FMI, Info, Anul II, 2022-2023
Fundamentele Limbajelor de Programare

Model Examen

(S1) Găsiți cel mai general unificator, dacă există, aplicând algoritmul din curs, pentru termenii

$$f(x, g(x), h(a, g(y))),\ f(a, g(x), z),\ f(y, y, h(a, z)),$$

unde x, y, z sunt variabile, a este un simbol de constantă, g un simbol de funcție de aritate 1, h un simbol de funcție de aritate 2, iar f un simbol de funcție de aritate 3.

[1 punct]

Soluție:

S	R	
$\emptyset$	$u \doteq f(x, g(x), h(a, g(y))), u \doteq f(a, g(x), z),\ u \doteq f(y, y, h(a, z))$	Rezolva u
$\emptyset$	$f(x, g(x), h(a, g(y))) \doteq f(a, g(x), z),\ f(x, g(x), h(a, g(y))) \doteq f(y, y, h(a, z))$	Descompune
$\emptyset$	$f(x, g(x), h(a, g(y))) \doteq f(a, g(x), z),\ x \doteq y,\ g(x) \doteq y,\ h(a, g(y)) \doteq h(a, z)$	Rezolva x
$x \doteq y$	$f(y, g(y), h(a, g(y))) \doteq f(a, g(y), z), g(y) \doteq y, h(a, g(y)) \doteq h(a, z)$	Ciclu y

Nu există cel mai general unificator pentru termenii din enunț deoarece, de exemplu, trebuie să găsim unificator pentru $g(y)$ și y, dar y apare în $g(y)$ și acești termeni nu se pot unifica.

$\square$

(S2) Găsiți o SLD-respingere pentru programul Prolog de mai jos și ținta `?- p(X),m(Y,X).` Indicați la fiecare pas regula și substituția folosite pentru a aplica regula rezoluției. Puteți să vă ajutați în căutarea SLD-respingerii și de un arbore SLD (acesta nu trebuie să fie obligatoriu complet).

(1) `m(a,b) .`
(2) `f(a,b) .`
(3) `p(a) .`
(4) `p(X) :- f(Y,X), p(Y) .`

[1.5 puncte]

Soluție:

Pe foaia de examen Mai întâi transformăm clauzele și ținta in forma normală conjunctivă.

- Deoarece (1)–(3) sunt fapte, doar clauza (4) trebuie transformată în

$$(4')p(X) \vee \neg f(Y,X) \vee \neg p(Y)$$

- Forma normal conjunctivă a țintei este $\neg p(X) \vee \neg m(Y,X)$.

Pe ciornă încercăm să construim o respingere SLD.

$$G_0 = \neg p(X) \vee \neg m(Y,X)$$

- încercăm să îl elaborăm pe $\neg p(X)$ folosind regula de rezoluție și clauza (3). $p(X)$ și $p(a)$ se unifică cu substituția $X \mapsto a$, deci

$$G_1 = \neg m(Y,a)$$

  - încercăm să îl elaborăm pe $\neg m(Y,a)$ folosind regula de rezoluție și clauza (1). $m(Y,a)$ și $m(a,b)$ nu se unifică ($a \neq b$) deci trebuie să reluăm
  - nu mai avem alte clauze pentru capul m, deci trebuie să reluăm

- reîncercăm să îl elaborăm pe $\neg p(X)$, folosind regula de rezoluție și clauza (4') cu variabilele redenumite ca $p(X_1) \vee \neg f(Y_1,X_1) \vee \neg p(Y_1)$. $p(X)$ și $p(X_1)$ se unifică cu substituția $X_1 \mapsto X$, deci

$$G_1 = \neg f(Y_1,X) \vee \neg p(Y_1) \vee \neg m(Y,X)$$

  - încercăm să îl elaborăm pe $\neg f(Y_1,X_1)$ folosind regula de rezoluție și clauza (2). $f(Y_1,X)$ și $f(a,b)$ se unifică cu substituția $X \mapsto b, Y_1 \mapsto a$, deci

$$G_2 = \neg p(a) \vee \neg m(Y,b)$$

    * încercăm să îl elaborăm pe $\neg p(a)$ folosind regula de rezoluție și clauza (3). $p(a)$ și $p(a)$ se unifică cu substituția vidă, deci

$$G_3 = \neg m(Y,b)$$

      · încercăm să îl elaborăm pe $\neg m(Y,b)$ folosind regula de rezoluție și clauza (1). $m(Y,b)$ și $m(a,b)$ se unifică cu substituția $Y \mapsto a$ deci

$$G_4 = \square$$

Pe foaia de examen scriem doar secvența de derivări care conduce la o respingere:

	Ținta	**Clauza**	**Substituția**
0	$\neg p(X) \vee \neg m(Y,X)$	$(4') : p(X_1) \vee \neg f(Y_1,X_1) \vee \neg p(Y_1)$	$X_1 \mapsto X$
1	$\neg f(Y_1,X) \vee \neg p(Y_1) \vee \neg m(Y,X)$	(2)	$X \mapsto b, Y_1 \mapsto a$
2	$\neg p(a) \vee \neg m(Y,b)$	(3)	
3	$\neg m(Y,b)$	(1)	$Y \mapsto a$
3	$\square$	(1)	

Substituția finală se obține prin compunerea tuturor substituțiilor și selectarea doar a variabilelor care apar în ținta inițială:

$$X \mapsto b, Y \mapsto a$$

$\square$

(S3) Fie expresia $M ::= \lambda xyz.x(yz)$. Găsiți un tip τ astfel încât $\vdash M : \tau$ să fie o judecată validă. Puteți să folosiți fie sistemul ($\lambda\!\to$) cu constrângeri, fie să alegeți niște tipuri pentru variabilele legate din M și apoi să folosiți sistemul ($\lambda\!\to$).

[1.5 puncte]

Soluție:

Pe ciornă încercăm să găsim un tip pentru M și tipuri corespunzătoare pentru variabilele legate.
Urmărind regula de tipuri pentru λ, obțin că τ e de forma

$$\tau_X \to \tau_y \to \tau_z \to \tau_N$$

unde τ_N este tipul lui $x(yz)$ în mediul $\Gamma = x \mapsto \tau_x, y \mapsto \tau_y, z \mapsto \tau_z$
Din regula de aplicare observăm că τ_x trebuie să fie de forma $\tau_P \to \tau_N$, unde τ_P este tipul lui yz în mediul Γ.
Din regula de aplicare observăm că τ_y trebuie să fie de forma $\tau_z \to \tau_P$.
Adunând cele de mai sus, trebuie să arătăm că:

$$\vdash \lambda x : \tau_P \to \tau_N.\lambda y : \tau_z \to \tau_P.\lambda z : \tau_z.x(yz) : (\tau_P \to \tau_N) \to (\tau_z \to \tau_P) \to \tau_z \to \tau_N$$

Pe foaia de examen e suficient să scriem:

$$\to_I \dfrac{\to_I \dfrac{\to_I \dfrac{\to_E \dfrac{var\dfrac{\checkmark}{\Gamma \vdash x : \tau_P \to \tau_N} \quad \to_E \dfrac{var\dfrac{\checkmark}{\Gamma \vdash y : \tau_z \to \tau_P} \quad var\dfrac{\checkmark}{\Gamma \vdash z : \tau_z}}{\Gamma \vdash yz : \tau_P}}{\Gamma ::= x : \tau_P \to \tau_N, y : \tau_z \to \tau_P, z : \tau_z \vdash x(yz) : \tau_N}}{x : \tau_P \to \tau_N, y : \tau_z \to \tau_P \vdash \lambda z : \underline{\tau_z}.x(yz) : \underline{\tau_z} \to \tau_N}}{x : \tau_P \to \tau_N \vdash \lambda y : \underline{\tau_z \to \tau_P}.\lambda z : \tau_z.x(yz) : \underline{(\tau_z \to \tau_P)} \to \tau_z \to \tau_N}}{\vdash \lambda \underline{x : \tau_P \to \tau_N}.\lambda y : \tau_z \to \tau_P.\lambda z : \tau_z.x(yz) : \underline{(\tau_P \to \tau_N)} \to (\tau_z \to \tau_P) \to \tau_z \to \tau_N}$$

$\square$

Timp de lucru: 60 minute