Logică Matematică şi Computaţională

Seminarul XII

Claudia MUREŞAN
Universitatea din Bucureşti, Facultatea de Matematică şi Informatică
c.muresan@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro, claudia.muresan@unibuc.ro

2021–2022, Semestrul I

Exerciţiul 1. Fie V mulţimea variabilelor propoziţionale, iar E mulţimea enunţurilor logicii propoziţionale clasice, şi $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in E$. Demonstraţi că, în logica propoziţională clasică:

(1) mulţimea $\{\alpha \rightarrow \beta,\ \beta \rightarrow (\gamma \wedge \delta),\ \neg\,\beta \rightarrow \gamma,\ \gamma \rightarrow \alpha,\ \delta \rightarrow \neg\,\alpha\}$ e nesatisfiabilă;

(2) dacă $\vdash \alpha \vee \beta \vee \gamma$, atunci mulţimea $\{\alpha \rightarrow \beta,\ \beta \rightarrow (\gamma \wedge \delta),\ \gamma \rightarrow \alpha,\ \delta \rightarrow \neg\,\alpha\}$ e nesatisfiabilă;

(3) dacă $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in V$, atunci mulţimea $\{\alpha \rightarrow \beta,\ \beta \rightarrow (\gamma \wedge \delta),\ \gamma \rightarrow \alpha,\ \delta \rightarrow \neg\,\alpha\}$ e satisfiabilă; să se rezolve această cerinţă:

- demonstrând că această mulţime are un model;
- prin tehnica rezoluţiei, în cazul în care variabilele propoziţionale $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sunt două câte două distincte;

(4) în cazul în care $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in V$ şi sunt două câte două distincte, să se rezolve cerinţa de la punctul (1) şi prin tehnica rezoluţiei.

La punctele (3) şi (4), pentru a pune elementele mulţimii sau conjuncţia lor în FNC, să se procedeze prin două metode:

- folosind proprietăţile echivalenţei semantice derivate din proprietăţi booleene;
- folosind tabele semantice.

Rezolvare: Fie $h : V \rightarrow \mathcal{L}_2$ o interpretare arbitrară. Cu notaţia din curs, $\widetilde{h} : E \rightarrow \mathcal{L}_2$ va fi unica prelungire a lui h la E care transformă conectorii logici în operaţii booleene.

Vom folosi faptul că h, şi deci $\widetilde{h}$, poate lua orice valori booleene în elementele lui V, dar $\widetilde{h}$ nu poate lua orice valori booleene în elementele lui $E \setminus V$. (În orice tautologie va lua valoarea 1, iar, de exemplu, în negaţia oricărei tautologii va lua valoarea 0.)

(1) Presupunem prin absurd că $h \vDash \{\alpha \rightarrow \beta,\ \beta \rightarrow (\gamma \wedge \delta),\ \neg\,\beta \rightarrow \gamma,\ \gamma \rightarrow \alpha,\ \delta \rightarrow \neg\,\alpha\}$, adică:
$h \vDash \alpha \rightarrow \beta$, adică $1 = \widetilde{h}(\alpha \rightarrow \beta) = \widetilde{h}(\alpha) \rightarrow \widetilde{h}(\beta)$, aşadar $\widetilde{h}(\alpha) \leq \widetilde{h}(\beta)$;
$h \vDash \beta \rightarrow (\gamma \wedge \delta)$, i.e. $1 = \widetilde{h}(\beta \rightarrow (\gamma \wedge \delta)) = \widetilde{h}(\beta) \rightarrow (\widetilde{h}(\gamma) \wedge \widetilde{h}(\delta))$, prin urmare $\widetilde{h}(\beta) \leq \widetilde{h}(\gamma) \wedge \widetilde{h}(\delta)$;
$h \vDash \neg\,\beta \rightarrow \gamma$, i.e. $1 = \widetilde{h}(\neg\,\beta \rightarrow \gamma) = \overline{\widetilde{h}(\beta)} \rightarrow \widetilde{h}(\gamma)$, deci $\overline{\widetilde{h}(\beta)} \leq \widetilde{h}(\gamma)$;
$h \vDash \gamma \rightarrow \alpha$, i.e. $1 = \widetilde{h}(\gamma \rightarrow \alpha) = \widetilde{h}(\gamma) \rightarrow \widetilde{h}(\alpha)$, aşadar $\widetilde{h}(\gamma) \leq \widetilde{h}(\alpha)$;
$h \vDash \delta \rightarrow \neg\,\alpha$, i.e. $1 = \widetilde{h}(\delta \rightarrow \neg\,\alpha) = \widetilde{h}(\delta) \rightarrow \overline{\widetilde{h}(\alpha)}$, prin urmare $\widetilde{h}(\delta) \leq \overline{\widetilde{h}(\alpha)}$.

În consecinţă, $\widetilde{h}(\gamma) \leq \widetilde{h}(\alpha) \leq \widetilde{h}(\beta) \leq \widetilde{h}(\gamma) \wedge \widetilde{h}(\delta) \leq \widetilde{h}(\delta) \leq \overline{\widetilde{h}(\alpha)}$, deci $\widetilde{h}(\alpha) \leq \overline{\widetilde{h}(\alpha)}$. Cum $\widetilde{h}(\alpha) \in \{0, 1\}$, rezultă că $\widetilde{h}(\alpha) = 0$, aşadar $\widetilde{h}(\gamma) \leq 0$, deci $\widetilde{h}(\gamma) = 0$, prin urmare $\widetilde{h}(\gamma) \wedge \widetilde{h}(\delta) = 0 \wedge \widetilde{h}(\delta) = 0$, aşadar $\widetilde{h}(\beta) \leq 0$, deci $\widetilde{h}(\beta) = 0$.

Dar $\overline{\widetilde{h}(\beta)} \leq \widetilde{h}(\gamma)$, deci $\overline{0} \leq 0$, adică $1 \leq 0$; contradicţie. Prin urmare $h \nvDash \{\alpha \rightarrow \beta,\ \beta \rightarrow (\gamma \wedge \delta),\ \neg\,\beta \rightarrow \gamma,\ \gamma \rightarrow \alpha,\ \delta \rightarrow \neg\,\alpha\}$. Cum interpretarea h este arbitrară, rezultă că nicio interpretare nu satisface mulţimea de enunţuri $\{\alpha \rightarrow \beta,\ \beta \rightarrow (\gamma \wedge \delta),\ \neg\,\beta \rightarrow \gamma,\ \gamma \rightarrow \alpha,\ \delta \rightarrow \neg\,\alpha\}$, adică această mulţime este nesatisfiabilă.

(2) Presupunem că $\vdash \alpha \vee \beta \vee \gamma$. Atunci $\vDash \alpha \vee \beta \vee \gamma$ conform **Teoremei de Completitudine (TC)**, ceea ce înseamnă că orice interpretare satisface enunţul $\alpha \vee \beta \vee \gamma$. Aşadar $h \vDash \alpha \vee \beta \vee \gamma$, adică $1 = \widetilde{h}(\alpha \vee \beta \vee \gamma) = \widetilde{h}(\alpha) \vee \widetilde{h}(\beta) \vee \widetilde{h}(\gamma)$, prin urmare: $\widetilde{h}(\alpha) = 1$ sau $\widetilde{h}(\beta) = 1$ sau $\widetilde{h}(\gamma) = 1$.

Presupunem prin absurd că $h \vDash \{\alpha \to \beta,\ \beta \to (\gamma \wedge \delta),\ \gamma \to \alpha,\ \delta \to \neg\,\alpha\}$, deci, folosind şi calculele de la punctul (1):

$h \vDash \alpha \to \beta$, aşadar $\widetilde{h}(\alpha) \leq \widetilde{h}(\beta)$;
$h \vDash \beta \to (\gamma \wedge \delta)$, prin urmare $\widetilde{h}(\beta) \leq \widetilde{h}(\gamma) \wedge \widetilde{h}(\delta)$;
$h \vDash \gamma \to \alpha$, aşadar $\widetilde{h}(\gamma) \leq \widetilde{h}(\alpha)$;
$h \vDash \delta \to \neg\,\alpha$, prin urmare $\widetilde{h}(\delta) \leq \overline{\widetilde{h}(\alpha)}$.

Şi aici rezultă că $\widetilde{h}(\gamma) \leq \widetilde{h}(\alpha) \leq \widetilde{h}(\beta) \leq \widetilde{h}(\gamma) \wedge \widetilde{h}(\delta) \leq \widetilde{h}(\delta) \leq \overline{\widetilde{h}(\alpha)}$, deci $\widetilde{h}(\alpha) \leq \overline{\widetilde{h}(\alpha)}$, aşadar $\widetilde{h}(\alpha) = 0$, prin urmare $\widetilde{h}(\gamma) = 0$. Conform celor de mai sus, rezultă că $\widetilde{h}(\beta) = 1$. Dar atunci $1 = \widetilde{h}(\beta) \leq \widetilde{h}(\gamma) \wedge \widetilde{h}(\delta) = 0 \wedge \widetilde{h}(\delta) = 0$, deci $1 \leq 0$; contradicţie. Aşadar $h \nvDash \{\alpha \to \beta,\ \beta \to (\gamma \wedge \delta),\ \gamma \to \alpha,\ \delta \to \neg\,\alpha\}$.

Cum interpretarea h este arbitrară, rezultă că mulţimea $\{\alpha \to \beta,\ \beta \to (\gamma \wedge \delta),\ \gamma \to \alpha,\ \delta \to \neg\,\alpha\}$ e nesatisfiabilă.

(3) Presupunem că α, β, γ şi δ sunt variabile propoziţionale.

Prima metodă: Cum $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in V$, rezultă că există (chiar o infinitate de) interpretări $g : V \to \mathcal{L}_2$ care iau în $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ valorile: $g(\alpha) = g(\beta) = g(\gamma) = g(\delta) = 0$.

Cu notaţia din curs, rezultă că orice astfel de interpretare satisface:
$\widetilde{g}(\alpha \to \beta) = \widetilde{g}(\alpha) \to \widetilde{g}(\beta) = 0 \to 0 = 1$, aşadar $g \vDash \alpha \to \beta$;
$\widetilde{g}(\beta \to (\gamma \wedge \delta)) = \widetilde{g}(\beta) \to (\widetilde{g}(\gamma) \wedge \widetilde{h}(\delta)) = 0 \to (0 \wedge 0) = 0 \to 0 = 1$, prin urmare $g \vDash \beta \to (\gamma \wedge \delta)$;
$\widetilde{g}(\gamma \to \alpha) = \widetilde{g}(\gamma) \to \widetilde{g}(\alpha) = 0 \to 0 = 1$, aşadar $g \vDash \gamma \to \alpha$;
$\widetilde{g}(\delta \to \neg\,\alpha) = \widetilde{g}(\delta) \to \overline{\widetilde{g}(\alpha)} = 0 \to \overline{0} = 0 \to 1 = 1$, prin urmare $g \vDash \delta \to \neg\,\alpha$.

Aşadar $g \vDash \{\alpha \to \beta,\ \beta \to (\gamma \wedge \delta),\ \gamma \to \alpha,\ \delta \to \neg\,\alpha\}$, prin urmare această mulţime de enunţuri e satisfiabilă.

A se observa faptul că g are aceeaşi valoare în $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, aşadar aici nu avem nevoie ca variabilele propoziţionale $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ să fie două câte două distincte.

Metoda rezoluţiei: Amintesc definiţia echivalenţei semantice: $\sim = \{(\varphi, \psi) \mid \varphi, \psi \in E, \vdash \varphi \leftrightarrow \psi\} \in \mathrm{Eq}(E)$ (cu notaţia din curs pentru mulţimea relaţiilor de echivalenţă pe o mulţime; aici, pe mulţimea E a enunţurilor logicii propoziţionale clasice). Conform **TC**, rezultă că, pentru orice enunţuri φ, ψ, avem: $\varphi \sim \psi$ ddacă $\vDash \varphi \leftrightarrow \psi$ ddacă, oricare ar fi interpretarea $g : V \to \mathcal{L}_2$, are loc $1 = \widetilde{g}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \widetilde{g}(\varphi) \leftrightarrow \widetilde{g}(\psi)$, deci $\widetilde{g}(\varphi) = \widetilde{g}(\psi)$.

Pentru a aplica tehnica rezoluţiei, trebuie să punem fiecare element al mulţimii $\{\alpha \to \beta,\ \beta \to (\gamma \wedge \delta),\ \gamma \to \alpha,\ \delta \to \neg\,\alpha\}$ în **formă normală conjunctivă (FNC)**, adică trebuie să găsim enunţuri φ, ψ, χ, ξ în FNC astfel încât: $\varphi \sim \alpha \to \beta$, $\psi \sim \beta \to (\gamma \wedge \delta)$, $\chi \sim \gamma \to \alpha$ şi $\xi \sim \delta \to \neg\,\alpha$.

Prima metodă pentru punerea acestor enunţuri în FNC:
$\alpha \to \beta \sim \neg\,\alpha \vee \beta$;
$\beta \to (\gamma \wedge \delta) \sim \neg\,\beta \vee (\gamma \wedge \delta) \sim (\neg\,\beta \vee \gamma) \wedge (\neg\,\beta \vee \delta)$;
$\gamma \to \alpha \sim \neg\,\gamma \vee \alpha$;
$\delta \to \neg\,\alpha \sim \neg\,\delta \vee \neg\,\alpha$.

Cum $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in V$, rezultă că enunţurile $\neg\,\alpha \vee \beta$, $(\neg\,\beta \vee \gamma) \wedge (\neg\,\beta \vee \delta)$, $\neg\,\gamma \vee \alpha$ şi $\neg\,\delta \vee \neg\,\alpha$ sunt în FNC.

Aşadar mulţimea de enunţuri $\{\alpha \to \beta,\ \beta \to (\gamma \wedge \delta),\ \gamma \to \alpha,\ \delta \to \neg\,\alpha\}$ este echivalentă cu enunţul în FNC:
$\varepsilon = (\neg\,\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\,\beta \vee \gamma) \wedge (\neg\,\beta \vee \delta) \wedge (\neg\,\gamma \vee \alpha) \wedge (\neg\,\delta \vee \neg\,\alpha)$,
adică această mulţime e satisfiabilă ddacă ε e satisfiabil. Considerăm **forma clauzală** a lui ε: enunţul ε este echivalent cu mulţimea de clauze: $\{\{\neg\,\alpha, \beta\}, \{\neg\,\beta, \gamma\}, \{\neg\,\beta, \delta\}, \{\neg\,\gamma, \alpha\}, \{\neg\,\delta, \neg\,\alpha\}\}$.

Pentru a conchide că această mulţime de clauze e **satisfiabilă**, trebuie să efectuăm **toate derivările posibile prin rezoluţie** ale acestei mulţimi şi să constatăm că în niciuna dintre aceste derivări nu apare clauza vidă $\square$. O altă posibilitate, echivalentă cu a efectua toate derivările prin rezoluţie, este să aplicăm **algoritmul Davis–Putnam**. Vom proceda prin această a doua metodă, indicând la fiecare pas variabila propoziţională care va fi eliminată din clauzele curente.

$$
\begin{array}{c}
\{\neg\,\alpha,\beta\},\{\neg\,\beta,\gamma\},\{\neg\,\beta,\delta\},\{\neg\,\gamma,\alpha\},\{\neg\,\delta,\neg\,\alpha\} \quad (\text{ alegem } \delta)\\
\hline
\{\neg\,\alpha,\beta\},\{\neg\,\beta,\gamma\},\{\neg\,\beta,\neg\,\alpha\},\{\neg\,\gamma,\alpha\} \quad (\text{ alegem } \gamma)\\
\hline
\{\neg\,\alpha,\beta\},\{\neg\,\beta,\alpha\},\{\neg\,\beta,\neg\,\alpha\} \quad (\text{ alegem } \beta)\\
\hline
\{\neg\,\alpha,\alpha\},\{\neg\,\alpha\} \quad (\text{ eliminăm clauza trivială } \{\neg\,\alpha,\alpha\})\\
\hline
\{\neg\,\alpha\}\\
\hline
\emptyset
\end{array}
$$

Nu am obţinut **clauza vidă** $\square$, aşadar enunţul ε e **satisfiabil**, deci mulţimea de enunţuri $\{\alpha \to \beta,\ \beta \to (\gamma \wedge \delta),\ \gamma \to \alpha,\ \delta \to \neg\,\alpha\}$ e **satisfiabilă**.

A DOUA METODĂ: vom pune conjuncţia $\varphi = (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to (\gamma \wedge \delta)) \wedge (\gamma \to \alpha) \wedge (\delta \to \neg\,\alpha)$ a enunţurilor din această mulţime în FNC folosind un tabel semantic.

Desigur, cu notaţia de mai sus, $\varepsilon \sim \varphi$, dar ε nu este singura FNC echivalentă semantic cu φ.

$h(\alpha)$	$h(\beta)$	$h(\gamma)$	$h(\delta)$	$\widetilde{h}(\alpha \to \beta)$	$\widetilde{h}(\beta \to (\gamma \wedge \delta))$	$\widetilde{h}(\gamma \to \alpha)$	$\widetilde{h}(\delta \to \neg\,\alpha)$	$\widetilde{h}(\varphi)$	
0	0	0	0	1	1	1	1	1	
0	0	0	1	1	1	1	1	1	
0	0	1	0	1	1	0	1	0	$\alpha \vee \beta \vee \neg\,\gamma \vee \delta$
0	0	1	1	1	1	0	1	0	$\alpha \vee \beta \vee \neg\,\gamma \vee \neg\,\delta$
0	1	0	0	1	0	1	1	0	$\alpha \vee \neg\,\beta \vee \gamma \vee \delta$
0	1	0	1	1	0	1	1	0	$\alpha \vee \neg\,\beta \vee \gamma \vee \neg\,\delta$
0	1	1	0	1	0	0	1	0	$\alpha \vee \neg\,\beta \vee \neg\,\gamma \vee \delta$
0	1	1	1	1	1	0	1	0	$\alpha \vee \neg\,\beta \vee \neg\,\gamma \vee \neg\,\delta$
1	0	0	0	0	1	1	1	0	$\neg\,\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \delta$
1	0	0	1	0	1	1	0	0	$\neg\,\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \neg\,\delta$
1	0	1	0	0	1	1	1	0	$\neg\,\alpha \vee \beta \vee \neg\,\gamma \vee \delta$
1	0	1	1	0	1	1	0	0	$\neg\,\alpha \vee \beta \vee \neg\,\gamma \vee \neg\,\delta$
1	1	0	0	1	0	1	1	0	$\neg\,\alpha \vee \neg\,\beta \vee \gamma \vee \delta$
1	1	0	1	1	0	1	0	0	$\neg\,\alpha \vee \neg\,\beta \vee \gamma \vee \neg\,\delta$
1	1	1	0	1	0	1	1	0	$\neg\,\alpha \vee \neg\,\beta \vee \neg\,\gamma \vee \delta$
1	1	1	1	1	1	1	0	1	

Tabelul semantic de mai sus ne dă următoarea FNC, care poate fi redusă folosind următoarea proprietate booleană: pentru orice $\zeta, \xi \in E$, $(\zeta \vee \xi) \wedge (\zeta \vee \neg\,\xi) \sim \zeta \vee (\xi \wedge \neg\,\xi) \sim \zeta$:

$\varphi \sim (\alpha \vee \beta \vee \neg\,\gamma \vee \delta) \wedge (\alpha \vee \beta \vee \neg\,\gamma \vee \neg\,\delta) \wedge (\alpha \vee \neg\,\beta \vee \gamma \vee \delta) \wedge (\alpha \vee \neg\,\beta \vee \gamma \vee \neg\,\delta) \wedge (\alpha \vee \neg\,\beta \vee \neg\,\gamma \vee \delta) \wedge (\alpha \vee \neg\,\beta \vee \neg\,\gamma \vee \neg\,\delta) \wedge (\neg\,\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \delta) \wedge (\neg\,\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \neg\,\delta) \wedge (\neg\,\alpha \vee \beta \vee \neg\,\gamma \vee \neg\,\delta) \wedge (\neg\,\alpha \vee \neg\,\beta \vee \gamma \vee \delta) \wedge (\neg\,\alpha \vee \neg\,\beta \vee \gamma \vee \delta) \wedge (\neg\,\alpha \vee \neg\,\beta \vee \gamma \vee \neg\,\delta) \wedge (\neg\,\alpha \vee \neg\,\beta \vee \neg\,\gamma \vee \delta) \sim (\alpha \vee \beta \vee \neg\,\gamma) \wedge (\alpha \vee \neg\,\beta) \wedge (\neg\,\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\,\alpha \vee \neg\,\beta \vee \gamma) \wedge (\neg\,\alpha \vee \neg\,\beta \vee \neg\,\gamma \vee \delta)$.

Desigur, având tabelul semantic de mai sus, nu mai avem nevoie să efectuăm derivări prin rezoluţie, pentru că acest tabel arată că: $h \vDash \varphi$ ddacă $(h(a), h(b), h(c), h(d)) \in \{(0,0,0,0), (0,0,0,1), (1,1,1,1)\}$, aşadar φ e satisfiabil, deci mulţimea $\{\alpha \to \beta,\ \beta \to (\gamma \wedge \delta),\ \gamma \to \alpha,\ \delta \to \neg\,\alpha\}$ e **satisfiabilă**, având ca modele toate interpretările cu valorile de mai sus în a, b, c şi d (şi valori arbitrare în orice $v \in V \setminus \{a, b, c, d\}$, deci o infinitate de modele).

Observaţia 1. Cum toate enunţurile sunt de lungime finită (i.e. cuvinte finite peste alfabetul logicii propoziţionale), aşadar fiecare enunţ conţine doar un număr finit de variabile propoziţionale, în timp ce mulţimea V a variabilelor propoziţionale este infinită, iar valoarea unei interpretări într–un enunţ nu depinde decât de variabilele care apar în acel enunţ, rezultă că orice **enunţ satisfiabil**, şi implicit orice **mulţime finită de enunţuri satisfiabilă** are **o infinitate de modele**.

(4) Aici e suficient să găsim **o singură derivare prin rezoluţie** în care apare **clauza vidă** $\square$ pentru a conchide că mulţimea e **nesatisfiabilă**.

Desigur, având tabelul anterior, e suficient să observăm că $(h(a), h(b), h(c), h(d)) \in \{(0,0,0,0), (0,0,0,1), (1,1,1,1)\}$ implică $h \nvDash \neg\beta \rightarrow \gamma$, aşadar nicio interpretare nu satisface mulţimea $\{\alpha \rightarrow \beta,\ \beta \rightarrow (\gamma \wedge \delta),\ \neg\beta \rightarrow \gamma,\ \gamma \rightarrow \alpha,\ \delta \rightarrow \neg\alpha\}$. Dar să aplicăm tehnica rezoluţiei, conform cerinţei de la acest punct.

Cum $\neg\beta \rightarrow \gamma \sim \beta \vee \gamma$, conform rezolvării punctului (3) rezultă că o FNC echivalentă semantic cu mulţimea $\{\alpha \rightarrow \beta,\ \beta \rightarrow (\gamma \wedge \delta),\ \neg\beta \rightarrow \gamma,\ \gamma \rightarrow \alpha,\ \delta \rightarrow \neg\alpha\}$ este $\psi = (\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \gamma) \wedge (\neg\beta \vee \delta) \wedge (\beta \vee \gamma) \wedge (\neg\gamma \vee \alpha) \wedge (\neg\delta \vee \neg\alpha)$, având forma clauzală: $\{\{\neg\alpha, \beta\}, \{\neg\beta, \gamma\}, \{\neg\beta, \delta\}, \{\beta, \gamma\}, \{\neg\gamma, \alpha\}, \{\neg\delta, \neg\alpha\}\}$.

În următoarele derivări prin rezoluţie pentru mulţimea de clauze de mai sus, voi marca literalii folosiţi la fiecare pas. Dacă luăm mereu prima pereche de literali utilizabilă din stânga, atunci obţinem următoarea derivare:

$$\begin{array}{c}
\{\neg\alpha,\cancel{\beta}\},\{\cancel{\neg\beta},\gamma\},\{\neg\beta,\delta\},\{\beta,\gamma\},\{\neg\gamma,\alpha\},\{\neg\delta,\neg\alpha\}\\ \hline
\{\neg\alpha,\gamma\},\{\cancel{\neg\beta},\delta\},\{\cancel{\beta},\gamma\},\{\neg\gamma,\alpha\},\{\neg\delta,\neg\alpha\}\\ \hline
\{\neg\alpha,\cancel{\gamma}\},\{\delta,\gamma\},\{\cancel{\neg\gamma},\alpha\},\{\neg\delta,\neg\alpha\}\\ \hline
\{\neg\alpha,\alpha\},\{\delta,\gamma\},\{\neg\delta,\neg\alpha\} \quad \text{eliminăm clauza trivială } \{\neg\alpha,\alpha\}\\ \hline
\{\cancel{\delta},\gamma\},\{\cancel{\neg\delta},\neg\alpha\}\\ \hline
\{\gamma,\neg\alpha\}
\end{array}$$

Nu am întâlnit clauza vidă în această derivare, dar nu putem conchide că mulţimea e satisfiabilă până nu efectuăm **toate derivările prin rezoluţie** (sau aplicăm **algoritmul Davis–Putnam**).

Iată o derivare prin rezoluţie în care apare **clauza vidă** $\square$:

$$\begin{array}{c}
\{\neg\alpha,\cancel{\beta}\},\{\neg\beta,\gamma\},\{\cancel{\neg\beta},\delta\},\{\beta,\gamma\},\{\neg\gamma,\alpha\},\{\neg\delta,\neg\alpha\}\\ \hline
\{\neg\alpha,\delta\},\{\cancel{\neg\beta},\gamma\},\{\cancel{\beta},\gamma\},\{\neg\gamma,\alpha\},\{\neg\delta,\neg\alpha\}\\ \hline
\{\neg\alpha,\cancel{\delta}\},\{\gamma\},\{\neg\gamma,\alpha\},\{\cancel{\neg\delta},\neg\alpha\}\\ \hline
\{\cancel{\neg\alpha}\},\{\gamma\},\{\neg\gamma,\cancel{\alpha}\}\\ \hline
\{\cancel{\neg\gamma}\},\{\cancel{\gamma}\}\\ \hline
\square
\end{array}$$

Derivarea de mai sus este suficientă pentru a concluziona că mulţimea de enunţuri $\{\alpha \rightarrow \beta,\ \beta \rightarrow (\gamma \wedge \delta),\ \neg\beta \rightarrow \gamma,\ \gamma \rightarrow \alpha,\ \delta \rightarrow \neg\alpha\}$ e **nesatisfiabilă**, dar, ATENŢIE: **tehnica rezoluţiei** nu poate fi aplicată mai sus decât dacă $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in V$! Observaţi tehnica rezoluţiei aplicată la punctul (3) pentru cazul $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in V$, care nu acoperă şi cazul de la punctul (2)! În plus, variabilele trebuie să fie două câte două distincte pentru a aplica rezoluţia, pentru că altfel unele clauze folosite în regula rezoluţiei ar putea fi triviale.