Ex O urnă cu bile numerotate de la 1-100

Extragem 5 bile din urnă (succesiv)

a) Care este repartiția v.a. care ne dă nr bilelor ≥ 70?

b) Cum este rep v.a. care ne dă a 17-a extragere

c) Care este probabilitatea ca nr-ul 79 să fie extras cel puțin o dată?

Sol I. Extragerea cu revenire

a) $X \sim B\left(5, \frac{31}{100}\right)$

nr de extrageri

↳ prob să avem succes (am extras o bilă ≥ 70)

b) $X_1, X_2, \dots X_5 \in \{1, \dots 100\}$

$X_1 \sim \mathcal{U}(\{1,2,\dots 100\})$

|| → Ex cu revenire

$X_3 \sim \mathcal{U}(\{1,2,\dots 100\})$

c) $\mathbb{P}(\{79 \text{ să fie extras cel puțin o dată}\}) = \mathbb{P}(\{X_1=79\} \cup \{X_2=79\} \cup \{X_3=79\} \cup \{X_4=79\} \cup \{X_5=79\})$

$= 1 - \mathbb{P}(\{X_1 \neq 79\} \cap \{X_2 \neq 79\} \cap \{X_3 \neq 79\} \cap \{X_4 \neq 79\} \cap \{X_5 \neq 79\})$

$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = 1 - \mathbb{P}((A_1 \cup A_2)^c)$

$= 1 - \mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c)$

$= 1 - \mathbb{P}(\{X_1 \neq 79\}) \times \mathbb{P}(\{X_2 \neq 79\}) \times \mathbb{P}(\{X_3 \neq 79\}) \times \mathbb{P}(\{X_4 \neq 79\}) \times \mathbb{P}(\{X_5 \neq 79\})$

$= 1 - \left(\frac{99}{100}\right)^5$

II. Extragere fără întoarcere

a) $Y \sim HG(5, 100, 31)$

b) $Y_1, Y_2, \dots, Y_5$

$Y_1 \sim \mathcal{U}(\{1,2,\dots,100\})$

$Y_2 \sim \mathcal{U}(\{1,2,\dots,100\})$

$\mathbb{P}(Y_2 = j) = \sum_{i=1}^{100} \mathbb{P}(Y_2 = j \mid Y_1 = i)\, \mathbb{P}(Y_2 = i)$

→ f prob totale

$\mathbb{P}(Y_2 = j \mid Y_1 = i) = \begin{cases} 0, & j = i \\ \frac{1}{99}, & j \neq i \end{cases}$

O partiție a lui $\Omega = \underbrace{B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n}_{\text{disj 2 câte două}}$

$\mathbb{P}(Y_2 = j) = \sum_{i=1}^{100} \mathbb{P}(Y_2 = j \mid Y_1 = i)\, \mathbb{P}(Y_1 = 1)$

$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \mid B_i)\, \mathbb{P}(B_i)$

$= 99 \times \frac{1}{99} \times \frac{1}{100} = \frac{1}{100}$

c) $\mathbb{P}(\ldots) = \mathbb{P}(\{y_1 = 79\} \cup \ldots \cup \{y_5 = 79\})$

$$= \sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}(y_1 = 79) = 5/100$$

⑥ Repartiția geometrică și negativ binomială

Aruncăm cu o monedă în mod repetat iar șansa de succes $= p$ $(\mathbb{P}(\{H\}) = p)$

$X =$ v.a. care ne dă nr de aruncări până obținem pt prima oară succes (H) incluzând primul succes

$X \in \{1, 2, 3 \ldots\} = \mathbb{N}^*$

$TTH \Rightarrow X = 3$

$H \Rightarrow X = 1$

$y =$ nr de eșecuri până la primul succes

$y \in \{0, 1, \ldots\} = \mathbb{N}$

$y = X - 1$

$\mathbb{P}(y = k) = (1-p)^k p$

$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p, \quad k \geq 1$ $\qquad \underbrace{TT\ldots T}_{k-1}H$

$X \sim G(p)$

$(\mathrm{Geom}(p))$

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} = p \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}}_{(1+q+q^2+\ldots)} = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{q} \rightarrow 1$$

$q = 1 - p$

Dacă $x \in (0,1)$, $n \to \infty$

$$\sum_{x \geq 0} x^k = \frac{1}{1-x}$$

Def V.a. Z care ne dă nr de aruncări necesare până obținem pt a r-a oară succes s.n. Negativ Binomială.

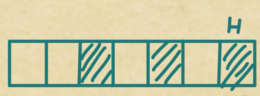
$Z \sim NB(r, p)$

$Z \in \{r, r+1, \ldots\}$ $\qquad \mathbb{P}(Z = k) = \qquad , k \geq r$

$\{Z = k\}$

$$\mathbb{P}(Z = k) = \binom{k-1}{r-1} (1-p)^{k-r} p^r$$

$k = 7, r = 3$



T H H T T T H

H T T H T T H

1-p+

$Z = X_1 + X_2 + \ldots + X_r$

$X_i \sim G(p)$

7 V.a. de tip Poisson

Def: Spunem că o v.a. X este repartizată Poisson de parametru λ dacă $X \in \mathbb{N}$ și

$$\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Când se folosește?

$$\sum_{k\geq 0} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = 1? \qquad e^x = \sum_{k\geq 0}\frac{x^k}{k!}$$

Aproximarea Poisson a binomialei

$X \sim B(n,p)$ — Pp n este mare și p este mic a.î. $n\cdot p \to \lambda$

$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ — $p \simeq \frac{\lambda}{n}$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\cdot p^k (1-p)^{n-k} \simeq \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!\,n^k}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}_{1^\infty \to e^{-\lambda}}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1} \simeq e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\frac{(n-k-u)\dots(n-1)n}{n^k} = \underbrace{\frac{n-k-u}{n}}_{\to 1}\times\dots\times\underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\to 1}\times\underbrace{\frac{n}{n}}_{\to 1} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

$\frac{\lambda}{n}\to 0$

$1-\frac{\lambda}{n}\to 1$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\Bigg[\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}}_{\to e}\Bigg]^{-\frac{\lambda}{\cancel{n}}\cdot\cancel{n}} = e^{-\lambda}$$

Funcția de v.a.

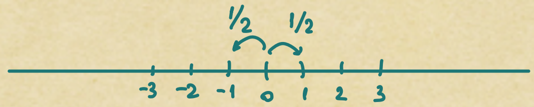
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. X v.a. $\Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ at $g\circ X$ este o v.a.

g v.a.

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "X"] \arrow[rr, bend right, "g\circ X"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Obs Dacă X este discretă $\Rightarrow$ $g\circ X$ este v.a. discretă

Exp:



n pași

Fie y v.a. care ne dă poziția după n pași. Vrem $\mathbb{P}(y=k)=?$

Considerăm X v.a. care ne dă nr de pași spre dreapta, a.î. $X \sim B(n, 1/2)$

Dacă $X=i$ atunci a făcut $n-i$ pași spre stânga și poziția ei este $i-(n-1)=2i-n$

$y = 2X - n$

$y = g(X)$

$$\mathbb{P}(y=k) = \mathbb{P}(2X-n-k) = \mathbb{P}\left(X=\frac{n+k}{2}\right) = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} (1-p)^{\frac{n-k}{2}}$$

$k=0$

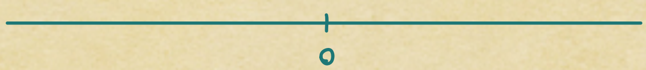
Distanța față de origine?

$Z = |y|$

$Z = h(y)$

$\quad = h(g(X))$

$\mathbb{P}(Z=k)$



$k=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow \mathbb{P}(Z=0) =$

$k \neq 0 \quad \mathbb{P}(Z=k) = \mathbb{P}(y=k \text{ sau } y=-k)$

$\quad = \mathbb{P}(y=k) + \mathbb{P}(y=k)$

$\quad = 2\binom{n}{\frac{n+k}{2}} (1/2)^n \qquad \binom{n}{\frac{n+k}{2}} = \binom{n}{\frac{n-k}{2}}$

$y = g(X)$

$$\mathbb{P}(Y=y) = \mathbb{P}(g(X)=y) = \sum_{\{x \mid g(x)=y\}} \mathbb{P}(X=x)$$

$\{g(X)=y\} = \{X \in g^{-1}(y)\}$

Exp: $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 \end{pmatrix}$

$y = X^2 \qquad y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$X_1, X_2, X_3 \qquad g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$g(X_1, X_2, X_3)$ v.a. poate fi

- $X_1 + X_2 + X_3$
- $X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$
- $\max(X_1, X_2, X_3)$

Independența v.a.

Două v.a. X și Y sunt indep dacă realizarea uneia nu influențează în niciun fel realizarea celeilalte

Def: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un c.p. și X și Y două v.a. Spunem că X și Y sunt indep, $X \perp Y$, dacă ev. $\{X=x\}$ și $\{Y=y\}$ sunt indep $\forall x, y$

Ⓟ Fie X și Y două v.a. (discrete). Atunci $X \perp Y$ dacă și numai dacă
$$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq x) \cdot \mathbb{P}(Y \leq y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Ⓟ $X \perp Y \Leftrightarrow \mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B), \forall A, B \subseteq \mathbb{R}$ (interval)

Ⓟ Dacă X și Y v.a. a.î. $X \perp Y$ și g și h două fct atunci $g(X) \perp h(Y)$

Obs: $X \perp Y$ atunci $3X + 7^X \cdot \sin(X) \perp Y^9 - \cos(Y^7)$

Def: $X_1, X_2, \dots X_n$ sunt indep dacă:
$$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots X_n \leq x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1) \times \mathbb{P}(X_2 \leq x_2) \times \dots \times \mathbb{P}(X_n \leq x_n), \forall x_1, \dots x_n \in \mathbb{R}$$

Apl: $X \sim B(n, p)$ și $Y \sim B(m, p)$ indep $\to X+Y \sim B(n+m, p)$

Apl: $X \sim Pois(\lambda_1)$ și $Y \sim Pois(\lambda_2)$ indep $\Rightarrow X+Y \sim Pois(\lambda_1 + \lambda_2)$

$$\mathbb{P}(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X+Y=n \mid X=k)\, \mathbb{P}(X=k)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X+Y=n \mid X=k)\, \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(Y=n-k \mid X=k)\, \mathbb{P}(X=k)$$
$$\overset{\text{indep}}{=} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(Y=n-k)\, \mathbb{P}(X=k)$$

Media unei v.a. discrete

Repetăm un exp de N ori și ne interesăm la valorile unei v.a. X de interes.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
1	1	1	3	3	5	8	8

$$m = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$$

$$\frac{1+1+1+3+3+5+8+8}{8} = \frac{30}{8}$$

$$\frac{3 \times 1 + 2 \times 3 + 1 \times 5 + 2 \times 8}{8} = \frac{30}{8}$$

$\{X = x\}$

$$\mathbb{P}(X = x) = f(x) \simeq \frac{N(x)}{N}$$

$$N(x) \simeq f(x) N$$

$$m = \frac{\sum x \cdot N(x)}{N} = \frac{\sum x \cdot f(x) N}{N} = \sum x f(x)$$

Def: Fie X o v.a. discretă. Se numește media lui X valoarea

$$\mathbb{E}[X] = \sum_x x f(x) = \sum_x x \mathbb{P}(X = x)$$

ori de câte ori $\sum_x |x| f(x) < \infty$. Dacă $|x| f(x) = \infty$ atunci spunem că X nu are medie

I AM DEAD INSIDE AFTER THIS