Seminar 13 - 05.01.2022

Ex. 1: Calculați nr. de permutări din S_4, resp. S_5 care se scriu ca produs de transpoziții disjuncte.

Rez: $\boxed{S_4}$

$\sigma = (i\ j)$ sau $\sigma = (i\ j)(k\ l)$, $\{i,j\} \cap \{k,l\} = \emptyset$

Câte transpoziții sunt în S_4?

$C_4^2 = 6$

$\sigma_1 = (1\ 2)$, $\sigma_2 = (1\ 3)$, $\sigma_3 = (1\ 4)$

$\sigma_4 = (2\ 3)$, $\sigma_5 = (2\ 4)$, $\sigma_6 = (3\ 4)$

$\sigma_7 = (1\ 2)(3\ 4)$

$\sigma_8 = (1\ 3)(2\ 4)$

$\sigma_9 = (1\ 4)(2\ 3)$

3 permutări

În total sunt 9 astfel de permutări.

$\boxed{S_5}$: $\sigma = (i\ j)$ sau $\sigma = (i\ j)(k\ l)$, $\{i,j\} \cap \{k,l\} = \emptyset$

$C_5^2 = 10$

$\frac{C_5^2 \cdot C_3^2}{2} = \frac{10 \cdot 3}{2} = 15$

S_n, $n \geq 6$, $\sigma = (i\ j)(k\ l)(m\ n)$ transp. disj.

S_6

$$\frac{C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2}{3!}$$

S_n, $\sigma \in S_n$, σ este un k-ciclu, $2 \leq k \leq n$

Exemplu: $\sigma \in S_4$, $\sigma = 3$-ciclu

$(1\ 2\ 3), (1\ 2\ 4), (1\ 3\ 2), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 2), (1\ 4\ 3)$
$(2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)$

$$\frac{A_4^3}{3}$$

$$\boxed{(1\ 2\ 3) = (2\ 3\ 1) = (3\ 1\ 2)}$$

$(i\ j) = (j\ i)$

$\sigma \in S_n$, σ k-ciclu

$$\frac{A_n^k}{k}$$

$(1\ 2\ \dots\ k) = (2\ 3\ \dots\ k\ 1) =$
$= (3\ 4\ \dots\ k\ 1\ 2) = \dots = (k\ 1\ 2\ \dots\ k-1)$

Transpoziții: $\frac{A_n^2}{2} = C_n^2$

Ex. 2: Det. $m \in \mathbb{N}$ a.î. S_8 conține permutări de ordin m.

$\sigma \in S_8$, $\sigma = c_1 \cdot \ldots \cdot c_k$, produs de cicli disj.

$ord(c_i) = l_i$.

Obs.: Dacă în desc. lui σ considerăm și cicli de lung. 1, atunci avem $l_1 + l_2 + \ldots + l_k = 8$.

Noi vom lucra cu $l_i \geq 2$. În acest caz, $l_1 + \ldots + l_k \leq 8$.

Avem $2k \leq l_1 + \ldots + l_k \leq 8 \Rightarrow k \leq 4$

$k = 0 \rightarrow \sigma = e$ — $ord(\sigma) = 1$.

$k = 1 \rightarrow \sigma$ este un ciclu de lungime ≥ 2 și ≤ 8

$ord(\sigma) \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

$k = 2 \rightarrow \sigma = c_1 c_2$, $4 \leq l_1 + l_2 \leq 8$, $l_1 \leq l_2$

$(l_1, l_2) \in \{(2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,3), (3,4), (3,5), (4,4)\}$

$ord(\sigma) = [l_1, l_2] \in \{2, 6, 4, 10, 3, 12, 15\}$

$k=3$, $\sigma = c_1 c_2 c_3$, $6 \le l_1 + l_2 + l_3 \le 8$, $l_1 \le l_2 \le l_3$

$$(l_1, l_2, l_3) \in \{\underset{2}{(2,2,2)}, \underset{6}{(2,2,3)}, \underset{4}{(2,2,4)}, \underset{6}{(2,3,3)}\}$$

$k=4$, $\sigma = c_1 c_2 c_3 c_4$, $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 2 \to \operatorname{ord}(\sigma) = 2$

Obs: Există elemente de ordin k în S_n?

! $k \mid |S_n| = n!$

$k = [l_1, \ldots, l_t]$. Desc. k în factori primi

$l_1 + \ldots + l_t \le n$

$k = 12 = 3 \cdot 2^2$, $12 = [1,12] = [2,12] = \ldots = [12,12]$

$= [3,4] = [6,4]$

Ex. 3 : Rezolvați ecuațiile :

a. $\tau^2 = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6\ 7\ 8)$, $\tau \in S_8$

$\underbrace{\hphantom{(1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6\ 7\ 8)}}_{\sigma}$

$\tau^2 = \sigma$. $sgn(\sigma) = 1$

obs. : $\tau^2 = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6\ 7) = \sigma$, $sgn(\sigma) = -1$

$\Rightarrow$ ecuația nu are sol.

$\tau = c_1 \cdot c_2 \dots c_k$ desc. în cicli disj., $ord(c_i) = l_i$

$\tau^2 = c_1^2 c_2^2 \dots c_k^2$.

$2 \mid l_i \Rightarrow c_i^2$ produs de 2 cicli de lung. $\frac{l_i}{2}$. (l_i par)

$2 \nmid l_i \Rightarrow c_i^2$ rămâne l_i-ciclu (l_i impar)

$c_1^2 c_2^2 \dots c_k^2 = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6\ 7\ 8)$

$\Rightarrow \tau = c_1 c_2$, $c_1^2 = (1\ 2\ 3)$, $c_2^2 = (4\ 5\ 6\ 7\ 8)$

$c_1^2 = (1\ 2\ 3)$ $\qquad c_1^2 = c_1^{-1} \Rightarrow c_1 = (c_1^2)^{-1}$

c_1 3-ciclu, $c_1^3 = e$ $\qquad$ sau $c_1 = c_1^4 = (c_1^2)^2$ $= (1\ 3\ 2)$

$c_2^2 = (4\ 5\ 6\ 7\ 8)$ $\qquad c_2 = c_2^6 = (c_2^2)^3 = (4\ 7\ 5\ 8\ 6)$

$c_2^5 = e$

$c_2 = (\underline{4}\ \underline{7}\ \underline{5}\ \underline{8}\ \underline{6})$

$\sigma = (1\ 3\ 2)(4\ 7\ 5\ 8\ 6)$

b. $\sigma^2 = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6) \quad \in S_6$, $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$

$\sigma = c_1 \dots c_k$ desc. în cicli disj., $\operatorname{ord}(c_i) = l_i$

$2 \mid l_i \rightarrow c_i^2$ produs de 2 cicli de lung. $\frac{l_i}{2}$

$2 \nmid l_i \rightarrow c_i^2$ l_i-ciclu

σ = produs de 2 cicli de lungime 3

I. $\sigma = c_1 \cdot c_2$, c_1, c_2 3-ciclu

II. σ este un 6-ciclu

I. $c_1^2 = (1\ 2\ 3) \Rightarrow c_1 = (1\ 3\ 2)$

$c_2^2 = (4\ 5\ 6) \Rightarrow c_2 = (4\ 6\ 5)$

$\Rightarrow \sigma = (1\ 3\ 2)(4\ 6\ 5)$

$\underline{\text{II}}$. τ 6-ciclu

$\tau^2 = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6)$

$(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6)^2 =$

$= (a_1\ a_3\ a_5)(a_2\ a_4\ a_6)$

$\tau^2 = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6) \Rightarrow \tau = (1\ 4\ 2\ 5\ 3\ 6)$

$(5\ 6\ 4) \quad \tau = (1\ 5\ 2\ 6\ 3\ 4)$ $*$

$(6\ 4\ 5) \quad \tau = (1\ 6\ 2\ 4\ 3\ 5)$

$\Big\}$ 3 sol.

$(2\ 3\ 1)(6\ 4\ 5) \Rightarrow (2\ 6\ 3\ 4\ 1\ 5) =$

$= (1\ 5\ 2\ 6\ 3\ 4)$

În total ecuația are 4 soluții

c. $\tau^3 = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6) \in S_6$

$\tau = c_1 \ldots c_k$, $\operatorname{ord}(c_i) = l_i$

$\tau^3 = c_1^3 \ldots c_k^3$

$3 \mid l_i \to c_i^3 =$ produs de 3 cicli de lung. $\frac{l_i}{3}$

$3 \nmid l_i \to c_i^3$ l_i-ciclu

$\underline{\text{I}}$. $\tau = c_1 c_2 c_3$, c_i transp.

$\underline{\text{II}}$. τ 6-ciclu

I. $\tau = c_1 c_2 c_3$, $\underset{\substack{\parallel \\ c_1}}{c_1}^3 = (1\ 2)$, $\underset{\substack{\parallel \\ c_2}}{c_2}^3 = (3\ 4)$, $\underset{\substack{\parallel \\ c_3}}{c_3}^3 = (5\ 6)$

$\tau = \sigma$.

II. $\tau = (a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6)$

$\tau^3 = (a_1\ a_4)(a_2\ a_5)(a_3\ a_6)$

$\tau^3 = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)$

$\tau_1 = (1\ 3\ 5\ 2\ 4\ 6)$

$\tau_2 = (1\ 4\ 5\ 2\ 3\ 6)$ $[(4\ 3)]$

$\tau_3 = (1\ 3\ 6\ 2\ 4\ 5)$ $[(6\ 5)]$

$\tau_4 = (1\ 4\ 6\ 2\ 3\ 5)$ $[(4\ 3)(6\ 5)]$

$\tau_5 = (1\ 5\ 3\ 2\ 6\ 4)$ $\tau_7 = (1\ 6\ 3\ 2\ 5\ 4)$

$\tau_6 = (1\ 5\ 4\ 2\ 6\ 3)$ $\tau_8 = (1\ 6\ 4\ 2\ 5\ 3)$

d. $\tau^2 = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6) \in S_6$, $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$

$\sigma^2 = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6)$

$\sigma = c_1 \dots c_k$, $\sigma^2 = c_1^2 \dots c_k^2$

$2 \mid l_i$, c_i^2 produs de 2 cicli de lung. $\frac{l_i}{2}$

$2 \nmid l_i$, c_i^2 l_i-ciclu ! l_i impar

$c_1^2 \dots c_k^2 = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6)$

$l_1' = 4$ $l_2' = 2$

$(5\ 6)$ poate să apară doar dintr-un ciclu de lung. 4 la 2

$(1\ 2\ 3\ 4)$ ——— " ——— lung. 8 la 2.

Rezolvare alternativă:

$\sigma^2 = \tau$, $\operatorname{ord}(\tau) = [4, 2] = 4$

$\operatorname{ord}(\sigma) = m$.

$\operatorname{ord}(\sigma^2) = \frac{m}{(m, 2)} = 4 \Rightarrow m = 4(m, 2) \Rightarrow 2 \mid m$, $(m, 2) = 2$

$\Rightarrow \boxed{m = 8}$

$\tau \in S_6$, $ord(\tau) = 8 = 2^3$

$\tau = c_1 \dots c_k$, $ord(\tau) = [l_1, l_2, \dots, l_k] = 8$

$\Rightarrow l_i = 2^a$, $a \in \{1, 2, 3\}$ și cel puțin un $l_j = 8$
$\forall i$

$\tau = c_1$, $l_1 = 8 > 6$

Nu există cicli de lungime 8 în S_6.