Relaţii Binare

SEMINAR DE LOGICĂ MATEMATICĂ ŞI COMPUTAŢIONALĂ

Claudia MUREŞAN

c.muresan@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro

Universitatea din Bucureşti, Facultatea de Matematică şi Informatică

Semestrul I, 2021-2022

Relaţii Binare între Două Mulţimi

<u>Obs.</u>: Fie $A\neq\emptyset$ și $B\neq\emptyset$ mulțimi, iar $R\subseteq A\times B$ (i.e. R → relație binară de la A la B).

Atunci $R^{-1}\subseteq B\times A$, definită prin: $(\forall a\in A)(\forall b\in B)(b R^{-1} a \Leftrightarrow a R b)$.

Așadar $(R^{-1})^{-1}\subseteq A\times B$, definită prin: $(\forall a\in A)(\forall b\in B)(a (R^{-1})^{-1} b \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow b R^{-1} a \Leftrightarrow a R b)$.

$$a (R^{-1})^{-1} b \overset{\text{(not.)}}{\Updownarrow} (a,b)\in(R^{-1})^{-1}, \qquad aRb \Updownarrow (a,b)\in R.$$

Prin urmare, $(\forall (a,b)\in A\times B)$
$((a,b)\in R \Leftrightarrow (a,b)\in(R^{-1})^{-1})$, așadar, cum $R\subseteq A\times B\supseteq (R^{-1})^{-1}$, rezultă:
$(R^{-1})^{-1}=R$.

<u>Exerc.</u>: Fie A și B mulțimi, $A\neq\emptyset$ și $B\neq\emptyset$, iar $R\subseteq A\times B$.

Dem. că:

(1)

(1.1) R → injectivă ⇔ R^{-1} → funcţională
R^{-1} → injectivă ⇔ R → funcţională (i.e. funcţie parţială);

(1.2) R → surjectivă ⇔ R^{-1} → totală;
R^{-1} → surjectivă ⇔ R → totală;

(1.3) R → injectivă şi surjectivă ⇔
⇔ R^{-1} → funcţie; R^{-1} → injectivă şi
surjectivă ⇔ R → funcţie;

(1.4) R → funcţie bijectivă ⇔ R^{-1} →
→ funcţie bijectivă;

(1.5) dacă R → funcţie, atunci:
R^{-1} → funcţie ⇔ R → injectivă şi
surjectivă ⇔ R → funcţie bijectivă ⇔
⇔ R^{-1} → funcţie bijectivă;
dacă R^{-1} → funcţie, atunci:
R → funcţie ⇔ R^{-1} → injectivă şi
surjectivă ⇔ R^{-1} → funcţie bijectivă ⇔
⇔ R → funcţie bijectivă.

Aşadar: R e funcţie şi R^{-1} e funcţie ddacă R e funcţie bijectivă şi R^{-1} e funcţie bijectivă.

(2)
(a) R → injectivă ⇔ $R^{-1} \circ R \subseteq \Delta_A$;
(b) R → totală ⇔ $\Delta_A \subseteq R^{-1} \circ R$;
(c) R → injectivă şi totală ⇔
⇔ $R^{-1} \circ R = \Delta_A$. (= id_A).

(a') R→ funcţională ⇔ $R \circ R^{-1} \subseteq \Delta_B$;

(b') R→ surjectivă ⇔ $\Delta_B \subseteq R \circ R^{-1}$;

(c') R→ funcţională şi surjectivă ⇔

⇔ $R \circ R^{-1} = \Delta_B$, (= id_B).

7

Conform echivalenţelor (c) şi (c') de mai sus, dacă R este relaţie binară funcţională totală injectivă şi surjectivă, adică funcţie bijectivă, atunci $RoR^{-1}=id_A$ şi $R^{-1}oR=id_B$, aşadar R^{-1} este inversa lui R ca funcţie, fapt ce rezultă şi direct din definiţia lui R^{-1} şi cea a unei funcţii identificate cu graficul ei: pentru orice $(a,b)\in A\times B$, $R(a)=b \Leftrightarrow (a,b) \in R \Leftrightarrow (b,a) \in R^{-1} \Leftrightarrow R^{-1}(b)=a$.

REZ.: Dem. primele echivalenţe; aplicându-le pt. R^{-1} în locul lui R, rezultă celelalte echivalenţe, folosind observaţia anterioară.

① (1.1) R→ injectivă $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $(\forall a_1, a_2 \in A)$ $(\forall b \in B)(a_1 R b$ şi $a_2 R b \Rightarrow a_1 = a_2)$ $\overset{obs.}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow (\forall b \in B)(\forall a_1, a_2 \in A)(b R^{-1} a_1$ şi $b R^{-1} a_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 = a_2)$ $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ R^{-1}→ funcţională;

(1.2) R→ surjectivă $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $(\forall b \in B)(\exists a \in A)(a R b)$

$\overset{obs.}{\Leftrightarrow}$ $(\forall b \in B)(\exists a \in A)(b R^{-1} a)$ $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ R^{-1}→ totală.

② (1.1), (1.2) $\overset{def}{\Rightarrow}$ (1.3) ⇒ (1.4) ⇒ (1.5).

(a) "⇒": Fie $(a,c) \in R^{-1} \circ R$,

cu $a, c \in A$. $\Leftrightarrow (\exists b \in A)(a R b$

şi $\underbrace{b R^{-1} c)}_{\Leftrightarrow c R b}$ $\Leftrightarrow (\exists b \in B)(a R b$ şi

$c R b)$ $\xRightarrow{(R \to inj.)}$ $a = c \Leftrightarrow (a,c) \in \Delta_A \Rightarrow$

$\Rightarrow R^{-1} \circ R \subseteq \Delta_A$.

"⇐": Fie $a_1, a_2 \in A$ şi

$b \in B$, a.î. $a_1 R b$ şi $\underbrace{a_2 R b}_{(\Leftrightarrow b R^{-1} a_2)}$ ⇔

$\Leftrightarrow a_1 R b$ şi $b R^{-1} a_2 \Rightarrow (a_1, a_2) \in \underbrace{R^{-1} \circ R}_{\subseteq \Delta_A} \Rightarrow (a_1, a_2) \in \Delta_A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_1 = a_2 \Rightarrow R \to$ „inj"

(b) $\underline{„\Rightarrow"}$ Fie $a \in A \xrightarrow{R \to \text{totală}} (\exists b \in B)(a R b) \Leftrightarrow (b R^{-1} a) \Rightarrow (a, a) \in R^{-1} \circ R \Rightarrow \Delta_A \subseteq R^{-1} \circ R$
$(\exists b \in B)$

$\underline{„\Leftarrow"}$ Fie $a \in A \Leftrightarrow (a, a) \in \underbrace{\Delta_A}_{\subseteq R^{-1} \circ R} \Rightarrow$

$\Rightarrow (a, a) \in R^{-1} \circ R \Leftrightarrow (\exists b \in B)(a R b$ şi $b R^{-1} a) \Leftrightarrow (\exists b \in B)(a R b) \Rightarrow R \to$ totală

(c) $R \to$ injectivă şi totală $\overset{(a),(b)}{\Leftrightarrow} R^{-1} \circ R \subseteq \Delta_A$ şi $\Delta_A \subseteq R^{-1} \circ R \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R^{-1} \circ R = \Delta_A$

(a') $\Leftarrow$ (a), (1.1) şi obs.
(b') $\Leftarrow$ (b), (1.2) şi obs.
(c') $\Leftarrow$ (a'), (b').

Punctul (2) al observaţiei următoare repetă observaţia de mai sus.

Obs.: $A, B, (C, D) \to$ mulțimi; $Q \subseteq A^2 (= A\times A)$;
$R \subseteq A\times B$; $S \subseteq A\times B$; $P \subseteq A\times A$; $T \subseteq B\times C$. Atunci:

(1) $\Delta_A^{-1} = \Delta_A$;

(2) $(R^{-1})^{-1} = R$;

(3) $(Q^2)^{-1} = (Q^{-1})^2$;

(4) $(R\cup S)^{-1} = R^{-1}\cup S^{-1}$ (e valabilă chiar pt. $\cup$ arbitrare);

(5) $(R\cap S)^{-1} = R^{-1}\cap S^{-1}$ (e valabilă chiar pt. $\cap$ arbitrare);

(6) $R\subseteq S \Leftrightarrow R^{-1}\subseteq S^{-1}$;

(7) $R = S \Leftrightarrow R^{-1} = S^{-1}$; (8) $R\subsetneq S \Leftrightarrow R^{-1}\subsetneq S^{-1}$;

(9) $R\subseteq S \Rightarrow \begin{cases} R\circ P \subseteq S\circ P \\ T\circ R \subseteq T\circ S. \end{cases}$

(10) $(R\setminus S)^{-1} = R^{-1}\setminus S^{-1}$

(11) $(R\Delta S)^{-1} = R^{-1}\Delta S^{-1}$

(similar)

Dem.:

(1) Fie $a, b\in A$, arbitrare, fixate.
$(a,b)\in\Delta_A^{-1} \Leftrightarrow (b,a)\in\Delta_A \Leftrightarrow b = a \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow (a,b)\in\Delta_A. \Rightarrow \Delta_A^{-1} = \Delta_A.$

(2) Fie $a\in A$ și $b\in B$, arbitrare, fixate.
$(R\subseteq A\times B \Rightarrow R^{-1}\subseteq B\times A \Rightarrow (R^{-1})^{-1}\subseteq A\times B)$
$(a,b)\in R \Leftrightarrow (b,a)\in R^{-1} \Leftrightarrow (a,b)\in (R^{-1})^{-1}$;
$\Rightarrow R = (R^{-1})^{-1}$.

(3) $(Q^2)^{-1} = (Q\circ Q)^{-1} = Q^{-1}\circ Q^{-1} = (Q^{-1})^2$;
La curs am dem. chiar că: $(\forall n\in\mathbb{Z})$ $((Q^n)^{-1} = (Q^{-1})^n)$.

(4) Fie $a\in A$ și $b\in B$, arb., fixate.

$(b,a)\in(R\cup S)^{-1}\Leftrightarrow(a,b)\in R\cup S\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow[(a,b)\in R$ sau $(a,b)\in S]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow[(b,a)\in R^{-1}$ sau $(b,a)\in S^{-1}]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(b,a)\in R^{-1}\cup S^{-1}$. $\Rightarrow(R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1}$;

(5) Fie $a\in A$ și $b\in B$, arb., fixate.

$(b,a)\in(R\cap S)^{-1}\Leftrightarrow(a,b)\in R\cap S\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow[(a,b)\in R$ și $(a,b)\in S]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow[(b,a)\in R^{-1}$ și $(b,a)\in S^{-1}]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(b,a)\in R^{-1}\cap S^{-1}$, $\Rightarrow(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$;

(6) $R\subseteq S\Leftrightarrow(\forall a\in A)(\forall b\in B)(aRb\Rightarrow$

$\Rightarrow aSb)\overset{\text{(cuantif. de}}{\underset{\text{aceiași fel comută)}}{\Longleftrightarrow}}(\forall b\in B)(\forall a\in A)$

$(bR^{-1}a\Rightarrow bS^{-1}a)\Leftrightarrow R^{-1}\subseteq S^{-1}$,

(7) $R=S\Leftrightarrow(R\subseteq S$ și $S\subseteq R)\overset{(6)}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow(R^{-1}\subseteq S^{-1}$ și $S^{-1}\subseteq R^{-1})\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R^{-1}=S^{-1}$,

(8) $R\subsetneq S\Leftrightarrow R\subseteq S$ și $R\neq S$

$\overset{(6)}{\underset{(7)}{\Longleftrightarrow}} R^{-1}\subseteq S^{-1}$ și $R^{-1}\neq S^{-1}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R^{-1}\subsetneq S^{-1}$.

(9) $R\circ P \subseteq D\times B \supseteq S\circ P$; $T\circ R \subseteq A\times C \supseteq T\circ S$.

Presupunem că $R\subseteq S$.

Fie $a\in A$, $b\in B$, $c\in C$, $d\in D$, arbitrare, fixate.

$(d,b)\in R\circ P \Leftrightarrow (\exists x\in A)((d,x)\in P$ şi $\underbrace{(x,b)\in R}_{\xRightarrow{(R\subseteq S)} (x,b)\in S}) \Rightarrow (\exists x\in A)((d,x)\in P$ şi $(x,b)\in S) \Leftrightarrow (d,b)\in S\circ P$. Aşadar $R\circ P\subseteq S\circ P$.

$(a,c)\in T\circ R \Leftrightarrow (\exists y\in B)(\underbrace{(a,y)\in R}_{\Downarrow (R\subseteq S)\ (a,y)\in S}$ şi $(y,c)\in T) \Rightarrow (\exists y\in B)((a,y)\in S$ şi $(y,c)\in T) \Leftrightarrow (a,c)\in T\circ S$. Aşadar $T\circ R\subseteq T\circ S$.

(10) Fie $a\in A$ şi $b\in B$, arbitrare, fixate. Au loc:

$(b,a)\in (R\setminus S)^{-1} \Leftrightarrow (a,b)\in R\setminus S \Leftrightarrow (a,b)\in R$ şi $(a,b)\notin S \Leftrightarrow (b,a)\in R^{-1}$ şi $(b,a)\notin S^{-1} \Leftrightarrow (b,a)\in R^{-1}\setminus S^{-1}$.

Aşadar $(R\setminus S)^{-1} = R^{-1}\setminus S^{-1}$.

(11) Conform (4) şi (10), avem:

$(R\Delta S)^{-1} = ((R\setminus S)\cup(S\setminus R))^{-1} = (R\setminus S)^{-1}\cup(S\setminus R)^{-1} = (R^{-1}\setminus S^{-1})\cup(S^{-1}\setminus R^{-1}) = R^{-1}\Delta S^{-1}$.

Remarcă: Fie A, B, C mulţimi, $R\subseteq A\times B$, iar $S\subseteq B\times C$. Atunci:

(1) $R=\Phi$ ddacă $R^{-1}=\Phi$;
(2) $S\circ\Phi=\Phi=\Phi\circ R$;
(3) $S\circ R=\Phi$ nu implică $R=\Phi$ sau $S=\Phi$;
(4) dacă S e relaţie totală (în sensul de la relaţii binare între două mulţimi nu neapărat egale), în particular dacă S e funcţie, atunci: $S=\Phi$ ddacă $B=\Phi$, iar $S\circ R=\Phi$ ddacă $R=\Phi$;
(5) dacă R e relaţie surjectivă, în particular dacă R e funcţie, atunci: $R=\Phi$ ddacă $B=\Phi$, iar $S\circ R=\Phi$ ddacă $S=\Phi$;
(6) dacă R e relaţie surjectivă, iar S e relaţie totală, în particular dacă R şi S sunt funcţii, atunci $S\circ R=\Phi$ ddacă $R=\Phi$ ddacă $S=\Phi$ ddacă $B=\Phi$.

(1) Într-adevăr, considerând $\Phi\subseteq A\times B$, avem că $\Phi^{-1}=\{(b,a)\in B\times A \mid (a,b)\in\Phi\}=\Phi$, aşadar, dacă $R=\Phi$, atunci $R^{-1}=\Phi$, iar, dacă $R^{-1}=\Phi$, atunci, conform punctului (2) din observaţia anterioară, rezultă că $R=(R^{-1})^{-1}=\Phi^{-1}=\Phi$.

(2) $S\circ R=\{(a,c)\in A\times C \mid (\exists b\in B)((a,b)\in R$ şi $(b,c)\in S)\}=\Phi$ dacă $R=\Phi$ sau $S=\Phi$, pentru că, în acest caz, întrucât Φ nu are elemente, pentru orice $b\in B$, proprietatea $(a,b)\in R$ este falsă sau proprietatea $(b,c)\in S$ este falsă, aşadar, pentru orice $b\in B$, proprietatea $((a,b)\in R$ şi $(b,c)\in S)$ este falsă, adică proprietatea $(\exists b\in B)((a,b)\in R$ şi $(b,c)\in S)$ este falsă, deci nu e satisfăcută de nicio pereche $(a,c)\in A\times C$.

(3) De exemplu, dacă $A=B=C=\{a,b\}$, cu $a\neq b$, iar $R=\{(a,b),(b,b)\}\neq\Phi$ şi $S=\{(a,a),(a,b)\}\neq\Phi$, atunci $S\circ R=\Phi$. Cu aceleaşi mulţimi A,B,C, dacă $R=\{(b,b)\}\neq\Phi$ şi $S=\{(a,a)\}\neq\Phi$, atunci $S\circ R= R\circ S=\Phi$.

(4) Dacă S e relaţie totală de la B la C, adică, pentru orice $b\in B$, există $c\in C$ astfel încât $(b,c)\in S$, atunci:

- dacă $B=\Phi$, atunci $S\subseteq B\times C=\Phi\times C=\Phi$, aşadar $S=\Phi$;
- reciproc, dacă $S=\Phi$, atunci, presupunând prin absurd că $B\neq\Phi$, rezultă că există $b\in B$, prin urmare există $b\in B$ şi $c\in C$ astfel încât $(b,c)\in S$, ceea ce contrazice faptul că $S=\Phi$; aşadar $B=\Phi$;
- dacă $R=\Phi$, atunci $S\circ R=S\circ\Phi=\Phi$;
- dacă $S\circ R=\Phi$, atunci, presupunând prin absurd că $R\neq\Phi$, rezultă că există $a\in A$ şi $b\in B$ astfel încât $(a,b)\in R$, prin urmare există $c\in C$ astfel încât $(b,c)\in S$, aşadar $(a,c)\in S\circ R$, ceea ce contrazice faptul că $S\circ R=\Phi$; prin urmare $R=\Phi$.

(5) Dacă $R\subseteq A\times B$ e relaţie surjectivă, ceea ce este echivalent cu faptul că $R^{-1}\subseteq B\times A$ e relaţie totală conform punctului (1.2) din primul exerciţiu de mai sus, atunci:

- conform punctelor (1) şi (4) de mai sus, avem: $R=\Phi$ ddacă $R^{-1}=\Phi$ ddacă $B=\Phi$, iar $S\circ R=\Phi$ ddacă $S=\Phi$;
- conform punctelor (1) şi (4) de mai sus şi egalităţii din curs $(S\circ R)^{-1}=R^{-1}\circ S^{-1}\subseteq C\times B$, avem: $R=\Phi$ ddacă $R^{-1}=\Phi$ ddacă $B=\Phi$, iar $S\circ R=\Phi$ ddacă $R^{-1}\circ S^{-1}=\Phi$ ddacă $S^{-1}=\Phi$ ddacă $S=\Phi$.

(7) Conform punctelor (4) şi (5) de mai sus, dacă R e relaţie surjectivă, iar S e relaţie totală, atunci: $S\circ R=\Phi$ ddacă $R=\Phi$ ddacă $B=\Phi$ ddacă $S=\Phi$.

Cazul $I=\emptyset$ în observația următoare:

$\left(\bigcup_{i\in\emptyset} R_i\right)^{-1}=\emptyset^{-1}=\emptyset=\bigcup_{i\in\emptyset} R_i^{-1}$;

$\left(\bigcap_{i\in\emptyset} R_i\right)^{-1}=(A\times B)^{-1}=B\times A=\bigcap_{i\in\emptyset} R_i^{-1}$,

întrucât $(R_i)_{i\in I}\subseteq\mathcal{P}(A\times B)$,

iar $(R_i^{-1})_{i\in I}\subseteq\mathcal{P}(B\times A)$.

Obs.: $I \to$ mulțime; $I \neq \emptyset$ (de fapt, poate fi și vidă)

$A, B \to$ mulțimi; $(R_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$.

(dar aici o considerăm nevidă)

Atunci:

- $\left(\bigcup_{i \in I} R_i\right)^{-1} = \bigcup_{i \in I} R_i^{-1}$;
- $\left(\bigcap_{i \in I} R_i\right)^{-1} = \bigcap_{i \in I} R_i^{-1}$.

Dem.: $(\forall i \in I)(R_i \subseteq A \times B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall i \in I)(R_i^{-1} \subseteq B \times A)$.

$$\Downarrow$$

$\bigcup_{i \in I} R_i^{-1} \subseteq B \times A \supseteq \bigcap_{i \in I} R_i^{-1}$; $\quad \bigcap_{i \in I} R_i \subseteq \bigcup_{i \in I} R_i \subseteq A \times B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\bigcup_{i \in I} R_i\right)^{-1} \subseteq B \times A \supseteq \left(\bigcap_{i \in I} R_i\right)^{-1}$.

dacă $A = \emptyset$ sau $B = \emptyset$, atunci $A \times B = \emptyset$, $\Rightarrow (\forall i \in I)(R_i = \emptyset) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall i \in I)(R_i^{-1} = \emptyset)$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} R_i^{-1} = \bigcap_{i \in I} R_i^{-1} = \emptyset = \emptyset^{-1} =$

$= \left(\bigcup_{i \in I} R_i\right)^{-1} = \left(\bigcap_{i=1} R_i\right)^{-1}$.

Astfel se poate trata separat cazul mulțimilor vide în toate aceste observații.

Acum presupunem că $A \neq \emptyset$ și $B \neq \emptyset$, astfel că putem aplica ~~exdome~~ etapeni.

Fie $a\in A$ și $b\in B$, arbitrare, fixate.

$$(b,a)\in\Big(\bigcup_{i\in I} R_i\Big)^{-1} \Leftrightarrow (a,b)\in\bigcup_{i\in I} R_i \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\exists\, i\in I)\big((a,b)\in R_i\big) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\exists\, i\in I)\big((b,a)\in R_i^{-1}\big) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (b,a)\in\bigcup_{i\in I} R_i^{-1}.$$

Așadar $\Big(\bigcup_{i\in I} R_i\Big)^{-1}=\bigcup_{i\in I} R_i^{-1}$.

$$(b,a)\in\Big(\bigcap_{i\in I} R_i\Big)^{-1} \Leftrightarrow (a,b)\in\bigcap_{i\in I} R_i \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\forall\, i\in I)\big((a,b)\in R_i\big) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\forall\, i\in I)\big((b,a)\in R_i^{-1}\big) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (b,a)\in\bigcap_{i\in I} R_i^{-1}.$$

Așadar $\Big(\bigcap_{i\in I} R_i\Big)^{-1}=\bigcap_{i\in I} R_i^{-1}$.

Obs.: Cu notațiile din observația anterioară, fie C, D mulțimi, $P\subseteq D\times A$ și $T\subseteq B\times C$. Atunci:

- $T\circ\Big(\bigcup_{i\in I} R_i\Big)=\bigcup_{i\in I}(T\circ R_i)$;
- $\Big(\bigcup_{i\in I} R_i\Big)\circ P=\bigcup_{i\in I}(R_i\circ P)$;
- $T\circ\Big(\bigcap_{i\in I} R_i\Big)\subseteq\bigcap_{i\in I}(T\circ R_i)$;
- $\Big(\bigcap_{i\in I} R_i\Big)\circ P\subseteq\bigcap_{i\in I}(R_i\circ P)$.

(Avem egalitate, de exemplu dacă $(\forall\, i,j\in I)(R_i=R_j)$)

A se vedea contraexemplul din curs pt. egalitate; un

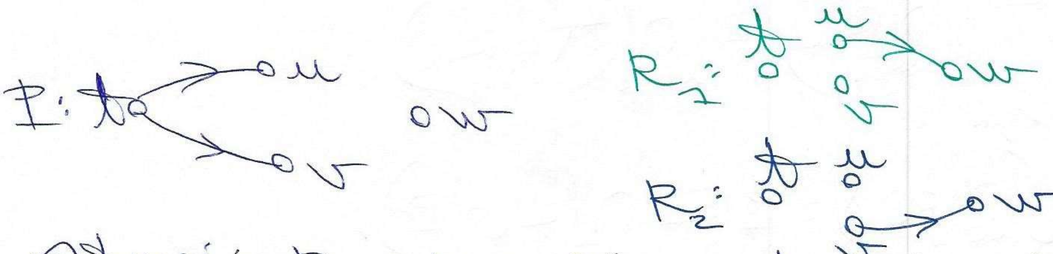
Dem.:

contraexemplu similar pt. egalitate în ultima incluziune: fie $D=A=B=$

$= \{t, u, v, w\}$, cu $|A| = 4$,

$I = \{1, 2\} \subset \mathbb{N}$, $P = \{(t, u), (t, v)\}$,

$R_1 = \{(u, w)\}$ şi $R_2 = \{(v, w)\}$:

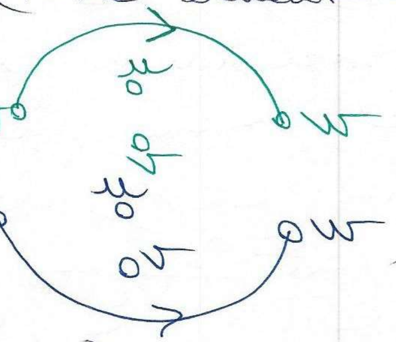


Atunci: $R_1 \cap R_2 = \emptyset$, aşadar $(R_1 \cap R_2) \circ P = \emptyset$ (presupunând că ar avea elemente $\Rightarrow$ ∄),

dar:

$R_1 \circ P = \{(t, w)\}$:

$R_2 \circ P = \{(t, w)\}$:



prin urmare $(R_1 \circ P) \cap (R_2 \circ P) =$

$= \{(t, w)\} \supsetneq \emptyset = (R_1 \cap R_2) \circ P$.

În ce priveşte incluziunea:

$$I \neq \emptyset \Rightarrow (\forall k \in I)\left(\bigcap_{i \in I} R_i \subseteq R_k\right) \xRightarrow{\text{cf. obs. de mai sus}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\forall k \in I)\left(T \circ \left(\bigcap_{i \in I} R_i\right) \subseteq T \circ R_k\right) \\ \text{şi} \\ (\forall k \in I)\left(\left(\bigcap_{i \in I} R_i\right) \circ P \subseteq R_k \circ P\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T\circ\left(\bigcap_{i\in J} R_i\right) \subseteq \bigcap_{k\in J}\left(T\circ R_k\right) \\ \text{și} \\ \left(\bigcap_{i\in J} R_i\right)\circ P \subseteq \bigcap_{k\in J}\left(R_k\circ P\right) \end{cases}$$ (acum putem redenumi indicele din membrul drept)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} T\circ\left(\bigcap_{i\in J} R_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in J}\left(T\circ R_i\right) \\ \text{și} \\ \left(\bigcap_{i\in J} R_i\right)\circ P \subseteq \bigcap_{i\in J}\left(R_i\circ P\right). \end{cases}$$

Putem trata separat cazul $C=\emptyset$ sau $D=\emptyset$ ca mai sus, apoi să le presupunem nevide, pentru a putea aplica axioma alegerii.

Fie $a\in A$, $b\in B$, $c\in C$, $d\in D$, arbitrare, fixate.

$(a,c)\in \overbrace{T\circ\left(\bigcup_{i\in J} R_i\right)}^{\subseteq A\times C} \Leftrightarrow (\exists\, x\in B)\left((a,x)\in \bigcup_{i\in J} R_i \text{ și } (x,c)\in T\right) \Leftrightarrow (\exists\, x\in B)\left[(\exists\, i\in J)((a,x)\in R_i) \text{ și } \underbrace{(x,c)\in T}_{\text{(enunț în care nu apare } i)}\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\exists\, x\in B)(\exists\, i\in J)((a,x)\in R_i \text{ și } (x,c)\in T) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\exists\, i\in J)(\exists\, x\in B)((a,x)\in R_i \text{ și } (x,c)\in T) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\exists\, i\in J)((a,c)\in T\circ R_i) \Leftrightarrow (a,c)\in \underbrace{\bigcup_{i\in J}(T\circ R_i)}_{\subseteq A\times C}.$

Așadar, $T\circ\left(\bigcup_{i\in J} R_i\right) = \bigcup_{i\in J}(T\circ R_i)$.

Analog, $(d,b)\in \overbrace{\left(\bigcup_{i\in J} R_i\right)\circ P}^{\subseteq D\times B \supseteq} \Leftrightarrow (d,b)\in \bigcup_{i\in J}(R_i\circ P)$, așadar $\left(\bigcup_{i\in J} R_i\right)\circ P = \bigcup_{i\in J}(R_i\circ P)$.

Relaţii Binare pe o Mulţime

Obs.: $A \to$ mulţime; $R \subseteq A^2 (= A \times A)$.

Atunci:

(a) $R \to$ reflexivă $\Leftrightarrow \Delta_A \subseteq R$;

(b) $R \to$ simetrică $\Leftrightarrow R \subseteq R^{-1} \Leftrightarrow R^{-1} \subseteq R$
$\Leftrightarrow R = R^{-1}$;

(c) $R \to$ tranzitivă $\Leftrightarrow R^2 \subseteq R$;

(d) $R \in \underset{\text{(not.)}}{\underbrace{Eq(A)}} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_A \subseteq R \\ \text{şi} \\ R = R^{-1} \\ \text{şi} \\ R^2 \subseteq R; \end{cases}$

(mult. rel. de echiv. pe A)

(e) $R \to$ preord. $\Rightarrow R = R^2$.

Dem.:

(a) $R \to$ reflexivă $\overset{\text{(def.)}}{\Longleftrightarrow} (\forall a \in A)(aRa) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \{(a,a) \mid a \in A\} \subseteq R \Leftrightarrow \Delta_A \subseteq R$,

(b) $R \to$ simetrică $\overset{\text{(def.)}}{\Longleftrightarrow} (\forall a, b \in A)(aRb \Rightarrow$
$\Rightarrow bRa) \overset{\text{(def. } R^{-1})}{\Longleftrightarrow} (\forall a, b \in A)(aRb \Rightarrow aR^{-1}b)$
$\Leftrightarrow R \subseteq R^{-1} \xLeftrightarrow[\text{(6))}]{\text{(obs. anter.}} R^{-1} \subseteq (R^{-1})^{-1} \Leftrightarrow$
$\overset{\text{(obs. anter. (2))}}{\Longleftrightarrow} R^{-1} \subseteq R \Leftrightarrow R \subseteq R^{-1}$ şi $R^{-1} \subseteq R \Leftrightarrow R = R^{-1}$,

dacă $p, q \to$ proprietăţi, a.î. $p \Leftrightarrow q$, atunci,
(p sau q) $\Leftrightarrow p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow$ (p şi q)

(c) $R \to$ tranzitivă $\overset{\text{(def.)}}{\Longleftrightarrow} (\forall a, b, c \in A)$
$(aRb$ şi $bRc \Rightarrow aRc)$,

$R^2 \subseteq R \Leftrightarrow (\forall a, c \in A)(aR^2c \Rightarrow aRc)$
$\xLeftrightarrow{\text{(def. } R^2 = R \circ R)} (\forall a, c \in A)[(\exists b \in A)(aRb$ şi
$bRc) \Rightarrow aRc]$.

"$\Rightarrow$": Fie $a, c \in A$ a.î. aR^2c, $\Leftrightarrow$
$\overset{\text{(def. } R^2)}{\Longleftrightarrow} (\exists b \in A)(aRb$ şi $bRc) \overset{(R \to \text{tranz.})}{\Longrightarrow} aRc$,

"$\Leftarrow$": Fie $a, b, c \in A$ a.î. aRb şi $bRc \xRightarrow{(\text{def } R^2)} aR^2c \xrightarrow{(R^2 \subseteq R)} aRc \xRightarrow{(\text{def})}$

$\Rightarrow R \rightarrow$ tranzitivă.

(d) $R \in Eq(A) \xLeftrightarrow{\text{def}} R \rightarrow$ refl., sim. şi tranz. $\xLeftrightarrow{(a),(b),(c)} (\Delta_A \subseteq R,\ R = R^{-1}$ şi $R^2 \subseteq R)$,

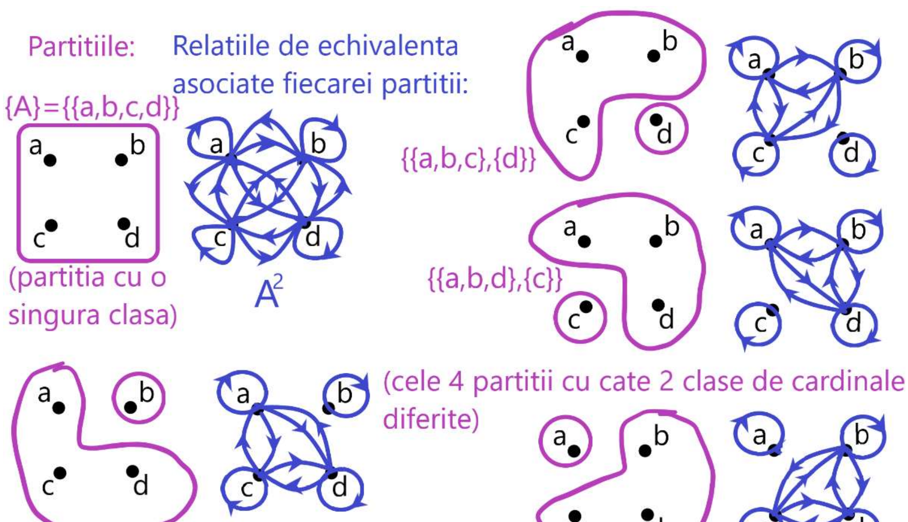
(e) $R \rightarrow$ preordine $\xLeftrightarrow{\text{def}} R \rightarrow$ refl. şi tranz.

$$\xRightarrow{(a),(c)} \left\{ \begin{array}{l} \Delta_A \subseteq R \,/\circ R \xRightarrow[\text{anter., }(*)]{(\text{obs.}} R \subseteq R^2 \\ \text{şi} \\ R^2 \subseteq R \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow R = R^2$.

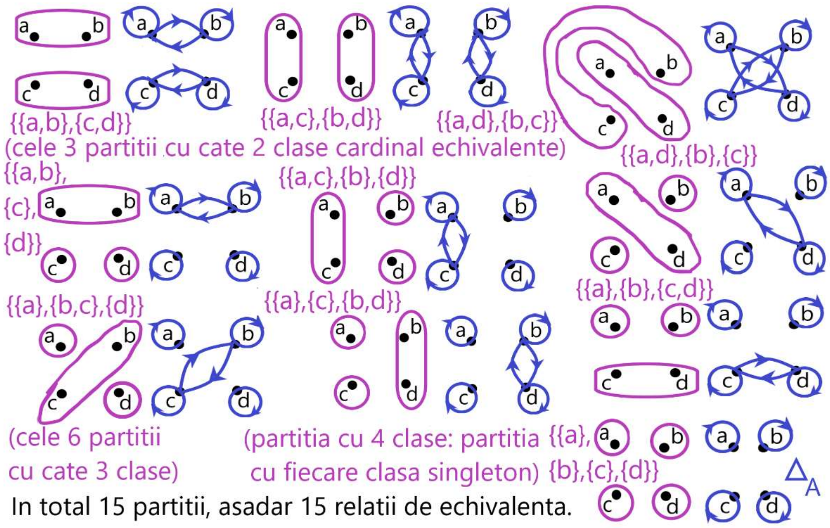
Exerciţiu: Să se determine toate partiţiile unei mulţimi cu exact 4 elemente şi relaţiile de echivalenţă asociate acestora.

Rezolvare: Fie A={a,b,c,d}, având |A|=4 (i.e. cu a,b,c,d două câte două distincte).



$|A^2| = |A|^2 = 4^2 = 16$, iar fiecare partiţie cu două clase de cardinale diferite corespunde unei relaţii de echivalenţă formate din exact $3^2+1 = 10$ perechi de elemente din A.

Fiecare partiţie formată din două clase cardinal echivalente corespunde unei relaţii de echivalenţă de cardinal $2^2+2^2 = 8$.



Fiecare partiţie cu 3 clase corespunde unei relaţii de echivalenţă de cardinal $2^2+1+1 = 6$, iar $|\Delta_A|=4$.

Observaţie: $Eq(\Phi)=\mathcal{P}(\Phi\times\Phi)=\mathcal{P}(\Phi)=\{\Phi\}$, pentru că Φ satisface, în mod trivial, definiţia unei relaţii de echivalenţă pe Φ sau caracterizarea acesteia prin $\Delta_\Phi=\Phi\subseteq\Phi$, $\Phi=\Phi^{-1}$ şi $\Phi\circ\Phi=\Phi\subseteq\Phi$, iar $Eq(\Phi)=\{\Phi\}$ este închisă la toate operaţiile cu mulţimi şi relaţii binare din exerciţiul următor, adică rezultatul aplicării acestor operaţii unor elemente $R,S \in \{\Phi\}$ se află tot în $\{\Phi\}$.

Exerciţiu: Fie A o mulţime nevidă, iar R şi S relaţii binare pe A. Amintesc că am notat cu Eq(A) mulţimea relaţiilor de echivalenţă pe A. Să se demonstreze că, dacă $R,S \in Eq(A)$, atunci:

=> $R^{-1} \in Eq(A)$;

=> $R\cap S \in Eq(A)$ (proprietate valabilă şi pentru intersecţii arbitrare);

=> $R\setminus S\notin Eq(A)$ şi $R\Delta S\notin Eq(A)$;

≠> $R\cup S \in Eq(A)$ (de exemplu dacă $R\subseteq S$, atunci $R\cup S=S \in Eq(A)$, dar nu întotdeauna);

≠> $R\circ S \in Eq(A)$ (de exemplu dacă $R=\Delta_A$, atunci $R\circ S=\Delta_A\circ S=S \in Eq(A)$).

Rezolvare: Amintesc că o relaţie de echivalenţă pe o mulţime e o relaţie binară reflexivă, simetrică şi tranzitivă pe acea mulţime. Vom folosi proprietăţi de la curs şi din exerciţiile anterioare: caracterizări ale reflexivităţii, simetriei şi tranzitivităţii, faptul că trecerea la inversă păstrează incluziunile (cu implicaţie în ambele sensuri, deci păstrează şi egalităţile cu implicaţie în ambele sensuri, adică două relaţii binare sunt egale ddacă inversele lor sunt egale), şi trecerea la inversă comută cu intersecţiile şi reuniunile (chiar cu cele arbitrare).

- Să observăm că inversarea păstrează fiecare dintre proprietăţile de reflexivitate, simetrie şi tranzitivitate:

R e reflexivă <=> $\Delta_A \subseteq R$ <=> $\Delta_A^{-1} \subseteq R^{-1}$ <=> $\Delta_A \subseteq R^{-1}$ <=> R^{-1} e reflexivă, întrucât $\Delta_A^{-1}=\Delta_A$;

R e simetrică <=> $R=R^{-1}$ <=> $R^{-1}=(R^{-1})^{-1}$ <=> R^{-1} e simetrică;

R e tranzitivă <=> $R \circ R \subseteq R$ <=> $(R \circ R)^{-1} \subseteq R^{-1}$ <=> $R^{-1} \circ R^{-1} \subseteq R^{-1}$ <=> R^{-1} e tranzitivă, întrucât $(R \circ R)^{-1}=R^{-1}$.

Aşadar, R ϵ Eq(A) <=> R^{-1} ϵ Eq(A). Dar avem o demonstraţie mai simplă pentru această cerinţă: dacă R ϵ Eq(A), atunci R^{-1}=R ϵ Eq(A).

- Să demonstrăm că intersecţiile arbitrare păstrează fiecare dintre proprietăţile de reflexivitate, simetrie şi tranzitivitate.

Aşadar, să considerăm o familie nevidă (vom vedea că poate fi şi vidă) de relaţii binare pe A: $(R_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(A^2)$, unde I e o mulţime nevidă. Atunci:

dacă, pentru fiecare i∈I, R_i e reflexivă, adică, pentru fiecare i∈I, $\Delta_A \subseteq R_i$, atunci $\Delta_A \subseteq \bigcap_{i \in I} R_i$, aşadar $\bigcap_{i \in I} R_i$ e reflexivă; de fapt, avem echivalenţă: $\bigcap_{i \in I} R_i$ e reflexivă ddacă, pentru fiecare i∈I, R_i e reflexivă;

dacă, pentru fiecare i∈I, R_i e simetrică, adică, pentru fiecare i∈I, $R_i=R_i^{-1}$, atunci $(\bigcap_{i \in I} R_i)^{-1}$ $=\bigcap_{i \in I} R_i^{-1}= \bigcap_{i \in I} R_i$, aşadar $\bigcap_{i \in I} R_i$ e simetrică;

dacă, pentru fiecare i∈I, R_i e tranzitivă, atunci avem, pentru orice a,b,c ϵ A:

dacă (a,b),(b,c) ϵ $\bigcap_{i \in I} R_i$, adică, pentru fiecare i∈I, (a,b),(b,c) ϵ R_i, atunci, pentru fiecare i∈I, (a,c) ϵ R_i, aşadar (a,c) ϵ $\bigcap_{i \in I} R_i$, prin urmare $\bigcap_{i \in I} R_i$ e tranzitivă.

Aşadar, dacă $(R_i)_{i \in I} \subseteq$ Eq(A), adică, pentru fiecare i∈I, R_i e relaţie de echivalenţă pe A, atunci $\bigcap_{i \in I} R_i$ ϵ Eq(A). În particular, dacă R,S ϵ Eq(A), atunci $R \cap S$ ϵ Eq(A).

- Să observăm că, dacă scădem, dintr-o relaţie binară pe A, o relaţie binară reflexivă pe A, obţinem o relaţie binară ireflexivă, aşadar nereflexivă, întrucât A e nevidă.

Într-adevăr, dacă S e reflexivă, adică $\Delta_A \subseteq S$, atunci $R \setminus S \subseteq R \setminus \Delta_A$, aşadar $(R \setminus S) \cap \Delta_A \subseteq (R \setminus \Delta_A) \cap \Delta_A = \Phi$, prin urmare $(R \setminus S) \cap \Delta_A = \Phi$, deci $R \setminus S$ e ireflexivă, aşadar $\Delta_A \not\subseteq R \setminus S$, deci $R \setminus S$ nu e reflexivă, pentru că altfel am obţine următoarea contradicţie: $\Phi=(R \setminus S) \cap \Delta_A = \Delta_A \neq \Phi$, întrucât $A \neq \Phi$ implică $\Delta_A = \{(a,a) \mid a \in A\} \neq \Phi$. În particular, dacă S ϵ Eq(A), atunci $R \setminus S \notin$ Eq(A). Dacă R şi S sunt ambele reflexive, în particular dacă R,S ϵ Eq(A), atunci, conform celor de mai sus, distributivităţii intersecţiei faţă de reuniune şi idempotenţei reuniunii,

$(R\Delta S)\cap\Delta_A = ((R\setminus S)\cup(S\setminus R))\cap\Delta_A = ((R\setminus S)\cap\Delta_A)\cup((S\setminus R)\cap\Delta_A) = \Phi\cup\Phi = \Phi \neq \Delta_A$ întrucât $A\neq\Phi$, deci $R\Delta S$ e ireflexivă, în particular nu e reflexivă, aşadar $R\Delta S\notin Eq(A)$.

- La fel ca mai sus, putem observa faptul că:

Reuniunea oricărei familii nevide de relaţii binare reflexive pe A este reflexivă şi reuniunea oricărei familii nevide de relaţii binare simetrice pe A este simetrică. Aşadar va trebui să găsim un exemplu de relaţii de echivalenţă pe A a căror reuniune e netranzitivă.

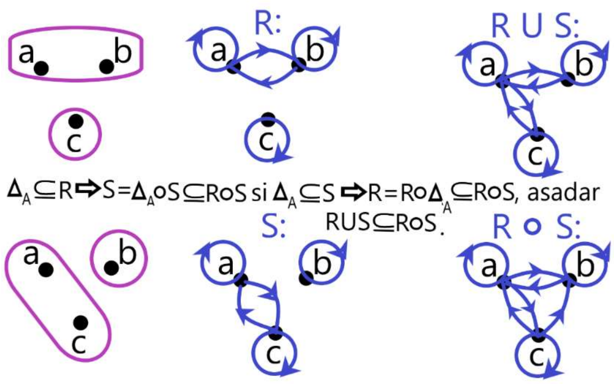
De asemenea, compunerea oricăror două relaţii binare reflexive pe A este reflexivă: dacă R şi S sunt reflexive, adică $\Delta_A\subseteq R$ şi $\Delta_A\subseteq S$, atunci $\Delta_A=\Delta_A\circ\Delta_A\subseteq R\circ S$, deci $R\circ S$ e reflexivă. Aşadar va trebui să găsim un exemplu de relaţii de echivalenţă pe A a căror reuniune nu e simetrică sau nu e tranzitivă.

Observăm că, dacă $|A|\leq 2$, atunci $Eq(A)=\{\Delta_A,A^2\}$, care este închisă la reuniune şi compunere, adică reuniunea oricăror două elemente ale acestei mulţimi aparţine acestei mulţimi şi compunerea oricăror două elemente ale acestei mulţimi aparţine acestei mulţimi. Aşadar, pentru a găsi exemplele căutate, trebuie să considerăm o mulţime A având $|A|\geq 3$.

Să considerăm o mulţime A cu exact 3 elemente şi două relaţii de echivalenţă diferite cu câte 2 clase pe A:

Fie $A=\{a,b,c\}$, cu $|A|=3$ (i.e. cu elementele a,b,c două câte două distincte).

Fie $R,S \in Eq(A)$ astfel încât $A/R=\{\{a,b\},\{c\}\}$, iar $A/S=\{\{a,c\},\{b\}\}$, adică R şi S sunt relaţiile de echivalenţă pe A corespunzătoare următoarelor partiţii ale lui A, aşadar conţin următoarele perechi de elemente din A:



Avem $(b,a),(a,c) \in R\cup S$, dar $(b,c) \notin R\cup S$, deci $R\cup S$ nu e tranzitivă.

Cum $(c,b) \in R\circ S$, dar $(b,c) \notin R\circ S$, rezultă că $R\circ S$ nu e simetrică; $(b,a),(a,c) \in R\circ S$, dar $(b,c) \notin R\circ S$, aşadar $R\circ S$ nu e nici tranzitivă.

Material facultativ

Not.: $(\forall x \in \mathbb{R})$(not. partea

întreagă a lui x: $[x] \overset{def}{=}$
$\overset{def}{=} \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\} \in \mathbb{Z}$

fracționară a lui x: $frac\{x\} \overset{def}{=}$
$\overset{def}{=} x - [x] \in [0,1) \subset \mathbb{R})$

Obs.: $(\forall x \in \mathbb{R})(x = [x] \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow frac\{x\} = 0)$.

Ex.: $[-7] = -7$; $frac\{-7\} = 0$,
$[-8,3] = -9$; $frac\{-8,3\} =$
$= 0,7$;
$[3,9] = 3$; $frac\{3,9\} = 9$.

Exerc.: $\sim \subseteq \mathbb{R}^2$, $(\forall x, y \in \mathbb{R})$
$(x \sim y \overset{def.}{\Leftrightarrow} x - y \in \mathbb{Z})$.

Dem. că:

(1) $(\forall x, y \in \mathbb{R})(x \sim y \Leftrightarrow frac\{x\} = frac\{y\})$

(2) $\sim \in Eq(\mathbb{R})$;

(3) $\mathbb{R}/\sim \; \simeq [0,1) \subset \mathbb{R}$.

REZ.:

(1) $(\forall x, y \in \mathbb{R})(x \sim y \overset{def.}{\Leftrightarrow} x - y \in \mathbb{Z}$

$x = [x] + frac\{x\}$, $y = [y] + frac\{y\}$

$\Leftrightarrow \overbrace{[x]}^{\in \mathbb{Z}} + frac\{x\} - \overbrace{[y]}^{\in \mathbb{Z}} - frac\{y\} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \underbrace{\underbrace{frac\{x\}}_{\in [0,1)} - \underbrace{frac\{y\}}_{\in (-1,0]}}_{\in (-1,1)} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

pt. că: $0 \leq frac\{x\} < 1$ și $-1 < -frac\{y\} \leq 0$
$\Downarrow$
$-1 = -1 + 0 < frac\{x\} - frac\{y\} < 0 + 1 = 1$

$(-1,1) \cap \mathbb{Z} = \{0\}$

$\Leftrightarrow frac\{x\} - frac\{y\} = 0) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow frac\{x\} = frac\{y\}$.

(2) Fol. (1). Verif. refl., sim. şi tranz..

$(\forall x\in\mathbb{R})\left(\mathrm{frac}\{x\}=\mathrm{frac}\{x\}\overset{(1)}{\Longleftrightarrow}x\sim x\right)$

$(\forall x,y\in\mathbb{R})\left(x\sim y\overset{(1)}{\Longleftrightarrow}\mathrm{frac}\{x\}=\mathrm{frac}\{y\}\Leftrightarrow\mathrm{frac}\{y\}=\mathrm{frac}\{x\}\overset{(1)}{\Longleftrightarrow}y\sim x\right)$

$(\forall x,y,z\in\mathbb{R})\left(x\sim y \text{ şi } y\sim z\overset{(1)}{\Longleftrightarrow}\mathrm{frac}\{x\}=\mathrm{frac}\{y\} \text{ şi } \mathrm{frac}\{y\}=\mathrm{frac}\{z\}\Longrightarrow\mathrm{frac}\{x\}=\mathrm{frac}\{z\}\overset{(1)}{\Longleftrightarrow}x\sim z\right).$

$\Longrightarrow\sim\in Eq(\mathbb{R}).$

(3) Fie $\varphi:\underbrace{\mathbb{R}/\sim}_{\overset{\text{def}}{=}\{\hat{x}\,|\,x\in\mathbb{R}\}}\to[0,1)$, $\left(\varphi(\hat{x}):=\mathrm{frac}\{x\}\right)$, $(\forall x\in\mathbb{R})$

$\hat{x}\overset{\text{def}}{=}\{y\in\mathbb{R}\,|\,x\sim y\}\overset{(1)}{=}\{y\in\mathbb{R}\,|\,\mathrm{frac}\{x\}=\mathrm{frac}\{y\}\}\subseteq\mathbb{R}.$

În "$\Leftrightarrow$" de la (1): $\begin{cases}\text{"}\Rightarrow\text{"}\Leftrightarrow \text{buna def. a lui } \varphi\\ \text{"}\Leftarrow\text{"}\Leftrightarrow \text{inj. lui } \varphi.\end{cases}$

Fie $x,y\in\mathbb{R}$ a.î. $\hat{x}=\hat{y}\overset{\text{prop}}{\Longleftrightarrow}x\sim y$

$\overset{(1)}{\Longleftrightarrow}\mathrm{frac}\{x\}=\mathrm{frac}\{y\}\overset{\text{def.}\varphi}{\Longleftrightarrow}\varphi(\hat{x})=\varphi(\hat{y})$

$\Rightarrow\varphi\to$ bine definită (i.e. $\varphi\to$ fct.).

Fie $x,y\in\mathbb{R}$ a.î. $\varphi(\hat{x})=\varphi(\hat{y})\Leftrightarrow$

$\overset{\text{def.}\varphi}{\Longleftrightarrow}\mathrm{frac}\{x\}=\mathrm{frac}\{y\}\overset{(1)}{\Longleftrightarrow}x\sim y\overset{\text{prop}}{\Longleftrightarrow}$

$\Leftrightarrow\hat{x}=\hat{y}.\Longrightarrow\varphi\to$ injectivă.

Fie $\alpha\in[0,1)\subset\mathbb{R}\Rightarrow\varphi(\hat{\alpha})\overset{\text{def.}\varphi}{=}\mathrm{frac}\{\alpha\}\overset{\text{def}}{=}$

$=\alpha-[\alpha]\overset{\downarrow}{=}\alpha-0=\alpha\Rightarrow\varphi\to$ surjectivă.

$\Rightarrow\varphi\to$ bijectivă.