Hutan Mihai-Alexandru
Grupa 243

Tema Algoritmi Aproximativi

Knapsack:

- A)

```
if __name__ == '__main__':
    unordered_list = [2, 3, 4, 5, 1, 6, 8]
    max_weight = 8
    weights = {0}
    total = 0
    for w in unordered_list:
        temp = weights.copy()
        while temp:
            val = temp.pop()
            if val + w <= max_weight:
                weights.add(val + w)
                total = max(total, val + w)
    print(total)
```

Algoritmul este pseudo polinomial deoarece complexitatea sa este O(n*m), unde:

- n = numarul de obiecte
- m = capacitatea rucsacului

m = capacitatea rucsacului deoarece in cel mai rau caz putem aveam toate numerele de la 0 la max_weight in set-ul nostru

- B)

```
if __name__ == '__main__':
    unordered_list = [2, 3, 5, 1, 4]
    max_weight = 10  # var 1
    total = 0  # var 2
    for val in unordered_list:  # var 3
        total += val
        if total > max_weight:
            print(max(total - val, val))
            break
```

Solutia este fezabila deoarece 'total' nu depaseste capacitatea rucsacului, iar orice obiect este ≤ capacitatea rucsacului.
Complexitate: O(n)
Algoritmul este ½ aproximativ.
Demonstratie:

$$Fie\ OPT_1 - solutia\ optima\ pentru\ problema\ rucsacului\ in\ varianta\ 1/0$$
$$Fie\ OPT_g - solutia\ optima\ pentru\ problema\ rucsacului\ in\ varianta\ fractionara$$

$$OPT_1 \leq OPT_g$$

$$Fie\ o_k\ ultimul\ obiect\ inclus\ pentru\ a\ obtine\ OPT_g$$

$$Cine\ este\ de\ fapt\ OPT_g?$$

Hutan Mihai-Alexandru
Grupa 243

$$OPT_g \text{ reprezinta suma tuturor obiectelor introduse in rucsac}$$
$$\text{pana la momentul de timp } i + \text{ultimul obiect adaugat, denumit de noi } o_k$$

$$OPT_g \leq \sum_{1 \leq i < k} val(o_i) + val(o_k)$$

$\text{Dar aceasta inecutatie este de fapt o scurta descriere a algoritmului nostru unde atat } val(o_k) \text{ cat si}$ $\sum_{1 \leq i < k} val(o_i)$ $\text{ sunt posibile solutii ale algoritmului} \Rightarrow OPT_g \leq 2ALG \text{ si } OPT_1 \leq OPT_g \leq 2ALG$

$$\text{Altfel spus } ALG \geq \frac{1}{2} OPT, \text{deci algoritmul este intradevar } \frac{1}{2} \text{aproximativ}$$

Load Balance:

- 1)
  - A)
    Avand un set de activitati cu timp de lucru de maxim 100, luam ca exemplu o posibila desfasurare a algoritmului, anume punem 80 prima data pe o masina, si dupa pe cea de a doua 60, 60. In acest caz algoritmul nu este doar 1,1 aproximativ, ci este si cel optim deci afirmatia nu contrazice aproximarea.
  - B)
    Avand un set de activitati cu timp de lucru de maxim 10, scopul unui algoritm load balance fiind acela de a imparti activitatile pe cele doua masini cat mai efficient posibil si mereu alegand masina urmatoarea cea cu costul minim pana la acel moment, vom avea o diferenta de maxim 10 intre cele doua masini. Vom lua 'worst case scenario' pentru un input cu restrictiile noaste:

$$\text{In worst case scenario inainte de a aseza ultima activitate care are si lungimea maxima admisa } 10$$
$$\text{masinile noastre au valorile } 95 \text{ si } 95, \text{deci } OPT \text{ in acest caz este egal cu } 105$$
$$\text{Dar } 120 \text{ NU este} \leq 1.1 * 105 \ (= 115.5), \text{deci algoritmul nu este } 1.1 \text{ aproximativ}$$

- 3)

$$\text{Fie o multime d } n \text{ activitati cu timpul de procesare } t_1, t_2, \dots, t_n \text{ ai.} \ t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n$$
$$\text{Daca } n > m, \text{atunci } OPT \geq t_m + t_{m+1}$$

$$\text{Fie } k \text{ indicile masinii cu loadul maxim in urma executarii algoritmului}$$
$$\Rightarrow ALG = load(k)$$
$$\text{Fie } q \text{ ultima activitate adaugata pe masina } k$$
$$\text{Fie } load'(i) \text{ loadul masinii } i \text{ chiar inainte ca activitatea } q \text{ sa fie asociata masinii } k$$

$$ALG = load(k) = load'(k) + t_q$$
$$load'(k) + t_q \leq \frac{1}{m} \sum_{1 \leq j \leq n} t_j + t_q$$

$$\text{Daca } q \leq m \text{ deci avem o masina goala inainte de ultimul pas deci algoritmul este optim}$$

$$\text{Daca } q > m:$$
$$ALG = load'(k) + t_q \leq \frac{1}{m} \sum_{1 \leq i \leq n} t_i + t_q \leq \frac{1}{m} \sum_{1 \leq i \leq n} t_i + \frac{1}{2}(t_m + t_{m+1}) \leq OPT + \frac{1}{2} OPT = \frac{3}{2} OPT$$

Hutan Mihai-Alexandru
Grupa 243

Solutie:

$$load'(k) \leq \frac{1}{m}\sum\nolimits_{1\leq i\leq n} t_i \leq \frac{1}{m}\sum\nolimits_{1\leq i\leq n} t_i - \frac{1}{m}t_q \leq \frac{1}{m}\sum\nolimits_{1\leq i\leq n} t_i - \frac{1}{m}\left(\frac{1}{2}\left(t_m + t_{m+1}\right)\right)$$
$$\leq OPT - \frac{1}{2m}OPT$$

$$ALG = load'(k) + t_q \leq OPT - \frac{1}{2m}OPT + \frac{1}{2}OPT \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2m}OPT$$

$$Deci\ ALG\ este \frac{3}{2} - \frac{1}{2m}\ aproximativ$$