Funcţii: Tipuri, Imagini şi Preimagini, Inverse la Stânga şi la Dreapta

SEMINAR DE LOGICĂ MATEMATICĂ ŞI COMPUTAŢIONALĂ

Claudia MUREŞAN

c.muresan@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro

Universitatea din Bucureşti, Facultatea de Matematică şi Informatică

Semestrul I, 2020-2021

Caracterizarea tipurilor de funcţii prin intermediul imaginii şi preimaginii

Exerc.: $A, B \rightarrow$ mulțimi; $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$; $f : A \rightarrow B$. Dem. că:

(1) $(\forall X \subseteq A)(f^{-1}(f(X)) \supseteq X)$;

(2) $(\forall Y \subseteq B)(f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y)$;

(3) $f \rightarrow$ injectivă $\Leftrightarrow (\forall X \subseteq A)(f^{-1}(f(X)) = X)$;

(4) $f \rightarrow$ surjectivă $\Leftrightarrow (\forall Y \subseteq B)(f(f^{-1}(Y)) = Y)$

REZOLVARE:

Pt. orice $X \subseteq A$ şi $Y \subseteq B$:

$f(X) \stackrel{(def)}{=} \{f(a) \mid a \in X\} \subseteq B$ şi

$f^{-1}(Y) \stackrel{(def)}{=} \{a \in A \mid f(a) \in Y\} \subseteq A$,

prin urmare, pt. orice $a \in A$ şi $b \in B$, au loc echivalenţele:

(*) $a \in f^{-1}(Y) \Leftrightarrow f(a) \in Y$, şi:

(**) $b \in f(X) \Leftrightarrow (\exists x \in X)(f(x) = b)$.

(1) Fie $X \subseteq A$, şi $a \in X$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(a) \in f(X) \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} a \in f^{-1}(f(X)) \Rightarrow$

$\Rightarrow X \subseteq f^{-1}(f(X))$.

(2) Fie $Y \subseteq B$, şi $b \in f(f^{-1}(Y))$

$\stackrel{(**)}{\Leftrightarrow} (\exists\, \underbrace{a \in f^{-1}(Y)}_{\stackrel{(*)}{\Leftrightarrow}\ a \in A \text{ şi } f(a) \in Y})(b = f(a))$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow b = f(a) \in Y. \Rightarrow f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$.

(3) $\underline{\text{"}\Rightarrow\text{"}}$: Fie $X \subseteq A$. $\overset{(2)}{\Rightarrow} X \subseteq f^{-1}(f(X))$.

Fie $a \in f^{-1}(f(X)) \overset{(*)}{\Leftrightarrow} [a \in A$ și $f(a) \in f(X) = \{f(u) \mid u \in X\}] \Rightarrow (\exists\, t \in X)(f(a) = f(t)) \xRightarrow{f-\text{inj.}} a = t \in X \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{-1}(f(X)) \subseteq X$.

$\Rightarrow f^{-1}(f(X)) = X$.

$\underline{\text{"}\Leftarrow\text{"}}$: Fie $a, t \in A$ a.î. $f(a) = f(t) \Leftrightarrow \underbrace{\{f(a)\}}_{= f(\{a\})} = \underbrace{\{f(t)\}}_{= f(\{t\})} \Leftrightarrow$

2 mulț. sunt = $\Leftrightarrow$ au aceleași elem.

propr. I fol. mai jos și

$\Leftrightarrow f(\{a\}) = f(\{t\}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{f^{-1}(f(\{a\}))}_{= \{a\}} = \underbrace{f^{-1}(f(\{t\}))}_{= \{t\}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{a\} = \{t\} \Leftrightarrow a = t \Rightarrow f$ e injectivă.

(4) $\underline{\text{"}\Rightarrow\text{"}}$: Fie $Y \subseteq B$. $\overset{(2)}{\Rightarrow}$

$\overset{(2)}{\Rightarrow} f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$.

Fie $b \in Y \subseteq B \xrightarrow{f \to \text{surj.}} (\exists a \in A)$

$\underbrace{(f(a) = b \in Y)}$.

$\Downarrow (*)$

$a \in f^{-1}(Y) \Rightarrow f(a) \in f(f^{-1}(Y))$.

$\Rightarrow b = f(a) \in f(f^{-1}(Y)) \Rightarrow Y \subseteq$

$\subseteq f(f^{-1}(Y))$.

$\Longrightarrow f(f^{-1}(Y)) = Y$.

"$\Leftarrow$": Fie $b \in B \Leftrightarrow \{b\} \subseteq B \Rightarrow$

$\Rightarrow f(f^{-1}(\{b\})) = \{b\} \ni b \Rightarrow$

$\Rightarrow b \in f(f^{-1}(\{b\})) \overset{(**)}{\Longleftrightarrow} (\exists a \in$

$\in \underbrace{f^{-1}(\{b\})}_{\subseteq A})(b = f(a))$.

$\Rightarrow (\exists a \in A)(f(a) = b) \Rightarrow f$ este surjectivă.

MATERIAL FACULTATIV: caracterizarea tipurilor de funcţii prin existenţa inverselor la stânga sau la dreapta

Exerc.: $A, B \to$ mulțimi; $A \neq \emptyset$; $B \neq \emptyset$;

$f : A \to B$.

Să se dem. că:

1 (1,1) $f \to$ surjectivă $\Leftrightarrow (\exists\, g : B \to A)(f \circ g = id_B)$;

(1,2) $f \to$ bijectivă $\Leftrightarrow (\exists!\, g : B \to A)(f \circ g = id_B)$;

există și este unică

(fiind evident unică la "$\Rightarrow$": $g = f^{-1}$);

2 (2,1) $f \to$ injectivă $\Leftrightarrow (\exists\, h : B \to A)(h \circ f = id_A)$;

(2,2) dacă $|A| \geq 2$, atunci:

$f \to$ bijectivă $\Leftrightarrow (\exists!\, h : B \to A)(h \circ f = id_A)$;

de fapt, "$\Rightarrow$" e valabilă $\forall |A|$, (cu $A \neq \emptyset$)

(fiind unică la "$\Rightarrow$" evident $h = f^{-1}$ evem.);

3 $f \to$ bijectivă $\Leftrightarrow \left(\exists\, B \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} A\right)(f \circ g = id_B$ și $h \circ f = id_A)$.

REZOLVARE:

① 1.1 $\overset{"\Leftarrow"}{\underset{"}{}}$ ip.: $(\exists\, g: B \to A)(f \circ g = id_B)$.

~~f → surjectivă~~

$a_b \in A$ not.

$(\forall\, b \in B)\left(f(g(b)) = (f \circ g)(b) = \right.$

$\left. = id_B(b) = b\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\forall\, b \in B)(\exists\, \underset{g(b)}{\underset{"}{a_b}} \in A)(f(a_b) = b) \Rightarrow$

$\overset{def}{\Rightarrow}$ f → surjectivă.

$\overset{"\Rightarrow"}{\underset{"}{}}$: ip.: f → surjectivă.

$(\exists\, g: B \to A)(f \circ g = id_B)$?

f → surj. $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $(\forall\, b \in B)$($\exists$ cel puțin un elem. $a \in A$)(a.î. $f(a) = b$) $\Rightarrow$

adică mult. acestor elem. a este nevidă (deci și putem alege) aplic.

$f^{-1}(\{b\}) \neq \emptyset$

$\Rightarrow (\forall\, b \in B)$(putem alege un elem $a_b \in A$, a.î. $f(a_b) = b$),

este unic det. de b, pt. că am ales unul singur

Def. $g: B \to A$, $(\forall b \in B)(g(b) := a_b)$

unic det. de b, așadar g este bine definită, i.e. este funcție.

$(\forall b \in B)\left((f \circ g)(b) = f(g(b)) \xlongequal{\text{def. } g} = f(a_b) \xlongequal{\text{def. } a_b} b = id_B(b)\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow f \circ g = id_B$.

(1.2) Dc. $f \to$ bij. $\Rightarrow f \to$ surj. $\Rightarrow$

$\xRightarrow{(1.1)} (\exists g: B \to A)(f \circ g = id_B) \Rightarrow$

$\Leftrightarrow$, e clar f^{-1} pt. că f e bijectivă

$\Rightarrow f^{-1} = f^{-1} \circ id_B = f^{-1} \circ (f \circ g) \xlongequal{\text{asoc. } \circ} \underbrace{(f^{-1} \circ f)}_{id_A} \circ g = id_A \circ g = g \Rightarrow$

$\Rightarrow g = f^{-1} \Rightarrow g \to$ unică (cu propr. din enunț) (i.e. unica inversă la dreapta a lui f față de $\circ$).

(2) (2.1) $\xRightarrow{\quad}$: Ip.: $(\exists h: B \to A)(h \circ f = id_A)$

$f \to$ injectivă.

Fie $a_1, a_2 \in A$, a.î. $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow h(f(a_1)) = h(f(a_2)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (h \circ f)(a_1) = (h \circ f)(a_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow id_A(a_1) = id_A(a_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2 \Rightarrow$

$\overset{def}{\Rightarrow} f \to$ injectivă.

"$\Rightarrow$": Ip.: $f \to$ injectivă,

$(\exists h : B \to A)(h \circ f = id_A)$.

$f \to$ inj. $\overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall b \in B)(\exists$ cel mult un elem. $a \in A)$(a.î. $f(a) = b)$.

Not.: $\begin{cases} B_1 = f(A) \subseteq B; \text{ (imaginea lui } f) \\ B_2 = B \setminus B_1 = B \setminus f(A). \end{cases}$

$B_1, B_2 \to$ partiție a lui B, i.e. submulțimi complementare ale lui B, i.e.: $\begin{cases} B_1 \cup B_2 = B; \\ B_1 \cap B_2 = \emptyset. \end{cases}$

$(\forall b \in B_1 = f(A))(\exists!\, a_b \in A)(f(a_b) = b)$

i.e. unic det. de b

(şi $(\forall b \in B_2 = B \setminus f(A))(\nexists\, a \in A)(f(a) = b)$)

Def. $h: B \to A$, $\begin{cases} (\forall b \in B_1)(h(b) \overset{def}{=} a_b) \\ (\forall b \in B_2)(h(b) \in A \text{ arbitrar}) \end{cases}$

dar unic, i.e. unic det. de b

$B_1 \cup B_2 = B \Rightarrow h$ → complet definită, i.e. definită pe întregul său domeniu, B.

$B_1 \cap B_2 = \emptyset \Leftrightarrow (\nexists\, b)(b \in B_1$ şi $b \in B_2)$, $\Rightarrow h$ → corect definită, i.e. bine definită, i.e. este fct. (i.e. $b \in B \xrightarrow{h}$ unic elem. $\in A$).

$(\forall x \in A)\left((h \circ f)(x) = h(\underbrace{f(x)}_{\in f(A) = B_1}) \overset{def.\, h}{=} a_{f(x)} \in A\right)$.

$f(x) = f(x)$, $a_{f(x)} \overset{def}{=}$ unic în A cu propr. „$f(a_{f(x)}) = f(x)$” $\Rightarrow a_{f(x)} = x$.

$\Rightarrow (\forall x \in A)((h \circ f)(x) = x = id_A(x)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h \circ f = id_A$.

(2.2) Fie f → bij., at. $\Rightarrow f$ → inj. $\overset{(2.1)}{\Longrightarrow} (\exists\, h: B \to A)(h \circ f = id_A) \,/ \circ f^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{(h \circ f) \circ f^{-1}}_{h \circ (f \circ f^{-1}) = h \circ id_B = h} = id_A \circ f^{-1} = f^{-1}$ chiar ∃!

$\Rightarrow h = f^{-1} \Rightarrow h$ → unică.

(1) (1, 1) demonstrată mai sus.

(1, 2) "$\Rightarrow$": Dem. mai sus.

"$\Leftarrow$":

Existența lui $g \xRightarrow{(1,1)} f \to$ surj.: Cf. ip., g este unică cu propr. că $f \circ g = id_B$.

Pp. abs. $f \to$ neinj. $\overset{def}{\Leftrightarrow} (\exists\, a_1, a_2 \in A)(a_1 \neq a_2$ și $f(a_1) = f(a_2) = b \in B)$.

Def. $B \underset{g_2}{\overset{g_1}{\rightrightarrows}} A$, $(\forall\, c \in B)$ dc. $c \neq b$, at. $g_1(c) = g_2(c) \overset{def.}{=} g(c)$;

$g_1(b) = a_1$ și $g_2(b) = a_2$.

$a_1 \neq a_2$.

$\Rightarrow g_1 \neq g_2$.

$(\forall\, c \in B \setminus \{b\})((f \circ g_1)(c) =$
$= f(g_1(c)) = f(g(c)) = (f \circ g)(c) =$

$= id_B(c) = c$, şi, analog,

$(f \circ g_2)(c) = c$,

$$(f \circ g_1)(b) = f(g_1(b)) = f(a_1) = b$$
$$(f \circ g_2)(b) = f(g_2(b)) = f(a_2) = b.$$

$\Rightarrow (\forall c \in B)\big((f \circ g_1)(c) = (f \circ g_2)(c) =$
$= c = id_B(c)\big) \Leftrightarrow f \circ g_1 = f \circ g_2 =$
$= id_B$, dar $g_1 \neq g_2$, şi, cf. ip., f are o unică inversă la dreapta față de $\circ$, anume g, $\Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{X}. \Rightarrow f \rightarrow$ injectivă,

$\Rightarrow f \rightarrow$ bijectivă,

② (2,1) Dem. mai sus.

(2,2) "$\Rightarrow$": Dem. mai sus.

"$\Leftarrow$":

Existența lui $h \xRightarrow{(2,1)} f \rightarrow$ injectivă.

Pp. prin absurd că $f \to$ nesurj.

$\Leftrightarrow \underbrace{f(A)}_{\subseteq B} \neq B \Rightarrow f(A) \subsetneq B \Leftrightarrow B \setminus f(A) \neq$

$\neq \emptyset \Leftrightarrow \exists\, b \in B \setminus f(A)$.

$|A| \geq 2 \Leftrightarrow (\exists\, a_1, a_2 \in A)\ a_1 \neq a_2$.

Def. $B \underset{h_2}{\overset{h_1}{\rightrightarrows}} A$, $(\forall\, c \in B \setminus \{b\})$

$(h_1(c) = h_2(c) = h(c))$;

$h_1(b) = a_1$ și $h_2(b) = a_2$.

$\left.\begin{array}{r} \\ a_1 \neq a_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow h_1 \neq h_2$.

$(\forall\, a \in A)(f(a) \in f(A) \not\ni b) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\forall\, a \in A)(f(a) \in B \setminus \{b\}) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\forall\, a \in A)((h_1 \circ f)(a) = h_1(f(a)) =$

$= h(f(a)) = (h \circ f)(a) = a = id_A(a) =$

analog $(h_2 \circ f)(a)$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow h_1 \circ f = h_2 \circ f = id_A$.

dar $h_1 \neq h_2$, și, cf. ip.,

$(\exists!\ h : B \to A)(h \circ f = id_A)$.

$\Rightarrow$ Ab. $\Rightarrow f \to$ surjectivă.

$\Rightarrow f \to$ bijectivă.

③ $\Leftarrow$ (1.1) și (2.1).

MATERIAL FACULTATIV: caracterizarea tipurilor de funcţii prin proprietăţi ale funcţiilor imagine şi preimagine asociate acestor funcţii

Exerc.: $A, B \to$ mulțimi; $A \neq \emptyset$; $B \neq \emptyset$;

$f : A \to B$.

Considerăm funcțiile:

$$\begin{cases} f_* : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B), \ (\forall M \subseteq A)\left(f_*(M) := f(M)\right) \\ f^* : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A), \ (\forall N \subseteq B)\left(f^*(N) := f^{-1}(N)\right) \end{cases}$$

(1) Să se dem. că următoarele afirmații sunt echivalente:

(1.a) $f \to$ injectivă;

(1.b) $f_* \to$ injectivă;

(1.c) $f^* \to$ surjectivă;

(1.d) $f^* \circ f_* = id_{\mathcal{P}(A)}$ i.e.: $(\forall M \subseteq A)\ f^{-1}(f(M)) = M$

(1.e) $(\forall M \subseteq A)\left(f(A \setminus M) \subseteq B \setminus f(M)\right)$

(2) Să se dem. că următoarele afirmații sunt echivalente:

(2.a) $f \to$ surjectivă;

(2.b) $f_* \to$ surjectivă;

(2.c) $f^* \to$ injectivă;

(2.d) $f_* \circ f^* = id_{\mathcal{P}(B)}$, i.e.:

$$(\forall N \subseteq B)\left(f\left(f^{-1}(N)\right) = N\right);$$

(2.e) $(\forall M \subseteq A)\left(f(A \setminus M) \supseteq B \setminus f(M)\right)$.

(3) ~~A~~ Se observa faptul că, din (1) şi (2), rezultă că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(3.a) $f \to$ bijectivă;

(3.b) $f_* \to$ bijectivă;

(3.c) $f^* \to$ bijectivă;

(3.d) f_* şi f^* sunt inverse una alteia; (v. în (1.d) şi (2.d) cele 2 condiţii cu tot cu precedentele echivalente)

(3.e) $(\forall M \subseteq A)\left(f(A \setminus M) = B \setminus f(M)\right)$

REZOLVARE:

(1) $(1.a) \Rightarrow (1.b)$:

Prin ipoteza acestei implicații, f este injectivă.

Fie $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(A)$, a.î. $f_*(A_1) = f_*(A_2) \Leftrightarrow f(A_1) = f(A_2)$.

Fie $a \in A_1 \Rightarrow f(a) \in f(A_1) = f(A_2) \Rightarrow (\exists\, x \in A_2)(f(a) = f(x)) \xRightarrow{f \to \text{injectivă}} a = x \in A_2 \Rightarrow a \in A_2 \Rightarrow A_1 \subseteq A_2$.

Analog, $\Rightarrow A_2 \subseteq A_1$.

$\Rightarrow A_1 = A_2 \Rightarrow f_*$ este injectivă.

<u>$(1.b) \Rightarrow (1.a)$:</u>

Pp. $f_* \to$ injectivă.

Fie $a_1, a_2 \in A$, a.î. $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow f_*(\{a_1\}) = \{f(a_1)\} = \{f(a_2)\} = f_*(\{a_2\}) \xRightarrow{f_* \to \text{injectivă}} \{a_1\} = \{a_2\} \Leftrightarrow a_1 = a_2 \Rightarrow f \to$ injectivă.

$\underline{(1,a) \underset{"}{\Rightarrow} (1,c)}$:

Pp. $f \to$ injectivă.

Fie $M \subseteq A$.

Not. $N := f(M) = \{f(a) \mid a \in M\}$.

$$f^*(N) = f^{-1}(N) = \{x \in A \mid f(x) \in N\} =$$
$$= \{x \in A \mid f(x) \in f(M)\} = \{x \in A \mid (\exists\, a \in M)\ f(x) = f(a)\} \xlongequal{f \to \text{inj.}} \{x \in A \mid (\exists\, a \in M)\ x = a\} =$$
$$= \{x \in A \mid x \in M\} = M. \Rightarrow f^* \to \text{surjectivă}.$$

$\underline{(1,c) \underset{"}{\Rightarrow} (1,a)}$:

Pp. $f^* \to$ surjectivă.

Fie $a_1, a_2 \in A$ a.î. $f(a_1) = f(a_2)$.

$$\left.\begin{array}{l} \{a_1\}, \{a_2\} \in \mathcal{P}(A). \\ f^* \to \text{surjectivă}. \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (\exists\, B_1, B_2 \in \mathcal{P}(B))$ a.î. $f^*(B_1) = \{a_1\}$ și $f^*(B_2) = \{a_2\}$. $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(B_1) = \{a_1\} \Rightarrow a_1 \in f^{-1}(B_1) \Leftrightarrow \\ \qquad \Leftrightarrow f(a_1) \in B_1. \ (*) \\ f^{-1}(B_2) = \{a_2\} \Rightarrow a_2 \in f^{-1}(B_2) \Leftrightarrow \\ \qquad \left.\begin{array}{l} \Leftrightarrow f(a_2) \in B_2 \\ f(a_1) = f(a_2) \end{array}\right] \Rightarrow \end{cases}$$

$\Rightarrow f(a_1) \in B_2.$ $(**)$

$(*), (**) \Rightarrow f(a_1) \in B_1 \cap B_2. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_1 \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) \underset{\text{v. exerc. cu } \cup, \cap \text{ de imagini, preimagini}}{=}$

$= f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = \{a_1\} \cap \{a_2\}.$

$\Leftrightarrow a_1 \in \{a_2\} \Leftrightarrow a_1 = a_2. \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ este injectivă.

$(1.a) \Rightarrow (1.d)$:

Pp. $f \to$ injectivă.

Din dem. implicației "$(1.a) \Rightarrow (1.c)$", rezultă că: $(\forall M \subseteq A)(f^{-1}(f(M)) = M)$, ceea ce înseamnă că: $(\forall M \subseteq A)(f^*(f_*(M)) = M)$, adică exact: $f^* \circ f_* = id_{\mathcal{P}(A)}$.

$\underline{(1.d) \Rightarrow (1.a)}$:

Pp. că $f^* \circ f_* = id_{\mathcal{P}(A)}$. (I)

Fie $a_1, a_2 \in A$ a.î. $f(a_1) = f(a_2)$. $\Rightarrow \{a_1\} \overset{(I)}{=} f^*(f_*(\{a_1\})) = f^*(f(\{a_1\})) = f^*(\{f(a_1)\}) =$
$= f^*(\{f(a_2)\}) = f^*(f(\{a_2\})) =$
$= f^*(f_*(\{a_2\})) \overset{(I)}{=} \{a_2\}. \Rightarrow$
$\Rightarrow \{a_1\} = \{a_2\} \Leftrightarrow a_1 = a_2. \Rightarrow f$ - inj.

$\underline{(1.a) \Rightarrow (1.e)}$:

Pp. f - injectivă.

Fie $M \subseteq A$.

$f(A \setminus M) \cap f(M) \xrightarrow[\cap \text{ de imagini, preimagini}]{f - \text{inj.; v. exerc. cu } \cup,}$
$= f(\underbrace{(A \setminus M) \cap M}_{\text{nu au elem. comune}}) = f(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow$
$\Rightarrow f(A \setminus M) \subseteq B \setminus f(M)$.

($f(A \setminus M) \subseteq B$ și $f(A \setminus M)$ nu are elemente comune cu $f(M)$.)

$(1,e) \Rightarrow (1,a)$:

Pp. că $(\forall M \subseteq A)\left(f(A \setminus M) \subseteq B \setminus f(M)\right)$. $(\blacktriangle)$

Fie $a_1, a_2 \in A$ a.î. $f(a_1) = f(a_2)$. $\Rightarrow \{f(a_1)\} = \{f(a_2)\}$. $(\square)$

Pp. prin absurd că $a_1 \neq a_2$. $\Leftrightarrow a_1 \in A \setminus \{a_2\}$. $\Rightarrow f(a_1) \in f(A \setminus \{a_2\}) \overset{(\blacktriangle)}{\subseteq} B \setminus \{f(a_2)\} \overset{(\square)}{=} B \setminus \{f(a_1)\}$. $\Rightarrow f(a_1) \neq f(a_1)$. $\Rightarrow$ X. $\Rightarrow a_1 = a_2$. $\Rightarrow f$ este injectivă.

Obs.: Există multe metode de a dem. echivalențele de la (1), unele mult mai scurte decât cea de sus, în care se observă unele „scurtături", ca de exemplu:

$(1,d) \xrightarrow[\exists \text{ inversei la stg.}]{\text{caract. inj. prin}} (1,b)$

$(1,d) \xrightarrow[\text{prin } \exists \text{ inversei la dreapta}]{\text{caract. surj.}} (1,c)$ etc..

Dar am preferat să dem. aceste echivalențe în modul acesta:

$$\begin{tikzcd}
(1.b) \arrow[dr, Leftrightarrow] & & (1.c) \\
& (1.a) \arrow[ur, Leftrightarrow] \arrow[dl, Leftrightarrow] \arrow[dr, Leftrightarrow] & \\
(1.d) & & (1.e)
\end{tikzcd}$$

pentru a pune în evidență legătura directă dintre injectivitatea lui f (condiția $(1.a)$) și celelalte ~~proprietăți~~.

Un comentariu similar este valabil pt. dem. de mai jos a echivalențelor de la (2).

(2) $(2.a) \Rightarrow (2.b)$:

Pp. că f este surjectivă.

Fie $N \subseteq B$ și $M := f^{-1}(N) \subseteq A$.

$$f_*(M) = f_*(f^{-1}(N)) = f(f^{-1}(N)).$$

$$N = f(f^{-1}(N)).$$

Fie $b \in N$. $\xRightarrow{f \text{ surj.}} (\exists\, a \in A)(b = f(a)) \Rightarrow f(a) \in N \Leftrightarrow a \in f^{-1}(N) \Rightarrow$

$\Rightarrow b = f(a) \in f(f^{-1}(N)). \Rightarrow$

$\Rightarrow N \subseteq f(f^{-1}(N)).$ $(***)$

Acum fie $b \in f(f^{-1}(N)). \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\exists\, a \in f^{-1}(N))(b = f(a)).$ $\Rightarrow$

$\Downarrow$

$f(a) \in N.$

$\Rightarrow b \in N. \Rightarrow f(f^{-1}(N)) \subseteq N. \ (****).$

$(***), (****) \Rightarrow f(f^{-1}(N)) = N. \Rightarrow$

$\xRightarrow[\text{începutul acestei părți a rezolvării}]{\text{egalitățile de la}} f_*(M) = N. \Rightarrow f_*$ e surjectivă.

$\underline{(2, b) \Rightarrow (2, a):}$

Pp. $f_* \rightarrow$ surjectivă.
Fie $b \in B. \Leftrightarrow \{b\} \subseteq B.$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists\, M \subseteq A)(f_*(M) = \{b\}).$
$\{b\} \neq \emptyset.$ $\Rightarrow M \neq \emptyset. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists\, a \in M. \Rightarrow f(a) \in f(M) = f_*(M) = \{b\} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(a) = b. \Rightarrow f$ e surjectivă.

$\underline{(2, a) \Rightarrow (2, c)}$:

Pp. $f \rightarrow$ surjectivă.

Fie $B_1, B_2 \in \mathcal{P}(B)$, a.î. $f^*(B_1) = f^*(B_2). \Leftrightarrow f^{-1}(B_1) = f^{-1}(B_2). \Rightarrow$

$\Rightarrow f(f^{-1}(B_1)) = f(f^{-1}(B_2))$.

Din dem. implicației "$(2, a) \Rightarrow (2, b)$", cum f e surjectivă, $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(f^{-1}(B_1)) = B_1 \text{ și} \\ f(f^{-1}(B_2)) = B_2. \end{cases}$$

$\Rightarrow B_1 = B_2. \Rightarrow f^*$ e injectivă.

$\underline{(2, c) \Rightarrow (2, a)}$:

Pp. $f^* \rightarrow$ injectivă.

Fie $b \in B. \Rightarrow \{b\} \neq \emptyset.$

$\Rightarrow f^{-1}(\{b\}) = f^*(\{b\}) \neq f^*(\emptyset) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset. \Rightarrow f^{-1}(\{b\}) \neq \emptyset. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists\, a \in f^{-1}(\{b\}). \Rightarrow f(a) \in \{b\}. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(a) = b. \Rightarrow f \rightarrow$ surjectivă.

$(2.a) \Rightarrow (2.d)$:

Pp. f → surjectivă. Din dem. implicației "$(2.a) \Rightarrow (2.b)$", $\Rightarrow$

$\Rightarrow (\forall N \subseteq B)\left(f_*(f^*(N)) = f_*(f^{-1}(N)) = N\right) \Rightarrow f_* \circ f^* = id_{\mathcal{P}(B)}$.

$(2.d) \Rightarrow (2.a)$:

Pp. că $f_* \circ f^* = id_{\mathcal{P}(B)}$.
Fie $b \in B \Leftrightarrow \{b\} \subseteq B$. $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \{b\} = f_*(f^*(\{b\})) = f(f^{-1}(\{b\})) \Rightarrow b \in f(f^{-1}(\{b\})) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\exists\, a \in \underbrace{f^{-1}(\{b\})}_{\subseteq A}\right)(f(a) = b) \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ e surjectivă.

$(2.a) \Rightarrow (2.e)$:

Pp. f → surjectivă.
Fie $M \subseteq A$. Ac.

$= \emptyset$, etc. $\Rightarrow B \setminus f(M) \subseteq f(A \setminus M)$. (•) $^{B} \setminus f(M) =$

Ac. $B \setminus f(M) \neq \emptyset$, atunci $\Rightarrow \exists\, b \in B \setminus f(M)$.

$f \to$ surjectivă. $\Rightarrow (\exists\, a \in A)(f(a) = b)$,
$b \notin f(M)$. $\Big] \Rightarrow$

$\Rightarrow a \notin M. \Leftrightarrow a \in A \setminus M. \Rightarrow b = f(a) \in$
$\in f(A \setminus M). \Rightarrow B \setminus f(M) \subseteq f(A \setminus M)$. (••)

(•), (••) $\Rightarrow$ În oricare dintre cazuri, are
loc: $B \setminus f(M) \subseteq f(A \setminus M)$.

$(2.a) \Rightarrow (2.e)$ "
$\Leftarrow$

Pp. că $(\forall M \subseteq A)(f(A \setminus M) \supseteq B \setminus f(M))$. $\Rightarrow$

Luăm $M = \emptyset. \Rightarrow \begin{cases} A \setminus M = A, \\ f(M) = f(\emptyset) = \emptyset \end{cases}$
$\Rightarrow B \setminus f(M) = B$.

$\Rightarrow f(A) \supseteq B \Leftrightarrow (\forall\, b \in B)(b \in f(A)) \Leftrightarrow$

(desigur, este "=", pt. că "$\subseteq$" are loc întotdeauna)

$\Leftrightarrow (\forall\, b \in B)(\exists\, a \in A)(b = f(a)). \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ este surjectivă.