Operaţii cu Familii Arbitrare de Mulţimi
Seminar de Logică Matematică şi Computaţională
Material facultativ

Claudia MUREŞAN
Universitatea din Bucureşti, Facultatea de Matematică şi Informatică
c.muresan@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro, claudia.muresan@unibuc.ro

2021–2022, Semestrul I

Vom demonstra distributivitatea produsului cartezian faţă de intersecţie şi reuniune. Pentru intuiţie, vom trata la început cazul finit, cu toate că nu este necesar pentru demonstrarea cazului general şi, desigur, rezultă din acesta.

Remarca 1 (proprietăţi din TEMELE COLECTIVE OBLIGATORII)**.** Fie A, B, C mulţimi. Atunci:

① $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ şi $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$;

② $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ şi $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$.

Exerciţiul 2. *Fie $n, k \in \mathbb{N}^*$ şi $(A_{i,j})_{i \in \overline{1,n}, j \in \overline{1,k}}$ o familie de mulţimi. Să se demonstreze că:*

① $(A_{1,1} \cap A_{1,2} \cap \ldots \cap A_{1,k}) \times (A_{2,1} \cap A_{2,2} \cap \ldots \cap A_{2,k}) \times \ldots \times (A_{n,1} \cap A_{n,2} \cap \ldots \cap A_{n,k}) = (A_{1,1} \times A_{2,1} \times \ldots A_{n,1}) \cap (A_{1,2} \times A_{2,2} \times \ldots A_{n,2}) \cap \ldots \cap (A_{1,k} \times A_{2,k} \times \ldots A_{n,k})$;

② $$(A_{1,1} \cup A_{1,2} \cup \ldots \cup A_{1,k}) \times (A_{2,1} \cup A_{2,2} \cup \ldots \cup A_{2,k}) \times \ldots \times (A_{n,1} \cup A_{n,2} \cup \ldots \cup A_{n,k}) = \bigcup_{j_1=1}^{k} \ldots \bigcup_{j_n=1}^{k} (A_{1,j_1} \times A_{2,j_2} \times \ldots A_{n,j_n}) = \bigcup_{j_1 \in \overline{1,k}, \ldots, j_n \in \overline{1,k}} (A_{1,j_1} \times A_{2,j_2} \times \ldots A_{n,j_n}) = \bigcup_{j_1 \in \overline{1,k}, \ldots, j_n \in \overline{1,k}} \prod_{i=1}^{n} A_{i,j_i} = \bigcup_{(j_1, \ldots, j_n) \in (\overline{1,k})^n} \prod_{i=1}^{n} A_{i,j_i},$$

unde la punctul ② avem de demonstrat prima egalitate, iar ultimele 3 egalităţi sunt scrieri alternative ale membrului drept al primeia.

Rezolvare: A se observa că, în enunţul de mai sus, am folosit asociativitatea produsului cartezian, a intersecţiei şi a reuniunii pentru a scrie fără a paranteza termenii acestor operaţii doi câte doi.
① O demonstraţie directă este cea mai simplă aici.

În următoarele echivalenţe, când scot domeniul valorilor pentru variabilele cuantificate de sub cuantificatori, aplic proprietatea că, dacă un enunţ cuantificat este legat printr–un conector logic de un enunţ p care nu depinde de variabila cuantificată, atunci domeniul cuantificatorului poate fi extins peste conectorul logic şi enunţul p; aşadar, pentru orice mulţimi M, N şi orice enunţuri $p(x)$ care depinde numai de variabila x şi $q(y)$ care depinde numai de variabila y, avem, ţinând seama şi de asociativitatea conjuncţiei logice: $(\exists\, x \in M)\,(\exists\, y \in N)\,(p(x)$ şi $q(y))$ ddacă $(\exists\, x \in M)\,(\exists\, y)\,(y \in N$ şi $p(x)$ şi $q(y))$ ddacă $(\exists\, x)\,[x \in M$ şi $(\exists\, y)\,(y \in N$ şi $p(x)$ şi $q(y))]$ ddacă $(\exists\, x)\,(\exists\, y)\,(x \in M$ şi $y \in N$ şi $p(x)$ şi $q(y))$. Această proprietate se poate aplica succesiv; o voi aplica direct pentru toate variabilele.

Fie a arbitrar, fixat. Au loc, conform definiţiei produsului direct, a intersecţiei şi a reuniunii, precum şi proprietăţii de mai sus şi asociativităţii şi comutativităţii conjuncţiei logice:

$a \in (A_{1,1} \cap A_{1,2} \cap \ldots \cap A_{1,k}) \times (A_{2,1} \cap A_{2,2} \cap \ldots \cap A_{2,k}) \times \ldots \times (A_{n,1} \cap A_{n,2} \cap \ldots \cap A_{n,k})$ ddacă $(\exists\, a_1 \in A_{1,1} \cap A_{1,2} \cap \ldots \cap A_{1,k})\,(\exists\, a_2 \in A_{2,1} \cap A_{2,2} \cap \ldots \cap A_{2,k}) \ldots (\exists\, a_n \in A_{n,1} \cap A_{n,2} \cap \ldots \cap A_{n,k})\,(a = (a_1, a_2, \ldots, a_n))$ ddacă $(\exists\, a_1)\,(\exists\, a_2) \ldots (\exists\, a_n)\,(a_1 \in A_{1,1} \cap A_{1,2} \cap \ldots \cap A_{1,k}$ şi $a_2 \in A_{2,1} \cap A_{2,2} \cap \ldots \cap A_{2,k}$ şi $\ldots$ şi $a_n \in A_{n,1} \cap A_{n,2} \cap \ldots \cap A_{n,k} \ldots$ şi $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n))$ ddacă $(\exists\, a_1)\,(\exists\, a_2) \ldots (\exists\, a_n)\,(a_1 \in A_{1,1}$ şi $a_1 \in A_{1,2}$ şi $\ldots$ şi $a_1 \in A_{1,k}$ şi $a_2 \in A_{2,1}$ şi $a_2 \in A_{2,2}$ şi $\ldots$ şi $a_2 \in A_{2,k}$ şi $\ldots$ şi $a_n \in A_{n,1}$ şi $a_n \in A_{n,2}$ şi $\ldots$ şi $a_n \in A_{n,k}$ şi $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n))$ ddacă $(\exists\, a_1)\,(\exists\, a_2) \ldots (\exists\, a_n)\,(a_1 \in A_{1,1}$ şi $a_2 \in A_{2,1}$ şi $\ldots$ şi $a_n \in A_{n,1}$ şi $a_1 \in A_{1,2}$ şi $a_2 \in A_{2,2}$ şi $\ldots$ şi $a_n \in A_{n,2}$ şi $\ldots$ şi $a_1 \in A_{1,k}$ şi $a_2 \in A_{2,k}$ şi $\ldots$ şi $a_n \in A_{n,k}$ şi $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n))$ ddacă $(\exists\, a_1)\,(\exists\, a_2) \ldots (\exists\, a_n)\,((a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A_{1,1} \times A_{2,1} \times \ldots \times A_{n,1}$ şi $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A_{1,2} \times A_{2,2} \times \ldots \times A_{n,2}$ şi $\ldots$ şi $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A_{1,k} \times A_{2,k} \times \ldots \times A_{n,k}$ şi $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n))$ ddacă $(\exists\, a_1)\,(\exists\, a_2) \ldots (\exists\, a_n)\,((a_1, a_2, \ldots, a_n) \in (A_{1,1} \times A_{2,1} \times \ldots \times A_{n,1}) \cap (A_{1,2} \times A_{2,2} \times \ldots \times A_{n,2}) \cap \ldots (A_{1,k} \times A_{2,k} \times \ldots \times A_{n,k})$ şi $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n))$ ddacă $(\exists\, (a_1, a_2, \ldots, a_n))\,((a_1, a_2, \ldots, a_n) \in (A_{1,1} \times A_{2,1} \times \ldots \times A_{n,1}) \cap (A_{1,2} \times A_{2,2} \times \ldots \times [A_{n,2}) \cap \ldots (A_{1,k} \times A_{2,k} \times \ldots \times A_{n,k})$ şi $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n))$ ddacă $(\exists\, (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in (A_{1,1} \times A_{2,1} \times \ldots \times A_{n,1}) \cap (A_{1,2} \times A_{2,2} \times \ldots \times A_{n,2}) \cap \ldots (A_{1,k} \times A_{2,k} \times \ldots \times A_{n,k}))\, a = (a_1, a_2, \ldots, a_n))$ ddacă $a \in (A_{1,1} \times A_{2,1} \times \ldots \times A_{n,1}) \cap (A_{1,2} \times A_{2,2} \times \ldots \times A_{n,2}) \cap \ldots (A_{1,k} \times A_{2,k} \times \ldots \times A_{n,k})$.

Aşadar $(A_{1,1}\cap A_{1,2}\cap\ldots\cap A_{1,k})\times(A_{2,1}\cap A_{2,2}\cap\ldots\cap A_{2,k})\times\ldots\times(A_{n,1}\cap A_{n,2}\cap\ldots\cap A_{n,k})=(A_{1,1}\times A_{2,1}\times\ldots\times A_{n,1})\cap(A_{1,2}\times A_{2,2}\times\ldots\times A_{n,2})\cap\ldots(A_{1,k}\times A_{2,k}\times\ldots\times A_{n,k})$.

② Aici putem proceda prin inducţie, folosind punctul ② din Remarca 1.

Fie A o mulţime, şi, pentru fiecare $m\in\mathbb{N}^*$, A_m o mulţime. Demonstrăm că, pentru orice $m\in\mathbb{N}^*$, $A\times(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_m)=(A\times A_1)\cup(A\times A_2)\cup\ldots\cup(A\times A_m)$ şi $(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_m)\times A=(A_1\times A)\cup(A_2\times A)\cup\ldots\cup(A_m\times A)$.

$\underline{m=1}$: În mod trivial, $A\times A_1=A\times A_1$ şi $A_1\times A=A_1\times A$.

$\underline{m\mapsto m+1}$: Fie $m\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $A\times(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_m)=(A\times A_1)\cup(A\times A_2)\cup\ldots\cup(A\times A_m)$ şi $(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_m)\times A=(A_1\times A)\cup(A_2\times A)\cup\ldots\cup(A_m\times A)$.

Conform punctului ② din Remarca 1, asociativităţii reuniunii şi ipotezei de inducţie, avem:

$A\times(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_m\cup A_{m+1})=A\times[(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_m)\cup A_{m+1}]=[A\times(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_m)]\cup(A\times A_{m+1})=(A\times A_1)\cup(A\times A_2)\cup\ldots\cup(A\times A_m)\cup(A\times A_{m+1})$;

$(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_m\cup A_{m+1})\times A=[(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_m)\cup A_{m+1}]\times A=[(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_m)\times A]\cup(A_{m+1}\times A)=(A_1\times A)\cup(A_2\times A)\cup\ldots\cup(A_m\times A)\cup(A_{m+1}\times A)$.

Raţionamentul prin inducţie matematică după $m\in\mathbb{N}^*$ este încheiat.

Acum demonstrăm, tot prin inducţie, că, pentru fiecare $s\in\overline{1,n}$, $(A_{1,1}\cup A_{1,2}\cup\ldots\cup A_{1,k})\times(A_{2,1}\cup A_{2,2}\cup\ldots\cup A_{2,k})\times\ldots\times(A_{s,1}\cup A_{s,2}\cup\ldots\cup A_{s,k})=\bigcup\limits_{j_i=1}^{k}\ldots\bigcup\limits_{j_s=1}^{k}(A_{1,j_1}\times A_{2,j_2}\times\ldots A_{n,j_n})$.

$\underline{s=1}$: În mod trivial, $A_{1,1}\cup A_{1,2}\cup\ldots\cup A_{1,k}=\bigcup\limits_{j_i=1}^{k}A_{1,j_1}$.

$\underline{s\mapsto s+1}$: Fie $s\in\overline{1,n-1}$ astfel încât $(A_{1,1}\cup A_{1,2}\cup\ldots\cup A_{1,k})\times(A_{2,1}\cup A_{2,2}\cup\ldots\cup A_{2,k})\times\ldots\times(A_{s,1}\cup A_{s,2}\cup\ldots\cup A_{s,k})=\bigcup\limits_{j_i=1}^{k}\ldots\bigcup\limits_{j_s=1}^{k}(A_{1,j_1}\times A_{2,j_2}\times\ldots A_{s,j_s})$.

Conform asociativităţii produsului cartezian, egalităţilor de mai sus demonstrate prin primul raţionament prin inducţie şi comutativităţii reuniunii, care permite permutarea reuniunilor la final, avem:

$(A_{1,1}\cup A_{1,2}\cup\ldots\cup A_{1,k})\times(A_{2,1}\cup A_{2,2}\cup\ldots\cup A_{2,k})\times\ldots\times(A_{s,1}\cup A_{s,2}\cup\ldots\cup A_{s,k})\times(A_{s+1,1}\cup A_{s+1,2}\cup\ldots\cup A_{s+1,k})=[(A_{1,1}\cup A_{1,2}\cup\ldots\cup A_{1,k})\times(A_{2,1}\cup A_{2,2}\cup\ldots\cup A_{2,k})\times\ldots\times(A_{s,1}\cup A_{s,2}\cup\ldots\cup A_{s,k})]\times(A_{s+1,1}\cup A_{s+1,2}\cup\ldots\cup A_{s+1,k})=\left[\bigcup\limits_{j_i=1}^{k}\ldots\bigcup\limits_{j_s=1}^{k}(A_{1,j_1}\times A_{2,j_2}\times\ldots A_{s,j_s})\right]\times(A_{s+1,1}\cup A_{s+1,2}\cup\ldots\cup A_{s+1,k})=$
$\left[\left(\bigcup\limits_{j_i=1}^{k}\ldots\bigcup\limits_{j_s=1}^{k}(A_{1,j_1}\times A_{2,j_2}\times\ldots A_{s,j_s})\right)\times A_{s+1,1}\right]\cup\left[\left(\bigcup\limits_{j_i=1}^{k}\ldots\bigcup\limits_{j_s=1}^{k}(A_{1,j_1}\times A_{2,j_2}\times\ldots A_{s,j_s})\right)\times A_{s+1,2}\right]\cup\ldots$
$\cup\left[\left(\bigcup\limits_{j_i=1}^{k}\ldots\bigcup\limits_{j_s=1}^{k}(A_{1,j_1}\times A_{2,j_2}\times\ldots A_{s,j_s})\right)\times A_{s+1,k}\right]=\left[\bigcup\limits_{j_i=1}^{k}\ldots\bigcup\limits_{j_s=1}^{k}(A_{1,j_1}\times A_{2,j_2}\times\ldots A_{s,j_s}\times A_{s+1,1})\right]\cup$
$\left[\bigcup\limits_{j_i=1}^{k}\ldots\bigcup\limits_{j_s=1}^{k}(A_{1,j_1}\times A_{2,j_2}\times\ldots A_{s,j_s}\times A_{s+1,2})\right]\cup\ldots\cup\left[\bigcup\limits_{j_1=1}^{k}\ldots\bigcup\limits_{j_s=1}^{k}(A_{1,j_1}\times A_{2,j_2}\times\ldots A_{s,j_s}\times A_{s+1,k})\right]=$
$\bigcup\limits_{j_{s+1}=1}^{k}\bigcup\limits_{j_i=1}^{k}\ldots\bigcup\limits_{j_s=1}^{k}(A_{1,j_1}\times A_{2,j_2}\times\ldots A_{s,j_s}\times A_{s+1,j_{s+1}})=\bigcup\limits_{j_i=1}^{k}\ldots\bigcup\limits_{j_s=1}^{k}\bigcup\limits_{j_{s+1}=1}^{k}(A_{1,j_1}\times A_{2,j_2}\times\ldots A_{s,j_s}\times A_{s+1,j_{s+1}})$.

Al doilea raţionament prin inducţie este încheiat. Aşadar $(A_{1,1}\cup A_{1,2}\cup\ldots\cup A_{1,k})\times(A_{2,1}\cup A_{2,2}\cup\ldots\cup A_{2,k})\times\ldots\times(A_{n,1}\cup A_{n,2}\cup\ldots\cup A_{n,k})=\bigcup\limits_{j_1=1}^{k}\ldots\bigcup\limits_{j_n=1}^{k}(A_{1,j_1}\times A_{2,j_2}\times\ldots A_{n,j_n})$.

Remarca 3 (proprietăţi din TEMELE COLECTIVE OBLIGATORII)**.** Fie A o mulţime, I o mulţime nevidă (de fapt, poate fi şi vidă), iar $(B_i)_{i\in I}$ o familie de mulţimi. Atunci:

① $A\times(\bigcap\limits_{i\in I}B_i)=\bigcap\limits_{i\in I}(A\times B_i)$ şi $(\bigcap\limits_{i\in I}B_i)\times A=\bigcap\limits_{i\in I}(B_i\times A)$;

② $A\times(\bigcup\limits_{i\in I}B_i)=\bigcup\limits_{i\in I}(A\times B_i)$ şi $(\bigcup\limits_{i\in I}B_i)\times A=\bigcup\limits_{i\in I}(B_i\times A)$.

Fie J o mulţime nevidă (de fapt, poate fi şi vidă), $n \in \mathbb{N}^*$ şi $(A_{i,j})_{i \in \overline{1,n}, j \in J}$ o familie de mulţimi.

Din egalităţile ② din Remarca 3 rezultă, prin inducţie matematică, la fel ca la punctul ② din Exerciţiul 4, că: $\left(\bigcup_{j \in J} A_{1,j}\right) \times \left(\bigcup_{j \in J} A_{2,j}\right) \times \ldots \times \left(\bigcup_{j \in J} A_{n,j}\right) = \bigcup_{j_1 \in J} \bigcup_{j_2 \in J} \bigcup_{j_n \in J} (A_{1,j_1} \times A_{2,j_2} \times \ldots \times A_{n,j_n}) = \bigcup_{(j_1, j_2, \ldots, j_n) \in J^n} (A_{1,j_1} \times A_{2,j_2} \times \ldots \times A_{n,j_n})$.

Similar, o generalizare a egalităţilor ① din Remarca 3 este: $\left(\bigcap_{j \in J} A_{1,j}\right) \times \left(\bigcap_{j \in J} A_{2,j}\right) \times \ldots \times \left(\bigcap_{j \in J} A_{n,j}\right) = \bigcap_{j \in J} (A_{1,j} \times A_{2,j} \times \ldots \times A_{n,j})$.

Exerciţiul 4 (distributivitatea generalizată a produsului cartezian faţă de reuniune şi intersecţie – generalizare a proprietăţilor de distributivitate din exerciţiul precedent)**.** *Fie I şi J o mulţimi nevide (de fapt, cel mult una dintre ele poate fi şi vidă), iar $(A_{i,j})_{i \in I, j \in J}$ o familie de mulţimi (indexată de $I \times J$; poate fi scrisă şi sub forma: $(A_{(i,j)})_{(i,j) \in I \times J}$). Să se demonstreze că:*

① $\prod_{i \in I} \bigcap_{j \in J} A_{i,j} = \bigcap_{j \in J} \prod_{i \in I} A_{i,j}$;

② $\prod_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{i,j} = \bigcup_{(j_i)_{i \in I} \in J^I} \prod_{i \in I} A_{i,j_i}$.

Rezolvare: Fie a arbitrar, fixat.

① $a \in \prod_{i \in I} \bigcap_{j \in J} A_{i,j}$ ddacă $(\exists\, (a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \bigcap_{j \in J} A_{i,j})\, (a = (a_i)_{i \in I})$ ddacă $(\exists\, (a_i)_{i \in I})\, [(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \bigcap_{j \in J} A_{i,j}$ şi $a = (a_i)_{i \in I}]$ ddacă $(\exists\, (a_i)_{i \in I})\, [(\forall\, i \in I)\, (a_i \in \bigcap_{j \in J} A_{i,j})$ şi $a = (a_i)_{i \in I}]$ ddacă $(\exists\, (a_i)_{i \in I})\, [(\forall\, i \in I)\, (\forall\, j \in J)\, (a_i \in A_{i,j})$ şi $a = (a_i)_{i \in I}]$ ddacă $(\exists\, (a_i)_{i \in I})\, [(\forall\, j \in J)\, (\forall\, i \in I)\, (a_i \in A_{i,j})$ şi $a = (a_i)_{i \in I}]$ ddacă $(\exists\, (a_i)_{i \in I})\, [(\forall\, j \in J)\, ((a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_{i,j})$ şi $a = (a_i)_{i \in I}]$ ddacă $(\exists\, (a_i)_{i \in I})\, [(a_i)_{i \in I} \in \bigcap_{j \in J} \prod_{i \in I} A_{i,j}$ şi $a = (a_i)_{i \in I}]$ ddacă $(\exists\, (a_i)_{i \in I} \in \bigcap_{j \in J} \prod_{i \in I} A_{i,j})\, (a = (a_i)_{i \in I})$ ddacă $a \in \bigcap_{j \in J} \prod_{i \in I} A_{i,j}$. Aşadar $\prod_{i \in I} \bigcap_{j \in J} A_{i,j} = \bigcap_{j \in J} \prod_{i \in I} A_{i,j}$.

② $a \in \prod_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{i,j}$ ddacă $(\exists\, (a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{i,j})\, (a = (a_i)_{i \in I})$ ddacă $(\exists\, (a_i)_{i \in I})\, [(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{i,j}$ şi $a = (a_i)_{i \in I}]$ ddacă $(\exists\, (a_i)_{i \in I})\, [(\forall\, i \in I)\, (a_i \in \bigcup_{j \in J} A_{i,j})$ şi $a = (a_i)_{i \in I}]$ ddacă $(\exists\, (a_i)_{i \in I})\, [(\forall\, i \in I)\, (\exists\, j_i \in J)\, (a_i \in A_{i,j_i})$ şi $a = (a_i)_{i \in I}]$ ddacă (aici a se observa că au loc ambele implicaţii) $(\exists\, (a_i)_{i \in I})\, [(\exists\, (j_i)_{i \in I} \in J^I)\, ((a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_{i,j_i})$ şi $a = (a_i)_{i \in I}]$ ddacă $(\exists\, (a_i)_{i \in I})\, ((a_i)_{i \in I} \in \bigcup_{(j_i)_{i \in I} \in J^I} \prod_{i \in I} A_{i,j_i}$ şi $a = (a_i)_{i \in I})$ ddacă $(\exists\, (a_i)_{i \in I} \in \bigcup_{(j_i)_{i \in I} \in J^I} \prod_{i \in I} A_{i,j_i})\, (a = (a_i)_{i \in I})$ ddacă $a \in \bigcup_{(j_i)_{i \in I} \in J^I} \prod_{i \in I} A_{i,j_i}$. Aşadar $\prod_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{i,j} = \bigcup_{(j_i)_{i \in I} \in J^I} \prod_{i \in I} A_{i,j_i}$.