mulțime Σ de enunțuri se numește *sistem deductiv* ddacă este închisă la deducții, i. e., pentru orice $\varphi \in E$, are loc:

$$\Sigma \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi \in \Sigma, \qquad \text{adică:}$$

$$\{\varphi \in E \mid \Sigma \vdash \varphi\} \subseteq \Sigma.$$

Remarcă

Implicația reciprocă în definiția anterioară este valabilă, conform definiției deducției sintactice, prin urmare o mulțime Σ de enunțuri este sistem deductiv ddacă, pentru orice $\varphi \in E$:

$$\Sigma \vdash \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \in \Sigma, \qquad \text{adică:}$$

$$\{\varphi \in E \mid \Sigma \vdash \varphi\} = \Sigma.$$

Exemplu

În mod trivial, mulțimea E a tuturor enunțurilor este sistem deductiv.

Lemă

Orice sistem deductiv include mulțimea teoremelor formale.

Demonstrație: Dacă $\Sigma \subseteq E$ este sistem deductiv, iar φ este o teoremă formală, atunci $\emptyset \vdash \varphi$, așadar $\Sigma \vdash \varphi$ (a se revedea o remarcă asupra teoremelor formale sau Propoziția $\star$, (1)), deci $\varphi \in \Sigma$ conform definiției de mai sus.

Exemplu

Conform lemei anterioare, de exemplu, $\emptyset$ nu este sistem deductiv.

Lemă

Mulțimea teoremelor formale este sistem deductiv.

Demonstrație: Avem de demonstrat că, oricare ar fi $\varphi \in E$:

$$T \vdash \varphi \text{ implică } \varphi \in T, \text{ adică } \vdash \varphi.$$

Procedăm prin inducție după consecințele sintactice ale lui T, considerând proprietatea $\vdash \varphi$ asupra unui enunț arbitrar φ.
Dacă φ este o axiomă, atunci $\vdash \varphi$, iar $\varphi \in T$ înseamnă exact $\vdash \varphi$.
Dacă, pentru două enunțuri φ, ψ, au loc $\vdash \psi$ și $\vdash \psi \rightarrow \varphi$, atunci $\vdash \varphi$, conform definiției teoremelor formale.
Așadar muțimea $T = \{\varphi \in E \mid \vdash \varphi\}$ include mulțimea $Ax \cup T$ și este închisă la (MP), prin urmare T include cea mai mică mulțime de enunțuri cu aceste proprietăți, anume mulțimea $\{\varphi \in E \mid T \vdash \varphi\}$ a consecințelor sintactice ale lui T, prin urmare, oricare ar fi $\varphi \in E$, $T \vdash \varphi$ implică $\vdash \varphi$.

Propoziție

Mulțimea teoremelor formale este cel mai mic sistem deductiv.

Demonstrație: Conform celor două leme anterioare, T este cel mai mic sistem deductiv (desigur, în sensul incluziunii).

Notă

În următoarea propoziție, cu o terminologie pe care am folosit–o deja, spunem că o mulțime Σ de enunțuri este *închisă la* **modus ponens** ddacă, pentru orice enunțuri φ, ψ, dacă $\psi, \psi \to \varphi \in \Sigma$, atunci $\varphi \in \Sigma$.

Propoziție (caracterizare pentru sistemele deductive)

Pentru orice $\Sigma \subseteq E$, sunt echivalente:

1. Σ *este sistem deductiv;*
2. Σ *include mulțimea axiomelor și este închisă la* **modus ponens***;*
3. Σ *include mulțimea teoremelor formale și este închisă la* **modus ponens***.*

Demonstrație: (1)$\Rightarrow$(3): Presupunem că Σ este sistem deductiv. Atunci, conform unei leme anterioare, $T \subseteq \Sigma$.

Mulțimea sistemelor deductive este familie Moore

Fie $\varphi, \psi \in E$ a. î. $\psi, \psi \to \varphi \in \Sigma$. Atunci, conform definiției consecințelor sintactice ale lui Σ, avem $\Sigma \vdash \psi$ și $\Sigma \vdash \psi \to \varphi$, așadar $\Sigma \vdash \varphi$, prin urmare, cum Σ este sistem deductiv, $\varphi \in \Sigma$.

③⇒②: Din faptul că $Ax \subseteq T$.

②⇒①: Presupunem că $Ax \subseteq \Sigma$ și Σ este închisă la (MP).

Atunci $Ax \cup \Sigma = \Sigma$, în particular $Ax \cup \Sigma \subseteq \Sigma$.

Așadar Σ include mulțimea $Ax \cup \Sigma$ și este închisă la (MP), prin urmare Σ include cea mai mică mulțime cu aceste proprietăți, anume mulțimea consecințelor sintactice ale lui Σ, adică: $\{\varphi \in E \mid \Sigma \vdash \varphi\} \subseteq \Sigma$.

Propoziție

Intersecția oricărei familii de sisteme deductive este sistem deductiv, i. e. mulțimea sistemelor deductive este un **sistem de închidere***.*

Demonstrație: E este sistem deductiv.

Acum fie $(\Delta_i)_{i \in I}$ o familie nevidă de sisteme deductive și $\Delta = \bigcap_{i \in I} \Delta_i$. Cum I este nevidă, avem $\Delta \subseteq \Delta_i$ pentru fiecare $i \in I$.

Fie φ un enunț a. î. $\Delta \vdash \varphi$. Pentru fiecare $i \in I$, conform Propoziției $\star$, (1), rezultă că $\Delta_i \vdash \varphi$, de unde, cum Δ_i este sistem deductiv, rezultă că $\varphi \in \Delta_i$. Prin urmare $\varphi \in \Delta$, așadar Δ este sistem deductiv.

Sistemul deductiv generat de o mulțime de enunțuri

Deci familia sistemelor deductive este închisă la intersecții arbitrare.

Notație

Notăm cu $D : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ operatorul de închidere asociat sistemului de închidere format din sistemele deductive.

Corolar

Pentru orice mulțime Σ de enunțuri, $D(\Sigma)$ este cel mai mic sistem deductiv care include pe Σ, anume intersecția tuturor sistemelor deductive care includ pe Σ.

Demonstrație: Conform propoziției anterioare și definiției operatorului de închidere asociat unui sistem de închidere.

Definiție

Pentru orice $\Sigma \subseteq E$, $D(\Sigma)$ se numește *sistemul deductiv generat de* Σ.

Remarcă

Conform definiției unui operator de închidere, pentru orice $\Sigma, \Delta \in \mathcal{P}(E)$:

1. $\Sigma \subseteq D(\Sigma)$ (D este **extensiv**);
2. $\Sigma \subseteq \Delta$ implică $D(\Sigma) \subseteq D(\Delta)$ (D este **crescător**);
3. $D(D(\Sigma)) = D(\Sigma)$ (D este **idempotent**);

Propoziție (sistemul deductiv generat de o mulțime Σ de enunțuri este mulțimea consecințelor sintactice ale lui Σ)

Pentru orice mulțime Σ de enunțuri:

$$D(\Sigma) = \{\varphi \in E \mid \Sigma \vdash \varphi\}.$$

Demonstrație: Notăm cu Δ mulțimea consecințelor sintactice ale lui Σ: $\Delta = \{\varphi \in E \mid \Sigma \vdash \varphi\}$. Atunci $\Sigma \subseteq \Delta$.

Cum $T \subseteq \Delta$ și Δ e închisă la (MP), din propoziția de mai sus privind caracterizarea sistemelor deductive rezultă că Δ e sistem deductiv.

Acum fie Γ un sistem deductiv a. î. $\Sigma \subseteq \Gamma$, și fie φ un enunț. Dacă $\varphi \in \Delta$, adică $\Sigma \vdash \varphi$, prin urmare $\Gamma \vdash \varphi$ conform Propoziției $\star$, (1), așadar $\varphi \in \Gamma$, întrucât Γ este sistem deductiv. Deci $\Gamma \subseteq \Delta$.

Așadar Δ este cel mai mic sistem deductiv care include pe Σ, adică $\Delta = D(\Sigma)$.

Corolar

Operatorul de închidere D este finitar, *adică, oricare ar fi $\Sigma \subseteq E$, are loc:*

$$D(\Sigma) = \bigcup \{D(\Gamma) \mid \Gamma \subseteq \Sigma, |\Gamma| < \aleph_0\}.$$

Demonstrație: Fie $\Sigma \subseteq E$. Conform propoziției anterioare și Propoziției $\star$, (2), $D(\Sigma) = \{\varphi \in E \mid \Sigma \vdash \varphi\} = \{\varphi \in E \mid (\exists\, \Gamma \subseteq \Sigma)\,(|\Gamma| < \aleph_0, \Gamma \vdash \varphi)\} =$

$$\bigcup_{\Gamma \subseteq \Sigma, |\Gamma| < \aleph_0} \{\varphi \in E \mid \Gamma \vdash \varphi\} = \bigcup_{\Gamma \subseteq \Sigma, |\Gamma| < \aleph_0} D(\Gamma).$$

Mulțimi consistente (i. e. necontradictorii)

Definiție

Fie Σ o mulțime de enunțuri.

- Σ se zice *inconsistentă* ddacă $\Sigma \vdash \varphi$ pentru orice $\varphi \in E$ (i. e. ddacă orice enunț este consecință sintactică a lui Σ);
- Σ se zice *consistentă* ddacă Σ nu este inconsistentă.

Exemplu

Mulțimea E a tuturor enunțurilor este inconsistentă.

Remarcă

Conform Propoziției $\star$, (1), pentru orice mulțimi Σ, Δ de enunțuri, dacă $\Sigma \subseteq \Delta$, atunci $\{\varphi \in E \mid \Sigma \vdash \varphi\} \subseteq \{\varphi \in E \mid \Delta \vdash \varphi\}$, prin urmare:

- orice submulțime a unei mulțimi consistente este consistentă;
- orice mulțime care include o mulțime inconsistentă este inconsistentă.

Remarcă

Mulțimea T a teoremelor formale este consistentă.
Într–adevăr, conform unei propoziții de mai sus, T este sistem deductiv, deci este egală cu mulțimea enunțurilor φ cu $T \vdash \varphi$, iar $T \subsetneq E$, conform **principiului noncontradicției**.

Remarcă (consecință a celor două remarci precedente)

$\emptyset$ și Ax sunt mulțimi consistente.

Propoziție

Sistemul deductiv generat de o mulțime consistentă este o mulțime consistentă.

Demonstrație: Dacă $\Sigma \subseteq E$ este o mulțime consistentă, atunci, conform unei propoziții de mai sus privind elementele lui $D(\Sigma)$, avem:
$D(\Sigma) = \{\varphi \in E \mid \Sigma \vdash \varphi\} \subsetneq E$. Cum $D(\Sigma)$ este sistem deductiv, rezultă că $\{\varphi \in E \mid D(\Sigma) \vdash \varphi\} = D(\Sigma) \subsetneq E$, așadar $D(\Sigma)$ este o mulțime consistentă.

Propoziție (mulțimile consistente sunt mulțimile de enunțuri din care nu se deduc contradicții)

Pentru orice $\Sigma \subseteq E$, sunt echivalente:

1. Σ *este inconsistentă;*
2. *există* $\varphi \in E$, *astfel încât* $\Sigma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$;
3. *există* $\varphi \in E$, *astfel încât* $\Sigma \vdash \varphi$ *și* $\Sigma \vdash \neg\varphi$;
4. *există* $\varphi \in E$, *astfel încât* $\Sigma \vdash \neg(\varphi \rightarrow \varphi)$;
5. *pentru orice* $\varphi \in E$, $\Sigma \vdash \neg(\varphi \rightarrow \varphi)$;

Demonstrație: (1)$\Leftrightarrow$(2) Conform (MP) și teoremei formale **falsul implică orice**.
(2)$\Leftrightarrow$(3): Conform unei leme care precedă definiția relației de echivalență $\sim_\Sigma$

utilizată pentru a construi algebra Lindenbaum–Tarski $E/_{\sim_\Sigma}$.
②⇔④: Pentru orice $\varphi \in E$ și orice interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$,
$\tilde{h}(\neg(\varphi \to \varphi)) = \overline{\tilde{h}(\varphi) \to \tilde{h}(\varphi)} = \overline{\overline{\tilde{h}(\varphi)} \vee \tilde{h}(\varphi)} = \tilde{h}(\varphi) \wedge \overline{\tilde{h}(\varphi)} = \tilde{h}(\varphi \wedge \neg\varphi)$,
așadar, conform (TCT) și definiției consecințelor semantice, $\Sigma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$ ddacă $\Sigma \vDash \varphi \wedge \neg\varphi$ ddacă $\Sigma \vDash \neg(\varphi \to \varphi)$ ddacă $\Sigma \vdash \neg(\varphi \to \varphi)$.
①⇒⑤: Trivial.
⑤⇒④: Trivial.

Corolar (ⓒ)

Fie $\Sigma \subseteq E$ și $\varphi \in E$. Atunci:

1. $\Sigma \cup \{\varphi\}$ *este inconsistentă ddacă* $\Sigma \vdash \neg\varphi$;
2. $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ *este inconsistentă ddacă* $\Sigma \vdash \varphi$.

Demonstrație: ① Dacă $\Sigma \cup \{\varphi\}$ este inconsistentă, atunci $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\varphi$, așadar, conform (TD), $\Sigma \vdash \varphi \to \neg\varphi$, de unde, conform regulii de deducție **adevărul nu implică falsul** din cursul anterior, rezultă că $\Sigma \vdash \neg\varphi$.
Dacă $\Sigma \vdash \neg\varphi$, atunci $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\varphi$ conform Propoziției $\star$, (1), iar, cum $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$, din propoziția anterioară rezultă că $\Sigma \cup \{\varphi\}$ este inconsistentă.
② Conform ① și (TCT), $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ este inconsistentă ddacă $\Sigma \vdash \neg\neg\varphi$ ddacă $\Sigma \vDash \neg\neg\varphi$ ddacă $\Sigma \vDash \varphi$ ddacă $\Sigma \vdash \varphi$, întrucât, pentru orice interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$, $\tilde{h}(\neg\neg\varphi) = \overline{\overline{\tilde{h}(\varphi)}} = \tilde{h}(\varphi)$.

Corolar (ⓔ)

ⓐ *Pentru orice mulțime $\Sigma \subseteq E$, au loc echivalențele:*

1. Σ *este inconsistentă;*
2. *există* $\varphi \in \Sigma$ *astfel încât* $\Sigma \vdash \neg\varphi$.

ⓑ *Pentru orice mulțime nevidă $\Sigma \subseteq E$, au loc echivalențele:*

1. Σ *este inconsistentă;*
2. *există* $\varphi \in \Sigma$ *astfel încât* $\Sigma \vdash \neg\varphi$*;*
3. *pentru orice* $\varphi \in \Sigma$, *are loc* $\Sigma \vdash \neg\varphi$.

Demonstrație: ⓐ Conform Corolarului ⓒ, ②⇒①.
Conform Corolarului ⓒ și faptului că $\emptyset$ e consistentă, ①⇒②.
ⓑ Conform punctului ⓐ, ①⇔②.
Conform Corolarului ⓒ, ①⇒③.
Cum $\Sigma \neq \emptyset$, ③⇒②.

Propoziție

Pentru orice $\Sigma \subseteq E$, are loc echivalența: Σ e consistentă ddacă algebra Boole $E/_{\sim_\Sigma}$ e netrivială.

Demonstrație: Fie $\Sigma \subseteq E$ și $\varphi \in E$. Algebra Boole $E/_{\sim_\Sigma}$ este trivială ddacă $0_\Sigma = 1_\Sigma$ ddacă $1_\Sigma \leq 0_\Sigma$, adică $\widehat{\varphi \vee \neg\,\varphi}^{\Sigma} \leq_\Sigma \widehat{\varphi \wedge \neg\,\varphi}^{\Sigma}$, i. e. $\Sigma \vdash (\varphi \vee \neg\,\varphi) \rightarrow (\varphi \wedge \neg\,\varphi)$, ceea ce, conform **MP**, **PTE** și (A_1), este echivalent cu $\Sigma \vdash \varphi \wedge \neg\,\varphi$ ("$\Rightarrow$" rezultă conform **MP** și **PTE**, care ne asigură de faptul că $\Sigma \vdash \varphi \vee \neg\,\varphi$, iar "$\Leftarrow$" conform **MP** și (A_1), care ne asigură de faptul că $\Sigma \vdash (\varphi \wedge \neg\,\varphi) \rightarrow ((\varphi \vee \neg\,\varphi) \rightarrow (\varphi \wedge \neg\,\varphi)))$, ceea ce înseamnă că Σ e inconsistentă conform echivalenței ①⇔② din propoziția anterioară.

Definiție (mulțimi consistente maximale)

Un element maximal al mulțimii mulțimilor consistente raportat la incluziune se numește *mulțime consistentă maximală*.

Propoziție

Orice mulțime consistentă este inclusă într–o mulțime consistentă maximală.

Demonstrație: Fie $\Sigma \subseteq E$ o mulțime consistentă, și fie $\mathcal{M}$ mulțimea mulțimilor consistente care includ pe Σ. Atunci $\Sigma \in \mathcal{M}$, așadar $\mathcal{M} \neq \emptyset$.
Demonstrăm că $(\mathcal{M}, \subseteq)$ este mulțime inductiv ordonată, apoi aplicăm **Lema lui**

Zorn.
Fie $\mathcal{T} = (\Gamma_i)_{i\in I}$ o parte nevidă total ordonată a lui $\mathcal{M}$, i. e. $\emptyset \neq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{M}$, a. î., pentru orice $i, j \in I$, avem $\Gamma_i \subseteq \Gamma_j$ sau $\Gamma_j \subseteq \Gamma_i$. Notăm cu $\Gamma = \bigcup_{i\in I} \Gamma_i \subseteq E$.
Cum $I \neq \emptyset$, rezultă că $\Gamma_i \subseteq \Gamma$ pentru fiecare $i \in I$, adică Γ este majorant pentru $\mathcal{T}$. În plus, cum, pentru fiecare $i \in I$, avem $\Gamma_i \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{M}$, așadar $\Sigma \subseteq \Gamma_i$, rezultă că $\Sigma \subseteq \Gamma$.
Fie φ un enunț. Presupunem prin absurd că Γ e inconsistentă, așadar $\Gamma \vdash \varphi$ și $\Gamma \vdash \neg\varphi$. Conform Propoziției $\star$, (2), există $k, n \in \mathbb{N}^*$ și $\gamma_1, \ldots, \gamma_k, \delta_1, \ldots, \delta_n \in \Gamma$ a. î. $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\} \vdash \varphi$ și $\{\delta_1, \ldots, \delta_n\} \vdash \neg\varphi$.
Dar $\Gamma = \bigcup_{i\in I} \Gamma_i$, așadar există $i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_n \in I$ a. î.
$\gamma_1 \in \Gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_k \in \Gamma_{i_k}, \delta_1 \in \Gamma_{j_1}, \ldots, \delta_n \in \Gamma_{j_n}$. Cum $(\mathcal{T}, \subseteq)$ este lanț, și deci $(\{\Gamma_{i_1}, \ldots, \Gamma_{i_k}, \Gamma_{j_1}, \ldots, \Gamma_{j_n}\}, \subseteq)$ este lanț finit, rezultă că există $m \in \{i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_n\}$ a. î. $\Gamma_m = \max(\{\Gamma_{i_1}, \ldots, \Gamma_{i_k}, \Gamma_{j_1}, \ldots, \Gamma_{j_n}\}, \subseteq)$, așadar $\Gamma_m = \Gamma_{i_1} \cup \ldots \cup \Gamma_{i_k} \cup \Gamma_{j_1} \cup \ldots \cup \Gamma_{j_n}$, prin urmare, conform Propoziției $\star$, (1), $\Gamma_m \vdash \varphi$ și $\Gamma_m \vdash \neg\varphi$, așadar, conform unei propoziții anterioare, Γ_m este inconsistentă, ceea ce contrazice faptul că $\Gamma_m \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{M}$.
Așadar Γ este mulțime consistentă, și, cum $\Sigma \subseteq \Gamma$, rezultă că $\Gamma \in \mathcal{M}$.
În concluzie, orice parte total ordonată a mulțimii ordonate nevide $(\mathcal{M}, \subseteq)$ are un majorant în această mulțime ordonată, adică $(\mathcal{M}, \subseteq)$ este mulțime inductiv ordonată, prin urmare, conform **Lemei lui Zorn**, $(\mathcal{M}, \subseteq)$ are elemente maximale.

Fie Δ un element maximal al lui $(\mathcal{M}, \subseteq)$. Atunci $\Delta \in \mathcal{M}$, adică Δ este mulțime consistentă cu $\Sigma \subseteq \Delta$. Presupunem prin absurd că există o mulțime consistentă Λ cu $\Delta \subsetneq \Lambda$. Atunci $\Sigma \subseteq \Lambda$, așadar $\Lambda \in \mathcal{M}$, ceea ce contrazice maximalitatea lui Δ în $\mathcal{M}$. Prin urmare Δ este mulțime consistentă maximală.

Corolar

Există mulțimi consistente maximale.

Demonstrație: Aplicăm propoziția anterioară, de exemplu, pentru mulțimea consistentă $\emptyset$.

Propoziție

Dacă Σ este o mulțime consistentă maximală, atunci:

1. *Σ este sistem deductiv;*
2. *pentru orice $\varphi, \psi \in E$, avem: $\varphi \vee \psi \in \Sigma$ ddacă $\begin{cases} \varphi \in \Sigma \text{ sau} \\ \psi \in \Sigma; \end{cases}$*
3. *oricare ar fi $\varphi \in E$, are loc: $\varphi \in \Sigma$ ddacă $\neg\varphi \notin \Sigma$;*
4. *pentru orice $\varphi, \psi \in E$: $\varphi \rightarrow \psi \in \Sigma$ ddacă $\neg\varphi \vee \psi \in \Sigma$ ddacă $\begin{cases} \neg\varphi \in \Sigma \text{ sau} \\ \psi \in \Sigma. \end{cases}$*

Demonstrație: ① Conform unei propoziții de mai sus, $\Sigma \subseteq D(\Sigma)$, care este tot mulțime consistentă, așadar, conform maximalității lui Σ, $\Sigma = D(\Sigma)$, care este un sistem deductiv.

② Fie $\varphi, \psi \in E$ astfel încât $\varphi \vee \psi \in \Sigma$. Presupunem prin absurd că $\varphi \notin \Sigma$ și $\psi \notin \Sigma$. Cum Σ este mulțime consistentă maximală, rezultă că $\Sigma \cup \{\varphi\}$ și $\Sigma \cup \{\psi\}$ sunt inconsistente, așadar, pentru orice enunț χ: $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \chi$ și $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash \chi$, deci, conform (TD), $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \chi$ și $\Sigma \vdash \psi \rightarrow \chi$, deci, conform celei de–a treia reguli de deducție **slăbirea**, $\Sigma \vdash (\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi$, așadar, conform (TD), $\Sigma = \Sigma \cup \{\varphi \vee \psi\} \vdash \chi$, adică din Σ se deduce orice enunț, ceea ce contrazice faptul că Σ e consistentă. Așadar $\varphi \in \Sigma$ sau $\psi \in \Sigma$.

Acum fie $\varphi, \psi \in E$ astfel încât $\varphi \in \Sigma$ sau $\psi \in \Sigma$. Atunci $\Sigma \vdash \varphi$ sau $\Sigma \vdash \psi$, prin urmare, conform primelor două reguli de deducție **slăbirea**, $\Sigma \vdash \varphi \vee \psi$. Dar, conform ①, Σ este sistem deductiv, așadar $\varphi \vee \psi \in \Sigma$.

③ Fie $\varphi \in E$. Conform ①, Σ este sistem deductiv, așadar $\varphi \vee \neg\, \varphi \in T \subseteq \Sigma$ conform (PTE) și unei proprietăți a sistemelor deductive, prin urmare $\varphi \in \Sigma$ sau $\neg\, \varphi \in \Sigma$ conform ②. Cum Σ este mulțime consistentă, conform unei propoziții anterioare nu putem avea $\Sigma \vdash \varphi$ și $\Sigma \vdash \neg\, \varphi$, așadar nu putem avea $\varphi \in \Sigma$ și $\neg\, \varphi \in \Sigma$, deci exact unul dintre enunțurile φ și $\neg\, \varphi$ se află în Σ, adică: $\varphi \in \Sigma$ ddacă $\neg\, \varphi \notin \Sigma$.

④ Fie $\varphi, \psi \in E$. Este imediat că, pentru orice interpretare h, are loc $\tilde{h}(\varphi \rightarrow \psi) = \tilde{h}(\neg\, \varphi \vee \psi)$. Din ②, (TCT) și ①, conform căruia Σ e sistem deductiv, rezultă că au loc echivalențele: $\varphi \rightarrow \psi \in \Sigma$ ddacă $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ ddacă $\Sigma \vDash \varphi \rightarrow \psi$ ddacă $\Sigma \vDash \neg\, \varphi \vee \psi$ ddacă $\Sigma \vdash \neg\, \varphi \vee \psi$ ddacă $\neg\, \varphi \vee \psi \in \Sigma$ ddacă $[\neg\, \varphi \in \Sigma$ sau $\psi \in \Sigma]$.

Mulțimile consistente sunt exact mulțimile satisfiabile

Remarcă

T (și, așadar, orice submulțime a lui T) admite ca model orice interpretare. Într–adevăr, pentru orice $\varphi \in T$ și orice interpretare h, avem $\vdash \varphi$, așadar $\vDash \varphi$ conform (TC), prin urmare $\tilde{h}(\varphi) = 1$.

Propoziție

O mulțime de enunțuri e satisfiabilă ddacă e consistentă.

Demonstrație: "$\Rightarrow$": Amintesc că $\emptyset$ e consistentă și satisfiabilă (chiar $(\forall\, h : V \to \mathcal{L}_2)\,(h \vDash \emptyset)$). Acum fie Σ o mulțime nevidă de enunțuri care admite un model h. Atunci, pentru orice $\varphi \in \Sigma$, $\tilde{h}(\varphi) = 1$, așadar $\tilde{h}(\neg\,\varphi) = \overline{\tilde{h}(\varphi)} = \overline{1} = 0$, prin urmare $\Sigma \nvDash \neg\,\varphi$, așadar $\Sigma \nvdash \neg\,\varphi$ conform (TCT), deci Σ este consistentă.

"$\Leftarrow$": Fie $\Sigma \subseteq E$ o mulțime consistentă și fie $\Gamma \subseteq E$ o mulțime consistentă maximală a. î. $\Sigma \subseteq \Gamma$.

Definim $h : V \to \mathcal{L}_2$ prin: oricare ar fi $p \in V$, $h(p) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } p \in \Gamma, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$

Adică h este funcția caracteristică lui $V \cap \Gamma$. Să demonstrăm că $\tilde{h}$ este funcția caracteristică lui Γ, adică, pentru orice $\varphi \in E$, $\tilde{h}(\varphi) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } \varphi \in \Gamma, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$

Procedăm prin inducție după conceptul de enunț, considerând proprietatea asupra unui enunț ε:

$$P(\varepsilon): \quad \tilde{h}(\varepsilon) = 1 \text{ ddacă } \varepsilon \in \Gamma.$$

Cum $\tilde{h}\mid_V = h$, conform definiției lui h, orice variabilă propozițională satisface proprietatea P.

Fie ψ un enunț care satisface proprietatea P, și $\varphi = \neg\psi$, astfel că $\tilde{h}(\varphi) = \overline{\tilde{h}(\psi)}$. Conform propoziției precedente, $\varphi \in \Gamma$ ddacă $\psi \notin \Gamma$ ddacă $\tilde{h}(\psi) = 0$ ddacă $\tilde{h}(\varphi) = 1$, deci φ satisface proprietatea P.
Acum fie ψ, χ enunțuri care satisfac proprietatea P, și $\varphi = \psi \rightarrow \chi$, astfel că $\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\psi) \rightarrow \tilde{h}(\chi)$. Atunci $\tilde{h}(\varphi) = 0$ ddacă $[\tilde{h}(\psi) = 1$ și $\tilde{h}(\chi) = 0]$ ddacă $[\psi \in \Gamma$ și $\chi \notin \Gamma]$ ddacă $[\neg\psi \notin \Gamma$ și $\chi \notin \Gamma]$ ddacă $\varphi \notin \Gamma$, conform propoziției precedente, așadar φ satisface proprietatea P.
Prin urmare mulțimea enunțurilor care satisfac proprietatea P include pe V și este închisă la $\neg$ și $\rightarrow$, așadar este egală cu mulțimea tuturor enunțurilor, adică, pentru orice enunț φ, avem: $[\tilde{h}(\varphi) = 1$ ddacă $\varphi \in \Gamma]$, în particular $h \vDash \Gamma$, așadar $h \vDash \Sigma$ întrucât $\Sigma \subseteq \Gamma$.

Notă

A se vedea, în cartea de G. Georgescu și A. Iorgulescu din bibliografia cursului, cum se obține **Teorema de completitudine tare** din **Teorema de completitudine**, folosind faptul că orice mulțime consistentă e satisfiabilă.

Rezoluția în calculul propozițional clasic

Pentru această secțiune a cursului, precum și pentru rezoluția în calculul cu predicate, care stă la baza implementării limbajului Prolog, se poate consulta cartea următoare:

G. Metakides, A. Nerode, *Principles of Logic and Logic Programming*

- traducere de A. Florea, B. Boldur: *Principii de Logică și Programare Logică*, Editura Tehnică, București, 1998.

Definiție (FNC și FND)

- Un *literal* este o variabilă propozițională sau negația unei variabile propoziționale:
$$p \text{ sau } \neg p, \text{ cu } p \in V.$$
- O *clauză* este o disjuncție de literali.

Orice clauză se identifică cu mulțimea literalilor care o compun.

- Un enunț $\varphi(\in E)$ *este în formă normală conjunctivă* (sau *este o formă normală conjunctivă*) (*FNC*) ddacă φ este o conjuncție de clauze, i. e. o conjuncție de disjuncții de literali.

Orice FNC se identifică cu mulțimea clauzelor care o compun.

- Un enunț $\varphi(\in E)$ *este în formă normală disjunctivă* (sau *este o formă normală disjunctivă*) (*FND*) ddacă φ este o disjuncție de conjuncții de literali.

Observație

Întrucât toate enunțurile au lungime finită (i. e. sunt șiruri finite de simboluri primitive), conjuncțiile și disjuncțiile la care face referire definiția de mai sus sunt finite.

Relația de **echivalență semantică**: $\sim=\sim_{\emptyset}\in \mathrm{Eq}(E)$: relația de echivalență pe E care servește la construirea algebrei Lindenbaum–Tarski a logicii propoziționale clasice: pentru orice $\varphi, \psi \in E$,

$$\varphi \sim \psi \text{ ddacă } \vdash \varphi \leftrightarrow \psi.$$

Folosind definiția lui $\sim$, **Teorema de completitudine**, definiția adevărurilor semantice, compatibilitatea oricărei interpretări cu conectorii logici și o proprietate valabilă în orice algebră Boole, obținem:

Remarcă (două enunțuri sunt echivalente semantic ddacă au aceeași valoare în orice interpretare)

Oricare ar fi $\varphi, \psi \in E$, au loc următoarele echivalențe:
$\varphi \sim \psi \Leftrightarrow \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow \vDash \varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\forall\, h : V \rightarrow L_2)\,(\tilde{h}(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1) \Leftrightarrow (\forall\, h : V \rightarrow L_2)\,(\tilde{h}(\varphi) \leftrightarrow \tilde{h}(\psi) = 1) \Leftrightarrow (\forall\, h : V \rightarrow L_2)\,(\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\psi))$.

Așadar:

Remarcă

Dacă $\varphi, \psi \in E$ astfel încât $\varphi \sim \psi$, atunci: φ e satisfiabil ddacă ψ e satisfiabil.

Punerea unui enunț în FNC (sau FND)

Propoziție (existența FNC și FND pentru orice enunț)

Oricare ar fi $\varphi \in E$, există o FNC $\psi \in E$ și o FND $\chi \in E$ (care nu sunt unice), astfel încât $\varphi \sim \psi \sim \chi$.

Remarcă

Oricare ar fi $\varphi \in E$, putem determina o FNC (sau FND) $\psi \in E$ cu $\varphi \sim \gamma$, folosind un tabel semantic pentru φ, sau folosind următoarele proprietăți imediate (a se vedea seminarul), valabile pentru orice $\alpha, \beta, \gamma \in E$:

- **înlocuirea implicațiilor și echivalențelor:**

$$\alpha \rightarrow \beta \sim \neg\,\alpha \vee \beta \text{ și } \alpha \leftrightarrow \beta \sim (\neg\,\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\,\beta \vee \alpha)$$

- **idempotența lui $\vee$ și $\wedge$:**

$$\alpha \vee \alpha \sim \alpha \wedge \alpha \sim \alpha$$

- **comutativitatea lui $\vee$ și $\wedge$:**

$$\alpha \vee \beta \sim \beta \vee \alpha \text{ și } \alpha \wedge \beta \sim \beta \wedge \alpha$$

Remarcă (continuare)

- **asociativitatea lui $\vee$ și $\wedge$:**

$$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \sim \alpha \vee (\beta \vee \gamma) \text{ și } (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \sim \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$$

- **principiul dublei negații:**

$$\neg\neg\alpha \sim \alpha$$

- **legile lui de Morgan:**

$$\neg(\alpha \vee \beta) \sim \neg\alpha \wedge \neg\beta \text{ și } \neg(\alpha \wedge \beta) \sim \neg\alpha \vee \neg\beta$$

- **absorbția:**

$$\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \sim \alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \sim \alpha$$

- **legile de distributivitate:**

$$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \sim (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma) \text{ și } \alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \sim (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$$

- **proprietățile:**

$$\alpha \vee (\beta \wedge \neg\beta) \sim \alpha \vee (\beta \wedge \neg\beta \wedge \gamma) \sim \alpha \wedge (\beta \vee \neg\beta) \sim \alpha \wedge (\beta \vee \neg\beta \vee \gamma) \sim \alpha$$

Observație (echivalența semantică ($\sim$) versus egalitatea de enunțuri)

Fie $\varphi \in E$. Atunci $\varphi \sim \neg\neg\varphi$, dar $\varphi \neq \neg\neg\varphi$. De exemplu, enunțurile *"Plouă."* și *"Nu e adevărat că nu plouă."* sunt echivalente semantic (adică au același sens, același înțeles), dar nu coincid (sunt fraze diferite, nici nu sunt compuse din același număr de cuvinte).

- Următoarea notație este definită, recursiv, pe întreaga mulțime E:

Notație (mulțimea variabilelor propoziționale care apar într–un enunț φ se notează $V(\varphi)$)

Pentru orice $p \in V$ și orice $\varphi, \psi \in E$, notăm:

1. $V(p) = \{p\}$
2. $V(\neg\varphi) = V(\varphi)$
3. $V(\varphi \rightarrow \psi) = V(\varphi) \cup V(\psi)$

- Amintesc că, într–un tabel semantic pentru un enunț φ, ne interesează variabilele propoziționale care apar în φ, adică elementele lui $V(\varphi)$.

A se vedea, la seminar, metoda prin care un enunț φ poate fi pus în FNC folosind un tabel semantic pentru φ.

Definiție (formă clauzală)

Fie $\varphi \in E$ și $M \subseteq E$, astfel încât M este finită.

- O *formă clauzală* pentru φ este o FNC (i. e. o mulțime de clauze) ψ cu $\psi \sim \varphi$.
- O *formă clauzală* pentru M este o reuniune de forme clauzale pentru elementele lui M.

Remarcă

Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, atunci formele clauzale pentru o mulțime finită $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subset E$ coincid cu formele clauzale pentru enunțul $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$.
Orice enunț, prin urmare orice mulțime finită de enunțuri poate fi pusă într–o formă clauzală.

Propoziție

O mulțime de enunțuri e satisfiabilă ddacă orice submulțime finită a sa este satisfiabilă.

Demonstrație: Fie $\Gamma \subseteq E$.
"$\Rightarrow$:" Orice model pentru Γ este model pentru toate submulțimile lui Γ, în particular pentru toate submulțimile finite ale lui Γ.
"$\Leftarrow$:" Ipoteza acestei implicații este că orice submulțime finită a lui Γ este satisfiabilă.
Presupunem prin absurd că Γ e nesatisfiabilă. Cum $\emptyset$ e consistentă, deci

satisfiabilă, rezultă că Γ e nevidă, așadar există $\varphi \in \Gamma$. Conform Corolarului ⓒ, rezultă că $\Gamma \setminus \{\varphi\} \vdash \neg\,\varphi$, așadar, conform Propoziției $\star$, (2), există o mulțime finită $\Lambda \subseteq \Gamma \setminus \{\varphi\}$ astfel încât $\Lambda \vdash \neg\,\varphi$, așadar, din nou conform Corolarului ⓒ, submulțimea finită $\Lambda \cup \{\varphi\} \subseteq \Gamma$ e nesatisfiabilă; contradicție. Așadar Γ e satisfiabilă.

Propoziție (conform căreia tehnica rezoluției de mai jos poate fi folosită pentru a demonstra teoreme formale sau deducții formale din ipoteze)

Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \psi \in E$ și $\Gamma \subseteq E$.

ⓐ *Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:*

1. $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vDash \psi$
2. $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \neg\,\psi\}$ *nu e satisfiabilă*
3. $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \neg\,\psi$ *nu e satisfiabil*

ⓑ *În plus, următoarele afirmații sunt echivalente:*

1. $\vDash \psi$
2. $\neg\,\psi$ *nu e satisfiabil*

ⓒ *Mai mult, următoarele afirmații sunt echivalente:*

Deducție semantică versus satisfiabilitate

1. $\Gamma \vDash \psi$
2. $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ nu e satisfiabilă
3. $\neg\psi$ nu e satisfiabil, sau există $k \in \mathbb{N}^*$ și $\psi_1, \dots, \psi_k \in \Gamma$ astfel încât $\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_k \wedge \neg\psi$ nu e satisfiabil.

Demonstrație: Putem folosi Corolarul (c), sau definiția deducției semantice și a adevărurilor semantice, proprietatea interpretărilor de a transforma conectorii logici în operații booleene în $\mathcal{L}_2$, precum și faptul că $\mathcal{L}_2 = \{0, 1\}$, cu $0 \neq 1$, ca mai jos:
(a) $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \vDash \psi$ ddacă, pentru orice $h : V \to \mathcal{L}_2$, $\tilde{h}(\varphi_1) = \ldots = \tilde{h}(\varphi_n) = 1 \Rightarrow \tilde{h}(\psi) = 1$ ddacă nu există $h : V \to \mathcal{L}_2$ cu $\tilde{h}(\varphi_1) = \ldots = \tilde{h}(\varphi_n) = \tilde{h}(\neg\psi) = 1$ ddacă $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n, \neg\psi\}$ nu e satisfiabilă ddacă nu există $h : V \to \mathcal{L}_2$ cu $\tilde{h}(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \neg\psi) = 1$ ddacă $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \neg\psi$ nu e satisfiabil.
(b) $\vDash \psi$ ddacă, pentru orice $h : V \to \mathcal{L}_2$, $\tilde{h}(\psi) = 1$ ddacă nu există $h : V \to \mathcal{L}_2$ cu $\tilde{h}(\neg\psi) = 1$ ddacă $\neg\psi$ nu e satisfiabil.
(c) $\Gamma \vDash \psi$ ddacă, pentru orice $h : V \to \mathcal{L}_2$, $h \vDash \Gamma \Rightarrow \tilde{h}(\psi) = 1$ ddacă nu există $h : V \to \mathcal{L}_2$ cu $h \vDash \Gamma \cup \{\neg\psi\}$ ddacă $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ nu e satisfiabilă ddacă $\neg\psi$ nu e satisfiabil, sau există $k \in \mathbb{N}^*$ și $\psi_1, \dots, \psi_k \in \Gamma$ astfel încât $\{\psi_1, \dots, \psi_k, \neg\psi\}$ nu e satisfiabilă, conform lemei anterioare, ddacă $\neg\psi$ nu e satisfiabil, sau există $k \in \mathbb{N}^*$ și $\psi_1, \dots, \psi_k \in \Gamma$ astfel încât $\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_k \wedge \neg\psi$ nu e satisfiabil, conform (a).

Problema satisfiabilității

Remarcă

Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in E$ și $h : V \to \mathcal{L}_2$. Cum am observat mai sus:

- formele clauzale pentru o mulțime finită de enunțuri $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ sunt exact formele clauzale pentru enunțul $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$;
- $h \vDash \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ ddacă $h \vDash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$, în particular mulțimea $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ e satisfiabilă ddacă enunțul $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$ e satisfiabil.

Problemă

Fiind dat un enunț φ în FNC, să se determine dacă φ e satisfiabil.

- O soluție computațională pentru problema de mai sus este **algoritmul Davis–Putnam**, bazat pe **rezoluție**.
- **Rezoluția propozițională** poate fi privită ca o regulă de deducție pentru calculul propozițional clasic.
- Utilizând **rezoluția**, se poate construi un demonstrator automat **corect și complet** pentru calculul propozițional clasic, fără alte teoreme formale și reguli de deducție, pentru că **regula rezoluției este echivalentă cu schemele de axiome** (A_1)**,** (A_2)**,** (A_3) **plus regula MP**.
- Limbajul de programare logică PROLOG este fundamentat pe rezoluția pentru calculul cu predicate clasic (care înglobează rezoluția propozițională).

Clauze și mulțimi de clauze

Definiție (și mnemonic)

- O *clauză* este o mulțime finită de literali ($\{L_1, \dots, L_n\}$, cu $n \in \mathbb{N}$ și $L_1, \dots, L_n \in V \cup \{\neg p \mid p \in V\}$).
- **Clauza vidă** (i. e. clauza fără literali, clauza fără elemente) se notează cu $\square$ (pentru a o deosebi de **mulțimea vidă de clauze**, $\emptyset$, în cele ce urmează).
- O clauză C se zice *trivială* ddacă există $p \in V$ cu $p, \neg p \in C$.
- Orice clauză nevidă $C = \{L_1, \dots, L_n\}$ (cu $n \in \mathbb{N}^*$ și $L_1, \dots, L_n \in V \cup \{\neg p \mid p \in V\}$) se identifică cu enunțul în FND $\varphi = L_1 \vee \dots \vee L_n$. Clauza C se zice *satisfiabilă* ddacă enunțul φ e satisfiabil.
- Clauza vidă ($\square$) e considerată **nesatisfiabilă** (**justificare:** $\square$ se identifică cu $\bigvee\limits_{i \in \emptyset} L_i$; pentru orice $h : V \to L_2$, $\tilde{h}(\bigvee\limits_{i \in \emptyset} L_i) = \bigvee\limits_{i \in \emptyset} \tilde{h}(L_i) = 0 \neq 1$ în $\mathcal{L}_2$).
- Orice mulțime finită de clauze $M = \{C_1, \dots, C_k\}$ (cu $k \in \mathbb{N}$ și $C_1, \dots, C_k$ clauze) se identifică cu $C_1 \wedge \dots \wedge C_k$, deci cu o FNC.
- O mulțime finită de clauze se zice *satisfiabilă* ddacă toate clauzele din componența ei sunt satisfăcute de o aceeași interpretare (au un același model, au un model comun).

Satisfiabilitate pentru (mulțimi de) clauze

Remarcă

Sunt imediate următoarele proprietăți:

- o mulțime finită de clauze este satisfiabilă ddacă FNC asociată ei e satisfiabilă;
- $\emptyset$ (mulțimea vidă de clauze) este satisfiabilă, chiar e satisfăcută de orice interpretare;
- orice clauză trivială e satisfiabilă, chiar e satisfăcută de orice interpretare;
- orice mulțime finită de clauze triviale este satisfiabilă, chiar e satisfăcută de orice interpretare.

(Rezoluția (regulă de deducție pentru logica propozițională clasică))

Pentru orice clauze C, D, dacă $p \in V$ astfel încât $p, \neg p \notin C$ și $p, \neg p \notin D$, atunci:

$$\frac{C \cup \{p\}, D \cup \{\neg p\}}{C \cup D}, \text{ adică } \frac{(C \vee p) \wedge (D \vee \neg p)}{C \vee D}$$

Propoziție

Fie C și D clauze, iar S, T și U mulțimi finite de clauze. Atunci:

1. *dacă C e satisfiabilă și $C \subseteq D$, atunci D e satisfiabilă; prin urmare, dacă D e nesatisfiabilă și $C \subseteq D$, atunci C e nesatisfiabilă;*
2. *$C \cup D$ e satisfiabilă ddacă C e satisfiabilă sau D e satisfiabilă;*
3. *dacă $p \in V \setminus V(C)$, atunci $C \cup \{p\}$ și $C \cup \{\neg p\}$ sunt satisfiabile;*
4. *dacă S e nesatisfiabilă și $S \subseteq T$, atunci T e nesatisfiabilă; prin urmare, dacă T e satisfiabilă și $S \subseteq T$, atunci S e satisfiabilă;*
5. *dacă U e satisfiabilă și există $p \in V \setminus V(U)$, $G \in S$ și $H \in T$ astfel încât $p \in G \setminus H$ și $\neg p \in H \setminus G$, atunci $U \cup S$ și $U \cup T$ sunt satisfiabile;*
6. *dacă $p \in V$ astfel încât $p, \neg p \notin C$ și $p, \neg p \notin D$, iar mulțimea de clauze $\{C \cup \{p\}, D \cup \{\neg p\}\}$ e satisfiabilă, atunci $C \cup D$ e satisfiabilă (**regula rezoluției**).*

Definiție (derivări prin rezoluție)

Fie o mulțime finită de clauze $\{D_1, \ldots, D_k\}$ și φ enunțul în FNC corespunzător acestei mulțimi de clauze:

$$\varphi = D_1 \wedge \ldots \wedge D_k.$$

Dacă $i, j \in \overline{1, k}$ a. î. $i \neq j$ și există $p \in V$ cu $p \in D_i$ și $\neg p \in D_j$, atunci mulțimea de clauze $R := \{(D_i \setminus \{p\}) \cup (D_j \setminus \{\neg p\})\} \cup \{D_t \mid t \in \overline{1, k} \setminus \{i, j\}\}$ sau o FNC corespunzătoare ei, de exemplu enunțul

$$((D_i \setminus \{p\}) \vee (D_j \setminus \{\neg p\})) \wedge \bigwedge_{t \in \overline{1,k} \setminus \{i,j\}} D_t,$$

se numește *rezolvent* al enunțului φ sau al mulțimii de clauze $\{D_1, \ldots, D_k\}$.
Deducția

$$\frac{D_1, \ldots, D_k}{R}$$

se numește *derivare prin rezoluție* a lui φ sau a mulțimii $\{D_1, \ldots, D_k\}$.
Vom numi orice succesiune de derivări prin rezoluție tot *derivare prin rezoluție*. O succesiune de derivări prin rezoluție care începe cu o FNC/mulțime de clauze μ și se termină cu o FNC/mulțime de clauze ν se numește *derivare prin rezoluție a lui ν din μ*.

Notă

Rezoluția este o metodă de verificare a satisfiabilității pentru mulțimi (finite) de enunțuri în formă clauzală.

Notă

Aplicarea regulii rezoluției simultan pentru două variabile diferite este **greșită**.

Remarcă

- Dacă într–o derivare prin rezoluție a unei mulțimi finite M de enunțuri în **formă clauzală** apare $\square$, atunci M nu e satisfiabilă.
- În schimb, o derivare prin rezoluție a lui M în care nu apare $\square$ **nu arată** că M ar fi satisfiabilă.
- Pentru a arăta că o mulțime finită M de enunțuri (în formă clauzală) este satisfiabilă, putem găsi un model pentru M sau putem aplica **algoritmul Davis–Putnam**, care este echivalent cu obținerea tuturor derivărilor posibile prin rezoluție ale formei clauzale a lui M.

Algoritmul Davis–Putnam (abreviat *DP*)

INPUT: mulțime finită și nevidă S de clauze netriviale;
$S_1 := S$; $i := 1$;
PASUL 1: luăm o $v_i \in V(S_i)$;
$T_i^0 := \{C \in S_i \mid \neg v_i \in C\}$;
$T_i^1 := \{C \in S_i \mid v_i \in C\}$;
$T_i := T_i^0 \cup T_i^1$;
PASUL 2: dacă $T_i^0 \neq \emptyset$ și $T_i^1 \neq \emptyset$,
atunci $U_i := \{(C_0 \setminus \{\neg v_i\}) \cup (C_1 \setminus \{v_i\}) \mid C_0 \in T_i^0, C_1 \in T_i^1\}$;
altfel $U_i := \emptyset$;
PASUL 3: $S_{i+1} := (S_i \setminus T_i) \cup U_i$;
$S_{i+1} := S_{i+1} \setminus \{C \in S_{i+1} \mid (\exists\, p \in V)\,(p, \neg\, p \in C)\}$
(eliminăm din S_{i+1} clauzele triviale);
PASUL 4: dacă $S_{i+1} = \emptyset$,
atunci OUTPUT: S *e satisfiabilă*;
altfel, dacă $\square \in S_{i+1}$,
atunci OUTPUT: S *nu e satisfiabilă*;
altfel $i := i + 1$ și mergi la PASUL 1.

Propoziție (terminarea algoritmului DP)

Algoritmul DP se termină după cel mult $|V(S)|$ *execuții ale pașilor* $1-4$, *cu* $S_{i+1} = \emptyset$ *sau* $\square \in S_{i+1}$.

Demonstrație: Cu notațiile din algoritmul DP, are loc, pentru fiecare i:

$$V(S_{i+1}) \subsetneq V(S_i),$$

așadar algoritmul DP se termină după cel mult $|V(S)|$ iterații.

Propoziție

Fie S *o mulțime finită și nevidă de clauze.*
Dacă S *e satisfiabilă, atunci orice rezolvent al lui* S *e satisfiabil.*

Demonstrație: Fie φ enunțul în FNC corespunzător lui S și $\rho \in E$ un rezolvent al lui φ. Atunci, pentru un enunț γ în FNC, o variabilă propozițională p și două clauze C și D cu $p \notin V(C) \cup V(D)$, avem:

$$\varphi = (C \vee p) \wedge (D \vee \neg\, p) \wedge \gamma \quad \text{și} \quad \rho = (C \vee D) \wedge \gamma,$$

așadar, pentru orice interpretare h, avem:
$\tilde{h}(\varphi) = (\tilde{h}(C) \vee h(p)) \wedge (\tilde{h}(D) \vee \overline{h(p)}) \wedge \tilde{h}(\gamma) =$
$((\tilde{h}(C) \wedge \tilde{h}(D)) \vee (\tilde{h}(C) \wedge \overline{h(p)}) \vee (\tilde{h}(D) \wedge h(p)) \vee (h(p) \wedge \overline{h(p)})) \wedge \tilde{h}(\gamma) =$
$((\tilde{h}(C) \wedge \tilde{h}(D)) \vee (\tilde{h}(C) \wedge \overline{h(p)}) \vee (\tilde{h}(D) \wedge h(p))) \wedge \tilde{h}(\gamma) \leq ((\tilde{h}(C) \vee \tilde{h}(D)) \wedge \tilde{h}(\gamma) = \tilde{\rho},$

prin urmare orice interpretare care satisface pe φ satisface și pe ρ; în particular, dacă φ e satisfiabil, atunci ρ e satisfiabil.

Corolar

Fie S o mulțime finită și nevidă de clauze.
Dacă S e satisfiabilă, atunci algoritmul DP, aplicat lui S, se termină cu $S_{i+1} = \emptyset$.

Teoremă

Fie S o mulțime finită și nevidă de clauze. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

1. *S nu e satisfiabilă;*
2. *există o derivare prin rezoluție a lui $\square$ (sau a unei mulțimi de clauze conținând pe $\square$) din S.*

Demonstrație: ②⇒①: A se observa că $\square$ se poate obține prin rezoluție numai din două clauze de forma $\{p\}, \{\neg p\}$, cu $p \in V$, și orice mulțime formată din două astfel de clauze e nesatisfiabilă.
$\square$ nu e satisfiabilă, așadar, conform propoziției anterioare, dacă există o derivare prin rezoluție a lui $\square$ din S, atunci S e nesatisfiabilă.
①⇒②: **Schița demonstrației,** după articolul:

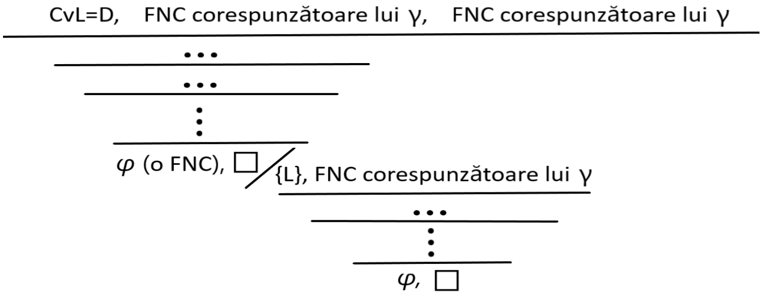
J. Gallier, The Completeness of Propositional Resolution: a Simple and Constructive Proof, *Logical Methods in Computer Science* **2**(5:3) (2006), 1–7.

Presupunem că S e nesatisfiabilă.
Pentru orice clauză D, notăm $c(D) := |D| - 1$ (numărul de literali din compoziția lui D minus o unitate, adică numărul de disjuncții din D, i.e. dintre literalii lui D).
Pentru orice mulțime finită și nevidă de clauze $M = \{D_1, \ldots, D_k\}$, notăm $c(M) := c(D_1) + \ldots + c(D_k)$, adică numărul de disjuncții din M.
Procedăm prin inducție după $c(S)$.
Pasul de verificare: Dacă $c(S) = 0$, atunci $c(D) = 0$ pentru fiecare clauză D a lui S, așadar fiecare clauză a lui S este un literal. Cum S e nesatisfiabilă, există $p \in V$ a. î. p și $\neg p$ sunt clauze ale lui S, prin urmare din S se poate deriva prin rezoluție o mulțime de clauze care conține pe $\square$.
Pasul de inducție: Presupunem că $c(S) > 0$ și că orice mulțime nesatisfiabilă M de clauze cu $c(M) < c(S)$ are o derivare prin rezoluție care se termină cu o mulțime conținând pe $\square$.
Cum $c(S) > 0$, există o clauză D a lui S cu $c(D) > 0$, prin urmare $D = C \vee L$ pentru un literal L și o clauză nevidă C în care nu apare variabila propozițională din L, așa că avem $c(C) < c(D)$.
Fie φ enunțul în FNC corespunzător lui S, care e nesatisfiabil conform ipotezei acestei implicații. Atunci, pentru un enunț γ în FNC, avem:

$$\varphi \sim (C \vee L) \wedge \gamma \sim (C \wedge \gamma) \vee (L \wedge \gamma),$$

prin urmare enunțurile $C \wedge \gamma$ și $L \wedge \gamma$ sunt nesatisfiabile. Observăm că au loc: $c(C \wedge \gamma) < c(\varphi)$ și $c(L \wedge \gamma) < c(\varphi)$, așadar, conform ipotezei de inducție, fiecare dintre enunțurile $C \wedge \gamma$ și $L \wedge \gamma$ admite o derivare prin rezoluție în care apare $\square$. Să considerăm o astfel de derivare pentru $C \wedge \gamma$ și să înlocuim pe C cu $C \vee L = D$, transformând enunțul $C \wedge \gamma$ în $(C \vee L) \wedge \gamma \sim \varphi$, și modificând corespunzător această derivare, astfel că, la finalul ei:

- fie apare tot $\square$, caz în care am obținut deja o derivare a lui φ care conduce la $\square$,
- fie apare clauza L în locul lui $\square$, caz în care procedăm astfel:



ținând seama de faptul că $\varphi \sim D \wedge \gamma \sim D \wedge \gamma \wedge \gamma$, la fiecare pas al derivării prin rezoluție a lui φ obținute prin modificarea de mai sus, la mulțimea curentă de clauze adăugăm o mulțime de clauze corespunzând lui γ, astfel că la finalul acestei noi derivări vom avea o mulțime de clauze corespunzătoare enunțului $L \wedge \gamma$, din care, conform celor de mai sus, se poate deriva prin rezoluție o mulțime de clauze conținând pe $\Box$. Punând "cap la cap" aceste derivări, obținem o derivare prin rezoluție din φ (echivalent, din S) a unei mulțimi de clauze conținând pe $\Box$. Desigur, derivările prin rezoluție se aplică unor mulțimi de clauze, care, așadar, trebuie să conțină câte o singură copie a fiecărei clauze. Dar lista clauzelor corespunzătoare lui $(C \vee L) \wedge \gamma$ are o derivare prin rezoluție care ajunge la $\Box$ ddacă lista clauzelor corespunzătoare lui $(C \vee L) \wedge \gamma \wedge \gamma$ (în care duplicăm clauzele corespunzătoare lui γ) are o derivare prin rezoluție care ajunge la $\Box$; se poate demonstra că acest fapt are loc pentru orice mulțime finită $\Delta = \{D_1, \ldots, D_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) de clauze în locul clauzei $C \vee L$ și orice mulțime finită de clauze $\{C_1, \ldots, C_k\}$ ($k \in \mathbb{N}$) în locul unei forme clauzale pentru γ, prin inducție după k, așadar ar fi suficient de demonstrat pentru $k = 1$ (afirmația e trivială pentru $k = 0$).

Desigur, implicația directă este trivială: la o derivare prin rezoluție a clauzei vide $\Box$ din Γ se poate adăuga clauza C_1 la lista de clauze de la fiecare pas, astfel obținând o derivare prin rezoluție a lui $\Box$ din lista de clauze $D_1, \ldots, D_n, C_1, C_1$.

Reciproc, dacă există o derivare prin rezoluție a clauzei vide $\Box$ din lista de clauze $D_1, \ldots, D_n, C_1, C_1$, atunci, dacă în această derivare e folosită o singură copie a lui C_1, astfel că, cealaltă copie a lui C_1 rămâne ca atare în lista de clauze până la sfârșitul acestei derivări, atunci, eliminând această copie a lui C_1 din lista de clauze de la fiecare pas, obținem o derivare prin rezoluție a lui $\Box$ din lista de clauze $D_1, \ldots, D_n, C_1$.

Intuitiv, dacă, într–o derivare prin rezoluție a clauzei vide $\Box$ din lista de clauze

$D_1, \ldots, D_n, C_1, C_1$ sunt folosite ambele copii ale lui C_1, atunci avem o situație de tipul următor, unde $p, q, r \in V$:

$$\begin{array}{c}
\{\cancel{p}\ , q, r\},\ \{p, \neg\, q, r\},\ \{\neg\, r\},\ \{\cancel{\neg p}\},\ \{\neg\, p\} \\ \hline
\{q, r\},\ \{\cancel{p}\ , \neg\, q, r\},\ \{\neg\, r\}, \{\cancel{\neg p}\} \\ \hline
\{\cancel{q}\ , r\},\ \{\cancel{\neg q}, r\},\ \{\neg\, r\}\} \quad \text{d} \\ \hline
\{\cancel{r}\ \},\ \{\cancel{\neg r}\}\} \\ \hline
\square
\end{array}$$

Dacă eliminăm o copie a clauzei $\{\neg\, p\}$ din lista de clauze inițială, atunci putem obține o derivare prin rezoluție a clauzei vide $\square$ din mulțimea de clauze rămasă aplicând derivarea prin rezoluție d la început:

$$\begin{array}{c}
\{p, \cancel{q}\ , r\},\ \{p, \cancel{\neg q}, r\},\ \{\neg\, r\},\ \{\neg\, p\} \\ \hline
\{p, \cancel{r}\ \},\ \{\cancel{\neg r}\},\ \{\neg\, p\} \\ \hline
\{\cancel{p}\ \},\ \{\cancel{\neg p}\} \\ \hline
\square
\end{array}$$

Corolar (Teorema Davis–Putnam)

Algoritmul DP este corect și complet.

Notație

Dacă $\Gamma \subseteq E$ și $\varphi \in E$, atunci notăm cu $\Gamma \vdash_R \varphi$ faptul că există o derivare prin rezoluție a lui $\square$ dintr–o formă clauzală a lui $\Gamma \cup \{\neg\, \varphi\}$.

Rezoluția propozițională $\Longleftrightarrow$ sistemul Hilbert

Corolar

Pentru orice $\Gamma \subseteq E$ *și orice* $\varphi \in E$, *următoarele afirmații sunt echivalente:*

1. $\Gamma \vDash \varphi$;
2. $\Gamma \vdash_R \varphi$.

Demonstrație: Conform unei propoziții de mai sus, teoremei precedente și notației anterioare, $\Gamma \vDash \varphi$ ddacă $\Gamma \cup \{\neg \varphi\}$ e nesatisfiabilă ddacă există o derivare prin rezoluție a clauzei vide $\square$ din $\Gamma \cup \{\neg \varphi\}$ ddacă $\Gamma \vdash_R \varphi$.

Remarcă

Conform corolarului anterior și (TCT), **regula rezoluției** este corectă și completă pentru calculul propozițional clasic, adică deducția pe baza **regulii rezoluției** este echivalentă cu deducția pe baza axiomelor (A_1), (A_2), (A_3) și a regulii de deducție **MP**.

Așadar folosind **regula rezoluției** putem realiza o prezentare echivalentă pentru logica propozițională clasică.

Amintesc că deducția pe baza axiomelor (A_1), (A_2), (A_3) și a regulii de deducție **MP** (adică mulțimea regulilor (A_1), (A_2), (A_3) și **MP** – a se vedea mai jos **teoriile deductive Moisil**) se numește *sistemul Hilbert* pentru calculul propozițional clasic.

Deducția naturală – secțiune facultativă– SCHIȚĂ

Deducția naturală este o altă prezentare echivalentă pentru logica propozițională clasică: următoarele reguli de deducție sunt echivalente cu axiomele (A_1), (A_2), (A_3) plus regula **MP**.

Notații

- $\perp$ va desemna un element arbitrar al mulțimii de enunțuri $\{\varphi \wedge \neg\varphi, \neg\varphi \wedge \varphi \mid \varphi \in E\}$.
- Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ orice enuțuri $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi$, $\dfrac{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}{\psi}$ va avea semnificația: în prezența tuturor ipotezelor curente, din $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ se deduce ψ.
- Pentru orice $n, k \in \mathbb{N}$, orice enunțuri $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_k, \psi$ și orice mulțimi finite de enunțuri $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$, $\dfrac{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \frac{\Gamma_1}{\gamma_1}, \ldots, \frac{\Gamma_k}{\gamma_k}}{\psi}$ va avea semnificația: în prezența tuturor ipotezelor curente, dacă $\dfrac{\Gamma_1}{\gamma_1}, \ldots, \dfrac{\Gamma_k}{\gamma_k}$, atunci din $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ se deduce ψ.

A se vedea, într–un material facultativ de seminar, și notația folosind "cutii pentru deducții".

Regulile de deducție ale deducției naturale

Considerăm $\varphi, \psi, \chi \in E$, arbitrare.

- $\wedge$**–eliminarea**: $\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}$ și $\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi}$; $\wedge$**–introducerea**: $\dfrac{\varphi, \psi}{\varphi \wedge \psi}$;
- $\neg\neg$**–eliminarea**: $\dfrac{\neg\neg\varphi}{\varphi}$; $\neg\neg$**–introducerea**: $\dfrac{\varphi}{\neg\neg\varphi}$;
- $\rightarrow$**–introducerea**: $\dfrac{\frac{\varphi}{\psi}}{\varphi \rightarrow \psi}$; $\rightarrow$**–eliminarea** este **MP**: $\dfrac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$;
- $\vee$**–introducerea**: $\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}$ și $\dfrac{\psi}{\varphi \vee \psi}$; $\vee$**–eliminarea**: $\dfrac{\varphi \vee \psi, \frac{\varphi}{\chi}, \frac{\psi}{\chi}}{\chi}$;
- $\perp$**–eliminarea**: $\dfrac{\perp}{\varphi}$;
- $\neg$**–introducerea**: $\dfrac{\frac{\varphi}{\perp}}{\neg\varphi}$; $\neg$**–eliminarea**: $\dfrac{\varphi, \neg\varphi}{\perp}$.

Exercițiu

Folosind (în cadrul sistemului formal al) deducția(ei) naturală(e), arătați că:

- axiomele $(A_1), (A_2), (A_3)$ din sistemul Hilbert sunt adevăruri sintactice;
- are loc deducția sintactică: $\{\varphi \leftrightarrow (\psi \wedge \neg\chi), \chi\} \vdash \neg\varphi$.

Fraze și reguli (de deducție)

Observație

- **Teoriile deductive, introduse de matematicianul român Grigore C. Moisil,** sunt o construcție matematică ce generalizează, cuprinde toate sistemele logice.
- Pentru studiul **teoriilor deductive**, recomand cursul tipărit de bazele informaticii al Profesorului Virgil–Emil Căzănescu, indicat în bibliografia din Cursul I.

Definiție

O *teorie deductivă* este o pereche $\mathcal{T} = (F, R)$, unde:

- F este o mulțime nevidă, ale cărei elemente se numesc *fraze (ale lui $\mathcal{T}$);*
- $F^+ := \{f_1 f_2 \ldots f_n \mid n \in \mathbb{N}^*, f_1, f_2, \ldots, f_n \in F\}$ este mulțimea succesiunilor finite și nevide de fraze; elementele lui F^+ se numesc *texte*; dacă $n \in \mathbb{N}^*$, iar $f_1, f_2, \ldots, f_n \in F$, atunci n se numește *lungimea textului $f_1 f_2 \ldots f_n$;*
- se consideră $F \subseteq F^+$: frazele coincid cu textele de lungime 1;
- $R \subseteq F^+$; elementele lui R se numesc *reguli (ale lui $\mathcal{T}$).*

Vom păstra notațiile din definiția anterioară până la sfârșitul acestui curs.

Axiomele sunt regulile de lungime 1

Notație

- O regulă de lungime mai mare sau egală cu 2, $f_1 f_2 \dots f_n f$, cu $n \in \mathbb{N}^*$ și $f_1, f_2, \dots, f_n, f \in F$, se mai notează sub forma $\{f_1, f_2, \dots, f_n\} \longrightarrow f$.
- O regulă de lungime 1, f, cu $f \in F$, se mai notează sub forma $\emptyset \longrightarrow f$.

Definiție

- Regulile de lungime mai mare sau egală cu 2 se numesc *reguli de deducție (ale lui $\mathcal{T}$)*.
- Regulile de lungime 1 se numesc *axiome (ale lui $\mathcal{T}$)*. Vom nota cu Axm mulțimea axiomelor lui $\mathcal{T}$.

Remarcă

Conform definiției de mai sus, are loc: $Axm = F \cap R$.

Observație

Exemplificăm mai jos pentru calculul propozițional clasic.
În mod similar, calculul cu predicate clasic, din cursul următor, poate fi descris ca teorie deductivă.

Exemplu, și demonstrații în $\mathcal{T}$

Exemplu

Calculul propozițional clasic este o teorie deductivă $\mathcal{T} = (F, R)$, unde $F = E$ este mulțimea enunțurilor calculului propozițional clasic, iar R este formată din:

- o mulțime infinită de axiome, anume mulțimea regulilor $\emptyset \longrightarrow \varphi$, cu $\varphi \in E$, φ enunț de una dintre formele (A_1), (A_2), (A_3) ($\longrightarrow$ este simbolul din notația pentru regulile unei teorii deductive);
- o mulțime infinită de reguli de deducție (toate de lungime 3), corespunzătoare lui (MP), anume mulțimea $\{\{\varphi, \varphi \rightarrow \psi\} \longrightarrow \psi \mid \varphi, \psi \in E = F\}$ ($\rightarrow$ din interiorul acoladelor interioare este conectorul logic numit *implicație* al calculului propozițional clasic, în timp ce $\longrightarrow$ din exteriorul acoladelor interioare este simbolul din notația pentru regulile unei teorii deductive).

Definiție

Se numește *demonstrație (în teoria deductivă $\mathcal{T}$)* un text $f_1 f_2 \ldots f_n$, cu $n \in \mathbb{N}^*$ și $f_1, f_2, \ldots, f_n \in F$, cu proprietatea că: pentru orice $i \in \overline{1, n}$, există $k \in \mathbb{N}$ și $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \overline{1, i-1}$, astfel încât $\{f_{j_1}, f_{j_2}, \ldots, f_{j_k}\} \longrightarrow f_i \in R$.

Ca și în calculul propozițional clasic și calculul cu predicate clasic – a se vedea cursul următor:

Remarcă

Orice demonstrație începe cu o axiomă, i. e.: dacă $f_1 f_2 \dots f_n$ este o demonstrație, cu $n \in \mathbb{N}^*$ și $f_1, f_2, \dots, f_n \in F$, atunci $f_1 \stackrel{\text{not.}}{=} \emptyset \longrightarrow f_1 \in R$ (desigur, axiomă). Acest fapt rezultă din transcrierea definiției anterioare pentru cazul $i = 1$.

Notație

Dacă $\alpha = f_1 f_2 \dots f_n, \beta = g_1 g_2 \dots g_p \in F^+$, cu $n, p \in \mathbb{N}^*$ și $f_1, f_2, \dots, f_n, g_1, g_2, \dots, g_p \in F$, atunci notăm: $\alpha\beta := f_1 f_2 \dots f_n g_1 g_2 \dots g_p \in F^+$.

Remarcă

Fie $\alpha, \beta \in F^+$. Atunci:

- dacă α și β sunt demonstrații, atunci $\alpha\beta$ este o demonstrație (prin inducție matematică (obișnuită), acest rezultat poate fi generalizat de la concatenarea a două demonstrații la concatenarea unui număr finit și nevid de demonstrații);
- dacă $\alpha\beta$ este o demonstrație, atunci α este o demonstrație.

Acest fapt rezultă imediat din definiția unei demonstrații.

Teoreme și sisteme deductive

Definiție

Se numește *teoremă (a teoriei deductive $\mathcal{T}$)* o frază $f \in F$ cu proprietatea că există o demonstrație care se termină în f, i. e. o demonstrație de forma $f_1 f_2 \dots f_n f$, cu $n \in \mathbb{N}$ și $f_1, f_2, \dots, f_n \in F$.
Mulțimea teoremelor lui $\mathcal{T}$ se notează cu $Teor(\mathcal{T})$.

Remarcă

$Teor(\mathcal{T})$ este nevidă ddacă Axm este nevidă.
Într–adevăr, am observat că orice demonstrație începe cu o axiomă, și, evident, o axiomă constituie o demonstrație (de lungime 1), așadar există demonstrații ddacă există axiome, prin urmare există teoreme ddacă există axiome, în conformitate cu definiția de mai sus a teoremelor. În plus, se observă că $Axm \subseteq Teor(\mathcal{T})$.

Definiție (sisteme deductive: mulțimi de fraze închise la reguli)

O submulțime $X \subseteq F$ se zice *R–închisă* (sau *închisă la regulile din R*) ddacă, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $f_1, f_2, \dots, f_n, f \in F$, are loc:

$$\text{dacă } \{f_1, f_2, \dots, f_n\} \subseteq X \text{ și } \{f_1, f_2, \dots, f_n\} \longrightarrow f \in R, \text{ atunci } f \in X.$$

Mulțimea teoremelor e cel mai mic sistem deductiv

Remarcă

Orice mulțime R–închisă include mulțimea axiomelor.
Într–adevăr, dacă X este o mulțime de fraze R–închisă, atunci $\emptyset \subseteq X$, prin urmare $Axm \subseteq X$, în conformitate cu definiția axiomelor și definiția mulțimilor R–închise.

Propoziție

$Teor(\mathcal{T})$ este cea mai mică mulțime R–închisă a lui $\mathcal{T}$ (desigur, în raport cu incluziunea).

Demonstrație: Pentru început, să demonstrăm că $Teor(\mathcal{T})$ este R–închisă, folosind definiția mulțimilor R–închise, a teoremelor și a demonstrațiilor, precum și proprietatea care afirmă că o concatenare (finită și nevidă) de demonstrații este demonstrație.
Fie $n \in \mathbb{N}$ și $f_1, f_2, \ldots, f_n \in Teor(\mathcal{T})$, iar $f \in F$, astfel încât $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \longrightarrow f \in R$.
Cum $f_1, f_2, \ldots, f_n \in Teor(\mathcal{T})$, rezultă că, pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$, există o demonstrație $\alpha_i \in F^+$ pentru f_i.
Atunci $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n f$ este o demonstrație pentru f, ceea ce arată că $f \in Teor(\mathcal{T})$, așadar $Teor(\mathcal{T})$ este R–închisă.

Și acum să demonstrăm că $Teor(\mathcal{T})$ este cea mai mică dintre mulțimile R–închise, adică să considerăm o mulțime R–închisă X, și să arătăm că $Teor(\mathcal{T}) \subseteq X$.
Fie $t \in Teor(\mathcal{T})$, arbitrară, fixată. Atunci există o demonstrație $f_1 f_2 \dots f_n t$, cu $n \in \mathbb{N}$ și $f_1, f_2, \dots, f_n \in F$ (demonstrație de lungime $n+1$, care se termină în t).
Avem de demonstrat că $t \in X$. Aplicăm inducție matematică după n.
Pasul de verificare: n=0: Dacă $n = 0$, atunci $t \in Axm$, prin urmare $t \in X$, conform remarcii precedente.
Pasul de inducție: 0,1,...,n-1,n→n+1: Fie $n \in \mathbb{N}$, cu proprietatea că orice demonstrație de lungime cel mult $n+1$ se termină într–o frază din X, și astfel încât există o demonstrație $f_1 f_2 \dots f_{n+1} t$, cu $f_1, f_2, \dots, f_n, f_{n+1} \in F$.
Rezultă, conform definiției unei demonstrații, că există $k \in \mathbb{N}$ și $j_1, j_2, \dots, j_k \in \overline{1, n+1}$, astfel încât $\{f_{j_1}, f_{j_2}, \dots, f_{j_k}\} \longrightarrow t \in R$. Dar, pentru fiecare $s \in \overline{1, k}$, $f_1 f_2 \dots f_{j_s}$ este o demonstrație pentru f_{j_s}, de lungime cel mult $n+1$, așadar, conform ipotezei de inducție, rezultă că $f_{j_s} \in X$.
Prin urmare, $\{f_{j_1}, f_{j_2}, \dots, f_{j_k}\} \subseteq X$, iar $\{f_{j_1}, f_{j_2}, \dots, f_{j_k}\} \longrightarrow t \in R$. Cum X este R–închisă, rezultă că $t \in X$.
Rezultă că $Teor(\mathcal{T}) \subseteq X$, ceea ce încheie a doua parte a demonstrației propoziției.
Așadar, $Teor(\mathcal{T})$ este cea mai mică mulțime R–închisă.

Pentru orice mulțime de reguli, mulțimea sistemelor deductive este sistem de închidere pe $\mathcal{P}(F)$: posetul părților mulțimii frazelor. Consecințele sunt operatorii de închidere asociați sistemelor de închidere ale sistemelor deductive pentru diferite mulțimi de reguli.

Definiție

Se numește *consecință (pe F)* un operator de închidere *finitar* pe $\mathcal{P}(F)$, adică un operator de închidere $C : \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(F)$ cu proprietatea că, oricare ar fi $X \subseteq F$,

$$C(X) = \bigcup_{\substack{Y \subseteq X, \\ |Y| < \infty}} C(Y).$$

Propoziție

Mulțimea consecințelor (pe F) este în bijecție cu $\mathcal{P}(F^+)$ (mulțimea mulțimilor de reguli).

Schița demonstrației: Bijecția căutată duce orice $R \subseteq F^+$ în consecința $C_R : \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(F)$, definită prin: oricare ar fi $X \subseteq F$, $C_R(X) := Teor(F, X \cup R)$ (mulțimea teoremelor teoriei deductive cu mulțimea frazelor F și mulțimea regulilor dată de R, la care se adaugă elementele lui X ca axiome).
Inversa acestei bijecții duce orice consecință C în mulțimea $R_C := \{\{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \longrightarrow f \mid n \in \mathbb{N}, f_1, f_2, \ldots, f_n, f \in F, f \in C(\{f_1, f_2, \ldots, f_n\})\} \subseteq F^+$.
Se arată că prima dintre aceste funcții este corect definită, adică imaginea ei este o mulțime de consecințe. Este clar că a doua funcție este corect definită.
Apoi se arată ca aceste funcții sunt bijecții, demonstrând că sunt inverse una alteia, adică, pentru orice consecință C, $C_{R_C} = C$, și, pentru orice $R \subseteq F^+$, $R_{C_R} = R$.