Tipuri de Funcţii
Seminar de Logică Matematică şi Computaţională

Claudia MUREŞAN
Universitatea din Bucureşti, Facultatea de Matematică şi Informatică
c.muresan@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro, claudia.muresan@unibuc.ro

2021–2022, Semestrul I

Exerciţiul 1. *Fie T o mulţime şi $A, B \in \mathcal{P}(T)$, $A \neq \emptyset \neq B$. Pentru orice $X \in \mathcal{P}(T)$, notăm cu: $\overline{X} := T \setminus X$. Considerăm funcţia $f : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, definită prin: oricare ar fi $X \in \mathcal{P}(T)$, $f(X) = (X \cap A, X \cap B)$. Să se demonstreze că:*

(i) f e injectivă ddacă $A \cup B = T$;

(ii) f e surjectivă ddacă $A \cap B = \emptyset$;

(iii) f e bijectivă ddacă $A = \overline{B}$ ddacă $B = \overline{A}$ (adică f e bijectivă ddacă A şi B sunt părţi complementare ale lui T).

Rezolvare: Cum A şi B sunt nevide şi sunt incluse în T, rezultă că T e nevidă.

Să mai observăm că, pentru orice $X \in \mathcal{P}(T)$, avem $X \cap A \in \mathcal{P}(A)$ şi $X \cap B \in \mathcal{P}(B)$, aşadar $f(X) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, deci f e corect definită (adică este într–adevăr o funcţie de la $\mathcal{P}(T)$ la $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$).

(i) ”$\Longleftarrow$”: Ipoteza acestei implicaţii este că $A \cup B = T$.

Fie $X, Y \in \mathcal{P}(T)$ astfel încât $f(X) = f(Y)$, adică $(X \cap A, X \cap B) = (Y \cap A, Y \cap B)$, i. e.: $\begin{cases} X \cap A = Y \cap A \text{ şi} \\ X \cap B = Y \cap B, \end{cases}$

prin urmare: $X = X \cap T = X \cap (A \cup B) = (X \cap A) \cup (X \cap B) = (Y \cap A) \cup (Y \cap B) = Y \cap (A \cup B) = Y \cap T = Y$, aşadar f este injectivă.

”$\Longrightarrow$”: Ipoteza acestei implicaţii este că f e injectivă.

Presupunem prin absurd că $A \cup B \neq T$, aşadar $A \cup B \subsetneq T$ întrucât $A \cup B \subseteq T$, prin urmare $T \setminus (A \cup B) \neq \emptyset$, adică există un element $u \in T \setminus (A \cup B)$, prin urmare $u \notin A$ şi $u \notin B$, aşadar $\{u\} \cap A = \{u\} \cap B = \emptyset$ (deoarece $\{u\}$ nu are elemente în comun cu A sau cu B – a se revedea definiţia intersecţiei de mulţimi).

Cum mulţimea $\{u\}$ are un element, avem $\{u\} \neq \emptyset$. Dar: $f(\{u\}) = (\{u\} \cap A, \{u\} \cap B) = (\emptyset, \emptyset) = (\emptyset \cap A, \emptyset \cap B) = f(\emptyset)$. Am obţinut o contradicţie cu faptul că f e injectivă.

Aşadar $A \cup B = T$.

(ii) ”$\Longleftarrow$”: Ipoteza acestei implicaţii este că $A \cap B = \emptyset$.

Să considerăm un element arbitrar (V, W) al imaginii $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ a lui f: fie $V \in \mathcal{P}(A)$ şi $W \in \mathcal{P}(B)$, arbitrare. Atunci avem:

$V \cup W \subseteq A \cup B \subseteq T$, aşadar $V \cup W \in \mathcal{P}(T)$;

cum $V \subseteq A$ şi $W \subseteq B$, rezultă că $V \cap A = V$ şi $W \cap B = W$;

$V \cap B \subseteq A \cap B = \emptyset$ şi $W \cap A \subseteq A \cap B = \emptyset$, aşadar $V \cap B = W \cap A = \emptyset$;

prin urmare: $f(V \cup W) = ((V \cup W) \cap A, (V \cup W) \cap B) = ((V \cap A) \cup (V \cap B), (W \cap A) \cup (W \cap B)) = (V \cup \emptyset, \emptyset \cup W) = (V, W)$.

Aşadar f e surjectivă.

”$\Longrightarrow$”: Ipoteza acestei implicaţii este că f e surjectivă.

Presupunem prin absurd că $A \cap B \neq \emptyset$, ceea ce înseamnă că există $v \in A \cap B$, adică $v \in A$ şi $v \in B$.

Atunci, pentru orice pereche din imaginea lui f, elementul v aparţine fie ambilor membrii ai perechii, fie niciunuia dintre membrii perechii. Aşadar nicio pereche din $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ cu v aparţinând unuia singur dintre membrii perechii nu se află în imaginea lui f, ceea ce contrazice faptul că f e surjectivă. Să redactăm acest raţionament, de exemplu, pentru perechea $(\emptyset, \{v\})$.

Cum $v \in B$, avem că $(\emptyset, \{v\}) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$. Prin ipoteza acestei implicaţii, f este surjectivă, aşadar există un $Z \in \mathcal{P}(T)$ cu $f(Z) = (\emptyset, \{v\})$, adică $(Z \cap A, Z \cap B) = (\emptyset, \{v\})$, i.e. $\begin{cases} Z \cap A = \emptyset \text{ şi} \\ Z \cap B = \{v\}. \end{cases}$

Prin urmare $v \in Z \cap B \subseteq Z$, aşadar $v \in Z$, iar, cum $v \in A$, rezultă că $v \in Z \cap A = \emptyset$, ceea ce contrazice dediniţia mulţimii vide.

Aşadar $A \cap B = \emptyset$.

(iii) Conform (i), (ii) şi caracterizării părţilor complementare ale unei mulţimi, avem:

f e bijectivă ddacă f e injectivă şi surjectivă ddacă $\begin{cases} A \cup B = T \text{ şi} \\ A \cap B = \emptyset \end{cases}$ ddacă $A = \overline{B}$ ddacă $B = \overline{A}$.