Poseturi şi morfisme de poseturi

SEMINAR DE LOGICĂ MATEMATICĂ ŞI COMPUTAŢIONALĂ

Claudia MUREŞAN
c.muresan@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro, claudia.muresan@unibuc.ro
Universitatea din Bucureşti, Facultatea de Matematică şi Informatică

Semestrul I, 2021-2022

Să vedem de ce putem aplica **principiul dualităţii pentru poseturi** şi pentru proprietăţi în care intervin morfisme de poseturi, ca în exerciţiul următor.

Obs.: Fie $\mathcal{A}=(A,\leq)$ şi $\mathcal{B}=(B,\sqsubseteq)$ poseturi, $\mathcal{L}=(L,\vee,\wedge,\leq)$ şi $\mathcal{M}=(M,\sqcup,\sqcap,\sqsubseteq)$ latici, iar $\mathcal{N}=(N,\vee,\wedge,\leq,0,1)$ şi $\mathcal{P}=(P,\sqcup,\sqcap,\sqsubseteq,\bot,\top)$ latici mărginite. Fie $f:A\to B$, $g:L\to M$ şi $h:N\to P$. Atunci au loc echivalenţele:

- f este morfism de poseturi între $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ $\Leftrightarrow$ f este morfism de poseturi între dualele $(A,\geq)$ şi $(B,\sqsupseteq)$ ale lui $\mathcal{A}$ şi, respectiv, $\mathcal{B}$;

prin urmare, dacă f este bijectivă, atunci aceeaşi echivalenţă este valabilă pentru inversa $f^{-1}:B\to A$ a lui f, aşadar are loc şi:

- f este izomorfism de poseturi între $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ $\Leftrightarrow$ f este izomorfism de poseturi între dualele $(A,\geq)$ şi $(B,\sqsupseteq)$ ale lui $\mathcal{A}$ şi, respectiv, $\mathcal{B}$;
- g este morfism de latici între $\mathcal{L}$ şi $\mathcal{M}$ $\Leftrightarrow$ g este morfism de latici între dualele $(L,\wedge,\vee,\geq)$ şi $(M,\sqcap,\sqcup,\sqsupseteq)$ ale

lui $\mathcal{L}$ și, respectiv, $\mathcal{M}$;
prin urmare, aceeași echivalență are loc și pentru izomorfismele de latici, întrucât izomorfismele de latici coincid cu morfismele bijective de latici;

- h este morfism de latici mărginite între $\mathcal{N}$ și $\mathcal{P}$ $\Leftrightarrow$ h este morfism de latici mărginite între dualele $(N, \wedge, \vee, \geq, 1, 0)$ și $(P, \sqcap, \sqcup, \sqsupseteq, \top, \bot)$ ale lui $\mathcal{N}$ și, respectiv, $\mathcal{P}$;
prin urmare, aceeași echivalență este satisfăcută și de izomorfismele de latici mărginite, întrucât acestea coincid cu morfismele bijective de latici mărginite.

Vom vedea că aceeași echivalență este valabilă și pentru algebre Boole și morfisme de algebre Boole.

Toate echivalențele de mai sus rezultă direct din definițiile acestor tipuri de morfisme.

Aceste echivalențe ne permit ca, în exercițiile următoare, să aplicăm Principiul dualității pentru

<u>poseturi</u>, respectiv <u>poseturi mărginite</u>, unor proprietăți în care apar morfisme sau izomorfisme de poseturi, pentru că echivalențele de mai sus arată că, în dualul unui enunț în care apare un morfism sau izomorfism f de poseturi, f rămâne neschimbat. În același mod pot fi aplicate <u>Principiul dualității pentru latici</u>, respectiv <u>latici mărginite</u>, precum și <u>Principiul dualității pentru algebre Boole</u>, pe care îl vom vedea în unul dintre cursurile următoare.

<u>Exerc.:</u> Să se arate că orice funcție izotonă păstrează minimele și maximele arbitrare. Mai precis, să se demonstreze că: dacă $(A, \leq)$ și $(B, \sqsubseteq)$ sunt poseturi, iar $f : A \to B$ este

o funcție izotonă (i.e. un morfism de poseturi) (între aceste poseturi)), și $X \subseteq A$, $Y \subseteq A$, astfel încât există în posetul $(A, \sqsubseteq)$ $\min(X)$ și $\max(Y)$, atunci există în posetul $(B, \sqsubseteq)$:

$$\min(f(X)) = f(\min(X))$$

și

$$\max(f(Y)) = f(\max(Y)).$$

REZOLVARE:

$$\min(X) \in X \Rightarrow \begin{cases} X \neq \emptyset \ (\xRightarrow{X \subseteq A} A \neq \emptyset) \\ \text{și} \\ f(\min(X)) \in f(X) \Rightarrow \end{cases}$$

$\Rightarrow f(X) \neq \emptyset$ ($\Rightarrow B \neq \emptyset$, fapt care rezultă și din $A \neq \emptyset$ și faptul că există $f : A \to B$).

(Axioma alegerii ne permite, acum, să alegem un element (arbitrar) al lui $f(X)$.)

Fie $b \in f(X)$. $\Leftrightarrow (\exists\, a \in X)(b = f(a))$.

$a \in X \Rightarrow \min(X) \sqsubseteq a \xRightarrow[\text{izotonă}]{f \text{ e}} f(\min(X)) \sqsubseteq f(a)$.

$\Rightarrow f(\min(X)) \sqsubseteq b$.

b este un element arbitrar al lui $f(X)$

$\Rightarrow f(\min(X))$ este un minorant pentru $f(X)$.

Dar $f(\min(X)) \in f(X)$.

$\Rightarrow f(\min(X)) = \min(f(X))$.

Prin dualitate $\Rightarrow f(\max(Y)) = \max(f(Y))$.

De multe ori, ca în redactarea următoare pentru rezolvarea aceluiaşi exerciţiu ca mai sus, vom folosi definiţia imaginii unei mulţimi printr-o funcţie fără a o scrie explicit:

<u>Exerc.:</u> Dem. că orice fct. izotonă păstrează (comută cu) minimele şi maximele arbitrare.

REZOLVARE:

Fie $(A, \sqsubseteq)$ şi $(B, \sqsubseteq)$ două poseturi, $f : A \rightarrow B$ o fct. izotonă, şi $X \subseteq A$, $Y \subseteq A$ a.î. $\exists$ în $(A, \sqsubseteq)$ $\min(X)$ şi $\max(Y)$. $\Rightarrow X \neq \emptyset$ ($\Rightarrow f(X) \neq \emptyset$) şi $Y \neq \emptyset$ ($\Rightarrow f(Y) \neq \emptyset$.) $\Rightarrow A \neq \emptyset \Rightarrow B \neq \emptyset$, pt. că $\nexists$ fct. de la o mulţime nevidă la $\emptyset$.

$\min(X) \in X. \Rightarrow f(\min(X)) \in f(X)$.

$(\forall x \in X)(\min(X) \sqsubseteq x) \xRightarrow{f \text{ izotonă}} (\forall x \in X)(f(\min(X)) \sqsubseteq f(x))$, deci $f(\min(X))$ este minorant pt. $\{f(x) \mid x \in X\} = f(X)$

$\Rightarrow \exists$ în $(B, \sqsubseteq)$ $\min(f(X)) = f(\min(X))$, pt. că un minorant care aparţine mulţimii pe care o minorează este chiar minimul acelei mulţimi.

$\max(Y) \in Y \Rightarrow f(\max(Y)) \in f(Y)$.

$(\forall\, x \in Y)\,(x \leq \max(Y)) \xrightarrow{f \to \text{izotonă}} (\forall\, x \in Y)\,(f(x) \sqsubseteq f(\max(Y))) \Rightarrow f(\max(Y))$ este majorant pt. $\{f(x) \mid x \in Y\} = f(Y)$

$\Rightarrow \exists$ în $(B, \sqsubseteq)$ $\max(f(Y)) = f(\max(Y))$, pt. că un majorant care aparține mulțimii pe care o majorează este chiar maximul acelei mulțimi, sau: prin dualitate, din egalitatea pt minime $\Rightarrow$ această egalitate pt maxime.

<u>*Observație:*</u> $(L, \leq) \to$ poset; $L \neq \emptyset$, $a, b \in L$. Atunci:

(1) $b < a \Rightarrow a \nleq b$, și: $a \leq b \Rightarrow b \nless a$), (analog

(2) dc $(L, \leq)$ e lanț, atunci:

$b < a \Leftrightarrow a \nleq b$. (analog și: $a \leq b \Leftrightarrow b \nless a$).

Dem.:

(1). Pp. $b < a$. $\overset{(< \overset{\text{def}}{=} \leq - \Delta_L)}{\Leftrightarrow}$ $\begin{cases} b \leq a \\ \text{și} \\ b \neq a \end{cases}$

Pp., abs. $a \leq b$. $\Rightarrow$ $\xRightarrow{\leq \to \text{antisim.}} a = b$

$\Rightarrow a = b$ și $a \neq b$. Abs. $\Rightarrow a \nleq b$

(2) Pp. că $(L, \leq)$ e lanț.

"$\Rightarrow$": din (1).

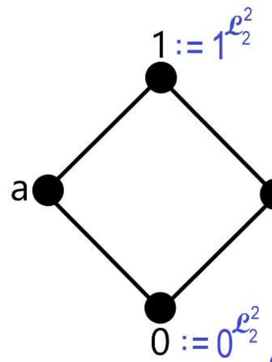
"$\Leftarrow$": Pp. $a \nleq b \Rightarrow b \leq a$,

$\Updownarrow (\leq \, = \, < \cup \, \Delta_L)$

$a \nleq b$ și $a \neq b$. $\overset{(< \, = \, \leq - \Delta_L)}{\Rightarrow} b < a$.

Exerciţiu: Să se determine toate funcţiile izotone de la romb la lanţul cu exact 2 elemente (vedeţi mai jos diagramele Hasse ale acestor poseturi, care sunt chiar algebre Boole; vom vedea că rombul este pătratul lanţului cu 2 elemente).

Rezolvare:



$\mathcal{L}_2^2$ (rombul)

0 şi 1 sunt notaţiile uzuale pentru minimul, respectiv maximul unui poset mărginit (adică poset cu minim şi maxim), numite şi *primul element*, respectiv *ultimul element* al posetului; chiar dacă nu le ataşăm aceşti indici superiori care indică posetul din care fac parte, nu înseamnă că aceste elemente ar fi comune rombului şi lanţului cu 2 elemente, adică nu înseamnă că avem $0^{\mathcal{L}_2^2} = 0^{\mathcal{L}_2}$ sau $1^{\mathcal{L}_2^2} = 1^{\mathcal{L}_2}$.

$\mathcal{L}_2$(lanțul cu 2 elemente)

Vom folosi şi în continuare aceste notaţii: 0 pentru minimul oricărui poset care are minim şi 1 pentru maximul oricărui poset care are maxim.

Pentru că aceasta e notaţia uzuală pentru relaţia de ordine a unei algebre Boole, vom nota cu ≤ relaţia de ordine a fiecăruia dintre aceste poseturi.

Fie $f : \mathcal{L}_2^2 \longrightarrow \mathcal{L}_2$. *Conform definiției unei funcții izotone,* $f : \mathcal{L}_2^2 \longrightarrow \mathcal{L}_2$ e izotonă *ddacă* $(\forall\, x, y \in \mathcal{L}_2^2)\ (x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$

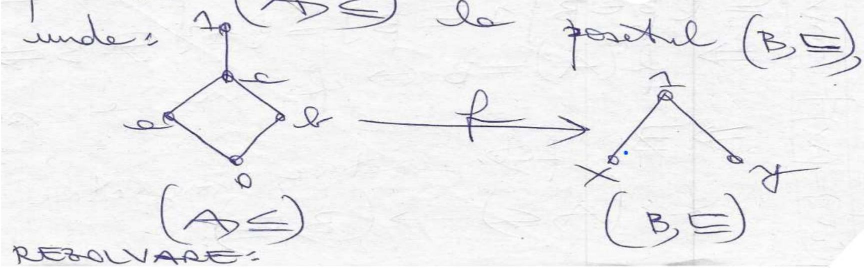
În $\mathcal{L}_2^2$: $0 \leq a \leq 1$, $0 \leq b \leq 1$. *Mai mult, relația de succesiune a posetului finit* $\mathcal{L}_2^2$ *conține doar perechile (0,a), (0,b), (a,1), (b,1).*

Așadar: $\Rightarrow [f : \mathcal{L}_2^2 \longrightarrow \mathcal{L}_2$ e izotonă $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(0) \leq f(a) \leq f(1)$, $f(0) \leq f(b) \leq f(1)]$.

Iar valorile acestei funcţii aparţin lanţului cu 2 elemente, adică f(0), f(a), f(b), f(1) ∈ {0,1}. Aşadar avem următoarele valori posibile pentru aceste triplete: (f(0),f(a),f(1)), (f(0),f(b),f(1)) ∈ {(0,0,0), (0,0,1), (0,1,1), (1,1,1)}. Prin urmare, funcţiile izotone de la romb la lanţul cu 2 elemente sunt:

x	0	a	b	1
$f(x)$	0	0	0	0
	0	0	0	1
	0	0	1	1
	0	1	0	1
	0	1	1	1
	1	1	1	1

Exerciţiu: Să se determine toate funcţiile izotone injective şi toate funcţiile izotone surjective de la posetul $(A,\leq)$ la posetul $(B,\sqsubseteq)$, unde:



REZOLVARE:

$|A| = 5 > 3 = |B| \Rightarrow \nexists$ fct. injective $f : A \to B \Rightarrow \nexists$ fct. izotone inj. $f : (A,\leq) \to (B,\sqsubseteq)$.

Pentru cealaltă cerinţă a exerciţiului, putem observa faptul că posetul A are minimul 0, care, conform unui exerciţiu de mai sus, va fi dus de orice funcţie izotonă f de la A la B în min(f(A)). Dacă această funcţie este şi surjectivă, atunci f(A)=B. Dar posetul B nu are minim.

Fie $f : (A,\leq) \to (B,\sqsubseteq)$, f izotonă. $(\forall \alpha \in A)(0 \leq \alpha) \Rightarrow (\forall \alpha \in A)(f(0) \sqsubseteq f(\alpha)) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = f(A) \subseteq \{\beta \in B \mid f(0) \sqsubseteq \beta\}$. $(*)$

Caz 1: $f(0) = x \overset{(*)}{\Rightarrow} f(A) \subseteq \{\beta \in B \mid x \sqsubseteq \beta\} = \{x, 1\} \subsetneq B \Rightarrow f(A) \neq B \Leftrightarrow f$ nu e surj.

Caz 2: $f(0) = y \overset{(*)}{\Rightarrow} f(A) \subseteq \{\beta \in B \mid y \sqsubseteq \beta\} = \{y, 1\} \subsetneq B \Rightarrow f(A) \neq B \Leftrightarrow f$ nu e surj.

Caz 3: $f(0) = 1 \overset{(*)}{\Rightarrow} f(A) \subseteq \{\beta \in B \mid 1 \sqsubseteq \beta\} = \{1\} \subsetneq B \Rightarrow f(A) \neq B \Leftrightarrow f$ nu e surj.

$\Rightarrow \nexists$ fct. izotone surjective $f : (A,\leq) \to (B,\sqsubseteq)$.

Observaţie: Orice funcţie injectivă izotonă păstrează ordinea strictă.

Demonstraţie: Fie (A,≤) şi (B,≤) două poseturi (folosim notaţia uzuală ≤ pentru relaţia de ordine a fiecărui poset, ceea ce sigur că nu înseamnă că poseturile coincid), iar f : A→B o funcţie izotonă (*subînţeles:* între aceste poseturi, adică raportat la aceste relaţii de ordine de pe A, respectiv B).

Dacă a,u∈A sunt astfel încât a < u, adică a ≤ u şi a ≠ u, atunci:
cum f e izotonă, din faptul că a ≤ u rezultă că f(a) ≤ f(u);
cum f e injectivă, din faptul că a ≠ u rezultă că f(a) ≠ f(u);

aşadar f(a) < f(u).

Exercițiu:

Fie $(L,\leq)$ un lanț și $(M,\sqsubseteq)$ un poset, cu $L\neq\emptyset$ și $M\neq\emptyset$, iar $f:L\to M$ o funcție izotonă sau antitonă (între $(L,\leq)$ și $(M,\sqsubseteq)$, i.e. raportat la $\leq$ și $\sqsubseteq$). Dem. că $(f(L),\sqsubseteq)$ este lanț (ca subposet al lui $(M,\sqsubseteq)$, i.e. $f(L)$ înzestrat cu relația de ordine $\sqsubseteq\cap(f(L))^2=$ $=\{(x,y)\mid x,y\in f(L), x\sqsubseteq y\}$, unde $\sqsubseteq$ e relația de ordine de pe M; cu notația uzuală, $\sqsubseteq\cap(f(L))^2\overset{\text{not.}}{=}\sqsubseteq$).

REZOLVARE: Fie $x,y\in f(L)$. $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(\exists\, a,b\in L)(f(a)=x$ și $f(b)=$
$=y)$.

$(L,\leq)$ e lanţ, $a,b\in L$, $\Rightarrow a\leq b$ sau $b\leq a$. (*)

Caz 1: dacă f e izotonă, $\overset{(*)}{\Rightarrow}$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} f(a)\sqsubseteq f(b)$ sau $f(b)\sqsubseteq f(a) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\sqsubseteq y$ sau $y\sqsubseteq x$.

Caz 2: dacă f e antitonă $\Rightarrow$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} f(b)\sqsubseteq f(a)$ sau $f(a)\sqsubseteq f(b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y\sqsubseteq x$ sau $x\sqsubseteq y$.

Aşadar, în ambele cazuri $\Rightarrow$

$\Rightarrow x\sqsubseteq y$ sau $y\sqsubseteq x$, $x,y\in f(L)$, arbitrare $\Rightarrow$

$\Rightarrow (f(L),\sqsubseteq)$ este lanţ.

Desigur, avem, mai general:

Observaţie: Imaginea unui lanţ printr-o funcţie izotonă sau antitonă al cărei domeniu include acel lanţ este un lanţ.

Demonstraţie: Fie $(A,\leq)$ şi $(B,\leq)$ două poseturi, $f : A\rightarrow B$ o funcţie izotonă, iar $g : A\rightarrow B$ o funcţie antitonă.

Fie $L\subseteq A$. În modul uzual, restricţia $\leq\cap L^2$ la L a relaţiei de ordine $\leq$ de pe A o notez tot cu $\leq$. Presupunem că $(L,\leq)$ este lanţ, adică oricare două elemente ale lui L sunt comparabile în posetul $(L,\leq)$: pentru orice $x,y\in L$, $x\leq y$ sau $y\leq x$.

Desigur, posetul vid: $(\Phi,\leq=\Phi)$ este, în mod trivial, un lanţ: cum enunţul $x,y\in\Phi$ este fals pentru orice pereche de elemente x,y, rezultă că implicaţia $x,y\in\Phi\Rightarrow(x\leq y$ sau $y\leq x)$ este adevărată pentru orice pereche de elemente x,y, aşadar enunţul următor este adevărat: $(\forall x)\,(\forall y)\,[x,y\in\Phi\Rightarrow(x\leq y$ sau $y\leq x)]$, scris prescurtat: $(\forall x,y)\,[x,y\in\Phi\Rightarrow(x\leq y$ sau $y\leq x)]$, scris echivalent: $(\forall x,y\in\Phi)\,(x\leq y$ sau $y\leq x)$.

Dacă $L=\Phi$, atunci $f(L)=f(\Phi)=\Phi$ şi $g(L)=g(\Phi)=\Phi$, care, conform paragrafului anterior, este un lanţ (aici, submulţime total ordonată a mulţimii ordonate $(B,\leq)$).

Acum să presupunem că $L\neq\Phi$. Atunci $f(L)\neq\Phi$ şi $g(L)\neq\Phi$, aşadar axioma alegerii ne permite să considerăm elemente din aceste imagini ale lanţului L: fie $u,v\in f(L)$ şi $w,z\in g(L)$. Conform definiţiei imaginii (directe) printr-o funcţie, rezultă că există $a,b,c,d\in L$ astfel încât $u=f(a)$, $v=f(b)$, $w=g(c)$ şi $z=g(d)$.

Întrucât $(L,\leq)$ este lanţ, avem:
$a\leq b$ sau $b\leq a$; cum f e izotonă, rezultă că $f(a)\leq f(b)$ sau $f(b)\leq f(a)$, adică $u\leq v$ sau $v\leq u$;
$c\leq d$ sau $d\leq c$; cum g e antitonă, rezultă că $g(d)\leq g(c)$ sau $g(c)\leq g(d)$, adică $z\leq w$ sau $w\leq z$.

Aşadar oricare două elemente ale lui f(L) sunt comparabile în $(B,\leq)$, şi oricare două elemente ale lui g(L) sunt comparabile în $(B,\leq)$, adică subposeturile (i.e. submulţimile ordonate) $(f(L),\leq)$ şi $(g(L),\leq)$ ale lui $(B,\leq)$ sunt lanţuri, unde, ca mai sus, am notat: $(f(L),\leq) = (f(L),\leq\cap f(L)^2)$ şi $(g(L),\leq) = (g(L),\leq\cap g(L)^2)$.

Observaţie: Dacă inversa unei funcţii bijective izotone nu este izotonă, atunci această inversă duce o pereche de elemente comparabile în elemente incomparabile.

Demonstraţie: Fie $(A,\leq)$ şi $(B,\leq)$ două poseturi, $f : A\rightarrow B$ o funcţie bijectivă izotonă între aceste poseturi astfel încât inversa $f^{-1} : B\rightarrow A$ a lui f nu e izotonă, adică există $x,y\in B$ astfel încât $x\leq y$ în $(B,\leq)$, dar $f^{-1}(x)\nleq f^{-1}(y)$ în $(A,\leq)$, adică $f^{-1}(x)\nless f^{-1}(y)$ şi $f^{-1}(x)\neq f^{-1}(y)$ (ceea ce se obţine prin negarea disjuncţiei $f^{-1}(x)<f^{-1}(y)$ sau $f^{-1}(x)=f^{-1}(y)$, echivalentă cu $f^{-1}(x)\leq f^{-1}(y)$).

Dacă am avea $f^{-1}(y) < f^{-1}(x)$, atunci, cum f e izotonă şi injectivă, conform unei observaţii de mai sus ar rezulta că $y = f(f^{-1}(y)) < f(f^{-1}(x)) = x$; dar, conform unei alte observaţii de mai sus, $y < x$ implică $x\nleq y$, contrazicând alegerea lui x şi y.

Aşadar $f^{-1}(y)\nless f^{-1}(x)$. Deci avem $f^{-1}(x)\nless f^{-1}(y)$, $f^{-1}(y)\nless f^{-1}(x)$ şi $f^{-1}(x)\neq f^{-1}(y)$, prin urmare, transcriind ca mai sus: $f^{-1}(x)\nleq f^{-1}(y)$ şi $f^{-1}(y)\nleq f^{-1}(x)$, adică $f^{-1}(x)\parallel f^{-1}(y)$: $f^{-1}(x)$ şi $f^{-1}(y)$ sunt incomparabile în posetul $(A,\leq)$.

Demonstraţia de mai sus arată că acesta e singurul caz în care un morfism bijectiv de poseturi nu e izomorfism de poseturi: inversa unei funcţii izotone bijective niciodată nu inversează ordinea, ci poate doar să ducă perechi de elemente comparabile în elemente incomparabile, ca în exemplul din curs al funcţiei izotone bijective de la romb la lanţul cu 4 elemente. Prin urmare, dacă domeniul unei funcţii izotone bijective este lanţ, adică nu conţine perechi de elemente incomparabile, atunci acea funcţie are şi inversa izotonă, deci este izomorfism de poseturi – a se vedea următorul exerciţiu, precum şi observaţia care îl succede, care se aplică şi observaţiei anterioare.

Exercițiu: $(L,\leq)$ → lanț; $L\neq\emptyset$;

$(M,\sqsubseteq)$ → poset; $M\neq\emptyset$;

$f:(L,\leq)\to(M,\sqsubseteq)$, f → izotonă;

f → bijectivă.

Atunci: f^{-1} (inversa lui f) este izotonă (rezultă că $(M,\sqsubseteq)$ e lanț, cf unei obs. de mai sus),

(deci f este izomorfism de ordine (izomorfism de poseturi)).

REZOLVARE:

Fie $x,y\in M$, cu $x\sqsubseteq y$.

Presupunem prin absurd că $f^{-1}(x)\nleq f^{-1}(y)$. Cum $(L,\leq)$ → lanț, $f^{-1}(x)$ și $f^{-1}(y)$ *sunt comparabile, iar, conform presupunerii anterioare, nu pot fi egale, deci:*

$$\Rightarrow \begin{cases} f^{-1}(y)\leq f^{-1}(x) & (*) \\ \text{și} \\ f^{-1}(x)\neq f^{-1}(y) & (**) \end{cases}$$

$$(*) \xRightarrow{f\to\text{izotonă}} f(f^{-1}(y))\sqsubseteq f(f^{-1}(x)) \Leftrightarrow y\sqsubseteq x,\ \sqsubseteq\to\text{antisim.},\ x\sqsubseteq y$$

$$\Rightarrow x=y. \quad (1)$$

$$(**) \xRightarrow{f\to\text{injectivă}} f(f^{-1}(x))\neq f(f^{-1}(y)) \Leftrightarrow x\neq y. \quad (2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow \times \Rightarrow f^{-1}(x)\leq f^{-1}(y) \xRightarrow[x,y\to\text{arbitrare cu aceste proprietăți}]{x,y\in M,\ x\sqsubseteq y} f^{-1}\to\text{izotonă}.$$

Observație: În exercițiul anterior, surjectivitatea lui f nu intervine explicit, dar este necesar ca f să fie bijectivă pt. ca f^{-1} să existe.

Poseturi şi Latici

<u>Exerc.:</u> $(A,\leq) \to$ poset, $A \neq \emptyset$; $X \subseteq Y \subseteq A$, a.î. $\exists\ inf(X)$, $inf(Y)$, $sup(X)$ şi $sup(Y)$ în $(A,\leq)$. Să se dem. că:

$$\begin{cases} sup(X) \leq sup(Y) \\ inf(X) \geq inf(Y). \end{cases}$$

(propr. pt. inf şi sup pot fi scrise separat) $(\geq = \leq^{-1})$.

REZOLVARE:

<u>Caz 1:</u> $X = \emptyset$. $\Rightarrow \exists\ inf(\emptyset), sup(\emptyset)$ în $(A,\leq)$ $\Rightarrow \begin{cases} \exists\ max(A) = inf(\emptyset) = inf(X) \\ \exists\ min(A) = sup(\emptyset) = sup(X). \end{cases}$

$inf(Y), sup(Y) \in A$.

$$\Rightarrow \begin{cases} inf(Y) \leq max(A) = inf(\emptyset) = inf(X) \\ sup(Y) \geq min(A) = sup(\emptyset) = sup(X). \end{cases}$$

<u>Caz 2:</u> $X \neq \emptyset$.

Fie $a \in X$, (de, conform axiomei alegerii) $\xrightarrow{(X\subseteq Y)} a \in Y \Rightarrow \begin{cases} a \geq inf(Y) \\ a \leq sup(Y) \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} inf(Y) \text{ e minorant pt. } X \Rightarrow \xrightarrow{(def.\ inf(X))} inf(Y) \leq inf(X); \\ sup(Y) \text{ e majorant pt. } X \Rightarrow \xrightarrow{(def.\ sup(X))} sup(Y) \geq sup(X). \end{cases}$$

Observaţie: Proprietatea pentru infimumuri din exerciţiul anterior este independentă de cea pentru supremumuri, adică are loc: pentru orice poset nevid (A,≤) şi orice X⊆Y⊆A:

- dacă există în (A,≤) inf(X) şi inf(Y), atunci inf(X) ≥ inf(Y);
- dacă există în (A,≤) sup(X) şi sup(Y), atunci sup(X) ≤ sup(Y).

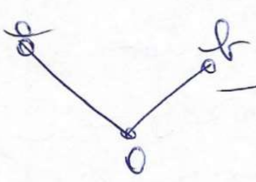
Obs.: $\nexists \min(\emptyset)$ și $\nexists \max(\emptyset)$ în niciun poset, pt. că $\forall$ o mulț. M, $\min(M) \in M$ și $\max(M) \in M$, dc. $\exists$.

Consecință: Dc. o submulțime a unui poset nu are majoranți, at. nu are supremum, pt. că $\nexists$ minimul mulțimii majoranților ei, iar, dacă nu are minoranți, atunci nu are infimum, pt. că $\nexists$ maximul mulțimii minoranților săi.

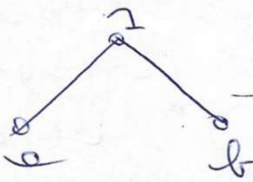
Ex. de poseturi finite care nu sunt latici, date prin diagramele lor Hasse:

$\to \{a,b\}$ nu are nici majoranți, nici minoranți, deci $\nexists \sup\{a,b\}$ și $\nexists \inf\{a,b\}$ în acest poset.

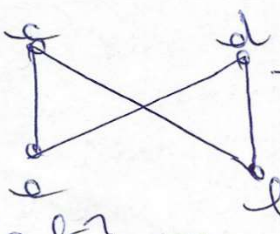
$((\{a,b\}, \Delta_{\{a,b\}})$: antilanțul cu 2 elemente$)$



$\to \{a,b\}$ nu are majoranți, deci $\nexists \sup\{a,b\}$ în acest poset.



$\to \{a,b\}$ nu are minoranți, deci $\nexists \inf\{a,b\}$ în acest poset.

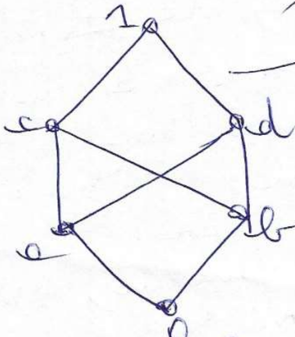


$\to$ Mult. majoranților lui $\{a,b\}$ este $\{c,d\}$, care nu are minim, deci $\nexists \sup\{a,b\}$.

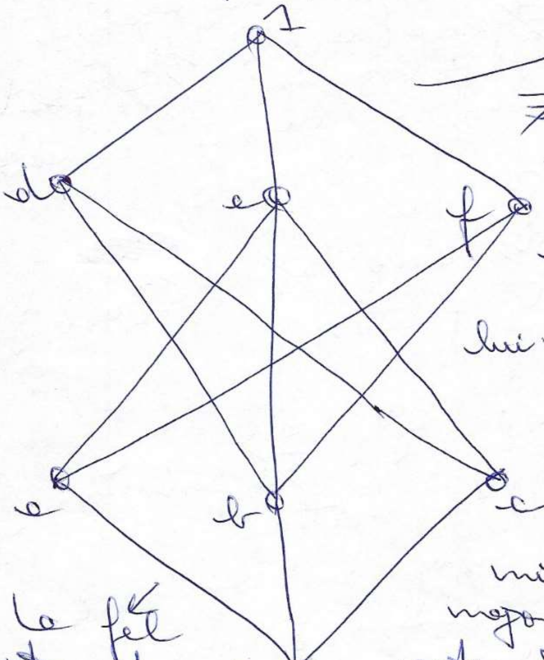
$\{a,b\}$ nu are minoranți, deci $\nexists \inf\{a,b\}$.

Analog $\nexists \inf\{c,d\}$ și $\nexists \sup\{c,d\}$.
Am folosit faptul că minimul unei mulțimi aparține acelei mulțimi. (La fel și maximul.)

$c \nleq d$, deci $c \neq \min\{c,d\}$
$d \nleq c$, deci $d \neq \min\{c,d\}$ $\Rightarrow \nexists \min\{c,d\}$



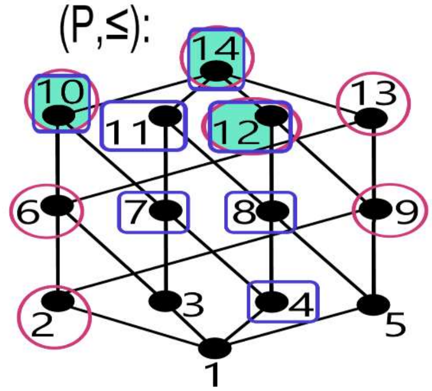
$\rightarrow$ 0 este unicul minorant al lui $\{a,b\}$, iar $\max\{0\}=0$, deci $\inf\{a,b\}=0$. Analog $\sup\{c,d\}=1$. Mulțimea majoranților lui $\{a,b\}$ este $\{c,d,1\}$, care nu este minim (pt. că $c<1$, deci $1 \nleq c$, cf. antisimetriei lui $\leq$, iar $c \nleq d$, $d \nleq c$), prin urmare $\nexists \sup\{a,b\}$. Analog $\nexists \inf\{c,d\}$.

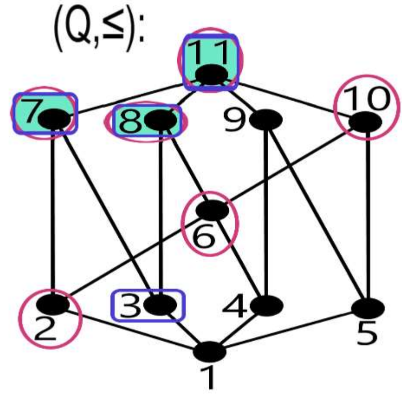


$\rightarrow \nexists \sup\{a,b\}$, $\nexists \sup\{b,c\}$, $\nexists \sup\{a,c\}$, dar $\exists \sup\{a,b,c\}=e$, pt. că: mulț. majoranților lui
$\{a,b\}$ este $\{e,f,1\}$
$\{b,c\}$ este $\{d,e,1\}$
$\{a,c\}$ este $\{d,e,f,1\}$,
și niciuna dintre aceste mulțimi nu are minim, dar mulțimea majoranților lui $\{a,b,c\}$ este $\{e,1\}$, și $\min\{e,1\}=e$.

La fel pt. d,e,f și infimumuri.

Exerciţiu: Să se demonstreze că următoarele poseturi nu sunt latici:





Am reprezentat, pe aceste diagrame Hasse, şi majoranţii perechilor de elemente considerate în rezolvarea de mai jos: prin ovale roz pentru un membru al fiecărei perechi şi prin chenare indigo pentru celălalt, astfel că majoranţii comuni pentru membrii fiecărei perechi sunt şi încercuiţi în roz, şi încadraţi în chenar indigo, apoi marcaţi prin culoare de fundal.

Nu toate intersecţiile de muchii din aceste diagrame Hasse sunt noduri, ci doar cele marcate prin cerculeţe negre.

Cu privire la numerotarea nodurilor din aceste diagrame: putem privi elementele acestor poseturi ca fiind indexate de aceste numere naturale: P = $\{x_i \mid i \in \overline{1,14}\}$ şi Q = $\{y_i \mid i \in \overline{1,11}\}$ sau ca fiind chiar aceste numere naturale: P = $\overline{1,14}$ şi Q =$\overline{1,11}$, dar astfel încât relaţiile de ordine pe aceste mulţimi nu sunt date de relaţia de ordine naturală pe mulţimea numerelor naturale (care este o ordine totală şi chiar o ordine bună) restricţionată la mulţimile $\overline{1,14}$, respectiv $\overline{1,11}$, întrucât aceste poseturi nu sunt lanţuri.

Rezolvare: Considerăm P = $\overline{1,14}$ şi Q =$\overline{1,11}$.

În posetul (P,≤):

majoranţii lui 2 sunt: 2, 6, 9, 10, 12, 13, 14;

majoranţii lui 4 sunt: 4, 7, 8, 10, 11, 12, 14;

- aşadar majoranţii perechii {2,4} sunt: 10, 12, 14;

10 || 12, adică 10 $\nleq$ 12 şi 12 $\nleq$ 10;

14 > 10, prin urmare 14 $\nleq$ 10;

14 > 12, prin urmare 14 $\nleq$ 12;

- deci nici 10, nici 12, nici 14 nu este minimul mulţimii {10, 12, 14}, aşadar această mulţime a majoranţilor perechii {2,4} nu are minim, deci perechea {2,4} nu are supremum în posetul (P,≤).

În posetul (Q,≤):

majoranţii lui 2 sunt: 2, 6, 7, 8, 10, 11;

majoranţii lui 3 sunt: 3, 7, 8, 11;

- aşadar majoranţii perechii {2,3} sunt: 7, 8, 11;

7 || 8, adică 7 $\nleq$ 8 şi 8 $\nleq$ 7;

11 > 7, prin urmare 11 $\nleq$ 7;

11 > 8, prin urmare 11 $\nleq$ 8;

- deci nici 7, nici 8, nici 11 nu este minimul mulţimii {7, 8, 11}, aşadar această mulţime a majoranţilor perechii {2,3} nu are minim, deci perechea {2,3} nu are supremum în posetul (Q,≤).

Putem observa că poseturile (P,≤) şi (Q,≤) sunt autoduale, adică izomorfe cu dualele lor, şi, luând imaginile perechilor de mai sus prin izomorfismele între aceste poseturi şi dualele lor, obţinem că perechea {11,13} nu are infimum în posetul (P,≤), iar perechea {9,10} nu are infimum în posetul (Q,≤).

Exerc.: Să se demonstreze că în posetul părților unei mulțimi, infimumurile și supremumurile arbitrare coincid cu intersecțiile și, respectiv, reuniunile. Mai precis: pentru orice mulțime T și orice $X \subseteq \mathcal{P}(T)$, în posetul $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$ au loc: $\begin{cases} \inf(X) = \bigcap\limits_{A \in X} A \\ \text{și} \\ \sup(X) = \bigcup\limits_{A \in X} A. \end{cases}$

REZOLVARE:

Fie T o mulțime și $X \subseteq \mathcal{P}(T)$. În posetul $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$:

$$\left.\begin{cases} \text{există } \min(\mathcal{P}(T)) = \emptyset \\ \text{și există } \max(\mathcal{P}(T)) = T, \end{cases}\right\} \xRightarrow{\text{(v. cursul)}} \text{în posetul } (\mathcal{P}(T), \subseteq): \begin{cases} \text{există } \sup(\emptyset) = \emptyset \text{ și} \\ \text{există } \inf(\emptyset) = T. \end{cases}$$

Caz 1: $X = \emptyset$. Atunci au loc:

$$\begin{cases} \bigcup\limits_{A \in X} A = \bigcup\limits_{A \in \emptyset} A \overset{\text{(v. cursul)}}{=\!=\!=} \emptyset = \sup(\emptyset) = \sup(X) \\ \text{și } \bigcap\limits_{A \in X} A = \bigcap\limits_{A \in \emptyset} A \overset{\text{(v. cursul)}}{=\!=\!=} T = \inf(\emptyset) = \inf(X). \end{cases}$$

Caz 2: $X \neq \emptyset$. $\xRightarrow{\text{(v. cursul)}}$ pt. orice $M \in X$, au loc incluziunile:

$M \subseteq \bigcup_{A \in X} A$ şi $M \supseteq \bigcap_{A \in X} A$, $\Rightarrow \bigcup_{A \in X} A$ este majorant pt. X, iar $\bigcap_{A \in X} A$ este minorant pt. X. $(*)$

Fie $N, Q \in \mathcal{P}(T)$, astfel încât N este majorant pt. X, iar Q este minorant pt. X în $(\mathcal{P}(T), \subseteq) \Leftrightarrow \begin{cases} (\forall A \in X)(A \subseteq N) \\ \text{şi} \\ (\forall A \in X)(A \supseteq Q) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \bigcup_{A \in X} A \subseteq N$ şi $\bigcap_{A \in X} A \supseteq Q$. $(**)$

$(*), (**) \xrightarrow[\text{şi sup}]{\text{(def. inf.}} \begin{cases} \bigcup_{A \in X} A = \sup(X) \text{ şi} \\ \bigcap_{A \in X} A = \inf(X) \text{ în} \end{cases}$

posetul $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$.

Obs.: În exerc. anterior, nu putem dem., de exemplu, că $\bigcap_{A \in X} A = \inf(X)$, şi apoi să invocăm Principiul Dualităţii pt. a obţine egalitatea $\bigcup_{A \in X} A = \sup(X)$, întrucât abia după ce demonstrăm ambele egalităţi putem conchide că intersecţiile şi reuniunile arbitrare sunt duale unele altora, fiind infimumuri şi, respectiv, supremumuri în posetul $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$, nu înainte.

<u>Obs.:</u> Cum putem proceda pt. a deduce, pt. orice $X \subseteq T \in Set$, una dintre aceste egalități din cealaltă:

$$\begin{cases} \inf(X) = \underbrace{\bigcap_{(A \in X)} A}_{\overset{\text{not}}{=} \bigcap X} \text{ în posetul } (\mathcal{P}(T), \subseteq), \\ \sup(X) = \underbrace{\bigcup_{(A \in X)} A}_{\overset{\text{not}}{=} \bigcup X} \text{ în posetul } (\mathcal{P}(T), \subseteq) \text{ ?} \end{cases}$$

Putem observa faptul că acest poset este AUTODUAL, adică izomorf cu dualul său: $(\mathcal{P}(T), \supseteq)$, cu următorul izomorfism de poseturi:

$f : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T)$, definită prin: $(\forall A \in \mathcal{P}(T)) \left(f(A) = \underbrace{\overbrace{T \setminus A}^{\in \mathcal{P}(T)}}_{\overset{\text{not.}}{=} \overline{A}} \right)$.

Așadar am notat, pentru fiecare $A \in \mathcal{P}(T)$, $\overline{A} := T \setminus A$, și am definit $f : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T)$ prin: $(\forall A \in \mathcal{P}(T)) \, (f(A) := \overline{A})$.

Să demonstrăm că f este izomorfism de poseturi de la $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$ la $(\mathcal{P}(T), \supseteq)$: pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$, dacă $A \subseteq B \Rightarrow$

$$\left.\Rightarrow \underbrace{T \setminus A}_{\substack{\| \\ \overline{A} \\ \| \\ f(A)}} \supseteq \underbrace{T \setminus B}_{\substack{\| \\ \overline{B} \\ \| \\ f(B)}} \right\} \Rightarrow$$

f duce relația de ordine $\subseteq$ a posetului $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$ în relația de ordine $\supseteq$ a posetului $(\mathcal{P}(T), \supseteq)$, adică f e funcție izotonă de la $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$ la $(\mathcal{P}(T), \supseteq)$, prin urmare f e funcție izotonă și de la posetul $(\mathcal{P}(T), \supseteq)$ la posetul $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$: interschimbând A cu B în implicația de mai sus, obținem: $A \supseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$.

Acum să demonstrăm că f este egală cu inversa ei:

$$(\mathcal{P}(T), \subseteq) \underset{f^{-1}=f}{\overset{f}{\rightleftarrows}} (\mathcal{P}(T), \supseteq):$$

pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$,

$$\left.\begin{aligned} &\underbrace{f(f(A))}_{=(f\circ f)(A).} = \overline{\overline{A}} = A \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f \circ f = id_{\mathcal{P}(T)} \Leftrightarrow f^{-1} = f$.

Conform celor de mai sus:

- f este inversabilă, deci bijectivă;
- f este izotonă de la $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$ la $(\mathcal{P}(T), \supseteq)$;
- $f^{-1} = f$ este izotonă de la $(\mathcal{P}(T), \supseteq)$ la $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$,

așadar f este izomorfism de poseturi de la posetul $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$ la dualul său $(\mathcal{P}(T), \supseteq)$. ⇒ ca orice izomorfism de poseturi, f păstrează infimumurile și supremumurile arbitrare, adică, pentru orice $X \subseteq \mathcal{P}(T)$:

- $f(\inf(X, \subseteq)) = \inf(f(X), \supseteq)$ (conform proprietăților dualului unui poset care dau principiul de dualitate pt. poseturi) $= \sup(f(X), \subseteq)$; ■

• $f(\sup(\mathcal{X}, \subseteq)) = \sup(f(\mathcal{X}), \supseteq) \underset{\text{sus)}}{\overset{\text{(ca mai}}{=}} \inf(f(\mathcal{X}), \subseteq)$. (*)

Acum să generalizăm proprietățile: pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$, $\begin{cases} \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \\ \text{și} \\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \end{cases}$ la familii arbitrare de mulțimi: fie $I \in Set$ și $(A_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(T)$;

$$\begin{cases} \overline{\bigcup_{i \in I} A_i} \underset{H}{=} \bigcap_{i \in I} \overline{A_i} \quad \text{și} \\ \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} \underset{H}{=} \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}. \end{cases}$$

Aceste proprietăți pot fi generalizate la orice algebră Boole completă, iar acestea, ca mai sus, sunt <u>legile lui De Morgan generalizate</u> aplicate algebrei Boole complete

$(\mathcal{P}(T), \cup, \cap, \subseteq, \bar{\ }, \emptyset, T)$.

Fie $a \in T$. Atunci:

$a \in \overline{\bigcup_{i \in I} A_i} \Leftrightarrow a \notin \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\nexists\, i \in I)(a \in A_i) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall\, i \in I)(a \notin A_i) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall\, i \in I)(a \in \overline{A_i}) \Leftrightarrow a \in \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$;

aşadar $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$;

$a \in \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} \Leftrightarrow a \notin \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{non}[(\forall\, i \in I)(a \in A_i)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\exists\, i \in I)(a \notin A_i) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\exists\, i \in I)(a \in \overline{A_i}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a \in \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$; aşadar $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$.

Deci, pentru orice

$X \subseteq \mathcal{P}(T)$: $f(\bigcup X) = \overline{\bigcup X} = \overline{\bigcup_{A \in X} A} =$

$= \bigcap_{A \in X} \overline{A} = \bigcap_{A \in X} f(A) = \bigcap_{B \in f(X)} B = \bigcap f(X)$;

$$f(\cap X)=\overline{\cap X}=\overline{\bigcap_{A\in X} A}=\bigcup_{A\in X}\overline{A}=\bigcup_{A\in X} f(A)=\bigcup_{B\in f(X)} B=\bigcup f(X).$$

Desigur, pentru orice $X\subseteq\mathcal{P}(T)$, $f(f(X))\overset{(f=f^{-1})}{=}f^{-1}(f(X))=X$; sau detaliat:

$$f(f(X))=f(\{B\mid B\in f(X)\})=$$
$$=f(\{f(A)\mid A\in X\})=$$
$$=\{f(f(A))\mid A\in X\}\overset{(f=f^{-1})}{=}$$
$$=\{f(f^{-1}(A))\mid A\in X\}=$$
$$=\{A\mid A\in X\}=X.$$

Să presupunem că am demonstrat că, pentru orice

$X \subseteq \mathcal{P}(T)$, $\inf(X, \subseteq) = \bigcap\limits_{A \in X} A = \bigcap X$,

Fie $X \subseteq \mathcal{P}(T)$. $\Rightarrow f(X) \subseteq \mathcal{P}(T)$. Aplicăm egalitatea anterioară pentru $f(X)$ în locul lui X:

$$\inf(f(X), \subseteq) = \bigcap f(X).$$

$$\inf(f(X), \subseteq) \overset{(*)}{=} f(\sup(X, \subseteq)), \qquad \bigcap f(X) \overset{(**)}{=} f(\bigcup X)$$

$$\Downarrow$$

$$f(f(\sup(X, \subseteq))) = f(f(\bigcup X)).$$

$$(f = f^{-1}) \qquad f^{-1}(f(\sup(X, \subseteq))) = f^{-1}(f(\bigcup X)) \qquad (f = f^{-1})$$

$$\sup(X, \subseteq) = \bigcup X$$

Așadar, pentru orice $X \subseteq \mathcal{P}(T)$ $\sup(X, \subseteq) = \bigcup X = \bigcup\limits_{A \in X} A$.

Analog, dacă demonstrăm că $(\forall X \subseteq \mathcal{P}(T))(\sup(X, \subseteq) = \bigcup X)$, atunci, folosind $(\blacksquare)$, respectiv $(\blacksquare\blacksquare)$, în locul proprietăților $(*)$, respectiv $(**)$, rezultă că $(\forall X \subseteq \mathcal{P}(T))$ $(\inf(X, \subseteq) = \bigcap X)$.

Obs.: Izomorfismele de poseturi păstrează relația de succesiune.

Dem.: Fie $(A, \leq)$ și $(B, \sqsubseteq)$ poseturi, iar $f : A \to B$ un izomorfism de poseturi de la $(A, \leq)$ la $(B, \sqsubseteq)$.

Notăm cu $<$, respectiv $\sqsubset$ relațiile de ordine strictă, iar cu $\prec$, respectiv $\sqsubset\!\!\!\cdot$ relațiile de succesiune ale poseturilor $(A, \leq)$, respectiv $(B, \sqsubseteq)$:

$$< \; = \; \leq \setminus \Delta_A, \quad \sqsubset \; = \; \sqsubseteq \setminus \Delta_B,$$

$$\prec \; = \{(a,b) \in A^2 \mid a < b \text{ și } (\nexists x \in A)(a < x < b)\},$$

$$\sqsubset\!\!\!\cdot \; = \{(u,v) \in B^2 \mid u \sqsubset v \text{ și } (\nexists y \in B)(u \sqsubset y \sqsubset v)\}.$$

Fie $(a,b) \in \; \prec$: $a, b \in A$ cu $a \prec b$, $\Rightarrow a < b \xrightarrow[\text{și inj.}]{f \text{ e izotonă}} \Rightarrow f(a) \sqsubset f(b)$.

Pp. prin absurd că $f(a) \not\sqsubset\!\!\!\cdot \; f(b)$. $\Rightarrow (\exists y \in B)(f(a) \sqsubset y \sqsubset f(b)) \xrightarrow[\text{și inj.}]{f^{-1} \text{ e izotonă}}$

$$\Rightarrow \underbrace{f^{-1}(f(a))}_{=a} < \underbrace{f^{-1}(y)}_{\in A} < \underbrace{f^{-1}(f(b))}_{=b}$$

Ab cu $a \prec b$. $\Rightarrow f(a) \sqsubset\!\!\!\cdot \; f(b)$.

$\Leftrightarrow (f(a), f(b)) \in S$.

Exerc.: Fie $(A, \leq)$ și $(B, \leq)$ poseturi, $f : A \to B$ o funcție izotonă între aceste poseturi, iar $X \subseteq A$. Să se demonstreze că:

(1) dacă există $\inf(X)$ în $(A, \leq)$ și există $\inf(f(X))$ în $(B, \leq)$, atunci: $\begin{cases} (1.1) & f(\inf(X)) \leq \inf(f(X)), \\ (1.2) & \text{dacă } f \text{ este izomorfism de poseturi, atunci } f(\inf(X)) = \inf(f(X)); \end{cases}$

(2) dacă există $\sup(X)$ în $(A, \leq)$ și există $\sup(f(X))$ în $(B, \leq)$, atunci: $\begin{cases} (2.1) & f(\sup(X)) \geq \sup(f(X)), \\ (2.2) & \text{dacă } f \text{ este izomorfism de poseturi, atunci } f(\sup(X)) = \sup(f(X)); \end{cases}$

(3) dați exemple pentru inegalități stricte la (1.1) și (2.1);

(4) dacă f este izomorfism de poseturi, atunci au loc echivalențele:

(4.1) există $\inf(X)$ în $(A, \leq)$ $\Leftrightarrow$ există $\inf(f(X))$ în $(B, \leq)$;

(4.2) există $\sup(X)$ în $(A, \leq)$ $\Leftrightarrow$ există $\sup(f(X))$ în $(B, \leq)$;

(5) dați exemple de funcții izotone care nu satisfac echivalențele (4.1) și (4.2).

REZOLVARE: (1) $\exists \inf(X) \in A \Rightarrow A \neq \emptyset \xRightarrow{\exists f: A \to B} B \neq \emptyset$.

(1.1) Caz 1: $X = \emptyset \Rightarrow f(X) = f(\emptyset) = \emptyset$,
$\exists \inf(f(X))$ în $(B, \leq)$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \inf(f(X)) = \inf(\emptyset)$ în $(B, \leq) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \max(B)$ și $\inf(f(X)) = \inf(\emptyset) = \max(B)$.
$\inf(X) \in A \Rightarrow f(\inf(X)) \in B$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(\inf(X)) \leq \max(B) = \inf(f(X)) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(\inf(X)) \leq \inf(f(X))$.

Caz 2: $X \neq \emptyset \Rightarrow f(X) \neq \emptyset$.

Fie $b \in f(X)$. $\Leftrightarrow (\exists a \in X)(f(a) = b)$.

$a \in X \Rightarrow \inf(X) \leq a \xrightarrow{(f \text{ e izotonă})}$

$\Rightarrow f(\inf(X)) \leq f(a) = b, \Rightarrow f(\inf(X))$

e minorant pt. $f(X)$. $\xrightarrow{(\text{def. inf})}$

$\Rightarrow f(\inf(X)) \leq \inf(f(X))$.

(1,2) f e izomorfism de poseturi

$\overset{(\text{def})}{\Leftrightarrow}$ $\begin{cases} f \text{ e izotonă} \xrightarrow{(1,1)} f(\inf(X)) \leq \inf(f(X)) \quad (*) \\ \text{și} \\ f \text{ e bijectivă iar } f^{-1} \text{ e izotonă.} \end{cases}$

<u>Caz 1</u>: $X = \emptyset \Rightarrow f(X) = f(\emptyset) = \emptyset$,

$\exists \inf(X)$ în $(A, \leq)$,

$\exists \inf(f(X))$ în $(B, \leq)$.

$\Rightarrow \begin{cases} \exists \max(A) = \inf(\emptyset) = \inf(X) \\ \text{și} \\ \exists \max(B) = \inf(\emptyset) = \inf(f(X)). \end{cases}$

f e izotonă $\xrightarrow[\text{anter.)}]{(\text{exerc.}}$ f păstrează maximele arbitrare $\Rightarrow f(\max(A)) =$

$= \max(f(A)) \xrightarrow{(f \text{ e surj.})} \max(B)$.

$\Rightarrow f(\inf(X)) = \inf(f(X))$.

<u>Caz 2</u>: $X \neq \emptyset \Rightarrow f(X) \neq \emptyset$.

Fie $a \in X \Rightarrow f(a) \in f(X) \Rightarrow \inf(f(X)) \leq$
$\leq f(a) \xrightarrow[\text{izotonă}]{f^{-1}\text{ e}} f^{-1}(\inf(f(X))) \leq$
$\leq f^{-1}(f(a)) = a, \Rightarrow f^{-1}(\inf(f(X)))$
e minorant pt. $X \xrightarrow{\text{(def. inf)}} f^{-1}(\inf(f(X)))$
$\leq \inf(X) \xrightarrow[\text{izotonă}]{f\text{ e}} \inf(f(X)) =$
$= f(f^{-1}(\inf(f(X)))) \leq f(\inf(X)) \Rightarrow$
$\Rightarrow \inf(f(X)) \leq f(\inf(X))$. $(\ast\ast)$

$(\ast), (\ast\ast) \Rightarrow f(\inf(X)) = \inf(f(X))$.

(2) Prin dualitate, din (1).

(3) V. exemplele de mai jos.

(4) f e izomorfism de poseturi $\overset{\text{(def)}}{\Longleftrightarrow}$ f e izotonă şi bijectivă iar f^{-1} e izotonă.

(4.1) $\underset{H}{\text{"}\Rightarrow\text{"}}$, $\exists \inf(X)$ în $(A, \leq)$. $(\ast\ast\ast)$

$(\ast\ast\ast) \Rightarrow A \neq \emptyset \xrightarrow{(\exists f : A \to B)} B \neq \emptyset$.

Caz 1: $X = \emptyset \Rightarrow f(X) = f(\emptyset) = \emptyset$.

$(\ast\ast\ast) \Rightarrow \exists \max(A) = \inf(\emptyset) = \inf(X)$. $(\ast\ast\ast\ast)$

f e izotonă $\xrightarrow[\text{anter.}]{\text{(exerc.}}$ f păstrează maximele arbitrare $\xRightarrow{(**)}$

$\Rightarrow \exists \max(f(A)) = f(\max(A)) =$
$= f(\inf(X))$.
f e surjectivă. $\Leftrightarrow f(A) = B$.

$\Rightarrow \exists \max(B) = f(\inf(X)). \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists$ în $(B, \leq)$ $\inf(\emptyset) = \max(B)$,
$f(X) = \emptyset$.

$\Rightarrow \exists \inf(f(X)) = \max(B) = f(\inf(X))$.

Caz 2: $X \neq \emptyset. \Rightarrow f(X) \neq \emptyset$.
Fie $b \in f(X). \Leftrightarrow (\exists a \in X)(f(a) = b)$,
$a \in X. \xRightarrow{(*)} \inf(X) \leq a \xRightarrow[\text{crescătoare}]{f \text{ e}} f(\inf(X)) \leq f(a)$.

$\Rightarrow f(\inf(X)) \leq b. \Rightarrow f(\inf(X))$ este minorant pt. $f(X)$. $(***)$

Fie $m \in B$, a.î. m este minorant pt. $f(X)$. $(******)$
Fie $a \in X. \Rightarrow f(a) \in f(X)$. $\Rightarrow$

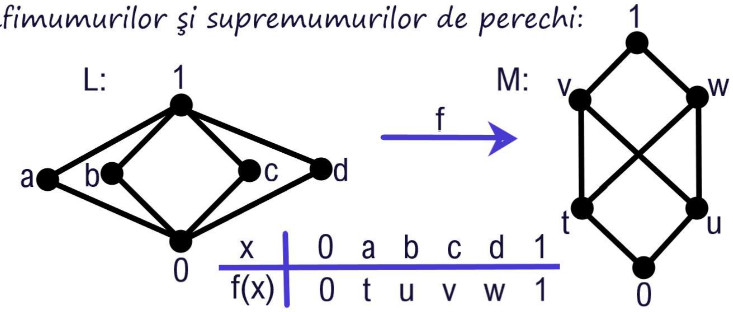
$\Rightarrow m \leq f(a) \xrightarrow{(f^{-1} \text{ e izoton})} f^{-1}(m) \leq$
$\leq f^{-1}(f(a)) = a \Rightarrow f^{-1}(m)$ este minorant pt. $X \xRightarrow{(**)} f^{-1}(m) \leq$
$\leq \inf(X) \xrightarrow[\text{izoton}]{f \text{ e}} m = f(f^{-1}(m)) \leq$
$\leq f(\inf(X)) \Rightarrow m \leq f(\inf(X)) \Rightarrow$
$\xrightarrow[(** * \; * * * \; * * *)]{(* * * \; **)} \exists \inf(f(X)) = f(\inf(X))$.

"$\Leftarrow$": $\exists \inf(f(X))$ în $(B, \leq)$.
f e izomorfism de poseturi. $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f^{-1}$ e izomorfism de poseturi.
$\xRightarrow{(\text{"}\Rightarrow\text{"})} \exists \inf(\underbrace{f^{-1}(f(X))}_{=X})$ în $(A, \leq)$.

$\Rightarrow \exists \inf(X)$ în $(A, \leq)$.
(4.2) Prin dualitate, din (4.1).

(5),(3) Să dăm un exemplu de morfism bijectiv între două poseturi finite, dintre care primul este lattice Ore, care nu satisface niciuna dintre echivalenţele (4.1) şi (4.2), apoi un exemplu de morfism bijectiv între poseturile subiacente a două latici finite distributive care satisface inegalităţi stricte la (1.1) şi (2.1), apoi un exemplu de funcţie izotonă între două lanţuri, implicit morfism de latici (a se vedea un seminar anterior) care nu satisface echivalenţele (4.1) şi (4.2).

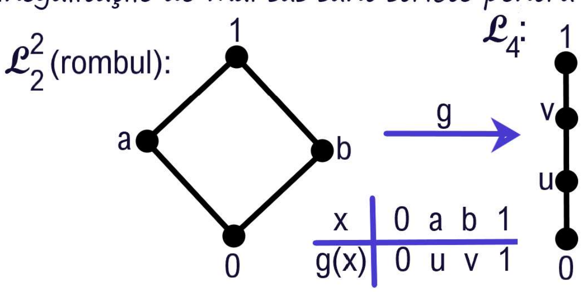
Exemplu de funcţie bijectivă izotonă definită pe o latice care nu păstrează existenţa infimumurilor şi supremumurilor de perechi:



x	0	a	b	c	d	1
f(x)	0	t	u	v	w	1

În laticea L: sup{a,b}=1, inf{c,d}=0.
În laticea M: nu există nici sup{t,u} = sup{f(a),f(b)}, nici inf{v,w} = sup{f(c),f(d)}.

Exemplu de funcţie bijectivă izotonă definită între două latici care nu e morfism de latici, întrucât nu păstrează infimumurile şi supremumurile de perechi, aşadar inegalităţile de mai sus sunt stricte pentru perechile următoare:



x	0	a	b	1
g(x)	0	u	v	1

În romb: a ∨ b = 1 şi a ∧ b = 0.
În lanţul cu 4 elemente:
g(a) ∨ g(b) = u ∨ v = v < 1 = g(1) = g(a ∨ b),
g(a) ∧ g(b) = u ∧ v = u > 0 = g(0) = g(a ∧ b).

Considerăm lanțul $(\mathbb{Q}_+, \leq)$, unde: $\begin{cases}\mathbb{Q}_+ = \mathbb{Q} \cap [0,\infty), \text{ iar} \\ \leq \text{ este ordinea naturală.}\end{cases}$

Fie $f : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{Q}_+$, $(\forall x \in \mathbb{Q}_+)(f(x) = x^2)$.

f este izotonă.

$(\mathbb{Q}_+, \leq)$ este lanț $\Rightarrow (\mathbb{Q}_+, \max, \min, \leq)$ este latice.

$\Longrightarrow (\forall x, y \in \mathbb{Q}_+) \left(f(\max\{x, y\}) = \max\{f(x), f(y)\} \right.$

(deşi proprietatea este imediată aici)

şi $\left. f(\min\{x, y\}) = \min\{f(x), f(y)\} \right)$.

$\Rightarrow$ f este morfism de latici.

Fie $X = \mathbb{Q}_+ \cap (\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, \sqrt{3})$. $\Longrightarrow f(X) = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, \sqrt{3})\}$.

$\nexists \inf(X)$ în $(\mathbb{Q}_+, \leq)$, dar $\exists \inf(f(X)) = 2$ în $(\mathbb{Q}_+, \leq)$;

$\nexists \sup(X)$ în $(\mathbb{Q}_+, \leq)$, dar $\exists \sup(f(X)) = 3$ în $(\mathbb{Q}_+, \leq)$.

De reţinut şi faptul că în acest exemplu, f este definită între două lanţuri (este endomorfism (de poseturi, şi chiar de latici) al lanţului $(\mathbb{Q}_+, \leq)$).

Atenţie: după materialul facultativ de mai jos urmează alt material de seminar obligatoriu (mai precis exerciţiile din acesta parcurse la seminar sunt obligatorii, iar parcurgerea celorlalte ca studiu individual este opţională).

ALTE EXEMPLE DE FUNCȚII IZOTONE CARE NU PĂSTREAZĂ (TOATE) INFIMUMURILE ȘI SUPREMUMURILE

~ MATERIAL FACULTATIV ~

Definiții și denumiri echivalente:

- morfism de poseturi $\Leftrightarrow$ funcție izotonă $\Leftrightarrow$ funcție crescătoare $\overset{(def.)}{\Leftrightarrow}$ funcție (definită între două poseturi) care păstrează ordinea;
- funcție antitonă $\Leftrightarrow$ funcție descrescătoare $\overset{(def.)}{\Leftrightarrow}$ funcție (definită între două poseturi) care inversează ordinea;

Obs.: Fie $(A, \leq)$ și $(B, \sqsubseteq)$ poseturi, iar: $\begin{cases} \geq := \leq^{-1}, \\ \sqsupseteq := \sqsubseteq^{-1} \end{cases}$. Fie $f : A \to B$. Atunci: f este funcție antitonă între poseturile $(A, \leq)$ și $(B, \sqsubseteq)$ $\Leftrightarrow$ f este funcție izotonă între poseturile $(A, \leq)$ și $(B, \sqsupseteq)$, $\Leftrightarrow$
(morfism de poseturi)
(dualul lui $(B, \sqsubseteq)$)
între $(A, \geq)$ și $(B, \sqsubseteq)$.
(dualul lui $(A, \leq)$)

$\Updownarrow$ f este funcție antitonă

Temă: Având în vedere observația anterioară, gândiți-vă ce proprietăți demonstrate pentru funcții izotone sunt valabile și pentru funcții antitone. De exemplu, unele proprietăți de acest gen rezultă din faptul că dualul unui lanț este tot un lanț (i.e.: dacă $\leq$ este o relație de ordine totală) $\boxed{\text{chiar dacă și numai dacă, evident (pt. că } (\leq^{-1})^{-1} = \leq)}$, atunci relația de ordine $\geq := \leq^{-1}$ este, de asemenea, totală).

- <u>izomorfism de poseturi</u> $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ <u>izomorfism de ordine</u> $\overset{(def.)}{\Longleftrightarrow}$ funcție (definită între două poseturi) izotonă, bijectivă și cu inversa izotonă $\Leftrightarrow$ morfism bijectiv de poseturi cu inversa tot morfism de poseturi;
- <u>morfism de latici</u> $\overset{def.}{\Longleftrightarrow}$ funcție (definită între două latici) care

păstrează infimumurile și supremumurile perechilor de elemente (ale acelor latici);

$\hookrightarrow$ din această definiție, rezultă, prin inducție după numărul de elemente, că orice morfism de latici păstrează infimumurile și supremumurile mulțimilor finite și nevide de elemente (ale acelor latici);

- <u>izomorfism de latici</u> $\overset{(def.)}{\Leftrightarrow}$ $\overset{(def.)}{\Leftrightarrow}$ morfism bijectiv de latici, cu inversa tot morfism de latici.

<u>Teor.:</u>
- orice morfism de latici este funcție izotonă dar nu și reciproc;
- nu orice morfism bijectiv de poseturi este izomorfism de poseturi, i.e.: nu orice funcție izotonă bijectivă are și inversa izotonă;
- orice morfism bijectiv de latici are inversa tot morfism de latici, i.e.: orice morfism

bijectiv de latici este izomorfism de latici, i.e.:
izomorfismele de latici coincid cu morfismele bijective de latici;

- izomorfismele de latici coincid cu izomorfismele de poseturi definite între două latici, i.e.: o funcție definită între două latici este izomorfism de latici dacă și numai dacă este izomorfism de poseturi (între
$\Updownarrow$
(funcție izotonă bijectivă cu inversa tot izotonă)
poseturile subiacente acelor latici).

<u>Obs.:</u> Am demonstrat la seminar că, dacă $(A, \leq)$ și $(B, \leq)$ sunt poseturi, $f : A \rightarrow B$ este o funcție izotonă (între aceste poseturi), iar $X \subseteq A$ și $Y \subseteq A$ a.î. există $\inf(X)$ și $\sup(Y)$ în posetul $(A, \leq)$, și există $\inf(f(X))$ și $\sup(f(Y))$ în

posetul $(B,\leq)$, atunci au loc inegalitățile:

$$f(\inf(X)) \leq \inf(f(X))$$

și $$\sup(f(Y)) \leq f(\sup(Y)).$$

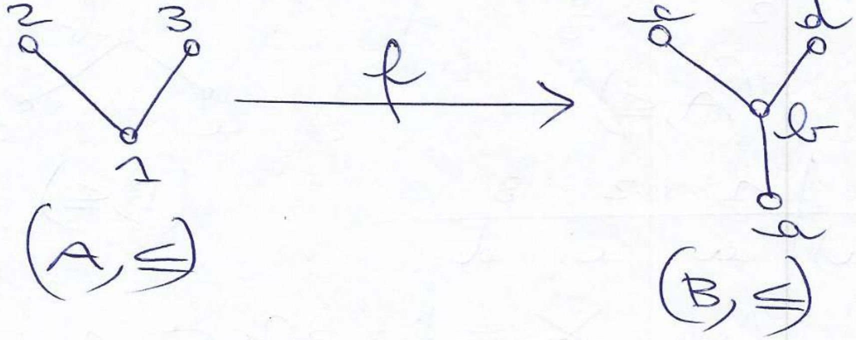
Să dăm exemple în care inegalitățile de mai sus sunt stricte.

Vom folosi notațiile uzuale: $\geq := \leq^{-1}$, $< := \leq \cap \neq$, $> := <^{-1} = \geq \cap \neq$.

↱ DAT DE UN STUDENT,

<u>Exemplu</u> de funcție izotonă care nu păstrează infimumurile:

Considerăm poseturile date de următoarele diagrame Hasse:



$(A,\leq)$ $(B,\leq)$

și $f: A \to B$ definită prin tabelul:

u	1	2	3
$f(u)$	a	c	d

.

$f(1) \leq f(2)$ şi $f(1) \leq f(3)$;
aşadar f e izotonă.

Fie $X = \{2,3\} \subset A$.

$\inf(X) = \inf\{2,3\} = 1.$ $(*)$

$\inf(f(X)) = \inf(f(\{2,3\})) =$
$= \inf\{f(2), f(3)\} = \inf\{c, d\} = b.$ $(**)$

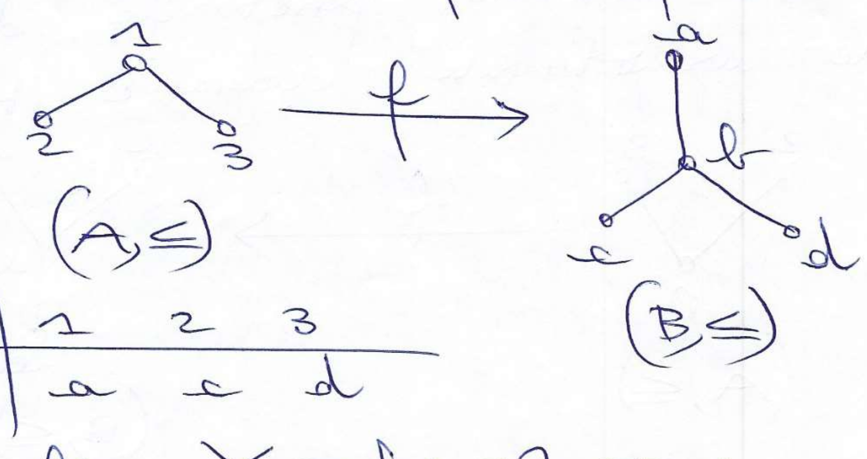
$f(1) = a < b.$ $(***)$

$(*), (**), (***) \Rightarrow f(\inf(X)) < \inf(f(X)).$

<u>Exemplu</u> de funcţie izotonă care nu păstrează supremumurile:

Dualizăm exemplul precedent:

fie:



u	1	2	3
$f(u)$	a	c	d

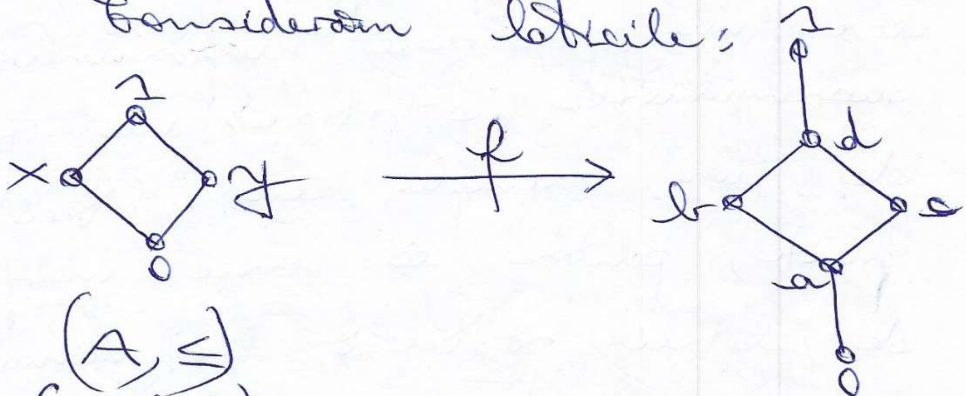
şi fie $Y = \{2,3\} \subset A. \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \sup(Y) = 1 \\ f(Y) = \{c, d\} \Rightarrow \sup(f(Y)) = b. \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(\sup(Y)) = f(1) = a > b = \sup(f(Y))$. Se observă că f e izotonă (pt. că e izotonă între $(A, \geq)$ și $(B, \geq)$).

<u>Exemplu</u> de funcție izotonă între două latici care nu păstrează infimumurile și nici supremumurile, nici măcar pe cele ale perechilor de elemente, așadar nu este morfism de latici:

Considerăm laticile:



$(A, \leq)$
(rombul)
(vom vedea că este chiar algebră Boole)

$(B, \leq)$

și $f : A \to B$,

u	0	x	y	1
$f(u)$	0	b	c	1

Cum $f(0) \leq f(x) \leq f(y) \leq f(1)$, $\Rightarrow f$ e izotonă.

$\left.\begin{array}{l}\inf\{x,y\}=0;\ f(0)=0<a,\\ \inf(f(\{x,y\}))=\inf\{b,c\}=a,\end{array}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow f(\inf\{x,y\})<\inf(f(\{x,y\}))$.

$\left.\begin{array}{l}\sup\{x,y\}=1;\ f(1)=1>d,\\ \sup(f(\{x,y\}))=\sup\{b,c\}=d,\end{array}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow f(\sup\{x,y\})>\sup(f(\{x,y\}))$.

Exemplu de morfism de latici care nu păstrează infimumurile și supremumurile arbitrare: nu putem da un exemplu cu latici finite, pentru că orice morfism de latici păstrează infimumurile și supremumurile mulțimilor finite și nevide.

Considerăm lanțul $(\mathbb{R},\leq)$, unde $\leq$ este relația de ordine naturală pe $\mathbb{R}$.

Fie $a,b\in\mathbb{R}$, cu $a<b$. Definim $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, astfel: pentru orice $x\in\mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{dacă } x \leq a; \\ x, & \text{dacă } a < x < b; \\ x+1, & \text{dacă } x \geq b. \end{cases}$$

f este izotonă între $(\mathbb{R}, \leq)$ și $(\mathbb{R}, \leq)$ (i.e. f este endomorfism al posetului $(\mathbb{R}, \leq)$).

$(\mathbb{R}, \leq)$ este lanț. $\overset{\text{(v. cursul)}}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow (\mathbb{R}, \max, \min, \leq)$ este latice.

Am văzut la seminar că orice funcție izotonă între un lanț și o latice este morfism de latici, precum și o proprietate care o generalizează pe aceasta, anume că orice funcție izotonă păstrează minimele și maximele arbitrare.

Prin urmare, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, avem:

$f(\min\{x, y\}) = \min\{f(x), f(y)\}$ și $f(\max\{x, y\}) = \max\{f(x), f(y)\}$,

$\Rightarrow f$ este morfism de laticei (endomorfism al laticii $(\mathbb{R}, \max, \min, \leq)$).

Considerăm intervalul deschis $(a, b) \subset \mathbb{R}$.

$\inf((a,b)) = a$; $f(a) = a-1$.

$f((a,b)) = (a,b) \Rightarrow \inf(f((a,b))) = \inf((a,b)) = a$.

$\Rightarrow f(\inf((a,b))) = a - 1 < a = \inf(f((a,b)))$.

$\sup((a,b)) = b$; $f(b) = b+1$.

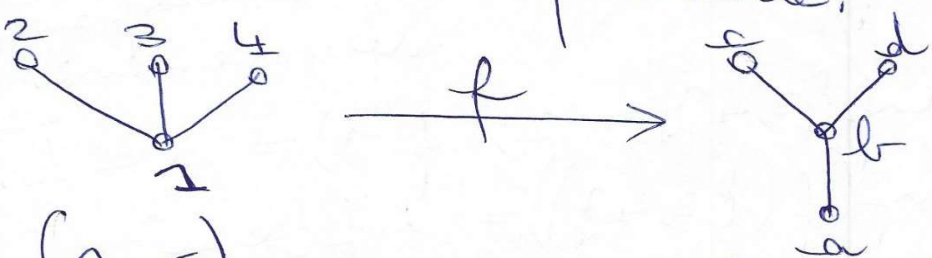
$f((a,b)) = (a,b) \Rightarrow \sup(f((a,b))) = \sup((a,b)) = b$.

$\Rightarrow f(\sup((a,b))) = b + 1 > b = \sup(f((a,b)))$.

Obs.: Am demonstrat la seminar că orice izomorfism de poseturi păstrează infimumurile și supremumurile arbitrare.

Exemplu de morfism bijectiv de poseturi care nu păstrează infimumurile (prin dualizarea acestui exemplu se obține un morfism bijectiv de poseturi care nu păstrează supremumurile):

Considerăm poseturile:



$(A, \leq)$ $\qquad$ $(B, \leq)$

și $f : A \to B$,

u	1	2	3	4
$f(u)$	a	b	c	d

$$\Rightarrow \begin{cases} f \text{ e bijectivă,} \\ \left.\begin{array}{l} f(1) \leq f(2) \\ f(1) \leq f(3) \\ f(1) \leq f(4) \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ e izotonă.} \end{cases}$$

Așadar, f e morfism bijectiv de poseturi.

$f^{-1} : B \to A$ este dată de

tabelul:

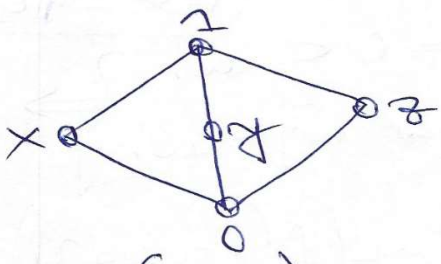
t	a	b	c	d
$f^{-1}(t)$	1	2	3	4

$b \leq c$,
$f^{-1}(b) = 2 \nleq 3 = f^{-1}(c)$ (2 și 3 sunt incomparabile în $(A, \leq)$), $\Rightarrow$

$\Rightarrow f^{-1}$ nu este izotonă. $\Rightarrow$
$\Rightarrow f$ nu este izomorfism de poseturi.

$\inf\{3,4\} = 1$; $f(1) = a < b$,
$\inf(f(\{3,4\})) = \inf\{c,d\} = b$, $\Rightarrow$
$\Rightarrow f(\inf\{3,4\}) < \inf(f(\{3,4\}))$.

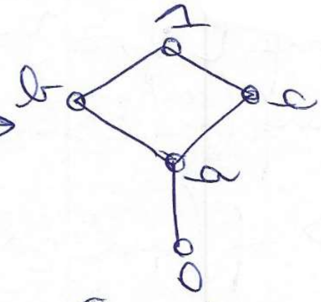
Exemplu de morfism bijectiv de poseturi definit între două latici care nu păstrează infimumurile (perechilor de elemente) (implicit nu este morfism de latici) (studiindu-l obținem o astfel de f.ct. care nu păstrează sup.,) Considerăm laticile date de următoarele diagrame Hasse, și funcția dată prin tabelul de mai jos:



$(A, \le)$

(diamantul)

$\xrightarrow{f}$



$(B, \le)$

$f : A \to B$,

u	0	x	y	z	1
$f(u)$	0	a	b	c	1

$$\Rightarrow \begin{cases} f \text{ e bijectivă.} \\ \left. \begin{array}{l} f(0) \le f(x) \le f(1) \\ f(0) \le f(y) \le f(1) \\ f(0) \le f(z) \le f(1) \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ este izotonă.} \end{cases}$$

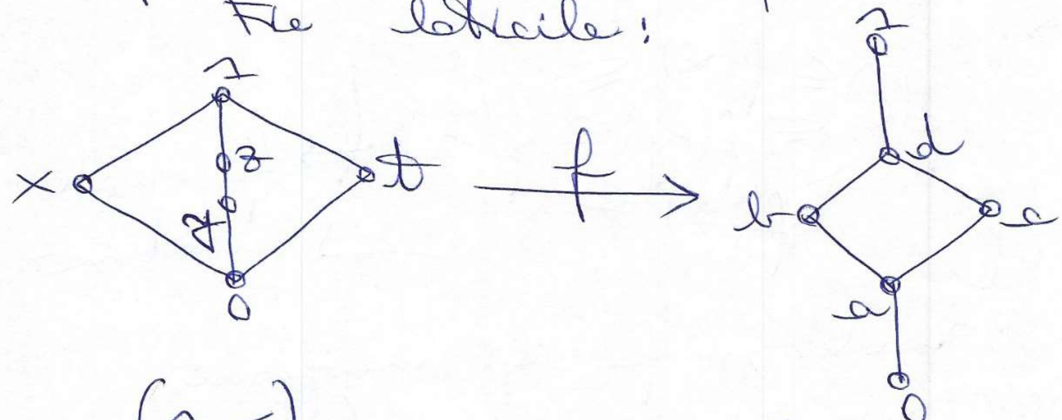
Așadar, f e morfism bijectiv de poseturi (dar nu e izomorfism de poseturi, pt. că nu e izomorfism de latici, nu e nici măcar morfism de latici (vz. teorema), sigur că dacă ar fi morfism de latici, atunci, întrucât e bijectivă, ar fi izomorfism de latici).

$\inf\{y,z\}=0;\ f(0)=0<a.$
$\inf(f(\{y,z\}))=\inf\{b,c\}=a,$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(\inf\{y,z\}) < \inf(f(\{y,z\})).$

<u>Exemplu</u> de morfism bijectiv de poseturi definit între două latici care nu păstrează nici infimumurile, nici supremumurile (perechilor de elemente)!

Fie laticile:



$(A,\leq)$ $\qquad$ $(B,\leq)$

şi $f: A \to B$ dată prin tabelul:

u	0	x	y	z	t	1
$f(u)$	0	b	a	d	c	1

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f \text{ e bijectivă.} \\ f(0) \leq f(x),\ f(0)\leq f(y) \leq f(z) \leq f(1),\ f(0)\leq f(t) \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ e izotonă,}$$

Așadar, f e morfism bijectiv de poseturi.

$$\left.\begin{array}{l} \inf\{x, t\} = 0;\ f(0) = 0 < a, \\ \inf(f(\{x, t\})) = \inf\{b, c\} = a, \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\inf\{x, t\}) < \inf(f(\{x, t\})).$$

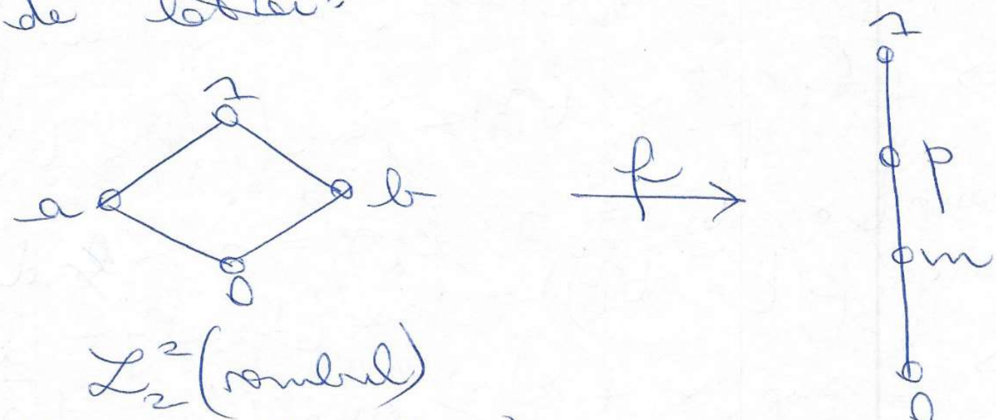
$$\left.\begin{array}{l} \sup\{x, t\} = 1;\ f(1) = 1 > d, \\ \sup(f(\{x, t\})) = \sup\{b, c\} = d. \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\sup\{x, t\}) > \sup(f(\{x, t\})).$$

<u>Obs.:</u> Evident că nu putem găsi un morfism bijectiv de latici care să nu păstreze infimumurile și/sau supremumurile, pentru că teorema de mai sus ne asigură de faptul că orice morfism bijectiv de latici este izomorfism de latici, deci izomorfism de poseturi, așadar păstrează infimumurile și supremumurile arbitrare, conform observației anterioare.

Acum să reluăm un exemplu de mai sus:

Exemplu de morfism bijectiv de poseturi definit între două latici distributive, care nu e morfism de latici:



$\mathcal{L}_2^2$ (rombul)

(latice distributivă) vom vedea că este chiar algebră Boole

$\mathcal{L}_4$

(latice distributivă ca orice lanț, cu $\vee = \max$, $\wedge = \min$)

x	0	a	b	1
$f(x)$	0	m	p	1

Evident, f e bijectivă. În $\mathcal{L}_2^2$ avem: $0 \le a \le 1$, $0 \le b \le 1$; în $\mathcal{L}_4$ avem:

$$f(0) = 0 \le f(a) = m \le f(1) = b, \quad f(0) = 0 \le f(b) = p \le f(1) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ f e izotonă, adică f este morfism de poseturi.

Deci f e morfism bijectiv de poseturi.

În $\mathcal{L}_2^2$ avem: $\begin{cases} a \vee b = 1, \\ a \wedge b = 0. \end{cases}$

În $\mathcal{L}_4$ avem următoarele:

$\begin{cases} m \vee p = \max\{m, p\} = p; \\ m \wedge p = \min\{m, p\} = m. \end{cases}$

Așadar: $f(a \wedge b) = f(0) = 0 \neq$
$\neq m = m \wedge p = f(a) \wedge f(b)$, iar
$f(a \vee b) = f(1) = 1 \neq p = m \vee p \neq$
$\neq f(a) \vee f(b)$. Oricare dintre
neegalitățile $f(a \wedge b) \neq$
$\neq f(a) \wedge f(b)$ și $f(a \vee b) \neq$
$\neq f(a) \vee f(b)$ arată că f
nu e morfism de latici.

~ FINAL SECȚIUNE FACULTATIVĂ ~

Poseturi şi Latici – Produse Directe, Sume Ordinale, Sublatici

<u>Mnemonic</u> din curs, pentru exerciţiul următor:

O subalgebră a unei algebre de un anumit tip este, prin definiţie, o submulţime a mulţimii(lor) suport a acelei algebre care este închisă la toate operaţiile algebrei. O subalgebră devine algebră de acelaşi tip cu operaţiile induse, adică operaţiile algebrei restricţionate la acea submulţime.

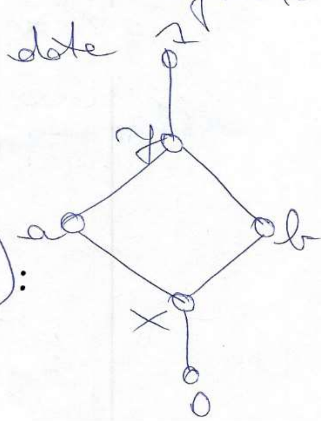
În cazul din acest exerciţiu, este vorba despre sublaticile $\rightarrow$ închise la $\vee, \wedge$ unei latici şi sublaticile mărginite ale unei latici mărginite $\rightarrow$ închise la $\vee, \wedge, 0, 1$.

Laticea din următorul exerciţiu este finită şi nevidă (deci mărginită), aşadar toate sublaticile sale sunt finite, deci cele nevide sunt latici mărginite, dar <u>nu toate</u> sunt sublatici mărginite ale ei: doar cele care conţin minimul şi maximul acestei latici sunt <u>sublatici mărginite</u> ale ei, adică submulţimi ale mulţimii sale de elemente închise la întreaga sa structură de latice mărginită, înzestrate cu operaţiile (binare şi zeroare) şi relaţia de ordine indusă pe aceste submulţimi.

Amintesc că toate submulţimile total ordonate T *ale unei latici* L *sunt sunt sublatici ale acesteia, pentru că lanţul vid este în mod trivial sublatice, iar un lanţ nevid* T *inclus în* L *satisface, pentru orice* x,y ϵ T*, avem, în laticea* L*:*

cum T este lanţ, x şi y sunt comparabile, adică $x \leq y$ sau $y \leq x$;
ca în orice latice: $x \leq y \Leftrightarrow x \vee y = y \Leftrightarrow x \wedge y = x$, iar $y \leq x \Leftrightarrow x \vee y = x \Leftrightarrow x \wedge y = y$;
aşadar există $\min\{x,y\} = x \wedge y$ şi $\max\{x,y\} = x \vee y$ în L, şi avem:
$x \wedge y = \min\{x,y\} \in \{x,y\} \subseteq T$; $x \vee y = \max\{x,y\} \in \{x,y\} \subseteq T$;
prin urmare $x \wedge y \in T$ şi $x \vee y \in T$, deci T este sublatice a lui L.

<u>Exercițiu:</u> Să se determine sublaticile și sublaticile mărginite de laticii mărginite date de diagrama Hasse alăturată:



$\mathcal{L}_2 \oplus \mathcal{L}_2^2 \oplus \mathcal{L}_2 = (L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$:

REZOLVARE:

Singurele elemente incomparabile ale lui L sunt a și b, prin urmare o sublatice S a lui L este lanț $\Leftrightarrow a \notin S$ sau $b \notin S$.

Dacă o sublatice S a lui L nu este lanț, adică $a \in S$ și $b \in S$, $\Rightarrow \begin{cases} x = a \wedge b \in S \\ \text{și} \\ y = a \vee b \in S, \end{cases}$ deci $\{x, a, b, y\} \subseteq S$, Toate sublatticile nevide ale lui L sunt latici finite și nevide, deci sunt latici mărginite, dar, dintre ele, singurele sublatici mărginite ale lui L sunt cele care conțin pe 0 și pe 1 din L.

Așadar, avem:

- sublatticile total ordonate ale lui L:

(i) $\emptyset \rightarrow$ nu e sublatice mărginită a lui L;

(ii) $\mathcal{L}_1 \cong \{\alpha\}$, cu $\alpha \in L$; (izomorfe ca latici) $\rightarrow$ la fel mai jos și

niciuna dintre acestea nu este sublatice mărginită a lui L;

(iii) $\mathcal{L}_2 \cong \{\alpha, \beta\} \subseteq L$, cu $\alpha < \beta$; singura dintre acestea care este sublatice mărginită a lui L este $\{0, 1\}$;

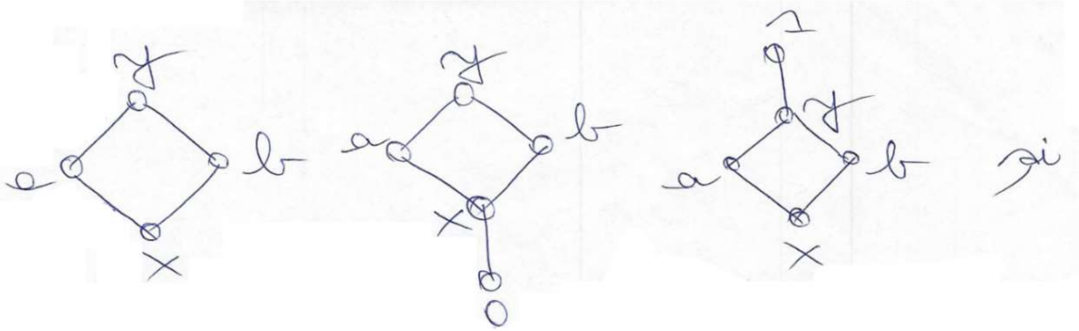
(iv) $\mathcal{L}_3 \simeq \{\alpha, \beta, \gamma\} \subseteq L$, cu $\alpha < \beta < \gamma$; dintre acestea, cele care sunt sublatici mărginite ale lui L sunt cele cu $\alpha = 0$ și $\gamma = 1$, i.e. $\{0, x, 1\}$, $\{0, a, 1\}$, $\{0, b, 1\}$ și $\{0, y, 1\}$;

(v) $\mathcal{L}_4 \simeq \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \subseteq L$, cu $\alpha < \beta < \gamma < \delta$; dintre acestea, cele care sunt sublatici mărginite ale lui L sunt cele cu $\alpha = 0$ și $\delta = 1$;

(vi) $\mathcal{L}_5 \simeq \{0, x, a, y, 1\} \simeq$
$\simeq \{0, x, b, y, 1\}$; dintre acestea, ambele sunt sublatici mărginite ale lui L;

L nu are sublatici total ordonate de cardinal ≥ 6;

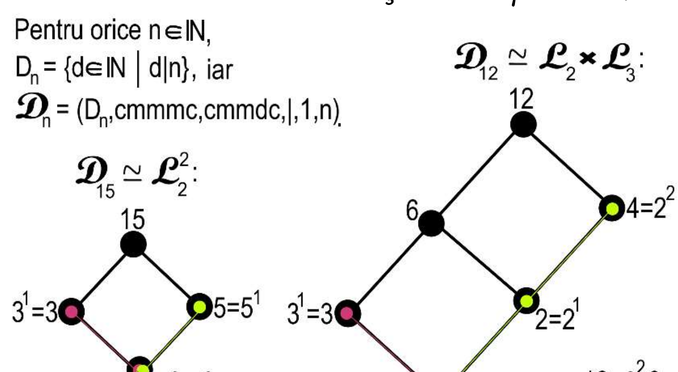
- sublaticile lui L care nu sunt lanțuri:



L_1 dintre acestea, singura care este sublatice mărginită a lui L este L.

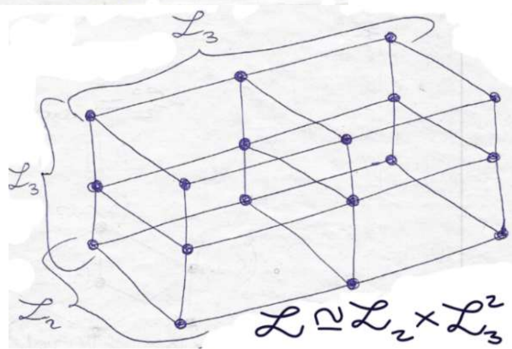
<u>Mnemonic</u> *din curs: laticea numerelor naturale înzestrate cu ordinea* | *("divide pe") este mărginită, cu primul element* 0 *şi ultimul element* 1*, distributivă şi completă, cu supremumul oricărei submulţimi dat de cel mai mic multiplu comun, iar infimumul său dat de cel mai mare divizor comun al elementelor acesteia: aşadar aceasta are următoarea structură de latice mărginită:* $\mathcal{N}$ = (IN,cmmmc,cmmdc,|,1,0).

Să notăm, pentru fiecare număr natural n*, cu* D_n *mulţimea divizorilor naturali ai lui* n*, iar cu* $\mathcal{D}_n$ *sublaticea lui* $\mathcal{N}$ *având mulţimea suport* D_n*, astfel că* $\mathcal{D}_0=\mathcal{N}$*:*



Să descompunem, ca în aceste exemple, pentru un n *natural nenul arbitrar, laticea finită* $\mathcal{D}_n$ *în produs direct de lanţuri, şi apoi să vedem că lanţurile sunt indecompozabile raportat la produsul direct de poseturi, adică nu se pot scrie ca produse directe de poseturi neizomorfe cu ele, de unde se poate demonstra că descompunerea unei latici în produs direct de lanţuri este unică (modulo izomorfism şi modulo comutativitatea şi asociativitatea produsului direct de poseturi).*

De exemplu, observând că laticea dată prin următoarea diagramă Hasse este egală cu produsul direct de lanţuri $\mathcal{L}_2 \times \mathcal{L}_3 \times \mathcal{L}_3$), prin combinarea produselor directe dintre aceste lanţuri în toate modurile posibile, în conformitate cu asociativitatea şi comutativitatea produsului direct, rezultă toate descompunerile acestei latici $\mathcal{L}$ în produs direct de latici, anume produsele directe ale fiecăreia dintre următoarele familii de latici:



- familia singleton $\{\mathcal{L}\}$;
- $\{\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3^2\}$;
- $\{\mathcal{L}_2 \times \mathcal{L}_3, \mathcal{L}_{,3}\}$;
- $\{\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \mathcal{L}_3\}$.

Amintesc că izomorfismele de poseturi între două latici Ore sunt izomorfisme de latici, iar izomorfismele de latici între latici mărginite sunt izomorfisme de latici mărginite, întrucât morfismele de poseturi păstrează minimele şi maximele arbitrare, aşadar morfismele surjective de latici între latici mărginite sunt morfisme de latici mărginite.

Desigur, la fiecare dintre cele patru familii de latici de mai sus pot fi adăugate oricâte copii ale laticii mărginite triviale: lanţul $\mathcal{L}_1$, care este element neutru la produsul direct de poseturi, după cum vom vedea mai jos, adică orice poset $\mathcal{P}$ este izomorf cu produsul direct $\mathcal{P} \times \mathcal{L}_1$ (la rândul său izomorf cu $\mathcal{L}_1 \times \mathcal{P}$, conform comutativităţii produsului direct de poseturi modulo izomorfism de poseturi).

Aşadar, să descompunem laticea divizorilor unui număr natural nenul în produs direct de poseturi, apoi să demonstrăm că lanţurile nu se pot descompune în produse directe de poseturi neizomorfe cu ele.

Exercițiu: $n \in \mathbb{N}^*$; $D_n := \{d \in \mathbb{N}^* \mid d | n\}$; $\mathcal{D}_n := (D_n, \text{cmmmc}, \text{cmmdc}, |, 1, n)$ = laticea mărginită a divizorilor naturali ai lui n.

Să se descompună $\mathcal{D}_n$ în produs direct de lanțuri (de unde rezultă, desigur, toate descompunerile lui $\mathcal{D}_n$ în produs direct de latici).

REZOLVARE:

Vom stabili un izomorfism de latici mărginite între $\mathcal{D}_n$ și un produs direct de lanțuri.

$\mathcal{D}_1 \cong \mathcal{L}_1$, întrucât $D_1 = \{1\}$, așadar $|D_1| = 1$. Acum să presupunem că $n \geq 2$.

Fie $n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}$ descompunerea canonică a lui n: $k \in \mathbb{N}^*$, $p_1, \ldots, p_k \rightarrow$ numere naturale prime două câte două distincte, iar $e_1, \ldots, e_k \in \mathbb{N}^*$.

Fie $\mathcal{L}=(L,\vee,\wedge,\leq,0,1):=\prod_{j=1}^{k}\mathcal{L}_{e_j+1}$, unde: $(\forall j\in\overline{1,k})$ $(\mathcal{L}_{e_j+1}:=(\overline{0,e_j},\max,\min,\leq,0,e_j)=$ lanțul cu e_j+1 elemente, în care am luat ca mulțime suport mulțimea primelor e_j+1 numere naturale cu relația de ordine $\leq:=$ ordinea naturală de pe $\mathbb{N}$, restricționată la $\overline{0,e_j}$).

Definim $f:L\to\Delta_n$, $(\forall\alpha_1\in\overline{0,e_1})\ldots(\forall\alpha_k\in\overline{0,e_k})$ $(f(\alpha_1,\ldots,\alpha_k):=p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}\in\Delta_n)$.

Pentru orice $(\alpha_1,\ldots,\alpha_k),(\beta_1,\ldots,\beta_k)\in L$ (i.e. $\alpha_j,\beta_j\in\overline{0,e_j}$, $\forall j\in\overline{1,k}$), avem:

$f((\alpha_1,\ldots,\alpha_k)\vee(\beta_1,\ldots,\beta_k))=$

$=f(\max\{\alpha_1,\beta_1\},\ldots,\max\{\alpha_k,\beta_k\})=$

$=p_1^{\max\{\alpha_1,\beta_1\}}\cdot\ldots\cdot p_k^{\max\{\alpha_k,\beta_k\}}=$

$= \text{cmmmc}\{p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}, p_1^{\beta_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\beta_k}\} =$

$= \text{cmmmc}\{f(\alpha_1,\ldots,\alpha_k), f(\beta_1,\ldots,\beta_k)\};$

$f((\alpha_1,\ldots,\alpha_k)\wedge(\beta_1,\ldots,\beta_k)) =$

$= f(\min\{\alpha_1,\beta_1\},\ldots,\min\{\alpha_k,\beta_k\}) =$

$= p_1^{\min\{\alpha_1,\beta_1\}}\cdot\ldots\cdot p_k^{\min\{\alpha_k,\beta_k\}} =$

$= \text{cmmdc}\{p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}, p_1^{\beta_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\beta_k}\} =$

$= \text{cmmdc}\{f(\alpha_1,\ldots,\alpha_k), f(\beta_1,\ldots,\beta_k)\}.$

$f(0) = f(\underbrace{0,\ldots,0}_{k \text{ de } 0}) = p_1^0\cdot\ldots\cdot p_k^0 = 1,$

$f(1) = f(e_1,\ldots,e_k) = p_1^{e_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{e_k} = n,$

Așadar, f comută cu $\vee$, $\wedge$, 0, 1, deci este morfism de latici mărginite. (*)

$(\forall\, d\in D_n)(d \mid n = p_1^{e_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{e_k} \Rightarrow (\exists\, \alpha_1\in\overline{0,e_1})\ldots(\exists\, \alpha_k\in\overline{0,e_k})(d = p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k} = f(\alpha_1,\ldots,\alpha_k))) \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ este surjectivă. (**)

$$(\forall \alpha_1,\beta_1 \in \overline{0,e_1}) \ldots (\forall \alpha_k,\beta_k \in \overline{0,e_k})$$

$$(f(\alpha_1,\ldots,\alpha_k) = f(\beta_1,\ldots,\beta_k) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k} = p_1^{\beta_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\beta_k} \Leftrightarrow$$

$$\xLeftrightarrow[\text{canonice}]{\text{unicitatea descompunerii}} \alpha_1=\beta_1,\ldots,\alpha_k=\beta_k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_1,\ldots,\alpha_k) = (\beta_1,\ldots,\beta_k)). \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ este injectivă. (***).

(*), (**), (***) $\Rightarrow f$ este morfism bijectiv de latici mărginite. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f$ este izomorfism de latici mărginite de la $\mathcal{L} = \prod_{j=1}^{k} \mathcal{L}_{e_j+1}$ la $\mathcal{D}_n$.

Altă demonstraţie pentru faptul că f *este izomorfism de latici: notând, pentru fiecare* j ∈ $\overline{1,k}$, *mulţimea suport a lanţului* $\mathcal{L}_{e_j+1}$ *cu cu* L_{e_j+1} *:*

Pt. orice $\alpha_1, \beta_1 \in \overline{0, e_1} = L_{e_1+1}$, ..., $\alpha_k, \beta_k \in \overline{0, e_k} = L_{e_k+1}$, au loc echivalențele: $f(\alpha_1, ..., \alpha_k) \mid f(\beta_1, ..., \beta_k) \Leftrightarrow p_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k} \mid p_1^{\beta_1} \cdot ... \cdot p_k^{\beta_k} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha_1 \leq \beta_1, ..., \alpha_k \leq \beta_k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\alpha_1, ..., \alpha_k) \leq (\beta_1, ..., \beta_k) \Leftrightarrow$

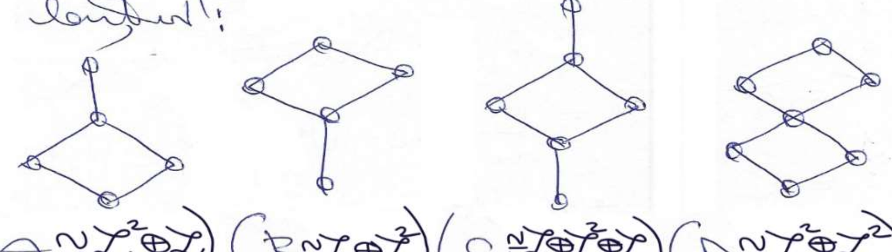
$\Leftrightarrow f^{-1}(f(\alpha_1, ..., \alpha_k)) \leq f^{-1}(f(\beta_1, ..., \beta_k))$.

Echivalențele de mai sus arată că: $\begin{cases} f \text{ e izotonă conform } "\Leftarrow" \text{ din aceste echivalențe;} \\ f^{-1} \text{ e izotonă, pt. că: pt.} \end{cases}$

orice $x, y \in D_n \xrightarrow[\text{surj.}]{(f \text{ e}}$ $(\exists \alpha_1, \beta_1 \in \overline{0, e_1} = L_{e_1+1}), ..., (\exists \alpha_k, \beta_k \in \overline{0, e_k} = L_{e_k+1}) (f(\alpha_1, ..., \alpha_k) = x$ și $f(\beta_1, ..., \beta_k) = y)$, prin urmare, conform "$\Rightarrow$" din aceste echivalențe: dacă $x \mid y \Rightarrow f^{-1}(x) \leq f^{-1}(y)$.

Deci f e bijectivă izotonă și cu inversa izotonă, adică f este izomorfism de poseturi între (poseturile subiacente lui) $\mathcal{L}$ și D_n. $\overset{(\text{v. cursul})}{\Longleftrightarrow}$ f este izomorfism de latici între (laticile subiacente lui) $\mathcal{L}$ și D_n. $\overset{(\text{v. cursul})}{\Longleftrightarrow}$ f este izomorfism de latici mărginite între $\mathcal{L}$ și D_n.

<u>Obs.:</u> Desigur, orice produs direct de lanțuri, fiind produs direct de latici distributive, este o latice distributivă. Dar nu orice latice distributivă este izomorfă cu un produs direct de lanțuri; nici măcar orice latice distributivă finită; desigur, orice algebră Boole finită este izomorfă cu $\mathcal{L}_2^n = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{L}_2$, pentru un $n \in \mathbb{N}$. Exemple de latici distributive finite care nu se descompun în produse directe de lanțuri:



$(A \cong \mathcal{L}_2^2 \oplus \mathcal{L}_2)$ $(B \cong \mathcal{L}_2 \oplus \mathcal{L}_2^2)$ $(C \cong \mathcal{L}_2 \oplus \mathcal{L}_2^2 \oplus \mathcal{L}_2)$ $(D \cong \mathcal{L}_2^2 \oplus \mathcal{L}_2^2)$

Acest lucru se poate observa, de exemplu, din cardinalele lor: $(\forall k\in\mathbb{N}^*)$ $(\forall n_1,\dots,n_k\in\mathbb{N}^*)$ $\left(\prod_{i=1}^{k}\mathcal{L}_{n_i}\right.$ are cardinalul $\left.\prod_{i=1}^{k} n_i\right)$ și, pentru orice latice L, $\mathcal{L}_1\times L\cong L$, unde notăm cu $\cong$ existența unui izomorfism de latici, $|A|=|B|=5$, $|C|=6=2\cdot 3$ și $|D|=7$, așadar singurele descompuneri (posibile) ale acestor latici în produse directe de lanțuri de cardinal cel puțin 2 sunt: $\mathcal{L}_5$, $\mathcal{L}_6$ sau $\mathcal{L}_2\times\mathcal{L}_3$, respectiv $\mathcal{L}_7$. Dar:

$A\ncong\mathcal{L}_5$ și $B\ncong\mathcal{L}_5$;
$C\ncong\mathcal{L}_6$ și $C\ncong\mathcal{L}_2\times\mathcal{L}_3$;
$D\ncong\mathcal{L}_7$.

Vom vedea mai jos un rezultat general care demonstrează indecompozabilitatea laticilor A,B,C,D.

Exerc.:

Fie $(A, \leq)$ și $(B, \sqsubseteq)$ poseturi nevide, să se dem. că:

(a) dacă $|A| = 1$, atunci poseturile $(B, \sqsubseteq)$ și $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$ sunt izomorfe;

(b) dacă $|B| = 1$, atunci poseturile $(A, \leq)$ și $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$ sunt izomorfe;

(c) dacă $|A| \geq 2$ și $|B| \geq 2$, atunci posetul $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$ nu e lanț.

RESOLVARE:

relație de ordine pe $A \times B$

$(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq) \stackrel{(\text{def.})}{=} (A \times B, \leq \times \sqsubseteq)$, unde $\leq \times \sqsubseteq \stackrel{(\text{def})}{=} \{((a, b), (x, y)) \mid a, x \in A,\ b, y \in B,\ a \leq x$ și $b \sqsubseteq y\} \subseteq (A \times B)^2$.

(a) Pp. $A = \{a\}. \Rightarrow \leq = \{(a, a)\}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} A \times B = \{a\} \times B = \{(a, b) \mid b \in B\} \\ \text{și} \\ \leq \times \sqsubseteq = \{(a, a)\} \times \sqsubseteq = \end{cases}$$

$= \{((a, b), (a, y)) \mid b, y \in B,\ b \sqsubseteq y\}$.

Fie $f : B \to A \times B$, $(\forall b \in B)\ (f(b) = (a, b))$ și $g : A \times B \to B$, $(\forall b \in B)\ (g(a, b) = b)$. $\Rightarrow$

am eliminat din scriere o pereche de paranteze

$\Rightarrow f$ și g sunt (complet și) corect definite.

Pt. orice $b \in B$, avem:

$$(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(a, b) =$$
$$= b, \Rightarrow g \circ f = id_B, \quad (1)$$
$$(f \circ g)(a, b) = f(g(a, b)) = f(b) =$$
$$= (a, b), \Rightarrow f \circ g = id_{A \times B}. \quad (2)$$

$(1), (2) \Rightarrow f$ e inversabilă (deci bijectivă), cu $f^{-1} = g$. $(*)$

Pt. orice $b, c \in B$, avem:

dacă $b \sqsubseteq c$, $\Rightarrow f(b) = (a, b)$
$$(\leq \times \sqsubseteq)(a, c) = f(c), \Rightarrow$$
$\Rightarrow f$ e izotonă; $(**)$

dacă $(a, b)(\leq \times \sqsubseteq)(a, c), \Rightarrow$
$$\Rightarrow g(a, b) = b \sqsubseteq c = g(a, c) \Rightarrow$$
$\Rightarrow f^{-1} = g$ e izotonă. $(***)$

$(*), (**), (***) \Rightarrow f$ e izomorfism de poseturi între $(B, \sqsubseteq)$ și $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$.

(b) Analog cu (a), sau folosind (a), comutativitatea produsului direct de poseturi și faptul că o compunere de izomorfisme de poseturi este un izomorfism de poseturi, astfel:

dacă $|B| = 1 \overset{(a)}{\Longrightarrow} (A, \leq) \overset{h}{\underset{\rightarrow}{\cong}} (B, \sqsubseteq) \times$ ($\exists\, h \rightarrow$ izom. de poseturi)

$\times (A, \leq) \overset{k}{\underset{\longrightarrow}{\cong}} (A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$,
(izomorfism de poseturi)

$k : B \times A \rightarrow A \times B$,

$(\forall a \in A)(\forall b \in B)(k(b, a) = (a, b))$,

$\Rightarrow k \circ h : A \rightarrow A \times B$ este un izomorfism de poseturi între $(A, \leq)$ și $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$, pt. că:

$k, h \rightarrow$ bijective, $\Rightarrow k \circ h \rightarrow$ bijectivă,
$k, h \rightarrow$ izotone, $\Rightarrow k \circ h \rightarrow$ izotonă,
$k^{-1}, h^{-1} \rightarrow$ izotone $\Rightarrow (k \circ h)^{-1} =$
$= h^{-1} \circ k^{-1} \rightarrow$ izotonă,

(c) $|A| \geq 2 \Leftrightarrow (\exists\, a, x \in A)(a \neq x)$,
$|B| \geq 2 \Leftrightarrow (\exists\, b, y \in B)(b \neq y)$.

Caz 1: $\left\{\begin{array}{l} a \not\leq x \\ \text{şi} \\ x \not\leq a \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (a, b) \cancel{(\leq \times \sqsubseteq)} (x, b) \\ \text{şi} \\ (x, b) \cancel{(\leq \times \sqsubseteq)} (a, b) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$ nu e lanţ.

Caz 2: $\left\{\begin{array}{l} b \not\sqsubseteq y \\ \text{şi} \\ y \not\sqsubseteq b \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (a, b) \cancel{(\leq \times \sqsubseteq)} (a, y) \\ \text{şi} \\ (a, y) \cancel{(\leq \times \sqsubseteq)} (a, b). \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$ nu e lanţ.

Caz 3: $\left\{\begin{array}{l} a \leq x \text{ sau } x \leq a \\ \text{şi} \\ b \sqsubseteq y \text{ sau } y \sqsubseteq b. \end{array}\right.$

Putem pp., fără a restrânge generalitatea, că $a \leq x$ şi $b \sqsubseteq y$ (altfel redenumim: $a \leftrightarrow x$, $b \leftrightarrow y$).
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ (şi/sau)

Pp. abs. $\left.\begin{array}{l} x \leq a, \\ a \leq x \end{array}\right\} \Rightarrow a = x$, abs. cu $a \neq x$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow x \not\leq a. \Rightarrow (x, b) \cancel{(\leq \times \sqsubseteq)} (a, y)$ (3)

Pp. abs. $\left.\begin{array}{l} y \sqsubseteq b, \\ b \sqsubseteq y. \end{array}\right\} \Rightarrow b = y$ abs. cu $b \neq y$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow y \not\sqsubseteq b. \Rightarrow (a, y) \cancel{(\leq \times \sqsubseteq)} (x, b)$, (4)

(3), (4) $\Rightarrow (A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$ nu e lanţ.

Exercițiu: Să se demonstreze că lanțurile sunt indecompozabile raportat la produsul direct de poseturi (i.e. nu se pot descompune în produs direct de alte poseturi!)

REZOLVARE: (adică de poseturi neizomorfe cu ele)

Fie $(L,\leq)$ un lanț și $(A,\leq)$, $(B,\leq)$ două poseturi, astfel încât $(L,\leq)=(A,\leq)\times$
$\times(B,\leq)\overset{(def.)}{=}(A\times B,\underset{\text{"(def.)}}{\leq})$

$\{((a,b),(a',b'))\mid a,a'\in A,$
$a\leq a'$ și $b,b'\in B,\ b\leq b'\}$.

- dacă $L=\emptyset$, atunci $\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}(L,\leq)=(\emptyset,\emptyset)\\ \text{și}\\ A=\emptyset \text{ sau } B=\emptyset.\end{cases}\Rightarrow(A,\leq)=$
$=(\emptyset,\emptyset)=(L,\leq)$ sau $(B,\leq)=(\emptyset,\emptyset)=$
$=(L,\leq)$. De fapt avem "$\Leftrightarrow$",
ptr. că $(A,\leq)\times(\emptyset,\emptyset)=(\emptyset,\emptyset)\times(B,\leq)=$
$=(\emptyset,\emptyset)$.

- dacă $L\neq\emptyset$, atunci $\Rightarrow A\neq\emptyset$ și $B\neq\emptyset$.

De asemenea, conform Exerc. anterior $\Rightarrow|A|\leq 1$ sau $|B|\leq 1.\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}|A|=1\Rightarrow(L,\leq)=(A,\leq)\times(B,\leq)\cong\\ \qquad\cong(B,\leq)\\ \text{sau}\\ |B|=1\Rightarrow(L,\leq)=(A,\leq)\times(B,\leq)\cong\\ \qquad\cong(A,\leq).\end{cases}$

Așadar, în orice scriere (izomorfe poseturi cu ea) a unui lanț $(L,\leq)$ ca produs direct de poseturi, unul dintre poseturile din acel produs direct este izomorf cu $(L,\le)$, deci lanțurile sunt indecompozabile raportat la produsul direct de poseturi.

Într-adevăr, conform celor de mai sus, dacă $(L,\le)$ este un lanț și $(A,\le)$, $(B,\le)$ sunt poseturi, a.î. $(L,\le)=(A,\le)\times(B,\le)=(A\times B,\le)$, atunci A și B nu pot avea ambele cardinalul ≥ 2, deci $|A|\le 1$ sau $|B|\le 1$. Putem pp. $|A|\le 1$ (fără a restrânge generalitatea, deoarece produsul direct de poseturi e comutativ, deci cazul $|B|\le 1$ e doar o redenumire de variabile). Așadar avem 2 cazuri: $\begin{cases} |A|=0 \Leftrightarrow A=\emptyset, \text{ respectiv:} \\ |A|=1 \Leftrightarrow A=\{a\}, \text{ pt. un elem. } a \end{cases}$

$(A,\le)\times(B,\le)=(\emptyset,\emptyset) \Leftrightarrow [(A,\le)=(\emptyset,\emptyset)$ sau $(B,\le)=(\emptyset,\emptyset)]$, pt. că
$A\times B=\emptyset \Leftrightarrow (A=\emptyset$ sau $B=\emptyset)$, și $\emptyset$ e ~~op.~~ rel. bin., e trivial, rel. de ord. $\emptyset \times$

dacă $A=\emptyset$, atunci $\begin{cases}(A,\leq)=(\emptyset,\emptyset) \\ \text{şi} \\ A\times B=\emptyset,\Rightarrow\end{cases}$

$\Rightarrow (A\times B,\leq)=(\emptyset,\emptyset)$, i.e. $(L,\leq)=$
$=(\emptyset,\emptyset)=(A,\leq)$.

dacă $|A|=1$, atunci $\xrightarrow{\text{ca mai sus}}$
$\Rightarrow (L,\leq)=(A\times B,\leq)\cong(B,\leq)$.

Deci, în fiecare caz $\Rightarrow$ dacă scriem pe $(L,\leq)$ ca un produs direct de poseturi, atunci $(L,\leq)$ (sau un poset izomorf cu el) apare în acel produs direct, ceea ce înseamnă că $(L,\leq)$ este indecompozabil raportat la produsul direct de poseturi.

MATERIAL FACULTATIV

Obs.: Într-un produs direct netrivial de poseturi (i.e. produsul direct e cel puţin 2 poseturi şi în care măcar 2 poseturi cu cardinalul ≥ 2), singurele elemente comparabile cu toate celelalte elemente ale produsului direct sunt minimul și maximul produsului direct, dacă acestea există.

Demonstr.: Fie $(A,\le)$ și $(B,\sqsubseteq)$ poseturi cu $|A|\ge 2$ și $|B|\ge 2$.

Considerăm posetul produs $(A,\le)\times(B,\sqsubseteq)=(A\times B,\le\times\sqsubseteq)$.

Acesta: • are minim ddacă $(A,\le)$ și $(B,\sqsubseteq)$ au minime, și în acest caz $\min(A\times B,\le\times\sqsubseteq)=(\min(A,\le),\min(B,\sqsubseteq))$;

• are maxim ddacă $(A,\le)$ și $(B,\sqsubseteq)$ au maxime, și în acest caz $\max(A\times B,\le\times\sqsubseteq)=(\max(A,\le),\max(B,\sqsubseteq))$.

Fie $(a,b)\in A\times B$ (i.e. $a\in A$ și $b\in B$) a.î. $(a,b)\ne\min(A\times B,\le\times\sqsubseteq)$ și $(a,b)\ne\max(A\times B,\le\times\sqsubseteq)$, ceea ce, conform egalităților de mai sus, este echivalent cu:

$$\begin{cases} a\ne\min(A,\le) \text{ sau } b\ne\min(B,\sqsubseteq), \\ \text{și} \\ a\ne\max(A,\le) \text{ sau } b\ne\max(B,\sqsubseteq). \end{cases}$$

CAZ 1: Dacă $a=\min(A,\le)$ $\xRightarrow[\text{prima propr. de mai sus}]{|A|\ge 2}$

$$\begin{cases} a\ne\max(A,\le)\Leftrightarrow(\exists\, x\in A)\,(x\not\le a), \\ \text{și} \\ b\ne\min(B,\sqsubseteq)\Leftrightarrow(\exists\, y\in B)\,(b\not\sqsubseteq y). \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\not\le a\Rightarrow (x,y)\,\not(\le\times\sqsubseteq)\,(a,b), \\ b\not\sqsubseteq y\Rightarrow (a,b)\,\not(\le\times\sqsubseteq)\,(x,y). \end{cases}$$

Așadar (a,b) și $(x,y)\in A\times B$ sunt incomparabile în posetul produs $(A\times B,\le\times\sqsubseteq)$.

CAZ 2 : Dacă $b = \max(B, \sqsubseteq) \Rightarrow$

$$\xrightarrow[\text{(a doua propr. de mai sus)}]{(|B| \geq 2)} \begin{cases} b \neq \min(B, \sqsubseteq) \Leftrightarrow (\exists y \in B)(b \not\sqsubseteq y) \\ \text{și} \\ a \neq \max(A, \leq) \Leftrightarrow (\exists x \in A)(x \not\leq a). \end{cases}$$

$$\begin{cases} b \not\sqsubseteq y \Rightarrow (a, b) \cancel{(\leq \times \sqsubseteq)} (x, y), \\ x \not\leq a \Rightarrow (x, y) \cancel{(\leq \times \sqsubseteq)} (a, b). \end{cases}$$

Așadar (a, b) și (x, y) sunt incomparabile. $A \times B$,

Cazul rămas de tratat este:

CAZ 3 : Dacă $\begin{cases} a \neq \min(A, \leq) \\ \text{și} \\ b \neq \max(B, \sqsubseteq) \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\exists x \in A)(a \not\leq x), \\ \text{și} \\ (\exists y \in B)(y \not\sqsubseteq b). \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \not\leq x \Rightarrow (a, b) \cancel{(\leq \times \sqsubseteq)} (x, y) \\ y \not\sqsubseteq b \Rightarrow (x, y) \cancel{(\leq \times \sqsubseteq)} (a, b). \end{cases}$$

Așadar (a, b) și $(x, y) \in A \times B$ sunt incomparabile.

Prin urmare, dacă $(a, b) \in$

$\in A\times B$ nu este nici minimul nici maximul posetului produs $(A\times B, \leq\times\sqsubseteq)$, atunci acest poset conține măcar un element incomparabil cu (a,b).

Acum putem trece la CAZUL GENERAL: fie I o mulțime cu $|I|\geq 2$ și $((P_i,\leq_i))_{i\in I}$ o familie de poseturi a.î. $(\exists\, i_0, j_0\in I)(i_0\neq j_0,\ |P_{i_0}|\geq 2$ și $|P_{j_0}|\geq 2)$.

Dacă $(\exists\, i\in I)(P_i=\emptyset)\Rightarrow$
$\Rightarrow \prod_{i\in I}(P_i,\leq_i)=(\emptyset,\leq=\emptyset)$, care satisface proprietatea din enunț: $(\forall\, a\in\emptyset)[(a\neq\min(\emptyset,\emptyset)$ și $a\neq\max(\emptyset,\emptyset))\Rightarrow(\exists\, x\in\emptyset)((a,x)\notin\emptyset$ și $(x,a)\notin\emptyset)]$, [illegible]

echivalent astfel: $(\forall e)[\underbrace{e \in \emptyset}_{\text{falsă } \forall e} \Rightarrow$
$\Rightarrow [(e \neq \min(\emptyset, \emptyset)$ și $e \neq \max(\emptyset, \emptyset) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\exists x \in \emptyset)((e,x) \notin \emptyset$ și $(x,e) \notin \emptyset)]]$
adevărată $\forall e$, ca falsă $\Rightarrow$ adevărată.

Acum presupunem că $(\forall i \in I)$ $(P_i \neq \emptyset)$. Fie $(A, \leq) = (P_{i_0}, \leq_{i_0})$ și $(B, \sqsubseteq) = \prod_{i \in I \setminus \{i_0\}} (P_i, \leq_i) =$

$$= (P_{j_0}, \leq_{j_0}) \times \prod_{\underbrace{i \in I \setminus \{i_0, j_0\}}_{\text{poate fi vidă,}}} (P_i, \leq_i).$$

caz în care produsul $\prod_{i \in I \setminus \{i_0, j_0\}} (P_i, \leq_i)$ este un poset de cardinal 1.

Fie $(e_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} P_i$ a.î. $(e_i)_{i \in I} \neq \min(\prod_{i \in I} P_i, \prod_{i \in I} \leq_i)$ și $(e_i)_{i \in I} \neq \max(\prod_{i \in I} P_i, \prod_{i \in I} \leq_i)$.

Dar $(\prod_{i \in I} P_i, \prod_{i \in I} \leq_i) = (A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$

iar $|A|=|P_{i_0}|\geq 2$ şi $|B|\geq|P_{j_0}|\geq 2$. Conform cazului $|I|=2$ tratat mai sus, $\Rightarrow \left(\exists\, x\in A\times B = \prod_{i\in I} P_i\right)\left(\left((e_i)_{i\in I}, x\right)\notin \prod_{i\in I} \leq_i\right.$ şi $\left.\left(x,(e_i)_{i\in I}\right)\notin \leq\times\sqsubseteq\;=\prod_{i\in I}\leq_i\right)$.

Am înlocuit, în proprietatea de mai sus, pe (a,b) cu $(e_i)_{i\in I}$, mai precis: $a=e_{i_0}$ şi $b=(e_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$.

<u>Obs.:</u> Dacă $(P,\leq)$ şi $(Q,\sqsubseteq)$ sunt poseturi a.î.:

$$\begin{cases} |P|\geq 2,\ |Q|\geq 3 \\ \exists \max(P,\leq) \text{ şi} \\ \exists \min(Q,\sqsubseteq), \end{cases}$$

Atunci posetul sumă ordinală $(P,\leq)\oplus(Q,\sqsubseteq)$ este indecompozabil raportat la produsul direct de poseturi.

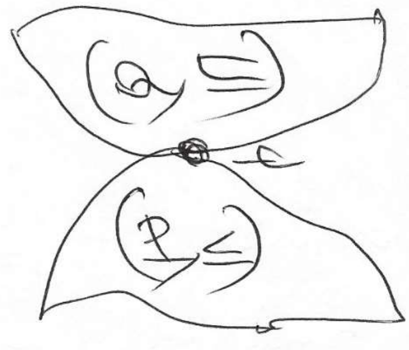
Dem.: Notăm posetul sumă ordinală astfel:

$$(P\oplus Q, \le \oplus \sqsubseteq) := (P,\le)\oplus(Q,\sqsubseteq),$$

iar elementul comun al celor două poseturi în această sumă ordinală cu c:

$c\in P\oplus Q$ a.î. $\{c\} = P\cap Q$ ca submulțimi ale lui $P\oplus Q$:

$(P\oplus Q, \le\oplus\sqsubseteq)$:



Amintesc că $\le\oplus\sqsubseteq =$

$= \le \cup \sqsubseteq \cup \{(x,y) \mid x\in P, y\in Q\}$.

Așadar: $\forall z\in P\oplus Q$:

- dacă $z\in P \Rightarrow z\le c \Rightarrow z(\le\oplus\sqsubseteq)c$
- dacă $z\in Q\Rightarrow c\sqsubseteq z \Rightarrow c(\le\oplus\sqsubseteq)z$.

Deci $(\forall z \in P \oplus Q)$ (c și z sunt comparabile în posetul $(P \oplus Q, \leq \oplus \sqsubseteq)$) $\xrightarrow[\text{anterioară}]{\text{Obs.}}$ Dacă $(P \oplus Q, \leq \oplus \sqsubseteq)$ s-ar putea descompune într-un produs direct netrivial de poseturi, atunci $c = \min(P \oplus Q, \leq \oplus \sqsubseteq)$ sau $c = \max(P \oplus Q, \leq \oplus \sqsubseteq)$.

Dar:

- $\exists \min(P \oplus Q, \leq \oplus \sqsubseteq) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists \min(P, \leq)$, și în acest caz $\min(P \oplus Q, \leq \oplus \sqsubseteq) = \min(P, \leq)$,
- $\exists \max(P \oplus Q, \leq \oplus \sqsubseteq) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists \max(Q, \sqsubseteq)$, și în acest caz $\max(P \oplus Q, \leq \oplus \sqsubseteq) = \max(Q, \sqsubseteq)$,

și $c = \max(P, \leq) =$
$= \min(Q, \sqsubseteq)$.

Așadar,

dacă $e = \min(P \oplus Q, \leq \oplus \sqsubseteq) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \max(P, \leq) = \min(P, \leq) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |P| = 1$ $(\Leftrightarrow P = \{e\})$; $\not\!\!\!\not$ cu $|P| \geq 2$,

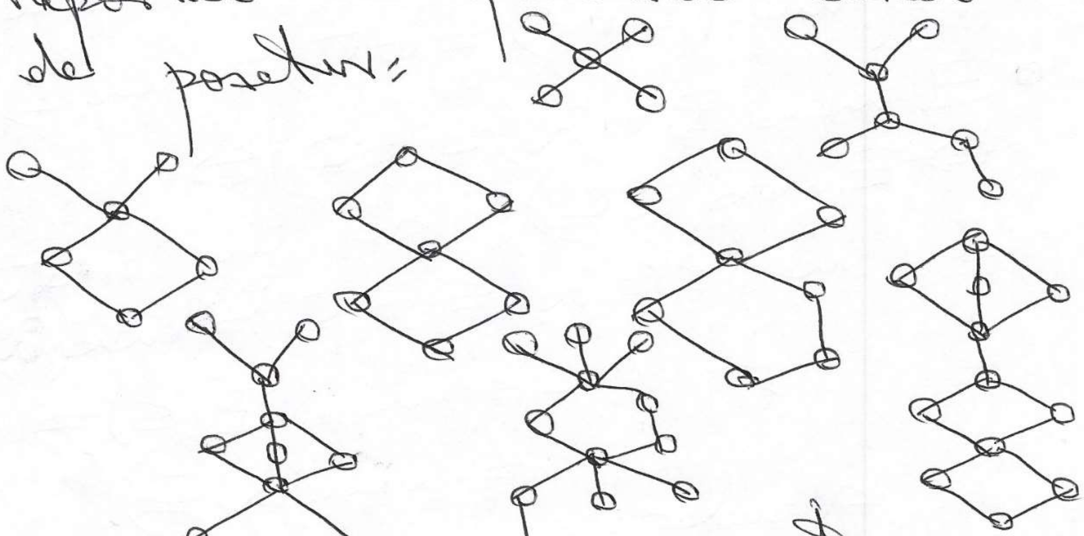
dacă $e = \max(P \oplus Q, \leq \oplus \sqsubseteq) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \min(Q, \sqsubseteq) = \max(Q, \sqsubseteq) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |Q| = 1$ $(\Leftrightarrow Q = \{e\})$; $\not\!\!\!\not$ cu $|Q| \geq 2$,

Prin urmare, $(P \oplus Q, \leq \oplus \sqsubseteq)$ este indecompozabil raportat la produsul direct de poseturi.

Ex.: Conform observației anterioare, și următoarele poseturi sunt indecompozabile raportat la produsul direct de poseturi:



etc..