Model examen alg

1. $\exists$ perm de ordin 50 în gr S_{14}?

Notăm permutarea cu σ

$ord(\sigma) = 50$

O condiție inițială pt existența lui σ este ca

$ord(\sigma) \mid ord(S_{14})$

$\Leftrightarrow ord(\sigma) \mid 14!$

$50 \mid 14!$

Avem $5^2 \cdot 2$ în produs

Încercăm să scriem σ ca produs de cicli disjuncți:

$\sigma = c_{i1} \dots c_{ik}$

$ord(\sigma) = cmmmc\{\underbrace{\ell c_{i1} \dots \ell c_{ik}}_{\text{putem avea numai } \ell c_{i1} = 25 \text{ și } \ell c_{i2} = 2}\} = 50 = 5^2 \cdot 2$

Observăm că $\ell c_{i1} + \ell c_{i2} > 14$ (lung dim S)

$\Rightarrow$ nu putem avea permutări de ordin 50 în S_{14}

2. $\sigma = \underbrace{(1 \dots 7)}_{c_{i1}}\underbrace{(8 \dots 14)}_{c_{i2}}$

$\tau \in S_{14}$?

$\tau^2 = \sigma$

$\tau^2 = c_{i1}^2 \cdot c_{i2}^2$

$2 \mid \ell$ (I) aveam inițial un sg ciclu de lung 14 care s-a spart

$2 \nmid \ell$ aveam c de lung 7 în 2 (II)

(I) $\tau^2 = \underbrace{(1\,2\,3\,4\,5\,6\,7)(8\,9\,10\,11\,12\,13\,14)}_{(a_1 \dots a_{14})}$

$(a_1 a_3 a_5 a_7 \dots a_{13}) \leftarrow (a_2 a_4 \dots a_{14})$

$(1\,2\,3\,4\,5\,6\,7)\,(8\,9\,10\,11\,12\,13\,14)$ (4)

$(9\,10\,11\,12\,13\,14\,8)$

7 variante $(10\,11\,12\,13\,14\,8\,9)$

$\vdots$

$\Rightarrow \tau = (1\,8\,2\,9\,3\,10\,4\,11\,5\,12\,6\,13\,7\,14)$ (4)

$\tau = (1\,9\,2\,10\,3\,11\,4\,12\,5\,13\,6\,14\,7\,8)$ samd

(ii) $\tau^2 = c_{i_1}^2 \cdot c_{i_2}^2$

$c_{i_1}^2 = (1\,2\,3\,4\,5\,6\,7) \rightarrow ord(c_{i_1}) = 7$

$c_{i_2}^2 = (8\,9\,10\,11\,12\,13\,14) \rightarrow ord(c_{i_2}) = 7$

$((c_{i_1})^2)^4 = c_{i_1} = (1\,5\,2\,6\,3\,7\,4)$

$((c_{i_2})^2)^4 = c_{i_2} = (8\,12\,9\,13\,10\,14\,11)$

$\Rightarrow \tau = (1\,5\,2\,6\,3\,7\,4)(8\,12\,9\,13\,10\,14\,11)$

3\. Calc $7^{7^{17^{17}}} \bmod 29$

$(7, 29) = 1$ Putem aplica Fermat

$\Rightarrow 7^{28} \equiv 1 \pmod{29}$

Calculăm $7^{17^{17}} \bmod 28$

$7^{17^{17}} \equiv 0 \pmod 7$

$7^{17^{17}} \overset{(4)}{\equiv} (-1)^{17^{17}} \equiv -1 \overset{3}{\equiv} (4)$

Lema $\Rightarrow$ (Lucrează a restului)

$x \equiv 0\ (7)$

$x \equiv 3\ (4)$

$0 \le x < 28$

$x \in \{0, 7, 14, 21\}$ $\Rightarrow x = 7$

$\Rightarrow 7^{17^{17}} \equiv 7 \pmod{28}$

ultimul pas: determinăm $7^7 \bmod 29$

$\underbrace{7^2}_{49 \equiv -9 \pmod{29}} \cdot 7^2 \cdot 7^2 \cdot 7 \overset{29}{\equiv} \underbrace{(-9)(-9)}_{81 \equiv -6 \pmod{29}}\underbrace{(-9)\cdot 7}_{\equiv 5} \equiv 1\ (29)$

4) Determ nr elem de ordin 24 $(\mathbb{Z}_{2^7},+)\times(\mathbb{Z}_{3^7},+)$

" $\hat{a}, \bar{b}$

$(\hat{a}, \bar{b})$

$[ord(\hat{a}), ord(\bar{b})] = 24 = 2^3 \cdot 3^1$

Avem că $ord(\hat{a}) \mid \underbrace{ord(\mathbb{Z}_{2^7})}_{=128 = 2^7}$

$ord(\bar{b}) \mid \underbrace{ord(\mathbb{Z}_{3^7},+)}_{3^7}$

Singura variantă posibilă $\rightarrow ord(\hat{a}) = 2^3$

$ord(\bar{b}) = 3$

Căutăm a în $\mathbb{Z}_{128}$ a.î. $\widehat{2^3 \cdot a} = \hat{0}$

și $ord(a) = \frac{128}{(a,128)} = 8$

$\Downarrow$

$\Rightarrow (a,128) = 2^4$ $\qquad a = 2^4 \cdot k,\ k \in \mathbb{N}^*$

$a \in \{2^4, 2^4 \cdot 3, 2^4 \cdot 5, 2^4 \cdot 7\} \rightarrow 4$ elem

Căutăm b în $\mathbb{Z}_{2187}$ cu $ord(b) = 3$

$ord(b) = \frac{2187}{(2187,3)} = 3$

$\Rightarrow (2187, 3) = 729 = 3^6$

$\Rightarrow b \in \{3^6, 3^6 \cdot 2\} \rightarrow 2$ elemente

$\Rightarrow$ în total avem $4 \cdot 2 = 8$ alegeri posibile

5. ρ rel binară:

$x \rho y$ dacă $x = y$ sau $x + y = 14 \Leftrightarrow$
$y = 14 - x$

Ar că ρ e rel de echivalență; Calculați clasele de echival pt 7 și 2022 + determ un SCR.

$f: \mathbb{R}/\rho \rightarrow \mathbb{R}$ $f(\hat{x}) = 4x^2 - 56x + 200$
e bine def?

$x \rho x \rightarrow$ știm că $x = x \Rightarrow \rho$ e reflexivă (1)

$x \rho y \Leftrightarrow y = 14 - x \Leftrightarrow x = 14 - y \Leftrightarrow y \rho x$

$\Rightarrow \rho$ e simetrică (2)

$x \rho y \Rightarrow y = 14 - x$

$y \rho z \Rightarrow z = 14 - y = 14 - (14 - x) = x$

$\Rightarrow x \rho z \Rightarrow \rho$ e tranzitivă (3)

$\xrightarrow{(1),(2),(3)} \rho$ e rel de echivalență

Observăm că ρ se scrie în 2 moduri $\begin{cases} x \\ 14-x \end{cases}$

$\Rightarrow \hat{7} = 7, 14 - 7 = 7 = \{7, 7\} = \{7\}$

$\widehat{2022} = 2022, 14 - 2022 = \{2022, -2008\}$

$x = 14 - x$ pentru $x = 7 \Rightarrow$ avem 2 posibilități de SCR

$: (-\infty, 7]$ sau $[7, \infty)$

$f : \mathbb{R} / \rho \to \mathbb{R} \quad f(\hat{x}) = 4x^2 - 56x + 200$

pt ca f să fie bine def trebuie ca

$f(\hat{x}) = f(\widehat{14-x})$, cum $\hat{x} = \widehat{14-x}$

$4x^2 - 56x + 200 = (14-x)^2 \cdot 4 - 56(14-x) + 200$

$4x^2 - 56x + 200 = 4x^2 - \underbrace{28x \cdot 4} + \underbrace{14^2 \cdot 4} - 56 \cdot 14 + 56x + 200$

$4x^2 - 56x + 200 = 4x^2 - 56x + \cancel{56 \cdot 14} - \cancel{56 \cdot 14} + 200$

$4x^2 - 56x + 200 = 4x^2 - 56x + 200$ (A)

$\Rightarrow f$ e bine definită

6. $f(x) = \begin{cases} 7x - 7, & x < -2 \\ 3x^2 + 6x - 18, & x \geq -2 \end{cases}$

studiați injectivitatea, surj, bij

calc $f^{-1}[-8, 8]$ și $f[-3, 0]$

Considerăm $f_1 : (-\infty, -2) \to \mathbb{R}$

$f_1(x) = 7x - 7$

și

$f_2 : [-2, \infty) \to \mathbb{R}$

$f_2(x) = 3x^2 + 6x - 18$

Analizăm injectivitatea pe cele 2 ramuri:

(I) $f_1 : (-\infty, -2) \to \mathbb{R}$

Fie $x_1, x_2 \in (-\infty, -2)$ $x_1 \neq x_2$

$f(x_1) = f(x_2)$

$7x_1 - \cancel{7} = 7x_2 - \cancel{7} \Rightarrow x_1 = x_2$ =) A

f_1 e injectivă (1)

$7x - 7 = 0$
$x = 1$
$f(-2) = -21$
$f(0) = -7$

II. $f_2 : (-2, \infty) \to \mathbb{R}$

$f_2 = 3x^2 + 6x - 18$

$f_2'(x) = 6x + 6 = 0$ pt $x = -1$

x	-2		-1		∞
$f_2'(x)$		$-\ -\ -\ -$	0	$+\ +$	
$f_2(x)$	-18	$\searrow$	-21	$\nearrow$	∞

$f_2(-2) = 3\cdot 4 - 12 - 18 = -18$

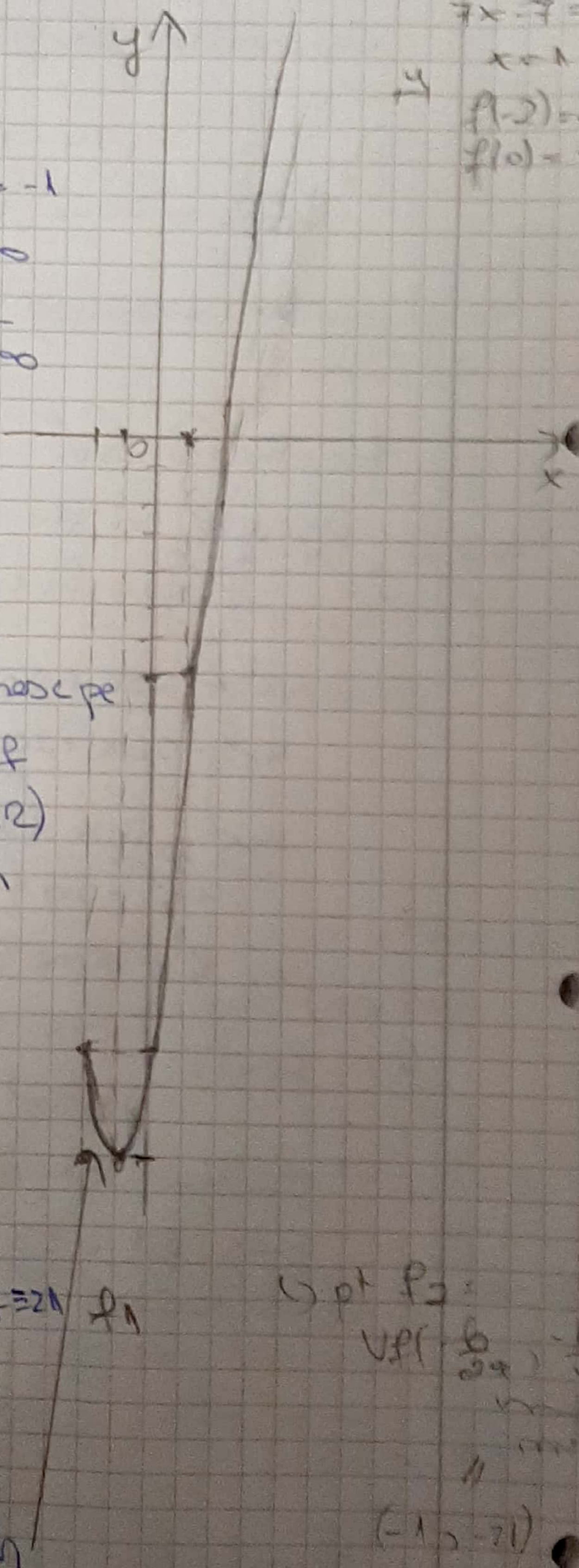
$\lim\limits_{x \to \infty} f_2(x) = \infty$

$f_2(-1) = 3 - 6 - 18 = -21$

f_2 descresc pe $[-2, -1]$ și cresc pe $[-1, \infty)$ $\Rightarrow f$ nu e inj (2)

Tot din tabel observăm că $\mathrm{Im} f_2 = [-21, \infty)$

(1), (2) $\Rightarrow$ f nu e injectivă



Determinăm $\mathrm{Im} f_1$

$x < -2$

$7x - 7 < 7(-2) - 7 = -21$ f_1

$\Rightarrow \mathrm{Im} f_1 = (-\infty, -21)$

$\mathrm{Im} f_1 \cup \mathrm{Im} f_2 = \mathbb{R} \Rightarrow$

f = surjectivă, dar f nu e injectivă $\Rightarrow$ f nu e bijectivă

pt f_2: $V_f\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$
min
min
||
$(-1, -21)$

$f(-2) = -18 = f(0)$

$f(1) = 3 + 6 - 18 = -9$

$f(-3,-2) = f[-3,-2] \cup f[-2,0]$

$-3 \le x < -2 \rightarrow -28 \le 7x - 7 < 21$

$\Rightarrow f[-3,-2) = [-28,-21)$

$f[-2,0]$ $\quad f(0) = 3\cdot 0 + 6\cdot 0 - 18 = -18$

Conform tabelului anterior $\rightarrow$ min $f[-2,0] = -21$
max $f[-2,0] = 18$

$\Rightarrow f[-2,0] = [-21,-18]$

Prin reuniunea celor 2 intervale $\Rightarrow f[-3,0] = [-28,-18]$

$f^{-1}[-8,8]$

Pentru prima ramură $f(x) < -21 \Rightarrow x \notin (-\infty,-2)$

Comparăm -8 și 8 cu val lui f când $x \ge -2$

$-8 \le 3x^2+6x-18 \le 8 \quad |+8$

$0 \le 3x^2+6x-10 \le 16$

I $\quad 3x^2+6x-10 \ge 0$

$D = 36+120 = 156$

$x_{1,2} = \dfrac{-6 \pm 2\sqrt{39}}{6}$

$x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{39}}{3}$

Obs că $x_1 < -2$

x	-2		$x_1 = \dfrac{-3+\sqrt{39}}{3}$	
$f(x)$	$- - -$		0	$+ + + +$

$f(-2) = 12-12-10 = -10$

$x \in \left[\dfrac{-3+\sqrt{39}}{3}, \infty\right)$

II $\quad 3x^2+6x-26 \le 0$

$D = 36+12\cdot 26 = 348$

$x_{1,2} = \dfrac{-6 \pm 2\sqrt{87}}{6}$

$x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{87}}{3}$

Obs că $x_2 < -2$

x	-2		$x_2 = \dfrac{-3+\sqrt{87}}{3}$	
$f(x)$	$- - -$		0	$+ + + +$

$f(-2) = 12-12-26$

$x \in \left[-2, \dfrac{-3+\sqrt{87}}{3}\right)$

Soluția se obține prin intersectarea celor 2 intervale

$x \in \left[\dfrac{-3+\sqrt{39}}{3}, \dfrac{-3+\sqrt{87}}{3}\right]$

1. $f : (\mathbb{Z}_8,+) \to (\mathbb{Z}_8,+)$ $f \to$ morfisme

Știm că numărul de morfisme de la $(\mathbb{Z}_m,+) \to (\mathbb{Z}_n,+)$ $= (m,n)$ (cel mai mare div comun)

$(8,8)=8 \Rightarrow \exists$ 8 morfisme de forma: $a\hat{u}$

$\frac{8}{(8,8)} \mid a.$ $f(\hat{u}) = a\hat{u}$

$\Rightarrow a \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

Pentru ca ele să fie injective

$\Rightarrow f(\hat{u}_1) = f(\hat{u}_2)$ numai când $\hat{u}_1 = \hat{u}_2$

$\operatorname{Im} \mathbb{Z}_8 : \hat{x} \in \{\hat{0}, \hat{1} \dots \hat{7}\}$

$\{\hat{a}\hat{x} \mid \hat{x} \in \mathbb{Z}_8\} \to \langle \hat{a} \rangle$ este egal cu $\mathbb{Z}_8$ dacă $(\hat{a}, m) = 1$

$\Rightarrow \hat{a} \in \{\hat{1}, \hat{3}, \hat{5}, \hat{7}\}$

8. $m \equiv 3 \pmod 5$
$m \equiv 2 \pmod 7$
$m \equiv 8 \pmod 9$

$(5,7,9)=1$

Putem aplica algoritmul de la lema chineză a resturilor

$a_1 = 3$ $m_1 = 5$
$a_2 = 2$ $m_2 = 7$
$a_3 = 8$ $m_3 = 9$

$N = m_1 m_2 m_3 = 5 \cdot 7 \cdot 9$

$N_1 = \frac{N}{m_1} = 7 \cdot 9 = 63$

$N_2 = \frac{N}{m_2} = 5 \cdot 9 = 45$

$N_3 = \frac{N}{m_3} = 5 \cdot 7 = 35$

$N_1 x_1 \equiv 1 \pmod{m_1}$ $63 x_1 \equiv 1 \pmod 5$

$21 \cdot 3 x_1 \equiv 1 \pmod 5$

$\equiv 1 \pmod 5$

$\Rightarrow x_1 = 2(5)$ $3x_1 \equiv 1 \pmod 5$

$m - k \cdot m$ Dimostrazione $m \to km$

$N_2 x_2 \equiv 1 (m_2) \Rightarrow \underbrace{45}_{\underbrace{15 \cdot 3}_{\equiv 1 \bmod 7}} x_2 \equiv 1 (7) \Rightarrow 3x_2 \equiv 1 (7)$

$\Rightarrow x_2 \equiv 5 (7)$

$N_3 x_3 \equiv 1 (m_3) \Rightarrow \underbrace{35}_{(36-1)} x_3 \equiv 1 (9) \Rightarrow -x_3 \equiv 1 (9)$

$\Rightarrow x_3 \equiv 8$

$m = a_1 N_1 x_1 + a_2 N_2 x_2 + a_3 N_3 x_3$

$= 3 \cdot 63 \cdot 2 + 2 \cdot 45 \cdot 5 + 8 \cdot 35 \cdot 8 = 3068$

$N = 5 \cdot 7 \cdot 9 = 315$

Calc $3068 \bmod 315 \equiv 233 (315)$

$\Rightarrow$ Sol sistema è 233