

Algoritmi avansați

Seminar 1 (săpt. 1 și 2)

1. Fie punctele $A = (1, 2, 3), B = (4, 5, 6) \in \mathbb{R}^3$.

- a) Fie $C = (a, 7, 8)$. Arătați că există a astfel ca punctele A, B, C să fie coliniare și pentru a astfel determinat calculați raportul $r(A, B, C)$.
- b) Determinați punctul P astfel ca raportul $r(A, P, B) = 1$.
- c) Dați exemplu de punct Q astfel ca $r(A, B, Q) < 0$ și $r(A, Q, B) < 0$.

Soluție.

a) Condiția de coliniaritate a punctelor A, B, C este echivalentă cu coliniaritatea vectorilor \overrightarrow{AB} și \overrightarrow{BC} . Au loc relațiile:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 3, 3), \quad \overrightarrow{BC} = (a - 4, 2, 2).$$

Vectorii dați sunt proporționali dacă și numai dacă $a - 4 = 2$, deci $a = 6$. De fapt, dreapta AB este direcționată de vectorul $(1, 1, 1)$ (și de orice vector proporțional cu acesta).

În acest caz, avem $\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 3, 3)$, $\overrightarrow{BC} = (2, 2, 2)$, deci

$$\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2} \overrightarrow{BC},$$

adică $r(A, B, C) = \frac{3}{2}$ (raportul $r(A, B, C)$ este acel scalar r pentru care are loc relația $\overrightarrow{AB} = r \overrightarrow{BC}$).

b) Condiția $r(A, P, B) = 1$ este echivalentă cu $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB}$. Punctul P care verifică această condiție este mijlocul segmentului $[AB]$, deci $P = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = (\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2})$.

c) Semnele rapoartelor indică faptul că (i) B nu este între A și Q ; (ii) Q nu este între A și B . Trebuie deci ca A să fie situat între Q și B . Un astfel de punct este $Q = (0, 1, 2)$ (l-am ales ca fiind $A - (1, 1, 1)$). Au loc relațiile

$$\overrightarrow{AB} = (3, 3, 3), \quad \overrightarrow{BQ} = (-4, -4, -4), \quad r(A, B, Q) = -\frac{3}{4},$$

$$\overrightarrow{AQ} = (-1, -1, -1), \quad \overrightarrow{QB} = (4, 4, 4), \quad r(A, Q, B) = -\frac{1}{4},$$

deci sunt verificate cerințele din enunț.

2. Fie punctele $P = (1, -1), Q = (3, 3)$.

- a) Calculați valoarea determinantului care apare în testul de orientare pentru muchia orientată \overrightarrow{PQ} și punctul de testare $O = (0, 0)$.
- b) Fie $R_\alpha = (\alpha, -\alpha)$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$. Determinați valorile lui α pentru care punctul R_α este situat în dreapta muchiei orientate \overrightarrow{PQ} .

Soluție.

a) Conform teoriei,

$$\Delta(P, Q, R) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}.$$

În exemplu avem:

$$\Delta(P, Q, R) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 6 \text{ (dezvoltare după ultima coloană)}.$$

Se poate verifica și pe un desen că O este la stânga muchiei orientate \overrightarrow{PQ} .

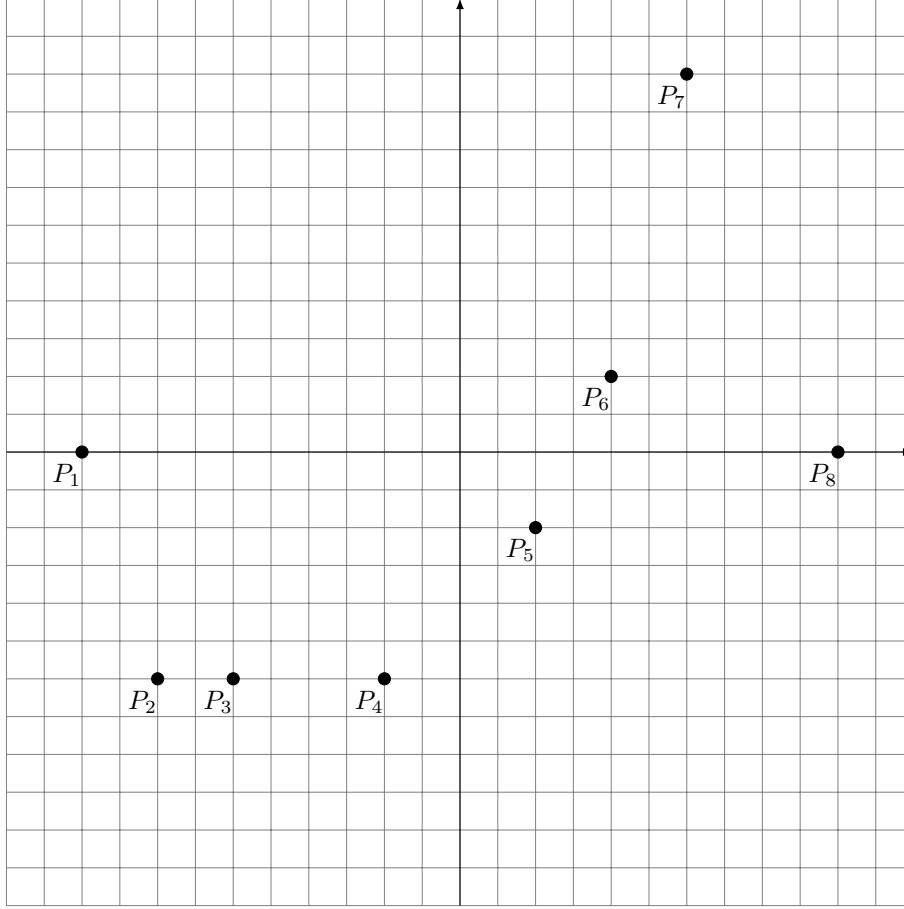
b) Calculăm, pentru un α , valoarea $\Delta(P, Q, R_\alpha)$:

$$\Delta(P, Q, R_\alpha) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & \alpha \\ -1 & 3 & -\alpha \end{vmatrix} = 6(1 - \alpha).$$

Punctul R_α este situat în dreapta muchiei orientate $\overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow \Delta(P, Q, R_\alpha) < 0 \Leftrightarrow \alpha > 1$. Acest lucru poate fi verificat și pe desen, punctul R_α este variabil pe cea de-a doua bisectoare (de ecuație $x + y = 0$), iar pentru $\alpha > 1$ acest punct este situat în dreapta muchiei orientate \overrightarrow{PQ} .

3. Fie $\mathcal{M} = \{P_1, P_2, \dots, P_9\}$, unde $P_1 = (-5, 0)$, $P_2 = (-4, -3)$, $P_3 = (-3, -3)$, $P_4 = (-1, -3)$, $P_5 = (1, -1)$, $P_6 = (2, 1)$, $P_7 = (3, 5)$, $P_8 = (5, 0)$. Detaliați cum evoluează lista \mathcal{L}_i a vârfurilor care determină marginea inferioară a frontierei acoperirii convexe a lui \mathcal{M} , obținută pe parcursul Graham's scan, varianta Andrew.

Soluție.



Lista \mathcal{L}_i evoluează astfel:

P_1P_2

$P_1P_2P_3$

$P_1P_2P_3P_4$ // este eliminat P_3 , deoarece P_2, P_3, P_4 coliniare (nu viraj la stânga)

$P_1P_2P_4$

$P_1P_2P_4P_5$

$P_1P_2P_4P_5P_6$

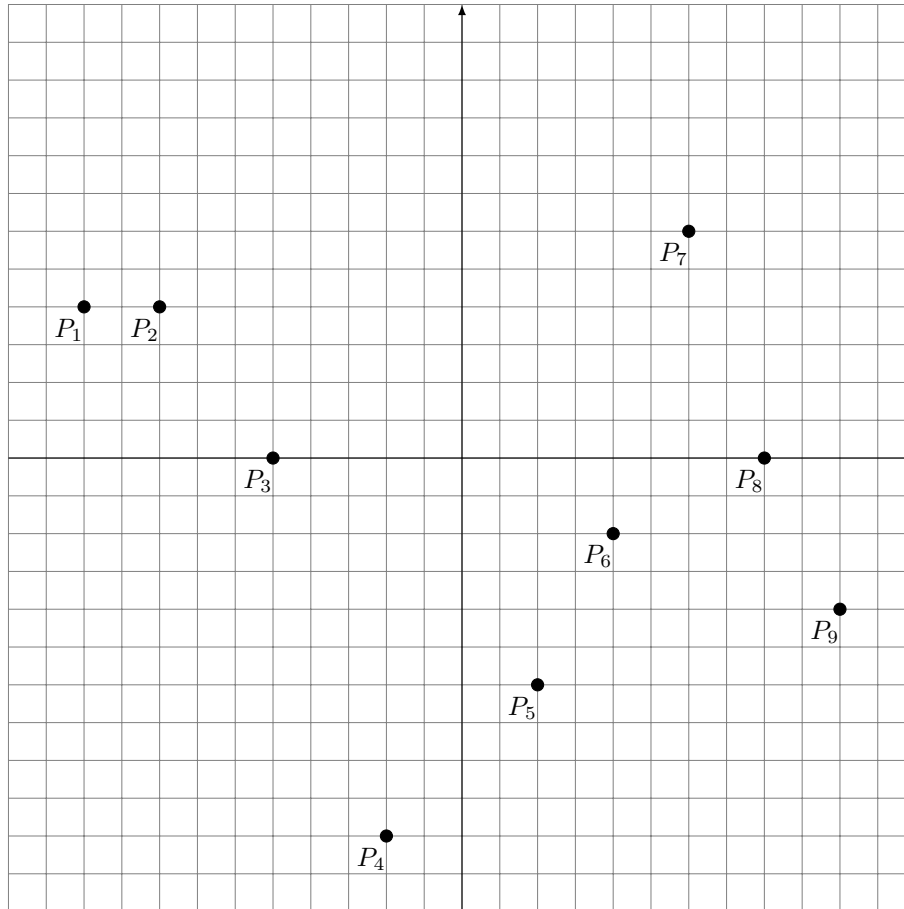
$P_1P_2P_4P_5P_6P_7$

$P_1P_2P_4P_5P_6P_7P_8$ // punctele P_7, P_6, P_5 sunt eliminate în această ordine

$P_1P_2P_4P_8$ // lista finală (\mathcal{L}_i) a vârfurilor care determină marginea inferioară

4. Dați un exemplu de mulțime \mathcal{M} din planul \mathbb{R}^2 pentru care, la final, \mathcal{L}_i are 3 elemente, dar, pe parcursul algoritmului, numărul maxim de elemente al lui \mathcal{L}_i este egal cu 6 (\mathcal{L}_i este lista vârfurilor care determină marginea inferioară a frontierei acoperirii convexe a lui \mathcal{M} , obținută pe parcursul Graham's scan, varianta Andrew). Justificați!

Soluție.



Lista \mathcal{L}_i are la final 3 elemente (P_1, P_4, P_9).

Numărul maxim de elemente este 6: $P_1P_4P_5P_6P_7P_8$ (la adăugarea lui P_8 în listă).

Obs. Numărul maxim de elemente după verificări ale virajelor este 5: $P_1P_4P_5P_6P_7$.

5. *Discutați un algoritm bazat pe paradigma Divide et impera pentru determinarea acoperirii convexe. Analizați complexitatea-timp.*

Soluție. Complexitatea-timp este $O(n \log n)$. O descriere a algoritmului și a analizei complexității poate fi găsită în [survey-ul \[Lee & Preparata, 1984\]](#).