

Breviar pentru Secțiunea despre Mulțimi, Funcții, Relații a Cursului de Logică Matematică și Computațională

Claudia MUREȘAN

Universitatea din București, Facultatea de Matematică și Informatică

c.muresan@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro, claudia.muresan@unibuc.ro

~ ANUL I DE STUDIU AL CICLULUI DE LICENȚĂ, SEMESTRUL I ~

Prescurtări uzuale:

- **i. e.** = id est = adică
- **ddacă** = dacă și numai dacă
- **a. î.** = astfel încât
- **ș. a. m. d.** = și așa mai departe
- “:=”: abreviere pentru: $\overset{\text{definiție}}{=}$, $\overset{\text{notație}}{=}$
- --- : notație pentru: ”să se demonstreze că”

1 Teoria mulțimilor: teorie naivă versus teorie axiomatică

- O definiție din **teoria naivă a mulțimilor**: o *mulțime* este o colecție de obiecte **bine determinate** și **distincte**, numite *elementele mulțimii*.
- **distincte**: o mulțime nu conține un același obiect de mai multe ori; un element apare într-o mulțime o singură dată
- **bine determinate**: orice mulțime are o descriere precisă, care o identifică în mod unic, adică îi identifică în mod unic elementele

A se vedea în Cursul I Paradoxul lui Bertrand Russell, care arată că **nu există mulțimea tuturor mulțimilor**. Totalitatea mulțimilor nu formează o mulțime, ci o **clasă**.

Din punctul de vedere al teoriei naive a mulțimilor, nu se pot spune multe lucruri despre noțiunea de *clasă*, decât că este “ceva mai vag/mai mare/mai cuprinzător decât o mulțime”. Se consideră că orice mulțime este o clasă, dar nu și invers. Clasele care nu sunt mulțimi se numesc *clase proprii*.

Semnul (simbolul) de apartenență **nu** poate apărea la dreapta unei clase proprii, adică nu se consideră a avea sens faptul că o clasă proprie aparține unui alt obiect.

Așadar **nu există clasa tuturor claselor**, din simplul motiv că nu există un obiect care să aibă clase proprii ca elemente.

- O *axiomă* este un fapt **dat** ca fiind adevărat într-o teorie matematică.
- O *axiomă* nu se demonstrează, ci pur și simplu este **dată** ca fiind adevărată.
- Faptul de a fi axiomă **nu este o proprietate intrinsecă** a unei afirmații.
- *formalizare*: exprimare folosind **numai** simboluri matematice
- *metalimbaj*: “limbajul natural”, “vorbirea curentă (obișnuită)”, “exprimarea în cuvinte”, “fără simboluri matematice”

2 Echivalențe logice între diferite tipuri de enunțuri

Lucrăm numai cu enunțuri care sunt **fie false, fie adevărate**.

Conectorii logici: folosiți pentru a lega enunțuri, formând astfel *enunțuri compuse*:

- *disjuncția*: sau
- *conjuncția*: și
- *negația*: non
- *implicația*: \Rightarrow
- *echivalența*: \Leftrightarrow

Pentru orice enunțuri (propoziții, afirmații, proprietăți) p, q și r , au loc echivalențele următoare:

- $[p \text{ sau } (q \text{ și } r)] \Leftrightarrow [(p \text{ sau } q) \text{ și } (p \text{ sau } r)]$
- $[p \text{ și } (q \text{ sau } r)] \Leftrightarrow [(p \text{ și } q) \text{ sau } (p \text{ și } r)]$
- $\text{non } (p \text{ sau } q) \Leftrightarrow [(\text{non } p) \text{ și } (\text{non } q)]$
- $\text{non } (p \text{ și } q) \Leftrightarrow [(\text{non } p) \text{ sau } (\text{non } q)]$
- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\text{non } p) \text{ sau } q]$
- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\text{non } q) \Rightarrow (\text{non } p)]$ (**principiul reducerii la absurd**)
- $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(\text{non } p) \Leftrightarrow (\text{non } q)]$ (consecință imediată a principiului reducerii la absurd și a faptului că $(p \Leftrightarrow q) \stackrel{\text{def.}}{=} [(p \Rightarrow q) \text{ și } (q \Rightarrow p)]$)
- implicația $[p \Rightarrow q]$ este echivalentă cu $[(\text{non } p) \text{ sau } q]$

Cuantificatorii:

- *cuantificatorul universal:* \forall
- *cuantificatorul existențial:* \exists

Dacă x este o variabilă, iar $p(x)$ este o proprietate referitoare la x (mai precis o proprietate referitoare la elementele pe care le parcurge/le poate denumi x), atunci:

- $\text{non } [(\forall x) (p(x))] \Leftrightarrow (\exists x) (\text{non } p(x))$
- $\text{non } [(\exists x) (p(x))] \Leftrightarrow (\forall x) (\text{non } p(x))$

Notația 2.1. Alăturarea de simboluri $\exists!$ semnifică “există un unic”, “există și este unic”.

Observația 2.2. $\exists!$ nu este un cuantificator, ci este o notație prescurtată pentru enunțuri compuse: dacă x este o variabilă, iar $p(x)$ este o proprietate asupra lui x , atunci scrierea $(\exists! x) (p(x))$ este o abreviere pentru enunțul scris, desfășurat, astfel:

$$(\exists x) (p(x)) \text{ și } (\forall y) (\forall z) [(p(y) \text{ și } p(z)) \Rightarrow y = z],$$

unde y și z sunt variabile.

Cuantificatori aplicați fixând un domeniu al valorilor:

Fie M o mulțime, x o variabilă, iar $p(x)$ o proprietate referitoare la elementele lui M . Atunci următoarele scrieri sunt abrevieri pentru scrierile fără domeniu al valorilor lângă cuantificatori:

- $(\forall x \in M) (p(x)) \stackrel{\text{not.}}{\Leftrightarrow} (\forall x) (x \in M \Rightarrow p(x))$
- $(\exists x \in M) (p(x)) \stackrel{\text{not.}}{\Leftrightarrow} (\exists x) (x \in M \text{ și } p(x))$

Toate proprietățile logice pentru enunțuri cuantificate din acest curs se scriu la fel și sunt valabile și pentru cuantificatori urmați de un domeniu al valorilor pentru variabila cuantificată.

Cuantificatorii de același fel comută, cei diferiți nu:

Fie x și y variabile, iar $p(x, y)$ o proprietate asupra lui x și y . Atunci:

- $(\forall x) (\forall y) (p(x, y)) \Leftrightarrow (\forall y) (\forall x) (p(x, y))$
- $(\exists x) (\exists y) (p(x, y)) \Leftrightarrow (\exists y) (\exists x) (p(x, y))$
- $(\forall x) (\exists y) (p(x, y)) \not\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\exists y) (\forall x) (p(x, y))$ (pentru fiecare valoare a lui x , valoarea lui y pentru care e satisfăcut enunțul din stânga depinde de valoarea lui x)

Analog, dacă A și B sunt mulțimi, avem:

- $(\forall x \in A) (\forall y \in B) (p(x, y)) \Leftrightarrow (\forall y \in B) (\forall x \in A) (p(x, y))$
- $(\exists x \in A) (\exists y \in B) (p(x, y)) \Leftrightarrow (\exists y \in B) (\exists x \in A) (p(x, y))$

- $(\forall x \in A) (\exists y \in B) (p(x, y)) \not\equiv (\exists y \in B) (\forall x \in A) (p(x, y))$

Desigur, la fel pentru cazul în care doar unul dintre cuantificatori este aplicat cu un domeniu al valorilor pentru variabila cuantificată: $(\forall x) (\forall y \in B) (p(x, y)) \Leftrightarrow (\forall y \in B) (\forall x) (p(x, y))$ etc..

Cuantificatori, disjuncții și conjuncții logice:

Să observăm și următoarele proprietăți logice: dacă x este o variabilă, iar $p(x)$ și $q(x)$ sunt enunțuri referitoare la x , atunci:

- $(\forall x) (p(x) \text{ și } q(x)) \Leftrightarrow (\forall x) (p(x)) \text{ și } (\forall x) (q(x))$
- $(\exists x) (p(x) \text{ sau } q(x)) \Leftrightarrow (\exists x) (p(x)) \text{ sau } (\exists x) (q(x))$
- $(\forall x) (p(x) \text{ sau } q(x)) \not\equiv (\forall x) (p(x)) \text{ sau } (\forall x) (q(x))$
- $(\exists x) (p(x) \text{ și } q(x)) \not\equiv (\exists x) (p(x)) \text{ și } (\exists x) (q(x))$

Scoaterea de sub un cuantificator a unui enunț care nu depinde de variabila cuantificată:

Dacă, în enunțurile compuse cuantificate de mai sus, în locul lui $q(x)$ avem un enunț q care nu depinde de x , atunci:

$$(\forall x) q \Leftrightarrow q \Leftrightarrow (\exists x) q,$$

așadar, în acest caz, din proprietățile anterioare obținem:

- $(\forall x) (p(x) \text{ și } q) \Leftrightarrow (\forall x) (p(x)) \text{ și } q$
- $(\exists x) (p(x) \text{ sau } q) \Leftrightarrow (\exists x) (p(x)) \text{ sau } q$
- $(\forall x) (p(x) \text{ sau } q) \not\equiv (\forall x) (p(x)) \text{ sau } q$
- $(\exists x) (p(x) \text{ și } q) \not\equiv (\exists x) (p(x)) \text{ și } q$

Acum fie p , q și r enunțuri. Atunci, din proprietățile: $[p \text{ sau } (q \text{ și } r)] \Leftrightarrow [(p \text{ sau } q) \text{ și } (p \text{ sau } r)]$, $[p \text{ și } (q \text{ sau } r)] \Leftrightarrow [(p \text{ și } q) \text{ sau } (p \text{ și } r)]$, $\text{non } (p \text{ sau } q) \Leftrightarrow [(\text{non } p) \text{ și } (\text{non } q)]$, $\text{non } (p \text{ și } q) \Leftrightarrow [(\text{non } p) \text{ sau } (\text{non } q)]$ și $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\text{non } p) \text{ sau } q]$, se pot deduce următoarele proprietăți:

- $[p \Rightarrow (q \text{ și } r)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \text{ și } (p \Rightarrow r)]$
- $[p \Rightarrow (q \text{ și } r)] \not\equiv [(p \Rightarrow q) \text{ sau } (p \Rightarrow r)]$
- $[p \Rightarrow (q \text{ sau } r)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \text{ sau } (p \Rightarrow r)]$
- $[p \Rightarrow (q \text{ sau } r)] \not\equiv [(p \Rightarrow q) \text{ și } (p \Rightarrow r)]$
- $[(q \text{ sau } r) \Rightarrow p] \Leftrightarrow [(q \Rightarrow p) \text{ și } (r \Rightarrow p)]$
- $[(q \text{ sau } r) \Rightarrow p] \not\equiv [(q \Rightarrow p) \text{ sau } (r \Rightarrow p)]$
- $[(q \text{ și } r) \Rightarrow p] \Leftrightarrow [(q \Rightarrow p) \text{ sau } (r \Rightarrow p)]$
- $[(q \text{ și } r) \Rightarrow p] \not\equiv [(q \Rightarrow p) \text{ și } (r \Rightarrow p)]$

3 Operații cu mulțimi și relații între mulțimi

Notăția 3.1. • Păstrăm notația consacrată pentru **simbolul de apartenență**, ce indică faptul că un obiect este element al altui obiect (mulțime, clasă).

- Păstrăm notația clasică, folosind acolade, pentru specificarea elementelor unei mulțimi (fie prin enumerare, fie printr-o proprietate a lor).

Amintim că are sens să ne referim la obiecte (elemente, mulțimi, clase) arbitrare, pentru care nu specificăm un domeniu al valorilor.

Notația 3.2. Păstrăm notațiile cunoscute \cup , \cap , \setminus și Δ pentru **reuniunea**, **intersecția**, **diferența** și, respectiv, **diferența simetrică** între mulțimi.

Amintim că, pentru orice mulțimi A și B , se definesc:

- $A \cup B \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\};$
- $A \cap B \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\};$
- $A \setminus B \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\};$
- $A \Delta B \stackrel{\text{def.}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$

A se revedea proprietățile operațiilor cu mulțimi demonstrate la seminar, precum și cele lăsate ca temă pentru acasă în cursul orelor de seminar!

Vom face mereu apel și la cunoștințe din gimnaziu și liceu, dintre care pe unele le vom aminti, de regulă doar enunțându-le.

Notația 3.3. Păstrăm notațiile \subseteq , \subsetneq , \supseteq și \supsetneq pentru **incluziunile** și **incluziunile stricte** dintre mulțimi în **fiecare sens**. Vom mai nota incluziunile stricte și cu \subset și respectiv \supset , dar numai atunci când precizarea că este vorba de o incluziune strictă și nu poate avea loc egalitatea de mulțimi nu ne folosește în cele prezentate.

Amintim că, pentru orice mulțimi A și B :

- $A = B \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall x) [x \in A \Leftrightarrow x \in B]$ (prin definiție, două mulțimi sunt egale dacă au aceleași elemente);
- $A \subseteq B \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall x) [x \in A \Rightarrow x \in B];$
- $A \supseteq B \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} B \subseteq A;$
- $A \subsetneq B \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} [A \subseteq B \text{ și } A \neq B];$
- $A \supsetneq B \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} B \subsetneq A.$

Notația 3.4. Vom nota cu \emptyset **mulțimea vidă**, adică mulțimea fără elemente, i.e. unica (conform definiției egalității de mulțimi) mulțime care satisface: $(\nexists x)(x \in \emptyset)$, sau, echivalent: $(\forall x)(x \notin \emptyset)$.

Definiția 3.5. Dacă A și B sunt mulțimi, atunci A se numește:

- *submulțime a lui B* (sau *parte a lui B*) dacă $A \subseteq B$;
- *submulțime proprie* (sau *strictă*) *a lui B* dacă $A \subsetneq B$.

Notația 3.6. Pentru orice mulțime T , vom nota cu $\mathcal{P}(T)$ **mulțimea părților** lui T , i. e. **mulțimea submulțimilor** lui T : $\mathcal{P}(T) = \{X \mid X \subseteq T\}$.

Să notăm cu **xor** conectorul logic *sau exclusiv*, definit astfel: pentru orice enunțuri p și q , enunțul $(p \text{ xor } q)$ este adevărat exact atunci când **exact unul** dintre enunțurile p și q este adevărat, adică exact atunci când $[(p \text{ e adevărat și } q \text{ e fals}) \text{ sau } (q \text{ e adevărat și } p \text{ e fals})]$. Formal:

- $(p \text{ xor } q) \Leftrightarrow [(p \text{ și non } q) \text{ sau } (q \text{ și non } p)]$

Remarca 3.7. Definiția diferenței simetrice arată că, pentru orice mulțimi A și B :

- $A \Delta B = \{x \mid x \in A \text{ xor } x \in B\}.$

A se vedea, în Cursul I, proprietățile logice (cu enunțuri) în care se transcriu următoarele proprietăți pentru calculul cu mulțimi.

Și a se observa faptul că, pentru operații comutative, precum reuniunea și intersecția de mulțimi, distributivitatea la stânga față de alte operații este echivalentă cu distributivitatea la dreapta.

Pentru orice mulțimi A , B , C , D , au loc:

- $A = B$ dacă $[A \subseteq B \text{ și } B \subseteq A]$
- **idempotența reuniunii:** $A \cup A = A$

- **idempotența intersecției:** $A \cap A = A$
- $A \setminus A = \emptyset$
- $A \Delta A = \emptyset$
- **comutativitatea reuniunii:** $A \cup B = B \cup A$
- **comutativitatea intersecției:** $A \cap B = B \cap A$
- **comutativitatea diferenței simetrice:** $A \Delta B = B \Delta A$
- **asociativitatea reuniunii:** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- **asociativitatea intersecției:** $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- **asociativitatea diferenței simetrice:** $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$
- **distributivitatea la stânga a reuniunii față de intersecție:** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- **distributivitatea la dreapta a reuniunii față de intersecție:** $(B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A)$
- **distributivitatea la stânga a intersecției față de reuniune:** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- **distributivitatea la dreapta a intersecției față de reuniune:** $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$
- $A \subsetneq B$ ddacă $[(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B) \text{ și } (\exists x)(x \in B \setminus A)]$ ddacă $[A \subseteq B \text{ și } B \setminus A \neq \emptyset]$ ddacă $[A \subseteq B \text{ și } B \not\subseteq A]$
- $A \subseteq B$ ddacă $(A \subsetneq B \text{ sau } A = B)$
- $A \subseteq A$
- $\text{non}(A \subsetneq A)$
- **tranzitivitatea incluziunii nestricte:** $(A \subseteq B \text{ și } B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$
- $(A \subsetneq B \text{ și } B \subseteq C) \Rightarrow A \subsetneq C$
- $(A \subseteq B \text{ și } B \subsetneq C) \Rightarrow A \subsetneq C$
- **tranzitivitatea incluziunii stricte:** $(A \subsetneq B \text{ și } B \subsetneq C) \Rightarrow A \subsetneq C$
- $A \subseteq A \cup B; B \subseteq A \cup B$
- $A \cap B \subseteq A; A \cap B \subseteq B$
- $A \cup B = B$ ddacă $A \subseteq B$ ddacă $A \cap B = A$
- $\emptyset \subseteq A$
- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \setminus \emptyset = A$
- $A \setminus B = \emptyset$ ddacă $A \subseteq B$
- $\emptyset \setminus A = \emptyset$
- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, adică: $A \subseteq \emptyset$ ddacă $A = \emptyset$
- $A \Delta B = \emptyset$ ddacă $A = B$
- $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$
- $A \cap B = \emptyset$ ddacă $A \setminus B = A$ ddacă $B \setminus A = B$

- $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$
- $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$
- $(A \subseteq B \text{ și } C \subseteq D) \Rightarrow A \cup B \subseteq C \cup D$
- $(A \subseteq B \text{ și } C \subseteq D) \Rightarrow A \cap B \subseteq C \cap D$
- $(A \subseteq C \text{ și } B \subseteq C) \text{ ddacă } A \cup B \subseteq C$
- $(A \subseteq B \text{ și } A \subseteq C) \text{ ddacă } A \subseteq B \cap C$
- $A \subseteq B \Rightarrow (A \setminus C \subseteq B \setminus C)$
- $A \subseteq B \Rightarrow (C \setminus B \subseteq C \setminus A)$
- $(A \subseteq B \text{ și } C \subseteq D) \Rightarrow (A \setminus D \subseteq B \setminus C)$
- $A \setminus B \subseteq A$
- $A \cap (A \setminus B) = A \setminus B$
- $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$

Considerăm o mulțime T , iar $A, B \in \mathcal{P}(T)$. Pentru orice $X \in \mathcal{P}(T)$, notăm cu $\overline{X} = T \setminus X$ (*complementara lui X față de T*). Au loc:

- $\overline{\overline{A}} \in \mathcal{P}(T)$, adică $\overline{\overline{A}} \subseteq T$
- $\overline{\emptyset} = T$
- $\overline{T} = \emptyset$
- $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
- **operația de trecere la complementară este autoduală:** $\overline{\overline{A}} = A$
- **legile lui De Morgan:**
$$\begin{cases} \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \end{cases}$$
- $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ (ușor de demonstrat folosind proprietățile de mai sus)
- $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$
- $A = B \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$
- $A \subsetneq B \Leftrightarrow \overline{B} \subsetneq \overline{A}$
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$; mai mult:
- $A \cap B = \emptyset \text{ ddacă } A \subseteq \overline{B} \text{ ddacă } B \subseteq \overline{A}$
- $A \cup \overline{A} = T$; mai mult:
- $A \cup B = T \text{ ddacă } A \supseteq \overline{B} \text{ ddacă } B \supseteq \overline{A}$
- **A și B sunt părți complementare ale lui T ddacă fiecare este complementara celeilalte față de T :**
$$T: \begin{cases} A \cup B = T \\ \text{și} \\ A \cap B = \emptyset \end{cases} \quad \text{ddacă } A = \overline{B} \text{ ddacă } B = \overline{A}$$

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și orice mulțimi A_1, \dots, A_n , $A_1 \Delta \dots \Delta A_n = \{x \mid |\{i \in \overline{1, n} \mid x \in A_i\}| \in 2\mathbb{N} + 1\} =$ mulțimea elementelor x care aparțin unui număr impar dintre mulțimile A_1, \dots, A_n (a se vedea Notăția 6.21).

4 Alte operații cu mulțimi

Produsul direct a două mulțimi:

Notăția 4.1 (a se vedea definiția axiomatică a unei perechi ordonate în CURSUL I). Pentru orice elemente a și b , notăm cu (a, b) **perechea ordonată** formată din a și b .

Definiția 4.2 (egalitatea de perechi semnifică egalitatea pe componente). Pentru orice elemente a_1, a_2, x_1, x_2 :

$$(a_1, a_2) = (x_1, x_2) \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a_1 = x_1 \\ \text{și} \\ a_2 = x_2 \end{cases}$$

Definiția 4.3. Pentru orice mulțimi A și B , se definește *produsul cartezian* dintre A și B (numit și *produsul direct* dintre A și B) ca fiind mulțimea de perechi ordonate $\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$, notată $A \times B$:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ și } b \in B\}$$

Remarca 4.4 (produsul cartezian cu \emptyset este \emptyset ; produsul cartezian este distributiv față de reuniunea, intersecția, diferența și diferența simetrică între mulțimi (și la stânga, și la dreapta). Pentru orice mulțimi A, B și C , au loc egalitățile:

- $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$
- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ și $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ și $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$
- $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ și $(B \setminus C) \times A = (B \times A) \setminus (C \times A)$
- $A \times (B \Delta C) = (A \times B) \Delta (A \times C)$ și $(B \Delta C) \times A = (B \times A) \Delta (C \times A)$

Reuniunea disjunctă a două mulțimi:

Definiția 4.5. Fie A și B două mulțimi. Se definește *reuniunea disjunctă* a mulțimilor A și B ca fiind mulțimea notată $A \coprod B$ și definită prin:

$$A \coprod B := (A \times \{1\}) \cup (B \times \{2\}).$$

Observația 4.6. Reuniunea disjunctă este “un fel de reuniune” în care mulțimile care se reunesc sunt “făcute disjuncte”, prin atașarea la fiecare element al uneia dintre aceste mulțimi a unui indice corespunzător mulțimii respective (un element diferit de cel atașat elementelor celeilalte mulțimi) (vom vorbi despre **indici** într-o discuție despre **familii arbitrare de mulțimi**).

5 Mulțimi și funcții

Definiția 5.1. Fie A și B mulțimi oarecare. Se numește *funcție* de la A la B un triplet $f := (A, G, B)$, unde $G \subseteq A \times B$, a. î., pentru orice $a \in A$, există un unic $b \in B$, cu proprietatea că $(a, b) \in G$.

Formal: $(\forall a \in A) (\exists! b \in B) ((a, b) \in G)$.

Faptul că f este o funcție de la A la B se notează cu $f : A \rightarrow B$ sau $A \xrightarrow{f} B$.

Mulțimea A se numește *domeniul* funcției f , B se numește *codomeniul* sau *domeniul valorilor* lui f , iar G se numește *graficul* lui f .

Pentru fiecare $a \in A$, unicul $b \in B$ cu proprietatea că $(a, b) \in G$ se notează cu $f(a)$ și se numește *valoarea funcției f în punctul a* .

Remarca 5.2 $((a, b) \in G \Leftrightarrow f(a) = b)$. Dacă $f = (A, G, B)$ este o funcție ($f : A \rightarrow B$), atunci graficul G al lui f este mulțimea de perechi: $G = \{(a, f(a)) \mid a \in A\} \subseteq A \times B$.

Definiția 5.3. Fie $f = (A, F, B)$ și $g = (C, G, D)$ două funcții ($f : A \rightarrow B$, iar $g : C \rightarrow D$).

- Egalitatea $f = g$ semnifică egalitatea de triplete $(A, F, B) = (C, G, D)$, i. e. spunem că $f = g$ ddacă:

$A = C$ (are loc egalitatea domeniilor),
 $B = D$ (are loc egalitatea codomeniilor) și
 $F = G$ (are loc egalitatea graficelor celor două funcții,
 ceea ce, conform scrierii acestor grafice
 din remarcă anterioară, se transcrie în egalitate
 punctuală, adică egalitate în fiecare punct:
 pentru orice $a \in A = C$, $f(a) = g(a)$).

- Dacă X este o mulțime a. î. $X \subseteq A$ și $X \subseteq C$, atunci spunem că f și g *coincid pe X* dacă f și g au aceleași valori în elementele lui X , adică: oricare ar fi $x \in X$, $f(x) = g(x) \in B \cap D$.

Notația 5.4 (putere de mulțimi). Pentru orice mulțimi A și B , se notează cu B^A mulțimea funcțiilor de la A la B :

$$B^A = \{f \mid f : A \rightarrow B\}$$

Remarca 5.5 (există o unică funcție de la \emptyset la o mulțime arbitrară). Fie B o mulțime oarecare (**poate fi vidă și poate fi nevidă**). Atunci $B^\emptyset = \{(\emptyset, \emptyset, B)\}$.

Remarca 5.6 (nu există nicio funcție de la o mulțime nevidă la \emptyset). Fie A o mulțime a. î. $A \neq \emptyset$. Atunci $\emptyset^A = \emptyset$.

Definiția 5.7. Pentru orice mulțimi A și B , orice funcție $f : A \rightarrow B$ și orice submulțimi $X \subseteq A$ și $Y \subseteq B$, se definesc:

- *imaginea lui X prin f* sau *imaginea directă a lui X prin f* , notată $f(X)$, este submulțimea lui B :

$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} \subseteq B$$

- $f(A)$ se mai notează cu $Im(f)$ și se numește *imaginea lui f* :

$$Im(f) = f(A) = \{f(a) \mid a \in A\} \subseteq B$$

- *preimaginea lui Y prin f* sau *imaginea inversă a lui Y prin f* , notată $f^{-1}(Y)$ ($f^*(Y)$ în unele cărți, pentru a o deosebi de imaginea lui Y prin inversa f^{-1} a lui f , care există numai atunci când f este inversabilă, deci numai atunci când f este bijectivă – a se vedea în cele ce urmează –, pe când preimaginea unei submulțimi a codomeniului poate fi definită pentru orice funcție), este submulțimea lui A :

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\} \subseteq A$$

Definiția 5.8. Fie A și B mulțimi și $f : A \rightarrow B$ o funcție. f se zice:

- *injectivă* dacă are loc oricare dintre următoarele condiții echivalente:
 - pentru orice $b \in B$, există cel mult un $a \in A$, astfel încât $f(a) = b$
 - pentru orice $a_1, a_2 \in A$, dacă $a_1 \neq a_2$, atunci $f(a_1) \neq f(a_2)$
 - pentru orice $a_1, a_2 \in A$, dacă $f(a_1) = f(a_2)$, atunci $a_1 = a_2$
- *surjectivă* dacă are loc oricare dintre următoarele condiții echivalente:
 - pentru orice $b \in B$, există (cel puțin un) $a \in A$, astfel încât $f(a) = b$ (formal: $(\forall b \in B) (\exists a \in A) (f(a) = b)$)
 - $f(A) = B$
- *bijectivă* dacă are loc oricare dintre următoarele condiții echivalente:
 - f este simultan injectivă și surjectivă
 - pentru orice $b \in B$, există exact un $a \in A$, astfel încât $f(a) = b$ (formal: $(\forall b \in B) (\exists! a \in A) (f(a) = b)$)

Funcțiile injective, surjective, respectiv bijective se mai numesc *injectii*, *surjectii*, respectiv *bijectii*.

Când notăm $f : A \rightarrow B$, subînțelegem că A și B sunt mulțimi.

Remarca 5.9. Pentru orice funcție $f : A \rightarrow B$:

- $f^{-1}(B) = A$;
- $f(\emptyset) = \emptyset$ și $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$;
- dacă $X \subseteq Y \subseteq A$, atunci $f(X) \subseteq f(Y)$;
- dacă $V \subseteq W \subseteq B$, atunci $f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(W)$;
- pentru orice $M \subseteq A$, $f^{-1}(f(M)) \supseteq M$, cu egalitate pentru f injectivă;
- pentru orice $N \subseteq B$, $f(f^{-1}(N)) \subseteq N$, cu egalitate pentru f surjectivă;
- în schimb, pentru orice $N \subseteq f(A) = \text{Im}(f)$, $f(f^{-1}(N)) = N$.

Definiția 5.10 (funcția identitate a unei mulțimi). Pentru orice mulțime A , notăm cu id_A funcția identică a lui A (numită și funcția identitate a lui A sau identitatea lui A): $\text{id}_A : A \rightarrow A$, pentru orice $a \in A$, $\text{id}_A(a) = a$.

Definiția 5.11 (compunerea de funcții). Dacă A, B, C sunt mulțimi, iar $f : A \rightarrow B$ și $g : B \rightarrow C$ sunt funcții, atunci compunerea funcției g cu funcția f este funcția notată cu $g \circ f$ și definită astfel: $g \circ f : A \rightarrow C$, pentru orice $a \in A$, $(g \circ f)(a) := g(f(a))$.

Definiția 5.12 (inversa unei funcții). Fie A și B mulțimi, iar $f : A \rightarrow B$. f se zice *inversabilă* dacă există o funcție $g : B \rightarrow A$ astfel încât $g \circ f = \text{id}_A$ și $f \circ g = \text{id}_B$.

Remarca 5.13 (dacă există, inversa unei funcții este unică). Fie A și B mulțimi, iar $f : A \rightarrow B$ o funcție inversabilă. Atunci există o unică funcție $g : B \rightarrow A$ astfel încât $g \circ f = \text{id}_A$ și $f \circ g = \text{id}_B$.

Definiția 5.14. Fie A și B mulțimi, iar $f : A \rightarrow B$ o funcție inversabilă. Atunci unica funcție $g : B \rightarrow A$ cu proprietățile $g \circ f = \text{id}_A$ și $f \circ g = \text{id}_B$ se notează cu f^{-1} ($f^{-1} = g : B \rightarrow A$) și se numește *inversa lui f* .

Remarca 5.15. Fie A și B mulțimi, iar $f : A \rightarrow B$. Atunci: f este inversabilă dacă este bijectivă.

Exercițiul 5.16 (caracterizarea surjectivității prin existența unei inverse la dreapta, și a injectivității prin existența unei inverse la stânga – temă). Fie A și B mulțimi nevide, iar $f : A \rightarrow B$. Atunci:

- f este surjectivă dacă $(\exists g : B \rightarrow A) (f \circ g = \text{id}_B)$; în plus, conform (iii) de mai jos, în caz afirmativ, g este injectivă;
- f este bijectivă dacă $(\exists ! g : B \rightarrow A) (f \circ g = \text{id}_B)$; în plus, în caz afirmativ, unica inversă la dreapta g a lui f este $g = f^{-1}$, care este simultan inversă la dreapta și inversă la stânga pentru f ;
- f este injectivă dacă $(\exists h : B \rightarrow A) (h \circ f = \text{id}_A)$; în plus, conform (i) de mai sus, în caz afirmativ, h este surjectivă;
- f este bijectivă dacă $(\exists ! h : B \rightarrow A) (h \circ f = \text{id}_A)$; în plus, în caz afirmativ, unica inversă la stânga h a lui f este $h = f^{-1}$, care este simultan inversă la stânga și inversă la dreapta pentru f ;
- după cum știm, f este bijectivă dacă este inversabilă, i. e. f este bijectivă dacă $(\exists j : B \rightarrow A) (f \circ j = \text{id}_B \text{ și } j \circ f = \text{id}_A)$; în plus, în caz afirmativ, j este unică, se notează cu f^{-1} și se numește *inversa lui f* ; dar, conform (i) și (iii), avem și următoarea caracterizare a bijectivității: f este bijectivă dacă $(\exists g, h : B \rightarrow A) (f \circ g = \text{id}_B \text{ și } h \circ f = \text{id}_A)$; în plus, conform (ii) și (iv), în caz afirmativ, g și h sunt unice și $g = h = f^{-1}$.

Exercițiul 5.17 (funcțiile imagine directă și imagine inversă – temă). Fie A și B mulțimi nevide, iar $f : A \rightarrow B$. Considerăm funcțiile:

$$\begin{cases} f_* : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B), & (\forall M \subseteq A) (f_*(M) := f(M)); \\ f^* : \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A), & (\forall N \subseteq B) (f^*(N) := f^{-1}(N)). \end{cases}$$

Atunci au loc următoarele echivalențe:

- f este injectivă dacă f_* este injectivă dacă f^* este surjectivă dacă $f^* \circ f_* = \text{id}_{\mathcal{P}(A)}$ (i. e. $(\forall M \subseteq A) (f^{-1}(f(M)) = M)$) dacă $(\forall M \subseteq A) (f(A \setminus M) \subseteq B \setminus f(M))$;
- f este surjectivă dacă f_* este surjectivă dacă f^* este injectivă dacă $f_* \circ f^* = \text{id}_{\mathcal{P}(B)}$ (i. e. $(\forall N \subseteq B) (f(f^{-1}(N)) = N)$) dacă $(\forall M \subseteq A) (f(A \setminus M) \supseteq B \setminus f(M))$;
- din (i) și (ii), obținem: f este bijectivă dacă f_* este bijectivă dacă f^* este bijectivă dacă f^* și f_* sunt inverse una alteia dacă $(\forall M \subseteq A) (f(A \setminus M) = B \setminus f(M))$.

6 Teoria cardinalelor

Definiția 6.1. Două mulțimi A și B se zic *echipotente* sau *cardinal echivalente* dacă există o funcție bijectivă de la A la B , fapt notat prin: $A \cong B$.

Definiția 6.2. Pentru orice mulțime A , se numește *cardinalul lui A* sau *numărul cardinal al lui A* clasa tuturor mulțimilor B cu $A \cong B$, notată $|A|$.

Să observăm că:

- pentru orice mulțime A , $A \cong A$ (pentru că $id_A : A \rightarrow A$ este o bijecție), deci $A \in |A|$
- pentru orice mulțimi A și B , dacă $A \cong B$, atunci $B \cong A$ și $|A| = |B|$, i. e. orice mulțime C satisface $A \cong C$ dacă satisface $B \cong C$; așadar avem chiar echivalențele: $A \cong B$ dacă $B \cong A$ dacă $|A| = |B|$
- pentru orice mulțimi A și B , dacă $A \not\cong B$, atunci nu există nicio mulțime C cu proprietățile: $C \in |A|$ (i. e. $A \cong C$) și $C \in |B|$ (i. e. $B \cong C$); așadar avem chiar echivalențele: $A \not\cong B$ dacă $|A| \neq |B|$ dacă $|A| \cap |B| = \emptyset$

Definiția 6.3 (suma, produsul și puterea de numere cardinale). Pentru orice mulțimi A și B , avem, prin definiție:

- $|A| + |B| := |A \amalg B|$
- $|A| \cdot |B| := |A \times B|$
- $|B|^{|A|} := |B^A|$

Propoziția 6.4 (independența de reprezentanți a operațiilor cu numere cardinale). *Operațiile cu numere cardinale, definite ca mai sus, nu depind de reprezentanții claselor de cardinal echivalentă, adică: pentru orice mulțimi A, A', B și B' astfel încât $|A| = |A'|$ și $|B| = |B'|$ (adică $A \cong A'$ și $B \cong B'$), au loc:*

- $|A \amalg B| = |A' \amalg B'|$
- $|A \times B| = |A' \times B'|$
- $|B^A| = |(B')^{(A')}|$

Definiția 6.5 (inegalități între numere cardinale). Pentru orice mulțimi A și B , notăm cu:

- $|A| \leq |B|$ faptul că există o injecție $j : A \rightarrow B$
- $|A| < |B|$ faptul că $|A| \leq |B|$ și $|A| \neq |B|$, i. e. există o injecție $j : A \rightarrow B$, dar nu există nicio bijecție $f : A \rightarrow B$

Remarca 6.6. Definiția anterioară este **independentă de reprezentanții claselor de cardinal echivalentă**, i. e., pentru orice mulțimi A, A', B și B' astfel încât $|A| = |A'|$ și $|B| = |B'|$ (adică $A \cong A'$ și $B \cong B'$):

- există o injecție de la A la B dacă există o injecție de la A' la B' ;
- $A \cong B$ dacă $A' \cong B'$, așadar: $A \not\cong B$ dacă $A' \not\cong B'$.

Remarca 6.7. Dacă A și B sunt mulțimi și $A \subseteq B$, atunci $|A| \leq |B|$, întrucât **funcția incluziune**: $i : A \rightarrow B$, $i(a) := a$ pentru orice $a \in A$, este injectivă.

Remarca 6.8 (definiții echivalente pentru inegalități între numere cardinale). Pentru orice mulțimi A și B :

- $|A| \leq |B|$ dacă există o surjecție $t : B \rightarrow A$ dacă [există o mulțime C , a. î. $|B| = |A| + |C|$]
- $|A| < |B|$ dacă [există o surjecție $t : B \rightarrow A$, dar nu există nicio bijecție $g : B \rightarrow A$] dacă [există o mulțime nevidă C , a. î. $|B| = |A| + |C|$]

Remarca 6.9. Inegalitatea \leq este corect definită ca mai sus, în sensul că, pentru orice mulțimi A și B , $|A| = |B|$ dacă $[|A| \leq |B|$ și $|B| \leq |A|]$.

Notăția 6.10. Desigur, folosim și notațiile \geq și $>$, cu semnificația: $|B| \geq |A| \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} |A| \leq |B|$, respectiv $|B| > |A| \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} |A| < |B|$, pentru orice mulțimi A și B .

Teorema 6.11 (Cantor). Pentru orice mulțime X , $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.

O construcție pentru mulțimea numerelor naturale:

Numerele naturale pot fi construite cu ajutorul cardinalelor (al numerelor cardinale), printr-o construcție echivalentă cu cea menționată în primul curs:

$$\begin{cases} 0 := |\emptyset|, \\ 1 := |\{\emptyset\}|, \\ 2 := |\{\emptyset, \{\emptyset\}\}|, \\ 3 := |\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}|, \\ \vdots \end{cases}$$

Mereu se consideră mulțimea având drept elemente toate mulțimile de la pașii anteriori: succesorul unui n este $n+1 := |\{0, 1, 2, \dots, n\}|$. Iar mulțimea tuturor elementelor construite astfel, denumite *numere naturale*, se notează cu \mathbb{N} .

În definițiile de mai sus pentru **numerele naturale** trebuie rezolvată, într-un fel sau altul, problema următoare: cu definiția de mai sus, orice $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ este o clasă proprie, care nu poate aparține unei mulțimi sau clase. Putem înlocui aceste clase cu etichete ale lor, de exemplu chiar cu, reprezentanții lor de mai sus: $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$,

Definiția de mai sus pentru **mulțimea \mathbb{N} a numerelor naturale** arată corectitudinea **principiului inducției matematice**: dacă o submulțime $S \subseteq \mathbb{N}$ satisface:

- $0 \in S$,
- pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $[n \in S \Rightarrow n+1 \in S]$,

atunci $S = \mathbb{N}$.

Având mulțimea \mathbb{N} a numerelor naturale, se construiesc \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} și se definesc operațiile și relațiile de ordine pe aceste mulțimi în modul cunoscut din liceu.

Mulțimea numerelor naturale, \mathbb{N} , este o mulțime infinită, mai precis o mulțime numărabilă.

Notația 6.12 ($\aleph_0 := |\mathbb{N}|$). Cardinalul mulțimii numerelor naturale se notează cu \aleph_0 , pronunțat “alef 0”.

Definiția 6.13. O mulțime X se zice *numărabilă* dacă $|X| = \aleph_0$, i. e. dacă $X \cong \mathbb{N}$.

Remarca 6.14. Orice $n \in \mathbb{N}$ satisface $n < \aleph_0$.

Definiția 6.15. O mulțime X se zice *infinită*:

- (i) *în sens Dedekind*, dacă există $S \subsetneq X$ a. i. $S \cong X$
- (ii) *în sens Cantor*, dacă există $S \subseteq X$, a. i. S este numărabilă
- (iii) *în sens obișnuit*, dacă, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $X \not\cong \{1, 2, \dots, n\}$

Teorema 6.16. Cele trei definiții de mai sus ale mulțimilor infinite sunt echivalente.

Desigur, o *mulțime finită* este, prin definiție, o mulțime care nu este infinită, adică, în conformitate cu definiția de mai sus a mulțimilor infinite *în sens obișnuit*:

Definiția 6.17. O *mulțime finită* este o mulțime X cu proprietatea că $X \cong \{1, 2, \dots, n\}$ pentru un anumit $n \in \mathbb{N}$.

Remarca 6.18. Conform definiției anterioare, **cardinalele finite**, i. e. cardinalele mulțimilor finite, sunt exact numerele naturale.

Remarca 6.19. Definiția mulțimilor infinite în sens Cantor arată că \aleph_0 (i. e. cardinalul mulțimilor numărabile) este cel mai mic cardinal infinit, unde *cardinal infinit* (sau *cardinal transfinit*) înseamnă cardinal al unei mulțimi infinite.

Definiția 6.20. O *mulțime cel mult numărabilă* este o mulțime finită sau numărabilă (adică având cardinalul mai mic sau egal cu \aleph_0).

Notația 6.21. Amintim următoarele notații consacrate pentru un segment al mulțimii \mathbb{Z} a numerelor întregi:

$$\text{pentru orice } a, b \in \mathbb{Z}, \overline{a, b} := [a, b] := \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leq n \leq b\} = \begin{cases} \{a, a+1, \dots, b\}, & \text{dacă } a \leq b; \\ \emptyset, & \text{dacă } a > b. \end{cases}$$

Să reținem și notația: pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}$ și orice $M \subseteq \mathbb{Z}$, $aM + b := \{ax + b \mid x \in M\}$.

Remarca 6.22. Mulțimea \mathbb{Z} a numerelor întregi este numărabilă.

Mulțimea \mathbb{Q} a numerelor raționale este numărabilă.

Definiția 6.23. O *mulțime nenumărabilă* este, prin definiție, o mulțime infinită care nu este numărabilă, i. e. o mulțime având cardinalul strict mai mare decât \aleph_0 .

Remarca 6.24. Mulțimea \mathbb{R} a numerelor reale este nenumărabilă.

Definiția 6.25 ($\mathcal{C} := |\mathbb{R}|$). Cardinalul lui \mathbb{R} se notează cu \mathcal{C} și se numește *puterea continuumului*.

- Conform celor de mai sus, $\aleph_0 < \mathcal{C}$.

Vom vedea că $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$ pentru orice mulțime M .

Remarca 6.26 ($\mathcal{C} = 2^{\aleph_0}$). $\mathbb{R} \cong \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Remarca 6.27. Oricare ar fi mulțimile A și B :

- după cum am observat mai sus, $A \subseteq B$ implică $|A| \leq |B|$;
- dacă B este finită și $A \subsetneq B$, atunci $|A| < |B|$.

În plus, după cum arată definiția lui Cantor a mulțimilor infinite:

- dacă $|A| \leq |B|$ și A este infinită, atunci B este infinită;
- dacă $|A| \leq |B|$ și B este finită, atunci A este finită.

Observația 6.28. Conform celor de mai sus, faptul că o mulțime A este finită se exprimă, în simboluri, prin: $|A| < \aleph_0$. Pentru comoditate, vom folosi și notația $|A| < \infty$ pentru faptul că o mulțime A este finită.

7 Familii arbitrare de mulțimi

Definiția 7.1 (familie de elemente ale lui A indexată de I : $(x_i)_{i \in I} \subseteq A$). Fie I și A mulțimi arbitrare.

O *familie de elemente ale lui A indexată de I* este o funcție $f : I \rightarrow A$. Pentru orice $i \in I$, se notează $x_i := f(i) \in A$, astfel că familia f se mai notează sub forma $(x_i)_{i \in I} \subseteq A$.

Elementele mulțimii I se numesc *indicii* familiei $(x_i)_{i \in I}$.

- Există o singură familie vidă de elemente ale unei mulțimi arbitrare A , pentru că există o singură funcție de la \emptyset la A (a se vedea și mai jos).
- Familia vidă nu este egală cu nicio familie nevidă, ci este egală doar cu ea însăși.

Fie I și A două mulțimi nevide, iar $(a_i)_{i \in I}$ și $(b_i)_{i \in I}$ două familii de elemente din A indexate de I :

- $I \neq \emptyset$, $A \neq \emptyset$
- $(a_i)_{i \in I} \subseteq A$, i. e., pentru orice $i \in I$, $a_i \in A$
- $(b_i)_{i \in I} \subseteq A$, i. e., pentru orice $i \in I$, $b_i \in A$

Cele două familii sunt egale ddacă sunt egale pe componente:

$$(a_i)_{i \in I} = (b_i)_{i \in I} \quad \text{ddacă,} \quad \text{pentru orice } i \in I, \quad a_i = b_i.$$

Familii arbitrare de mulțimi:

Definiția 7.2. Fie T și I două mulțimi arbitrare. Se numește *familie de submulțimi ale lui T indexată de I* o funcție $f : I \rightarrow \mathcal{P}(T)$. Pentru fiecare $i \in I$, se notează $A_i := f(i) \in \mathcal{P}(T)$, iar familia de submulțimi ale lui T se notează cu $(A_i)_{i \in I}$. Scriem $(A_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(T)$ cu semnificația că, pentru fiecare $i \in I$, $A_i \in \mathcal{P}(T)$. Elementele mulțimii I se numesc *indicii* familiei $(A_i)_{i \in I}$.

Pentru a generaliza definiția anterioară la familii de mulțimi oarecare avem nevoie de acea definiție mai cuprinzătoare a noțiunii de funcție (a se vedea sistemul axiomatic pentru teoria mulțimilor din Cursul I), care permite unei funcții f definite pe I să aibă drept codomeniu o clasă (nu neapărat o mulțime), anume clasa tuturor mulțimilor în acest caz.

Operații cu familii arbitrare de mulțimi:

Definiția 7.3. Fie I o mulțime arbitrară și $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi (părți ale unei mulțimi T sau mulțimi arbitrare) indexată de I .

Se definesc următoarele operații:

- *reuniunea familiei* $(A_i)_{i \in I}$ este mulțimea notată $\bigcup_{i \in I} A_i$ și definită prin:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid (\exists i \in I) (x \in A_i)\} = \{x \mid (\exists i) (i \in I \text{ și } x \in A_i)\}$$

- *intersecția familiei* $(A_i)_{i \in I}$ este mulțimea notată $\bigcap_{i \in I} A_i$ și definită prin:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid (\forall i \in I) (x \in A_i)\} = \{x \mid (\forall i) (i \in I \Rightarrow x \in A_i)\}$$

- *produsul cartezian al familiei* $(A_i)_{i \in I}$ (numit și *produsul direct al familiei* $(A_i)_{i \in I}$) este mulțimea notată $\prod_{i \in I} A_i$ și definită prin:

$$\begin{aligned} \prod_{i \in I} A_i &= \{(a_i)_{i \in I} \mid (a_i)_{i \in I} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \mid (\forall i \in I) (a_i \in A_i)\} = \\ &= \{(a_i)_{i \in I} \mid (\forall i) (i \in I \Rightarrow a_i \in A_i)\}, \end{aligned}$$

sau, altfel scris (cu definiția unei familii de elemente exemplificate mai sus pe familii de numere reale):

$$\begin{aligned} \prod_{i \in I} A_i &= \{f \mid f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i, (\forall i \in I) (f(i) \in A_i)\} = \\ &= \{f \mid f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i, (\forall i) (i \in I \Rightarrow f(i) \in A_i)\}. \end{aligned}$$

Notăția 7.4. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și mulțimile A_1, A_2, \dots, A_n . Produsul direct $\prod_{i \in \overline{1, n}} A_i$ se mai notează cu $\prod_{i=1}^n A_i$, iar un element $(a_i)_{i \in \overline{1, n}}$ al acestui produs direct se mai notează cu (a_1, a_2, \dots, a_n) . În cazul particular în care $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$, $\prod_{i \in \overline{1, n}} A$ $\stackrel{\text{notație}}{=}$ $\prod_{i=1}^n A$ $\stackrel{\text{notație}}{=}$ A^n .

Remarca 7.5 (puterile unei mulțimi: caz particular al produsului direct). În definiția anterioară, dacă $I \neq \emptyset$ și, pentru orice $i \in I$, $A_i = A$, atunci $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} A = A$, așadar $\prod_{i \in I} A = \{f \mid f : I \rightarrow A, (\forall i \in I) (f(i) \in A)\} = \{f \mid f : I \rightarrow A\} = A^I$. În particular, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, dacă $|I| = n$, avem: $A^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid (\forall i \in \overline{1, n}) (a_i \in A)\} = \{f \mid f : \overline{1, n} \rightarrow A\} = A^{\overline{1, n}} = A^I$.

Remarca 7.6. Pentru orice mulțimi A , I și J , dacă $I \cong J$, atunci $A^I \cong A^J$. Acest fapt rezultă direct din independența de reprezentanți a operației de exponențiere asupra numerelor cardinale.

Exercițiul 7.7 (temă – distributivitatea produsului cartezian față de reuniuni și intersecții arbitrare). Fie A o mulțime, I o mulțime nevidă (de fapt poate fi și vidă – vom vedea), iar $(B_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi. Să se demonstreze că:

- $A \times (\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} (A \times B_i)$ și $(\bigcup_{i \in I} B_i) \times A = \bigcup_{i \in I} (B_i \times A)$
- $A \times (\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} (A \times B_i)$ și $(\bigcap_{i \in I} B_i) \times A = \bigcap_{i \in I} (B_i \times A)$

Exercițiul 7.8 (temă – distributivitatea generalizată a produsului cartezian față de intersecție). Fie I și J o mulțimi nevide (de fapt pot fi și vide – vom vedea), iar $(A_{i,j})_{i \in I, j \in J}$ o familie de mulțimi (indexată de $I \times J$; poate fi scrisă și sub forma: $(A_{(i,j)})_{(i,j) \in I \times J}$). Să se demonstreze că:

$$\prod_{i \in I} \bigcap_{j \in J} A_{i,j} = \bigcap_{j \in J} \prod_{i \in I} A_{i,j}$$

Amintesc că asociativitatea unei operații binare, cum sunt reuniunea și intersecția a două mulțimi, permite scrierea unui șir de astfel de operații fără paranteze: pentru orice mulțimi A_1, A_2, A_3 :

- $(A_1 \cup A_2) \cup A_3 = A_1 \cup (A_2 \cup A_3) \stackrel{\text{notație}}{=} A_1 \cup A_2 \cup A_3$
- $(A_1 \cap A_2) \cap A_3 = A_1 \cap (A_2 \cap A_3) \stackrel{\text{notație}}{=} A_1 \cap A_2 \cap A_3$

Propoziția 7.9 (asociativitatea produsului direct ca operație binară). Fie A_1, A_2, A_3 mulțimi arbitrare. Atunci:

$A_1 \times (A_2 \times A_3) \cong (A_1 \times A_2) \times A_3 \cong \prod_{i=1}^3 A_i$, întrucât următoarele funcții sunt bijecții: $A_1 \times (A_2 \times A_3) \xrightarrow{\varphi} (A_1 \times A_2) \times A_3 \xrightarrow{\psi} \prod_{i=1}^3 A_i$, pentru orice $a_1 \in A_1$, orice $a_2 \in A_2$ și orice $a_3 \in A_3$, $\varphi(a_1, (a_2, a_3)) := ((a_1, a_2), a_3)$ și $\psi((a_1, a_2), a_3) := (a_1, a_2, a_3)$.

În plus, fiecare dintre bijecțiile φ și ψ se identifică cu identitatea (i. e. cu egalitatea), adică se stabilesc prin convenție egalitățile: $(a_1, (a_2, a_3)) = ((a_1, a_2), a_3) = (a_1, a_2, a_3)$ pentru orice $a_1 \in A_1$, orice $a_2 \in A_2$ și orice $a_3 \in A_3$.

Prin urmare, putem scrie: $A_1 \times (A_2 \times A_3) = (A_1 \times A_2) \times A_3 = \prod_{i=1}^3 A_i$.

Ca și la funcții aplicate unor perechi de elemente, folosim **licența de scriere (convenția)**: pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, orice mulțimi A_1, A_2, \dots, A_n, B , orice funcție $f : \prod_{i=1}^n A_i \rightarrow B$ și orice elemente $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$, se notează $f(a_1, a_2, \dots, a_n) := f((a_1, a_2, \dots, a_n))$ (i. e. una dintre perechile de paranteze se poate elimina din scriere).

Când va fi convenabil să folosim următoarea **convenție**, și va fi clar la elementele căror mulțimi ne vom referi, prin notații de forma:

- $(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$ vom subînțelege: $a_i \in A_i$ pentru fiecare $i \in I$,
- $(a_i)_{i \in I} \in A^I$ vom subînțelege: $a_i \in A$ pentru fiecare $i \in I$,
- $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ vom subînțelege: $a_i \in A_i$ pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$,
- $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A^n$ vom subînțelege: $a_i \in A$ pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$,
- $(a, b) \in A \times B$ vom subînțelege: $a \in A$ și $b \in B$,
- $(a, b) \in A^2$ vom subînțelege: $a, b \in A$,

unde $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B, A_1, A_2, \dots, A_n$ sunt mulțimi, I este o mulțime nevidă, iar $(A_i)_{i \in I}$ este o familie (nevidă) de mulțimi.

Definiția 7.10. Fie I o mulțime arbitrară și $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi (părți ale unei mulțimi T sau mulțimi arbitrare) indexată de I .

Se definește *reuniunea disjunctă* a familiei $(A_i)_{i \in I}$ ca fiind mulțimea notată $\coprod_{i \in I} A_i$ și definită prin:

$$\coprod_{i \in I} A_i := \bigcup_{i \in I} (A_i \times \{i\})$$

Observația 7.11. Reuniunea disjunctă este “un fel de reuniune” în care mulțimile care se reunesc sunt “făcute disjuncte”, prin atașarea la fiecare element al uneia dintre aceste mulțimi a indicelui mulțimii respective.

Notația 7.12. Adesea, elementele reuniunii disjuncte se notează fără indicii atașati, considerând că, atunci când se specifică, despre un element x al reuniunii disjuncte $\coprod_{i \in I} A_i$, că $x \in A_{i_0}$, pentru un anumit $i_0 \in I$, atunci se

înțelege că este vorba despre elementul (x, i_0) al reuniunii disjuncte $\coprod_{i \in I} A_i$ (se identifică x cu (x, i_0)).

Notația 7.13. La fel ca la produsul direct, dacă avem o familie finită și nevidă de mulțimi, $(A_i)_{i \in \overline{1, n}}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, atunci avem notațiile echivalente pentru reuniunea disjunctă a acestei familii:

$$\coprod_{i \in \overline{1, n}} A_i \stackrel{\text{notație}}{=} \coprod_{i=1}^n A_i \stackrel{\text{notație}}{=} A_1 \coprod A_2 \coprod \dots \coprod A_n$$

Remarca 7.14. Ultima dintre notațiile de mai sus este permisă datorită **asociativității reuniunii disjuncte** ca operație binară (adică aplicată unei familii formate din două mulțimi): pentru orice mulțimi A_1, A_2, A_3 , se arată imediat (folosind definiția reuniunii disjuncte și câte o identificare de indici, i. e. câte o bijecție între mulțimile

de indici care apar) că are loc legea de asociativitate: $A_1 \coprod (A_2 \coprod A_3) \cong (A_1 \coprod A_2) \coprod A_3 \cong \coprod_{i=1}^3 A_i$, adică, prin

identificarea acestor bijecții cu identitatea, putem scrie: $A_1 \coprod (A_2 \coprod A_3) = (A_1 \coprod A_2) \coprod A_3 = \coprod_{i=1}^3 A_i$.

Aritatea unei operații a unei structuri algebrice (cu o singură *mulțime suport*, o singură mulțime de elemente) este **numărul argumentelor (operanzilor, variabilelor) acelei operații**. Dacă structura algebrică are mulțimea suport A , iar f este o operație n -ară pe A , cu $n \in \mathbb{N}$, atunci $f : \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ de } A} \rightarrow A$ (f este o funcție cu n

argumente din A , cu valori tot în A).

Remarca 7.15 (reuniunea familiei vide este vidă). Dacă recitim definiția reuniunii unei familii arbitrare, observăm că reuniunea familiei vide este mulțimea elementelor pentru care există un $i \in \emptyset$ cu o anumită proprietate, condiție care este întotdeauna falsă, deci reuniunea familiei vide este \emptyset .

Remarca 7.16 (produsul direct al familiei vide este un singleton). Cele de mai sus arată că produsul direct al familiei vide este mulțimea cu unicul element dat de unica funcție de la \emptyset la \emptyset , anume $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$, adică produsul direct al familiei vide este singletonul $\{(\emptyset, \emptyset, \emptyset)\}$.

Operațiile zeroare sunt constantele structurilor algebrice: de exemplu, elementul neutru al unui grup G este o funcție φ de la un singleton (anume $\{(\emptyset, \emptyset, \emptyset)\}$) la G : $\varphi : \{(\emptyset, \emptyset, \emptyset)\} \rightarrow G$, iar o funcție definită pe un singleton are o singură valoare ($\varphi(\emptyset, \emptyset, \emptyset) \in G$), deci poate fi identificată cu această unică valoare a ei, care este un element distins, o constantă din G : $\varphi(\emptyset, \emptyset, \emptyset) = e \in G$, și identificăm $\varphi = e$.

Remarca 7.17 (reuniunea disjunctă a familiei vide este vidă). Definiția reuniunii disjuncte a unei familii arbitrare de mulțimi arată că reuniunea disjunctă a familiei vide de mulțimi este egală cu, reuniunea familiei vide de mulțimi, care este \emptyset .

Exemplul 7.18. Dacă A și B sunt mulțimi, iar $f : A \rightarrow B$ și $g : A \rightarrow B$, iar pe mulțimea B avem, de exemplu, o operație binară $+$ și o **relație binară** (vom vedea) \leq , atunci putem defini, **punctual**, operația $+$, respectiv relația \leq , între funcțiile f și g , astfel:

- $f + g : A \rightarrow B$, pentru orice $x \in A$, $(f + g)(x) \stackrel{\text{definiție}}{=} f(x) + g(x)$
- prin definiție, $f \leq g$ dacă, pentru orice $x \in A$, $f(x) \leq g(x)$.

Definiția 7.19 (familii de funcții între două mulțimi fixate A și B). Fie I , A și B mulțimi arbitrare. O familie de funcții de la A la B indexată de I este o familie de elemente ale mulțimii B^A indexată de I , i. e. o funcție $h : I \rightarrow B^A$ (pentru orice $i \in I$, $f_i \stackrel{\text{notație}}{=} h(i) : A \rightarrow B$).

Se pot defini și operații cu familii arbitrare de funcții, tot **punctual**:

Exemplul 7.20. Dacă I , A și B sunt mulțimi nevide, $(f_i)_{i \in I}$ este o familie de funcții de la A la B (adică, pentru orice $i \in I$, $f_i : A \rightarrow B$), B este o mulțime ordonată (vom vedea) și, pentru orice $x \in A$, submulțimea $\{f_i(x) \mid i \in I\} \subseteq B$ are un cel mai mare element (un **maxim**), atunci putem defini funcția:

$$\max\{f_i \mid i \in I\} : A \rightarrow B,$$

astfel: pentru orice $x \in A$,

$$(\max\{f_i \mid i \in I\})(x) \stackrel{\text{definiție}}{=} \max\{f_i(x) \mid i \in I\}.$$

Definiția 7.21 (familii de funcții – cazul general – material facultativ). Fie I o mulțime arbitrară, iar $(A_i)_{i \in I}$ și $(B_i)_{i \in I}$ familii de mulțimi indexate de I .

O familie de funcții $(f_i)_{i \in I}$ indexată de I cu $f_i : A_i \rightarrow B_i$ pentru fiecare $i \in I$ este un element al produsului direct $\prod_{i \in I} B_i^{A_i}$, adică o familie de elemente ale mulțimii $\prod_{i \in I} B_i^{A_i}$ indexată de I cu elementul de indice i aparținând lui $B_i^{A_i}$ pentru fiecare $i \in I$, i. e. o funcție $h : I \rightarrow \prod_{i \in I} B_i^{A_i}$, cu $f_i = h(i) : A_i \rightarrow B_i$ pentru fiecare $i \in I$.

Definiția 7.22 (operațiile cu familii arbitrare de funcții generalizează compunerea de funcții – material facultativ). Dacă I este o mulțime nevidă, $(A_i)_{i \in I}$ și $(B_i)_{i \in I}$ sunt familii de mulțimi, C este o mulțime, $(f_i)_{i \in I}$ este o familie de funcții și g este o funcție a. î., pentru fiecare $i \in I$, $f_i : A_i \rightarrow B_i$, iar $g : \prod_{i \in I} B_i \rightarrow C$, atunci putem defini funcția $g((f_i)_{i \in I}) : \prod_{i \in I} A_i \rightarrow C$ prin: oricare ar fi $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$, $g((f_i)_{i \in I})((x_i)_{i \in I}) := g((f_i(x_i))_{i \in I})$: operația g (de aritate, i. e. număr de argumente, $|I|$) aplicată familiei de funcții $(f_i)_{i \in I}$, definită **punctual**.

Cazul finit: $I = \overline{1, n}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$: $g(f_1, \dots, f_n) : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow C$, pentru orice $x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n$, $g(f_1, \dots, f_n)(x_1, \dots, x_n) := g(f_1(x_1), \dots, f_n(x_n))$.

La fel se pot generaliza relațiile binare între funcții la relații de aritate arbitrară, chiar infinită, adică, pentru familia $(f_i)_{i \in I}$ de mai sus, submulțimi ale lui $\prod_{i \in I} B_i$: relații de aritate (i. e. număr de argumente) $|I|$ – a se vedea în Cursul III definiția unei relații n -are:

Definiția 7.23 (material facultativ). Dacă I este o mulțime nevidă, $(A_i)_{i \in I}$ și $(B_i)_{i \in I}$ sunt familii de mulțimi, $(f_i)_{i \in I}$ este o familie de funcții cu $f_i : A_i \rightarrow B_i$ pentru fiecare $i \in I$, iar $R \subseteq \prod_{i \in I} B_i$, atunci: familia $(f_i)_{i \in I}$ de funcții se află în relația R , notat $(f_i)_{i \in I} \in R$, dacă $(f_i(x_i))_{i \in I} \in R$ pentru fiecare $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$.

Cazul finit: $I = \overline{1, n}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, astfel că $R \subseteq B_1 \times \dots \times B_n$ este o relație n -ară: $(f_1, \dots, f_n) \in R$ dacă, pentru orice $x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n$, $(f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)) \in R$.

Exercițiul 7.24 (imagini și preimagini de reuniuni și intersecții arbitrare de mulțimi printr-o funcție). Fie A , B , I și J mulțimi nevide (de fapt, pot fi și vide – vom vedea), $f : A \rightarrow B$, iar $(A_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(A)$ și $(B_j)_{j \in J} \subseteq \mathcal{P}(B)$. Să se demonstreze că:

$$(i) \quad f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j);$$

$$(ii) \quad f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i);$$

$$(iii) \quad f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j);$$

$$(iv) \quad f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i);$$

$$(v) \quad f \text{ este injectivă ddacă, pentru orice mulțime nevidă } K \text{ și orice } (M_k)_{k \in K} \subseteq \mathcal{P}(A), \quad f\left(\bigcap_{k \in K} M_k\right) = \bigcap_{k \in K} f(M_k).$$

(vi) Să se dea un exemplu pentru incluziune strictă la punctul (iv).

8 Funcții caracteristice

Definiția 8.1. Fie T o mulțime nevidă arbitrară, fixată. Pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, definim *funcția caracteristică a lui A (raportat la T)*: $\chi_A : T \rightarrow \{0, 1\}$, pentru orice $x \in T$, $\chi_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \notin A, \\ 1, & \text{dacă } x \in A. \end{cases}$

În cazul particular în care mulțimea totală T este finită și nevidă: $T = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, funcția caracteristică χ_A poate fi dată prin vectorul valorilor sale: $(\chi_A(x_1), \chi_A(x_2), \dots, \chi_A(x_n))$; acest vector de valori din mulțimea $\{0, 1\}$ se numește *vectorul caracteristic al lui A* . A se observa că suma valorilor din acest vector este egală cu, cardinalul lui A : $\chi_A(x_1) + \chi_A(x_2) + \dots + \chi_A(x_n) = |A|$.

Propoziția 8.2 (principiul includerii și al excluderii). *Pentru orice n natural nenul și orice mulțimi finite M_1, M_2, \dots, M_n , are loc egalitatea:*

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^n M_i \right| &= \sum_{i=1}^n |M_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |M_i \cap M_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |M_i \cap M_j \cap M_k| - \dots + \\ &\quad + (-1)^{n-1} \cdot |M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n| = \\ &\quad \sum_{s=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s \leq n} (-1)^{s-1} \cdot |M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \dots \cap M_{i_s}|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Și dual: } \left| \bigcap_{i=1}^n M_i \right| &= \sum_{i=1}^n |M_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |M_i \cup M_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |M_i \cup M_j \cup M_k| - \dots + \\ &\quad + (-1)^{n-1} \cdot |M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n| = \sum_{s=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s \leq n} (-1)^{s-1} \cdot |M_{i_1} \cup M_{i_2} \cup \dots \cup M_{i_s}|. \end{aligned}$$

Propoziția 8.3 (proprietățile funcțiilor caracteristice). *Fie T o mulțime nevidă arbitrară, fixată. Pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, notăm cu χ_A funcția caracteristică a lui A (raportat la T). Mai notăm funcțiile constante: $\mathbf{0} : T \rightarrow \{0, 1\}$ și $\mathbf{1} : T \rightarrow \{0, 1\}$, pentru orice $x \in T$, $\mathbf{0}(x) = 0$ și $\mathbf{1}(x) = 1$.*

Atunci au loc proprietățile:

- $\chi_\emptyset = \mathbf{0}$ și $\chi_T = \mathbf{1}$
- pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, $A = \chi_A^{-1}(\{1\})$
- pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$, are loc echivalența: $A \subseteq B$ ddacă $\chi_A \leq \chi_B$ (punctual, i. e.: pentru orice $x \in T$, $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$)
- pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$, are loc echivalența: $A = B$ ddacă $\chi_A = \chi_B$
- pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B = \min\{\chi_A, \chi_B\}$
- pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_A = \chi_A^2$
- pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B = \max\{\chi_A, \chi_B\}$
- pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_A \cdot \chi_B$
- pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{T \setminus A} = \mathbf{1} - \chi_A$

- $\chi_{A \Delta B} = \chi_A + \chi_B - 2 \cdot \chi_A \cdot \chi_B$

Remarca 8.4. Fie T și I două mulțimi nevide și $(A_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(T)$ o familie de părți ale lui T indexată de I . Atunci au loc:

- $\chi_{\bigcup_{i \in I} A_i} = \max\{\chi_{A_i} \mid i \in I\}$
- $\chi_{\bigcap_{i \in I} A_i} = \min\{\chi_{A_i} \mid i \in I\}$

Remarca 8.5 (legile de distributivitate generalizată pentru \cup și \cap). Pentru orice mulțime nevidă I , orice mulțime A și orice familie de mulțimi $(A_i)_{i \in I}$, au loc egalitățile:

- **distributivitatea generalizată a \cup față de \cap :** $A \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} (A \cup A_i)$
- **distributivitatea generalizată a \cap față de \cup :** $A \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap A_i)$

Propoziția 8.6. Pentru orice mulțime nevidă T , $\mathcal{P}(T) \cong \{0, 1\}^T$.

Corolarul 8.7. Pentru orice mulțime T , $|\mathcal{P}(T)| = 2^{|T|}$.

A se vedea precizările despre **examen** și **temele obligatorii** de la sfârșitul Cursului II.

9 Relații binare

Relații n -are, relații binare:

Definiția 9.1. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și A_1, A_2, \dots, A_n mulțimi. Se numește *relație n -ară* între mulțimile A_1, A_2, \dots, A_n o submulțime a produsului cartezian $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$.

Observația 9.2. Pentru $n = 1$ în definiția anterioară se obține noțiunea de *relație unară* pe o mulțime: prin definiție, o *relație unară* pe o mulțime A este o submulțime a lui A .

Pentru $n = 2$ în definiția anterioară se obține noțiunea de *relație binară*.

Definiția 9.3. Fie A și B două mulțimi. Se numește *relație binară* între A și B o submulțime R a produsului direct $A \times B$.

Pentru fiecare $a \in A$ și fiecare $b \in B$, faptul că $(a, b) \in R$ se mai notează cu $a R b$ și se citește: *a este în relația R cu b* .

Exemplul 9.4. Pentru orice mulțimi A și B , produsul direct $A \times B$ este o relație binară între A și B (evident, cea mai mare în sensul incluziunii dintre toate relațiile binare între A și B).

Tipuri de relații binare:

Definiția 9.5 (tipuri de relații binare). Fie A și B mulțimi, iar $R \subseteq A \times B$ (i. e. R o relație binară între A și B). R se zice:

- *funcțională* ddacă: pentru orice $a \in A$ și orice $b_1, b_2 \in B$, dacă $a R b_1$ și $a R b_2$, atunci $b_1 = b_2$; o relație funcțională între A și B se mai numește *funcție parțială* de la A la B ;
- *totală* ddacă: pentru orice $a \in A$, există $b \in B$, a. î. $a R b$; o relație funcțională totală între A și B se mai numește *funcție* de la A la B ;
- *injectivă* ddacă, pentru orice $a_1, a_2 \in A$ și orice $b \in B$, dacă $a_1 R b$ și $a_2 R b$, atunci $a_1 = a_2$;
- *surjectivă* ddacă, pentru orice $b \in B$, există $a \in A$, astfel încât $a R b$.

Remarca 9.6. Definiția de mai sus a unei funcții este exact definiția din cursul al doilea, în care identificăm o funcție cu graficul ei: o funcție $f = (A, G, B)$ se identifică cu $G \subseteq A \times B$.

De asemenea, cu această identificare, noțiunea de funcție injectivă, respectiv surjectivă, respectiv bijectivă, coincide cu aceea de relație funcțională totală injectivă, respectiv surjectivă, respectiv injectivă și surjectivă.

Într-adevăr:

Remarca 9.7. Pentru orice mulțimi A, B și orice relație binară $R \subseteq A \times B$:

- R este o **relație funcțională (funcție parțială)** ddacă: pentru orice $a \in A$, există cel mult un $b \in B$, a. î. $a R b$;
- R este o **relație totală** ddacă: pentru orice $a \in A$, există cel puțin un $b \in B$, a. î. $a R b$;
- așadar, R este o **funcție** ddacă este o **relație funcțională totală**, i. e.: pentru orice $a \in A$, există un unic $b \in B$, a. î. $a R b$;
- R este o **relație injectivă** ddacă: pentru orice $b \in B$, există cel mult un $a \in A$, a. î. $a R b$;
- R este o **relație surjectivă** ddacă: pentru orice $b \in B$, există cel puțin un $a \in A$, a. î. $a R b$;
- R este o **relație injectivă și surjectivă** ddacă: pentru orice $b \in B$, există un unic $a \in A$, a. î. $a R b$;
- R este o **relație funcțională totală injectivă/surjectivă/injectivă și surjectivă** ddacă este o **funcție injectivă/surjectivă/bijectivă**, respectiv.

Definiția 9.8. Pentru orice mulțime A ,

$$\Delta_A := \{(a, a) \mid a \in A\}$$

este o relație binară între A și A , numită *diagonala lui A* .

Remarca 9.9 ($\Delta_A =$ egalitatea pe A). Pentru orice mulțime A , Δ_A este chiar **relația de egalitate pe A** , adică, pentru orice $a, b \in A$, avem:

$$a \Delta_A b \text{ ddacă } a = b.$$

Remarca 9.10 ($\Delta_A = id_A$). Pentru orice mulțime A , Δ_A este o funcție, chiar o funcție bijectivă, anume **funcția identică a lui A (identitatea lui A)**:

$$\Delta_A = id_A : A \rightarrow A, \text{ pentru orice } a \in A, id_A(a) = a.$$

Operații cu relații binare:

- Relațiile sunt mulțimi, așadar li se pot aplica operațiile obișnuite cu mulțimi: reuniunea, intersecția, diferența etc..
- Astfel, pentru orice mulțimi A, B și orice relații binare R și S între A și B : $R \cup S, R \cap S, R \setminus S, \overline{R} := (A \times B) \setminus R$ (*complementara lui R*) sunt tot relații binare între A și B .

Definiția 9.11. Pentru orice mulțimi A, B, A', B' și orice relații binare $R \subseteq A \times B$ și $R' \subseteq A' \times B'$, se definește *produsul direct* al relațiilor R și R' , notat $R \times R'$, ca fiind următoarea relație binară între $A \times A'$ și $B \times B'$: $R \times R' := \{((a, a'), (b, b')) \mid a \in A, a' \in A', b \in B, b' \in B', (a, b) \in R, (a', b') \in R'\} \subseteq (A \times A') \times (B \times B')$.

Generalizare: pentru orice mulțime I , orice familii de mulțimi $(A_i)_{i \in I}$ și $(B_i)_{i \in I}$ și orice familie de relații binare $(R_i)_{i \in I}$, cu $R_i \subseteq A_i \times B_i$, pentru orice $i \in I$, se definește *produsul direct* al familiei $(R_i)_{i \in I}$, notat $\prod_{i \in I} R_i$,

ca fiind următoarea relație binară între $\prod_{i \in I} A_i$ și $\prod_{i \in I} B_i$: $\prod_{i \in I} R_i := \{((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \mid (\forall i \in I) (a_i \in A_i, b_i \in B_i \text{ și } a_i R_i b_i)\} \subseteq \prod_{i \in I} A_i \times \prod_{i \in I} B_i$.

Observația 9.12. Definiția produsului direct de relații binare este diferită de definiția produsului direct de mulțimi al aceluiași relații binare, adică de produsul lor direct ca mulțimi. Mulțimile obținute prin cele două tipuri de produs direct sunt în bijecție, dar nu sunt egale, dacă nu considerăm produsul direct de mulțimi ca fiind comutativ, prin asimilarea bijecției în cauză cu identitatea.

Remarca 9.13 (facultativă). Cu notațiile din definiția anterioară, dacă avem încă o pereche de relații binare $S \subseteq A \times B$ și $S' \subseteq A' \times B'$, atunci, în cazul în care R, R', S și S' sunt nevide:

$$R \times R' = S \times S' \text{ ddacă } [R = S \text{ și } R' = S']$$

În general, dacă avem încă o familie de relații binare $(S_i)_{i \in I}$, cu $S_i \subseteq A_i \times B_i$, pentru orice $i \in I$, atunci, în cazul în care $I \neq \emptyset$ și, pentru fiecare $i \in I$, $R_i \neq \emptyset$ și $S_i \neq \emptyset$:

$$\prod_{i \in I} R_i = \prod_{i \in I} S_i \Leftrightarrow (\forall i \in I) (R_i = S_i)$$

Într-adevăr, dacă ne referim la cazul general, echivalența de mai sus rezultă, prin dublă implicație, din faptul că:

- $((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \in \prod_{i \in I} R_i$ ddacă $(a_i, b_i) \in R_i$ pentru fiecare $i \in I$;
- $((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \in \prod_{i \in I} S_i$ ddacă $(a_i, b_i) \in S_i$ pentru fiecare $i \in I$;
- $\prod_{i \in I} R_i = \prod_{i \in I} S_i$ ddacă are loc echivalența: $((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \in \prod_{i \in I} R_i \Leftrightarrow ((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \in \prod_{i \in I} S_i$;
- pentru fiecare $i \in I$, $R_i = S_i$ ddacă are loc echivalența: $(a_i, b_i) \in R_i \Leftrightarrow (a_i, b_i) \in S_i$.

Remarca 9.14 (facultativă). Desigur, și pentru două familii de mulțimi nevide $(A_i)_{i \in I}$ și $(B_i)_{i \in I}$ indexate de aceeași mulțime nevidă I , avem:

$$\prod_{i \in I} A_i = \prod_{i \in I} B_i \Leftrightarrow (\forall i \in I) (A_i = B_i),$$

pentru că, având o familie de elemente arbitrare $(x_i)_{i \in I}$, avem: $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i \Leftrightarrow (\forall i \in I) (x_i \in A_i)$, și la fel pentru $(B_i)_{i \in I}$, de unde rezultă că: $(A_i)_{i \in I}$ și $(B_i)_{i \in I}$ au aceleași elemente ddacă, pentru fiecare $i \in I$, A_i și B_i au aceleași elemente.

Definiția 9.15. Pentru orice mulțimi A, B, C și orice relații binare $R \subseteq A \times B$ și $S \subseteq B \times C$, se definește *compunerea lui S cu R* ca fiind relația binară între A și C notată $S \circ R$ și definită prin: $S \circ R = \{(a, c) \mid a \in A, c \in C, (\exists b \in B) [(a, b) \in R \text{ și } (b, c) \in S]\} \subseteq A \times C$.

Remarca 9.16 (temă). Diagonala unei mulțimi este element neutru la compunere și la dreapta, și la stânga, i. e., pentru orice mulțimi A, B și orice relație binară $R \subseteq A \times B$, $R \circ \Delta_A = R$ și $\Delta_B \circ R = R$.

Remarca 9.17. Compunerea ca relații binare a două funcții coincide cu compunerea lor ca funcții. În particular, rezultatul ei este tot o funcție.

Definiția 9.18. Pentru orice mulțimi A, B și orice relație binară $R \subseteq A \times B$, se definește *inversa lui R* , notată R^{-1} , ca fiind următoarea relație binară între B și A :

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\} \subseteq B \times A$$

Altfel scris: prin definiție, $R^{-1} \subseteq B \times A$, a. î., pentru orice $a \in A$ și orice $b \in B$:

$$b R^{-1} a \Leftrightarrow a R b$$

Remarca 9.19. A se observa faptul că, pentru orice relație binară R , se definește inversa ei R^{-1} , spre deosebire de cazul inverselor de funcții, care se definesc numai pentru funcțiile bijective, această restricție provenind atât din constrângerea ca relația binară să fie funcție, cât și din constrângerea ca inversa ei să fie tot funcție (a se vedea o remarcă de mai jos, care arată că definiția funcției este exact definiția bijectivității (i. e. a injectivității și surjectivității) în oglindă).

Remarca 9.20. Este imediat faptul că inversa ca relație a unei funcții bijective este inversa ei ca funcție (a se vedea și remarca următoare).

Remarca 9.21 (temă). Fie A, B mulțimi și $R \subseteq A \times B$. Atunci:

- R este injectivă ddacă R^{-1} este funcțională;
- R este surjectivă ddacă R^{-1} este totală;
- prin urmare: R este injectivă și surjectivă ddacă R^{-1} este funcție.

Remarca 9.22. A se observa că o relație binară injectivă și surjectivă nu este neapărat o funcție (bijectivă), pentru că nu i se impune condiția de a fi funcțională, și nici cea de a fi totală.

Exercițiul 9.23 (temă). Fie A, B mulțimi și $R \subseteq A \times B$. Dacă R este injectivă, atunci:

- $R^{-1} \circ R \subseteq \Delta_A$;
- $R^{-1} \circ R = \Delta_A$ ddacă R este totală.

Remarca 9.24 (asociativitatea compunerii de relații binare). Fie A, B, C, D mulțimi, $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ și $T \subseteq C \times D$. Atunci:

- $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$.

Remarca 9.25. Fie A, B, C mulțimi, $R \subseteq A \times B$ și $S \subseteq B \times C$. Atunci:

- $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

Exercițiul 9.26 (temă). Fie A, B, C și I mulțimi nevide (de fapt, pot fi și vide – vom vedea), $P \subseteq C \times A$, $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq A \times B$ și $T \subseteq B \times C$ relații binare, iar $(R_i)_{i \in I}$ o familie de relații binare de la A la B , i. e., pentru orice $i \in I$, $R_i \subseteq A \times B$.

Să se demonstreze că:

- $R \circ \emptyset = \emptyset = \emptyset \circ R$
- $\Delta_A^{-1} = \Delta_A$
- $(R^{-1})^{-1} = R$
- $R \subseteq S$ ddacă $R^{-1} \subseteq S^{-1}$
- $R = S$ ddacă $R^{-1} = S^{-1}$
- **inversa comută cu reuniunea și cu intersecția:**

- (i) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$
- (ii) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$

Generalizare:

- (i) $(\bigcup_{i \in I} R_i)^{-1} = \bigcup_{i \in I} R_i^{-1}$
- (ii) $(\bigcap_{i \in I} R_i)^{-1} = \bigcap_{i \in I} R_i^{-1}$

- **compunerea este distributivă față de reuniune, la stânga și la dreapta:**

- (i) $T \circ (R \cup S) = (T \circ R) \cup (T \circ S)$
- (ii) $(R \cup S) \circ P = (R \circ P) \cup (S \circ P)$

Generalizare:

- (i) $T \circ (\bigcup_{i \in I} R_i) = \bigcup_{i \in I} (T \circ R_i)$
- (ii) $(\bigcup_{i \in I} R_i) \circ P = \bigcup_{i \in I} (R_i \circ P)$

- **compunerea nu este distributivă față de intersecție (contraexemplu pentru această distributivitate:** dacă $x \in A$, $y, z \in B$ cu $y \neq z$ și $t \in C$, iar $R := \{(x, y)\}$, $S := \{(x, z)\}$ și $T := \{(y, t), (z, t)\}$, atunci:
 $T \circ (R \cap S) = T \circ \emptyset = \emptyset \neq \{(x, t)\} = T \circ R = T \circ S = (T \circ R) \cap (T \circ S)$
- **compunerea (la stânga și la dreapta) păstrează incluziunile nestricte:**
 - (i) $R \subseteq S$ implică $T \circ R \subseteq T \circ S$ (dar $R \subsetneq S$ nu implică $T \circ R \subsetneq T \circ S$)
 - (ii) $R \subseteq S$ implică $R \circ P \subseteq S \circ P$ (dar $R \subsetneq S$ nu implică $R \circ P \subsetneq S \circ P$)

prin urmare:

- (i) $T \circ \left(\bigcap_{i \in I} R_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} (T \circ R_i)$
- (ii) $\left(\bigcap_{i \in I} R_i\right) \circ P \subseteq \bigcap_{i \in I} (R_i \circ P)$

Să ne amintim definiția puterilor unei mulțimi:

Fie I o mulțime arbitrară și $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi.

Amintesc definiția **produsului cartezian al familiei** $(A_i)_{i \in I}$ (numit și **produsul direct al familiei** $(A_i)_{i \in I}$):

$$\begin{aligned} \prod_{i \in I} A_i &= \{(a_i)_{i \in I} \mid (\forall i \in I) (a_i \in A_i)\} = \\ &= \{f \mid f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i, (\forall i \in I) (f(i) \in A_i)\}. \end{aligned}$$

Fie A o mulțime arbitrară.

Amintesc că **puterile unei mulțimi** sunt un caz particular al produsului direct, anume cazul $A_i = A$, pentru orice $i \in I$:

$$A^I = \{f \mid f : I \rightarrow A\} = \{(a_i)_{i \in I} \mid (\forall i \in I) (a_i \in A)\} = \prod_{i \in I} A.$$

Notăția următoare, a *puterii a n -a a unei mulțimi* A , A^n , pentru un număr natural nenul n , corespunde cazului particular $I = \overline{1, n}$ și $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$.

Notăția 9.27. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și orice mulțime A , se notează:

$$\begin{aligned} A^n &:= A^{\overline{1, n}} = \{f \mid f : \overline{1, n} \rightarrow A\} = \\ &= \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid (\forall i \in \overline{1, n}) (a_i \in A)\} = \prod_{i=1}^n A = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ de } A}. \end{aligned}$$

Caz particular: pentru $n = 2$: $A^2 = A \times A$.

10 Relații binare pe o mulțime

În cele ce urmează, când nu se va menționa altfel, A va fi o mulțime arbitrară.

Definiția 10.1. Se numește *relație binară pe A* o relație binară între A și A , i. e. o submulțime a produsului direct $A^2 = A \times A$.

Exemplul 10.2. A^2 și Δ_A sunt relații binare pe A .

Remarca 10.3. Dacă A este finită și nevidă, iar R este o relație binară pe A , atunci perechea (A, R) este un graf orientat (cu mulțimea vârfurilor A și mulțimea arcelor R), așadar relația binară R poate fi reprezentată grafic chiar prin acest graf orientat.

Operații cu relații binare pe o mulțime:

Definiția 10.4 (puterile naturale ale unei relații binare pe o mulțime). Pentru orice relație binară $R \subseteq A \times A$ și orice $n \in \mathbb{N}$, se definește *puterea a n -a a lui R* , notată $R^n \subseteq A \times A$, recursiv, astfel:

$$\begin{cases} R^0 := \Delta_A; \\ R^{n+1} := R^n \circ R, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Remarca 10.5. Asociativitatea compunerii de relații binare permite următoarea scriere fără paranteze pentru orice relație binară R pe A și orice număr natural nenul n :

$$R^n = \underbrace{R \circ R \circ \dots \circ R}_{n \text{ de } R}.$$

Nota 10.6. Pentru o relație binară R și un $n \in \mathbb{N}$, se va deduce din context dacă notația R^n semnifică: $\underbrace{R \circ R \circ \dots \circ R}_{n \text{ de } R}$ (operație care poate fi definită numai dacă R este o relație binară pe o mulțime, nu între două mulțimi diferite) sau produsul direct de relații binare $\underbrace{R \times R \times \dots \times R}_{n \text{ de } R}$ sau produsul direct de mulțimi $\underbrace{R \times R \times \dots \times R}_{n \text{ de } R}$.

Remarca 10.7. $\Delta_A^{-1} = \Delta_A$.

Remarca 10.8. Pentru orice relație binară $R \subseteq A \times A$ și orice $n \in \mathbb{Z}$:

$$(R^n)^{-1} = (R^{-1})^n.$$

Remarca 10.9 (comutarea și adunarea exponenților întregi de același semn la compunerea puterilor unei relații binare pe o mulțime – facultativă). Fie $R \subseteq A^2$ și n, k două numere întregi de același semn, adică $n, k \geq 0$ sau $n, k \leq 0$. Atunci:

$$R^n \circ R^k = R^k \circ R^n = R^{n+k}.$$

Tipuri de relații binare pe o mulțime:

Definiția 10.10 (tipuri de relații binare pe o mulțime). Fie $R \subseteq A^2$ (i. e. R o relație binară pe A). R se zice:

- *reflexivă* ddacă, pentru orice $a \in A$, aRa ;
- *ireflexivă* ddacă, pentru orice $a \in A$, $(a, a) \notin R$, i. e. nu există $a \in A$ cu aRa ;
- *simetrică* ddacă, pentru orice $a, b \in A$, dacă aRb , atunci bRa ;
- *antisimetrică* ddacă, pentru orice $a, b \in A$, dacă aRb și bRa , atunci $a = b$;
- *asimetrică* ddacă, pentru orice $a, b \in A$, dacă $(a, b) \in R$, atunci $(b, a) \notin R$;
- *tranzitivă* ddacă, pentru orice $a, b, c \in A$, dacă aRb și bRc , atunci aRc ;
- *totală* (într-un al doilea sens) ddacă, pentru orice $a, b \in A$ cu $a \neq b$, au loc aRb sau bRa ;
- *completă* ddacă, pentru orice $a, b \in A$, au loc aRb sau bRa .

Observația 10.11. Acest **al doilea sens** pentru denumirea de **relație binară totală** este specific **relațiilor binare pe o mulțime**. **Primul sens** a fost întâlnit la **relații binare în general (relații binare între două mulțimi)**, și **nu coincide cu sensul de aici** pe acest caz particular al relațiilor binare pe o mulțime.

Remarca 10.12 (caracterizarea acestor tipuri de relații binare prin operații cu mulțimi). Fie R o relație binară pe A . Atunci au loc:

- R este reflexivă ddacă $\Delta_A \subseteq R$;
- R este ireflexivă ddacă $\Delta_A \cap R = \emptyset$;
- în cazul în care $A \neq \emptyset$: dacă R este ireflexivă, atunci R nu este reflexivă, dar nu și reciproc;

- R este simetrică ddacă $R \subseteq R^{-1}$ ddacă $R = R^{-1}$;
- R este antisimetrică ddacă $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$;
- R este simetrică și antisimetrică ddacă $R \subseteq \Delta_A$;
- singura relație binară pe A care este simultan reflexivă, simetrică și antisimetrică este Δ_A ;
- R este asimetrică ddacă $R \cap R^{-1} = \emptyset$;
- dacă R este asimetrică, atunci R este antisimetrică, dar nu și reciproc;
- singura relație binară pe A care este simultan simetrică și asimetrică este \emptyset ;
- dacă R este asimetrică, atunci R este ireflexivă, dar nu și reciproc;
- R este asimetrică și tranzitivă ddacă R este ireflexivă și tranzitivă;
- R este tranzitivă ddacă $R^2 \subseteq R$;
- dacă R este reflexivă, atunci $R \subseteq R^2$;
- R este totală ddacă $\Delta_A \cup R \cup R^{-1} = A^2$;
- R este completă ddacă $R \cup R^{-1} = A^2$;
- R este completă ddacă R este reflexivă și totală.

Definiția 10.13 (tipuri de relații binare pe o mulțime). Fie $R \subseteq A^2$ (i. e. R o relație binară pe A). R se numește:

- (*relație de*) *preordine* ddacă e reflexivă și tranzitivă;
- (*relație de*) *echivalență* ddacă e o preordine simetrică, i. e. o relație reflexivă, simetrică și tranzitivă;
- (*relație de*) *ordine (parțială)* ddacă e o preordine antisimetrică, i. e. o relație reflexivă, tranzitivă și antisimetrică;
- (*relație de*) *ordine totală* ddacă e simultan o relație de ordine și o relație totală (în acest al doilea sens de mai sus);
- (*relație de*) *ordine strictă* ddacă e asimetrică și tranzitivă.

Remarca 10.14 (consecință a remarcii anterioare). • Întrucât orice relație de ordine este reflexivă, rezultă că o relație de ordine este totală (în acest al doilea sens) ddacă este completă.

- Întrucât Δ_A este tranzitivă, rezultă că Δ_A este unica relație binară pe A care este simultan relație de echivalență și relație de ordine.
- Dacă R este o preordine, atunci $R = R^2$.

Remarca 10.15. Orice relație de ordine este reflexivă, și orice relație de ordine strictă este ireflexivă.

Nu există relații binare pe o mulțime nevidă care să fie simultan reflexive și ireflexive. Prin urmare, nu există relații binare pe o mulțime nevidă care să fie simultan relații de ordine și relații de ordine strictă.

A se vedea, în Cursul III, secțiunea facultativă despre matrici caracteristice.

Despre produsul direct de relații binare pe o mulțime:

Lema 10.16. Fie I o mulțime nevidă, $(A_i)_{i \in I}$, $(B_i)_{i \in I}$ și $(C_i)_{i \in I}$ familii de mulțimi, iar $(Q_i)_{i \in I}$, $(R_i)_{i \in I}$ și $(S_i)_{i \in I}$ familii de relații binare, cu $R_i \subseteq A_i \times B_i$, $S_i \subseteq A_i \times B_i$ și $Q_i \subseteq B_i \times C_i$, pentru orice $i \in I$. Atunci:

- $\prod_{i \in I} R_i \subseteq \prod_{i \in I} S_i$ dacă $(\exists i_0 \in I) (R_{i_0} = \emptyset)$ sau $(\forall i \in I) (R_i \subseteq S_i)$;
- $\prod_{i \in I} R_i = \prod_{i \in I} S_i$ dacă $(\exists i_0, i_1 \in I) (R_{i_0} = \emptyset, S_{i_1} = \emptyset)$ sau $(\forall i \in I) (R_i = S_i)$;
- $(\prod_{i \in I} R_i) \cap (\prod_{i \in I} S_i) = \prod_{i \in I} (R_i \cap S_i)$ (și la fel pentru \cup , \setminus , Δ în loc de \cap);
- $(\prod_{i \in I} Q_i) \circ (\prod_{i \in I} R_i) = \prod_{i \in I} (Q_i \circ R_i)$;
- $(\prod_{i \in I} R_i)^{-1} = \prod_{i \in I} R_i^{-1}$.

Propoziția 10.17. Fie I o mulțime nevidă, $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi și $(R_i)_{i \in I}$ o familie de relații binare, cu $\emptyset \neq R_i \subseteq A_i^2 = A_i \times A_i$, pentru orice $i \in I$. Atunci:

- (i) $\prod_{i \in I} R_i$ este reflexivă dacă R_i este reflexivă, pentru fiecare $i \in I$
- (ii) dacă există $i_0 \in I$ cu R_{i_0} ireflexivă, atunci $\prod_{i \in I} R_i$ este ireflexivă
- (iii) $\prod_{i \in I} R_i$ este simetrică dacă R_i este simetrică, pentru fiecare $i \in I$
- (iv) $\prod_{i \in I} R_i$ este antisimetrică dacă R_i este antisimetrică, pentru fiecare $i \in I$
- (v) dacă există $i_0 \in I$ cu R_{i_0} asimetrică, atunci $\prod_{i \in I} R_i$ este asimetrică
- (vi) $\prod_{i \in I} R_i$ este tranzitivă dacă R_i este tranzitivă, pentru fiecare $i \in I$

Prin urmare:

- $\prod_{i \in I} R_i$ este o preordine, respectiv echivalență, respectiv ordine, dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i este o preordine, respectiv echivalență, respectiv ordine;
- $\prod_{i \in I} R_i$ este o ordine strictă dacă există $i_0 \in I$ a.î. R_{i_0} este o ordine strictă și, pentru fiecare $i \in I \setminus \{i_0\}$, R_i este o ordine,

pentru că: dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i este antisimetrică, atunci: $\prod_{i \in I} R_i$ este asimetrică dacă există $i_0 \in I$ cu R_{i_0} asimetrică.

11 Relații de echivalență și partiții ale unei mulțimi

Exemplul 11.1. Δ_A și A^2 sunt relații de echivalență pe A , anume cea mai mică și, respectiv, cea mai mare relație de echivalență pe A , în sensul incluziunii, adică raportat la relația de incluziune între mulțimi.

Definiția 11.2. Fie A nevidă și $(A_i)_{i \in I}$ o familie nevidă (i. e. cu $I \neq \emptyset$) de submulțimi ale lui A . Familia $(A_i)_{i \in I}$ se numește *partiție* a lui A dacă satisface următoarele condiții:

- (i) pentru orice $i \in I$, $A_i \neq \emptyset$
- (ii) pentru orice $i, j \in I$, dacă $i \neq j$, atunci $A_i \cap A_j = \emptyset$ (i. e. mulțimile din familia $(A_i)_{i \in I}$ sunt două câte două disjuncte)
- (iii) $\bigcup_{i \in I} A_i = A$

Propoziția 11.3. Fie A nevidă și $(A_i)_{i \in I}$ o partiție a lui A . Atunci, pentru orice $x \in A$, există un unic $i_0 \in I$, a. i. $x \in A_{i_0}$.

Observația 11.4. În cele ce urmează vom defini **clasele unei relații de echivalență**. Aici vom folosi cuvântul **clasă** cu un alt sens decât acela din Cursul I, unde am vorbit despre teoria axiomatică a mulțimilor. Aici, toate clasele de echivalență sunt mulțimi, în această accepțiune a relațiilor binare ca fiind definite între mulțimi. Dacă adoptăm definiția relațiilor binare din sistemul axiomatizat prezentat în Cursul I, care permitea unei relații binare să fie definită între două clase, atunci putem spune că relația de **cardinal echivalență**, studiată în Cursul II, este o relație de echivalență pe **clasa mulțimilor**, iar clasele ei de echivalență sunt **clase proprii, cu excepția clasei lui \emptyset** (de data aceasta, **clase** în sensul din Cursul I).

Pentru cele ce urmează, vom considera mulțimea A nevidă, și o relație de echivalență \sim pe A , i. e.:

- \sim este o relație binară pe A : $\sim \subseteq A^2$
- \sim este **reflexivă**: pentru orice $x \in A$, $x \sim x$
- \sim este **simetrică**: pentru orice $x, y \in A$, dacă $x \sim y$, atunci $y \sim x$
- \sim este **tranzitivă**: pentru orice $x, y, z \in A$, dacă $x \sim y$ și $y \sim z$, atunci $x \sim z$

Să observăm că, în definiția simetriei, putem interschimba x și y și continua seria de implicații, obținând implicație dublă, adică: \sim este **simetrică** dacă, pentru orice $x, y \in A$, are loc echivalența: $x \sim y$ dacă și numai dacă $y \sim x$.

Definiția 11.5. Pentru fiecare $x \in A$, definim **clasa de echivalență a lui x raportat la \sim** ca fiind următoarea submulțime a lui A , notată cu \hat{x} sau cu x/\sim : $\hat{x} := x/\sim := \{y \in A \mid x \sim y\}$.

Remarca 11.6. Observăm că simetria lui \sim ne asigură de faptul că: pentru orice $x \in A$, $\hat{x} = \{y \in A \mid y \sim x\}$.

Propoziția 11.7 (proprietățile claselor de echivalență). (i) Pentru orice $x \in A$, $x \in \hat{x}$, și, așadar, $\hat{x} \neq \emptyset$.

(ii) Pentru orice $x, y \in A$, avem:

- dacă $x \sim y$, atunci $\hat{x} = \hat{y}$;
- dacă $(x, y) \notin \sim$, atunci $\hat{x} \cap \hat{y} = \emptyset$.

Propoziția 11.8 (proprietățile claselor de echivalență). Pentru orice $x, y \in A$:

- $x \sim y$ dacă și numai dacă $x \in \hat{y}$ dacă și numai dacă $y \in \hat{x}$ dacă și numai dacă $\hat{x} = \hat{y}$;
- $(x, y) \notin \sim$ dacă și numai dacă $(y, x) \notin \sim$ dacă și numai dacă $x \notin \hat{y}$ dacă și numai dacă $y \notin \hat{x}$ dacă și numai dacă $\hat{x} \cap \hat{y} = \emptyset$.

Definiția 11.9. Fiecare $x \in A$ se numește **reprezentant al clasei \hat{x}** .

Remarca 11.10 (proprietățile claselor de echivalență). Pentru fiecare $x, y \in A$, y este reprezentant al clasei \hat{x} dacă și numai dacă $y \in \hat{x}$.

Definiția 11.11. Mulțimea claselor de echivalență ale lui \sim se notează cu A/\sim și se numește **mulțimea factor a lui A prin \sim** sau **mulțimea cât a lui A prin \sim** : $A/\sim = \{\hat{x} \mid x \in A\}$.

Observația 11.12. Denumirile de **mulțime factor** și **mulțime cât** se datorează faptului că mulțimea A/\sim din definiția anterioară se obține prin “împărțirea mulțimii A în clasele de echivalență ale lui \sim ” (a se vedea următoarea propoziție).

Propoziția 11.13 (clasele de echivalență formează o partiție). Mulțimea factor A/\sim este o partiție a lui A .

Remarca 11.14. Funcția $p : A \rightarrow A/\sim$, definită prin: pentru orice $x \in A$, $p(x) := \widehat{x}$, este surjectivă (sigur că este corect definită, pentru că \widehat{x} este unic determinat de x , oricare ar fi $x \in A$).

Definiția 11.15. Cu notațiile de mai sus, funcția p se numește *surjecția canonică de la A la A/\sim* .

Notația 11.16. Notăm cu:

- $\text{Part}(A)$ mulțimea partițiilor lui A ;
- $\text{Eq}(A)$ mulțimea relațiilor de echivalență pe mulțimea A .

Propoziția 11.17. *Mulțimea partițiilor unei mulțimi nevide este în bijecție cu mulțimea relațiilor de echivalență pe acea mulțime.*

Într-adevăr, funcțiile:

$$\text{Eq}(A) \begin{matrix} \xrightarrow{\psi} \\ \xleftarrow{\varphi} \end{matrix} \text{Part}(A)$$

definite prin:

- pentru orice $\sim \in \text{Eq}(A)$, $\varphi(\sim) = A/\sim$,
- pentru orice $(A_i)_{i \in I} \in \text{Part}(A)$, $\psi((A_i)_{i \in I}) = \{(x, y) \mid x, y \in A, (\exists i \in I) (x, y \in A_i)\} = \bigcup_{i \in I} A_i^2 \subseteq A^2$,

sunt inverse una alteia, așadar sunt inversabile, deci bijective.

- În cazul **morfismelor** între structuri algebrice (de același tip) (i. e. funcțiile care comută cu operațiile acelor structuri algebrice), **nucleul** se definește în funcție de un element distins din structura codomeniu, cum este elementul neutru la grupuri.
- În cazul **funcțiilor**, definite între două mulțimi pe care nu se dau structuri algebrice, pentru definirea unei noțiuni de **nucleu**, o funcție nu poate fi raportată decât la ea însăși, de unde și denumirea din definiția următoare.
- Pentru cele ce urmează, fie A și B două mulțimi nevide arbitrare și $f : A \rightarrow B$ o funcție arbitrară.
- Următoarea diagramă (reprezentare grafică) este doar pentru intuiție:

$$A \begin{matrix} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{f} \end{matrix} B$$

Definiția 11.18 (nucleul de săgeată dublă). Se numește *nucleul (de săgeată dublă al) lui f* următoarea relație binară pe A , notată $\text{Ker}(f)$:

$$\text{Ker}(f) := \{(x, y) \mid x, y \in A, f(x) = f(y)\} \subseteq A^2.$$

- În cazul morfismelor, au loc proprietăți de forma: morfismul este injectiv dacă nucleul său este trivial.
- Și aici avem o proprietate de acest tip:

Remarca 11.19. (i) $\text{Ker}(f) \supseteq \Delta_A$;

(ii) $\text{Ker}(f) = \Delta_A$ dacă f este injectivă.

Remarca 11.20. $\text{Ker}(f) = \{(x, y) \mid x, y \in A, (f(x), f(y)) \in \Delta_B\}$ este o relație de echivalență pe A .

- Nucleele de săgeată dublă ale morfismelor între structuri algebrice de același tip sunt **congruențe**, adică relații de echivalență care păstrează operațiile structurilor algebrice respective. (Vom vorbi despre **congruențe** pe algebre Boole în unele dintre cursurile următoare.) Am precizat: nucleele **de săgeată dublă** ale morfismelor, deci **nu** nucleele morfismelor în primul sens.
- Cu privire la proprietatea care urmează: intuitiv, o **diagramă** (cu mulțimi și funcții, ca aceea din propoziția următoare, de exemplu) se zice *comutativă* dacă, indiferent pe ce drum “urmărim săgețile” și compunem funcțiile, între oricare două mulțimi din diagramă se obține aceeași funcție, i. e. toate compunerile de funcții între acele mulțimi sunt egale (mulțimile pot fi și 4 sau mai multe, nu neapărat 3, ca în cazul diagramei următoare).

Pentru cele ce urmează, renunțăm la fixarea lui A , B și f .

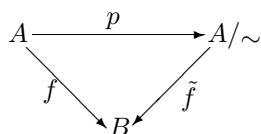
Propoziția 11.21 (proprietatea de universalitate a mulțimii factor). *Fie A o mulțime nevidă, \sim o relație de echivalență pe A și $p : A \rightarrow A/\sim$ surjecția canonică: pentru orice $x \in A$, $p(x) = \hat{x} = \{y \in A \mid x \sim y\}$.*

Atunci: pentru orice mulțime nevidă B și orice funcție $f : A \rightarrow B$ cu $\sim \subseteq \text{Ker}(f)$, există o unică funcție $\tilde{f} : A/\sim \rightarrow B$ care face comutativă următoarea diagramă, i. e. cu proprietatea că:

$$\tilde{f} \circ p = f,$$

i. e., pentru orice $x \in A$:

$$\tilde{f}(\hat{x}) = f(x).$$



12 Operatori de închidere și familii Moore

- Vom studia în cele ce urmează **operatorii de închidere** pe mulțimea părților unei mulțimi și **familiiile Moore (sistemele de închidere)** de părți ale unei mulțimi.
- Aceste noțiuni pot fi definite și studiate pe **mulțimi ordonate arbitrare** (vom vedea ce sunt acestea), adică, în considerațiile de mai jos, se poate înlocui mulțimea părților unei mulțimi cu o mulțime arbitrară M , incluziunea de mulțimi cu o relație de ordine arbitrară \leq pe M , iar intersecția cu **infimumul** în **mulțimea ordonată** (M, \leq) (în timp ce reuniunea va avea drept generalizare o noțiune numită **supremum**) (vom vedea ce sunt toate acestea).
- Vom vedea că, în mulțimi ordonate arbitrare:
 - (i) supremumul familiei vide este minimul (cele două există simultan);
 - (ii) infimumul familiei vide este maximul (cele două există simultan).
- Pentru familii de mulțimi:
 - (i) am demonstrat că reuniunea familiei vide de mulțimi este \emptyset (cea mai mică mulțime în sensul incluziunii, adică raportat la incluziunea de mulțimi: $\emptyset \subseteq A$, pentru orice mulțime A);
 - (ii) nu există o cea mai mare mulțime (dintre toate mulțimile) în sensul incluziunii, pentru că, dacă ar exista, atunci aceasta ar include pe $\mathcal{P}(A)$, pentru orice mulțime A , deci ar conține fiecare mulțime A , deci ar avea ca submulțime mulțimea tuturor mulțimilor, care nu există (a se revedea Cursul I); dar există o cea mai mare mulțime dintre părțile unei anumite mulțimi. Deci ce mulțime va fi intersecția familiei vide de mulțimi?

Remarca 12.1. Intersecția familiei vide nu există decât raportat la o mulțime totală T : intersecția familiei vide de părți ale lui T (adică infimumul familiei vide în mulțimea ordonată $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$ – vom vedea), se **definește** în următorul mod, și este egală cu mulțimea totală T :

$$\bigcap_{i \in \emptyset} A_i := \{x \in T \mid (\forall i \in \emptyset) (x \in A_i)\} = \{x \in T \mid (\forall i) (i \in \emptyset \Rightarrow x \in A_i)\} = T,$$

întrucât proprietatea $(\forall i) (i \in \emptyset \Rightarrow x \in A_i)$ este adevărată pentru orice x .

Exercițiul 12.2. Fie T o mulțime, iar $X \subseteq Y \subseteq \mathcal{P}(T)$ (mulțimi de părți ale lui T care satisfac această incluziune). Atunci au loc incluziunile:

$$(i) \bigcup_{A \in X} A \subseteq \bigcup_{A \in Y} A$$

$$(ii) \bigcap_{A \in X} A \supseteq \bigcap_{A \in Y} A$$

În particular, dacă $M \in Y \subseteq \mathcal{P}(T)$ (i. e. $\emptyset \neq Y \subseteq \mathcal{P}(T)$ și $M \in Y$, adică pentru $X = \{M\}$ mai sus (un *singleton*, i. e. o mulțime cu un singur element)), atunci:

$$(i) \quad M \subseteq \bigcup_{A \in Y} A$$

$$(ii) \quad M \supseteq \bigcap_{A \in Y} A$$

Definiția 12.3. Fie T o mulțime arbitrară.

- Se numește *familie Moore de părți ale lui T* (sau *sistem de închidere pe mulțimea părților lui T*) o familie de părți ale lui T închisă la intersecții arbitrare, i. e. o familie de mulțimi $\mathcal{M} = (M_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(T)$, cu I mulțime arbitrară, având proprietatea că, pentru orice $S \subseteq I$, $\bigcap_{s \in S} M_s \in \mathcal{M}$ (i. e., pentru orice $S \subseteq I$, există $i_S \in I$, astfel încât $\bigcap_{s \in S} M_s = M_{i_S}$). Familiile Moore se mai numesc *sisteme de închidere*.
- Se numește *operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$* o funcție $C : \mathcal{P}(T) \rightarrow \mathcal{P}(T)$, astfel încât, pentru orice $X, Y \in \mathcal{P}(T)$, au loc proprietățile:
 - (i) $C(C(X)) = C(X)$ (C este *idempotent*);
 - (ii) $X \subseteq C(X)$ (C este *extensiv*);
 - (iii) dacă $X \subseteq Y$, atunci $C(X) \subseteq C(Y)$ (C este *crescător*).

Peste tot în restul acestei secțiuni, T va fi o mulțime arbitrară.

Remarca 12.4. Orice familie Moore de părți ale lui T conține intersecția familiei vide de părți ale lui T , adică pe T .

Exemplul 12.5. • $id_{\mathcal{P}(T)}$ este un operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$.

- Funcția constantă $C : \mathcal{P}(T) \rightarrow \mathcal{P}(T)$, $(\forall X \in \mathcal{P}(T)) (C(X) = T)$, este un operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$.
- $\mathcal{P}(T)$ este o familie Moore de părți ale lui T .
- $\{T\}$ este o familie Moore de părți ale lui T .
- \emptyset nu este o familie Moore de părți ale lui T , pentru că nu îl conține pe T .

Așadar:

Remarca 12.6. Orice familie Moore este nevidă.

Propoziția 12.7. Dacă \mathcal{M} este o familie Moore de părți ale lui T , atunci, pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, există o (unică) cea mai mică mulțime din \mathcal{M} care include pe A (cea mai mică în sensul incluziunii), și aceasta este egală cu intersecția mulțimilor din \mathcal{M} care includ pe A .

Propoziția 12.8 (*). Fie I o mulțime nevidă și $\mathcal{M} = (M_i)_{i \in I}$ o familie Moore de părți ale lui T .

Definim funcția $C_{\mathcal{M}} : \mathcal{P}(T) \rightarrow \mathcal{P}(T)$ astfel: pentru orice $X \in \mathcal{P}(T)$, $C_{\mathcal{M}}(X)$ este, prin definiție, cea mai mică mulțime din \mathcal{M} care include pe X , adică $C_{\mathcal{M}}(X) := \bigcap_{\substack{M \in \mathcal{M}, \\ X \subseteq M}} M$.

Atunci $C_{\mathcal{M}}$ este un operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$.

Definiția 12.9 (mulțimi închise). Fie $C : \mathcal{P}(T) \rightarrow \mathcal{P}(T)$ un operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$. Elementele din imaginea lui C , $C(\mathcal{P}(T))$, adică mulțimile de forma $C(X)$, cu $X \in \mathcal{P}(T)$, se numesc *mulțimi închise* raportat la operatorul de închidere C .

Propoziția 12.10 (caracterizare echivalentă pentru mulțimile închise). Fie $C : \mathcal{P}(T) \rightarrow \mathcal{P}(T)$ un operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$. Atunci mulțimile închise raportat la operatorul de închidere C sunt exact acele mulțimi $X \in \mathcal{P}(T)$ care satisfac $X = C(X)$, i. e.: $\{C(X) \mid X \in \mathcal{P}(T)\} = \{X \in \mathcal{P}(T) \mid X = C(X)\}$.

Propoziția 12.11 ($\star\star$). Fie $C : \mathcal{P}(T) \rightarrow \mathcal{P}(T)$ un operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$. Definim $\mathcal{M}_C = C(\mathcal{P}(T)) = \{C(X) \mid X \in \mathcal{P}(T)\} = \{X \in \mathcal{P}(T) \mid X = C(X)\} \subseteq \mathcal{P}(T)$ (familia mulțimilor închise din $\mathcal{P}(T)$ raportat la operatorul de închidere C).

Atunci \mathcal{M}_C este o familie Moore de părți ale lui T .

Propoziția 12.12. Aplicațiile din cele Propozițiile (\star) și ($\star\star$) sunt inverse una alteia, adică:

- (i) pentru orice operator de închidere $C : \mathcal{P}(T) \rightarrow \mathcal{P}(T)$, $C_{\mathcal{M}_C} = C$;
- (ii) pentru orice familie Moore \mathcal{M} de părți ale lui T , $\mathcal{M}_{C_{\mathcal{M}}} = \mathcal{M}$.

Așadar aceste aplicații sunt bijecții, deci mulțimea operatorilor de închidere pe $\mathcal{P}(T)$ și mulțimea familiilor Moore de părți ale lui T sunt în bijecție.

Exemplul 12.13. • Familia Moore asociată operatorului de închidere $id_{\mathcal{P}(T)}$ pe $\mathcal{P}(T)$ este $id_{\mathcal{P}(T)}(\mathcal{P}(T)) = \mathcal{P}(T)$.

- Familia Moore asociată operatorului de închidere dat de funcția constantă $C : \mathcal{P}(T) \rightarrow \mathcal{P}(T)$, $(\forall X \in \mathcal{P}(T)) (C(X) = T)$, este $C(\mathcal{P}(T)) = \{T\}$.

13 Închiderile relațiilor binare pe o mulțime

- Peste tot în această secțiune, A va fi o mulțime arbitrară.
- $\mathcal{P}(A^2)$ este mulțimea submulțimilor lui $A^2 = A \times A$, adică mulțimea relațiilor binare pe A .
- Amintesc că: $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\} = id_A$ =relația de egalitate pe A .

Propoziția 13.1. Fie $(R_i)_{i \in I}$ o familie nevidă (i. e. cu $I \neq \emptyset$) de relații binare pe A . Atunci:

- (i) dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i e reflexivă, atunci $\bigcap_{i \in I} R_i$ e reflexivă
- (ii) dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i e simetrică, atunci $\bigcap_{i \in I} R_i$ e simetrică
- (iii) dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i e tranzitivă, atunci $\bigcap_{i \in I} R_i$ e tranzitivă
- (iv) dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i e o preordine, atunci $\bigcap_{i \in I} R_i$ e o preordine
- (v) dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i e o relație de echivalență, atunci $\bigcap_{i \in I} R_i$ e o relație de echivalență

Remarca 13.2. Propoziția anterioară arată că familia relațiilor binare reflexive/simetrice/ tranzitive/de preordine/de echivalență pe A este o familie Moore de părți ale lui A^2 .

Într-adevăr, A^2 satisface toate aceste proprietăți, fiind relație de echivalență pe A .

Și, de exemplu, pentru reflexivitate: familia relațiilor reflexive pe A conține pe A^2 , care este intersecția familiei vide din $\mathcal{P}(A^2)$, iar, conform propoziției anterioare, această familie este închisă la intersecții nevide arbitrare. Așadar, familia relațiilor reflexive pe A este închisă la intersecții arbitrare, i. e. este o familie Moore.

Remarca 13.3. Remarca anterioară și o serie de propoziții despre familii Moore și operatori de închidere de mai sus arată că, pentru orice relație binară R pe A , există o cea mai mică relație binară reflexivă pe A care include pe R , anume intersecția tuturor relațiilor binare reflexive pe A care includ pe R , adică unica relație binară \bar{R} pe A care satisface următoarele trei proprietăți:

- \bar{R} este reflexivă
- $R \subseteq \bar{R}$
- pentru orice relație reflexivă S pe A cu $R \subseteq S$, rezultă că $\bar{R} \subseteq S$

În plus, $\mathcal{R} : \mathcal{P}(A^2) \rightarrow \mathcal{P}(A^2)$, pentru orice $R \in \mathcal{P}(A^2)$, $\mathcal{R}(R) := \overline{R}$, este un operator de închidere pe $\mathcal{P}(A^2)$.

Toate aceste considerații rămân valabile dacă înlocuim proprietatea de reflexivitate cu oricare dintre proprietățile:

- simetrie – operatorul de închidere corespunzător va fi notat cu \mathcal{S}
- tranzitivitate – operatorul de închidere corespunzător va fi notat cu \mathcal{T}
- proprietatea de a fi preordine – operatorul de închidere corespunzător va fi notat cu Pre
- proprietatea de a fi relație de echivalență – operatorul de închidere corespunzător va fi notat cu \mathcal{E}

Aceste notații **nu** sunt consacrate, ci sunt notații ad-hoc pe care le adoptăm în expunerea care urmează.

Definiția 13.4. Fie R o relație binară pe A . Se numește:

- *închiderea reflexivă a lui R* cea mai mică relație binară reflexivă pe A care include pe R , adică $\mathcal{R}(R)$;
- *închiderea simetrică a lui R* cea mai mică relație binară simetrică pe A care include pe R , adică $\mathcal{S}(R)$;
- *închiderea tranzitivă a lui R* cea mai mică relație binară tranzitivă pe A care include pe R , adică $\mathcal{T}(R)$;
- *preordinea generată de R* (sau *închiderea reflexiv-tranzitivă a lui R*) cea mai mică preordine pe A care include pe R , adică $Pre(R)$;
- *relația de echivalență generată de R* cea mai mică relație de echivalență pe A care include pe R , adică $\mathcal{E}(R)$.

Remarca 13.5. Idempotența operatorilor de închidere arată că, pentru orice relație binară R pe A : $\mathcal{R}(\mathcal{R}(R)) = \mathcal{R}(R)$, $\mathcal{S}(\mathcal{S}(R)) = \mathcal{S}(R)$, $\mathcal{T}(\mathcal{T}(R)) = \mathcal{T}(R)$, $Pre(Pre(R)) = Pre(R)$ și $\mathcal{E}(\mathcal{E}(R)) = R$.

Remarca 13.6. Fie R o relație binară pe A . Conform descrierii mulțimilor închise din secțiunea despre operatori de închidere și familii Moore, au loc:

- R este reflexivă ddacă $R = \mathcal{R}(R)$
- R este simetrică ddacă $R = \mathcal{S}(R)$
- R este tranzitivă ddacă $R = \mathcal{T}(R)$
- R este o preordine ddacă $R = Pre(R)$
- R este o relație de echivalență ddacă $R = \mathcal{E}(R)$

Propoziția 13.7. Fie R o relație binară pe A . Atunci:

$$(i) \quad \mathcal{R}(R) = R \cup \Delta_A$$

$$(ii) \quad \mathcal{S}(R) = R \cup R^{-1}$$

$$(iii) \quad \mathcal{T}(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$$

$$(iv) \quad Pre(R) = \mathcal{R}(\mathcal{T}(R)) = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n$$

$$(v) \quad \mathcal{E}(R) = \mathcal{T}(\mathcal{R}(\mathcal{S}(R))) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (R \cup R^{-1} \cup \Delta_A)^n$$

Remarca 13.8 (temă). Dacă A este o mulțime finită și nevidă având $|A| = k \in \mathbb{N}^*$, atunci:

$$(i) \quad \mathcal{T}(R) = \bigcup_{n=1}^k R^n;$$

(ii) șirul $R^0, R^1, R^2, \dots, R^n, \dots$ este periodic începând de la un anumit exponent.

Propoziția 13.9 (comutările închiderilor – temă, cu contraexemplu pentru comutarea de la ultimul punct – facultativă). *Fie R o relație binară pe A . Atunci:*

$$(i) \mathcal{R}(\mathcal{S}(R)) = \mathcal{S}(\mathcal{R}(R));$$

$$(ii) \mathcal{R}(\mathcal{T}(R)) = \mathcal{T}(\mathcal{R}(R));$$

(iii) $\mathcal{T}(\mathcal{S}(R))$ și $\mathcal{S}(\mathcal{T}(R))$ nu sunt neapărat egale.

Adică: închiderea reflexivă comută cu fiecare dintre închiderile simetrică și tranzitivă, dar (în general) închiderile simetrică și tranzitivă nu comută una cu cealaltă.

Corolarul 13.10 (temă – facultativă). • \mathcal{R} păstrează simetria și tranzitivitatea, i. e.: dacă R este o relație binară simetrică (respectiv tranzitivă), atunci $\mathcal{R}(R)$ este simetrică (respectiv tranzitivă);

• \mathcal{S} și \mathcal{T} păstrează reflexivitatea, i. e.: dacă R este o relație binară reflexivă, atunci $\mathcal{S}(R)$ și $\mathcal{T}(R)$ sunt reflexive.

Propoziția 13.11 (temă – facultativă). • \mathcal{T} păstrează simetria;

• \mathcal{S} nu păstrează tranzitivitatea.

Remarca 13.12 (nu există închiderea antisimetrică sau ordinea generată). Fie R o relație binară pe A , arbitrară. De ce nu calculăm o închidere antisimetrică a lui R , sau o relație de ordine generată de R ?

Două motive sunt următoarele fapte, fiecare ușor de verificat:

- dacă R nu este antisimetrică, atunci nicio relație binară S pe A cu $R \subseteq S$ nu este antisimetrică (direct din definiția antisimetriei), și deci nu este nici relație de ordine;
- dacă $|A| \geq 2$, atunci A^2 nu este antisimetrică (pentru că, atunci, A conține cel puțin două elemente distincte a și b , așadar $(a, b), (b, a) \in A^2$, dar $a \neq b$), deci A^2 nu este o relație de ordine, prin urmare A^2 nu aparține familiei relațiilor antisimetrice pe A , deci nici familiei relațiilor de ordine pe A , așadar niciuna dintre aceste familii nu este o familie Moore de părți ale lui A^2 , pentru că niciuna dintre ele nu conține intersecția familiei vide de părți ale lui A^2 , anume pe A^2 .