Fundamentele limbajelor de programare

C02

Denisa Diaconescu
Traian Șerbănuță

Departamentul de Informatică, FMI, UB

Lambda calcul - elemente de bază

Lambda calcul

- Un model de calculabilitate
- Limbajele de programare funcțională sunt extensii ale sale
- Un limbaj formal
- Expresiile din acest limbaj se numesc lambda termeni
- Vom defini reguli pentru a îi manipula

Lambda termeni

Fie V o mulțime infinită de variabile, notate $x, y, z, \ldots$.

Mulțimea lambda termenilor este dată de următoarea formă BNF:

lambda termen	=	variabilă
	|	aplicare
	|	abstractizare

$$M, N ::= x \mid (M\,N) \mid (\lambda x.M)$$

Example

- x, y, z
- $(x\,y), (y\,x), (x\,(yx\,))$
- $(\lambda x.x), \lambda x.(x\,y), \lambda z.(x\,y)$
- $((\lambda x.x)\,y), ((\lambda x.(x\,z))\,y)$
- $(\lambda f.(\lambda x.(f\,(f\,x))))$
- $(\lambda x.x)\,(\lambda x.x)$

Funcții anonime în Haskell

lambda termen	=	variabilă
	|	aplicare
	|	abstractizare

$$M, N ::= x \mid (M\,N) \mid (\lambda x.M)$$

În Haskell, \ e folosit în locul simbolului λ și –> în locul punctului:

$\lambda x.x * x$ este `\x -> x * x`

$\lambda x.x > 0$ este `\x -> x > 0`

Lambda termeni - definiție alternativă

Fie V o mulțime infinită de variabile, notate $x, y, z, \ldots$.

Fie A un alfabet format din elementele din V, și simbolurile speciale "(", ")", "λ" si ".".

Fie A^* mulțimea tuturor cuvintelor finite pentru alfabetul A.

Mulțimea lambda termenilor este cea mai mică submulțime $\Lambda \subseteq A^*$ astfel încât:

[Variabilă] $V \subseteq \Lambda$

[Aplicare] dacă $M, N \in \Lambda$ atunci $(M\,N) \in \Lambda$

[Abstractizare] dacă $x \in V$ și $M \in \Lambda$ atunci $(\lambda x.M) \in \Lambda$

Convenții

- Se elimină parantezele exterioare

- Aplicarea este asociativă la stânga
  - $M\,N\,P$ înseamnă $(M\,N)\,P$
  - $f\,x\,y\,z$ înseamnă $((f\,x)\,y)\,z$

- Corpul abstractizării (partea de după punct) se extinde la dreapta cât se poate
  - $\lambda x.M\,N$ înseamnă $\lambda x.(M\,N)$, nu $(\lambda x.M)\,N$

- Mai mulți λ pot fi comprimați
  - $\lambda xyz.M$ este o abreviere pentru $\lambda x.\lambda y.\lambda z.M$

Aceste convenții nu afectează definiția lambda termenilor.

Exercițiu. Scrieți termenii de mai jos cu cât mai puține paranteze și folosind convențiile de mai sus, fără a schimba sensul termenilor:

1. $(\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.((x\, z)(y\, z)))))$
2. $(((a\, b)\,(c\, d))\,((e\, f)\,(g\, h)))$

Exercițiu. Adăugați parantezele în termenii de mai jos astfel încât să nu le schimbați sensul:

1. $x\, x\, x\, x$
2. $\lambda x.x\, \lambda y.y$

Exerciții

Exercițiu. Scrieți termenii de mai jos cu cât mai puține paranteze și folosind convențiile de mai sus, fără a schimba sensul termenilor:

1. $(\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.((x\, z)(y\, z)))))$ Corect: $\lambda xyz.x\, z\,(y\, z)$
2. $(((a\, b)\,(c\, d))\,((e\, f)\,(g\, h)))$

Exercițiu. Adăugați parantezele în termenii de mai jos astfel încât să nu le schimbați sensul:

1. $x\, x\, x\, x$
2. $\lambda x.x\, \lambda y.y$

Exerciții

Exercițiu. Scrieți termenii de mai jos cu cât mai puține paranteze și folosind convențiile de mai sus, fără a schimba sensul termenilor:

1. $(\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.((x\, z)(y\, z)))))$ Corect: $\lambda xyz.x\, z\,(y\, z)$
2. $(((a\, b)\,(c\, d))\,((e\, f)\,(g\, h)))$ Corect: $a\, b\,(c\, d)\,(e\, f\,(g\, h))$

Exercițiu. Adăugați parantezele în termenii de mai jos astfel încât să nu le schimbați sensul:

1. $x\, x\, x\, x$
2. $\lambda x.x\, \lambda y.y$

Exerciții

Exercițiu. Scrieți termenii de mai jos cu cât mai puține paranteze și folosind convențiile de mai sus, fără a schimba sensul termenilor:

1. $(\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.((x\, z)(y\, z)))))$ Corect: $\lambda xyz.x\, z\, (y\, z)$
2. $(((a\, b)\, (c\, d))\, ((e\, f)\, (g\, h)))$ Corect: $a\, b\, (c\, d)\, (e\, f\, (g\, h))$

Exercițiu. Adăugați parantezele în termenii de mai jos astfel încât să nu le schimbați sensul:

1. $x\, x\, x\, x$ Corect: $(((x\, x)\, x)\, x)$
2. $\lambda x.x\, \lambda y.y$

Exerciții

Exercițiu. Scrieți termenii de mai jos cu cât mai puține paranteze și folosind convențiile de mai sus, fără a schimba sensul termenilor:

1. $(\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.((x\,z)(y\,z)))))$ Corect: $\lambda xyz.x\,z\,(y\,z)$
2. $(((a\,b)\,(c\,d))\,((e\,f)\,(g\,h)))$ Corect: $a\,b\,(c\,d)\,(e\,f\,(g\,h))$

Exercițiu. Adăugați parantezele în termenii de mai jos astfel încât să nu le schimbați sensul:

1. $x\,x\,x\,x$ Corect: $(((x\,x)\,x)\,x)$
2. $\lambda x.x\,\lambda y.y$ Corect: $(\lambda x.(x\,(\lambda y.y)))$

Variabile libere și variabile legate

- $\lambda\_.\_$ se numește operator de legare (*binder*)
- x din $\lambda x.\_$ se numește variabilă de legare (*binding*)
- N din $\lambda x.N$ se numește domeniul (*scope*) de legare a lui x
- toate aparițiile lui x în N sunt legate
- O apariție care nu este legată se numește liberă.
- Un termen fără variable libere se numește închis (*closed*).
- Un termen închis se mai numește și combinator.

De exemplu, în termenul

$$M \equiv (\lambda x.xy)\,(\lambda y.yz)$$

- x este legată
- z este liberă
- y are și o apariție legată, și una liberă
- mulțimea variabilelor libere ale lui M este $\{y, z\}$

Variabile libere

Mulțimea variabilelor libere dintr-un termen M este notată $FV(M)$ și este definită formal prin:

$$\begin{aligned} FV(x) &= \{x\} \\ FV(M\,N) &= FV(M) \cup FV(N) \\ FV(\lambda x.M) &= FV(M) \setminus \{x\} \end{aligned}$$

Exemplu de definiție recursivă pe termeni. Adică în definiția lui $FV(M)$ am presupus că am definit deja $FV(N)$ pentru toți subtermenii lui M.

Example

- $FV(\lambda x.x\,y) = FV(x\,y) \setminus \{x\} = (FV(x) \cup FV(y)) \setminus \{x\}$
  $= (\{x\} \cup \{y\}) \setminus \{x\} = \{y\}$
- $FV(x\,\lambda x.x\,y) = \{x, y\}$

Redenumire de variabile

Ce înseamnă să redenumim o variabilă într-un termen?

Dacă x, y sunt variabile și M este un termen, $M\langle y/x\rangle$ este rezultatul obținut după redenumirea lui x cu y în M.

$$
\begin{aligned}
x\langle y/x\rangle &\equiv y, & \\
z\langle y/x\rangle &\equiv z, & \text{dacă } x \neq z \\
(M\,N)\langle y/x\rangle &\equiv (M\langle y/x\rangle)\,(N\langle y/x\rangle) & \\
(\lambda x.M)\langle y/x\rangle &\equiv \lambda y.(M\langle y/x\rangle) & \\
(\lambda z.M)\langle y/x\rangle &\equiv \lambda z.(M\langle y/x\rangle), & \text{dacă } x \neq z
\end{aligned}
$$

Observați că acest tip de redenumire înlocuiește toate aparițiile lui x cu y, indiferent dacă este liberă, legată, sau de legare.

Se folosește doar în cazuri în care y nu apare deja în M.

Ce înseamnă că doi termeni sunt egali,
modulo redenumire de variabile legate?

Definim α-echivalența ca fiind cea mai mică relație de congruență $=_\alpha$ pe mulțimea lambda termenilor, astfel încât pentru orice termen M și orice variabilă y care nu apare în M, avem

$$\lambda x.M \;=_\alpha\; \lambda y.(M\langle y/x\rangle)$$

α-echivalență

α-echivalența $=_\alpha$ este cea mai mică relație pe lambda termeni care satisface regulile:

$$(\mathit{refl})\quad \frac{}{M = M} \qquad\qquad (\mathit{cong})\quad \frac{M = M' \qquad N = N'}{MN = M'N'}$$

$$(\mathit{symm})\quad \frac{M = N}{N = M} \qquad\qquad (\xi)\quad \frac{M = M'}{\lambda x.M = \lambda x.M'}$$

$$(\mathit{trans})\quad \frac{M = N \qquad N = P}{M = P} \qquad\qquad (\alpha)\quad \frac{y \notin M}{\lambda x.M = \lambda y.(M\{y/x\})}$$

Convenția Barendregt:

variabilele legate sunt redenumite pentru a fi distincte.

Substituții

Vrem să substituim variabile cu lambda termeni.

$M[N/x]$ este rezultatul obținut după înlocuirea lui x cu N în M.

Trebuie să fim atenți la următoarele cazuri:

1. Vrem să înlocuim doar variabile libere.

Numele variabilelor legate este considerat imaterial, și nu ar trebui să afecteze rezultatul substituției.
De exemplu, $x\,(\lambda xy.x)[N/x]$ ar trebui să fie $N\,(\lambda xy.x)$,
nu $N\,(\lambda xy.N)$ sau $N\,(\lambda Ny.N)$.

Substituții

2. Nu vrem să legăm variabile libere neintenționat.

De exemplu, fie $M \equiv \lambda x.y\, x$ și $N \equiv \lambda z.x\, z$.

Variabila x este legată în M și liberă în N.

Ce ar trebui să obținem dacă am substitui y cu N în M?
Naiv, ne-am gândi la

$$M[N/y] = (\lambda x.y\, x)[N/y] = \lambda x.N\, x = \lambda x.(\lambda z.x\, z)\, x.$$

Totuși, nu este ceea ce am vrea să obținem, deoarece x este liber în N, iar în timpul "substituției" a devenit legată.

Trebuie să luăm în calcul că x-ul legat din M nu este x-ul liber din N, și de aceea redenumim variabilele legate înainte de substituție.

$$M[N/y] = (\lambda x'.y\, x')[N/y] = \lambda x'.N\, x' = \lambda x'.(\lambda z.x\, z)\, x'.$$

Substituții

Substituția aparițiilor libere ale lui x cu N în M, notată cu $M[N/x]$, este definită prin:

$$
\begin{array}{lcll}
x[N/x] & \equiv & N & \\
y[N/x] & \equiv & y & \text{dacă } x \neq y \\
(M\,P)[N/x] & \equiv & (M[N/x])\,(P[N/x]) & \\
(\lambda x.M)[N/x] & \equiv & \lambda x.M & \\
(\lambda y.M)[N/x] & \equiv & \lambda y.(M[N/x]) & \text{dacă } x \neq y \text{ și } y \notin FV(N) \\
(\lambda y.M)[N/x] & \equiv & \lambda y'.(M\langle y'/y\rangle[N/x]) & \text{dacă } x \neq y,\ y \in FV(N) \\
 & & & \text{și } y' \text{ variabilă nouă}
\end{array}
$$

Deaorece nu specificăm ce variabilă nouă alegem,
spunem că substituția este bine-definită modulo α-echivalențe.

Exerciții

Exercițiu. Calculați următoarele substituții:

1. $(\lambda z.x)[y/x]$
2. $(\lambda y.x)[y/x]$
3. $(\lambda y.x)[(\lambda z.z\,w)/x]$

Exerciții

Exercițiu. Calculați următoarele substituții:

1. $(\lambda z.x)[y/x]$ Corect: $\lambda z.y$
2. $(\lambda y.x)[y/x]$
3. $(\lambda y.x)[(\lambda z.z\,w)/x]$

Exerciții

Exercițiu. Calculați următoarele substituții:

1. $(\lambda z.x)[y/x]$ Corect: $\lambda z.y$
2. $(\lambda y.x)[y/x]$ Corect: $\lambda y'.y$, Greșit: $\lambda y.y$
3. $(\lambda y.x)[(\lambda z.z\,w)/x]$

Exerciții

Exercițiu. Calculați următoarele substituții:

1. $(\lambda z.x)[y/x]$ Corect: $\lambda z.y$
2. $(\lambda y.x)[y/x]$ Corect: $\lambda y'.y$, Greșit: $\lambda y.y$
3. $(\lambda y.x)[(\lambda z.z\, w)/x]$ Corect: $\lambda yz.zw$

Quiz time!

https://tinyurl.com/C02-Quiz

β-reducții

Convenție. Spunem că doi termeni sunt egali, notat $M = N$, dacă sunt α-echivalenți.

- β-reducție = procesul de a evalua lambda termeni prin "pasarea de argumente funcțiilor"
- β-redex = un termen de forma $(\lambda x.M)\,N$
- redusul unui redex $(\lambda x.M)\,N$ este $M[N/x]$
- reducem lambda termeni prin găsirea unui subtermen care este redex, și apoi înlocuirea acelui redex cu redusul său
- repetăm acest proces de câte ori putem, până nu mai sunt redex-uri
- formă normală = un lambda termen fără redex-uri

β-reducții

Un pas de β-reducție $\rightarrow_\beta$ este cea mai mică relație pe lambda termeni care satisface regulile:

$$(\beta) \qquad \frac{}{(\lambda x.M)N \rightarrow_\beta M[N/x]}$$

$$(cong_1) \qquad \frac{M \rightarrow_\beta M'}{MN \rightarrow_\beta M'N}$$

$$(cong_2) \qquad \frac{N \rightarrow_\beta N'}{MN \rightarrow_\beta MN'}$$

$$(\xi) \qquad \frac{M \rightarrow_\beta M'}{\lambda x.M \rightarrow_\beta \lambda x.M'}$$

β-reducții

La fiecare pas, subliniem redexul ales în procesul de β-reducție.

$$
\begin{aligned}
(\lambda x.y)\,(\underline{(\lambda z.zz\,)\,(\lambda w.w)}) &\to_\beta (\lambda x.y)\,((z\,z)[\lambda w.w/z]) \\
&\equiv (\lambda x.y)\,((z[\lambda w.w/z])\,(z[\lambda w.w/z]) \\
&\equiv (\lambda x.y)\,(\underline{(\lambda w.w)\,(\lambda w.w)}) \\
&\to_\beta \underline{(\lambda x.y)\,(\lambda w.w)} \\
&\to_\beta y
\end{aligned}
$$

Ultimul termen nu mai are redex-uri, deci este în formă normală.

β-reducții

$$\begin{aligned}
(\lambda x.y)\,\underline{((\lambda z.zz\,)\,(\lambda w.w)})\ &\to_\beta\ (\lambda x.y)\,(\underline{(\lambda w.w)\,(\lambda w.w)})\\
&\to_\beta\ \underline{(\lambda x.y)\,(\lambda w.w)}\\
&\to_\beta\ y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{(\lambda x.y)\,((\lambda z.zz\,)\,(\lambda w.w))}\ &\to_\beta\ y[(\lambda z.zz\,)\,(\lambda w.w)/x]\\
&\equiv\ y
\end{aligned}$$

Observăm următoarele:

- reducerea unui redex poate crea noi redex-uri
- reducerea unui redex poate șterge alte redex-uri
- numărul de pași necesari până a atinge o formă normală poate varia, în funcție de ordinea în care sunt reduse redex-urile
- rezultatul final pare că nu a depins de alegerea redex-urilor

Confluența β-reducției

Notăm cu $M \twoheadrightarrow_\beta M'$ faptul că M poate fi β-redus până la M' în mai mulți pași (închiderea reflexivă și tranzitivă a relației $\rightarrow_\beta$).

Teorema Church-Rosser. Dacă $M \twoheadrightarrow_\beta M_1$ și $M \twoheadrightarrow_\beta M_2$ atunci există M' astfel încât $M_1 \twoheadrightarrow_\beta M'$ și $M_2 \twoheadrightarrow_\beta M'$.

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dl, two heads] \arrow[dr, two heads] & \\
M_1 \arrow[dr, dashed, two heads] & & M_2 \arrow[dl, dashed, two heads] \\
& M' &
\end{tikzcd}$$

Consecință. Un lambda termen poate avea cel mult o β-formă normală, modulo α-echivalență.

β-formă normală

Totuși, există lambda termeni care nu pot fi reduși la o β-formă normală (evaluarea nu se termină).

$$\begin{aligned} \underline{(\lambda x.x\,x)\,(\lambda x.x\,x)} \quad &\to_\beta \quad (\lambda x.x\,x)\,(\lambda x.x\,x) \\ &\to_\beta \quad \ldots \end{aligned}$$

Observați că lungimea unui termen nu trebuie să scadă în procesul de β-reducție; poate crește sau rămâne neschimbat.

Exerciții

Exercițiu. Verificați dacă termenii de mai jos pot fi aduși la o β-formă normală:

1. $(\lambda x.x)\, M$
2. $(\lambda xy.x)\, M\, N$
3. $(\lambda x.x\, x)\, (\lambda y.y\, y\, y)$

Exerciții

Exercițiu. Verificați dacă termenii de mai jos pot fi aduși la o β-formă normală:

1. $(\lambda x.x)\, M$ Corect: M
2. $(\lambda xy.x)\, M\, N$ Corect: M
3. $(\lambda x.x\, x)\, (\lambda y.y\, y\, y)$ Corect: $(\lambda y.y\, y\, y)\, (\lambda y.y\, y\, y)\, (\lambda y.y\, y\, y) \ldots$

Pe săptămâna viitoare!