SEMINAR DIN LOGICA PROPOZIȚIONALĂ CLASICĂ: DEMONSTRAȚII ALGEBRICE ȘI SEMANTICE, ECHIVALENȚĂ SEMANTICĂ, TEHNICA REZOLUȚIEI

<u>Mnemonicul I:</u> dacă B este o algebră Boole, iar $a, b \in B$, atunci:

(I,1) $a \to b = 1 \Leftrightarrow a \leq b$;

(I,2) $a \leftrightarrow b = 1 \Leftrightarrow a = b$.

<u>Mnemonicul II:</u> $V \stackrel{not.}{=}$ mulțimea variabilelor propoziționale, iar $E \stackrel{not.}{=}$ mulțimea enunțurilor calculului propozițional clasic;

$\mathcal{L}_2 = (L_2 = \{0,1\}$ (cu $0 \neq 1$)$, \vee, \wedge, \bar{\ }, \leq, 0, 1) \to$
$\to$ algebra Boole standard;

$\forall h : V \to L_2$ (interpretare), $\tilde{h} \stackrel{not.}{=}$ unica prelungire a lui h la E compatibilă cu conectorii logici;

(TD) $(\forall \Sigma \subseteq E)(\forall \varphi, \psi \in E)$
$(\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \Leftrightarrow \Sigma \vdash \varphi \to \psi)$,

(II,1) $(\forall \varphi \in E)(\vdash \varphi \overset{(lemă)}{\Leftrightarrow} \hat{\varphi} = 1)$, unde $\hat{\varphi} = \varphi/_{\sim} = \{\psi \in E \mid \varphi \sim \psi\} =$ = clasa de echivalență a lui φ în algebra Lindenbaum – Tarski a logicii propoziționale clasice, $E/_{\sim}$;

(II, 2) pentru orice $\varphi, \psi \in E$, avem:

$\varphi \sim \psi \overset{\text{(def. lui } \sim)}{\Longleftrightarrow} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \overset{(TC)}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \vDash \varphi \leftrightarrow \psi \overset{(def)}{\Leftrightarrow} (\forall h : V \to L_2)$

$(\tilde{h}(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1) \Leftrightarrow (\forall h : V \to L_2)$

$(\tilde{h}(\varphi) \leftrightarrow \tilde{h}(\psi) = 1) \overset{(I, 2)}{\Longleftrightarrow}$

$\Leftrightarrow (\forall h : V \to L_2)(\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\psi))$

(i.e. φ și ψ au aceeași valoare de adevăr în orice interpretare).

<u>Exerc.</u>: Să se dem., algebric, că, pt. orice $\varphi, \psi, \chi \in E$, are loc:

$\{\varphi, \varphi \to (\psi \to \chi), \neg \chi\} \vdash \neg \psi$.

REZOLVARE:

Fie $\varphi, \psi, \chi \in E$. Sunt valabile echivalențele:

$\{\varphi, \varphi \to (\psi \to \chi), \neg \chi\} \vdash \neg \psi \overset{(TD)}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \{\varphi, \varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \neg \chi \to \neg \psi \overset{(TD)}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \{\varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \varphi \to (\neg\chi \to \neg\psi) \Leftrightarrow$

$\overset{(TD)}{\Leftrightarrow} \vdash [\varphi \to (\psi \to \chi)] \to [\varphi \to (\neg\chi \to \neg\psi)]$.

Not. $\gamma = [\varphi\to(\psi\to\chi)] \to [\varphi \to (\neg\chi\to\neg\psi)] \in E$. Avem: $\vdash \gamma \overset{(T.C.)}{\Leftrightarrow} \hat{\gamma} = 1$ în $E/\sim$;

Not.: $x=\hat\varphi$, $y=\hat\psi$, $z=\hat\chi \in E/\sim$.

$\hat\gamma = [\hat\varphi \to (\hat\psi\to\hat\chi)] \to [\hat\varphi \to (\overline{\hat\chi} \to \overline{\hat\psi})] = [x\to(y\to z)] \to [x \to (\bar z \to \bar y)] = [x \to (\bar y \vee z)] \to [x \to (\bar{\bar z} \vee \bar y)] = [x\to(\bar y\vee z)] \to [x \to (\bar y \vee z)] \overset{(I.1)}{=} 1$. (q.e.d.)

<u>Exerc.</u>: Să se dem., algebric și semantic, că, pt. orice $\varphi,\psi,\chi\in E$:

(a) $\varphi\to\psi \sim \neg\varphi\vee\psi$,

(b) $\varphi\leftrightarrow\psi \sim (\neg\varphi\vee\psi)\wedge(\neg\psi\vee\varphi)$;

(c) $\varphi \vee (\psi\wedge\neg\psi) \sim \varphi\wedge(\psi\vee\neg\psi) \sim \varphi$;

(d) $\varphi\vee(\varphi\wedge\psi)\sim\varphi\wedge(\varphi\vee\psi)\sim\varphi$,

(e) $\varphi \vee(\psi\wedge\chi)\sim(\varphi\vee\psi)\wedge(\varphi\vee\chi)$;

(f) REZ.: $\neg(\varphi\vee\psi)\sim\neg\varphi\wedge\neg\psi$; $\neg(\varphi\wedge\psi)\sim\neg\varphi\vee\neg\psi$.

Not. $x=\hat\varphi$, $y=\hat\psi$, $z=\hat\chi \in E/\sim$.

Fie $h : V \to L_2$, arbitrară. (*)

(a) Algebric:

Not. $\alpha = (\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi) \in E$,

$\tilde{\alpha} = (x \to y) \leftrightarrow (\bar{x} \vee y) =$

$= (\bar{x} \vee y) \leftrightarrow (\bar{x} \vee y) \overset{(I.2)}{=} 1 \overset{(II.1)}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow \vdash \alpha \overset{(II.2)}{\Longleftrightarrow} \varphi \to \psi \sim \neg\varphi \vee \psi$.

Semantic:

$\tilde{h}(\varphi \to \psi) = \tilde{h}(\varphi) \to \tilde{h}(\psi) =$

$= \overline{\tilde{h}(\varphi)} \vee \tilde{h}(\psi) = \tilde{h}(\neg\varphi \vee \psi) \underset{(*)}{\overset{(II.2)}{\Longrightarrow}}$

$\Rightarrow \varphi \to \psi \sim \neg\varphi \vee \psi$.

(*) faptul că interpretarea h e arbitrară

(b) Algebric:

Not. $\beta = (\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow [(\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi)] \in$

$\in E$, $\tilde{\beta} = (x \leftrightarrow y) \leftrightarrow [(\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{y} \vee x)]$

$= (x \leftrightarrow y) \leftrightarrow [(x \to y) \wedge (y \to x)] =$

$= (x \leftrightarrow y) \leftrightarrow (x \leftrightarrow y) \overset{(I.2)}{=} 1 \overset{(II.1)}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow \vdash \beta \overset{(II.2)}{\Longleftrightarrow} \varphi \leftrightarrow \psi \sim (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi)$.

Semantic:

$\tilde{h}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \tilde{h}(\varphi) \leftrightarrow \tilde{h}(\psi) =$

$= (\tilde{h}(\varphi) \to \tilde{h}(\psi)) \wedge (\tilde{h}(\psi) \to \tilde{h}(\varphi)) =$

$= (\overline{\tilde{h}(\varphi)} \vee \tilde{h}(\psi)) \wedge (\overline{\tilde{h}(\psi)} \vee \tilde{h}(\varphi)) =$

$= \tilde{h}((\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi)) \Rightarrow$

$\xRightarrow[(*)]{(\mathrm{II}.2)} \varphi \leftrightarrow \psi \sim (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi)$,

(c) Algebric:

Not. $\gamma = [\varphi \vee (\psi \wedge \neg\psi)] \leftrightarrow \varphi \in E$

și $\delta = [\varphi \wedge (\psi \vee \neg\psi)] \leftrightarrow \varphi \in E$.

$\hat{\gamma} = [\underbrace{x \vee \underbrace{(y \wedge \bar{y})}_{=0}}_{=x}] \leftrightarrow x = x \leftrightarrow x \overset{(\mathrm{I}.2)}{=} 1$

$\xRightarrow{(\mathrm{II}.1)} \vdash \gamma \overset{(\mathrm{II}.2)}{\Longleftrightarrow} \varphi \vee (\psi \wedge \neg\psi) \sim \varphi$.

$\hat{\delta} = [\underbrace{x \wedge \underbrace{(y \vee \bar{y})}_{=1}}_{=x}] \leftrightarrow x = x \leftrightarrow x \overset{(\mathrm{I}.2)}{=} 1$,

$\xRightarrow{(\mathrm{II}.1)} \vdash \delta \overset{(\mathrm{II}.2)}{\Longleftrightarrow} \varphi \wedge (\psi \vee \neg\psi) \sim \varphi$.

Semantic:

$\tilde{h}(\varphi \vee (\psi \wedge \neg\psi)) = \tilde{h}(\varphi) \vee \overbrace{(\tilde{h}(\psi) \wedge \overline{\tilde{h}(\psi)})}^{=0} =$

$= \tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\varphi) \wedge \underbrace{(\tilde{h}(\psi) \vee \overline{\tilde{h}(\psi)})}_{=1} =$

$= \tilde{h}(\varphi \wedge (\psi \vee \neg\psi))$, $\xRightarrow[(*)]{(\mathrm{II}.2)} \varphi \vee (\psi \wedge \neg\psi) \sim$

$\sim \varphi \sim \varphi \wedge (\psi \vee \neg\psi)$,

(d) Algebric:

Not. $\varepsilon = [\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)] \leftrightarrow \varphi \in E$ și

$\xi = [\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)] \leftrightarrow \varphi \in E$.

$\widehat{\varepsilon} = [x \vee (x \wedge y)] \leftrightarrow x = x \Leftrightarrow x = \overset{(I,2)}{=\!=} 1 \overset{(II,1)}{\Longrightarrow} \vdash \varepsilon \overset{(II,2)}{\Longleftrightarrow} \varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \sim \varphi$.

$\widehat{\xi} = [x \wedge (x \vee y)] \leftrightarrow x = x \Leftrightarrow x = \overset{(I,2)}{=\!=} 1 \overset{(II,1)}{\Longrightarrow} \vdash \xi \overset{(II,2)}{\Longleftrightarrow} \varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \sim \varphi$.

Semantic:

$\widetilde{h}(\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)) = \widetilde{h}(\varphi) \vee (\widetilde{h}(\varphi) \wedge \widetilde{h}(\psi)) =$
$= \widetilde{h}(\varphi) = \widetilde{h}(\varphi) \wedge (\widetilde{h}(\varphi) \vee \widetilde{h}(\psi)) =$
$= \widetilde{h}(\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)) \overset{(II,2)}{\underset{(*)}{\Longrightarrow}} \varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \sim \varphi \sim$
$\sim \varphi \wedge (\varphi \vee \psi)$.

(e) Algebraic:

Not. $\mu = [\varphi \vee (\psi \wedge \chi)] \leftrightarrow [(\varphi \vee \psi) \wedge$
$\wedge (\varphi \vee \chi)] \in E$.

$\widehat{\mu} = [x \vee (y \wedge z)] \leftrightarrow [(x \vee y) \wedge$
$\wedge (x \vee z)] = [x \vee (y \wedge z)] \leftrightarrow$
$\leftrightarrow [x \vee (y \wedge z)] \overset{(I,2)}{=\!=} 1 \overset{(II,1)}{\Longrightarrow} \vdash \mu \Leftrightarrow$
$\overset{(II,2)}{\Longleftrightarrow} \varphi \vee (\psi \wedge \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$.

Semantic:

$\widetilde{h}(\varphi \vee (\psi \wedge \chi)) = \widetilde{h}(\varphi) \vee (\widetilde{h}(\psi) \wedge \widetilde{h}(\chi)) =$

$= \left(\widetilde{h}(\varphi) \vee \widetilde{h}(\psi)\right) \wedge \left(\widetilde{h}(\varphi) \vee \widetilde{h}(\chi)\right) =$

$= \widetilde{h}\left((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)\right). \xRightarrow[(*)]{(\mathrm{II}.2)}$

$\Rightarrow \varphi \vee (\psi \wedge \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi).$

(f) Algebric:

Not. $\nu = \neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \in E$

şi $\rho = \neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi) \in E.$

$\widehat{\nu} = \overline{(x \vee y)} \leftrightarrow (\overline{x} \wedge \overline{y}) =$

$= (\overline{x} \wedge \overline{y}) \leftrightarrow (\overline{x} \wedge \overline{y}) \overset{(\mathrm{I}.2)}{=} 1 \xRightarrow{(\mathrm{II}.1)}$

$\Rightarrow \vdash \nu \overset{(\mathrm{II}.2)}{\Longleftrightarrow} \neg(\varphi \vee \psi) \sim (\neg\varphi \wedge \neg\psi).$

$\widehat{\rho} = \overline{(x \wedge y)} \leftrightarrow (\overline{x} \vee \overline{y}) =$

$= (\overline{x} \vee \overline{y}) \leftrightarrow (\overline{x} \vee \overline{y}) \overset{(\mathrm{I}.2)}{=} 1 \xRightarrow{(\mathrm{II}.1)}$

$\Rightarrow \vdash \rho \overset{(\mathrm{II}.2)}{\Longleftrightarrow} \neg(\varphi \wedge \psi) \sim (\neg\varphi \vee \neg\psi).$

Semantic:

$\widetilde{h}(\neg(\varphi \vee \psi)) = \overline{\widetilde{h}(\varphi) \vee \widetilde{h}(\psi)} =$

$= \overline{\widetilde{h}(\varphi)} \wedge \overline{\widetilde{h}(\psi)} = \widetilde{h}(\neg\varphi \wedge \neg\psi). \xRightarrow[(*)]{(\mathrm{II}.2)}$

$\Rightarrow \neg(\varphi \vee \psi) \sim \neg\varphi \wedge \neg\psi.$

$\widetilde{h}(\neg(\varphi \wedge \psi)) = \overline{\widetilde{h}(\varphi) \wedge \widetilde{h}(\psi)} =$

$= \overline{\widetilde{h}(\varphi)} \vee \overline{\widetilde{h}(\psi)} = \widetilde{h}(\neg\varphi \vee \neg\psi). \xRightarrow[(*)]{(\mathrm{II}.2)}$

$\Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi) \sim \neg\varphi \vee \neg\psi$.

<u>Obs.:</u> Folosind proprietăți de tipul celor din exercițiul anterior, se poate lucra cu conectori logici la fel ca în calculul boolean, dar, <u>atenție:</u> a <u>nu se pune egalitate</u> între enunțuri în astfel de calcule! De <u>exemplu:</u> pt. orice $\varphi \in E$, avem:

$$\varphi \sim \neg\neg\varphi, \text{ dar}$$
$$\varphi \neq \neg\neg\varphi!$$

<u>Intuitiv</u>, de <u>exemplu:</u> frazele „Învăț pentru examen." și „Nu e adevărat că nu învăț pentru examen." sunt echivalente logic (adică au același înțeles, spun același lucru), dar nu coincid (i.e. nu sunt aceeași frază).

Vom folosi, în cele ce urmează, exercițiul anterior și alte proprietăți de tipul celor din exercițiul anterior, demonstrabile foarte simplu, prin calcul boolean:

- în algebra Boole $E/\sim$, dacă li se dau demonstrații algebrice,

sau

- în algebra Boole L_2, dacă li se dau demonstrații semantice.

Exerc.: Fie $p, q, r, s \in V$, (2 câte 2 distincte) iar $\Sigma = \{p \vee q, q \to \neg r, r \leftrightarrow s, s \to p, p \to (q \to s)\} \subset E$ și $\Delta = \Sigma \cup \{\neg p \wedge r\} \subset E$. Dem. că mulțimea Σ e consistentă, iar mulțimea Δ e inconsistentă.

REZOLVARE:

Pentru orice $\Gamma \subseteq E$, are loc: Γ e consistentă $\Leftrightarrow$ Γ e satisfiabilă, i.e. admite un model, i.e. există $h: V \to L_2$ cu $h \vDash \Gamma$.

Pentru a dem. că Δ e nesatisfiabilă, punem pe Δ într-o formă clauzală, căreia îi determinăm o derivare prin rezoluție în care apare $\square$ (clauza vidă). O formă clauzală pt. Δ este o mulțime de clauze care este satisfiabilă dacă și numai dacă Δ este satisfiabilă. Să ne amintim că orice clauză se identifică cu disjuncția între literalii care o compun, și orice mulțime de clauze se identificată, cu, conjuncție între clauzele care o compun, deci cu o FNC.

Enunț φ	forma clauzală pt. φ, scrisă ca mulțime de clauze
$p \vee q$	$\{\{p, q\}\}$
$q \to \neg r$ ($\sim \neg q \vee \neg r$)	$\{\{\neg q, \neg r\}\}$
$r \leftrightarrow s$ ($\sim (\neg r \vee s) \wedge (\neg s \vee r)$)	$\{\{\neg r, s\}, \{\neg s, r\}\}$
$s \to p$ ($\sim \neg s \vee p$)	$\{\{\neg s, p\}\}$
$p \to (q \to s)$ ($\sim \neg p \vee \neg q \vee s$)	$\{\{\neg p, \neg q, s\}\}$
$\neg p \wedge r$	$\{\{\neg p\}, \{r\}\}$

Așadar, o formă clauzală pt. Δ este $\{\{p, q\}, \{\neg q, \neg r\}, \{\neg r, s\}, \{\neg s, r\}, \{\neg s, p\}, \{\neg p, \neg q, s\}, \{\neg p\}, \{r\}\}$. Să găsim, pentru această mulțime de clauze, o derivare prin rezoluție care să ne permită să concluzionăm că această mulțime de clauze e nesatisfiabilă, prin urmare Δ e nesatisfiabilă.

$\{\cancel{p}, q\}, \{\neg q, \neg r\}, \{\neg r, s\}, \{\neg s, r\}, \{\neg s, p\}, \{\neg \cancel{p}, \neg q, \neg s\}, \{\neg p\}, \{r\}$

$\cancel{\{q, \neg q, \neg s\}}, \{\neg q, \neg r\}, \{\neg r, s\}, \{\neg s, r\}, \{\neg s, \cancel{p}\}, \{\neg \cancel{p}\}, \{r\}$

→ clauză trivială, întrucât conține pe q și pe $\neg q$;

→ nu numai că e satisfiabilă, dar e satisfăcută de orice $h : V \to L_2$;

$\{\neg q, \cancel{\neg r}\}, \{\neg r, s\}, \{\neg s, \cancel{r}\}, \{\neg s\}, \{r\}$

$\{\neg q, \neg s\}, \{\cancel{\neg r}, s\}, \{\neg s\}, \{\cancel{r}\}$

$\{\neg q, \neg s\}, \{\cancel{s}\}, \{\cancel{\neg s}\}$

$\{\neg q, \neg s\}, \square$

→ clauză vidă,

→ nesatisfiabilă. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta$ e nesatisfiabilă. $\Leftrightarrow \Delta$ e inconsistentă.

La a) paranteză, aveam o derivare prin rezoluție a acestei forme clauzale a lui Δ în care nu apare $\square$; desigur, această derivare nu arată că Δ ar fi satisfiabilă;

~~$\{\cancel{p}, q\}, \{\neg q, \neg r\}, \{\neg r, s\}, \{\neg s, r\}, \{\neg s, p\}, \{\neg \cancel{p}, \neg q, s\}, \{\neg p\}, \{r\}$~~

~~$\{q, \neg q, s\}$~~$, \{\neg q, \neg r\}, \{\neg r, s\}, \{\neg s, \cancel{r}\}, \{\neg s, p\}, \{\neg p\}, \{r\}$

↳ clauză trivială

$\{\neg q, \neg \cancel{r}\}, \{\neg r, \cancel{s}\}, \{\neg s, p\}, \{\neg p\}, \{r\}$

$\{\neg q, \neg r\}, \{\neg s, \cancel{p}\}, \{\neg \cancel{p}\}, \{r\}$

$\{\neg s\}, \{\neg q, \neg \cancel{r}\}, \{\cancel{r}\}$

$\{\neg q\}\{\neg s\}$ → (variabile propoziționale diferite)

↳ satisfiabilă, satisfăcută de orice $h: V \to L_2$ cu $h(q) = h(s) = 0$; $\not\Rightarrow$

$\not\Rightarrow \Delta$ ar fi satisfiabilă.

Cum demonstrăm că Σ e satisfiabilă, deci consistentă? Am putea considera o formă clauzală pentru Σ, și → să dem. că nu există o derivare prin rezoluție a acesteia în care să apară $\square$; sau

→ să-i aplicăm algoritmul Davis-

— Putnam, care păstrează satisfiabilitatea, sau am putea să determinăm un model pentru Σ, i. e. o interpretare h cu $h \models \Sigma$.
Aplicăm această din urmă metodă şi, pentru a observa mai uşor cum trebuie să arate o interpretare care satisface pe Σ, să privim această formă clauzală a lui Σ: $\{p, q\}$, $\{\neg q, \neg r\}$, $\{\neg r, s\}$, $\{\neg s, r\}$, $\{\neg s, p\}$, $\{\neg p, \neg q, s\}$.

Fie $h: V \to L_2$, a. î. $h \models \Sigma$.

Atunci:
$$\begin{cases} h(p) = 1 \text{ sau } h(q) = 1, & (\mathrm{I}) \\ \text{şi } h(q) = 0 \text{ sau } h(r) = 0, & (\mathrm{II}) \\ \text{şi } h(r) = 0 \text{ sau } h(s) = 1, & (\mathrm{III}) \\ \text{şi } h(s) = 0 \text{ sau } h(r) = 1, & (\mathrm{IV}) \\ \text{şi } h(s) = 0 \text{ sau } h(p) = 1, & (\mathrm{V}) \\ \text{şi } h(p) = 0 \text{ sau } h(q) = 0 \text{ sau } h(s) = 1. & (\mathrm{VI}) \end{cases}$$

Pp. că $h(p) = 0 \xRightarrow{(\mathrm{I})} h(q) = 1 \xRightarrow{(\mathrm{II})} h(r) = 0$.
$\xRightarrow{(\mathrm{V})} h(s) = 0$.

Am obținut:

v	p	q	r	s
$h(v)$	0	1	0	0

Să calculăm pe $\tilde{h}$ în FNC corespunzătoare formei clauzale a lui Σ ($\exists$ o infinitate de interpretări cu valorile de mai sus în p,q,r,s; fiecare dintre ele satisface egalitățile:)

$$\tilde{h}((p\vee q)\wedge(\neg q\vee\neg r)\wedge(\neg r\vee s)\wedge(\neg s\vee r)\wedge(\neg s\vee p)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee s))=$$
$$=[h(p)\vee h(q)]\wedge[\overline{h(q)}\vee\overline{h(r)}]\wedge[\overline{h(r)}\vee h(s)]\wedge[\overline{h(s)}\vee h(r)]\wedge[\overline{h(s)}\vee h(p)]\wedge[\overline{h(p)}\vee\overline{h(q)}\vee h(s)]=(0\vee 1)\wedge(0\vee 1)\wedge(1\vee 0)\wedge(1\vee 0)\wedge(1\vee 0)\wedge(1\vee 0\vee 0)=1 \Rightarrow$$
$\Rightarrow h\vDash\Sigma\Rightarrow\Sigma$ e satisfiabilă $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\Sigma$ este consistentă.

__Exerc.:__ Fie $\overbrace{p,q,r\in V}^{\text{2 câte 2 distincte}}$, și $\varphi=[\neg p\vee(q\wedge\neg r)]\to(p\wedge r)\in E$. Să se det. dacă φ e satisfiabil.

REZOLVARE:

Punem pe φ într-o formă clauzală, i.e. determinăm o FNC echivalentă logic cu φ.

Vom obține chiar o FNC care nu se poate deriva prin rezoluție într-o altă FNC, și vom putea decide direct (fără derivări prin rezoluție sau alte raționamente) asupra satisfiabilității lui φ.

Determinarea unei FNC echivalente logic cu φ o vom face prin două metode:

- folosind echivalențe logice de tipul celor din exercițiul de la pagina 13,2;
- cu ajutorul unui tabel semantic pentru φ.

Metoda I:

$$\varphi \sim \neg[\neg p \vee (q \wedge \neg r)] \vee (p \wedge r) \sim$$

$$\sim [\neg\neg p \wedge \neg(q \wedge \neg r)] \vee (p \wedge r) \sim$$

$$\sim [p \wedge (\neg q \vee \neg\neg r)] \vee (p \wedge r) \sim$$

$$\sim [p \wedge (\neg q \vee r)] \vee (p \wedge r) \sim$$

$$\sim \underbrace{[p \vee (p \wedge r)]}_{\sim p} \wedge [\neg q \vee r \vee (p \wedge r)] \sim$$

$$\sim \underbrace{p \wedge (\neg q \vee r \vee p)}_{\sim p} \wedge \underbrace{(\neg q \vee r \vee r)}_{\sim \neg q \vee r} \sim$$

$\sim p \wedge (\neg q \vee r)$.

<u>Metoda a II-a:</u>

Fie $h: V \to L_2$, arbitrară. Notăm $\psi = \neg p \vee (q \wedge \neg r) \in E$.

Pt. determinarea unei FNC echivalente logic cu φ, ne interesează liniile din acest tabel semantic în care $\tilde{h}(\varphi) = 0$. Vom prelucra, în maniera din metoda I, FNC ~~obținută~~ din acest tabel semantic, ~~obține~~ pentru a o FNC mai simplă. Din tabelul alăturat, rezultă că:

$\varphi \sim (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \sim$

$\sim [p \vee q \vee (r \wedge \neg r)] \wedge$
$\wedge [p \vee \neg q \vee (r \wedge \neg r)] \wedge$
$\wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \sim$

$\sim (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge$
$\wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \sim$

$\tilde{h}(\varphi)$	0	0	0	0	1	1	0	1
$\tilde{h}(\psi)$	1	1	1	1	0	0	1	0
$\tilde{h}(p \wedge r)$	0	0	0	0	0	1	0	1
$\tilde{h}(q \wedge \neg r)$	0	0	1	0	0	0	1	0
$\tilde{h}(\neg r)$	1	0	1	0	1	0	1	0
$\tilde{h}(\neg p)$	1	1	1	1	0	0	0	0
$h(r)$	0	1	0	1	0	1	0	1
$h(q)$	0	0	1	1	0	0	1	1
$h(p)$	0	0	0	0	1	1	1	1

$\sim [p \vee (q \wedge \neg q)] \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \sim$
$\sim p \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \sim (p \wedge \neg p) \vee$
$\vee [p \wedge (\neg q \vee r)] \sim p \wedge (\neg q \vee r)$.

Prin fiecare dintre cele două metode, am obținut că $\varphi \sim$ $\sim p \wedge (\neg q \vee r)$, enunț în FNC (echivalent cu mulțimea de clauze $\{\{p\}, \{\neg q, r\}\}$) satisfiabil, întrucât variabilele propoziționale care apar în el sunt două câte două distincte; enunțul $p \wedge (\neg q \vee r)$ este satisfăcut de orice $h : V \to L_2$ cu $\begin{cases} h(p) = 1 \\ \text{şi} \\ h(q) = 0 \text{ sau } h(r) = 1. \end{cases}$ $\Rightarrow$ Enunțul φ e satisfiabil; φ e satisfăcut de orice interpretare ca mai sus.

<u>Exerc.:</u> Fie $\underbrace{p, q \in V}_{(p \neq q)}$, și $\varphi = (p \wedge q) \vee$ $\vee \neg(p \to q) \vee \neg(q \to p) \vee (\neg p \wedge \neg q) \in E$.
Dem. că $\vdash \varphi$.

REZOLVARE:
Au loc următoarele echivalențe:
$\vdash \varphi \overset{(TC)}{\Leftrightarrow} \vDash \varphi \Leftrightarrow \neg \varphi$ e nesatisfiabil.

Punem enunţul $\neg\varphi$ într-o formă clauzală, i.e., det. o FNC echivalentă logic cu φ:

$$\neg\varphi = \neg[(p\wedge q)\vee\neg(p\to q)\vee\neg(q\to p)\vee(\neg p\wedge\neg q)] \sim \neg(p\wedge q)\wedge\neg\neg(p\to q)\wedge\neg\neg(q\to p)\wedge\neg(\neg p\wedge\neg q) \sim (\neg p\vee\neg q)\wedge(p\to q)\wedge(q\to p)\wedge(\neg\neg p\vee\neg\neg q) \sim (\neg p\vee\neg q)\wedge(\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee p)\wedge(p\vee q),$$

enunţ în FNC echivalent cu mulţimea de clauze: $\{\{\neg p,\neg q\},\{\neg p,q\},\{\neg q,p\},\{p,q\}\}$. Trebuie să găsim o derivare prin rezoluţie a acestei mulţimi de clauze în care să apară $\square$ (clauza vidă).

$$\begin{array}{c}
\{\neg p,\neg q\},\{\neg p,q\},\{\neg q,p\},\{p,q\}\\ \hline
\{\neg q\},\{\neg p,q\},\{p,q\}\\ \hline
\{\neg q\},\{q\}\\ \hline
\square
\end{array}$$

$\square \to$ nesatisfiabilă. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \neg\varphi$ e nesatisfiabil. $\Leftrightarrow\ \models\varphi. \overset{(TC)}{\Leftrightarrow}$

$\overset{(TC)}{\Leftrightarrow}\ \vdash\varphi.$

O REZOLVARE SEMANTICĂ PENTRU EXERCIȚIUL ENUNȚAT PE VERSO-UL PAGINII 1:

Fie $h : V \to L_2 = \{0,1\}$, a.î. $h \vDash \{\varphi, \varphi \to (\psi \to \chi), \neg\chi\}$. $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{h}(\varphi) = 1 \\ 1 = \tilde{h}(\varphi \to (\psi \to \chi)) = \\ \quad = \tilde{h}(\varphi) \to (\tilde{h}(\psi) \to \tilde{h}(\chi)) = \\ \quad = \overline{\tilde{h}(\varphi)} \vee \overline{\tilde{h}(\psi)} \vee \tilde{h}(\chi) \\ 1 = \tilde{h}(\neg\chi) = \overline{\tilde{h}(\chi)} \Rightarrow \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{h}(\chi) = \overline{\overline{\tilde{h}(\chi)}} = \overline{1} = 0.$$

$$\Rightarrow 1 = \overline{1} \vee \overline{\tilde{h}(\psi)} \vee 0 = 0 \vee \overline{\tilde{h}(\psi)} =$$

$$= \overline{\tilde{h}(\psi)} = \tilde{h}(\neg\psi). \Rightarrow \tilde{h}(\neg\psi) = 1. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\varphi, \varphi \to (\psi \to \chi), \neg\chi\} \vDash \neg\psi \Leftrightarrow$$

$$\overset{(TCT)}{\Longleftrightarrow} \{\varphi, \varphi \to (\psi \to \chi), \neg\chi\} \vdash \neg\psi.$$

O REZOLVARE PRIN TABEL SEMANTIC PENTRU EXERCIȚIUL ENUNȚAT LA PAGINA 9:

$p, q \in V$;
$\varphi = (p \wedge q) \vee \neg(p \rightarrow q) \vee \neg(q \rightarrow p) \vee (\neg p \wedge \neg q) \in E$.

$\vdash_{?} \varphi$.

Fie $h : V \rightarrow L_2 = \{0, 1\}$, arbitrară.

$h(p)$	$h(q)$	$\tilde{h}(\varphi)$	$\tilde{h}(\neg\varphi)$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

METODA I: Din cele de mai sus rezultă că $(\forall h : V \rightarrow L_2)$ $(h \vDash \varphi) \overset{(\mathrm{def.})}{\Longleftrightarrow} \vDash \varphi \overset{(\mathrm{TC})}{\Longleftrightarrow} \vdash \varphi$.

METODA II: Din cele de mai sus rezultă că $(\nexists h : V \rightarrow L_2)$ $(h \vDash \neg\varphi) \overset{(\mathrm{def.})}{\Longleftrightarrow} \neg\varphi$ e nesatisfiabilă $\Leftrightarrow$ $\overset{(\text{propr. din curs})}{\Longleftrightarrow} \vDash \varphi \overset{(\mathrm{TC})}{\Longleftrightarrow} \vdash \varphi$.