

Algoritmi avansați

Seminar 3 (săpt. 5 și 6)

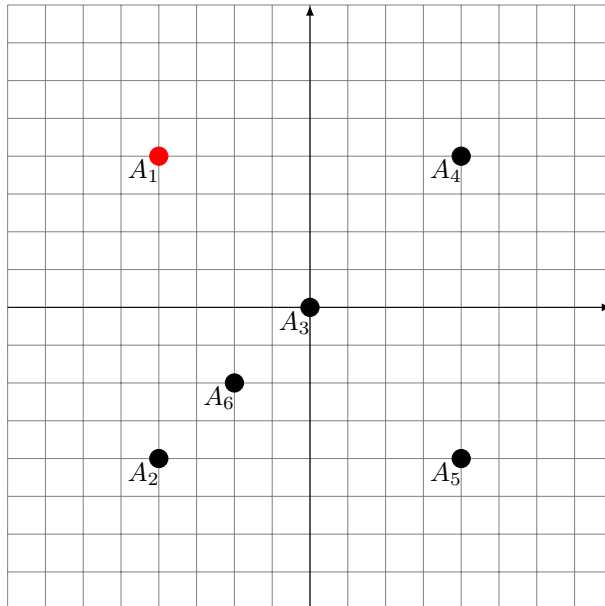
1. Dați exemplu de mulțime $\mathcal{M} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ din \mathbb{R}^2 astfel ca diagrama Voronoi asociată lui \mathcal{M} să conțină exact patru semidrepte, iar diagrama Voronoi asociată lui $\mathcal{M} \setminus \{A_1\}$ să conțină exact cinci semidrepte. Justificați alegerea făcută.

Soluție. Numărul de semidrepte ale unei diagrame Voronoi este egal cu numărul de puncte de pe frontiera acoperirii convexe.

Alegem mulțimea \mathcal{M} astfel ca A_1, A_2, A_3, A_4 să determine frontiera acoperirii convexe, iar pentru $\mathcal{M} \setminus \{A_1\}$ toate punctele să fie situate pe frontiera acoperirii convexe.

În figură este indicată configurația punctelor, însă, întrucât în enunț se cere ca punctele să fie din \mathbb{R}^2 , le indicăm în coordonate. În exemplul ales $A_1 = (-4, 4)$, $A_2 = (-4, -4)$, $A_3 = (0, 0)$, $A_4 = (4, 4)$, $A_5 = (4, -4)$, $A_6 = (-2, -2)$.

O altă soluție posibilă (în care punctele A_2, A_6, A_3, A_4 nu mai sunt coliniare, este $A_1 = (-4, 4)$, $A_2 = (-4, -4)$, $A_3 = (0, 3)$, $A_4 = (4, 4)$, $A_5 = (4, -4)$, $A_6 = (-3, 0)$ (verificați prin desen!).



2. a) Fie o mulțime cu n situri necoliniare. Atunci, pentru diagrama Voronoi asociată au loc inegalitățile

$$n_v \leq 2n - 5, \quad n_m \leq 3n - 6,$$

unde n_v este numărul de vârfuri ale diagramei și n_m este numărul de muchii al acesteia.

b) Câte vârfuri poate avea diagrama Voronoi \mathcal{D} asociată unei mulțimi cu cinci puncte din \mathbb{R}^2 știind că \mathcal{D} are exact cinci semidrepte? Analizați toate cazurile. Este atins numărul maxim de vârfuri posibile ($n_v = 2n - 5$)? Justificați!

Soluție. a) Cum punctele nu sunt coliniare, diagrama Voronoi are muchii de tip segment și de tip semidreaptă. Se consideră un vârf suplimentar, notat v_∞ , prin care, prin convenție, trece fiecare muchie de tip semidreaptă. Se construiește un graf \mathcal{G} care are

- *vârfuri*: vârfurile diagramei Voronoi și vârful v_∞ (deci $n_v + 1$ vârfuri);
- *muchii*: muchiile diagramei Voronoi - fiecare unește exact două vârfuri ale lui \mathcal{G} (deci n_m muchii);
- *fețe*: în corespondență biunivocă cu siturile inițiale (deci n fețe).

Graful \mathcal{G} este un graf planar conex.

(i) Conform relației lui Euler avem

$$(n_v + 1) - n_m + n = 2.$$

(ii) Analizăm incidențele dintre muchii și vârfuri.

- fiecare muchie este incidentă cu exact două vârfuri;
- fiecare vârf (inclusiv v_∞) este incident cu cel puțin trei muchii;
- numărând incidențele în două moduri avem

$$2n_m \geq 3(n_v + 1).$$

Din (i) și din (ii) rezultă inegalitățile dorite.

Observație. Pentru ca relațiile din enunț să fie egalități este necesar și suficient ca fiecare vârf al lui \mathcal{G} să fie incident cu exact trei muchii. Aceasta înseamnă să nu existe grupuri de (cel puțin) patru puncte conciclice și pe frontiera acoperirii convexe a mulțimii de situri să fie exact trei situri.

b) Fie \mathcal{M} o mulțime ca în enunț. Diagrama Voronoi a lui \mathcal{M} are cinci semidrepte, deci toate cele cinci puncte ale lui \mathcal{M} sunt situate pe frontiera acoperirii convexe. În particular, conform observației anterioare, nu este posibil să fie atins numărul maxim de vârfuri posibile ($n_v = 2n - 5 = 5$). Mai mult, urmând pașii din raționament, observăm că, de fapt, $n_v \leq 3$. Sunt posibile trei situații:

- toate punctele sunt conciclice, $n_v = 1$,

- patru dintre puncte sunt conciclice, dar al cincilea nu este situat pe același cerc cu acestea, $n_v = 2$,
- oricare patru puncte nu sunt conciclice, $n_v = 3$.

3. Fie punctele $O = (0, 0)$, $A = (\alpha, 0)$, $B = (1, 1)$, $C = (2, 0)$, $D = (1, -1)$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$ este un parametru. Discutați, în funcție de α , numărul de muchii de tip semidreaptă ale diagramei Voronoi asociate mulțimii $\{O, A, B, C, D\}$.

Soluție. Numărul de muchii de tip semidreaptă este egal cu numărul de puncte de pe frontiera acoperirii convexe (le notăm cu m).

Punctul A este variabil pe axa Ox . Punctele O, B, C, D determină un pătrat și trebuie doar să stabilim, în funcție de α , poziția lui A față de acest pătrat. Distingem următoarele cazuri:

- $\alpha < 0$: punctul A este situat în exteriorul pătratului $OBCD$ și avem $m = 4$ (punctele de frontieră sunt A, B, C, D);
- $\alpha = 0$: avem $A = O$, deci $m = 4$;
- $0 < \alpha < 2$: punctul A este situat în interiorul pătratului $OBCD$ și avem $m = 4$ (punctele de frontieră sunt O, B, C, D);
- $\alpha = 2$: avem $A = C$, deci $m = 4$;
- $\alpha > 2$: punctul A este situat în exteriorul pătratului $OBCD$ și avem $m = 4$ (punctele de frontieră sunt O, B, D, A).

4. (i) Fie punctul $A = (1, 2)$. Alegeți două drepte distincte d, g care trec prin A , determinați dualele A^*, d^*, g^* și verificați că A^* este dreapta determinată de punctele d^* și g^* .

(ii) Determinați duala următoarei configurații: Fie patru drepte care trec printr-un același punct M . Se aleg două dintre ele; pe fiecare din aceste două drepte se consideră câte un punct diferit de M și se consideră dreapta determinată de cele două puncte. Desenați ambele configurații. Completați configurația inițială (adăugând puncte/drepte) astfel încât să obțineți o configurație autoduală (i.e. configurația duală să aibă aceleași elemente geometrice și aceleași incidențe ca cea inițială).

Soluție. a) Conform teoriei, pentru un punct $p = (p_x, p_y)$ se definește dreapta $p^* : (y = p_x x - p_y)$ (duala lui p), iar pentru o dreaptă neverticală $d : (y = mx + n)$, se definește punctul $d^* = (m, -n)$ (dualul lui d).

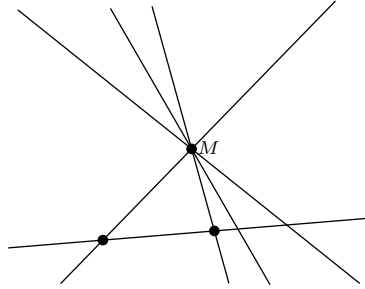
Alegem dreptele $d : (y = 2x)$ și $g : (y = -x + 3)$. Avem:

$$A^* : (y = x - 2), \quad d^* = (2, 0), \quad g^* = (-1, -3).$$

Se verifică imediat că punctele d^* și g^* determină dreapta A^* .

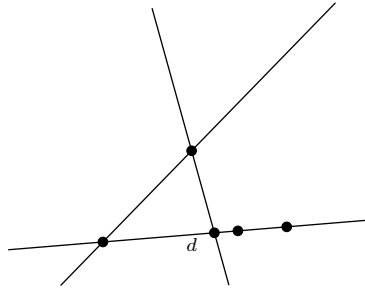
b) Configurația inițială:

Fie patru drepte care trec printr-un același punct M . Se aleg două dintre ele; pe fiecare din aceste două drepte se consideră câte un punct diferit de M și se consideră dreapta determinată de cele două puncte.



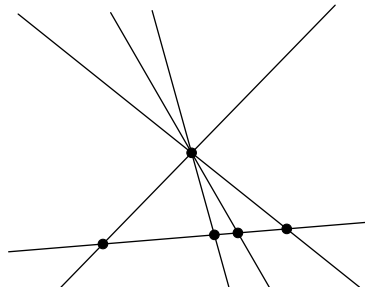
Configurația duală:

Fie patru puncte situate pe o aceeași dreaptă d . Se aleg două dintre ele; prin fiecare din aceste două puncte se consideră câte o dreaptă diferită de d și se consideră punctul de intersecție al acestor două drepte.



Configurația completată (astfel ca să fie autoduală):

Fie patru drepte care trec printr-un același punct. Pe fiecare dreaptă se alege câte un punct diferit de punctul comun, astfel ca aceste patru puncte să fie coliniare și se consideră dreapta determinată de aceste patru puncte.



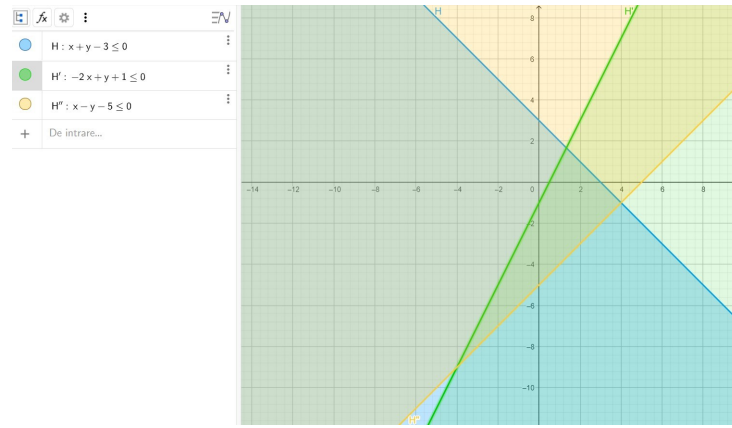
5. a) Fie semiplanele $H : x + y - 3 \leq 0$ și $H' : -2x + y + 1 \leq 0$. Dați exemplu de semiplan H'' astfel ca intersecția $H \cap H' \cap H''$ să fie un triunghi dreptunghic.

b) Fie semiplanele H_1, H_2, H_3, H_4 date de inecuațiile

$$H_1 : -y + 1 \leq 0; \quad H_2 : y - 5 \leq 0; \quad H_3 : -x \leq 0; \quad H_4 : x - y + a \leq 0,$$

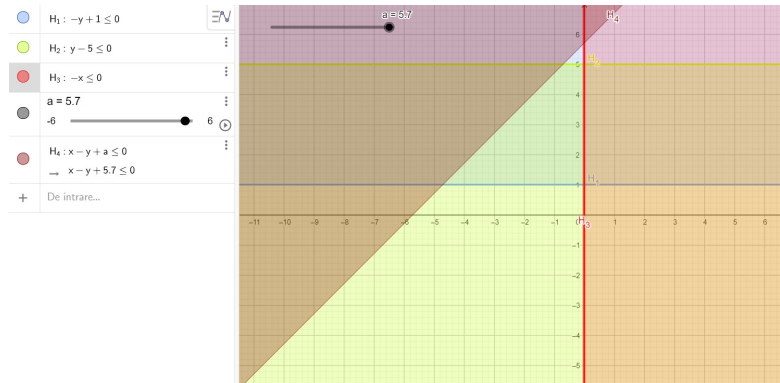
unde $a \in \mathbb{R}$ este un parametru. Discutați, în funcție de parametrul a , natura intersecției $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4$.

Soluție. a) Alegem semiplanul $H'' : x - y - 5 \leq 0$. Dreapta suport $x - y - 5 = 0$ este perpendiculară pe dreapta suport a lui H , $x + y - 3 = 0$. Intersecția semiplanelor este un triunghi (cf. figură, se pot determina vârfurile acestuia), deci H'' verifică cerințele din enunț.

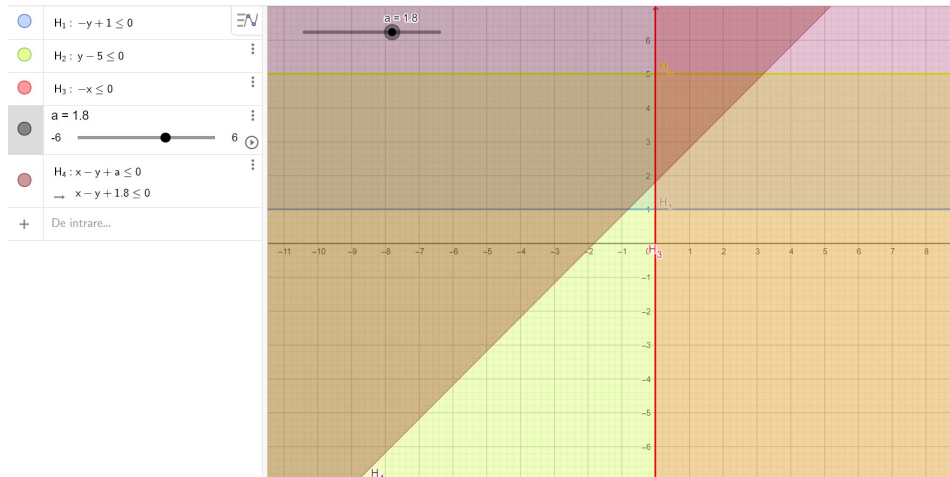


b) Intersecția $H_1 \cap H_2 \cap H_3$ este o mulțime convexă nemărginită delimitată de dreptele $y = 1$, $y = 5$, respectiv $x = 0$. Vârfurile relevante sunt punctele $(0, 1)$ și $(0, 5)$.

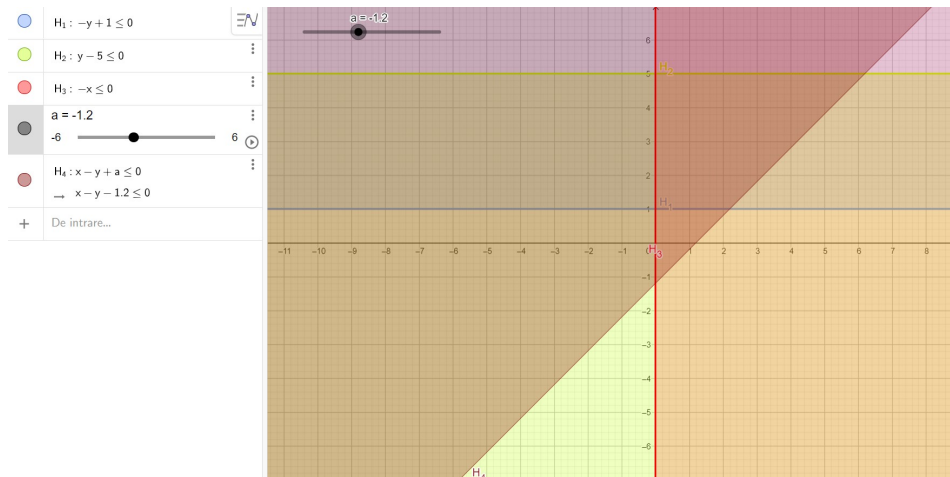
- Pentru $a > 5$ se obține $0 \geq x - y + a > x - y + 5 \geq 0$ (deoarece $x \geq 0$ și $-y + 5 \geq 0$), contradicție. În acest caz intersecția este mulțimea vidă.



- Pentru $a = 5$ se obține punctul $(0, 5)$.
- Pentru $1 \leq a < 5$ se obține un triunghi având unul dintre vârfuri $(0, 5)$, un vârf la intersecția dintre dreptele $x = 0$ și $x - y + a = 0$ și un vârf la intersecția dintre dreptele $y = 5$ și $x - y + a = 0$. Pentru $a = 1$ punctul $(0, 1)$ este vârf al acestui triunghi.



- Pentru $a < 1$ se obține un trapez. Laturile sale au ca drepte suport exact dreptele suport ale celor patru semiplane.



6. Scrieți inecuațiile semiplanelor corespunzătoare și studiați intersecția acestora, dacă normalele exterioare ale fețelor standard sunt coliniare cu vectorii

$$(0, 1, -1), (0, 1, 0), (0, 0, -1), (0, -1, 0), (0, -1, -1).$$

Soluție. Conform teoriei, dacă normala exterioară a unei fețe f este coliniară cu un vector $\vec{v}_f = (a, b, c)$, semiplanul corespunzător feței f este

$$ax + by + c \leq 0.$$

Se ajunge la inegalitățile

$$\begin{array}{rcl} y - 1 & \leq & 0 \\ y & \leq & 0 \\ -1 & \leq & 0 \\ -y & \leq & 0 \\ -y - 1 & \leq & 0 \end{array}$$

Acest sistem este compatibil, admitând soluția $y = 0$.

Notă. Ca în exemplul de la curs, am făcut abstracție de componenta x .

7. (Suplimentar) Demonstrați că arborele parțial de cost minim al lui \mathcal{P} este un subgraf al triangulării Delaunay.

Soluție. D. Mount, *Computational Geometry*, pag. 75.