Seminar 1

1. Determinați care dintre urm. afirmații sunt adev. pt. orice două mulțimi A, B. Și dem.:

i) $A \cap B \subseteq A \cup B$ DA

ii) $A \cap B \subsetneq A \cup B$ NU

iii) $|A \cup B| = |A| + |B|$ NU

iv) $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ DA

v) $|A^n| = |A|^n$, unde $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ ori}}$ DA

~~i) $A \cap B = A \cup$~~

i) $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$

Fie $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ și $x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$

ii) $B = A$

$$\left.\begin{aligned} A \cap B &= A \cap A = A \\ A \cup B &= A \cup A = A \end{aligned}\right\} \Rightarrow A \subsetneq A \text{ ✗} \Rightarrow \text{fals}$$

iii) P. $|A| = n$
$|B| = m$

$A \cap B = \{x\} \Rightarrow |A \cup B| = n + m - 1$

P.p. $A = \{1, 2, 3\} \to 3$ elem.
P.p. $B = \{3, 4, 5\} \to 3$ elem

$|A \cup B| = 5 \neq |A| + |B| = 6$

iv) $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

pt. fiecare $a \in A$ $\exists$ $|B|$ perechi (a, b), cu $b \in B$
$\Rightarrow$ adev.

v) $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ $n = 1$. $|A| = |A|$
$n = 2$. $|A \times A| = |A||A| \Leftrightarrow |A^2| = |A|^2$
Folosim inducție:
$|A^n| = |A|^n$ adev.
$|A^{n+1}| = |A|^{n+1}$
$|A^n \times A| = |A^n| \cdot |A|$ din iv) adev.
$|A^n \times A| = |A^n| \cdot |A| \Rightarrow$ din ip. de inducție
$\Rightarrow |A^{n+1}| = |A|^{n+1}$
$\Rightarrow |A^n| = |A|^n = A \cdot A \cdot \ldots \cdot A$, $n \geq 1$, $A \neq \emptyset$

2. Afirmație: Pt. orice $n \geq 1$, oricare n cai au aceeași culoare.

Dem. inducție după n. Pt. $n = 1$ trivial.
$n \to n+1$.
ipoteza: Orice mulțime H, cu $|H| = n$, $\forall h_1, h_2 \in H$, $c(h_1) = c(h_2)$, unde $c(h)$ = culoarea lui h

Fie H', cu $|H'| = n+1$. Fie $h \in H'$.
$|H' \setminus \{h\}| \overset{ip}{=} n \Rightarrow \forall h_1, h_2 \in H' \setminus \{h\}, c(h_1) = c(h_2)$
Fie $h' \neq h \in H'$.
$|H' \setminus \{h'\}| \overset{ip}{=} n \Rightarrow \forall h_1, h_2 \in H' \setminus \{h'\}, c(h_1) = c(h_2)$

$h' \in H' \setminus \{h\} \Rightarrow c(h') = c(h) = c_1$

3. R între A și A (binară pe A) s.n.:
Refl: $\forall x \in A$, xRx
Sim.: $\forall x, y \in A$, $xRy \Rightarrow yRx$
Tranz.: $\forall x, y, z \in A$, xRy, $yRz \Rightarrow xRz$

Dați exemple de relație R și R să fie:
i) Refl, ~~Sim~~, Tranz $aRb \Leftrightarrow ab \in 2\mathbb{Z} + 1$
ii) Refl, ~~Sim~~, Tranz. „$\leq$"
iii) Refl, Sim, ~~Tranz~~ $aRb \Leftrightarrow |a - b| \leq D$, pt. un $D > 0$

4. Dem. că un graf cu n noduri are cel puțin 2 noduri cu același grad. $(n \geq 2)$

Fie $n \geq 2$

Inducție după nr. de muchii în jos de la $\overset{m}{=} \frac{n(n-1)}{2}$.

$m = \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow G = K_n \Rightarrow$ adevărat

$m \to m-1$

Gradele $\in \{0, 1, \ldots, n-1\}$

$\exists\, x$ cu $deg(x) = n-1 \Rightarrow \nexists\, y$ cu $deg(y) = 0$

$\Rightarrow |\{deg(x) \mid x \text{ nod}\}| = n-1$

Lab 1

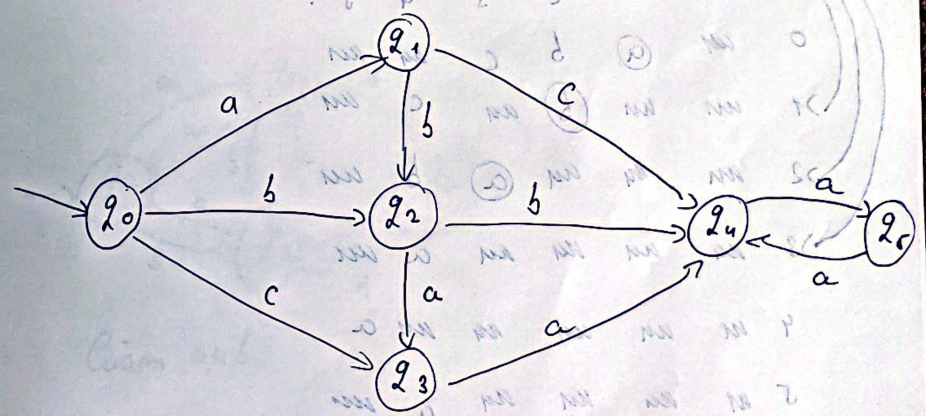
$\Sigma = \{0, 1\}$

$Q = \{(q_1, r_1), (q_1, r_2), (q_1, r_3) \ldots\}$

$F = \{(q_2, r_3)\}$

$q_0 = (q_1, r_1)$

AFD - (automat finit determinist)



1. abac ×
2. bbb ×
3. abb ✓
4. aba ×
5. abaa ✓
6. bb ✓
7. ca ✓
8. ac ✓
9. abc ×
10. caa × ✓
11. caaa ✓

$(Q, \Sigma, \delta, \underbrace{q_0, F})$

Q – mult. de stări $\{q_0 \dots q_5\}$

Σ – alfabet (a, b, c)

q_0 – unicul pct. de start

F – mult. de pct. finale

δ - fct. tranziții

$\delta : Q \times Q \to \Sigma$

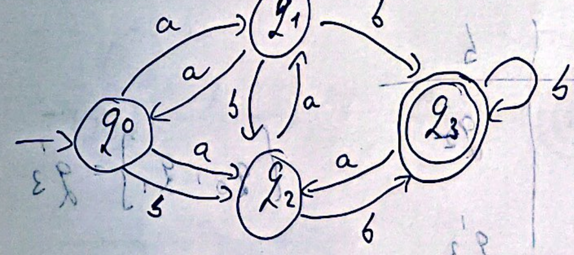
	0	1	2	3	4	5
0	m	a	b	c	m	m
1	m	m	b	m	c	m
2	m	m	m	a	b	m
3	m	m	m	m	a	m
4	m	m	m	m	m	a
5	m	m	m	m	a	m

PROIECT:

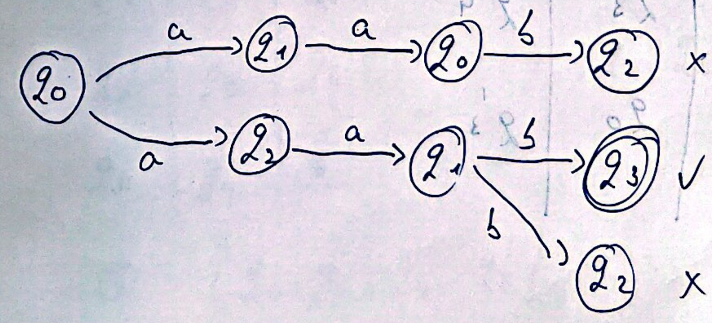
1. LIB care să citească + validese un AVD
2. Folosind 1, program care testează acceptanța unui cuvânt.

$L_1 + L_2 + L_3 \to$ 8 aprilie

Lab 2

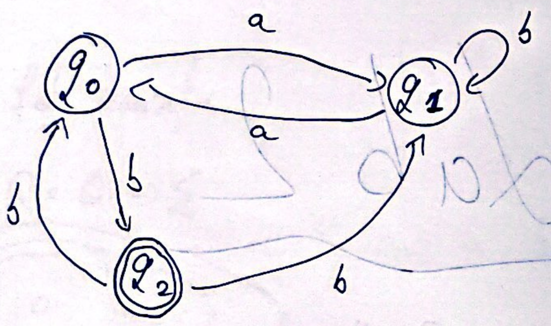


Cuvânt aab



$q_0 \to q_2 \to q_1 \to q_3$ ✓

aab → acceptat

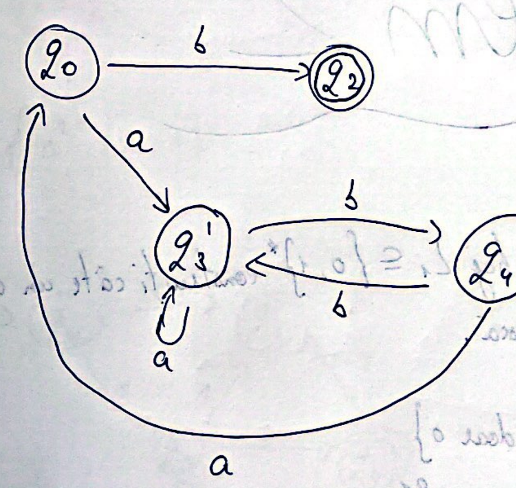


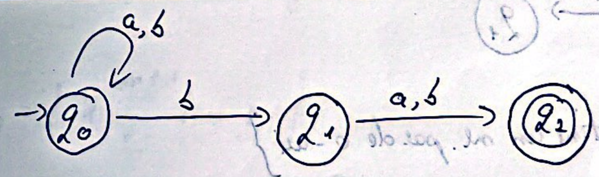
	a	b
q_0	q_3'	q_2
q_1	X	q_3'
q_3'	q_3'	q_4'
q_4'	q_0	q_3'

$\{q_0, q_1\} = q_3'$

$\{q_2, q_1\} = q_4'$

$Q' = \{q_0, q_2, q_3', q_4'\}$





	a	b
q_0	q_0	q_3'
q_3'	q_4'	q_5'
q_4'	q_0	q_3'
q_5'	q_4'	q_5'

$(q_0, q_1) = q_3'$

$(q_0, q_2) = q_4'$

$(q_0, q_1, q_2) = q_5'$

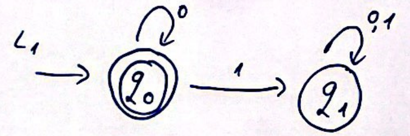
$Q' = \{q_0, q_3', q_4', q_5'\}$

Sem 2

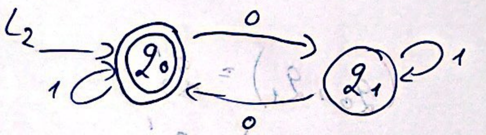
1\. Pt. fiecare limbaj $L_1 \subseteq \{0,1\}^*$ construiți câte un automat care să îl recunoască.

$L_1 = \{ w \mid w$ conține doar $0 \}$

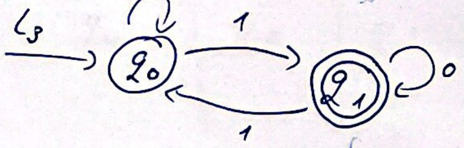
L_1



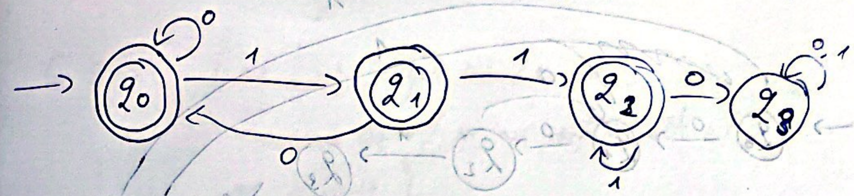
$L_2 = \{ w \mid w$ conține un nr. par de 0-uri$\}$



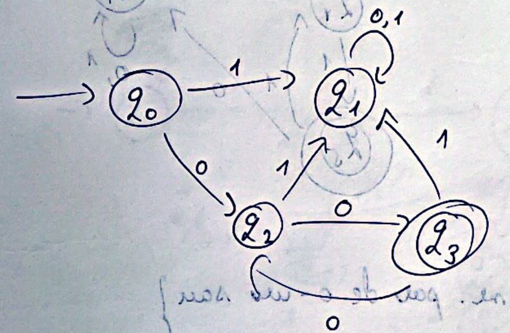
$L_3 = \{ w \mid w$ conține un nr. impar de 1-uri$\}$



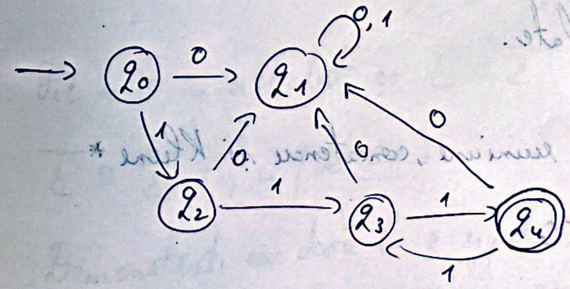
$L_4 = \{ w \mid w$ ~~cont~~ nu conține $110 \}$



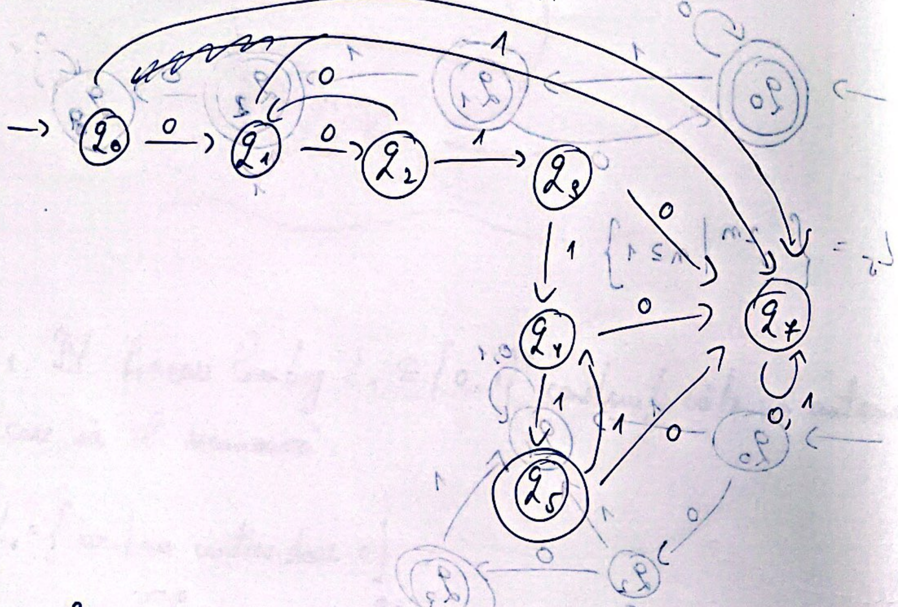
$L_5 = \{ 0^{2n} \mid n \geq 1 \}$



$L_6 = \{ 1^{2m+1} \mid m \geq 1 \}$



$L_7 = \{ 0^{2n} 1^{2m+1} \mid n, m \geq 1 \}$



$L_8 = \{ w \mid w$ conține un nr. par de 0-uri sau un nr. impar de 1-uri $\}$

2. Dem. fără a construi automate că limbajele L_1, L_2 și L_8 sunt regulate.

REG închisă la reuniune, concatenare și Kleene *

$L_1 = \{0\}^* \in REG$

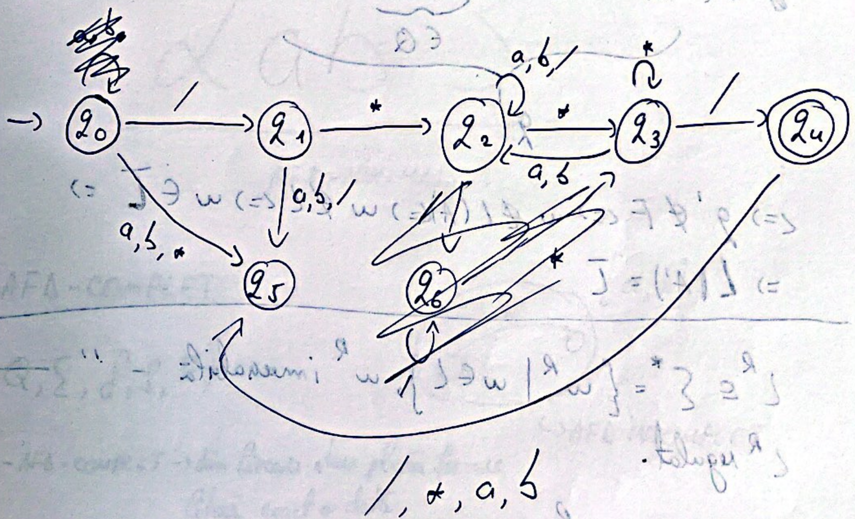
$L_2 = L_5 \circ L_6 \in REG$

$L_8 = L_2 \cup L_3 \in REG$

3. $\Sigma = \{ "/", "*", a, b \}$

$C \subseteq \Sigma^* = \{ w \mid w$ începe cu /*, se termină cu */ și nu conține alt */ pe parcurs $\}$

Scrieți un automat care recunoaște C.



4. Fie Σ un alfabet și $L \subseteq \Sigma^*$

$\overline{L} \subseteq \Sigma^* = \{ w \mid w \notin L \}$

Demonstrați că dacă L e regulat, atunci $\overline{L}$ e regulat.

L regulat. Fie A un DFA a.î. $L(A) = L$

$A = (\Sigma, Q, \delta : \Sigma \times Q \to Q, q_0 \in Q, F \subseteq Q)$

Fie $A' = (\Sigma, Q, \delta$

Vrem $L(A') = \overline{L}$

Fie $w \in L(A')$, $w = w_1 w_2 w_3 \dots w_n$

$\delta(w_n, \dots \delta(w_1, \underbrace{\delta(w_0, q_0)}_{\in Q}) \dots) \in F'$

$\iff q' \notin F \iff w \notin L(A) \iff w \notin L \iff w \in \overline{L} \Rightarrow$

$\Rightarrow L(A') = \overline{L}$

$L^R \subseteq \Sigma^* = \{ w^R \mid w \in L \}$, w^R inversabilă – " —

L^R regulat.

$(w_1 w_2 \dots w_n)^R = \cancel{w_1 w_2}\ w_n w_{n-1} \dots w_2 w_1$

Fie A un DFA și $L(A) = L$

$A = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$

$A' = (\Sigma \cup \{\varepsilon\}, Q', \delta', q_0', F')$

$Q' = Q \cup q_0'$ (unde $q_0' \notin Q$)

$F' = \{q_0\}$

$\delta(a, q_1) = q_2 \Rightarrow \delta'(a, q_2) \ni q_1$

$\delta'(\varepsilon, q_0') = F$

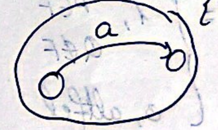
Lab 3

AFD-MINIMAL

1. AFD-COMPLET

$(Q, \Sigma, \delta, S, F)$

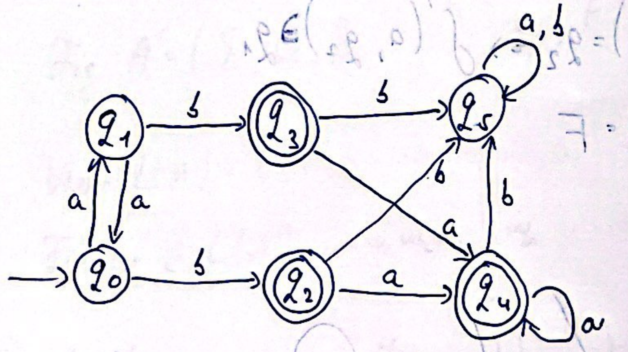
$\{a, b\}$



↳ AFD INCOMPLET

- AFD-COMPLET → din fiecare stare pleacă fiecare literă exact o dată

- AFD-INCOMPLET



Algoritmul MYHILL-NERODE

1. Construim o matrice subdiagonală
2. Completăm cu $\{0, 1\}$

$$(P,Q) = \begin{cases} 1, & P\in F,\ Q\notin F \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

3. $(P,Q)=0$

$\exists x$ a.î. $(\delta(P,x), \delta(Q,x)) = 1 \Rightarrow (P,Q)=1$

4. 0-urile rămase

	0	1	2	3	4	5
0						
1	0					
2	1	1				
3	1	1	0			
4	1	1	0	0		
5	~~0~~ 1	~~0~~ 1	1	1	1	

pas I+II

Tips: lista de adiacență

	a	b
0	1	2
1	0	3
2	4	5
3	4	5
4	4	5
5	5	5

pas III:

iterația 1

fac asta untill no change on one full iteration

$(0,1) \leftarrow 0$

$(3,2) \leftarrow 0$

$(4,2) \leftarrow 0$

$(4,3) \leftarrow 0$

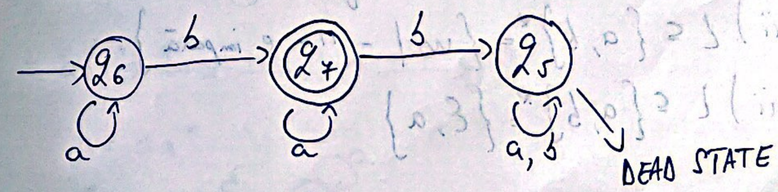
$(5,0) \leftarrow 1$

$(5,1) \leftarrow 1$

$(0,1) \to q_6$ $\to S$

$\underbrace{(2,3) \to q_7 \quad (3,4) \to q_7 \quad (4,2) \to q_7}_{q_7 = (2,3,4) \to F}$

$\Rightarrow \boxed{6, 7, 5}$



Sem 3

1. Dați ex. de cuvinte peste $\{a,b\}$ care să aparțină și care să nu aparțină lb. expresiilor regulate.

1) a^*b^*: ab ✓, aba ✗

2) $(a\cup b)^*$: aa/bb ✓, ab ✗

3) $a^*\cup b^*$: aa, bb ✓, ab ✗

4) $(aaa)^*$: $aaaaaa$ ✓, $aaaa$ ✗

5) $(\varepsilon\cup a)b^*$: abb ✓, ba ✗

2. Scrieți expr. reg. ptr. urm. limbaje

i) $L\subseteq\{a,b\}^* = \{w \mid$ lungimea lui e multiplu de $k\}$

ii) $L\subseteq\{a,b\}^* = \{w \mid$ -"- e impară$\}$

iii) $L\subseteq\{a,b\}^* = \{\varepsilon, a\}$

i) $(\underbrace{(a\cup b)\dots(a\cup b)}_{\text{de } k \text{ ori}})^* = ((a\cup b)^k)^*$

ii) $((a\cup b)(a\cup b))^*(a\cup b)$

iii) $a? := \varepsilon\cup a$

iv) $L\subset\{0,1,\dots 9, "-", "."\} = \{w \mid w$ e un nr. zecimal bine fixat$\}$

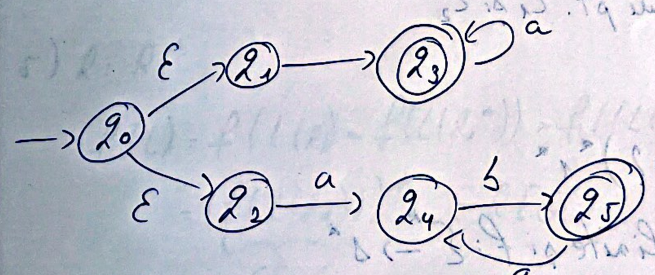
$-?\,0.(0\cup\dots\cup 9)^* \cup -?(1\cup\dots\cup 9)(0\cup\dots\cup 9)^*$

$(.(0\cup\dots\cup 9)^+)?\cup 0$

DFA $\leftrightarrow$ NFA $\leftrightarrow$ REGEX

recunosc același limbaj

3. Fie $R = a^+\cup(ab)^+$. Construiți un NFA.

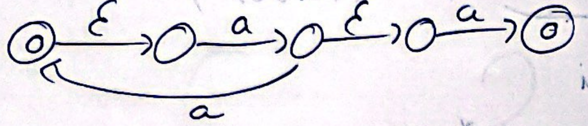


ex: a: $\circ \xrightarrow{a} ◎$

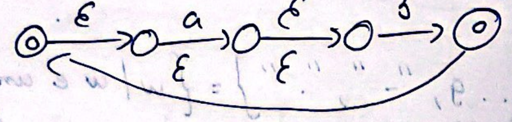
ab: $\circ \xrightarrow{a} \circ \xrightarrow{\varepsilon} \circ \xrightarrow{b} ◎$

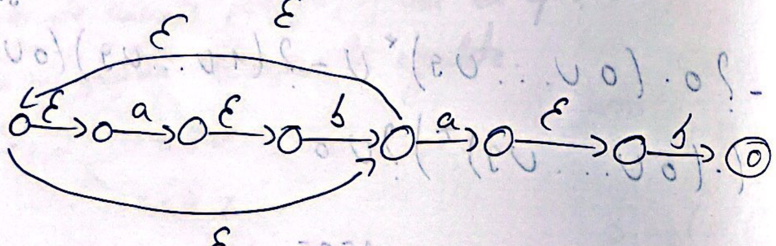
$a = aa^*$

$a^* = \to \circ \xrightarrow{\varepsilon} ◎$

$a^+ =$ 

$(ab)^+ = (ab)(ab)^*$

$(ab)^* =$ 

$(ab)^+ =$ 

4. $L_1 \subseteq \{0,1\}^* = \{w \mid w \text{ nu conține } 10\}$

$L_2 \subseteq \{0,1\}^* = \{w \mid w \text{ nu conține } 110\}$

Scrieți regexurile pt. L_1 și L_2

$R_1 = 0^* 1^*$

$R_2 = (0^*(10)?)^* 1^*$

5. Fie Σ, Δ finite și $f: \Sigma^* \to \Delta^*$

$f(w_1 \dots w_n) = f(w_1) \dots f(w_2)$ și $f(\varepsilon) = \varepsilon$

Dem. că dacă $L \subseteq \Sigma^*$ e regulat atunci $f(L) \subseteq \Delta^*$ e regulat unde $f(L) = \{f(w) \mid w \in L\}$

Fie L regulat. Există R un regex cu $L(R) = L$

$w \in L$, $f(w) = f(w_1) \dots f(w_n)$

Avem 6 cazuri:

1) $R = a \Rightarrow L = \{a\} \Rightarrow f(L) = \{f(a)\} \in REG$

2) $R = \varepsilon \Rightarrow L = \{\varepsilon\} \Rightarrow f(L) = \{f(\varepsilon)\} = \{\varepsilon\} \in REG$

3) $R = \emptyset \Rightarrow L = \emptyset \Rightarrow f(L) = \emptyset \in REG$

4) $R = R_1 R_2$

Presupunem prin inducție că $f(L(R_1)), f(L(R_2)) \in REG$

$f(L) = f(L(R)) = f(L(R_1 R_2)) = f(L(R_1)L(R_2)) =$

$= \underbrace{f(L(R_1))}_{\in REG} \underbrace{f(L(R_2))}_{\in REG}$

5) $R: R_1^*$

$f(L) = f(L(R)) = f(L(R_1^*)) = f((L(R_1))^*) =$

$= (\underbrace{f(L(R_1))}_{\in REG})^* \in REG$

6) $R_1 = R_1 \cup R_2$

$f(L) = f(L(R)) = f(L(R_1) \cup L(R_2)) =$

$= \underbrace{f(L(R_1))}_{\in REG} \cup \underbrace{f(L(R_2))}_{\in REG} \in REG$

Lab 4

REGEX-OLX-CRAWLER

GENERAL INFO:

/...../...
regex flags

1. Simple search: /cat/g
2. Plus sign (+): /e+/g -> "e"; "ee"; "eee"; ...
3. Optional single char (?): /e+a?/g -> "e"; "ea"; "ee"; "eea"; ...
4. Star sign (*): /e*/g -> "" (blank), "e", "ee" ...
5. Any single char /./g -> "a", "b" ...
6. Escape "\"
7. Special char: \w
   \s
   \d
8. Ranges Modifiers {min, max} (max opt.)
9. Sets (groups)
   [abc]
   [a-z]
10. "^" not "$"

OLX CRAWER

TEAM 1 - modă
TEAM 2 - mama și copilul
TEAM 3 - electronice
TEAM 4 - imobiliare
TEAM 5 - animale
TEAM 6 - AGRO
TEAM 7 - Locuri muncă
TEAM 8 - CASĂ
TEAM 9 - piese auto
TEAM 10 - sport

deadline 27/04
4 filtre + afișaj consolă -> 2p
10 filtre + afișaj în consolă -> 3p
10 filtre + WEB -> 4p

1. MARCA:
   - AUDI (17)
   - VOLKSWAGEN (100)
   - MERCEDES (100)
   . . . .
   - OTHER (200)
2. KM
   - < 10,000 (100)
   - 10,000-50,000 (70)
   - 50,000-100,000 (50)
   - >100,000
   - other (20)

Sem 4

1. Folosind lema de pompare, arătați că urm. limbaje nu sunt regulate:

i) $L_1 = \{0^n 1^n 2^n \mid n \geq 0\}$

ii) $L_2 \subseteq \{a, b\}^* = \{ww\}$

iii) $L_3 = \{0^i 1^j \mid i > j\}$

iv) $L_4 \subseteq \{"(", ")"\} = \{w \mid w$ bine-parantezat$\}$ $[[\,]] \in L_4$

$[\,][\,] \in L_4$

$][\notin L_4$ $[][\notin L_4$

Lema de pompare:

Fie L un limbaj regulat. Atunci $\exists p \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall w \in L$, $|w| > p$ $\exists x, y, z$ a.î. $w = xyz$ și

I. $xy^iz \in L$ $\forall i \in \mathbb{N}$

II. $|y| > 0$

III. $|xy| \leq p$

Rezolv.:

i) Pres. L_1 regulat. Atunci $\exists p \in \mathbb{N}$ a.î. L.P.:

~~$w = 0^2 1^2 2^2$~~

$w = 0^p 1^p 2^p \in L_1$. $|w| > p \Rightarrow \exists x, y, z$ a.î. $w = xyz$ și I, II și III

III. $|xy| \leq p \Rightarrow y = 0^m$ pt. un $0 < m \leq k \leq p$

$xy = 0^k$

$xy^2z = 0^{k-m}0^m 1^p 2^p$

0^{p-k}

$xy^iz = 0^{k-m} 0^{im} 0^{p-k} 1^p 2^p$

Nr zero $= k - m + im + p - k = m(i-1) + p$

$i = 2 \Rightarrow 2m + p - m = m + p > p$

$\Rightarrow xy^2z \notin L_1$ ⨳

ii) Pres. L_2 regulat. Atunci $\exists p \in \mathbb{N}$ a.î. L.P.:

$w = a^p b^p a^p b^p$ $\quad |w| > p \Rightarrow \exists x, y, z$ a.î. $w = xyz$ și I, II, III

?

III. $|xy| \leq p \Rightarrow xy = a^k$ și $y = a^m$ $0 < m \leq k \leq p$

$xy^iz = a^{k-m} a^{im} a^{p-k} b^p a^p b^p = a^{im-m+p} b^p a^p b^p$

$i = 2 \Rightarrow a^{m+p} b^p a^p b^p$ ~~$\notin L_2 \Rightarrow$~~ ⨳

~~$m+p > p$~~

$\frac{4p+m}{2}$ $\quad \underbrace{a^{m+p} b^{p-\frac{m}{2}}} \; \underbrace{b^{p+\frac{m}{2}} a^p b^p}$

ii) Val 2:

Pres. L_2 regulat. At. $\exists p \in \mathbb{N}$ a.î. L.P.:

$w = b^p a b^p a$ $\quad |w| > p$ $\quad \exists x, y, z$ a.î. $w = xyz$ şi I, II, III

III. $|xy| \le p$ $\quad xy \in b^p$

$xy^iz = b^{k-m} b^{im} b^{p-k} a b^p a = b^{(i-1)m+p} a b^p a$

$i = 3 \Rightarrow b^{2m+p} \underbrace{a b^p a}_{p+2}$ $\quad 2m+p > p+2$

dacă $xy^3z = vv \Rightarrow v$ conține doar b-uri

$\Rightarrow v$ conține şi a-uri

$\Rightarrow xy^3z \notin L_2$

iii) Pres. L_3 regulat. At. $\exists p \in \mathbb{N}$ a.î. L.P.

$w = 0^{p+1} 1^p$ $\quad |w| > p$ $\quad \exists x, y, z$ a.î. $w = xyz$ şi I, II, III

III. $|xy| \le p \Rightarrow y = 0^m$, $0 < m \le k \le p$

$xy^iz \in L_3, \forall i \in N$

$\cancel{xy^0z = xz = 0^k 0^{p+1-k} 1^p} =$

$xy^iz = 0^{k-m} 0^{im} 0^{p+1-k} 1^p = \cancel{0^{m(i-1)+p+1} 1^p}$

$xy^0z = 0^{k-m} 0^{p+1-k} 1^p = 0^{p+1-m} 1^p$ $\Rightarrow p+1-m \le p$

$m > 0$ $\Rightarrow p+1-m \not> p$

$\Rightarrow xy^0z \notin L_3$

iv) Pres. L_4 regulat. At. $\exists p \in \mathbb{N}$ a.î. L.P.

$w = [^p\,]^p$ $\quad |w| > p$ $\quad \exists x, y, z$ a.î. $w = xyz$ şi I, II, III

III. $|xy| \le p \Rightarrow \cancel{xy \in [^p} \Rightarrow y \in [^m$; $x = [^{k-m}$; $xy \in [^k$

$w = [^{k-m} [^m [^{p-k}]^p \Rightarrow xy^iz = [^{k-m} [^{im} [^{p-k}]^p =$

$= [^{p+m(i-1)}]^p$

$i = 2 \Rightarrow xy^2z = [^{p+m}]^p$; $m > 0$ $\Rightarrow xy^2z \notin L_4$

2. Este clasa limbajelor neregulate închisă la:

i) complement? DA

ii) reuniune? NU

i) L neregulat $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $\bar{L}$ neregulat $\quad \bar{L} = \{w \mid w \notin L\}$

Fie L neregulat şi presupunem $\bar{L}$ regulat $\Rightarrow \bar{\bar{L}}$ regulat

$\Rightarrow L$ regulat ↯

ii) ~~Fie L_1, L_2 neregulate cu $L_1 \cup L_2$~~

L neregulat $\overset{i)}{\Rightarrow}$ $\bar{L}$ neregulat

$L \cup \bar{L} = \Sigma^*$ regulat

Sem 5

Fie $L = \{a^i b^j c^k \mid i,j,k \geq 0$ şi dacă $i = 1$ atunci $j = k\} = \{a^i b^j c^k \mid i \neq 1, j, k \geq 0\} \cup \{a b^j c^j \mid j \geq 0\}$

$L \subseteq \{a, b, c\}^*$

i) Arătaţi că L nu e regulat

ii) Arătaţi că L satisface lema de pompare pt. regulate

L reg $\Rightarrow L$ satisface L_p ($\not\Leftarrow$)

$\overline{L} \notin REG \Rightarrow L \notin REG$

$\overline{L} = \{a b^j c^k \mid j \neq k\} \cup \underbrace{\{a^* b^* c^*\}}_{\in REG}$

$\overline{L} \cap \underbrace{\{a^* b^* c^*\}}_{REG} = \{a b^j c^k \mid j \neq k\}$

Vrem $L' \in REG$ aî. $L \cap L' \notin REG$

$L \cap ? = \underbrace{\{a b^n c^n \mid n \geq 0\}}_{\notin REG}$

$L \cap \underbrace{\{a b^* c^*\}}_{\in REG} = \underbrace{\{a b^n c^n \mid n \geq 0\}}_{\notin REG}$

$L \cap \underbrace{\{a b^* c^*\}}_{\in REG} = \underbrace{\{a b^n c^n \mid n \geq 0\}}_{\notin REG}$

$\Rightarrow L \notin REG$

$\{b^n c^n \mid n \geq 0\} \in REG$

ii) Vrem $p = 2$ Fie $|w| > p$

Cazul $i = 0$ i.e. $w = b^j c^k$, luăm $x = \varepsilon$, y = primul caract., z = restul

$|xy| \leq 2$

$x y^n z \in L \ (\forall) n \in \mathbb{N}$

$y \neq \varepsilon$

Cazul $i = 1$ i.e. $w = a b^j c^j$, luăm $x = \varepsilon$, $y = a$, z = restul

Cazul $i = 2$ i.e. $w = a^2 b^j c^k$, luăm $x = \varepsilon$, $y = aa$, z = restul

Cazul $i \geq 3$ i.e. $w = a^i b^j c^k$, luăm $x = a$, $y = a$, z = restul

$L = \{a b^n c^n \mid n \geq 0\}$

Arătați că L nu e regulat

Pres. L regulat și fie p care satisface LP.

Fie $w = a \cdot b^p \cdot c^p$, $\exists x, y, z$ ai. $w = \underbrace{xy}_{\leq p} z$

Pres. L regulat

I. $|y| > 0$

II. $xy^iz, (\forall) i \geq 0$

III. $|xy| \leq p$

$\overbrace{\underbrace{a\, b}_{xy}{}^{p}}^{p+1} c^p$

Cazul $x = \varepsilon$

$y = a b^j$ cu $j \leq p-1$

$x y^i z = (a b^j)^i z = a^i b^{ij} z$

pt. $i = 2 \Rightarrow a^2 b^{2j} z$ – conține $2a$

$\Rightarrow xy^2z \notin L$

Cazul $x = a$:

$y = b^j \quad j \leq p-1; j \geq 0$

$x y^i z = a b^{ji} z$

$z = b^{p-j} c^p \quad j \cdot i + p - j = p$ pt. i mare

Dați gramatici libere de context pt. $L_i \subseteq \{a; b\}^*$

i) $L_1 = \{w \mid w$ începe și se termină cu ac. simbol$\}$

ii) $L_2 = \{w \mid w = w^R\} = \{w \mid w$ palindrom$\}$

iii) $L_3 = \{w \mid |w| \in 2\mathbb{Z}+1\}$

iv) $L_4 = \{w \mid w$ conține cel puțin 3 a-uri$\}$

v) $L_5 = \emptyset$

i) $S \to aTa \mid bTb \mid \varepsilon$

$T \to aT \mid bT \mid \varepsilon$

ii) $S \Rightarrow aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid \varepsilon$

iii) $S \to aaT \mid abT \mid baT \mid bbT \mid \varepsilon$

iv) $S \to TaTaTaT$

$T \to aT \mid bT \mid \varepsilon$

$(a \cup b)^* \circ (a \cup b)^* \circ (a \cup b)^* \circ (a \cup b)^*$

v) $S \to S$

vi) $L_6 \subseteq \{``[", ``]"\} = \{w \mid w$ bine-parantezat$\}$

$S \to [S] \mid \varepsilon \mid SS$

Sem 6

1. Dați un CFG pt. $L = \{ w \mid |w|_a > |w|_b \} \subseteq \{a, b\}^*$

unde $|w|_a$ = nr. de a-uri din w

$|w|_b$ - analog

$S \to aA \mid aaAbA$

$A \to aAbA \mid aA \mid \varepsilon$

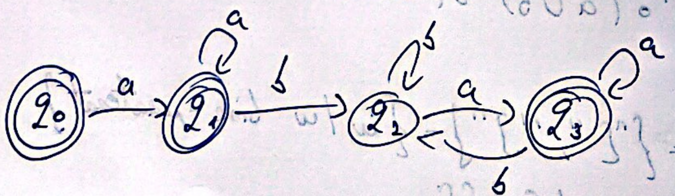
2. Dați PDA-uri pt.:

$L_1 = \{ w \mid w \text{ bine-parantezat} \}$

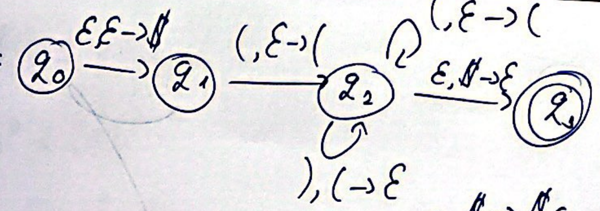
$L_2 = \{ w \mid |w|_a > |w|_b \}$

$L_3 = \{ w \mid |w|_a = |w|_b \}$

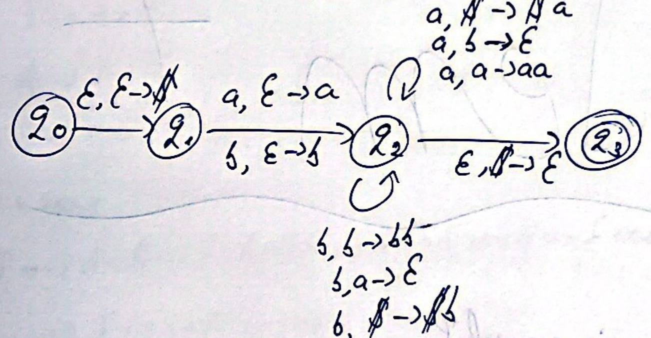
L_3



L_1:



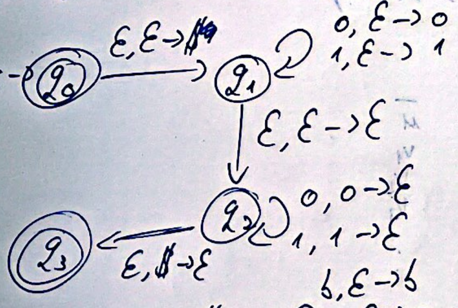
L_2:



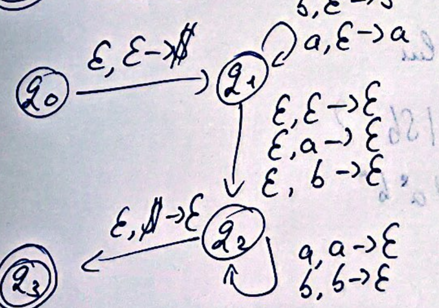
$L_4 = \{ w \mid ww^R \} \subseteq \{a, b\}^*$

$L_5 = \{ w \mid w \text{ palindrom} \}$

L_5:



L_4:



Sem 7

Fie L recursiv enumerabil.

Presupunem $\overline{L}$ recursiv enumerabil. L e recursiv

Există M a.î. $w \in L \Leftrightarrow M$ acceptă w

Există $\overline{M}$ a.î. $w \in \overline{L} \Leftrightarrow \overline{M}$ acceptă w

sau $w \notin L$

L: M: w_1, w_2, w_3, $\vdots$

$\overline{L}$: $\overline{M}$: v_1, v_2, v_3, $\vdots$

Care este limbajul lui

$S \to a \mid b \mid aS \mid Sb$?

$a^+b^* \cup a^*b^+$

Dați un CFG pt.:

$0^*1(0 \cup 1)^*$

$S \to A1B$

$A \to 0A \mid \varepsilon$

$B \to 0B \mid 1B \mid \varepsilon$

$w = 1001$

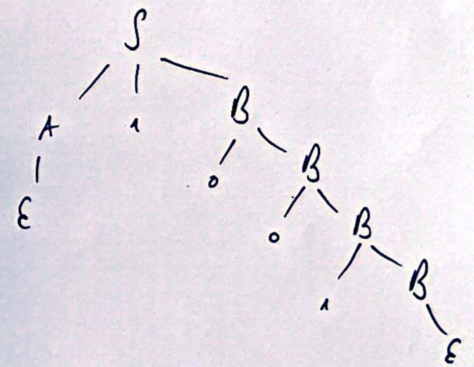
$S \to A1B \to \varepsilon 1B \to \varepsilon 10B \to \varepsilon 100B \to \varepsilon 1001B \to$

$\to \varepsilon 1001 \varepsilon = 1001$

$S \to A1B \to A10B \to A100B \to A1001B \to A1001\varepsilon \to$

$\to \varepsilon 1001 \varepsilon \to 1001$

$w = 1001$



Descrieți un algoritm care decide dacă un limbaj regulat
este finit (primit ca input printr-un automat finit)

Indiciu: Lema de pompare

$(\exists)\ p\ (\forall)\ w \in L,\ |w| > p \Rightarrow (\exists)\ x, y, z,\ w = xyz$

a.î. $xy^n z \in L$

$(\forall)\ n \geq 0.$

L are lungime de pompare p_L

dacă $(\exists)\ w \in L$ cu $|w| > p_L$ atunci

$w = xyz$ și $xy^n z \in L$

$\Rightarrow \{xy^n z \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq L \Rightarrow L$ infinit