Seminar 4 – 27.10.2021

Ex. 1: Arătați că nu există $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu prop. că $|f(x) - f(y)| > 1$ $\forall x, y$ $x \neq y$.

Rez: Pp. că $\exists f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu această propr.

$\underline{|f(x) - f(y)| > 1}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$. $\Rightarrow f$ inj. $\Rightarrow |Im f| = |\underbrace{\mathbb{R}}_{\text{domeniile}}|$

$\mathbb{R} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} [m, m+1)$ $\qquad |Im f \cap [m, m+1)| \leq 1$

Dacă $\exists f(x), f(y) \in [m, m+1) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 1$

$Im f = Im f \cap \mathbb{R} = Im f \cap \left(\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} [m, m+1) \right) = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} (Im f \cap [m, m+1))$

$|Im f| = \underbrace{\left| \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} (Im f \cap [m, m+1)) \right|}_{= n \in \mathbb{N} \text{ (finită) sau } = |\mathbb{Z}| \text{ (numărabilă)}}$

$\;\;\;\; \| $

$\underline{|\mathbb{R}|}$

nenumărabilă

Obs.: $A = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} (Im f \cap [m, m+1))$. În cazul în care $Im f \cap [m, m+1)$ are un elem $\forall m \in \mathbb{Z}$ putem găsi o bijecție între $\mathbb{Z}$ și A.
$m \mapsto f(x) \in [m, m+1)$. Putem vedea A ca o submulțime a lui $\mathbb{Z}$.

$1_A : A \to A$, $1_A(a) = a$ $(a \mapsto a)$

Relații de echivalență

Def: O relație binară „$\sim$" pe o mulțime A se num. rel de echiv. dacă îndeplinește simultan condițiile:

1. REFLEXIVITATE: $a \sim a$, $\forall a \in A$
2. SIMETRIE: $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ $\forall a, b \in A$
3. TRANZITIVITATE: $a \sim b$ și $b \sim c \Rightarrow a \sim c$ $\forall a, b, c \in A$

Ex. 2: Verificați care dintre următ. rel. sunt rel. de echiv. pe $\mathbb{R}$:

a. $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$

b. $x \sim y \Leftrightarrow |x - y| < 2$

c. $x \sim y \Leftrightarrow x + y \in \mathbb{Z}$

Rez: a. $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$

1. refl.: $x \sim x$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$x - x = 0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \sim x$

2. sim: $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$x \sim y \Rightarrow x - y \in \mathbb{Z} \Rightarrow -(x - y) \in \mathbb{Z} \Rightarrow y - x \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \sim x$.

3. tranzit : $x \sim y$ și $y \sim z \Rightarrow x \sim z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} x \sim y \Rightarrow x - y \in \mathbb{Z} \\ y \sim z \Rightarrow y - z \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \Rightarrow (x-y) + (y-z) = x - z \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \sim z.$$

Din 1, 2 și 3 $\Rightarrow$ „$\sim$" este rel. de echiv.

b. $x \sim y \Leftrightarrow |x-y| < 2$

1. refl : $x \sim x, \ \forall x \in \mathbb{R}$

$|x - x| = |0| = 0 < 2 \Rightarrow x \sim x$

2. sim. : $x \sim y \Rightarrow y \sim x$

$x \sim y \Rightarrow |x-y| < 2 \Rightarrow |y - x| < 2 \Rightarrow y \sim x.$

3. tranzit : $x \sim y$ și $y \sim z \Rightarrow x \sim z$

$$\left.\begin{array}{l} x \sim y \Rightarrow |x-y| < 2 \\ y \sim z \Rightarrow |y-z| < 2 \end{array}\right\} \overset{?}{\Longrightarrow} |x - z| < 2$$

Da - de ce?

Nu - dați contraex.

$x = 0, \ y = 1{,}9, \ z = 3{,}8 \qquad |x-y| = 1{,}9 \qquad |z-x| = 3{,}8 > 2$

$|y - z| = 1{,}9$

Obs.: $|a+b| \le |a| + |b|, \forall a, b$

$|(x-y)+(y-z)| \le |x-y| + |y-z| < 4.$

T: Pe $\mathbb{C}$ def. rel. „$\sim$" prin $z \sim w \Leftrightarrow z - w \in \mathbb{R}$. Arătați că „$\sim$" este rel. de echiv.

Obs: $z - w \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(z-w) = 0 \Leftrightarrow Im\, z = Im\, w.$

C. $x \sim y \Leftrightarrow x + y \in \mathbb{Z}$

1. refl: $x \sim x, \ \forall x \in \mathbb{R}$

$x \sim x \Leftrightarrow x + x = 2x \in \mathbb{Z}$ (F)

$x = 1{,}2 \Rightarrow 2x = 2{,}4 \notin \mathbb{Z}.$

$\to$ „$\sim$" nu este reflexivă $\Rightarrow$ „$\sim$" nu este rel. de echiv.

? „$\sim$" tranzitivă? $x = 1{,}1, \ y = 1{,}9 \quad z = 2{,}1$

NU $\quad x + y = 3 \in \mathbb{Z}, \ y + z = 4 \in \mathbb{Z}, \ x + z = 3{,}2 \notin \mathbb{Z}$

$x \sim y$ și $y \sim x \overset{tranzit}{\Longrightarrow} x \sim x.$

Obs: Clase de resturi $\mathbb{Z}/m$

Ex3: Pe $\mathbb{Z}$ se def. rel. „$\sim$" prin $x \sim y \Leftrightarrow (x-y) \vdots m$. Arătați că „$\sim$" este rel. de echiv. ($m$ nr. nat. fixat, $m \geq 2$)

Rez:

1. refl: $x \sim x, \forall x \in \mathbb{Z}$
   $(x-x) \vdots m \Rightarrow 0 \vdots m$ (A)
2. sim: $x \sim y \Rightarrow y \sim x$
   $(x-y) \vdots m \Rightarrow (y-x) \vdots m$ (deoarece $y-x = (x-y) \cdot (-1)$)
3. tranzit: $x \sim y$ și $y \sim z \Rightarrow x \sim z$
$(x-y) \vdots m$, $(y-z) \vdots m \Rightarrow (x-y)+(y-z) = (x-z) \vdots m$

Ex 4 : Pe $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ definim rel. „$\sim$" prin :

$$(a,b)\sim(c,d) \Leftrightarrow ad=bc.$$

Arătați că „$\sim$" este rel. de echiv.

Rez:

1 refl : $(a,b)\sim(a,b)$, $\forall a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{N}^*$

$ab=ba$ (ok)

2. sim : $(a,b)\sim(c,d) \Rightarrow (c,d)\sim(a,b)$.

$(a,b)\sim(c,d) \Rightarrow ad=bc \rightarrow cb=da \Rightarrow (c,d)\sim(a,b)$

3. tranzit : $(a,b)\sim(c,d)$ și $(c,d)\sim(e,f) \Rightarrow (a,b)\sim(e,f)$

$(a,b)\sim(c,d) \Rightarrow ad=bc$

$(c,d)\sim(e,f) \Rightarrow cf=de$

Vrem: $af=be$.

$a,c,e\in\mathbb{Z}$, $b,d,f\in\mathbb{N}^*$

$\begin{cases} ad=bc \\ cf=de \end{cases}$

Var. 1 : Le înmulțim : $acdf=bcde \,/ :d\neq 0$

$acf=bce$

$c\neq 0$: $af=be$

$c=0$: Revenim la $\begin{cases} ad=0 \\ 0=de \end{cases} \Rightarrow$ $a=0$, $d\neq 0$

$e=0$, $d\neq 0$

Var. 2: $\begin{cases} ad = bc \mid : b \underset{\neq 0}{=} 1 \\ cf = de \mid : f \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} c = \frac{ad}{b} \\ c = \frac{de}{f} \end{cases}$ $\Rightarrow \frac{ad}{b} = \frac{de}{f} \Rightarrow adf = bde \mid : d \neq 0$

$af = be$

$\Rightarrow (a, b) \sim (e, f)$

Din 1, 2, 3 $\Rightarrow$ „$\sim$" este rel. de echiv.

Obs: $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Ex. 5: Fie A o mulțime nevidă și $\mathcal{F}$ mulțimea funcțiilor $f: A \to A$.

Pe $\mathcal{F}$ definim rel: $f \sim g \Leftrightarrow \exists u \in \mathcal{F}$ bij. a.î. $f \circ u = u \circ g$.

Arătați că „$\sim$" este rel. de echiv.

Rez:

1. refl: $f \sim f$, $\forall f \in \mathcal{F}$

Vrem $u \in \mathcal{F}$ bij. a.î. $f \circ u = u \circ f$. Luăm $u = 1_A$.

2. sim: $f \sim g \Rightarrow g \sim f$

$f \sim g \Rightarrow \exists u \in \mathcal{F}$ bij a.î. $f \circ u = u \circ g$. (Vrem $v \in \mathcal{F}$ bij. a.î. $g \circ v = v \circ f$)

u bij $\Rightarrow u$ inversabilă $\Rightarrow \exists u^{-1} \in \mathcal{F}$, bij.

$u^{-1} \circ \mid f \circ u = u \circ g \mid \circ u^{-1}$

$u^{-1} \circ f \circ \underbrace{u \circ u^{-1}}_{1_A} = \underbrace{u^{-1} \circ u}_{1_A} \circ g \circ u^{-1} \Rightarrow u^{-1} \circ f = g \circ u^{-1} \Rightarrow g \circ u^{-1} = u^{-1} \circ f \Rightarrow g \sim f$

3. tranzit: $f \sim g$ și $g \sim h \Rightarrow f \sim h$ $\quad (f \circ w = w \circ h,\ w \in \mathcal{F}_{bij})$

$f \sim g \Rightarrow \exists\, u \in \mathcal{F}$ bij a.î. $f \circ u = u \circ g \Rightarrow g = u^{-1} \circ f \circ u$

$g \sim h \Rightarrow \exists\, v \in \mathcal{F}$ bij. a.î. $g \circ v = v \circ h$

$\Rightarrow u^{-1} \circ f \circ u \circ v = v \circ h \Rightarrow f \circ (u \circ v) = (u \circ v) \circ h \Rightarrow f \circ w = w \circ h \Rightarrow f \sim w.$

$w = u \circ v \in \mathcal{F}$ bij? Da.