$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) > 0$

$Q(B) = \mathbb{P}(B \mid A)$, $\forall B \in \mathcal{F} \cap A = \{F \cap A \mid F \in \mathcal{F}\}$

$\hookrightarrow$ este prob.

Formula lui Bayes $Q(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \mid C)$

$$Q(A \mid B) = \frac{Q(B \mid A) \cdot Q(A)}{Q(B)}$$

$$Q(A \mid B) = \mathbb{P}(A \mid B, C)$$

$$\mathbb{P}(A \mid \overset{B \cap C}{B, C}) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A, C) \cdot \mathbb{P}(A \mid C)}{\mathbb{P}(B \mid C)}$$

Exp: Pp că avem 2 monede $<$ una echilibrată (prob $H = 1/2$); una trucată (prob $H = 3/4$)

Șansa să alegem oricare dintre cele două monede este $1/2$

Obținem în urma celor 3 aruncări HHH

a) Având această informație care este prob să fi ales moneda echilibrată?

b) Pp că aruncăm a 4-a oară. Care este prob să fi obținut tot H?

a) A - ev. prin care în primele 3 aruncări am obținut HHH

B - ev. prin care am ales moneda echilibrată

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid B)\, \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \mid B) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A \mid B)\, \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \mid B^c)\, \mathbb{P}(B^c)} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{3}{2}\right)^3}$$

b) C - ev prin care la a 4-a aruncare am obținut H

$\mathbb{P}(C \mid A) = ?$

Dacă notăm $Q(C) = \mathbb{P}(C \mid A)$

Formula prob. totale: $Q(C) = Q(C \mid B)\, Q(B) + Q(C \mid B^c)\, Q(B^c) = \dots$

$$\left.\begin{aligned} Q(B) &= \mathbb{P}(B \mid A) \\ Q(B^c) &= 1 - Q(B) \\ Q(C \mid B) &= 1/2 \\ Q(C \mid B^c) &= 3/4 \end{aligned}\right\}$$

Independență

Două evenimente sunt independente dacă realizarea unuia nu aduce niciun fel de informație suplimentară despre realizarea celuilalt.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $A, B \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

Def: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un c.p. și $A, B \in \mathcal{F}$.

Spunem că A și B sunt indep și notăm $A \perp\!\!\!\perp B$ dacă $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$

Ex: Dacă $A \perp\!\!\!\perp B$ at. $A^c \perp\!\!\!\perp B$

$A \perp\!\!\!\perp B^c$

$A^c \perp\!\!\!\perp B^c$

Exp Aruncăm cu banul de 2 ori

A_1 - ev prin care la prima aruncare am obținut H

A_2 - ——— " ——— a 2-a ——— " ———

$\Omega = \{H, T\}^2$

$A_1 = \{(H,H), (H,T)\}$

$A_2 = \{(T,H), (H,H)\}$

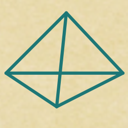
$A_1 \cap A_2 = \{(H,H)\}$

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1\cap A_2) &= 1/4 \\ \mathbb{P}(A_1) &= 2/4 = 1/2 \\ \mathbb{P}(A_2) &= 2/4 = 1/2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbb{P}(A_1\cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2)$$

$A_1 \perp\!\!\!\perp A_2$

Exp: Zar cu 4 fețe. Aruncăm de 4 ori

$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}^2$



$A = \{\text{primul zar cu fața } 1\} = \{(1,x) \mid x \in \{1,2,3,4\}\}$ $\mathbb{P}(A) = 1/4$

$B = \{\text{suma punctelor este } 5\} = \{(1,4), (4,1), (2,3), (3,2)\}$ $\mathbb{P}(A) = 1/4$

$A\cap B = \{(1,4)\}$ $\mathbb{P}(A\cap B) = 1/16$

$C = \{\text{minimul este } 2\}$

$D = \{\text{maximul este } 2\}$

$\mathbb{P}(C) = 5/16$ $\quad\quad$ $\mathbb{P}(C \cap D) = 1/16$

$\mathbb{P}(D) = 3/16$

Def: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. și $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$. Spunem că $A_1 \dots A_n$ sunt indep (mutual) dacă $\mathbb{P}(\bigcap_{i \in I} A) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$, $\forall I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$

Obs A_1, A_2, A_3 sunt indep $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2)$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_3)$$

$$\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3)$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3)$$

Exp: Aruncăm 2 monede

$\mathbb{P}(A_1) = 1/2 \leftarrow \{(H,H), (H,T)\} = A_1$ - prima H $\quad\quad A_1 \perp\!\!\!\perp A_2$

$\mathbb{P}(A_2) = 1/2 \leftarrow \{(H,H), (T,H)\} = A_2$ - a doua H

$\mathbb{P}(A_3) = 1/2 \leftarrow \{(T,H), (H,T)\} = A_3$ - cele 2 sunt diferite

$$\underset{(H,H)}{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)} = \underset{(H,T)}{\mathbb{P}(A_1 \cap A_3)} = \underset{(T,H)}{\mathbb{P}(A_2 \cap A_3)} = 1/4$$

A_1, A_2, A_3 sunt indep 2 câte 2

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0 \neq 1/8 = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3)$

A_1, A_2, A_3 nu sunt indep

Def: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. și $A, B, C \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(C) > 0$

Spunem că A și B sunt indep. condiționat la C dacă

$$\mathbb{P}(A \cap B \mid C) = \mathbb{P}(A \mid C) \times \mathbb{P}(B \mid C)$$

Obs: $Q(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \mid C) \Rightarrow Q(A \cap B) = Q(A) \times Q(B)$

Exp: D - {o persoană are o afecțiune} $\mathbb{P}(D) = 1\%$

T - {testul a ieșit pozitiv} acuratețea (sensitivitatea/specificitatea) = 95%

$\mathbb{P}(T|D) = \mathbb{P}(T^c|D^c) = 95\%$

$\mathbb{P}(D|T) \simeq 15\%$

Să presupunem că persoana mai efectuează un test (pp că rezultatele celor 2 teste sunt independente în raport cu statusul bolii) și testul este tot +. Care este prob. să aibă covid?

T_1 - primul test +

T_2 - al 2-lea test +

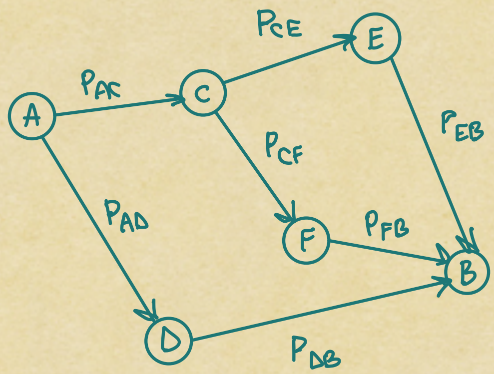
$$\mathbb{P}(T_1 \cap T_2 | D) = \overset{0.95}{\mathbb{P}(T_1|D)} \times \overset{0.95}{\mathbb{P}(T_2|D)}$$

$$\mathbb{P}(T_1 \cap T_2 | D^c) = \underset{0.05}{\mathbb{P}(T_1|D^c)} \times \underset{0.05}{\mathbb{P}(T_2|D^c)}$$

$$\mathbb{P}(D|T_1 \cap T_2) = \frac{\mathbb{P}(T_1 \cap T_2 | D)\, \mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(T_1 \cap T_2)}$$

$$\mathbb{P}(T_1 \cap T_2) = \mathbb{P}(T_1 \cap T_2 | D^c)\mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(T_1 \cap T_2 | D^c)\underset{0.99}{\mathbb{P}(D^c)} \simeq 0.78$$

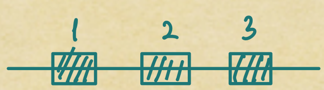
Exp:



$A \xrightarrow{P_{AB}} B$

Care este prob să transmitem mesaj de la A la B?

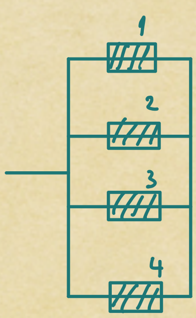
a) Subsistem serie



$p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n$

$P_{AC} = P_{AB} \times P_{BC}$

b) Subsistem paralel



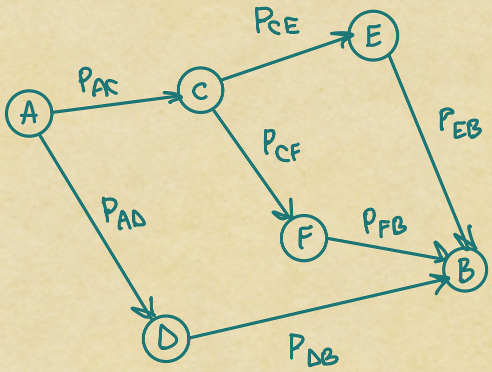
P(transmit mesaj sist paralel) =

$= 1 - P$(nu transmit mesaj sist paralel) =

$= 1 - p$(eșec în nod 1, nod 2, ...) =

$= 1 - p$(eșec nod 1) $\times \ldots \times p$(eșec nod n) =

$= 1 - (1-p_1) \times (1-p_2) \times \ldots \times (1-p_n)$



$A \xrightarrow{p_{AB}} B$

Care este prob să transmitem mesaj de la A la B?

$P(A\to B) = ?$

$P(C\to B) = 1-(1-P(C\to E, E\to B))(1-P(C\to F, F\to B)) =$

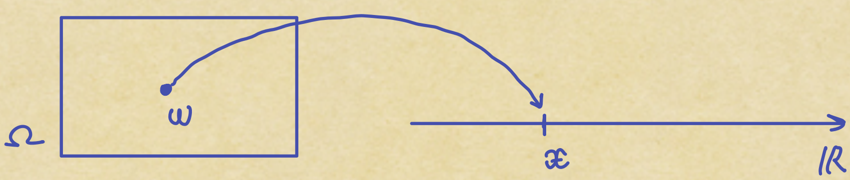
$= 1-(1-p_{CE}\times p_{EB})(1-p_{CF}\times p_{FB})$

$P(A\to B) = 1-(1-p_{AC}\times p_{CB})(1-p_{AD}\times p_{DB})$

Variabile aleatoare

Def: Fie $(\Omega,\mathcal{F},P)$ un c.p. și $X:\Omega\to\mathbb{R}$ o funcție. Spunem că X este o variabilă aleatoare, v.a., dacă mulțimea

$$\{\omega\in\Omega \mid X(\omega)\le x\}\in\mathcal{F}, \ \forall x\in\mathbb{R}$$



Exp Aruncăm 2 zaruri

Def X = suma punctelor de pe cele 2 zaruri

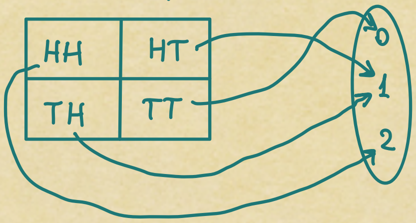
3 5 $\longrightarrow$ 8

$X(\underbrace{(3,5)}_{\omega}) = 8$

Exp Aruncăm de 2 ori cu banul

$X =$ nr de H din cele 2 aruncări

$\Omega = \{\underset{2}{\underbrace{HH}}, \underset{1}{\underbrace{HT}}, \underset{1}{\underbrace{TH}}, \underset{0}{\underbrace{TT}}\}$



$x \subseteq \mathbb{R}$

Obs: $\{X \le x\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \le x\}$

$\{X \in A\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$

$= X^{-1}(A)$

$X^{-1}(\{0\}) = \{TT\}$

$X^{-1}(\{1\}) = \{HT, TH\}$

$X^{-1}(\{2\}) = \{HH\}$

$\{X \le x\} \in \mathcal{F}_{P(\Omega)}$

Dacă $x < 0$ $\{X < x\} = \emptyset$

$x \in [0,1)$ $\{X \le x\} = \{TT\}$

Dacă $x \in [1,2)$

$\{X \le x\} = \{X = 0 \text{ sau } X = 1\} = \{X = 0\} \cup \{X = 1\}$

$= \{TT, TH, HT\}$

$x \in [2, +\infty)$

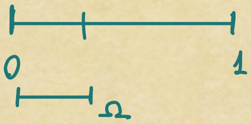
$\{X \le x\} = \Omega$

Not: Variabilele aleatoare se notează cu litere mari

$X, Y, Z, T, W, \ldots$

X
- → discretă: $X(\Omega)$ este cel mult numărabilă
- → continuă

Exp $[0,1)$ luăm un punct la întâmplare



a^3

$$\operatorname{sgn}(a) = \begin{cases} -1, & a<0 \\ 0, & a=0 \\ 1, & a>0 \end{cases}$$

Vrem să calculăm $\mathbb{P}(X\in A)$ unde $A\subseteq \mathbb{R}$

Def: (Repartiția unei v.a.)

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. și $X:\Omega\to\mathbb{R}$ o v.a.

Se numește repartiția lui X (distribuția) probabilitatea pe $\mathbb{R}$ definită prin $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X\in A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$

$= (\mathbb{P}\circ X^{-1})(A)$, $\forall A$ interval din $\mathbb{R}$

(a,b)

$(-\infty, x]$

$$\boxed{\mathbb{P}_X = \mathbb{P}\circ X^{-1}}$$

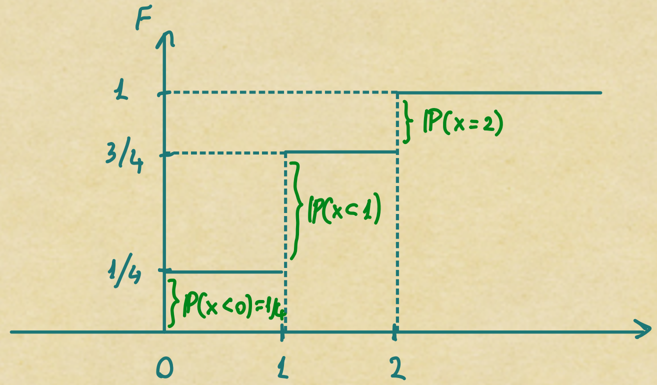
Def: (Funcția de repartiție) Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p., $X:\Omega\to\mathbb{R}$ o v.a. Definim funcția de rep. a lui X $F:\mathbb{R}\to[0,1]$ prin $F(x) = \mathbb{P}(X\le x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$

Obs: $A = (-\infty, x]$

$\mathbb{P}_X(A) = F(x)$

Exp: Aruncăm de 2 ori cu banul și $X = \#$ de H, în cele 2 aruncări

$$F(x) = \mathbb{P}(X\le x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1/4, & x\in[0,1) \\ 3/4, & x\in[1,2) \\ 1, & x\in[2,\infty) \end{cases}$$



Propr. funcției de rep.

a) F este crescătoare

$x < y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$

b) F este continuă la dreapta

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

$$P(X = x) = P(X \leq x) - P(X < x)$$

$$= F(x) - F(x-)$$

$\hookrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} F(x)$