Seminar 1 - 27 februarie 2024.

Chestiuni organizatorice

Pompeiu
Marți: 10-12

- examenul
  - doar probă scrisă
  - cu orice materiale vrei
- punctaj
  - nu primesc punctaj la seminar
  - prezența nu este obligatorie
- materialele vor fi trimise de către domnul profesor
- dacă sunt întrebări → nicoleta.dumitru@my.fmi.unibuc.ro
- adresă de mail șef/șefi de grupe → DE CERUT.

$\boxed{\text{Ex\#1}}$ Conform Teoremei lui Cayley, există o scufundare a grupului S_3 în grupul S_6. Găsiți imaginea transpoziției $(1,2)$ prin această scufundare.

(R) Teorema lui Cayley: Fie G un grup. Atunci $G \leq S(G)$.

Def Structura $(G, \cdot, 1)$ este un grup dacă satisface următoarele axiome:

1) Asociativitate: $\forall x, y, z \quad (xy)z = x(yz)$
2) Element neutru: $\forall x \quad x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
3) Inversabilitate: $\forall x \ \exists y \quad xy = yx = 1$

Def Dacă $(G, \cdot, 1)$ este grup și $1 \in H \subseteq G$ o submulțime, H este subgrup a lui G dacă $(H, \cdot, 1)$ este grup. Notăm $H \leq G$.

Exemplu fundamental: Fie A o mulțime și $S(A)$ mulțimea funcțiilor bijective $f: A \to A$. Atunci $(S(A), \circ, 1 = id_A)$ este grup și am grupul permutărilor lui A. Dacă $\#A = n$, notăm $S(A)$ cu S_n. Observăm că $\#S_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \_ \cdot n = n!$

Dem

Să observăm că grupul S_3 are 6 elemente. Facem următoarea identificare:

→ 1 = identitatea
→ 2 = $(1,2)$
→ 3 = $(1,3)$
→ 4 = $(2,3)$
→ 5 = $(1,2,3)$
→ 6 = $(1,3,2)$

Acțiunea elementului $(1,2)$ dată de multiplicarea $x \mapsto (1,2)x$ poate fi exprimată astfel:

1	2	3	4	5	6
1	(1,2)	(1,3)	(2,3)	(1,2,3)	(1,3,2)
(1,2)	1	(1,3,2)	(1,2,3)	(2,3)	(1,3)
2	1	6	5	4	3

- $(1,2)(1,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1,3,2)$

- $(1,2)(2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1,2,3)$

- $(1,2)(1,2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2,3)$

- $(1,2)(1,3,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1,3).$

Așadar

$$S_3 \ni (1,2) \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1,2)(3,6)(4,5) \in S_6.$$

$\square$

$\boxed{\text{Ex \#2}}$ Demonstrați identitatea

$$(k,k+1) = (1,2,\ldots,n)^{k-1}(1,2)(1,2,\ldots,n)^{1-k}$$

Dem

Notăm $\sigma := (1,2,\ldots,n)$.

Prin urmare, noi avem să arătăm că $\sigma^{k-1}(1,2)\sigma^{-(k-1)} = (k,k+1)$ sau, echivalent, că $\sigma^{k}(1,2)\sigma^{-k} = (k+1,k+2)$.

Cum ele sunt echivalente, o vom arăta pe cea de a doua.

Să observăm că dacă $k=0$, avem $(1,2)=(1,2)$. Evident, adevărat.
Acum, dacă $k=1$, avem $\sigma(1,2)\sigma^{-1} = (2,3)$.
Să verificăm, pe un exemplu concret, că acest lucru este adevărat.
Să spunem că luăm $n=3$. Avem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2,3)$$

Și tot așa se pot verifica următoarele

$$\sigma(1,2)\sigma^{-1} = (2,3)$$
$$\sigma(2,3)\sigma^{-1} = (3,4)$$
$$\sigma(3,4)\sigma^{-1} = (4,5)$$
$$\sigma(4,5)\sigma^{-1} = (5,6)$$
$$\vdots$$
$$\sigma(k,k+1)\sigma^{-1} = (k+1,k+2)$$

Și acum, datorită asociativității, avem

$$\sigma^{k}(1,2)\sigma^{-k} = \sigma^{k-1}\left(\sigma(1,2)\sigma^{-1}\right)\sigma^{-(k-1)} =$$

OBS $k+1$

$$= \sigma^{k-1}(2,3)\sigma^{-(k-1)} =$$

OBS $k+1$

$$= \sigma^{k-2}\left(\sigma(2,3)\sigma^{-1}\right)\sigma^{-(k-2)} =$$

$$= \sigma^{k-2}(3,4)\sigma^{-(k-2)} =$$

OBS $k+1$

$$= \dots =$$

$$= \sigma(k,k+1)\sigma^{-1} =$$

$$= (k+1,k+2)$$

$\square$

$\boxed{\text{Ex\#3}}$ Descompuneți următoarea permutare în produs de cicli disjuncți:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Dem

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&5&6&1&2&4\end{pmatrix}=(1,3,6,4)(2,5)$$

$\square$

OBS Orice permutare poate fi descompusă într-un produs de ~~factori~~ cicli disjuncți.

$\boxed{\text{Ex\#4}}$ Arătați că orice permutație poate fi descompusă într-un produs de transpoziții exemplificând folosind următorul exemplu:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&5&6&1&2&4\end{pmatrix}$$

Dem

$$(1,3)\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&5&6&1&2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&5&6&3&2&4\end{pmatrix}$$

$$(2,5)\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&5&6&3&2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&6&3&5&4\end{pmatrix}$$

$$(3,6)\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&6&3&5&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&3&6&5&4\end{pmatrix}$$

$$(4,6)\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&3&6&5&4\end{pmatrix}=id$$

Așadar

$$id=(4,6)(3,6)(2,5)(1,3)\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&5&6&1&2&4\end{pmatrix}$$

adică

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&5&6&1&2&4\end{pmatrix}=(1,3)(2,5)(3,6)(4,6)$$

$\square$

Ex #5 Calculați elementele generate de permutarea ciclică $(1,2,3,4,5,6)$.

Dem

• $(1,2,3,4,5,6)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&4&5&6&1\end{pmatrix}$

• $(1,2,3,4,5,6)^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&4&5&6&1&2\end{pmatrix}=(1,3,5)(2,4,6)$

• $(1,2,3,4,5,6)^3=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&5&6&1&2&3\end{pmatrix}=(1,4)(2,5)(3,6)$

• $(1,2,3,4,5,6)^4=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\5&6&1&2&3&4\end{pmatrix}=(1,5,3)(2,6,4)$

• $(1,2,3,4,5,6)^5=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&1&2&3&4&5\end{pmatrix}=(1,6,5,4,3,2)$

• $(1,2,3,4,5,6)^6=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&3&4&5&6\end{pmatrix}=id$

$\square$

Ex #6 Arătați că toți ciclii generați de ciclul $(1,2,3,4,5)$ sunt cicli de lungime 5.

Dem

• $(1,2,3,4,5)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\end{pmatrix}$

• $(1,2,3,4,5)^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&5&1&2\end{pmatrix}=(1,3,5,2,4)$

• $(1,2,3,4,5)^3=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&5&1&2&3\end{pmatrix}=(1,4,2,5,3)$

• $(1,2,3,4,5)^4=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&1&2&3&4\end{pmatrix}=(1,5,4,3,2)$

• $(1,2,3,4,5)^5=id$ $\square$

OBS Acest lucru se întâmplă pentru toate permutările ciclice de un număr p de obiecte, p prim. Consecință imediată a faptului că toate elementele unui grup ciclic de ordin p, diferite de 1, au ordinul p.

Ex#7 Fie $\sigma \in S_n$ o permutare și $(a_1, -, a_k)$ un ciclu. Arătați că

$$\sigma(a_1, -, a_k)\sigma^{-1} = (\sigma a_1, -, \sigma a_k)$$

Dem

În general avem $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \_\_ & k \\ \sigma 1 & \sigma 2 & \_\_ & \sigma k \end{pmatrix}$ sau $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & - & a_k \\ \sigma a_1 & \sigma a_2 & - & \sigma a_k \end{pmatrix} =: \sigma$

Așadar calculăm

$$\sigma(a_1, \_\_, a_k)\sigma^{-1} = \sigma(a_1, -, a_k)\begin{pmatrix} \sigma a_1 & \_\_ & \sigma a_k & \sigma x \\ a_1 & \_\_ & a_k & x \end{pmatrix} =$$

$$= \sigma\begin{pmatrix} \sigma a_1 & \sigma a_2 & \_\_ & \sigma a_k & \sigma x \\ a_2 & a_3 & \_\_ & a_1 & x \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma a_1 & \sigma a_2 & \_\_ & \sigma a_k & \sigma x \\ \sigma a_2 & \sigma a_3 & \_\_ & \sigma a_1 & \sigma x \end{pmatrix} =$$

$$= (\sigma a_1, \sigma a_2, \_\_, \sigma a_k)$$

□

Ex#8 Descrieți grupul unităților inelului $\mathbb{Z}_{12}$.

OBS Grupul unităților din $\mathbb{Z}_n$, notat cu U_n, este grupul ce ~~[...]~~ ~~[...]~~ conține elementele inversabile (via multiplicare) din $\mathbb{Z}_n$.

Dem U_{12} conține elementele din $\mathbb{Z}_{12}$ care sunt prime cu 12.

Așadar $U_{12} = \{1, 5, 7, 11\}$.

Tabelul multiplicativ pentru U_{12} este

$\cdot$	1	5	7	11
1	1	5	7	11
5	5	1	11	7
7	7	11	1	5
11	11	7	5	1

Să observăm că $U_{12} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

□

$\boxed{\text{Ex\#9}}$ Care sunt elementele lui U_p dacă p este număr prim? Construiți tabelul multiplicativ pentru U_7.

Dem

Dacă p este prim, atunci ~~toate~~ toți întregii pozitivi mai mici decât p sunt primi cu p. Prin urmare

$$U_p = \{1, 2, 3, \dots, p-1\}$$

La noi, grupul unităților lui $\mathbb{Z}_7$ este

$$U_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Tabelul multiplicativ pentru U_7 este:

$\cdot$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

$\square$

$\boxed{\text{Ex\#10}}$ Listați elementele lui $\langle 7 \rangle$ în U_{18}.

Dem

Elementele din $\mathbb{Z}_{18}$ relativ prime cu 18 ~~care~~ sunt elementele lui U_{18}.

Deci $U_{18} = \{1, 5, 7, 11, 13, 17\}$

Subgrupul ciclic generat de 7 conține puterile lui 7:

$7^0 = 1$

$7^1 = 7$

$7^2 = 49 = 13 \mod 18$

$7^3 = 343 = 1 \mod 18$.

Așadar ne putem opri și găsim $\langle 7 \rangle = \{1, 7, 13\}$. $\square$

Ex #11 Fie $(G,\cdot,1)$ un grup comutativ cu 900 de elemente. G conține elementele a, b și c astfel încât $a^{450}\neq 1$, $b^{300}\neq 1$ și $c^{180}\neq 1$. Arătați că G este grup ciclic.

Idee: Arătăm că $g=a^{225}b^{100}c^{36}$ generează G.

Dem

Observăm că $900=4\cdot 9\cdot 25$ și că $450=\frac{1}{2}\cdot 900$

$300=\frac{1}{3}\cdot 900$

$180=\frac{1}{6}\cdot 900$

De asemenea $(a^{225})^4=a^{900}=1$, deci $ord(a^{225})=4$ pt că $a^{450}\neq 1$

$(b^{100})^9=b^{900}=1$, deci $ord(b^{100})=9$ pt că $b^{300}\neq 1$

$(c^{36})^{25}=c^{900}=1$, deci $ord(c^{36})=25$ pt că $c^{180}\neq 1$

Cum 4, 9 și 25 sunt prime între ele, rezultă că

$$ord(g)=ord(a^{225}\cdot b^{100}\cdot c^{36})=$$
$$=ord(a^{225})\,ord(b^{100})\,ord(c^{36})=$$
$$=4\cdot 9\cdot 25=900$$

Deci g generează G și deci G este ciclic. □