ex 1:

fie $f_* : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B), (\forall (A_i)_{i\in I} \subseteq A)(f_*(A_i)_{i\in I} := f(A_i)_{i\in I})$

fie $f^* : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A), (\forall (B_i)_{i\in I} \subseteq B)(f^*(B_i)_{i\in I} := f^{-1}(B_i)_{i\in I})$

① f este injectivă $\Rightarrow f^*$ este surjectivă

f^* este surjectivă $\Rightarrow (\forall (B_i)_{i\in I} \subseteq B) \exists f^*(B_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(A)$

dar $f^*(B_i)_{i\in I} := f^{-1}(B_i)_{i\in I} \Rightarrow f^{-1}(B_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(A)$

② f este surjectivă $\Rightarrow f_*$ este surjectivă

f_* este surjectivă $\Rightarrow (\forall (A_i)_{i\in I}) \exists f_*(A_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(B)$

dar $f_*(A_i)_{i\in I} := f(A_i)_{i\in I} \Rightarrow f(A_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(B)$

ex 2:

① fie $x, y \in f^{-1}(T)$, $x \le y$

fie $\alpha \in [x, y]_P$

$x \le \alpha \le y \xRightarrow{f \text{ morfism}} f(x) \le f(\alpha) \le f(y)$

$\Rightarrow f(\alpha) \in [f(x), f(y)]_Q \xRightarrow{T \text{ convexă}} f(\alpha) \in T$

$\Rightarrow \alpha \in f^{-1}(T) \Rightarrow f^{-1}(T)$ convexă

② fie $f(x), f(y) \in f(S)$, $x, y \in S$

cu $f(x) \le f(y)$

fie $\alpha \in [f(x), f(y)]_Q$

f surjectivă $\Rightarrow \exists\, \beta \in P$ a.î. $\alpha = f(\beta)$

$\Rightarrow f(x) \le f(\beta) \le f(y) \Rightarrow x \le \beta \le y$

$\xRightarrow{S \text{ convexă}} \beta \in S \Rightarrow \alpha = f(\beta) \in f(S)$

ex 3:

① $< \circ \leq \; = \; <$

$< \circ \leq \; \subseteq \; <$

fie $(x,y) \in \, < \circ \leq \; \Rightarrow \exists z \in P$ a.î. $x < z$ și $z \leq y$

$\Rightarrow x < y \Rightarrow (x,y) \in \, <$

$< \; \subseteq \; < \circ \leq$

fie $(x,y) \in \, < \; \Rightarrow x < y$

dar $x < y$ și $y \leq y \Rightarrow (x,y) \in \, < \circ \leq$

$\leq \circ < \; = \; <$

$\leq \circ < \; \subseteq \; <$

fie $(x,y) \in \, \leq \circ < \; \Rightarrow \exists z \in P$ a.î. $x \leq z$ și $z < y$

$\Rightarrow x < y \Rightarrow (x,y) \in \, <$

$< \; \subseteq \; \leq \circ <$

fie $(x,y) \in \, < \; \Rightarrow x < y$

dar $x < y$ și $x \leq x \Rightarrow (x,y) \in \, \leq \circ <$

② $\prec \circ \leq \; = \; <$

$\prec \circ \leq \; \subseteq \; <$

fie $(x, y) \in \, \prec \circ \leq \; \Rightarrow \exists z \in P$ a.î.

$x \prec z$ și $z \leq y \Rightarrow x < y \Rightarrow (x, y) \in \, <$

$< \; \subseteq \; \prec \circ \leq$

fie $(x, y) \in \, <$

$$\left.\begin{array}{l} P \text{ finită} \Rightarrow \exists z \text{ a.î. } x \prec z \\ \quad \text{atunci } z \leq y \end{array}\right\} \Rightarrow (x, y) \in \, \prec \circ \leq$$

$\leq \circ \prec \; = \; <$

$\leq \circ \prec \; \subseteq \; <$

fie $(x, y) \in \, \leq \circ \prec \; \Rightarrow \exists z \in P$ a.î.

$x \leq z$ și $z \prec y \Rightarrow x < y \Rightarrow (x, y) \in \, <$

$< \; \subseteq \; \leq \circ \prec$

fie $(x, y) \in \, < \; \Rightarrow x < y \Rightarrow \exists z$ a.î. $z \prec y$

$\Rightarrow (x, z) \in \, \leq$ și $(z, y) \in \, \prec \; \Rightarrow$

$\Rightarrow (x, y) \in \, \leq \circ \prec$

ex 4:

① $\rho \subseteq \parallel$

fie $(x, y) \in \rho$

$x \parallel y$

$x \not\leq y$ și $y \not\leq x$

presupunem prin absurd că $x \nparallel y$ deci $x \leq y$ sau $y \leq x$

dacă $x \leq y \Rightarrow y \in [x) \cap [y) \cap (\{x, y\} \cup Succ(x) \cup Succ(y)) = \emptyset$

dacă $y \leq x \Rightarrow x \in [x) \cap [y) \cap (\{x, y\} \cup Succ(x) \cup Succ(y)) = \emptyset$

deci $x \parallel y \Rightarrow \rho \subseteq \parallel$

② $(P, \le)$ - latica cu finită

P - nevidă $\Rightarrow \exists\, x, y$ a.î. $[x) \cap [y) \cap (Succ(x) \cup Succ(y) \cup \{x, y\}) \neq \emptyset$

O latice este distributivă ddacă satisface una dintre condițiile:

1. $(\forall)\, x, y, z \in P,\ x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
2. $(\forall)\, x, y, z \in P,\ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

Fie $z \in P$ a.î. au loc urm. ~~4~~ cazuri în care p.p. că P este distributivă.

1. $z \le x$ și $z \le y$

P - nevida $\Rightarrow x \not\le y$ și $y \not\le x \Rightarrow$ verif. condițiile:

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow x \wedge (y \vee z) = x \wedge y \text{ d6} \\ (x \wedge y) \vee (x \wedge z) = (x \wedge y) \vee z \text{ d6} \end{array}\right\}$ x, y incomparabile $\Rightarrow$ nu se respectă condiția

2. $z \le x$ și $z \ge y$

$\left.\begin{array}{l} x \wedge (y \vee z) = x \wedge z = z \\ (x \wedge y) \vee (x \wedge z) = (x \wedge y) \vee z \text{ d6} \end{array}\right\}$ nu se resp. condiția

3. $x \le z$ și $z \ge y$

$\left.\begin{array}{l} x \wedge (y \vee z) = x \wedge z = \cancel{z} \\ (x \wedge y) \vee (x \wedge z) = (x \wedge y) \vee \cancel{z} \text{ d6} \end{array}\right\}$ nu se resp condiția

4. $x \leq z$ și $y \leq z$

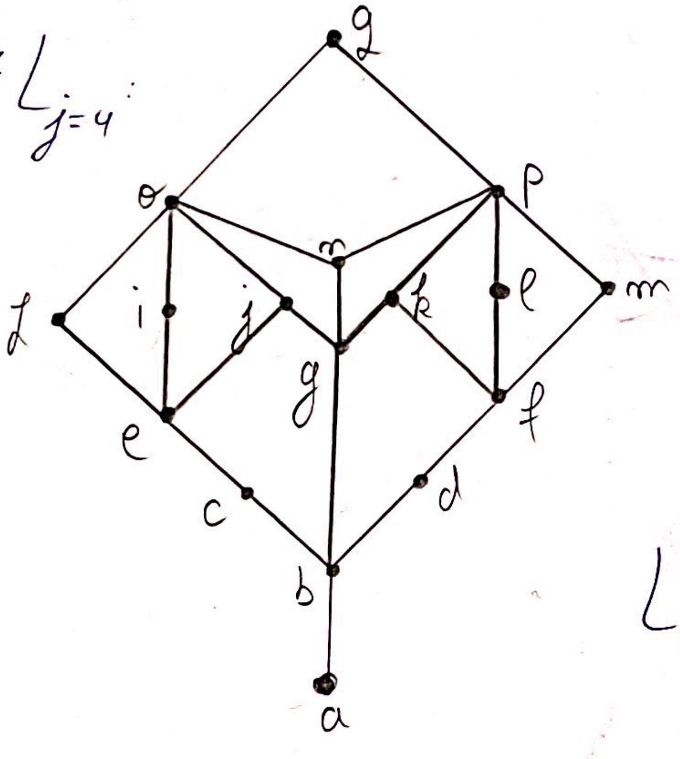
$x \wedge (y \vee z) = x \wedge z = x$

$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = (x \wedge y) \vee x$ $\Big\}$ nu se respectă condiția

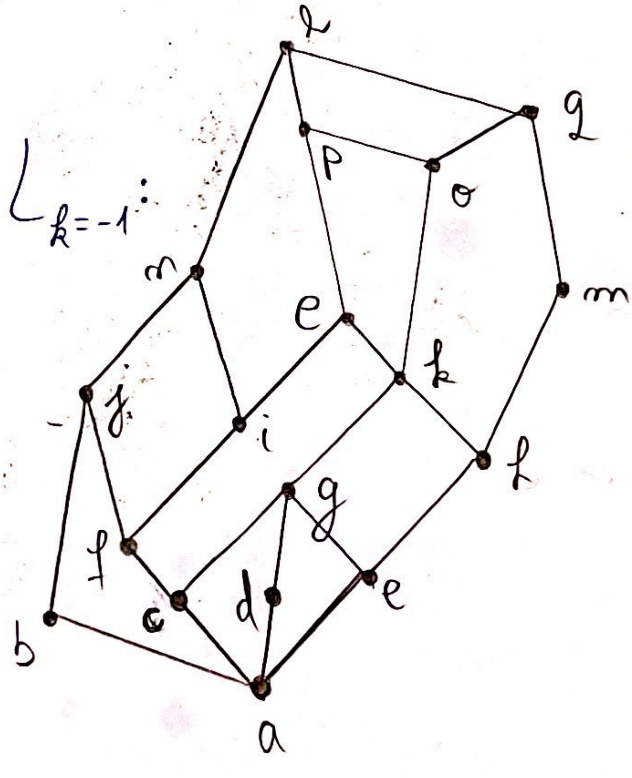
din 1., 2., 3., 4. $\Rightarrow$ P este nedistributivă ex 5 :

$$0\,4\,4 \rightarrow \left.\begin{matrix} g = 0 \\ i = 4 \\ j = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow k = -1$$

$L_{j=4}$:

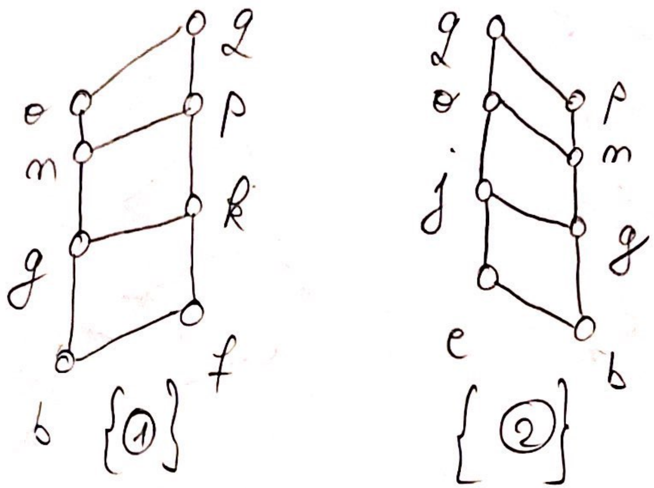


$L_{k=-1}$:

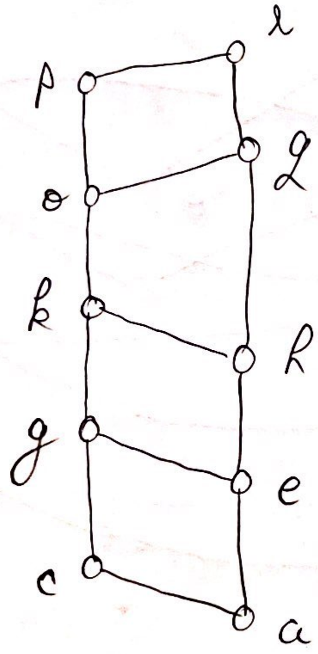


Scanned with CamScanner

1. $S_{j=4}$:

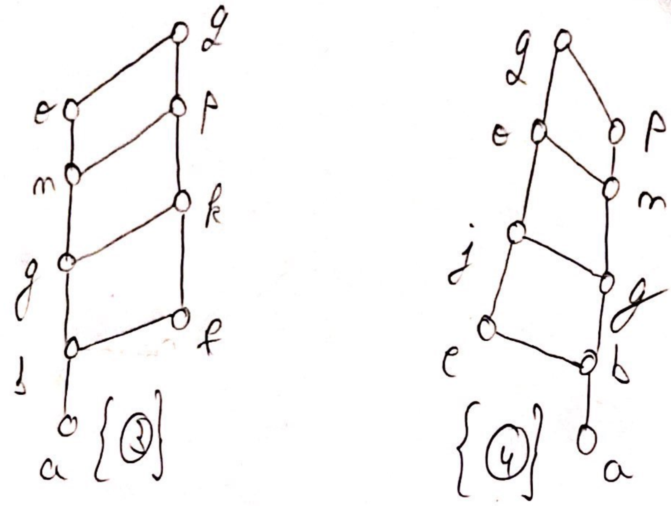


$S_{k=-1}$:

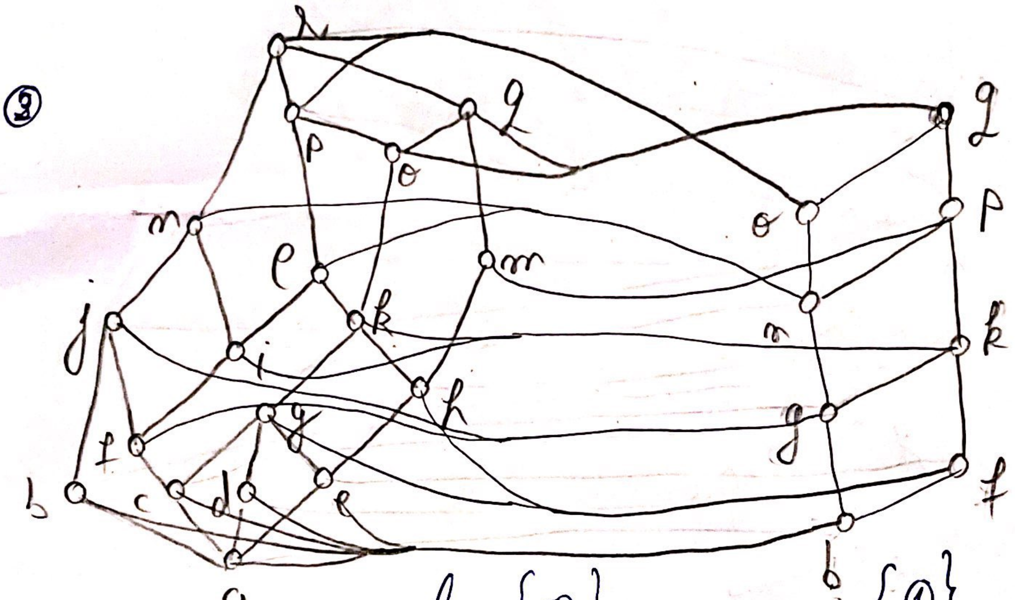


②

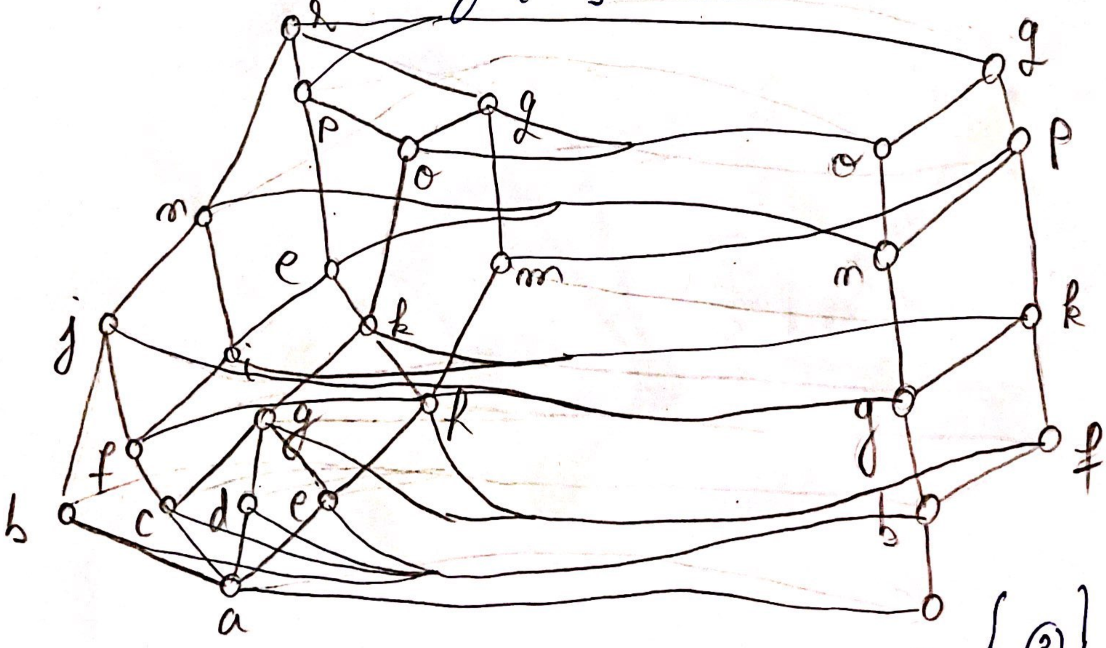
$S_{j=4}$:



③



analog {②}



analog {④}

4