

Algoritmi avansați

C3 - Triangularea mulțimilor de puncte

Mihai-Sorin Stupariu

Sem. al II-lea, 2022 - 2023

Triangularea unei mulțimi arbitrare de puncte

Triangulări legale și triangulări unghiular optime

Problematizare

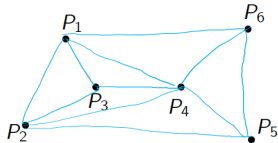
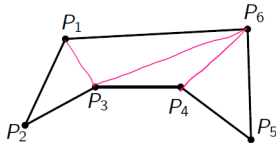
- Tema anterioară: triangularea unui poligon (listă ordonată de puncte (P_1, P_2, \dots, P_n)).

Problematizare

- ▶ Tema anterioară: triangularea unui poligon (listă ordonată de puncte (P_1, P_2, \dots, P_n)).
- ▶ Are sens să vorbim de triangulare pentru mulțimea $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$?

Problematizare

- ▶ Tema anterioară: triangularea unui poligon (listă ordonată de puncte (P_1, P_2, \dots, P_n)).
- ▶ Are sens să vorbim de triangulare pentru mulțimea $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$?
- ▶ **Exemplu:**



- ▶ În cele ce urmează vom considera doar mulțimi de puncte din planul \mathbb{R}^2 .

Problematizare

- ▶ **Definiție.** O **triangulare** a unei mulțimi \mathcal{P} este o subdivizare maximală a acoperirii convexe $\text{Conv}(\mathcal{P})$ a lui \mathcal{P} cu triunghiuri ale căror vârfuri sunt elemente ale lui \mathcal{P} (fără autointersecții!)

Problematizare

- ▶ **Definiție.** O **triangulare** a unei mulțimi \mathcal{P} este o subdivizare maximală a acoperirii convexe $\text{Conv}(\mathcal{P})$ a lui \mathcal{P} cu triunghiuri ale căror vârfuri sunt elemente ale lui \mathcal{P} (fără autointersecții!)
- ▶ Trebuie făcută distincție între triangulare a unui poligon (P_1, P_2, \dots, P_n) și triangulare a mulțimii subdiacente $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ (coincid dacă poligonul este convex!)

Problematizare

- ▶ **Definiție.** O **triangulare** a unei mulțimi \mathcal{P} este o subdivizare maximală a acoperirii convexe $\text{Conv}(\mathcal{P})$ a lui \mathcal{P} cu triunghiuri ale căror vârfuri sunt elemente ale lui \mathcal{P} (fără autointersecții!)
- ▶ Trebuie făcută distincție între triangulare a unui poligon (P_1, P_2, \dots, P_n) și triangulare a mulțimii subdiacente $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ (coincid dacă poligonul este convex!)
- ▶ **Comentariu:** Triangulările mulțimilor de puncte sunt esențiale în **grafica pe calculator**.

Exemple

(i) 3 puncte necoliniare



3 vârfuri
3 muchii
1 față

Exemple

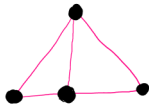
(ii) 4 puncte necoliniare, nesituate toate pe o aceeași dreaptă

(a)



4 vârfuri
6 muchii
3 fete (3Δ)

(b)



4 vârfuri
5 muchii
2 fete (2Δ)

(c)



4 vârfuri
5 muchii
2 fete (2Δ)

Elemente ale unei triangulări

- ▶ Dată o mulțime de puncte \mathcal{P} și o triangulare $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ a sa:
vârfuri, muchii, triunghiuri.

Elemente ale unei triangulări

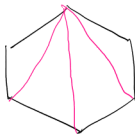
- ▶ Dată o mulțime de puncte \mathcal{P} și o triangulare $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ a sa:
vârfuri, muchii, triunghiuri.
- ▶ Legătură cantitativă între aceste elemente?

Elemente ale unei triangulări

- ▶ Dată o mulțime de puncte \mathcal{P} și o triangulare $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ a sa:
vârfuri, muchii, triunghiuri.
- ▶ Legătură cantitativă între aceste elemente?
- ▶ **Propoziție.** *Fie \mathcal{P} o mulțime de n puncte din plan nesituate toate pe o aceeași dreaptă. Notăm cu k numărul de puncte de pe frontiera acoperirii convexe $\text{Conv}(\mathcal{P})$. Orice triangulare a lui \mathcal{P} are $(2n - k - 2)$ triunghiuri și $(3n - k - 3)$ muchii.*

Elemente ale unei triangulări

- ▶ Dată o mulțime de puncte \mathcal{P} și o triangulare $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ a sa: **vârfuri, muchii, triunghiuri.**
- ▶ Legătură cantitativă între aceste elemente?
- ▶ **Propoziție.** Fie \mathcal{P} o mulțime de n puncte din plan nesituate toate pe o aceeași dreaptă. Notăm cu k numărul de puncte de pe frontiera acoperirii convexe $\text{Conv}(\mathcal{P})$. Orice triangulare a lui \mathcal{P} are $(2n - k - 2)$ triunghiuri și $(3n - k - 3)$ muchii.
- ▶ **Exemplu:** Cazul unui poligon convex: un poligon convex cu n vârfuri poate fi triangulat cu $(n - 2)$ triunghiuri, având $(2n - 3)$ muchii.

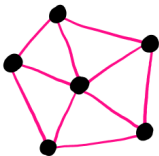


$$\underline{n = 6}$$

4 Δ

9 muchii

Demonstrație



Graf:

nodurile: punctele inițiale (n)

muchiile: laturile Δ ($n_m = ?$)

fetele: fetele Δ + fața exterioară
($n_t + 1$)

• Relația lui Euler: $n - n_m + (n_t + 1) = 2$

• Incidente dintre muchii și fete

$$\underbrace{2 \cdot n_m}_{\text{"perspectiva muchiilor"}} = \underbrace{\frac{\text{ptr. } \Delta}{3 \cdot n_t} + \frac{\text{ptr. fața exterioară}}{k}}_{\text{"perspectiva fetelor"}} \Rightarrow \dots \Rightarrow \dots \Rightarrow \dots$$

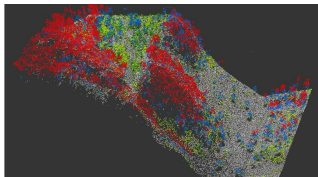
$n_m = \dots$
 $n_t = \dots$

Problematizare

- **Problemă.** Se fac măsurători ale altitudinii pentru un teren. Se dorește **reprezentarea tridimensională** (cât mai sugestivă) . Alternativ: se dorește **generarea unui teren** pentru o aplicație.

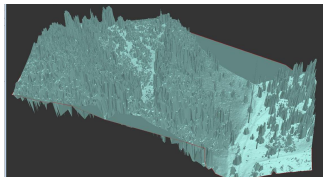
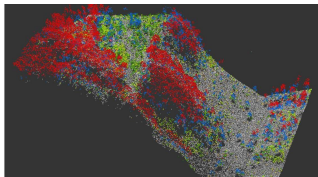
Problematizare

- **Problemă.** Se fac măsurători ale altitudinii pentru un teren. Se dorește **reprezentarea tridimensională** (cât mai sugestivă) . Alternativ: se dorește **generarea unui teren** pentru o aplicație.



Problematizare

- **Problemă.** Se fac măsurători ale altitudinii pentru un teren. Se dorește **reprezentarea tridimensională** (cât mai sugestivă) . Alternativ: se dorește **generarea unui teren** pentru o aplicație.

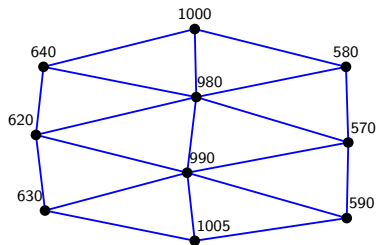


Problematizare - continuare

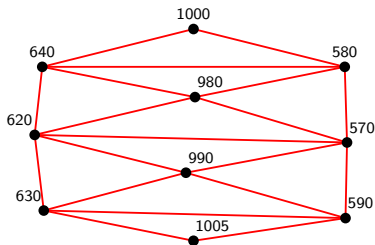
- **Problemă (reformulată).** Cum "comparăm triangulările" unei mulțimi de puncte fixate?

Problematizare - continuare

- **Problemă (reformulată).** Cum "comparăm triangulările" unei mulțimi de puncte fixate?
- **Exemplu.** Măsurători ale altitudinii.



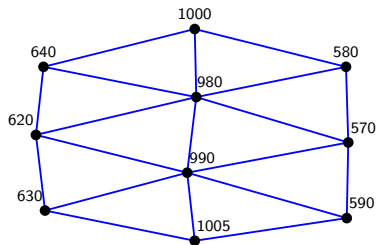
Triangulare 1



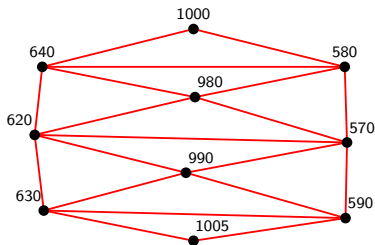
Triangulare 2

Problematizare - continuare

- **Problemă (reformulată).** Cum "comparăm triangulările" unei mulțimi de puncte fixate?
- **Exemplu.** Măsurători ale altitudinii.



Triangulare 1



Triangulare 2

- **Întrebări naturale:** (i) Există o triangulare "convenabilă" a unei mulțimi de puncte? (ii) Cum poate fi determinată eficient o astfel de triangulare?

Terminologie, triangulări legale

- Fixată: o mulțime de puncte \mathcal{P} . **În cele ce urmează vom presupune că \mathcal{P} este o mulțime de puncte din planul \mathbb{R}^2 .**

Terminologie, triangulări legale

- ▶ Fixată: o mulțime de puncte \mathcal{P} . **În cele ce urmează vom presupune că \mathcal{P} este o mulțime de puncte din planul \mathbb{R}^2 .**
- ▶ Fie \mathcal{T} o triangulare a lui \mathcal{P} cu m triunghiuri. Fie $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{3m}$ unghiurile lui \mathcal{T} , ordonate crescător. **Vectorul unghiurilor lui \mathcal{T} este $A(\mathcal{T}) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{3m})$.**

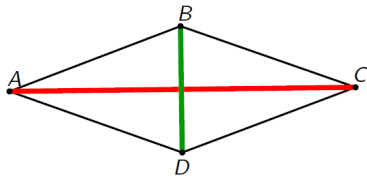
Terminologie, triangulări legale

- ▶ Fixată: o mulțime de puncte \mathcal{P} . **În cele ce urmează vom presupune că \mathcal{P} este o mulțime de puncte din planul \mathbb{R}^2 .**
- ▶ Fie \mathcal{T} o triangulare a lui \mathcal{P} cu m triunghiuri. Fie $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{3m}$ unghiurile lui \mathcal{T} , ordonate crescător. **Vectorul unghiurilor lui \mathcal{T} este $A(\mathcal{T}) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{3m})$.**
- ▶ **Relație de ordine pe mulțimea triangulărilor lui \mathcal{P} :** ordinea lexicografică pentru vectorii unghiurilor. Fie \mathcal{T} și \mathcal{T}' două triangulări ale lui \mathcal{P} . Atunci $A(\mathcal{T}) > A(\mathcal{T}')$ dacă $\exists i$ astfel ca $\alpha_j = \alpha'_j, \forall 1 \leq j < i$ și $\alpha_i > \alpha'_i$.

Terminologie, triangulări legale

- ▶ Fixată: o mulțime de puncte \mathcal{P} . **În cele ce urmează vom presupune că \mathcal{P} este o mulțime de puncte din planul \mathbb{R}^2 .**
- ▶ Fie \mathcal{T} o triangulare a lui \mathcal{P} cu m triunghiuri. Fie $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{3m}$ unghiurile lui \mathcal{T} , ordonate crescător. **Vectorul unghiurilor lui \mathcal{T} este $A(\mathcal{T}) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{3m})$.**
- ▶ **Relație de ordine pe mulțimea triangulărilor lui \mathcal{P} :** ordinea lexicografică pentru vectorii unghiurilor. Fie \mathcal{T} și \mathcal{T}' două triangulări ale lui \mathcal{P} . Atunci $A(\mathcal{T}) > A(\mathcal{T}')$ dacă $\exists i$ astfel ca $\alpha_j = \alpha'_j, \forall 1 \leq j < i$ și $\alpha_i > \alpha'_i$.
- ▶ **Triangulare unghiular optimă:** \mathcal{T} astfel ca $A(\mathcal{T}) \geq A(\mathcal{T}')$, pentru orice triangulare \mathcal{T}' .

Exemplu - cazul unui patrulater convex



diagonala AC

 $\Rightarrow \triangle BAC$ și $\triangle DAC$

diagonala BD

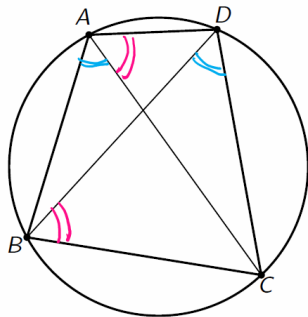
 $\Rightarrow \triangle ABD$ și $\triangle CBD$

diagonala AC \Rightarrow vectorul unghiurilor (α)
 BD \Rightarrow — — — — — (β)

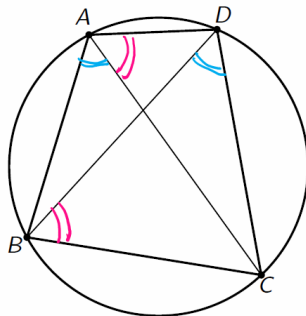
 $\alpha < \beta$

"cel mai mic unghi care apare în trianglarea dată de AC este mai mic decât cel mai mic unghi care apare în trianglarea dată de BD".

Exemplu - cazul unui patrulater inscriptibil



Exemplu - cazul unui patrulater inscriptibil



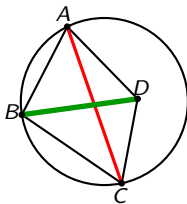
În acest caz triunghiurile formate de diagonale au “cele mai mici unghiuri” congruente, deci nu putem distinge între cele două diagonale.

Muchii ilegale

- **Conceptul de muchie ilegală.** Fie $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2$ fixate astfel ca $ABCD$ să fie un patrulater convex; fie \mathcal{T}_{AC} , \mathcal{T}_{BD} triangulările date de diagonalele AC , respectiv BD . Muchia AC este **ilegală** dacă
$$\min A(\mathcal{T}_{AC}) < \min A(\mathcal{T}_{BD}).$$

Muchii ilegale

- **Conceptul de muchie ilegală.** Fie $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2$ fixate astfel ca $ABCD$ să fie un patrulater convex; fie \mathcal{T}_{AC} , \mathcal{T}_{BD} triangulările date de diagonalele AC , respectiv BD . Muchia AC este **ilegală** dacă $\min A(\mathcal{T}_{AC}) < \min A(\mathcal{T}_{BD})$.
- **Criteriu geometric** pentru a testa dacă o muchie este legală: muchia AC , adiacentă cu triunghiurile $\triangle ACB$ și $\triangle ACD$ este ilegală dacă și numai dacă punctul D este situat în interiorul cercului circumscris $\triangle ABC$.



Muchii ilegale

- **Criteriu numeric / analitic** pentru a testa dacă o muchie este ilegală.

- Pentru puncte $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$, $D = (x_D, y_D)$:

$$\Theta(A, B, C, D) = \begin{vmatrix} x_A & y_A & x_A^2 + y_A^2 & 1 \\ x_B & y_B & x_B^2 + y_B^2 & 1 \\ x_C & y_C & x_C^2 + y_C^2 & 1 \\ x_D & y_D & x_D^2 + y_D^2 & 1 \end{vmatrix}$$

Muchii ilegale

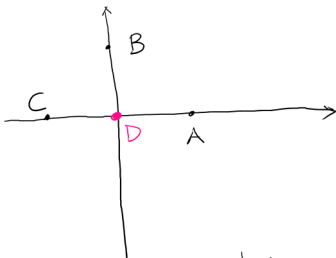
- **Criteriu numeric / analitic** pentru a testa dacă o muchie este ilegală.

- Pentru puncte $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$, $D = (x_D, y_D)$:

$$\Theta(A, B, C, D) = \begin{vmatrix} x_A & y_A & x_A^2 + y_A^2 & 1 \\ x_B & y_B & x_B^2 + y_B^2 & 1 \\ x_C & y_C & x_C^2 + y_C^2 & 1 \\ x_D & y_D & x_D^2 + y_D^2 & 1 \end{vmatrix}$$

- (i) Punctele A, B, C, D sunt conciclice $\Leftrightarrow \Theta(A, B, C, D) = 0$.
- (ii) Fie A, B, C astfel ca ABC să fie un viraj la stânga. Un punct D este situat în interiorul cercului circumscris $\triangle ABC \Leftrightarrow \Theta(A, B, C, D) > 0$.

Exemplu



$$A = (1, 0)$$

$$B = (0, 1)$$

$$C = (-1, 0)$$

- ABC este viraj la stânga

$$D = (0, 0)$$

$$\bullet \textcircled{+} (A, B, C, D) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

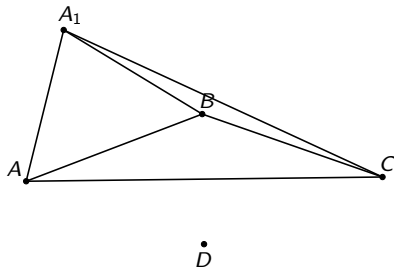
$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \geq 0$$

Este în interiorul cercului circumscris $\triangle ABC$.

Exercițiu: calculați ptr. $E = (0, -1)$ și $F = (0, -2)$

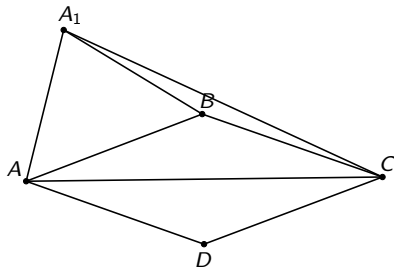
Muchii ilegale, triangulări legale

- **Concluzie:** Dacă muchia AC este ilegală, printr-un *flip* (înlocuirea ei cu BD), cel mai mic unghi poate fi mărit (local).



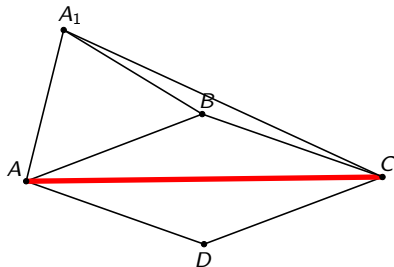
Muchii ilegale, triangulări legale

- **Concluzie:** Dacă muchia AC este ilegală, printr-un *flip* (înlocuirea ei cu BD), cel mai mic unghi poate fi mărit (local).



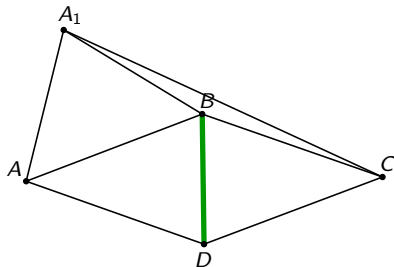
Muchii ilegale, triangulări legale

- **Concluzie:** Dacă muchia AC este ilegală, printr-un *flip* (înlocuirea ei cu BD), cel mai mic unghi poate fi mărit (local).



Muchii ilegale, triangulări legale

- **Concluzie:** Dacă muchia AC este ilegală, printr-un *flip* (înlocuirea ei cu BD), cel mai mic unghi poate fi mărit (local).



Muchii ilegale, triangulări legale

- **Concluzie:** Dacă muchia AC este ilegală, printr-un *flip* (înlocuirea ei cu BD), cel mai mic unghi poate fi mărit (local). Printr-un flip, vectorul unghiurilor crește.

Muchii ilegale, triangulări legale

- ▶ **Concluzie:** Dacă muchia AC este ilegală, printr-un *flip* (înlocuirea ei cu BD), cel mai mic unghi poate fi mărit (local). Printr-un flip, vectorul unghiurilor crește.
- ▶ **Concluzie (reformulare):** Fie \mathcal{T} o triangulare cu o muchie ilegală e , fie \mathcal{T}' triangularea obținută din \mathcal{T} prin *flip*-ul muchiei e . Atunci $A(\mathcal{T}') > A(\mathcal{T})$.

Muchii ilegale, triangulări legale

- ▶ **Concluzie:** Dacă muchia AC este ilegală, printr-un *flip* (înlocuirea ei cu BD), cel mai mic unghi poate fi mărit (local). Printr-un flip, vectorul unghiurilor crește.
- ▶ **Concluzie (reformulare):** Fie \mathcal{T} o triangulare cu o muchie ilegală e , fie \mathcal{T}' triangularea obținută din \mathcal{T} prin *flip*-ul muchiei e . Atunci $A(\mathcal{T}') > A(\mathcal{T})$.
- ▶ **Triangulare legală:** nu are muchii ilegale. **Fapt:** O triangulare legală a unei mulțimi cu n puncte poate fi determinată printr-un algoritm incremental randomizat, cu complexitate-timp medie $O(n \log n)$.

Triangulări unghiular optime vs. triangulări legale

- **Propoziție.** *Fie \mathcal{P} o mulțime de puncte din plan.*
- (i) *Orice triangulare unghiular optimă este legală.*
 - (ii) *Dacă \mathcal{P} este în poziție generală (oricare patru puncte nu sunt conciclice), atunci există o unică triangulare legală, iar aceasta este unghiular optimă.*

Triangulări unghiular optime vs. triangulări legale

- ▶ **Propoziție.** *Fie \mathcal{P} o mulțime de puncte din plan.*
 - (i) *Orice triangulare unghiular optimă este legală.*
 - (ii) *Dacă \mathcal{P} este în poziție generală (oricare patru puncte nu sunt conciclice), atunci există o unică triangulare legală, iar aceasta este unghiular optimă.*
- ▶ **Teoremă.** *Fie \mathcal{P} o mulțime de n puncte din plan, în poziție generală. Triangularea unghiular optimă poate fi construită, folosind un algoritm incremental randomizat, în timp mediu $O(n \log n)$, folosind $O(n)$ memorie medie.*