Variabile aleatoare
Repartiția unei v.a.
Funcția de repartiție

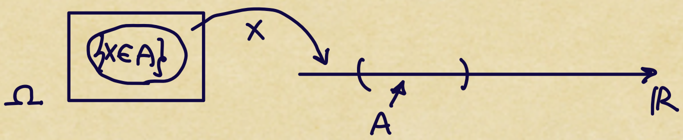
$$\text{v.a.} \begin{cases} X : \Omega \to \mathbb{R} \\ \{X \le x\} \in \mathcal{F}, \ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_X(\cdot) = (\mathbb{P} \circ X^{-1})(\cdot)}$$

repartiția v.a. X

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, X v.a. și $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) \ \forall A \in \mathbb{R}$ interval

$\{X \in A\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$



$= X^{-1}(A)$

Funcția de repartiție (fct. cumulativă – CDF)

$F : \mathbb{R} \to [0, 1)$

$$F(x) = \mathbb{P}_X((-\infty, x])$$
$$= \mathbb{P}(X \le x) \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Exp: Aruncăm de 3 ori cu banul

X = nr de capete în cele 3 aruncări

Care este fct. de rep a lui X?

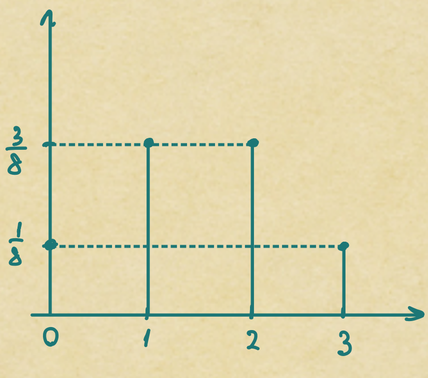
$\Omega = \{H, T\}^3 \quad X \in \{0, 1, 2, 3\}$

$\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(\{TTT\}) = \frac{1}{8}$

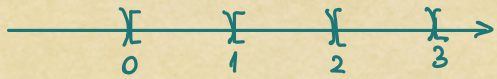
$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(\{HTT, THT, TTH\}) = \frac{3}{8}$

$\mathbb{P}(X=2) = \frac{3}{8}$

$\mathbb{P}(X=3) = \frac{1}{8}$



$F(x) = ?$



Dacă $0 \leq x < 1 \Rightarrow \{X \leq x\} = \{X = 0\}$

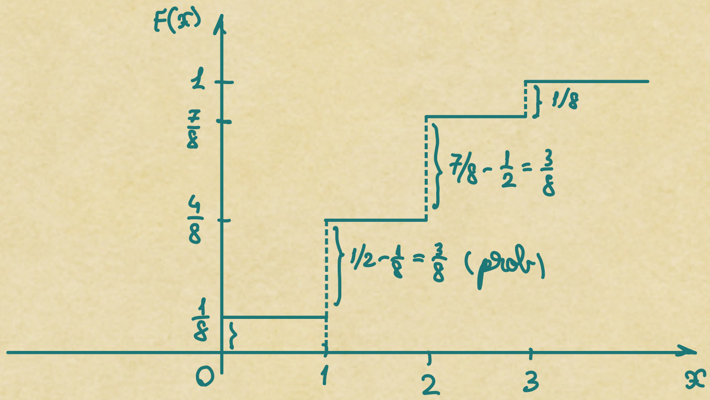
$1 \leq x < 2 \Rightarrow \{X \leq x\} = \{X=0\} \cup \{X=1\}$

$2 \leq x < 3 = \{X \leq x\} =$

$= \{X=0\} \cup \{X=1\} \cup \{X=2\}$

$x \geq 3 \Rightarrow \{X \leq x\} = \Omega$

$$F(x) = \begin{cases} 0 = \mathbb{P}(\emptyset) & , x < 0 \\ 1/8 & , 0 \leq x < 1 \\ 1/8 + 3/8 = 4/8 & , 1 \leq x < 2 \\ 1/8 + 3/8 + 3/8 = 7/8 & , 2 \leq x < 3 \\ 1 & , x \geq 3 \end{cases}$$



<u>Prop. funcției de repartiție</u>

a) F crescătoare $(\forall\, x < y \Rightarrow F(x) < F(y))$

b) F este cont la dreapta $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} F(x) = F(x_0) \quad \forall\, x_0 \in \mathbb{R}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

În plus,

d) $\mathbb{P}(X > x) = 1 - \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - F(x)$

e) $\mathbb{P}(X < x_0) = \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X = x)$

$= \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} F(x) = F(x_0 -)$ (limita la stg)

f) $\mathbb{P}(X=x) = F(x) - F(x-)$

Variabile aleatoare discrete

$X:\Omega\to\mathbb{R}$ v.a. $\quad X(\Omega)$ = mulțimea val lui X

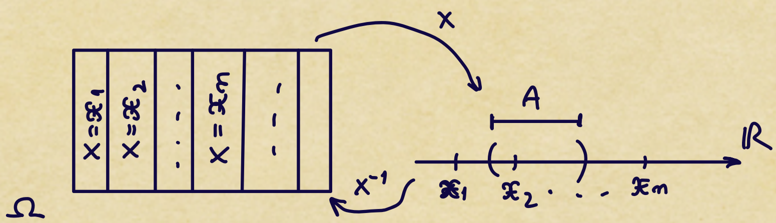
$X(\Omega)$ → cel mult numărabilă $\Rightarrow X$ este v.a. discretă (= finită sau numărabilă)

$X(\Omega)$ → infinită nenumărabilă $\Rightarrow X$ este cont

X v.a. discretă, $X:\Omega\to\mathbb{R}$ $\qquad X(\Omega)$ - cel mult numărabilă

$A\in\mathbb{R} \qquad \mathbb{P}(X\in A) =$

$$\Omega = \bigcup_{n\geq 1} \{X = x_n\}$$



$$\mathbb{P}(X\in A) = \mathbb{P}\Big(X\in \bigcup_{x\in A\cap X(\Omega)} \{x\}\Big) = \sum_{x\in A\cap X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x)$$

$(x_n)_n, \ x_1 = n \qquad (x_n)_n, \ x_n = \frac{1}{2^n}$

Def: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un c.p. și $X:\Omega\to\mathbb{R}$ o v.a. discretă. Se numește funcția de masă asociată $f(x) = \mathbb{P}(X=x), \ \forall x\in X(\Omega)$, $f: X(\Omega)\to[0,1]$
(PMF)

Obs: Se mai folosește și notația $p(x)$ sau $p_X(x)$

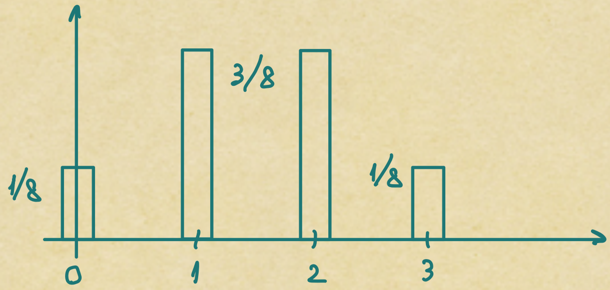
$A_i = \{X = x_i\}$

Ex: Aruncăm de 3 ori cu banul, X = nr H în cele 3 aruncări

Determinați fct de masă a lui X

$f(x) = \mathbb{P}(X=x), \ \forall x\in\{0,1,2,3\} = X(\Omega)$

$f(0) = 1/8; \ f(1) = 3/8; \ f(2) = 3/8; \ f(3) = 1/8$



<u>Obs</u>: $X \in \{x_1, x_2 \dots x_n\}$

$\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$ $\qquad X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$

Prop funcției de masă

a) $f(x) = \mathbb{P}(X = x) \geq 0$ (pozitivă)

b) $\left.\begin{array}{l} \mathbb{P}(\Omega) = 1 \\ \Omega = \bigcup\limits_{x \in X(\Omega)} \{X = x\} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{x \in X(\Omega)} \{X = x\}\Big) = 1 \Rightarrow \boxed{\sum\limits_{x \in X(\Omega)} f(x) = 1}$ masa totală = 1

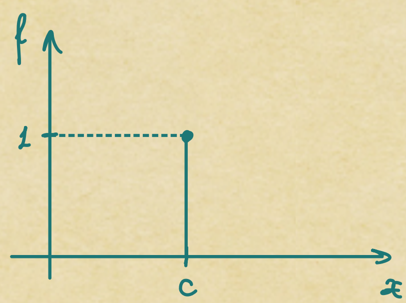
<u>Obs</u> (Legătura dintre fct de masă și fct de rep)

$$\begin{cases} F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum\limits_{\substack{y \leq x \\ y \in X(\Omega)}} f(y) \\ f(x) = F(x) - F(x-) \end{cases}$$

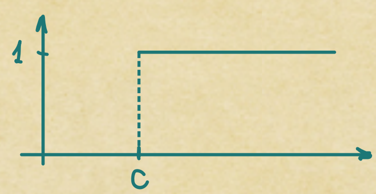
Exemple de v.a. discrete

① v.a. $X = c$ (constantă)

$$f(x) = \mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} 1 & , x = c \\ 0 & , x \neq c \end{cases}$$



$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0 & , x < c \\ 1 & , x \geq c \end{cases}$$



Dacă $x < c \Rightarrow \{X \leq x\} = \{c \leq x\} = \emptyset$

$\{\omega \mid X(\omega) \leq x\}$

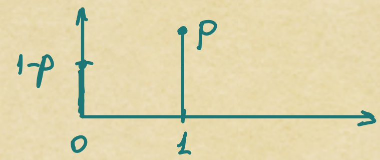
Not: $X \underset{p}{\sim} Ber(p)$ (sau $B(p)$)

este repartizată ca

② Variabile aleatoare de tip Bernoulli

Avem un experiment și un eveniment A de interes. Pp. $\mathbb{P}(A) = p \in [0,1]$

$$X : \Omega \to \mathbb{R}, \quad X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$



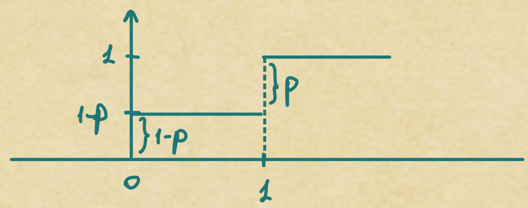
$f(1) = \mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(A) = p$

$f(0) = \mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(A^c) = 1-p$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1-p, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Dacă $x \geq 1$, $\{X \leq x\} =$

$= \{X=0\} \cup \{X=1\}$



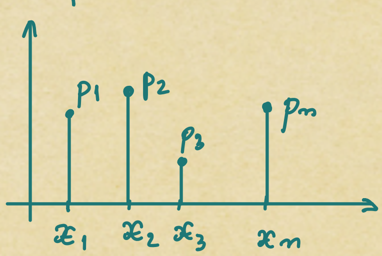
V.a. indicator: $\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$

Scrierea sub formă compactă a fct de masă: $\boxed{f(x) = p^x (1-p)^{1-x}, \ x \in \{0,1\}}$

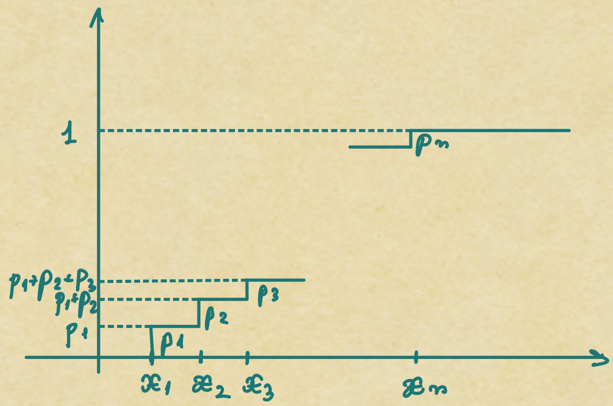
③ $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ și să pp. $x_1 < x_2 < \dots < x_n$

$\mathbb{P}(X = x_i) = p_i \in (0,1)$ cu $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Graficul fct de masă



$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < x_1 \\ p_1, & x_1 \leq x < x_2 \\ p_1 + p_2, & x_2 \leq x < x_3 \\ p_1 + p_2 + \dots + p_k, & x_k \leq x < x_{k+1} \\ - - - - - - \\ 1, & x \geq x_n \end{cases}$$



④ Variabile aleatoare de tip binomial

Presupunem că avem un exp aleator și A un ev de interes. Respectăm experimentul de n ori și ne interesăm la nr de realizări ale ev. A

X = nr de realizări ale ev. A în n repetări ale exp

$X \sim B(n,p)$ – v.a. repartizată binomial de parametru n și p

nr de rep ale exp

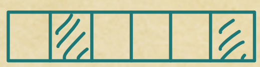
prob de realizare a ev A în cadrul exp ($\mathbb{P}(A)$)

$X \in \{0,1,2,\dots,n\}$

Funcția de masă $f(k) = \mathbb{P}(X=k) = ?$ $\quad k \in \{0,1,\dots,n\}$

$$\boxed{\mathbb{P}(X=k) = \binom{1}{k}(1-p)^{n-k}p^k}$$

$n=6, \; k=2$



T H T T T H $\rightarrow (1-p)^4 p^2$

$A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c \cap A_6$

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k) = 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(1-p)^{n-k}p^k = 1 ?$$

$= (1-p+p)^n$ binomul lui Newton

Obs: $X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$

$Y_i \sim B(p)$

(indep)

Exp Urnă albe și negre
N bile, M negre

Extragem n bile cu întoarcere

X = nr de bile negre din cele n bile extrase

$X \sim B(n, \frac{M}{N})$

⑤ V.a. repartizată hipergeometric

Avem o urnă cu N bile albe și M de culoare neagră. Extragem n bile fără întoarcere și ne interesăm la nr de bile negre din cele n extrase.

X = nr de bile negre din cele n extrase

$X \sim HG(n, N, M)$ $\qquad X \in \{0, 1, \dots \min(M, n)\}$

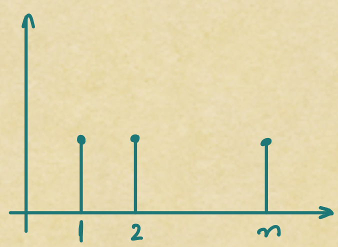
n → nr de extrageri; N → nr bile; M → nr bile negre

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

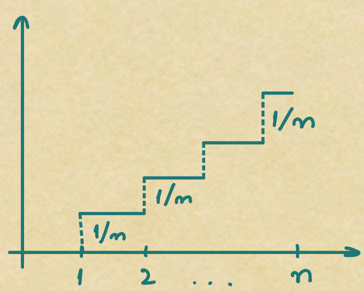
⑥ Uniforma pe $\{1, 2, \dots, n\}$ (Echipartiție)

$X : \Omega \to \mathbb{R}$, $X(\Omega) = \{1, 2, \dots, n\}$ (Δ finită)

$f(k) = \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{|\Delta|}\right) \ \forall\, k \in \{1, 2, \dots, n\}$



f. de masă



f. de repartiție

$$\mathbb{P}(X \in A) = \frac{|A \cap \Delta|}{|\Delta|} \quad \forall\, A \in \mathbb{R}$$