Probabilități condiționale

Exp(1) Aruncăm o monedă de 3 ori

a) Care este prob. să obținem HHH?

$\Omega = \{H, T\}^3$

$A = \{HHH\}$

$\mathbb{P}(A) = 1/8$

Ω_2

HHH	HHT	THH	THT
HTH	HTT	TTH	TTT

Ω

b) Știm că la prima aruncare am obținut H

$\Omega_2 = \{HHH,\ HHT,\ HTH,\ HTT\}$

$$1/4 = \mathbb{P}(\overset{\text{ev. de interes}}{A} \underset{\text{știind că}}{|} \underset{\text{ev. care s-a realizat}}{B})$$

B - ev. prin care la prima aruncare am obținut H

$\mathbb{P}(A|B)$ - prob. realizării lui A știind că B s-a realizat

prob. condiționată a lui A la B

Din perspectivă frecvenționistă: Avem un experiment aleator pe care îl repetăm de un nr N de ori.

Ne interesează ev. A și B.

$$\frac{N(A\cap B)}{N(B)} = \frac{\frac{N(A\cap B)}{N}}{\frac{N(B)}{N}} \simeq \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Def: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un câmp de prob, $A, B \in \mathcal{F}$ cu $\mathbb{P}(B) > 0$. Atunci prob cond a lui A la ev. B, notată $\mathbb{P}(A|B)$, este definită prin:

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}}$$

$\mathbb{P}(A)$ – prior sau probabilitate a priori

$\mathbb{P}(A|B)$ – posterior sau probabilitate a posteriori

Exp (continuare):

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(\overbrace{A \cap B}^{\{HHH\}})}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{4}{8}} = \frac{1}{4}$$

Exp 2: Avem un pachet de cărți de joc și extragem aleator 2 cărți succesiv și fără întoarcere.

52 cărți

26 ♥/♦

13 ♥

A - "prima carte este de inimă roșie"

B - "a doua carte este de inimă roșie"

C - "a doua carte este de culoare roșie"

Vrem să calculăm:

$\mathbb{P}(B|A)$, $\mathbb{P}(C|A)$, $\mathbb{P}(A|B)$, $\mathbb{P}(A|C)$

Sol: • $\mathbb{P}(B|A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{\frac{\cancel{13} \cdot 12}{\cancel{52} \cdot 51}}{\frac{\cancel{13}}{\cancel{52}}} = \dfrac{12}{51}$

$\mathbb{P}(A) = \dfrac{13}{52} = \dfrac{1}{4}$

$\mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{13 \cdot 12}{52 \cdot 51}$

• $\mathbb{P}(C|A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{25}{51}$

$\mathbb{P}(A \cap C) = \dfrac{13 \cdot 25}{52 \cdot 51}$

- $\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{12}{51} = \mathbb{P}(B|A)$

$\mathbb{P}(B) \to \frac{1}{4}$

$\mathbb{P}(C) = \dfrac{26}{52}$

- $\mathbb{P}(A|C) = \dfrac{\mathbb{P}(A\cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \dfrac{\frac{13\cdot 25}{52\cdot 51}}{\frac{26}{52}} = \dfrac{55}{102} \neq \mathbb{P}(C|A)$

Exp 3: O familie are 2 copii

a) Care este prob ca cei doi copii să fie de sex F știind că cel mai în vârstă este F?

b) —— " —— cel puțin unul dintre ei este F?

Ipoteze:
- $\{F, B\}$
- $\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(B) = 1/2$
- sexul unui copil nu este influențat de sexul celuilalt copil

$\Omega = \{BB, BF, FB, FF\}$ $\quad A = \{FF\}$

(B,B)

a) $B = \{$cel mai în vârstă este F$\} = \{FB, FF\}$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}$$

b) $C = \{$cel puțin unul este de sex F$\} = \{FB, BF, FF\}$

$$\mathbb{P}(A|C) = \frac{\mathbb{P}(A\cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

Fată născută iarna

I, P, V, T $\qquad \Omega = \{FI, FP, FV, FT, BI, BP, BV, BT\}^2$ $\quad$ 64 elem

$\mathbb{P}($cei 2 copii să fie $F | FI)$

$\mathbb{P}(FI) = \dfrac{15}{64}$

FI, $\_$ $\leftarrow 8$

$7 \to \_$, FI

$\{\text{ambii } F\} \cap \{FI\}$

$FI, \_\_ \quad \frac{7}{64}$ ← 4

3 → $\_\_, FI$

$$\frac{\frac{7}{64}}{\frac{15}{64}} = \frac{7}{15}$$

<u>Exp 4</u>: Dacă o aeronavă apare în zona de interes scanată de un radar atunci se declanșează o alarmă cu prob. 99%. Dacă nu avem aeronavă atunci alarma (falsă) se declanșează 10%.

Șansa să treacă o aeronavă prin zona de interes = 5%

a) Care este prob ca în zona de interes să nu avem avion și să nu avem alarmă?

b) Care este prob să avem avion dar să nu fie detectat?

$A = \{$ să avem avion în zona de interes $\}$

$B = \{$ se declanșează alarma $\}$

a) $\mathbb{P}(A^c \cap B^c)$

b) $\mathbb{P}(A \cap B^c)$

<u>Ipoteză</u>: $\mathbb{P}(A) = 0.05$

$\mathbb{P}(B/A) = 0.99$

$\mathbb{P}(B|A^c) = 0.1$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B)}$$

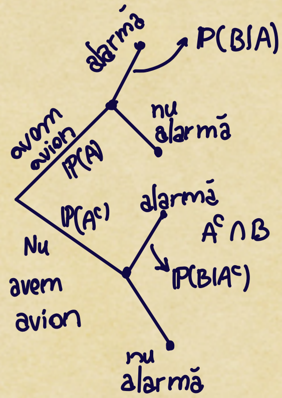
$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A)$$

a) $\mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(B|A^c)\mathbb{P}(A^c)$

$= \mathbb{P}(B|A^c)(1-\mathbb{P}(A))$

$= 0.1 \times 0.95$



b) $\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(B^c|A)\mathbb{P}(A)$

$= (1-\mathbb{P}(B|A))\mathbb{P}(A)$

$= 0.01 \times 0.05$

Ⓟ (Formula produsului) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ $\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) > 0$

Atunci

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2|A_1) \times \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \times \ldots \times \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

<u>Formula prob. totale</u>

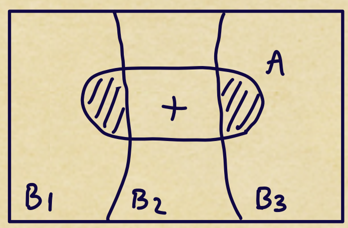
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. o partiție a lui Ω, $\{B_1, B_2, B_3\}$ și $A \in \mathcal{F}$

$$\begin{cases} B_1, B_2, B_3 \subseteq \Omega \\ B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega \\ B_1 \cap B_2 = \phi \\ B_2 \cap B_3 = \phi \\ B_1 \cap B_3 = \phi \end{cases}$$

$A = A \cap \Omega$

$= A \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3)$

$= (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3)$



$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B_1) + \mathbb{P}(A \cap B_2) + \mathbb{P}(A \cap B_3) =$

$= \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3)$

Ⓟ Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un c.p. și $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \mathcal{F}$ o partiție pe Ω cu $\mathbb{P}(B_i) > 0$, $i \in \{1, \ldots, n\}$

Dacă $A \in \mathcal{F}$ atunci:

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}$$

<u>$n=2$</u>

$A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(B) \in (0,1)$

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c) \times \mathbb{P}(B^c)$

Exp (continuare)

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^c)\mathbb{P}(A^c) =$$
$$= \frac{12}{51} \times \frac{13}{52} + \frac{13}{51} \times \left(1 - \frac{13}{52}\right) = \frac{1}{4}$$

Formula lui Bayes

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. $A, B \in \mathcal{F}$ cu $\mathbb{P}(A) > 0$, $\mathbb{P}(B) > 0$

a) $$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)}$$

b) $A \in \mathcal{F}$, $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \mathcal{F}$ o prt a lui Ω, $\mathbb{P}(B_i) > 0$

$$\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i)\,\mathbb{P}(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_j)\,\mathbb{P}(B_j)}$$

Exp: Să presupunem că prevalența unei boli în populație este 1%.

Pp că efectuăm un test de detecție cu o <u>acuratețe</u> de 95%.

acuratețe – senzitivitatea și specificitatea testului

$\mathbb{P}(T|D)$ = Sensitivitate = prob ca testul să fie + știind că pacientul este infectat
(true pozitive)

$\mathbb{P}(T^c|D^c)$ = specificitate = prob ca testul să fie – știind că pacientul nu este infectat
(true negative)

D – pacientul este infectat

T – testul este pozitiv

false positive = $\mathbb{P}(T|D^c)$

false negative = $\mathbb{P}(T^c|D)$

Pp că am efectuat testul și a ieșit pozitiv. Care este prob. să avem virusul știind că testul este +?

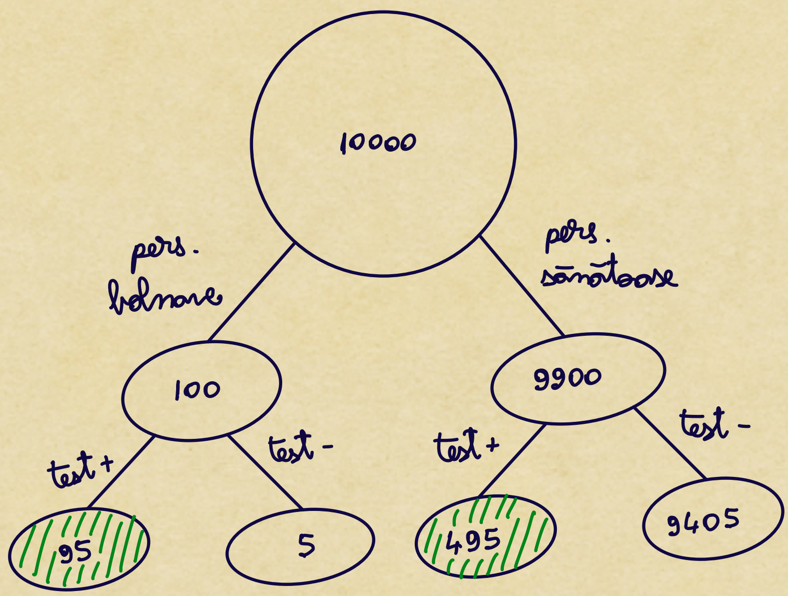
$\mathbb{P}(D|T) = ?$ → Formula lui Bayes știm

$$P(D|T) = \frac{P(T|D)\,P(D)}{P(T)} = \frac{P(T|D)\,P(D)}{P(T|D)\,P(D) + P(T|D^c)\,\underbrace{P(D^c)}_{1-P(D)}} =$$

$$P(T|D^c) = 1 - P(T^c|D^c) = 0.05$$

$$= \frac{0.95 \cdot 0.01}{0.95 \cdot 0.01 + 0.05 \cdot 0.99} = \frac{0.0095}{0.0095 + 0.0495} = \frac{0.0095}{0.0590} = 16{,}1\%$$

$n = 10000$



$$\frac{95}{95+495} \approx 16{,}1$$

(P) Probabilitatea condiționată este o probabilitate

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. și $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) > 0$

def $Q(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot|A)$ $\quad$ $Q(B) = \mathbb{P}(B|A)$

$(A, \mathcal{F} \cap A)$ $\quad \begin{cases} Q(A) = 1 \\ (A_n)_n \subset \mathcal{F} \cap A \text{ disjuncte 2 câte 2} \\ \quad Q(\bigcup_n A_n) = \sum Q(A_n) \end{cases}$

$$\mathbb{P}(A|A) = 1 = \frac{P(A \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = 1$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_n A_n \mid A\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_n A_n \cap A\right)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\sum \mathbb{P}(A_n \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$

$$= \sum \mathbb{Q}(A_n)$$

Exp: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p.

$A, B, C \in \mathcal{F}$

$\mathbb{P}(A \cap B) > 0$

$\mathbb{P}(A \cap C) > 0$

$\mathbb{P}(B \cap C) > 0$

$\mathbb{P}(A \mid B, C)$ $\quad$ $\dfrac{\mathbb{P}(B \mid A, C)\, \mathbb{P}(A \mid C)}{\mathbb{P}(B \mid C)}$

$B \cap C$

$\mathbb{Q}(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \mid C)$