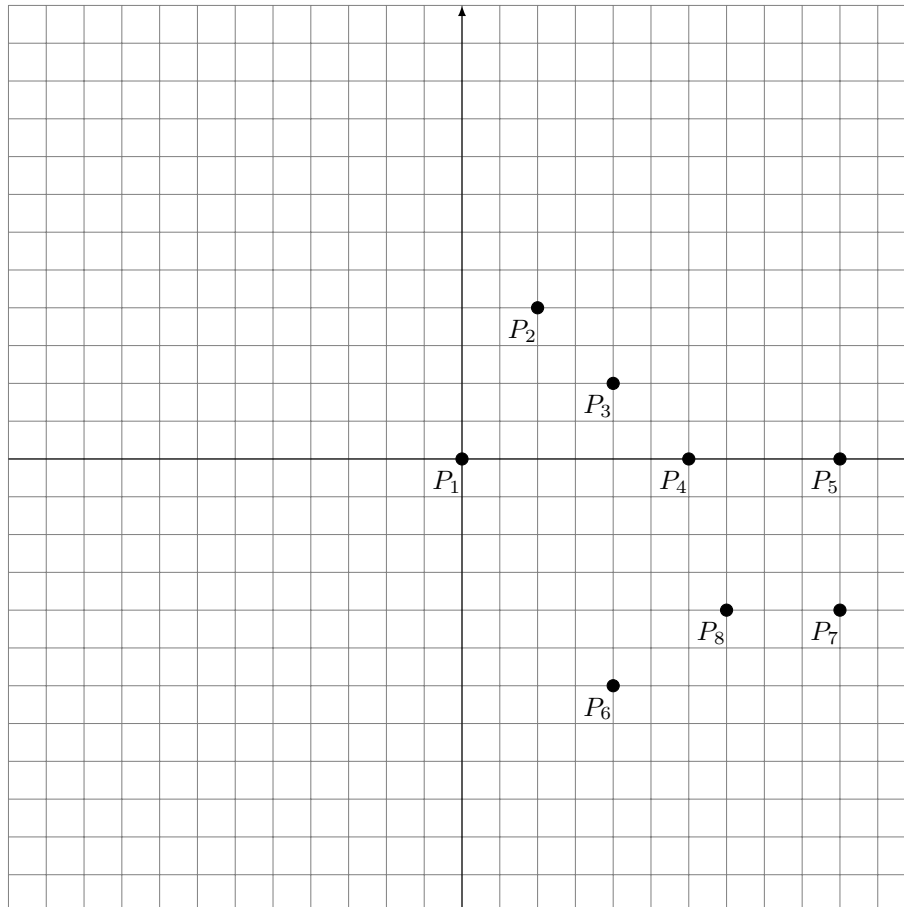


Algoritmi avansați

Seminar 2 (săpt. 3 și 4)

1. Fie mulțimea $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_7\}$, unde $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 2)$, $P_3 = (2, 1)$, $P_4 = (3, 0)$, $P_5 = (5, 0)$, $P_6 = (2, -3)$, $P_7 = (5, -2)$. Indicați testele care trebuie făcute pentru a găsi succesorul lui P_1 atunci când aplicăm Jarvis' march pentru a determina marginea inferioară a acoperirii convexe a lui \mathcal{P} , parcursă în sens trigonometric (drept pivot inițial va fi considerat P_2).

Soluție.



Pentru a găsi succesorul lui P_1 este adăugat pivotul P_2 (S cu notația din suportul de curs). Punctele sunt apoi testate, iar dacă un punct P este la

dreapta muchiei orientate P_1S , punctul P devine noul pivot.

Punctul P_3 : este în dreapta muchiei P_1P_2 , deci pivotul P_2 este înlocuit cu P_3 .

Punctul P_4 : este în dreapta muchiei P_1P_3 , deci pivotul P_3 este înlocuit cu P_4 .

Punctul P_5 : nu este în dreapta muchiei P_1P_4 , deci pivotul P_4 rămâne.

Punctul P_6 : este în dreapta muchiei P_1P_4 , deci pivotul P_4 este înlocuit cu P_6 .

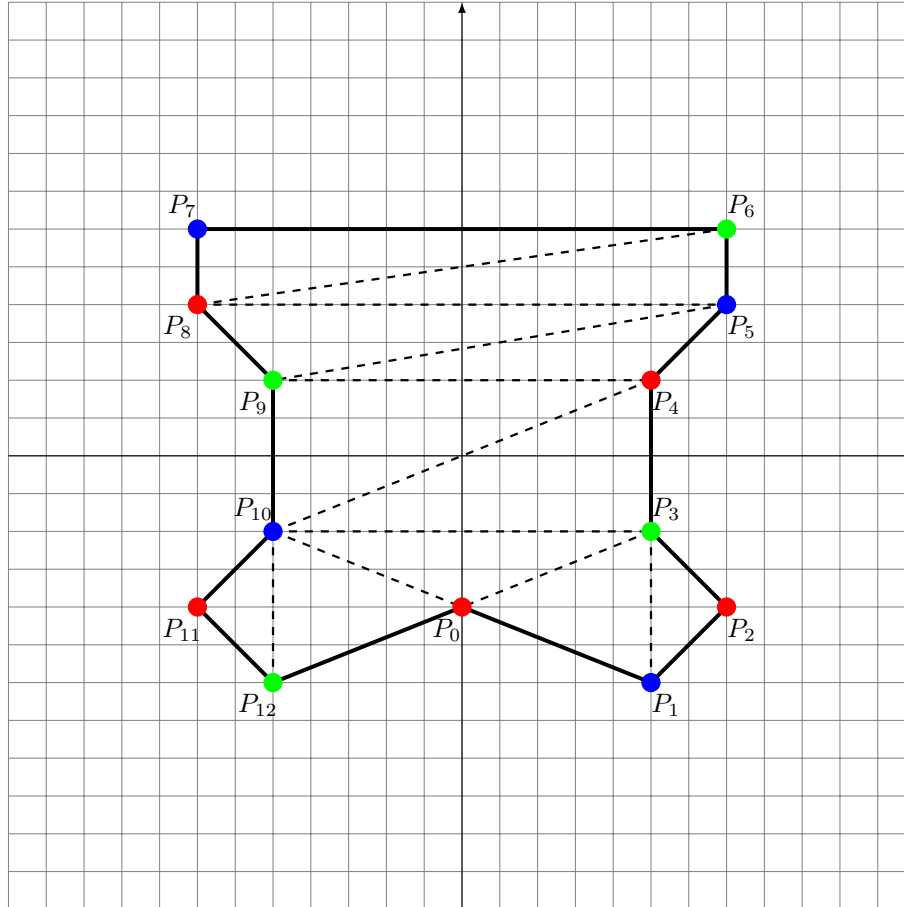
Punctul P_7 : nu este în dreapta muchiei P_1P_6 , deci pivotul P_6 rămâne.

Punctul P_8 : nu este în dreapta muchiei P_1P_6 , deci pivotul P_6 rămâne.

Au fost parcurse toate punctele. Ultimul pivot (P_6) este succesorul lui P_1 în parcurgerea frontierei acoperirii convexe a mulțimii date în sens trigonometric.

2. Aplicați metoda din demonstrația teoremei galeriei de artă, indicând o posibilă amplasare a camerelor de supraveghere în cazul poligonului $P_0P_1P_2 \dots P_{12}$, unde $P_0 = (0, -2)$, $P_1 = (5, -6)$, $P_2 = (7, -4)$, $P_3 = (5, -2)$, $P_4 = (5, 2)$, $P_5 = (7, 4)$, $P_6 = (7, 6)$ iar punctele P_7, \dots, P_{12} sunt respectiv simetricele punctelor P_6, \dots, P_1 față de axa Oy .

Soluție. În figură sunt reprezentate o posibilă triangulare și 3-colorarea asociată - există și alte variante corecte.



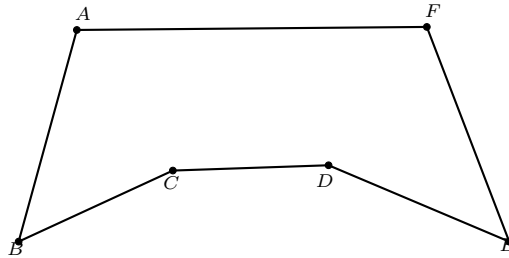
3. Fie poligonul $\mathcal{P} = (P_1P_2P_3P_4P_5P_6)$, unde $P_1 = (5,0)$, $P_2 = (3,2)$, $P_3 = (-1,2)$, $P_4 = (-3,0)$, $P_5 = (-1,-2)$, $P_6 = (3,-2)$. Arătați că Teorema Gale-riei de Artă poate fi aplicată în două moduri diferite, așa încât, aplicând metoda din teoremă și mecanismul de 3-colorare, în prima variantă să fie suficientă o singură cameră, iar în cea de-a doua variantă să fie necesare și suficiente două camere pentru supravegherea unei galerii având forma poligonului \mathcal{P} .

Soluție. Poligonul este un hexagon convex, deci pentru triangularea sa vor fi folosite $3 \cdot 6 - 6 - 3 = 9$ muchii. Aceasta înseamnă că vom trasa 3 diagonale. Sunt posibile două situații: (a) cele trei diagonale au un vârf comun; (b) nu există un vârf comun al celor trei diagonale (acest lucru se poate demonstra trasând una dintre diagonale și apoi raționând inductiv - este esențial că poligonul este un hexagon convex). În cazul (a) este suficientă o cameră, iar în cazul (b) 3-colorarea indică utilizarea a două camere.



4. Dați exemplu de poligon cu 6 vârfuri care să aibă atât vârfuri convexe, cât și concave și toate să fie principale.

Soluție. În figură este desenat un poligon cu 4 vârfuri convexe și 2 vârfuri concave. Pot fi luate în considerare și alte variante (de exemplu cu un singur vârf concav, cu doar 3 vârfuri convexe, etc.).



5. Fie $\mathcal{M} = \{A_i \mid i = 0, \dots, 50\} \cup \{B_i \mid i = 0, \dots, 40\} \cup \{C_i \mid i = 0, \dots, 30\}$, dată de punctele $A_i = (i + 10, 0)$, $i = 0, 1, \dots, 50$, $B_i = (0, i + 30)$, $i = 0, 1, \dots, 40$, $C_i = (-i, -i)$, $i = 0, 1, \dots, 30$. Determinați numărul de triunghiuri și numărul de muchii ale unei triangulări a lui \mathcal{M} .

Soluție. Trebuie stabilite mai întâi numărul de puncte n și numărul de puncte de pe frontiera acoperirii convexe k (atenție la numărarea punctelor, nu trebuie numărat un punct de două ori...). Pe o schiță se observă că sunt în total 123 de puncte (punctele din mulțimile $\{A_i \mid i = 0, \dots, 50\}$, $\{B_i \mid i = 0, \dots, 40\}$, respectiv $\{C_i \mid i = 0, \dots, 30\}$ sunt diferite între ele). Obținem $n = 123$, $k = 3$, apoi aplicăm formulele pentru determinarea numărului de triunghiuri, respectiv a numărului de muchii.

$$n_t = 2n - k - 2 = 241, \quad n_m = 3n - k - 3 = 343.$$

6. Dați un exemplu de mulțime din \mathbb{R}^2 care să admită o triangulare având 6 triunghiuri și 11 muchii.

Soluție. Fie n numărul de puncte ale unei astfel de mulțimi și k numărul de puncte de pe frontiera acoperirii convexe. Au loc relațiile

$$\begin{cases} 2n - k - 2 = 6 \\ 3n - k - 3 = 11 \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem obținem $n = 6$, $k = 4$, deci o astfel de mulțime are 6 puncte, din care 4 sunt situate pe frontiera acoperirii convexe.

Un posibil exemplu: $\{(0, 0), (5, 0), (5, 3), (0, 3), (1, 1), (3, 1)\}$.

7. În \mathbb{R}^2 fie punctele $P_1 = (1, 7)$, $P_2 = (5, 7)$, $P_3 = (7, 5)$, $P_4 = (1, 3)$, $P_5 = (5, 3)$, $P_6 = (\alpha - 1, 5)$, cu $\alpha \in \mathbb{R}$. Discutați, în funcție de α , numărul de muchii ale unei triangulări asociate mulțimii $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$.

Soluție. Trebuie analizată configurația punctelor P_1, P_2, \dots, P_6 și determinate numărul n de puncte și numărul k de puncte de pe frontiera acoperirii convexe.

Punctele $P_1P_2P_3P_4P_5$ determină un pentagon convex. Punctul P_6 descrie o dreaptă paralelă cu Ox care trece prin punctul P_3 .

- Pentru $\alpha - 1 \leq 1$, adică $\alpha \in (-\infty, 2]$ punctul P_6 este situat în exteriorul sau pe laturile pentagonului $P_1P_2P_3P_4P_5$. Avem $n = 6$, $k = 6$, deci 4 fețe și 9 muchii.
- Pentru $\alpha - 1 > 1$ și $\alpha - 1 < 7$, adică $\alpha \in (2, 8)$ punctul P_6 este situat în interiorul pentagonului $P_1P_2P_3P_4P_5$. Avem $n = 6$, $k = 5$, deci 5 fețe și 10 muchii.
- Pentru $\alpha - 1 = 7$, adică $\alpha \in \{8\}$ punctul P_6 coincide cu P_3 . Avem $n = 5$, $k = 5$, deci 3 fețe și 7 muchii.
- Pentru $\alpha - 1 > 7$, adică $\alpha \in (8, \infty)$ punctul P_6 este situat în exteriorul pentagonului $P_1P_2P_3P_4P_5$. Avem $n = 6$, $k = 6$, deci 4 fețe și 9 muchii.

8. Fie \mathcal{G} un graf planar conex, v numărul de noduri, m numărul de muchii, f numărul de fețe. Se presupune că fiecare vârf are gradul ≥ 3 . Demonstrați inegalitățile

$$v \leq \frac{2}{3}m, \quad m \leq 3v - 6$$

$$m \leq 3f - 6, \quad f \leq \frac{2}{3}m$$

$$v \leq 2f - 4, \quad f \leq 2v - 4$$

Dați exempluri de grafuri în care au loc egalități în relațiile de mai sus.