$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{a_n}$$

→ calc. cu ajutorul mărginirii a_n (tabel)

Dacă $\lim a_n = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{u} f$, altfel nu tinde uniform

Continuitatea la fct.

→ Studiem cont. în pct. neregure:

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to ax}} f(x, ax)$ — dacă tinde la ceva care depinde de a ⇒ ⇒ nu este cont

— dacă nu depinde de a → POATE FI CONT. !!

Dacă poate fi cont → APLICĂM MAJORAREA (vrem să ajungem la ceva care → 0) ($x \to 0$; $y \to 0$)

- corolar:

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0,\infty)$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell$, $\ell = \overline{\mathbb{R}}$ at.

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim \frac{x_{n+1}}{x_n}$

• Lema lui Cesaro-Stolz $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$:

y_n strict $\nearrow$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \ell$

Pentru a putea trece la limite superioare și inferioare trebuie să știm ce înseamnă infimum și supremum.

Fie $(X,\leq)$ o mulțime ordonată și A o submulțime $\neq \emptyset$ a lui X, $m \in X$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ m s.n. majorant al lui A dacă pt $\forall\, a \in A$ avem $a \leq m$

$\Rightarrow$ m s.n. minorant al lui A dacă pt $\forall\, a \in A \Rightarrow a \geq m$

Deci: • Infimum = cel mai mare dintre minoranți

• Supremum = cel mai mic dintre majoranți

(dacă $\exists \min A / \max A \Rightarrow \operatorname{Inf} A = \min A$; $\operatorname{Sup} A = \max A$)

c) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty$ și $\sum y_n$ div $\Rightarrow \sum x_n$ div

2) Criteriul raportului:

Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șir de elem. din $(0,\infty)$

a.î. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \overset{not}{=} r \Rightarrow \begin{cases} r\in[0,1) \Rightarrow \sum x_n \text{ conv.} \\ r\in(1,\infty) \Rightarrow \sum x_n \text{ div.} \end{cases}$

!! Dacă $r=1 \Rightarrow$ nu putem preciza nimic, încercăm cu C. Raabe - Duhamel

3) Criteriul rădăcinii:

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șir cu elem $\in[0,\infty)$ a.î. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = r$

$\rightarrow$ Dacă $\begin{cases} r\in[0,1) \Rightarrow \sum x_n \text{ conv} \\ r\in(1,\infty) \Rightarrow \sum x_n \text{ div.} \end{cases}$

!! Dacă $r=1 \Rightarrow$ nu putem preciza

4) Criteriul lui Raabe-Duhamel:

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șir de elem $\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ a.î. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} n\left(1-\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}\right) \overset{not}{=} r$,

at $\sum x_n$ este:

$\begin{cases} r<0 \Leftrightarrow r\in(-\infty,0) \Rightarrow \text{serie div} \\ r\in(1,\infty) \Rightarrow \text{serie absolut conv} \\ r=0 \Rightarrow \text{serie divergentă / semiconv.} \\ r\in(0,1) \Rightarrow \text{serie semiconv.} \\ r=1 \Rightarrow \text{serie convergentă / semiconv.} \end{cases}$

! Semiconv. $\Leftrightarrow$ convergentă dar nu absolut convergentă

• SERII:

$\exists$ 2 serii remarcabile:

① Seria geometrică de rație q:

$\sum_{n\geq 0} q^n$, $q \in \mathbb{R}$, $q^0 = 1$

$\rightarrow$ Dacă $\begin{cases} q \in (-\infty, -1] \text{ serie divergentă} \\ q \in (-1, 1) \text{ serie convergentă cu } \sum_{n\geq 0} q^n = \frac{1}{1-q} \\ q \in [1, +\infty) \text{ serie divergentă} \end{cases}$

② Serie armonică generalizată:

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\rightarrow$ Dacă $\begin{cases} \alpha > 1 \Rightarrow \text{serie conv} \\ \alpha < 1 \Rightarrow \text{ -,, - div.} \\ \alpha = 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \text{ seria armonică} \end{cases}$

$\downarrow$

divergentă

• Criterii:

1) Criteriul de comparație cu limită:

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - elem din $(0, \infty)$

a) Dacă $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \in (0, \infty) \Rightarrow \sum x_n \sim \sum y_n$

$\downarrow$

de aceeași natură

b) Dacă $\lim \frac{x_n}{y_n} = 0$ și $\sum y_n$ este conv $\Bigg\} \Rightarrow \sum x_n$ conv.

• Serii cu termeni oarecare:

- Pas 1.: Calculăm abs. conv.
  - → Pas 1.1.: Încercăm să aplicăm crit: $\begin{cases} \text{- rap.} \\ \text{- rad.} \end{cases}$
  - → Pas 1.2.: Dacă nu merge cu crit de mai sus, încercăm cu crit: $\begin{cases} \text{- comp.} \\ \text{- Raabe} \end{cases}$
- Pas 2.: Vedem dacă term. general tinde la 0. Dacă nu, seria este div.
- Pas 3.: Încercăm să aplicăm crit. lui Leibniz

! Criteriul lui Leibniz:

Fie $(x_n)_{n \geq \mathbb{N}}$ un șir de elem. $\in [0, \infty)$ care satisface prop: $\begin{cases} 1. \ (x_n) \text{ descrescător} \\ 2. \ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \sum (-1)^n x_n$ este conv

• Serii de puteri în jurul lui x_0:

1) Formă: $\sum\limits_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n$

D = domeniu de convergență

$$R = \text{raza de conv.} = \begin{cases} 0, & \rho = \infty \\ \frac{1}{\rho}, & \rho \in (0, \infty) \\ \infty, & \rho = 0 \end{cases}$$

$$\rho = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

dacă $R = 0 \Rightarrow D = 0$

$R = \infty \Rightarrow D = \mathbb{R}$

$R = \frac{1}{\rho} \Rightarrow$ interval de convergență $(x_0 - R, x_0 + R)$

$D = (x_0 - R, x_0 + R) \subseteq D \subseteq [x_0 - R, x_0 + R]$

2) Alg. de rez.:

1. identificăm a_n
2. ρ + R
3. D
4. pt. capete det. dacă Σ conv; dacă este conv. $\Rightarrow$ pct $\in D$

- SERII REMARCABILE:

1) $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot x^n = \frac{1}{1+x}, \forall x \in (-1, 1)$

2) $\sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}, \forall x \in (-1, 1)$

3) $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$

4) $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$

5) $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$

Convergență simplă și uniformă

• Pași:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, f_n să fie cont.

2) găsim A (domeniul în care $f: A \to \mathbb{R}$)
a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, f cont

$\Rightarrow$ f_n converge simplu la f ($f_n \xrightarrow{s} f$)

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\sup |f_n(x) - f(x)|}_{a_n}$

$\rightarrow$ calc. cu ajutorul mărginirii a_n (tabel)

Dacă $\lim a_n = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{u} f$, altfel nu tinde uniform

Continuitatea la fct.

$\rightarrow$ Studiem cont. în pct. nesigure:

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to ax}} f(x, ax)$
- dacă tinde la ceva care depinde de a $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ nu este cont
- dacă nu depinde de a $\rightarrow$ POATE FI CONT. !!

Dacă poate fi cont $\Rightarrow$ APLICĂM MAJORAREA (vrem să ajungem la ceva care $\to 0$) ($x \to 0$; $y \to 0$)

Derivate parțiale

$\boxed{\text{Ex 1:}}$ $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y,z) = x^3 \cdot y + y^2 \cdot e^z$

$$f' = \left(\frac{\delta f}{\delta x} \quad \frac{\delta f}{\delta y} \quad \frac{\delta f}{\delta z} \right)$$

$$\frac{\delta f}{\delta x} = (x^3 \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ cst}}{y})' + (\underset{\substack{\downarrow \\ cst}}{y^2 \cdot e^z})' = 3x^2 y + x^3 \cdot \underset{0}{y'} + 0 = 3x^2 y$$

$$\frac{\delta f}{\delta y} = x^3 + 2ye^z$$

$$\frac{\delta f}{\delta z} = y^2 \cdot e^z$$

$\Rightarrow f' = (3x^2 y \quad x^3 + 2ye^z \quad y^2 e^z)$ sau $df = (3x^2 y)\,dx + (x^3 + 2ye^z)\,dy +$
$+ (y^2 e^z)\,dz$

Puncte critice

1. calc f' și dacă necunoscutele $= 0 \Rightarrow$ pct. critice (nu știm care)
2. calc f'' și după calc. Δ_k
   $\Rightarrow$ CAZURI:
   a) $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k > 0 \Rightarrow$ pct. critic minim $+ + + \dots$
   b) $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \dots \Rightarrow$ pct. max $- + - + \dots$
   c) punct șa ($\det \neq 0$)

Derivabilitate în continuare

→ Ni se dă o fct. pe ramuri : $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $k = 2$

$f(x,y) = \begin{cases} \dots & , \dots \\ 0 & , \dots \end{cases}$

a) Continuitatea :

- f e cont. pe $\mathbb{R}^2$ în afara originii
  pt. că : .... (ex: rap de fct. elementare | fct. cont. / polinomiale)

- continuitatea în origine

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to ax}} f(x, ax)$ | dacă depinde de a ⇒ nu e cont.
| dacă nu depinde ⇒ MAJORARE ⇒

$\Rightarrow |f(x,y) - f(0,0)| \to 0$ f este cont pe $\mathbb{R}^2$

$\not\to 0$ f este cont pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

b) ∃ + **continuitatea** derivatelor parțiale :

- calc. derivatele pe fiecare direcție
- văd cât dau în origine
- repet alg. de la a)

c) derivabilitatea lui f în origine :

Def: f este derivabilă în c dacă ∃ o aplicație liniară $\underline{\underline{L}}$ aî :

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c) - L(x-c)}{\|x - c\|} = 0$$

$$T(x,y) = ax + by \text{ cu } a = \frac{\delta f}{\delta x}(0,0), \; b = \frac{\delta f}{\delta y}(0,0)$$

f este derivabilă în (0,0) ⇔ ∃ $T \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ aî.
↳ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{f(x,y) - f(0,0) - T(x,y)}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 0$$

↳ Trebuie să arăt că lim. e egală cu 0 ⇒

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ y=ax}} \underbrace{\frac{f(x,y)-f(0,0)-T(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{g}$$

- depinde de a ⇒ lim nu este 0
- nu depinde ⇒ MAJ.

Dacă din majorare $|g| \to 0 \Rightarrow f$. derivabilă în origine

⚠ Dacă derivatele parțiale sunt discontinue ⇒ f nu e deriv.

⚠ Dacă f. e deriv. ⇒ derivatele parțiale sunt cont.