Curs 1

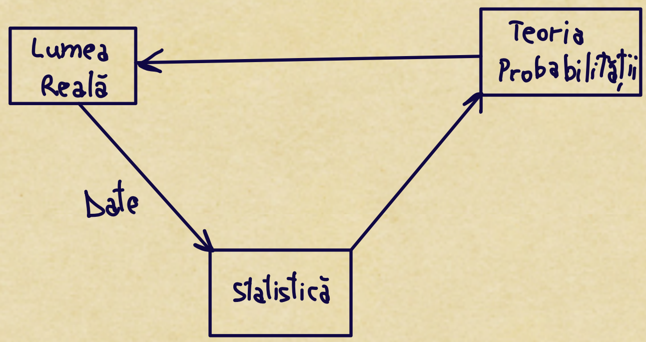
1p oficiu

Notarea:
- Laborator / Seminar — 20% (R)
- Proiect (sesiune + prezentare) — 30% (R) → 2-3 persoane
- Examen (scris) — 50% — 3 ore → minim 1 subpunct de (R)
  → fără materiale

Criterii:
Nota ≥ 5 (50p) & Examen $\geq 2{,}5$ (25p)

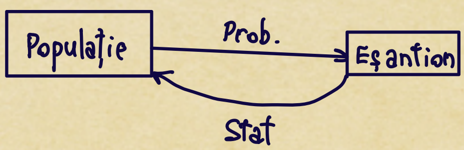
Bonus: Redactarea cursurilor în LateX 1.5p (2 pers)

Utilitate: — AI
— Machine Learning



Ex: Urnă cu bile albe și negre. Proporţia bilelor albe este $p \in (0,1)$ necunoscută.

Problema de probabilităţi:
$p = 17\%$
extragem 10 bile
Care este prob. ca în cele 10 bile să avem 4 albe?



Problema de statistică:
Am extras 10 bile (cu întoarcere)
Obs 4 sunt albe
Ce pot spune despre p?

Câmp de probabilitate, operații cu evenimente

Experiment aleator = șir de acțiuni care conduc la un rezultat necunoscut
(fenomen) înaintea realizării lui

Ω = mulțimea evenimentelor elementare / spațiul stărilor / spațiul probelor

$\Omega = \{H, T\}$ $\qquad$ $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

heads $\quad$ tail

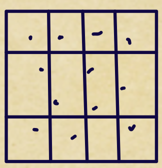
$\omega \in \Omega$

eveniment elementar

Ω

a) mutual exclusivitate

b) colectiv exhaustive



Ω $\quad$ granularitate

Dau cu banul și mă uit la vreme:

1) H și plouă
2) T și plouă
3) H și nu plouă
4) T și nu plouă

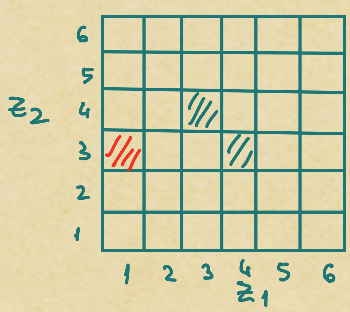
$\Omega = \{H, T\}$ pt că vremea nu influențează experimentul

1) Ex: Arunc cu 3 monede

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \{H, T\}\}$$

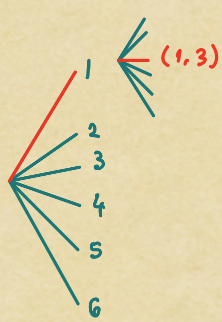
2) Ex: Arunc cu 2 zaruri

$$\Omega = \{(x, y) \mid x, y \in \{1, \dots, 6\}\}$$



(3, 4)

(4, 3)



3) $\underbrace{\Omega = [0, T]}_{R_+}$, $T \geq 0$

4) 

$\Omega = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$

5) 

$\Omega = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{matrix} -a \leq x \leq a \\ -b \leq y \leq b \end{matrix} \;\middle|\; a, b > 0 \right\}$

Def: O submulțime $A \in \Omega$ s.n. eveniment. Spunem că evenimentul A se realizează dacă în urma desfășurării experimentului aleator rezultă $\omega \in A$

Ω 

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

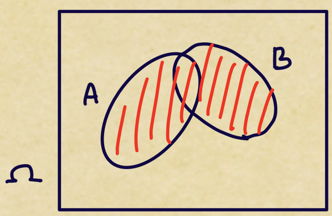
$A = \{4\}$

$A = \{2, 4, 6\}$

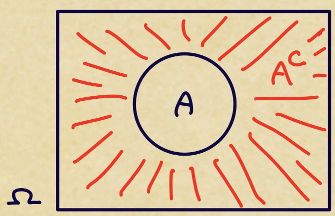
$A = \{2, 3, 5\}$

	Teorema mulțimilor	Teorema probabilităților
Ω	mulțimea Ω	spațiul stărilor / ev. sigur
ω	un element din Ω	evenimentul elementar
ϕ	mulțimea vidă	evenimentul imposibil
A	mulțimea A	evenimentul A
$A^c (C_A, \bar{A})$	compl. lui A în Ω	evenimentul contrar al lui A
$A \cup B$	reuniune	cel puțin unul din ev. A sau B se realizează
$A \cap B$	intersecție	ev. A și ev. B
$A \setminus B$	diferența	A se realizează dar B nu
$A \Delta B$ $(A\setminus B) \cup (B \setminus A)$ $= (A \cup B) \setminus (A \cap B)$	diferența simetrică	sau A sau B se realizează dar nu amândouă

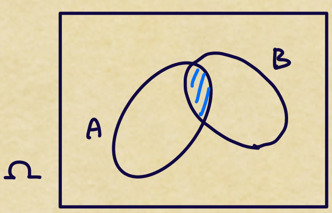
Diagrame Venn



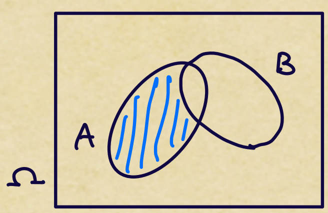
Reuniune



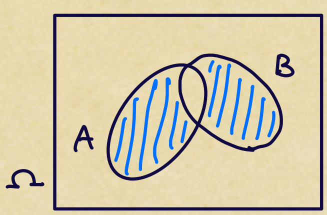
Complementara



intersecție



diferența



diferența simetrică

Def: Mulțimea evenimentelor posibile asociate spațiului stărilor Ω este o submulțime $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ care verifică următoarele proprietăți:

algebră
- a) $\Omega \in \mathcal{F}$ $\qquad\qquad \phi \in \mathcal{F}$
- b) dacă $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
- c) dacă $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$

Ex: Aruncăm cu banul până obținem pt prima oară H

$$\Omega = \{1, \underset{TH}{2}, \underset{TTH}{3}, \dots\} = \mathbb{N}^*$$

A = {am obținut pt prima dată H după un nr par de ori} =

$$= \{2, 4, 6, \dots\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{2i\}$$
ω

c') dacă $(A_n)_n \subset \mathcal{F}$ atunci $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

$\mathcal{F}$ care verifică a) b) și c') s.n. σ-algebră

$\underset{a, b, c'}{(\Omega, \mathcal{F})}$ spațiu probabilizabil (spațiu măsurabil)

exp. aleator $\longrightarrow (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Prop: a) Avem $(\Omega, \mathcal{F})$

Ex: 1) $\Omega = \{H, T\}$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\phi, \{H\}, \{T\}, \{H, T\}\}$

2) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) \underset{\text{izomorfă}}{\simeq} \{0, 1\}^{|\Omega|}$

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$A \to (0, 1, 1, \dots, 0)$

Câmp de probabilitate. Operații cu evenimente

Formule de calcul

exp. aleator $\rightarrow (\Omega, \mathcal{F})$

Ω ↙ sp. stărilor

mulțimea ev. elementare

$\mathcal{F} \hookrightarrow \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ mulțimea ev. posibile

$$\begin{cases} a)\ \Omega \in \mathcal{F} \\ b)\ A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F} \\ c)\ A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F} \\ c')\ (A_n)_n \subset \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{F} \end{cases}$$

a), b), c)] algebră

a), b) + c') $\Rightarrow$ σ-algebră (sigma)

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0,1]$$
$$A \in \mathcal{F} \rightarrow p \in [0,1]$$

Pp. că avem un experiment aleator și un eveniment A de interes. Repetăm experimentul (în condiții similare) de un nr. mare de ori N.

Notăm $N(A)$ - nr de realizări ale lui A.

$\frac{N(A)}{N}$ - frecv. relativă de realizare a lui A

$N(A) \in \{0, \dots N\}$

$\frac{N(A)}{N} \in [0,1]$

$\mathbb{P}(A) \approx \lim_{N\to\infty} \frac{N(A)}{N}$

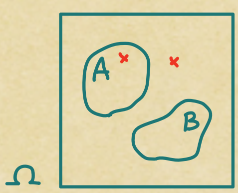
$\mathbb{P}(A) \in [0,1]$

Dacă $A = \Omega \Rightarrow N(A) = N \Rightarrow \frac{N(\Omega)}{N} = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(\Omega) = 1$

$P(A) \in [0,1]$

$\mathbb{P}(\Omega) = 1$

Pp $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B = \emptyset$



$A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B = \emptyset$

$A \cup B \in \mathcal{F}$

$N(A \cup B) = \underbrace{N(A) + N(B)}^{\text{pt că } A,B \text{ disjuncte}}$ $/ : N$

$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ (finit aditivitate)

Def: O funcție $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ care verifică

a) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

b) $(\forall)\,(A_n)_n \subseteq \mathcal{F}$ disjuncte două câte două (σ-aditivitate)

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_n)$$

s.n. măsură de probabilitate pe $(\Omega, \mathcal{F})$ (pe scurt, probabilitate)

Experiment aleator $\to$ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ câmp de probabilitate

Exp: a) Aruncatul cu banul

$\Omega = \{H, T\}$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{H\}, \{T\}, \Omega\}$

$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$

$\mathbb{P}(\Omega) = 1, \quad \mathbb{P}(\emptyset) = 0$

$\mathbb{P}(\{H\}) = p \in [0,1] \Rightarrow \mathbb{P}(\{T\}) = 1 - p$

pt o monedă echilibrată: $p = 1/2$

b) Aruncatul cu zarul

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ $\quad 2^6$ elemente

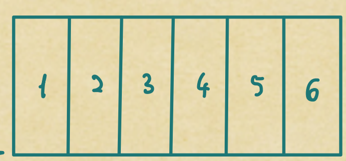
$\{0,1\}^{\Omega} = \{f : \Omega \to \{0,1\}\}$

$\hookrightarrow A^B = \{f : B \to A\}$

$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$

$\mathbb{P}(\Omega) = 1, \quad \mathbb{P}(\emptyset) = 0$

$\mathbb{P}(\{i\}) = p_i \in [0,1], \quad i \in \{1, \dots, 6\}$

Ω


$\Omega = \{1\} \cup \{2\} \cup \dots \cup \{6\}$

Prop: a) $\mathbb{P}(\phi)=0$

$\Omega\cup\phi=\Omega \Rightarrow \mathbb{P}(\Omega\cup\phi)=\mathbb{P}(\Omega)=1$

$\Omega\cap\phi=\phi \qquad \underbrace{\mathbb{P}(\Omega)}_{1}+\mathbb{P}(\phi)=1 \Rightarrow \mathbb{P}(\phi)=0$

(aproape bine)

Riguros:

$A_n=\phi \qquad$ Pp $\mathbb{P}(\phi)>0$

$\bigcup_n A_n=\phi \qquad$ b) $\underbrace{\mathbb{P}(\phi)}=\underbrace{\sum_n \mathbb{P}(\phi)}_{\infty}$ $\Big\}$ contradicție

b) $\mathbb{P}(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i)$, $A_1,\ldots,A_n$ disjuncte 2 câte 2

c) $A\in\mathcal{F} \Rightarrow \mathbb{P}(A^c)=1-\mathbb{P}(A)$

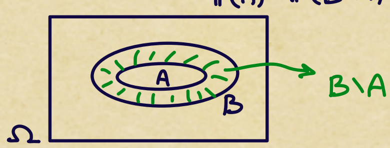
$A\cap A^c=\phi$

$A\cup A^c=\Omega \Rightarrow \mathbb{P}(A\cup A^c)=\mathbb{P}(\Omega)=1$

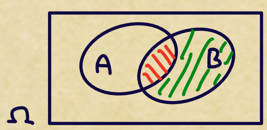
$\qquad\qquad\qquad\qquad \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(A^c)$ (= $\mathbb{P}(A\cup A^c)$)

d) $A\subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A)\le \mathbb{P}(B)$

$\qquad\qquad\qquad \mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B\setminus A)$



e) $A,B\in\mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A\cup B)=?$



$A\cup B = A\cup(B\setminus A)$

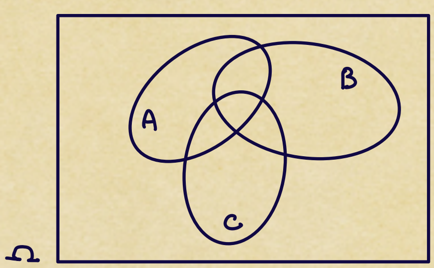
$A\cap(B\setminus A)=\phi$

$\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B\setminus A)$

$=\mathbb{P}(A)+\underbrace{\mathbb{P}(B\setminus(A\cap B))}_{\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)}$

e') $A,B,C \qquad \mathbb{P}(A\cup B\cup C)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(A\cap C)-\mathbb{P}(B\cap C)-\mathbb{P}(A\cap B)+$

$+\mathbb{P}(A\cap B\cap C)$



f) formula lui Poincaré

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$$

$\mathbb{P}(\{H\}) = p \in (0,1)$

$A = \{$ va pica H mai devreme sau mai târziu $\}$

$\mathbb{P}(A) = 1$

$A_n = \{$ vom obține H în n aruncări $\}$

$A = \bigcup_n A_n$

$\bigcup_n A_n = \lim_n A_n$

$\mathbb{P}(\lim_n A_n) = \lim_n \underbrace{\mathbb{P}(A_n)}_{1-(1-p)^n}$

Modelul clasic de probabilitate (Modelul lui Laplace)

Fie $N \geq 1$, $N \in \mathbb{N}$ și considerăm un experiment aleator cu N rezultate posibile

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ (2^N elemente)

$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ $\quad \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{N}$, $i \in \{1, \ldots, N\}$ echirepartiție

Fie $A \in \mathcal{F}$

reuniune finită

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{\omega_i \in A} \{\omega_i\}\Big) = \sum_{\omega_i \in A} \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{N} \sum_{\omega_i \in A} 1 = \frac{|A|}{N} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$$= \frac{\text{nr cazuri favorabile}}{\text{nr cazuri posibile}}$$

$A = \{\omega_1, \omega_7, \omega_9\}$

a) Formula sumei

A, B finite disjuncte $\Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$

oarecare $\Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Principiul includerii-excluderii

$A_1, A_2, \dots, A_n$ finite

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n|$$

Apl: $\varphi(n)$ - nr de nr prime cu $n \leq n$

fct. Euler

$$f(n) : n \prod_{p<n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

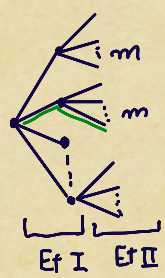
$\uparrow$

Aplicație pt laborator

b) Formula produs

A, B finite $\quad A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

$$|A \times B| = \underset{(a,b)}{|A| \cdot |B|}$$

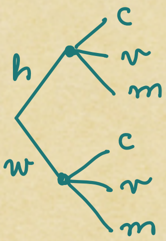


$n \times m$

Ex înghețată

arome: c, v, m - 3

cornet: h, w - 2

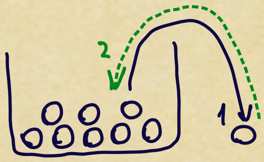


$6 = 2 \times 3$

1) Schema cu revenire (cu întoarcere)

Urnă cu n bile $1 \ldots n$ și efectuăm k-extrageri <u>cu revenire</u>

În câte moduri?



<u>Reformulare</u>: k bile $(1 \ldots k)$ și n urne

$(x_1, \ldots x_k)$

x_i - nr urnei în care am pus bila i

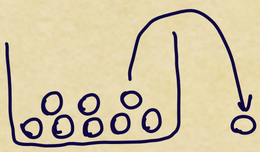
n^k moduri

- nr de șiruri de lungime k cu termeni oarecare din $\{1, \ldots, n\}$

2) Schema de extragere fără revenire (fără întoarcere)

Urnă n bile $1 \ldots n$ și efectuăm k extrageri <u>fără întoarceri</u>

În câte moduri?



<u>Reformulare</u>: nr de șiruri de lungime k cu termeni distincți din $\{1, \ldots, n\}$

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

	ordinea contează	ordinea <u>NU</u> contează
cu revenire	n^k	Exemple
fără revenire	$\frac{n!}{(n-k)!}$	C_n^k

Bose-Einstein

Exp 1) MATE

$\boxed{M, A, T, E}$ — cu revenire $4^4 = 256$

$\boxed{M, A, T, E}$ — fără revenire $4!$

2) Cărți:

- 4 matematică
- 3 Fizică
- 2 Istorie
- 1 Geografie

Vrem să păstrăm grupate cărțile din același domeniu

$4! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!$

în ce ordine punem domeniile

Exp (Problema aniversărilor) n persoane Vrem să vedem care este prob ca cel puțin două să fie născute în aceeași zi

Ipoteze: → 365 zile

→ echirepartiție

→ nu avem gemeni

Câmpul de probabilitate

$$\Omega = \{ (z_1, z_2, \dots z_n) \mid z_i \in \{1, \dots 365\} \}$$

$$|\Omega| = 365^n$$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ → mulțimea ev. posibile

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$$

$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{365^n}$ echirep

A – cel puțin 2 persoane s-au născut în aceeași zi

$$A = \{ (z_1, \dots, z_n) \mid \exists\, i, j,\ i \neq j \text{ a.î. } z_i = z_j \}$$

$\mathbb{P}(A) = ?\quad \frac{|A|}{|\Omega|}$

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \frac{\frac{365!}{(365-n)!}}{365^n}$$

A^c – toate cele n persoane s-au născut în zile diferite

$$\mathbb{P}(A^c) = \frac{|A^c|}{|\Omega|} = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365-n)+1}{365^n} = 1 - \frac{\frac{365!}{(365-n)!}}{365^n}$$

$n = 23$

$\mathbb{P}(A) \simeq 51\%$

Exp Avem n persoane și vrem să formăm comisii de câte k persoane

Reformulare: Nr de submulțimi cu k elem a unei mulțimi cu n elem

Ordinea nu contează!

$$C_n^k \Leftrightarrow \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_k) \rightarrow \frac{n!}{(n-k)!}$$

Exp 1) 52 cărți

câte mâini de 5 cărți

$\binom{52}{5} = C_{52}^5$

2) Câte mâini de 5 cărți conțin 2 Ași, 2 Popi și o Damă

$$C_4^2 \cdot C_4^2 \cdot C_4^1$$

52 cărți de joc
- 4 culori (♥ ♠ ♦ ♣)
- 13 figuri (2, 3, ... J, Q, K, A)

3) La Poker, vrem să determinăm prob. să obținem Full House

FullHouse : $\{Q, Q, 3, 3, 3\}$

$\Omega = \{ \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\} \mid w_i \in$ cărților de joc$\}$

$|\Omega| = C_{52}^5$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$, $P(\{w_1, \dots, w_5\})$ echirep $= \frac{1}{C_{52}^5}$

A = ev. prin care am obținut FullHouse

$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

$|A| =$ putem alege figura pt pereche în $\binom{13}{1}$ iar culoarea în $\binom{4}{2}$ ori

iar pt cele 3 cărți avem $\binom{12}{1}$ moduri de alegere a figurii și $\binom{4}{3}$ moduri de alegere a culorii

$|A| = \binom{13}{1}\binom{4}{2}\binom{12}{1}\binom{4}{3}$

4) O pereche

B - ev. prin care avem o pereche

$\binom{13}{1}\binom{4}{2}\binom{12}{3}\binom{4}{1}$

Exp: Problema lui Newton - Pepys

a) Cel puțin un 6 apare atunci când aruncăm 6 zaruri

b) Cel puțin 2 valori de 6 atunci când aruncăm 12 zaruri

c) Cel puțin 3 valori de 6 atunci când aruncăm 18 zaruri

a) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^6$

A - ev de interes

$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \frac{5^6}{6^6} \approx 0{,}66$

b) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^{12}$

B - cel puțin 2 val de 6 în 12 zaruri

$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B^c)$

$\mathbb{P}(B^c) = \mathbb{P}(\underbrace{\text{nicio valoare de 6}}\ \underset{\cup}{\text{sau}}\ \underbrace{\text{exact o valoare de 6}})$

$= \mathbb{P}(\text{nicio valoare de 6}) + \mathbb{P}(\text{exact o valoare de 6}) =$

$= \frac{5^{12}}{6^{12}} + \frac{C_{12}^1}{6^{12}}$

c) C - cel puțin 3 val de 6 în 18 zaruri

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^{18}$

$\mathbb{P}(C) = 1 - \mathbb{P}(C^c)$

$\rightarrow$ niciuna sau exact 1 sau exact 2

$\frac{5^{18}}{6^{18}}$ $\quad C_{18}^1 \cdot \frac{5^{17}}{6^{18}}$ $\quad C_{18}^2 \cdot \frac{5^{16}}{6^{18}}$

Partiții - coef. multinomial

Avem o mulțime cu n elem și fie $n_1, n_2, \dots, n_K \in \mathbb{N}$ a.î. $n_1 + n_2 + \dots + n_K = n$

Considerăm o partiție cu K submulțimi a.î. submulțimea i să aibă n_i elemente

$K=2$ $\quad n_1 + n_2 = n$

$C_n^{n_1}$

Echivalent cu: mulțimea șirurilor de lungime n
cu n_1 elem de tip 1
cu n_2 elem de tip 2
⋮
n_K elem de tip K

$$\underbrace{\binom{n}{n_1}}_{A_1} \cdot \underbrace{\binom{n-n_1}{n_2}}_{A_2} \cdot \underbrace{\binom{n-n_1-n_2}{n_3}}_{A_3} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\binom{n-n_1-n_2-\ldots-n_{K-1}}{n_K}}_{A_K}$$

$$= \frac{n!}{n_1!\cancel{(n-n_1)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-n_1)!}}{n_2!\cancel{(n-n_1-n_2)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-n_1-n_2)!}}{n_3!\cancel{(n-n_1-n_2-n_3)!}} \cdot \ldots \cdot \frac{\cancel{(n-n_1-n_2-\ldots-n_{K-1})}}{n_K!(n-n_1-n_2-\ldots-n_K)!} =$$

$$= \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_K!} = \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_K}$$

Ex: 1) MATEMATICA

M → 2
A → 3
T → 2
E → 1
I → 1
C → 1

$$\binom{10}{2,3,2,1,1,1}$$

2) 4 băieți și 12 fete

Prof. formează în mod aleator 4 subgrupe de câte 4 studenți

Care este probabilitatea ca în fiecare subgrupă să fie 1 băiat?

$$\binom{16}{4,4,4,4} = \frac{16!}{4! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 4!}$$

$$\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{\binom{16}{4,4,4,4}} \text{ echirep.}$$

$$\frac{4! \cdot \binom{12}{3,3,3,3}}{\binom{16}{4,4,4,4}}$$

Extragere cu revenire & ordinea nu contează

În câte moduri putem plasa k bile (care nu se disting între ele) în n urne

$n-1$ pereți

$n = 6$

$k = 12$

$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$

$x_i \in \mathbb{N}$

$$\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$$

<u>Apl</u>: Problema de

n plicuri

n scrisori

Prob ca cel puțin o scrisoare să fi ajuns la destinatarul de drept

$\Omega = S_n = \{\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} \mid \sigma \text{ bij}\}$ $\quad |\Omega| = n!$ $\quad \mathbb{P}$ echiprob

$A = \{\sigma \in S_n \mid \exists\ i \in \{1, \ldots, n\} \text{ a.î. } \sigma(i) = i\}$ $\quad n \to \infty \quad 1 - \frac{1}{e}$

Fie A_j - ev prin care destinatarul j a primit scrisoarea destinată lui

$= \{\sigma \in S_n \mid \sigma(j) = j\}$ $\quad A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$$

F lui Poincaré

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{|A_i|}{|\Omega|} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \frac{|A_i \cap A_j|}{n!} = \frac{(n-2)!}{n!}$$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e}$$

$$\xrightarrow{n \to \infty} 1 - \frac{1}{e}$$

Probabilități condiționale

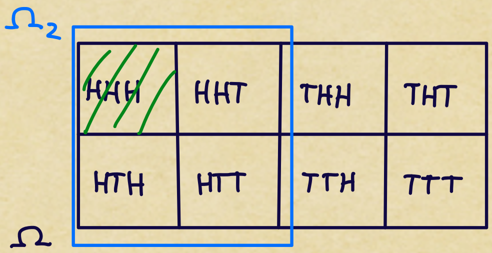
Exp(1) Aruncăm o monedă de 3 ori

a) Care este prob să obținem HHH?

$\Omega = \{H, T\}^3$

$A = \{HHH\}$

$\mathbb{P}(A) = 1/8$



b) Știm că la prima aruncare am obținut H

$\Omega_2 = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}$

$1/4 = \mathbb{P}(A \mid B)$

A → ev. de interes

$\mid$ → știind că

B → ev. care s-a realizat

B - ev. prin care la prima aruncare am obținut H

$\mathbb{P}(A|B)$ - prob. realizării lui A știind că B s-a realizat

prob condiționată a lui A la B

Din perspectivă frecvenționistă: Avem un experiment aleator pe care îl repetăm de un nr N de ori.

Ne interesează ev. A și B.

$$\frac{N(A\cap B)}{N(B)} = \frac{\frac{N(A\cap B)}{N}}{\frac{N(B)}{N}} \simeq \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Def: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un câmp de prob, $A, B \in \mathcal{F}$ cu $\mathbb{P}(B) > 0$. Atunci prob cond a lui A la ev. B, notată $\mathbb{P}(A|B)$, este definită prin:

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}}$$

$\mathbb{P}(A)$ – prior sau probabilitate a priori

$\mathbb{P}(A|B)$ – posterior sau probabilitate a posteriori

Exp (continuare):

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(\overbrace{A \cap B}^{\{HHH\}})}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{4}{8}} = \frac{1}{4}$$

Exp 2: Avem un pachet de cărți de joc și extragem aleator 2 cărți succesiv și fără întoarcere.

52 cărți

26 ♥/♦

13 ♥

A - "prima carte este de inimă roșie"

B - "a doua carte este de inimă roșie"

C - "a doua carte este de culoare roșie"

Vrem să calculăm:

$\mathbb{P}(B|A)$, $\mathbb{P}(C|A)$, $\mathbb{P}(A|B)$, $\mathbb{P}(A|C)$

Sol: • $\mathbb{P}(B|A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{\frac{\cancel{13} \cdot 12}{52 \cdot 51}}{\frac{\cancel{13}}{\cancel{52}}} = \dfrac{12}{51}$

$\mathbb{P}(A) = \dfrac{13}{52} = \dfrac{1}{4}$

$\mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{13 \cdot 12}{52 \cdot 51}$

• $\mathbb{P}(C|A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{25}{51}$

$\mathbb{P}(A \cap C) = \dfrac{13 \cdot 25}{52 \cdot 51}$

• $\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{12}{51} = \mathbb{P}(B|A)$

$\mathbb{P}(B) \to \frac{1}{4}$

$\mathbb{P}(C) = \dfrac{26}{52}$

• $\mathbb{P}(A|C) = \dfrac{\mathbb{P}(A\cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \dfrac{\frac{13\cdot 25}{52\cdot 51}}{\frac{26}{52}} = \dfrac{55}{102} \neq \mathbb{P}(C|A)$

Exp 3: O familie are 2 copii

a) Care este prob ca cei doi copii să fie de sex F știind că cel mai în vârstă este F?

b) —— " —— cel puțin unul dintre ei este F?

Ipoteze:
- $\{F, B\}$
- $\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(B) = 1/2$
- sexul unui copil nu este influențat de sexul celuilalt copil

$\Omega = \{BB, BF, FB, FF\}$ $\quad A = \{FF\}$

(B,B)

a) $B = \{\text{cel mai în vârstă este F}\} = \{FB, FF\}$

$\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \dfrac{1}{2}$

b) $C = \{\text{cel puțin unul este de sex F}\} = \{FB, BF, FF\}$

$\mathbb{P}(A|C) = \dfrac{\mathbb{P}(A\cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{3}$

Fată născută iarna

I, P, V, T $\quad \Omega = \{FI, FP, FV, FT, BI, BP, BV, BT\}^2$ $\quad$ 64 elem

$\mathbb{P}(\text{cei 2 copii să fie } F | FI)$

$\mathbb{P}(FI) = \dfrac{15}{64}$

FI, $\underline{\ \ }$ ← 8

7 → $\underline{\ \ }$, FI

{ambii F} $\cap$ {FI}

FI, $\overset{4}{\swarrow}$ __ $\quad \frac{7}{64}$

$3 \rightarrow$ __, FI

$$\frac{\frac{7}{64}}{\frac{15}{64}} = \frac{7}{15}$$

<u>Exp 4</u>: Dacă o aeronavă apare în zona de interes scanată de un radar atunci se declanșează o alarmă cu prob. 99%. Dacă nu avem aeronavă atunci alarma (falsă) se declanșează 10%.

Șansa să treacă o aeronavă prin zona de interes = 5%

a) Care este prob ca în zona de interes să nu avem avion și să nu avem alarmă?

b) Care este prob să avem avion dar să nu fie detectat?

A = { să avem avion în zona de interes }

B = { se declanșează alarma }

a) $\mathbb{P}(A^c \cap B^c)$

b) $\mathbb{P}(A \cap B^c)$

<u>Ipoteză</u>: $\mathbb{P}(A) = 0.05$

$\mathbb{P}(B/A) = 0.99$

$\mathbb{P}(B|A^c) = 0.1$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B)}$$

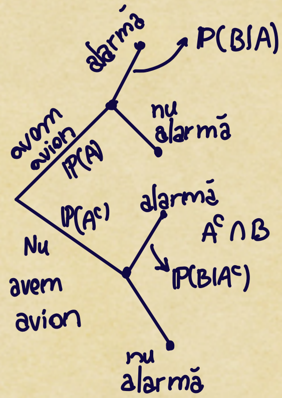
$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A)$$

a) $\mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(B|A^c)\mathbb{P}(A^c)$

$= \mathbb{P}(B|A^c)(1-\mathbb{P}(A))$

$= 0.1 \times 0.95$



b) $\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(B^c|A)\,\mathbb{P}(A)$

$= (1-\mathbb{P}(B|A))\mathbb{P}(A)$

$= 0.01 \times 0.05$

(P) (Formula produsului) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$

Atunci

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2|A_1) \times \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \times \dots \times \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

<u>Formula prob. totale</u>

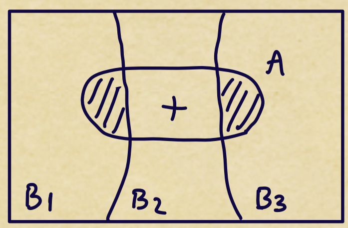
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. o partiție a lui Ω, $\{B_1, B_2, B_3\}$ și $A \in \mathcal{F}$

$$\begin{cases} B_1, B_2, B_3 \subseteq \Omega \\ B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega \\ B_1 \cap B_2 = \phi \\ B_2 \cap B_3 = \phi \\ B_1 \cap B_3 = \phi \end{cases}$$

$A = A \cap \Omega$

$= A \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3)$

$= (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3)$



$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B_1) + \mathbb{P}(A \cap B_2) + \mathbb{P}(A \cap B_3) =$

$= \mathbb{P}(A|B_1)\,\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3)$

(P) Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un c.p. și $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathcal{F}$ o partiție pe Ω cu $\mathbb{P}(B_i) > 0$, $i \in \{1, \dots, n\}$

Dacă $A \in \mathcal{F}$ atunci:

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\,\mathbb{P}(B_i)}$$

$n=2$

$A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(B) \in (0,1)$

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c) \times \mathbb{P}(B^c)$

Exp (continuare)

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^c)\,\mathbb{P}(A^c) =$$
$$= \frac{12}{51} \times \frac{13}{52} + \frac{13}{51} \times \left(1 - \frac{13}{52}\right) = \frac{1}{4}$$

Formula lui Bayes

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. $A, B \in \mathcal{F}$ cu $\mathbb{P}(A) > 0$, $\mathbb{P}(B) > 0$

a) $$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)}$$

b) $A \in \mathcal{F}$, $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathcal{F}$ o prt a lui Ω, $\mathbb{P}(B_i) > 0$

$$\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i)\,\mathbb{P}(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_j)\,\mathbb{P}(B_j)}$$

Exp: Să presupunem că prevalența unei boli în populație este 1%.
Pp că efectuăm un test de detecție cu o acuratețe de 95%.

acuratețe – senzitivitatea și specificitatea testului

$\mathbb{P}(T|D)$ = Sensitivitate = prob ca testul să fie + știind că pacientul este infectat (true pozitive)

$\mathbb{P}(T^c|D^c)$ = specificitate = prob ca testul să fie – știind că pacientul nu este infectat (true negative)

D – pacientul este infectat
T – testul este pozitiv

false positive = $\mathbb{P}(T|D^c)$
false negative = $\mathbb{P}(T^c|D)$

Pp că am efectuat testul și a ieșit pozitiv. Care este prob. să avem virusul știind că testul este +?

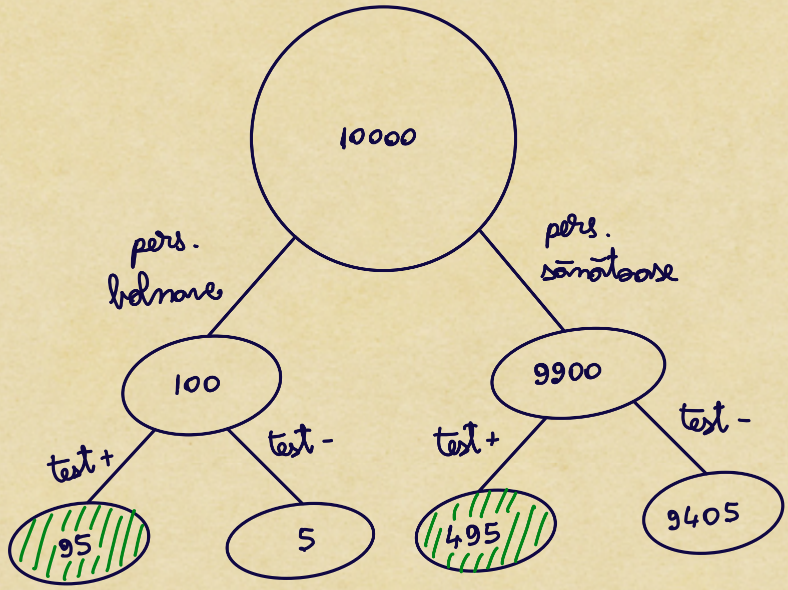
$\mathbb{P}(D|T) = ?$ → Formula lui Bayes

$$\mathbb{P}(D|T) = \frac{\mathbb{P}(T|D)\,\mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(T)} \overset{\text{știm}}{=} \frac{\mathbb{P}(T|D)\;\mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(T|D)\,\mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(T|D^c)\,\underbrace{\mathbb{P}(D^c)}_{1-\mathbb{P}(D)}} =$$

$$\mathbb{P}(T|D^c) = 1 - \mathbb{P}(T^c|D^c) = 0.05$$

$$= \frac{0.95 \cdot 0.01}{0.95 \cdot 0.01 + 0.05 \cdot 0.99} = \frac{0.0095}{0.0095 + 0.0495} = \frac{0.0095}{0.0590} = 16{,}1\%$$

$n = 10000$



$$\frac{95}{95+495} \approx 16{,}1$$

(P) Probabilitatea condiționată este o probabilitate

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. și $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) > 0$

def $Q(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot|A)$ $\quad Q(B) = \mathbb{P}(B|A)$

$(A, \mathcal{F} \cap A)$ $\begin{cases} Q(A) = 1 \\ (A_n)_n \subset \mathcal{F} \cap A \text{ disjuncte 2 câte 2} \\ \quad Q(\bigcup_n A_n) = \sum Q(A_n) \end{cases}$

$$\mathbb{P}(A|A) = 1 = \frac{\mathbb{P}(A \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = 1$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_n A_n \mid A\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_n A_n \cap A\right)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\sum \mathbb{P}(A_n \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$

$$= \sum Q(A_n)$$

<u>Exp</u>: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p.

$A, B, C \in \mathcal{F}$ $\quad$ $\mathbb{P}(A \cap B) > 0$

$\mathbb{P}(A \cap C) > 0$

$\mathbb{P}(B \cap C) > 0$

$\mathbb{P}(A \mid B, C)$ $\quad$ $\dfrac{\mathbb{P}(B \mid A, C)\, \mathbb{P}(A \mid C)}{\mathbb{P}(B \mid C)}$

$B \cap C$

$Q(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \mid C)$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) > 0$

$Q(B) = \mathbb{P}(B|A)$, $\forall B \in \mathcal{F} \cap A = \{F \cap A \mid F \in \mathcal{F}\}$

↳ este prob.

Formula lui Bayes $Q(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot|C)$

$$Q(A|B) = \frac{Q(B|A) \cdot Q(A)}{Q(B)}$$

$$Q(A|B) = \mathbb{P}(A|B,C)$$

$$\mathbb{P}(A|\overset{B\cap C}{B,C}) = \frac{\mathbb{P}(B|A,C) \cdot \mathbb{P}(A|C)}{\mathbb{P}(B|C)}$$

Exp: Pp că avem 2 monede < una echilibrată (prob H = 1/2) / una trucată (prob H = 3/4)

Șansa să alegem oricare dintre cele două monede este 1/2

Obținem în urma celor 3 aruncări HHH

a) Având această informație care este prob să fi ales moneda echilibrată?

b) Pp că aruncăm a 4-a oară. Care este prob să fi obținut tot H?

a) A - ev. prin care în primele 3 aruncări am obținut HHH

B - ev. prin care am ales moneda echilibrată

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\,\mathbb{P}(B^c)} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{3}{2}\right)^3}$$

b) C - ev prin care la a 4-a aruncare am obținut H

$\mathbb{P}(C|A) = ?$

Dacă notăm $Q(C) = \mathbb{P}(C|A)$

Formula prob. totale: $Q(C) = Q(C|B)\,Q(B) + Q(C|B^c)\,Q(B^c) = \ldots$

$$\left.\begin{array}{l} Q(B) = \mathbb{P}(B|A) \\ Q(B^c) = 1 - Q(B) \\ Q(C|B) = 1/2 \\ Q(C|B^c) = 3/4 \end{array}\right\}$$

Independență

Două evenimente sunt independente dacă realizarea unuia nu aduce niciun fel de informație suplimentară despre realizarea celuilalt.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $A, B \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

Def: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un c.p. și $A, B \in \mathcal{F}$.

Spunem că A și B sunt indep și notăm $A \perp\!\!\!\perp B$ dacă $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$

Ex: Dacă $A \perp\!\!\!\perp B$ at. $A^c \perp\!\!\!\perp B$

$A \perp\!\!\!\perp B^c$

$A^c \perp\!\!\!\perp B^c$

Exp Aruncăm cu banul de 2 ori

A_1 - ev prin care la prima aruncare am obținut H

A_2 - ———— " ———— a 2-a ———— " ————

$\Omega = \{H, T\}^2$

$A_1 = \{(H,H), (H,T)\}$

$A_2 = \{(T,H), (H,H)\}$

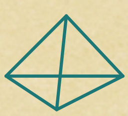
$A_1 \cap A_2 = \{(H,H)\}$

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) &= 1/4 \\ \mathbb{P}(A_1) &= 2/4 = 1/2 \\ \mathbb{P}(A_2) &= 2/4 = 1/2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2)$$

$A_1 \perp\!\!\!\perp A_2$

Exp: Zar cu 4 fețe. Aruncăm de 4 ori

$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}^2$



$A = \{$primul zar cu fața 1$\} = \{(1, x) \mid x \in \{1,2,3,4\}\}$ $\quad \mathbb{P}(A) = 1/4$

$B = \{$suma punctelor este 5$\} = \{(1,4), (4,1), (2,3), (3,2)\}$ $\quad \mathbb{P}(A) = 1/4$

$C = \{$minimul este 2$\}$ $\quad A \cap B = \{(1,4)\}$ $\quad \mathbb{P}(A \cap B) = 1/16$

$D = \{$maximul este 2

$\mathbb{P}(C) = 5/16$

$\mathbb{P}(D) = 3/16$

$\mathbb{P}(C \cap D) = 1/16$

<u>Def</u>: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. și $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$. Spunem că $A_1 \dots A_n$ sunt indep (mutual)

dacă $\mathbb{P}(\bigcap_{i \in I} A) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$, $\forall I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$

<u>Obs</u> A_1, A_2, A_3 sunt indep $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2)$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_3)$$

$$\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3)$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3)$$

<u>Exp</u>: Aruncăm 2 monede

$\mathbb{P}(A_1) = 1/2 \leftarrow \{(H,H), (H,T)\} = A_1$ - prima H $\qquad A_1 \perp\!\!\!\perp A_2$

$\mathbb{P}(A_2) = 1/2 \leftarrow \{(H,H), (T,H)\} = A_2$ - a doua H

$\mathbb{P}(A_3) = 1/2 \leftarrow \{(T,H), (H,T)\} = A_3$ - cele 2 sunt diferite

$$\underset{(H,H)}{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)} = \underset{(H,T)}{\mathbb{P}(A_1 \cap A_3)} = \underset{(T,H)}{\mathbb{P}(A_2 \cap A_3)} = 1/4$$

A_1, A_2, A_3 sunt indep 2 câte 2

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0 \neq 1/8 = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3)$

A_1, A_2, A_3 <u>nu</u> sunt indep

<u>Def</u>: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. și $A, B, C \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(C) > 0$

Spunem că A și B sunt indep. condiționat la C dacă

$$\mathbb{P}(A \cap B \mid C) = \mathbb{P}(A \mid C) \times \mathbb{P}(B \mid C)$$

<u>Obs</u>: $Q(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \mid C) \Rightarrow Q(A \cap B) = Q(A) \times Q(B)$

Exp: D - {o persoană are o afecțiune} $\qquad \mathbb{P}(D) = 1\%$

T - {testul a ieșit pozitiv}

acuratețea (sensitivitatea/specificitatea) = 95%

$$\mathbb{P}(T|D) = \mathbb{P}(T^c|D^c) = 95\%$$

$$\mathbb{P}(D|T) \simeq 15\%$$

Să presupunem că persoana mai efectuează un test (pp că rezultatele celor 2 teste sunt independente în raport cu statusul bolii) și testul este tot +. Care este prob. să aibă COVID?

T_1 - primul test +

T_2 - al 2-lea test +

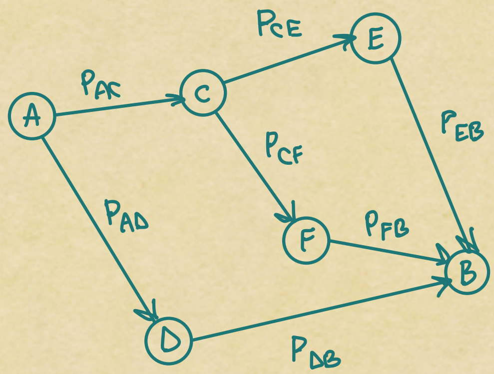
$$\mathbb{P}(T_1 \cap T_2 | D) = \underbrace{\mathbb{P}(T_1|D)}^{0.95} \times \overbrace{\mathbb{P}(T_2|D)}^{0.95}$$

$$\mathbb{P}(T_1 \cap T_2 | D^c) = \underbrace{\mathbb{P}(T_1|D^c)}_{0.05} \times \underbrace{\mathbb{P}(T_2|D^c)}_{0.05}$$

$$\mathbb{P}(D|T_1 \cap T_2) = \frac{\mathbb{P}(T_1 \cap T_2 | D)\,\mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(T_1 \cap T_2)}$$

$$\mathbb{P}(T_1 \cap T_2) = \mathbb{P}(T_1 \cap T_2 | D^c)\mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(T_1 \cap T_2 | D^c)\underbrace{\mathbb{P}(D^c)}_{0.99} \simeq 0.78$$

Exp:



$$A \xrightarrow{P_{AB}} B$$

Care este prob să transmitem mesaj de la A la B?

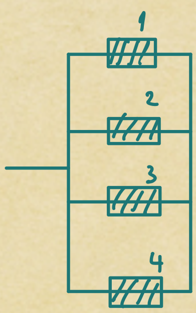
a) Subsistem serie

$$P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n$$

$$A \xrightarrow{P_{AB}} B \xrightarrow{P_{BC}} C$$

$$P_{AC} = P_{AB} \times P_{BC}$$

b) Subsistem paralel



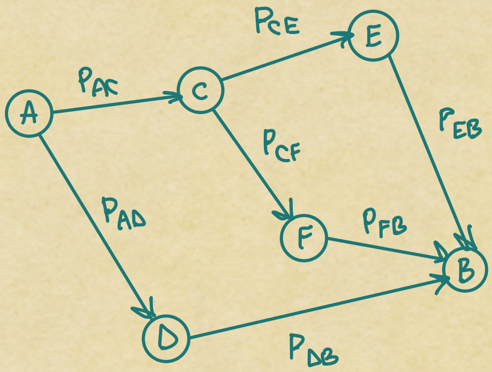
P(transmit mesaj sist paralel) =

$= 1 - P$(nu transmit mesaj sist paralel) =

$= 1 - p$(eșec în nod 1, nod 2, ...) =

$= 1 - p$(eșec nod 1) $\times \ldots \times p$(eșec nod n) =

$= 1 - (1-p_1) \times (1-p_2) \times \ldots \times (1-p_n)$



$A \xrightarrow{p_{AB}} B$

Care este prob să transmitem mesaj de la A la B?

$\mathbb{P}(A \to B) = ?$

$\mathbb{P}(C \to B) = 1 - (1 - \mathbb{P}(C \to E, E \to B))(1 - \mathbb{P}(C \to F, F \to B)) =$

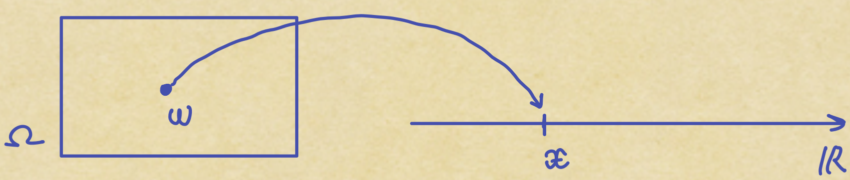
$= 1 - (1 - p_{CE} \times p_{EB})(1 - p_{CF} \times p_{FB})$

$P(A \to B) = 1 - (1 - p_{AC} \times p_{CB})(1 - p_{AD} \times p_{DB})$

Variabile aleatoare

<u>Def</u>: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un c.p. și $X: \Omega \to \mathbb{R}$ o funcție. Spunem că X este o variabilă aleatoare, v.a., dacă mulțimea

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \le x\} \in \mathcal{F}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



<u>Exp</u> Aruncăm 2 zaruri

Def X = suma punctelor de pe cele 2 zaruri

$3 \quad 5 \longrightarrow 8$

$X(\underbrace{(3,5)}_{\omega}) = 8$

Exp: Aruncăm de 2 ori cu banul

$X =$ nr de H din cele 2 aruncări

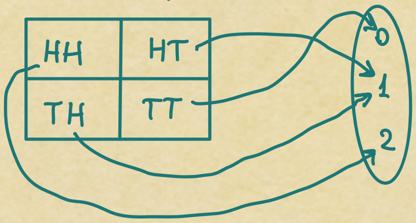
$\Omega = \{\underbrace{HH}_{2}, \underbrace{HT}_{1}, \underbrace{TH}_{1}, \underbrace{TT}_{0}\}$

$x \subseteq \mathbb{R}$

Obs: $\{X \leq x\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}$

$\{X \in A\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$

$= X^{-1}(A)$



$X^{-1}(\{0\}) = \{TT\}$

$X^{-1}(\{1\}) = \{HT, TH\}$

$X^{-1}(\{2\}) = \{HH\}$

$\{X \leq x\} \in \mathcal{F}_{P(\Omega)}$

Dacă $x < 0$ $\{X < x\} = \emptyset$

$x \in [0, 1)$ $\{X \leq x\} = \{TT\}$

Dacă $x \in [1, 2)$

$\{X \leq x\} = \{X = 0$ sau $X = 1\} = \{X = 0\} \cup \{X = 1\}$

$= \{TT, TH, HT\}$

$x \in [2, +\infty)$

$\{X \leq x\} = \Omega$

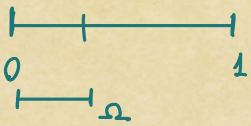
Not: Variabilele aleatoare se notează cu litere mari

$X, Y, Z, T, W, \ldots$

$X \to$ discretă: $X(\Omega)$ este cel mult numărabilă

$X \to$ continuă

Exp $[0,1)$ luăm un punct la întâmplare



a^3

$$\operatorname{sgn}(a) = \begin{cases} -1, & a<0 \\ 0, & a=0 \\ 1, & a>0 \end{cases}$$

Vrem să calculăm $\mathbb{P}(X \in A)$ unde $A \subseteq \mathbb{R}$

Def: (Repartiția unei v.a.)

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. și $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o v.a.

Se numește repartiția lui X (distribuția) probabilitatea pe $\mathbb{R}$ definită prin $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$

$= (\mathbb{P} \circ X^{-1})(A)$, $\forall A$ interval din $\mathbb{R}$

(a, b)

$(-\infty, x]$

$$\boxed{\mathbb{P}_X = \mathbb{P} \circ X^{-1}}$$

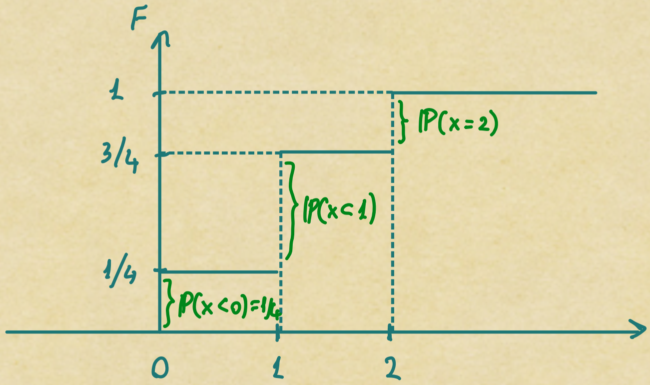
Def: (Funcția de repartiție) Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p., $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o v.a. Definim funcția de rep. a lui X $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ prin $F(x) = \mathbb{P}(X \le x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Obs: $A = (-\infty, x]$

$\mathbb{P}_X(A) = F(x)$

Exp: Aruncăm de 2 ori cu banul și $X = \#$ de H, în cele 2 aruncări

$$F(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/4, & x \in [0,1) \\ 3/4, & x \in [1,2) \\ 1, & x \in [2, \infty) \end{cases}$$



Propr funcții de rep.

a) F este crescătoare

$x < y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$

b) F este continuă la dreapta

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

$P(X = x) = P(X \leq x) - P(X < x)$

$= F(x) - F(x-)$

$\hookrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} F(x)$

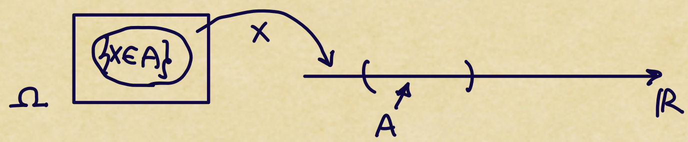
Variabile aleatoare
Repartiția unei v.a.
Funcția de repartiție

v.a. $\begin{cases} X : \Omega \to \mathbb{R} \\ \{X \le x\} \in \mathcal{F},\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\boxed{\mathbb{P}_X(\cdot) = (\mathbb{P} \circ X^{-1})(\cdot)}$ repartiția v.a. X

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, X v.a. și $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)\ \forall A \in \mathbb{R}$ interval

$\{X \in A\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$



$= X^{-1}(A)$

Funcția de repartiție (fct. cumulativă – CDF)

$F : \mathbb{R} \to [0,1)$

$F(x) = \mathbb{P}_X((-\infty, x])$

$= \mathbb{P}(X \le x)\ \forall x \in \mathbb{R}$

Exp: Aruncăm de 3 ori cu banul

X = nr de capete în cele 3 aruncări

Care este fct. de rep a lui X?

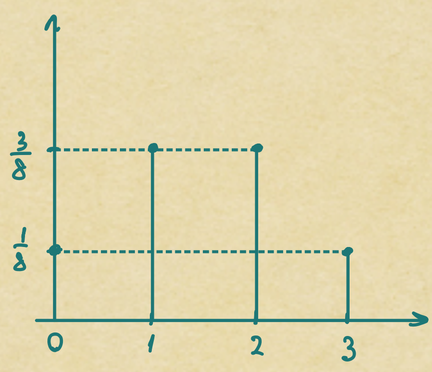
$\Omega = \{H, T\}^3 \quad X \in \{0, 1, 2, 3\}$

$\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(\{TTT\}) = \frac{1}{8}$

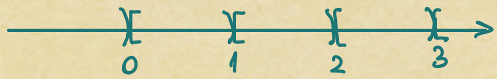
$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(\{HTT, THT, TTH\}) = \frac{3}{8}$

$\mathbb{P}(X=2) = \frac{3}{8}$

$\mathbb{P}(X=3) = \frac{1}{8}$



$F(x) = ?$



Dacă $0 \le x < 1 \Rightarrow \{X \le x\} = \{X = 0\}$

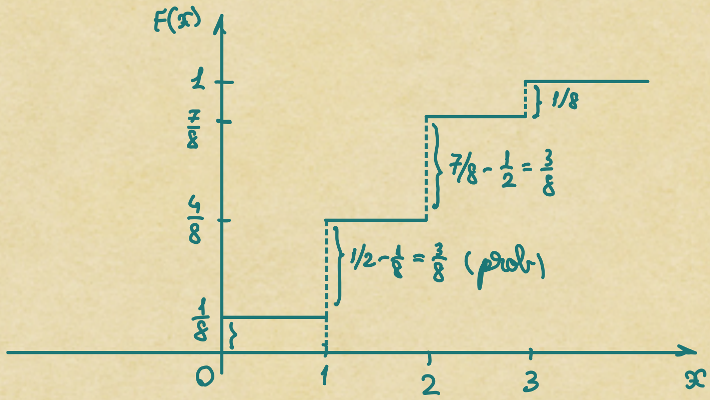
$1 \le x < 2 \Rightarrow \{X \le x\} = \{X=0\} \cup \{X=1\}$

$2 \le x < 3 = \{X \le x\} =$

$= \{X=0\} \cup \{X=1\} \cup \{X=2\}$

$x \ge 3 \Rightarrow \{X \le x\} = \Omega$

$$F(x) = \begin{cases} 0 = \mathbb{P}(\emptyset) & , x < 0 \\ 1/8 & , 0 \le x < 1 \\ 1/8 + 3/8 = 4/8 & , 1 \le x < 2 \\ 1/8 + 3/8 + 3/8 = 7/8 & , 2 \le x < 3 \\ 1 & , x \ge 3 \end{cases}$$



<u>Prop. funcției de repartiție</u>

a) F crescătoare $(\forall\, x < y \Rightarrow F(x) < F(y))$

b) F este cont la dreapta $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} F(x) = F(x_0) \quad \forall\, x_0 \in \mathbb{R}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

În plus,

d) $\mathbb{P}(X > x) = 1 - \mathbb{P}(X \le x) = 1 - F(x)$

e) $\mathbb{P}(X < x_0) = \mathbb{P}(X \le x) - \mathbb{P}(X = x)$

$= \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} F(x) = F(x_0 -)$ (limita la stg)

f) $\mathbb{P}(X=x) = F(x) - F(x-)$

Variabile aleatoare discrete

$X:\Omega\to\mathbb{R}$ v.a. $\quad X(\Omega)$ = mulțimea val lui X

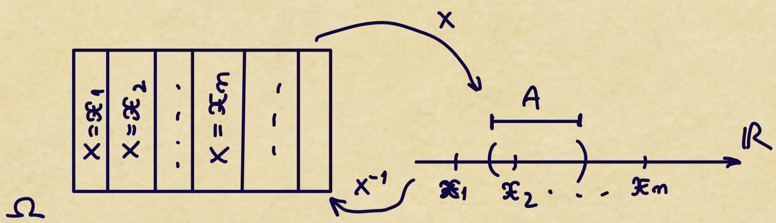
$X(\Omega)$ → cel mult numărabilă $\Rightarrow X$ este v.a. discretă (= finită sau numărabilă)

$X(\Omega)$ → infinită nenumărabilă $\Rightarrow X$ este cont

X v.a. discretă, $X:\Omega\to\mathbb{R}$ $\quad X(\Omega)$ - cel mult numărabilă

$A\in\mathbb{R}$ $\quad \mathbb{P}(X\in A) =$

$\Omega = \bigcup_{n\geq 1}\{X = x_n\}$



$\mathbb{P}(X\in A) = \mathbb{P}\Big(X\in \bigcup_{x\in A\cap X(\Omega)}\{x\}\Big) = \sum_{x\in A\cap X(\Omega)} P(X=x)$ $\quad (x_n)_n,\ x_1 = n \quad (x_n)_n,\ x_n = \frac{1}{2^n}$

Def: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un c.p. și $X:\Omega\to\mathbb{R}$ o v.a. discretă. Se numește funcția de masă asociată $f(x) = \mathbb{P}(X=x)$, $\forall x\in X(\Omega)$, $f: X(\Omega)\to[0,1]$ (PMF)

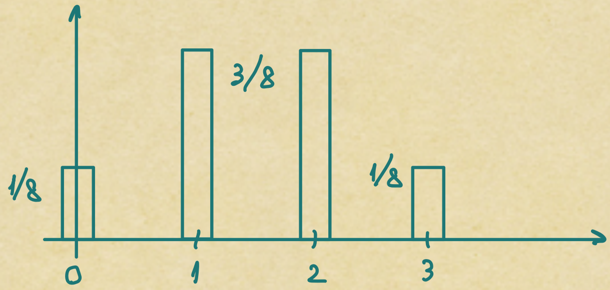
Obs: Se mai folosește și notația $p(x)$ sau $p_X(x)$

$A_i = \{X = x_i\}$

Exp: Aruncăm de 3 ori cu banul, X = nr H în cele 3 aruncări. Determinați fct de masă a lui X

$f(x) = \mathbb{P}(X=x)$, $\forall x\in\{0,1,2,3\} = X(\Omega)$

$f(0) = 1/8$; $f(1) = 3/8$; $f(2) = 3/8$; $f(3) = 1/8$



<u>Obs</u>: $X \in \{x_1, x_2 \dots x_n\}$

$\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$ $\qquad X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$

Prop funcției de masă

a) $f(x) = \mathbb{P}(X = x) \geq 0$ (pozitivă)

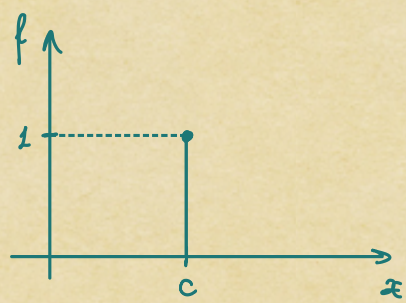
b) $\left.\begin{array}{l} \mathbb{P}(\Omega) = 1 \\ \Omega = \bigcup\limits_{x \in X(\Omega)} \{X = x\} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{x \in X(\Omega)} \{X = x\}\Big) = 1 \Rightarrow \boxed{\sum\limits_{x \in X(\Omega)} f(x) = 1}$ masa totală = 1

<u>Obs</u> (Legătura dintre fct de masă și fct de rep)

$$\begin{cases} F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum\limits_{\substack{y \leq x \\ y \in X(\Omega)}} f(y) \\ f(x) = F(x) - F(x-) \end{cases}$$

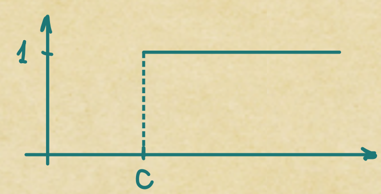
Exemple de v.a. discrete

① v.a. $X = c$ (constantă)



$$f(x) = \mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} 1 & , x = c \\ 0 & , x \neq c \end{cases}$$

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0 & , x < c \\ 1 & , x \geq c \end{cases}$$



Dacă $x < c \Rightarrow \{X \le x\} = \{c \le x\} = \emptyset$

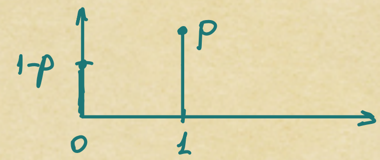
$$\{X \le x\} = \{\omega \mid X(\omega) \le x\}$$

Not: $X \underset{p}{\sim} Ber(p)$ (sau $B(p)$)
este repartizată ca

② Variabile aleatoare de tip Bernoulli

Avem un experiment și un eveniment A de interes. Pp. $\mathbb{P}(A) = p \in [0,1]$

$$X : \Omega \to \mathbb{R}, \quad X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$



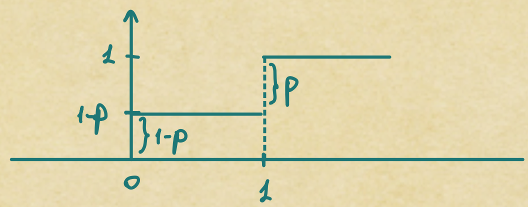
$f(1) = \mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(A) = p$

$f(0) = \mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(A^c) = 1-p$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1-p, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

Dacă $x \ge 1$, $\{X \le x\} =$

$= \{X=0\} \cup \{X=1\}$



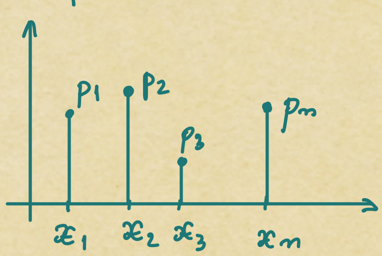
V.a. indicator : $\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$

Scrierea sub formă compactă a fct de masă: $\boxed{f(x) = p^x (1-p)^{1-x},\ x \in \{0,1\}}$

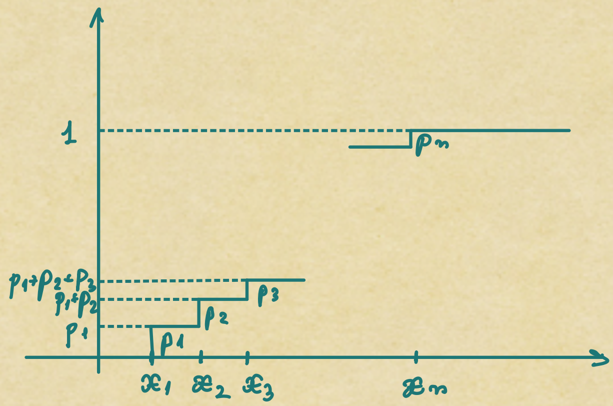
③ $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ și să pp. $x_1 < x_2 < \dots < x_n$

$\mathbb{P}(X = x_i) = p_i \in (0,1)$ cu $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Graficul fct de masă



$$F(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \begin{cases} 0, & x < x_1 \\ p_1, & x_1 \le x < x_2 \\ p_1 + p_2, & x_2 \le x < x_3 \\ p_1 + p_2 + \dots + p_k, & x_k \le x < x_{k+1} \\ \text{— — — — — —} & \\ 1, & x \ge x_n \end{cases}$$



④ Variabile aleatoare de tip binomial

Presupunem că avem un exp aleator și A un ev de interes. Repetăm experimentul de n ori și ne interesăm la nr de realizări ale ev. A

X = nr de realizări ale ev. A în n repetări ale exp

$X \sim B(n,p)$ – v.a. repartizată binomial de parametru n și p

n: nr de rep ale exp

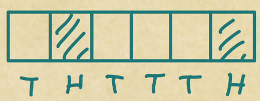
p: prob de realizare a ev A în cadrul exp ($\mathbb{P}(A)$)

$X \in \{0,1,2,\dots,n\}$

Funcția de masă $f(k)=\mathbb{P}(X=k)=?$ $\quad k\in\{0,1,\dots,n\}$

$$\boxed{\mathbb{P}(X=k)=\binom{1}{k}(1-p)^{n-k}p^k}$$

$n=6$, $k=2$



$\rightarrow (1-p)^4p^2$

$A_1^c\cap A_2\cap A_3^c\cap A_4^c\cap A_5^c\cap A_6$

$$\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)=1$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1-p)^{n-k}p^k=1\,?$$

$= (1-p+p)^n$ binomul lui Newton

Obs: $X=Y_1+Y_2+\dots+Y_n$

$Y_i\sim B(p)$

(indep)

Exp Urnă albe și negre

N bile, M negre

Extragem n bile cu întoarcere

X = nr de bile negre din cele n bile extrase

$$X \sim B\left(n, \frac{M}{N}\right)$$

⑤ V.a. repartizată hipergeometric

Avem o urnă cu N bile albe și M de culoare neagră. Extragem n bile fără întoarcere și ne interesează la nr de bile negre din cele n extrase.

X = nr de bile negre din cele n extrase

$X \sim HG(n, N, M)$ — n: nr de extrageri; N: nr bile; M: nr bile negre

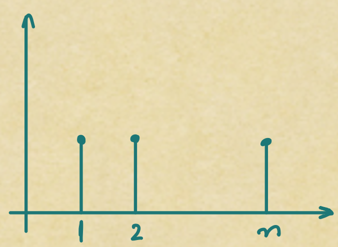
$X \in \{0, 1, \dots \min(M, n)\}$

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

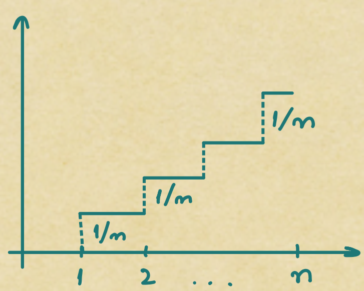
⑥ Uniforma pe $\{1, 2, \dots, n\}$ (Echipartiție)

$X : \Omega \to \mathbb{R}$, $X(\Omega) = \{1, 2, \dots, n\}$ (Δ finită)

$f(k) = \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{|\Delta|}\right) \quad \forall\, k \in \{1, 2, \dots, n\}$



f. de masă



f. de repartiție

$$\mathbb{P}(X \in A) = \frac{|A \cap \Delta|}{|\Delta|} \quad \forall\, A \in \mathbb{R}$$

Ex O urnă cu bile numerotate de la 1-100

Extragem 5 bile din urnă (succesiv)

a) Care este repartiția v.a. care ne dă nr bilelor ≥ 70?

b) Cum este rep v.a. care ne dă a 17-a extragere

c) Care este probabilitatea ca nr-ul 79 să fie extras cel puțin o dată?

Sol I. Extragerea cu revenire

a) $X \sim B(5, \frac{31}{100})$

5 ↳ nr de extrageri

$\frac{31}{100}$ ↳ prob să avem succes (am extras o bilă ≥ 70)

b) $X_1, X_2, \dots X_5 \in \{1, \dots 100\}$

$X_1 \sim \mathcal{U}(\{1,2, \cdots 100\})$

$\parallel \to$ Ex cu revenire

$X_3 \sim \mathcal{U}(\{1,2, \cdots 100\})$

c) $\mathbb{P}(\{79 \text{ să fie extras cel puțin o dată}\}) = \mathbb{P}(\{X_1 = 79\} \cup \{X_2 = 79\} \cup \{X_3 = 79\} \cup \{X_4 = 79\} \cup \{X_5 = 79\})$

$= 1 - \mathbb{P}(\{X_1 \neq 79\} \cap \{X_2 \neq 79\} \cap \{X_3 \neq 79\} \cap \{X_4 \neq 79\} \cap \{X_5 \neq 79\})$

$= 1 - \mathbb{P}(\{X_1 \neq 79\}) \times \mathbb{P}(\{X_2 \neq 79\}) \times \mathbb{P}(\{X_3 \neq 79\}) \times \mathbb{P}(\{X_4 \neq 79\}) \times \mathbb{P}(\{X_5 \neq 79\})$

$= 1 - \left(\frac{99}{100}\right)^5$

$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = 1 - \mathbb{P}((A_1 \cup A_2)^c)$

$= 1 - \mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c)$

II. Extragere fără întoarcere

a) $Y \sim HG(5, 100, 31)$

b) $Y_1, Y_2, \dots, Y_5$

$Y_1 \sim \mathcal{U}(\{1,2,\dots,100\})$

$Y_2 \sim \mathcal{U}(\{1,2,\dots,100\})$

$\mathbb{P}(Y_2 = j) = \sum_{i=1}^{100} \mathbb{P}(Y_2 = j \mid Y_1 = i)\, \mathbb{P}(Y_2 = i)$

↳ f prob totale

$\mathbb{P}(Y_2 = j \mid Y_1 = i) = \begin{cases} 0, & j = i \\ \frac{1}{99}, & j \neq i \end{cases}$

O partiție a lui $\Omega = \underbrace{B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n}_{\text{disj 2 câte două}}$

$\mathbb{P}(Y_2 = j) = \sum_{i=1}^{100} \mathbb{P}(Y_2 = j \mid Y_1 = i)\, \mathbb{P}(Y_1 = 1)$

$= 99 \times \frac{1}{99} \times \frac{1}{100} = \frac{1}{100}$

$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \mid B_i)\, \mathbb{P}(B_i)$

c) $\mathbb{P}(\ldots) = \mathbb{P}(\{y_1=79\} \cup \ldots \cup \{y_5=79\})$

$$= \sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}(y_1=79) = 5/100$$

⑥ Repartiția geometrică și negativ binomială

Aruncăm cu o monedă în mod repetat iar șansa de succes $= p$ $(\mathbb{P}(\{H\})=p)$

$X =$ v.a. care ne dă nr de aruncări până obținem pt prima oară succes (H) incluzând primul succes

$X \in \{1,2,3\ldots\} = \mathbb{N}^*$

$TTH \Rightarrow X=3$

$H \Rightarrow X=1$

$y =$ nr de eșecuri până la primul succes

$y \in \{0,1,\ldots\} = \mathbb{N}$

$y = X-1$

$\mathbb{P}(y=k) = (1-p)^k p$

$$\mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k-1}\cdot p, \quad k \geq 1 \qquad \underbrace{TT\ldots T}_{k-1}H$$

$X \sim G(p)$

$(Geom(p))$

$$1+x+x^2+\ldots+x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1}p = p\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{q}$$

$q = 1-p$

$(1+q+q^2+\ldots)$

1

Dacă $x \in (0,1)$, $n \to \infty$

$$\sum_{x\geq 0} x^k = \frac{1}{1-x}$$

Def V.a. Z care ne dă nr de aruncări necesare până obținem pt a r-a oară succes s.n. Negativ Binomială.

$Z \sim NB(r,p)$

$Z \in \{r, r+1, \ldots\}$

$\mathbb{P}(Z=k) =$, $k \geq r$

$\{Z=k\}$

$$\mathbb{P}(Z=k) = \binom{k-1}{r-1}(1-p)^{k-r}p^r$$

$k=7, r=3$

H

T H H T T T H

H T T H T T H

$1-p+$

$Z = X_1 + X_2 + \ldots + X_r$

$X_i \sim G(p)$

⑦ V.a. de tip Poisson

Def: Spunem că o v.a. X este repartizată Poisson de parametru λ dacă $X \in \mathbb{N}$ și

$$\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Când se folosește?

$$\sum_{k\geq 0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = 1? \qquad e^x = \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!}$$

Aproximarea Poisson a binomialei

$X \sim B(n,p)$ — Pp n este mare și p este mic a.î. $n\cdot p \to \lambda$

$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ — $p \simeq \frac{\lambda}{n}$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot p^k (1-p)^{n-k} \simeq \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!\,n^k} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}_{1^\infty \to e^{-\lambda}} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1} \simeq e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\frac{(n-k-u)\dots(n-1)n}{n^k} = \underbrace{\frac{n-k-u}{n}}_{\to 1} \times \dots \times \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{1} \times \underbrace{\frac{n}{n}}_{1} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

$\frac{\lambda}{n} \to 0$

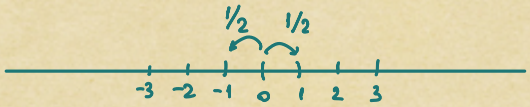
$1-\frac{\lambda}{n} \to 1$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \Big[\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}}_{\to e}\Big]^{-\frac{\lambda}{\cancel{n}}\cdot \cancel{n}} = e^{-\lambda}$$

Funcția de v.a.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. X v.a. g v.a. $\quad \Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ (compunerea $g\circ X$) at $g\circ X$ este o v.a.

Obs Dacă X este discretă $\Rightarrow$ $g\circ X$ este v.a. discretă

Exp: 

n pași

Fie Y v.a. care ne dă poziția după n pași. Vrem $\mathbb{P}(Y=k)=?$

Considerăm X v.a. care ne dă nr de pași spre dreapta, at $X \sim B(n, 1/2)$

Dacă $X=i$ atunci a făcut $n-i$ pași spre stânga și poziția ei este $i-(n-1)=2i-n$

$Y = 2X-n$

$Y = g(X)$

$$\mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{P}(2X-n-k) = \mathbb{P}\left(X=\tfrac{n+k}{2}\right) = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} (1-p)^{\frac{n-k}{2}}$$

$k=0$

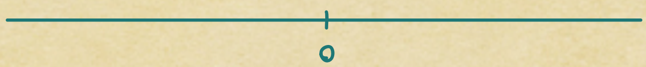
Distanța față de origine?

$Z = |Y|$

$Z = h(Y)$

$ = h(g(X))$

$\mathbb{P}(Z=k)$



$k=0 \Rightarrow Y=0 \Rightarrow \mathbb{P}(Z=0)=$

$k \neq 0 \quad \mathbb{P}(Z=k) = \mathbb{P}(Y=k \text{ sau } Y=-k)$

$= \mathbb{P}(Y=k) + \mathbb{P}(Y=k)$

$= 2\binom{n}{\frac{n+k}{2}}(1/2)^n \qquad \binom{n}{\frac{n+k}{2}} = \binom{n}{\frac{n-k}{2}}$

$Y = g(X)$

$\mathbb{P}(Y=y) = \mathbb{P}(g(X)=y)$

$= \sum_{\{x \mid g(x)=y\}} \mathbb{P}(X=x)$

$\{g(X)=y\} = \{X \in g^{-1}(y)\}$

Exp: $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 \end{pmatrix}$

$Y = X^2 \qquad Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$X_1, X_2, X_3 \qquad g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$g(X_1, X_2, X_3)$ v.a. poate fi
- $X_1 + X_2 + X_3$
- $X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$
- $\max(X_1, X_2, X_3)$

Independența v.a.

Două v.a. X și Y sunt indep dacă realizarea uneia nu influențează în niciun fel realizarea celeilalte

Def: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un c.p. și X și Y două v.a. Spunem că X și Y sunt indep, $X \perp\!\!\!\perp Y$, dacă ev. $\{X = x\}$ și $\{Y = y\}$ sunt indep $\forall x, y$

Ⓟ Fie X și Y două v.a. (discrete). Atunci $X \perp\!\!\!\perp Y$ dacă și numai dacă

$$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq x) \cdot \mathbb{P}(Y \leq y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Ⓟ $X \perp\!\!\!\perp Y \Leftrightarrow \mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B), \forall A, B \subseteq \mathbb{R}$ (interval)

Ⓟ Dacă X și Y v.a. a.î. $X \perp\!\!\!\perp Y$ și g și h două fct atunci $g(X) \perp\!\!\!\perp h(Y)$

Obs: $X \perp\!\!\!\perp Y$ atunci $3X + 7^X \cdot \sin(X) \perp\!\!\!\perp Y^9 - \cos(Y^7)$

Def: $X_1, X_2, \dots X_n$ sunt indep dacă:

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots X_n \leq x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1) \times \mathbb{P}(X_2 \leq x_2) \times \dots \times \mathbb{P}(X_n \leq x_n), \forall x_1, \dots x_n \in \mathbb{R}$$

Apl: $X \sim B(n, p)$ și $Y \sim B(m, p)$ indep $\rightarrow X + Y \sim B(n+m, p)$

Apl: $X \sim Pois(\lambda_1)$ și $Y \sim Pois(\lambda_2)$ indep $\Rightarrow X + Y \sim Pois(\lambda_1 + \lambda_2)$

$$\mathbb{P}(X+Y = n) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X+Y = n \mid X = k)\, \mathbb{P}(X = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X+Y = n \mid X = k)\, \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(Y = n-k \mid X = k)\, \mathbb{P}(X = k)$$

$$\overset{\text{indep}}{=} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(Y = n-k)\, \mathbb{P}(X = k)$$

Media unei v.a. discrete

Repetăm un exp de N ori și ne interesăm la valorile unei v.a. X de interes.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
1	1	1	3	3	5	8	8

$$m = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$$

$$\frac{1+1+1+3+3+5+8+8}{8} = \frac{30}{8}$$

$$\frac{3 \times 1 + 2 \times 3 + 1 \times 5 + 2 \times 8}{8} = \frac{30}{8}$$

$\{X = x\}$

$P(X=x) = f(x) \simeq \frac{N(x)}{N}$

$N(x) \simeq f(x)N$

$$m = \frac{\sum x \cdot N(x)}{N} = \frac{\sum x \cdot f(x) N}{N} = \sum x f(x)$$

<u>Def</u>: Fie X o v.a. discretă. Se numește media lui X valoarea

$$E[X] = \sum_x x f(x) = \sum_x x P(X=x)$$

ori de câte ori $\sum_x |x| f(x) < \infty$ Dacă $|x| f(x) = \infty$ atunci spunem că X <u>nu</u> are medie

I AM DEAD INSIDE
AFTER THIS

Media și momentele de ordin superior

Def: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un câmp de probabilitate și $X: \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. discretă, definim media

$$\mathbb{E}[X] = \sum_x x\,\mathbb{P}(X=x) = \sum_x x f(x)$$

ori de câte ori $\sum |x| f(x) < \infty$. În cazul în care seria este ∞ atunci spunem că v.a. X nu are medie.

Exp: Aruncăm cu un zar

$X \in \{1,2,3,4,5,6\}$

$\mathbb{P}(X=x) = 1/6$, deci $\mathbb{E}[X] = \sum_x x\,\mathbb{P}(X=x) = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + \ldots + 6\cdot\frac{1}{6}$

$= 3{,}5$

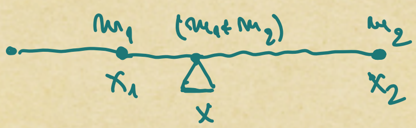
Exp: $X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix}$

$\mathbb{E}[X] = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$

$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \mathbb{E}[X] = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$

<u>Interpretare fizică</u>



$x M = x_1 m_1 + x_2 m_2$

$\bar{x} = x_1 \cdot \frac{m_1}{M} + x_2 \cdot \frac{m_2}{M}$

Proprietăți: 1) Dacă X este constantă $\Rightarrow$ media este acea constantă ($X = c \Rightarrow \mathbb{E}[X] = c$)

2) Dacă $X \geq 0$ atunci și $\mathbb{E}[X] \geq 0$ (pozitivitate)

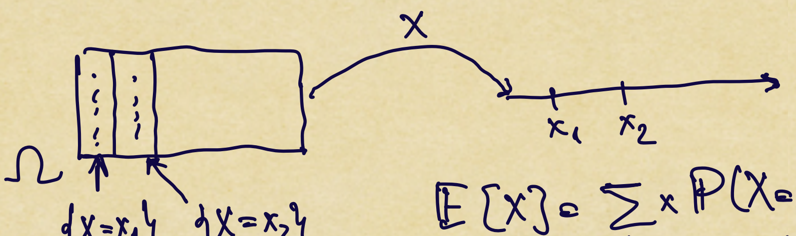
3) Dacă $X \geq Y$ atunci $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$ (monotonie)

$(X(\omega) \geq Y(\omega)\ (\forall)\, \omega \in \Omega)$

4) Dacă X și Y v.a. discrete și $a, b \in \mathbb{R}$ atunci

$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\,\mathbb{E}[Y]$ (liniaritate)

Dem: $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$



$\{X=x\} = X^{-1}(x)$

$\mathbb{E}[X] = \sum_x x\,\mathbb{P}(X=x)$

$\{X=x\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(X=x) = \sum_{\omega} \mathbb{P}(\{\omega\})$

Exp: Aruncăm cu o monedă de 10 ori

$X = \{$ nr de H din cele 10 aruncări $\}$

$\Omega = \{H,T\}^{10}$ $\quad X \sim B(10,p)$

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{10}{k} p^k (1-p)^{10-k}$$

$\{X=k\} = \{(\omega_1,\dots,\omega_{10}) \mid \omega_i \in \{H,T\}$ și exact k sunt $H\}$

Deci, $$\mathbb{E}[X+Y] = \sum_{\omega} (X+Y)(\omega)\, \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega} (X(\omega)+Y(\omega))\, \mathbb{P}(\{\omega\})$$
$$= \sum_{\omega} X(\omega)\, \mathbb{P}(\{\omega\}) + \sum_{\omega} Y(\omega)\, \mathbb{P}(\{\omega\})$$

5) (legătura dintre medie și prob.)

Fie $A \in \mathcal{F}$ eveniment

$$\mathbb{1}_A = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases} \qquad \mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 1) = \mathbb{P}(A)$$

$$\mathbb{1}_A \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-\mathbb{P}(A) & \mathbb{P}(A) \end{pmatrix} \qquad \mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$$

6) Fie X v.a discretă și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $Y = g(X)$. Atunci:

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_x g(x)\, \mathbb{P}(X=x)$$

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_y y\, \mathbb{P}(Y=y)$$

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "X"] \arrow[r, bend right, "g\circ X"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$\mathbb{P}(Y=y) = \mathbb{P}(g(X)=y) = \mathbb{P}(X \in g^{-1}(y)) = \sum_{x \in g^{-1}(y)} \mathbb{P}(X=x)$$

$g^{-1}(y) = \{x \mid g(x) = y\}$

$$\mathbb{E}[g(X)] = \mathbb{E}[Y] = \sum_y y \sum_{x \in g^{-1}(y)} \mathbb{P}(X=x) = \sum_x g(x)\, \mathbb{P}(X=x)$$

Exp: $X \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 3 \\ 1/4 & 1/8 & 1/2 & 1/8 \end{pmatrix}$ $\quad Y = X^2$ (Pentru examen!)

<u>Met 1:</u> $Y \in \{1,4,9\}$

$$\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(X=-1) + \mathbb{P}(X=1) = 1/8 + 1/2 = 5/8$$

$$Y = X^2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ \frac{5}{8} & \frac{2}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{5}{8} + \frac{8}{8} + \frac{9}{8} = \frac{22}{8}$$

Met 2: $g(x) = x^2$

$$\mathbb{E}[X^2] = (-2)^2 \cdot \frac{1}{4} + (-1)^2 \frac{1}{8} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 3^2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{22}{8}$$

7) Fie X și Y 2 v.a. independente. Atunci

$$\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$$

Dacă g, h - funcții atunci $g(X)$ și $h(Y)$ sunt independente

at.

$$\mathbb{E}[g(X) \cdot h(Y)] = \mathbb{E}[g(X)] \cdot \mathbb{E}[h(Y)]$$

$$Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad X \perp\!\!\!\perp Y$$

$$\mathbb{E}[X^7 Y^9] = \mathbb{E}[X^7] \cdot \mathbb{E}[Y^9]$$

Obs! În general, $\mathbb{E}[X \cdot Y] \neq \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$

Def: Fie X o v.a. discretă, numim moment de ordin $k \geq 1$, ca fiind $\mathbb{E}[X^k]$.

Se numește moment de ordin k centrat în $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[(X-a)^k]$ și moment central de ordin k, $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^k]$

Def: Varianța sau dispersia v.a. X este momentul centrat de ordin 2 și se notează cu:

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

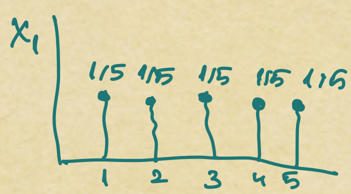
Obs!: Arată gradul de împrăștiere a dis. față de medie.

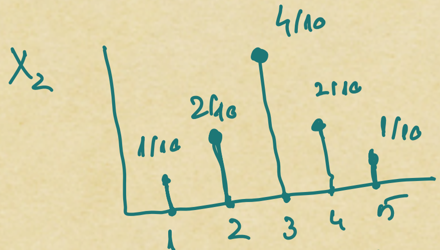
Exp: $X_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$ $\quad X_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

$X_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1/10 & 2/10 & 4/10 & 2/10 & 1/10 \end{pmatrix}$ $\quad X_4 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

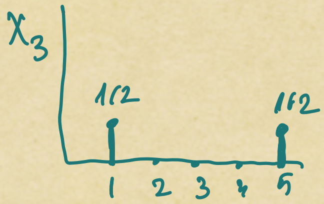
$$\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2] = \mathbb{E}[X_3] = \mathbb{E}[X_4] = 3$$

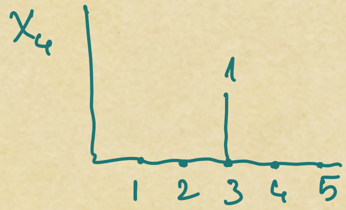
$$Var(X_1) = \mathbb{E}[(X_1 - 3)^2] = \frac{(1-3)^2}{5} + \frac{(2-3)^2}{5} + \dots + \frac{(5-3)^2}{5} = \frac{10}{5} = 2$$





$$Var(X_2) = \mathbb{E}[(X_2 - 3)^2] = \frac{(1-3)^2}{10} + \frac{(2-3)^2 \cdot 2}{10} + \cancel{\frac{(3-3)^2 \cdot 4}{10}} + \frac{(4-3)^2 \cdot 2}{10} + \frac{(5-3)^2}{10} = \frac{12}{10}$$





$Var(X_4) = 0.$

$$Var(X_3) = \frac{(1-3)^2}{2} + \frac{(5-3)^2}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Proprietăți ale variantei: 1) Dacă $X = c$ (cst.) $\Rightarrow Var(X) = 0.$

2) $Var(X) \geq 0$

(translație) 3) Dacă X v.a. și $a \in \mathbb{R}$ atunci $Var(a+X) = Var(X)$

(scalare) 4) Dacă X v.a. și $b \in \mathbb{R}^*$ atunci $Var(b \cdot X) = b^2 \cdot Var(X)$

$$Var(bX) = \mathbb{E}[(bX - \mathbb{E}[bX])^2]$$
$$= \mathbb{E}[b^2 (X - \mathbb{E}[X])^2]$$

5) $Var(a + bX) = b^2 \cdot Var(X)$; $(\forall)\, a, b \in \mathbb{R}$

6) $Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2 - 2X\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2]$$
$$= \mathbb{E}[X^2] - 2\,\mathbb{E}[X\mathbb{E}[X]] + \mathbb{E}[X]^2$$
$$= \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X]^2 + \mathbb{E}[X]^2$$

7) X și Y v.a. independente

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$$

Def: Fie X, Y - v.a. se numește covarianța lui X și Y:

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$$

(dacă este 0, at. X, Y sunt necorelate)

În general, $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) - 2\,Cov(X,Y)$

Def: Se numește abatere standard:

$$SD(X) = \sqrt{Var(X)}$$

$\sigma^2 \underset{\text{(not.)}}{=}$ Varianță

$\sigma \underset{\text{(not.)}}{=}$ Abatere standard

<u>Exemple de calcul al mediei și variantei</u>

(1) $X \sim B(p) \Leftrightarrow X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$

$\mathbb{E}[X] = p$

$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = p - p^2 = p(1-p)$

(2) $X \sim B(n,p)$ $\quad \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \cancel{k} \cdot \frac{n!}{\underset{(k-1)!}{\cancel{k!}}\,(n-k)!} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$= p \cdot n \cdot \boxed{\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k}$$

$$\sum_{l=0}^{n} \binom{n-1}{l} p^{l} (1-p)^{n-1-l} = (p+1-p)^{n-1}$$

$$\| \quad 1$$

$\Rightarrow \mathbb{E}[X] = n \cdot p$

$$X = \underbrace{X_1 + \dots + X_n}$$

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\downarrow] = \mathbb{E}[X_1] + \dots + \mathbb{E}[X_n]$$

$$Var(X) = Var(X_1 + \dots + X_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = np(1-p)$$

(3) Hipergeometrică $HG(n, N, M)$

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

X_j - la extragerea j avem bilă neagră $X_j = 1$

bilă albă $X_j = 0$

$X = X_1 + \dots + X_n$ $\qquad \mathbb{P}(X_j = 1) = \frac{M}{N}$

Extrageri fără întoarcere

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1] + \dots + \mathbb{E}[X_n] = n \cdot \frac{M}{N}$$

(4) Poisson $X \sim Poi(\lambda)$ $\quad \mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k\,\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda$$

$$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{\lambda^k}{k!} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} + \lambda e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{\overset{\shortparallel}{\lambda}} = \lambda^2 + \lambda$$

$$\Rightarrow Var(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

(5) $X \sim Geom(p)$

$$\mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p (1-p)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p q^{k-1} = p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1}$$

$$= p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (q^k)'$$

$$= p \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k \right)'$$

$$= p \cdot \left(\frac{q}{1-q} \right)' = \frac{p}{(1-q)^2}$$

$$= \frac{1}{p}$$

$$Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Variabile aleatoare continue

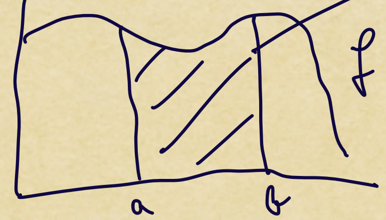
Def: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un c.p. și $X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. V.A. X este continuă (absolut continuă) dacă există $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ cu prop.

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f(x) dx, \ (\forall) A \subseteq \mathbb{R}$$

Obs: Dacă $A = (a, b)$

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

$\mathbb{P}(X \in (a, b))$



f - s.n. densitate de repartiție

(P): Dacă f e densitate de repartiție

$$1)\ f \geq 0$$

$$2)\ \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

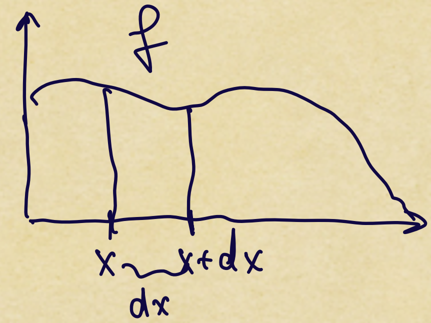
$$\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

Obs! $\mathbb{P}(X = a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0.$

$A = \{a\}$

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(a < X \leq b)$$

Interpretare:

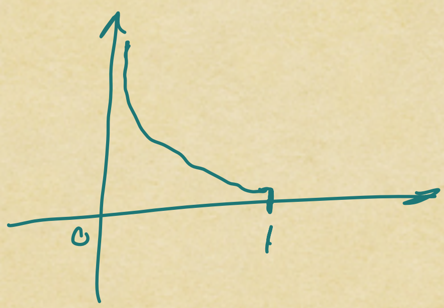


$$\mathbb{P}(X \in (x, x+dx)) = \int_x^{x+dx} f(t)\,dt$$

Dacă dx mic $f(x)(x + dx - x) = dx \cdot f(x)$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\mathbb{P}(X \in (x, x+dx))}{dx}$$ (Probabilitatea pe unitatea de lungime)

Exp: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$ $\quad f(x) \geq 0$



$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = 1$$

$\Sigma \longrightarrow \int$
(discret) (continuu)

$f(x) = \mathbb{P}(X = x) \longrightarrow 0$

$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x) \longrightarrow \int_A f(x)\,dx$$