Consultatie PS 21 iun 2023

Ex 1

60% nu folosesc nici F nici T

20% folosesc F

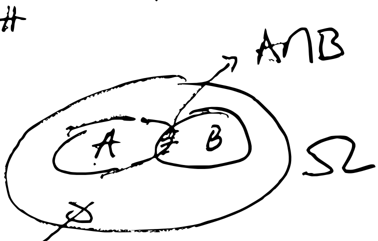
30% folosesc T

a) Care este prob. ca stud. să aibă F sau T?

b) — " — F și T?

c) Care este prob. ca stud. să folosească o singură platformă?

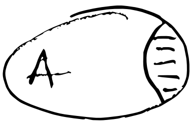
a)



A → ev. prin care stud. folosesc F

$(A\cup B)^c$ ev. prin care stud nu folosesc nici F nici T

B → — " — T



$A\cap B^c$ — doar F

$B\cap A^c$ — doar T

$\mathbb{P}(A\cup B)=?$

$\mathbb{P}(A\cap B)=?$

$\mathbb{P}(A)=0.2$

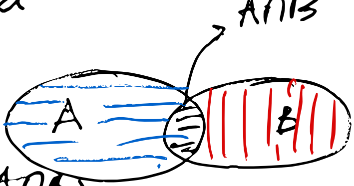
$\mathbb{P}(B)=0.3$

$\mathbb{P}((A\cup B)^c)=0.6$

$$\mathbb{P}(A\cup B)=1-\mathbb{P}((A\cup B)^c)=1-0.6=0.4$$

$$\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cup B)$$
$$=0.2+0.3-0.4=0.1$$

c) "o singură platformă"



$$A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$$
$$=\underbrace{(A\cap B^c)}_{\text{doar F}}\cup\underbrace{(B\cap A^c)}_{\text{doar T}}$$

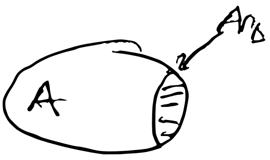
doar F sau doar T

$C\subseteq D$

$\mathbb{P}(D\setminus C)=\mathbb{P}(D)-\mathbb{P}(C)$

$$\mathbb{P}(A\Delta B)=\mathbb{P}((A\cup B)\setminus(A\cap B))$$
$$=\mathbb{P}(A\cup B)-\mathbb{P}(A\cap B)=0.4-0.1=\underline{0.3}$$

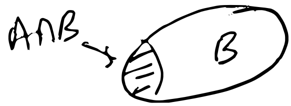
$$\mathbb{P}(A\Delta B)=\mathbb{P}((A\cap B^c)\cup(B\cap A^c))$$
$$=\mathbb{P}(A\cap B^c)+\mathbb{P}(B\cap A^c)$$



$$\mathbb{P}(A\cap B^c)=\mathbb{P}(A\setminus(A\cap B))=\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(A\cap B)$$
$$=0.2-0.1=0.1$$

$\mathbb{P}(B \cap A^c) = \mathbb{P}(B \setminus (A \cap B)) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

$= 0.3 - 0.1 = 0.2$



$\mathbb{P}(A \Delta B) = \mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(B \cap A^c) = 0.1 + 0.2 = \underline{\underline{0.3}}$

Ex 2) O urnă cu $\underset{15}{\underline{a}}$ bile albe și $\underset{7}{\underline{b}}$ bile negre.
Extragem fără întoarcere 3 bile și ne interesăm la următoarele prob:

a) care este prob. ca bilele extrase să fie în ordinea alb, alb, negru?
alb, negru, alb?

b) Care este prob. ca 2 din cele 3 bile extrase să fie de culoare albă?

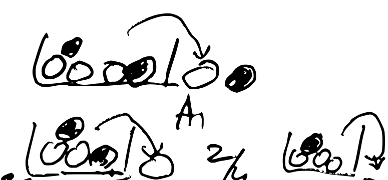
Sol:

Fie $\underline{\underline{A_i}}$ - evenimentul prin care la extragerea i am obținut o bilă albă

Cum se scrie ev. din punctul a)?

$\{$alb, alb, negru$\} = A_1 \cap A_2 \cap A_3^c$

$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) =$



ar fi fost indep dacă extragerea ar fi fost cu întoarcere $2/4$ $\frac{3}{4}$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\,\mathbb{P}(A_3^c \mid A_1 \cap A_2)$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

formula produs

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{a}{a+b} \quad ; \quad \mathbb{P}(A_2 \mid A_1) = \frac{a-1}{a-1+b}$$

$$\mathbb{P}(A_3^c \mid A_1 \cap A_2) = \frac{b}{a-2+b}$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) = \frac{a}{a+b} \times \frac{a-1}{a-1+b} \times \frac{b}{a-2+b}$$

$\{$alb, negru, alb$\} = A_1 \cap A_2^c \cap A_3$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2^c \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2^c \mid A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2^c)$$

$$= \frac{a}{a+b} \times \frac{b}{a-1+b} \times \frac{a-1}{a-1+b-1}$$

b) $\{$două din cele 3 sunt albe$\}$

$= \{$exact 2 din 3 sunt albe$\}$

$= (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3)$

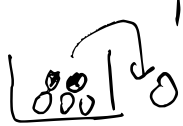
$\{$cel puțin 2 din 3 sunt albe$\} = \downarrow \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

Putem modifica procedura de extragere:

a – albe

b – negre

I extragem o bilă din urnă, notăm culoarea, introducem bila în urnă împreună cu d_i bile de aceeași culoare



II introducem în urnă d_1 bile de culoare albă dacă bila extrasă a fost a

d_2 bile de culoare neagră dacă bila extrasă a fost n.

a) Care este prob ca a 2-a bilă extrasă să fie neagră

$$\underline{P(A_2^c)} = P(A_2^c | A_1)\underline{P(A_1)} + P(A_2^c | A_1^c)P(A_1^c)$$

formula prob totale

$$= \frac{a}{a+b} \times \frac{b}{a+b+d_1} + \frac{b}{a+b} \times \frac{b+d_2}{a+b+d_2}$$

prima extragere

b) Care este prob ca prima să fie neagră știind că a-2-a este de culoare neagră?

$$P(A_1^c | A_2^c) = ?$$

$$\mathbb{P}(A_1 | A_2) = \frac{\mathbb{P}(A_2 | A_1)\,\mathbb{P}(A_1)}{\mathbb{P}(A_2)}$$

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{b}{a+b}$$

$$\mathbb{P}(A_2^c | A_1) = \frac{b+d_2}{a+b+d_2}$$

$$\mathbb{P}(A_1 | A_2) = \frac{\frac{b+d_2}{a+b+d_2} \times \frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b} \times \frac{b}{a+b+d_1} + \frac{b}{a+b} \times \frac{b+d_2}{a+b+d_2}}$$

Pp că $\underline{d_1 = d_2 = d}$ (suntem în scenariul 1)

Să calculăm $\mathbb{P}(A_{2023}^c) = ?$

formula prob totale

$$\mathbb{P}(A_n^c) = \underline{\mathbb{P}(A_n^c / A_{n-1})\mathbb{P}(A_{n-1}) + \mathbb{P}(A_n^c / A_{n-1}^c)\mathbb{P}(A_{n-1}^c)}$$

Folosim inductiv:

$\boxed{n=2}$ $\quad \underline{\mathbb{P}(A_2^c)} = \frac{a}{a+b} \times \frac{b}{a+b+d} + \frac{b}{a+b} \times \frac{b+d}{a+b+d}$

$d=0$ nu adaug nimic

„extragerea este cu întoarcere"

$$= \frac{ab + b(b+d)}{(a+b)(a+b+d)}$$

$$= \frac{b(a+\cancel{b+d})}{(a+b)(a+\cancel{b+d})} = \frac{b}{a+b}$$

$$= \mathbb{P}(A_1)$$

$\underline{n=2}$ $\mathbb{P}(A_2^c) = \mathbb{P}(A_1^c)$

Vom arăta că $\mathbb{P}(A_n^c) = \mathbb{P}(A_1^c)$, $\forall n \geq 1$

Ip. de inducție: Pp. $\mathbb{P}(A_k^c) = \mathbb{P}(A_1^c)$, $\forall k \in \{1, \dots n-1\}$

și presupunem să arătăm pt n

Fie N_k - nr. de bile negre din urnă la pasul k

$$\mathbb{P}(A_n^c) = \mathbb{P}(A_n^c | A_{n-1})\mathbb{P}(A_{n-1}) + \mathbb{P}(A_n^c | A_{n-1}^c)\mathbb{P}(A_{n-1}^c)$$

$$= \frac{N_{n-2}}{a+b+(n-1)d} \times \frac{a}{a+b} + \frac{N_{n-2}+d}{a+b+(n-1)d} \times \frac{b}{a+b}$$

din ip. dind $\mathbb{P}(A_{n-1}^c) = \frac{b}{a+b} \Rightarrow \mathbb{P}(A_{n-1}) = \frac{a}{a+b}$

$\underline{N_{n-2} = ?}$ $\mathbb{P}(A_{n-2}^c) = \frac{b}{a+b} = \frac{N_{n-2}}{a+b+(n-2)d}$

$$N_{n-2} = \frac{b\,[a+b+(n-2)d]}{a+b}$$

$$\mathbb{P}(A_n^c) = \frac{a N_{n-2} + b(N_{n-2}+d)}{(a+b)[a+b+(n-1)d]} = \frac{b}{a+b}$$

Numărător:

$$\frac{ab}{a+b}[a+b+(n-2)d] + \frac{b}{a+b}[a+b+(n-2)d + (a+b)d]$$

Calculați care este prob. ca prima bilă extrasă să fie de culoare neagră știind că următoarele 2023 sunt de culoare neagră

$$\mathbb{P}(A_1^c \mid A_2^c \cap A_3^c \cap \dots \cap A_{2023}^c) = (*)$$

Calculați prob. ca primele 2023 de bile extrase să fie de culoare neagră.

$$\mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_{2023}^c) \overset{\text{formula produs}}{=} \mathbb{P}(A_1^c)\,\mathbb{P}(A_2^c \mid A_1^c) \times \mathbb{P}(A_3^c \mid A_1^c \cap A_2^c) \times \dots \times \mathbb{P}(A_{2023}^c \mid A_1^c \cap \dots \cap A_{2022}^c)$$

$$= \frac{b}{a+b} \times \frac{b+d}{a+b+d} \times \frac{b+2d}{a+b+2d} \times \dots \times \frac{b+2022d}{a+b+2022d}$$

$a=15,\ b=7,\ d=3$

$$(*)\quad \frac{\mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_{2023}^c)}{\mathbb{P}(\underbrace{A_2^c \cap \dots \cap A_{2023}^c}_{B})} \qquad \Omega = A_1 \cup A_1^c$$

$\cap\,\Omega$

$$\mathbb{P}(B \cap \Omega) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2^c \cap \dots \cap A_{2023}^c) + \mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_{2023}^c)$$

$$B \cap \Omega = B \cap (A_1 \cup A_1^c) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_1^c)$$

disjuncte

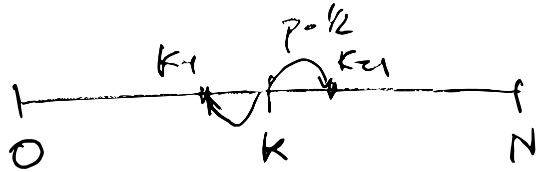
Ex3 O casă N u.m.

Voi aveți k u.m $\quad 0<k<N$

Aruncăm o monedă echilibrată ($p=1/2$) în mod repetat; dacă moneda H atunci managerul băncii vă dă 1 u.m.; dacă moneda T atunci îi dați managerului 1 u.m.

Jocul continuă până când am cumpărat casa sau am ajuns la faliment.

Care este prob. de faliment?



prob. ruină – R (ruina)

$$\mathbb{P}_k(R) = \mathbb{P}(R \mid \text{am plecat cu } k \text{ u.m})$$

$$\mathbb{P}_k(R) = \mathbb{P}_k(R\mid H)\underbrace{\mathbb{P}(H)}_{1/2\,(p)} + \mathbb{P}_k(R\mid T)\underbrace{\mathbb{P}(T)}_{1/2\,(1-p)}$$

$$= \mathbb{P}_{k+1}(R)\cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,\mathbb{P}_{k-1}(R)$$

$$\begin{cases} \mathbb{P}_0(R) = 1 \\ \mathbb{P}_N(R) = 0 \end{cases}$$

Ex 4 O persoană are în buzunar 2 monede

1 → echilibrată (normală cu 2 fețe)

1 → fețe identice H

Aruncă moneda și ea a picat H

a) Care este prob. ca moneda să fi fost cea echilibrată

b) Aruncă pt a 2a oară moneda și obține tot H. Care este acum prob. ca moneda să fi fost cea normală?

Sol:

A_1 – pers. alege moneda 1

A_2 – pers. alege moneda 2

a)

$$\mathbb{P}(A_1 \mid H) \underset{\text{Bayes}}{=} \frac{\mathbb{P}(H \mid A_1)\mathbb{P}(A_1)}{\mathbb{P}(H)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(H \mid A_1)\mathbb{P}(A_1)}{\mathbb{P}(H \mid A_1)\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(H \mid A_2)\mathbb{P}(A_2)} = \frac{1/2 \times 1/2}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{3}$$

b) $\mathbb{P}(A_1 \mid (H,H))$

$\mathbb{P}(A_1 \mid B_1 \cap B_2)$

B_1 – am obținut H la prima aruncare

B_2 – am obținut H la a 2-a aruncare

Formula lui Bayes:

$$\mathbb{P}(A_1 \mid B_1 \cap B_2) = \frac{\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \mid A_1)\,\mathbb{P}(A_1)}{\mathbb{P}(B_1 \cap B_2)}$$

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \mid A_1)\,\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \mid A_2)\,\mathbb{P}(A_2)$$

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \mid A_1) = \mathbb{P}(B_1 \mid A_1)\,\mathbb{P}(B_2 \mid A_1) \quad \text{(indep. cond!)}$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \mid A_2) = 1$$

$$\mathbb{P}(A_1 \mid B_1 \cap B_2) = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{5}$$

$\mathbb{P}(A_1 \mid B_1) = 1/3$ $\qquad$ $\mathbb{P}(A_1 \mid B_1 \cap B_2 \cap B_3) < \frac{1}{5}$

Ex 5 Efectuăm aruncări succesive a două zaruri echilibrate.
Vrem să det. prob. evenimentului ca suma 5 să apară înaintea sumei 7.

Sol: $\overline{(1,3)}$, $\overline{(6,2)}$, $\overline{(3,5)}$, $\boxed{(2,3)}$, $(1,6)$
$\quad$ 1 $\quad$ 2 $\quad$ 3 $\quad$ 4 $\quad$ 5

– în primele 3 nu am nici 5 nici 7, și în a 4-a am 5

Fie $\begin{cases} A_i \text{ - ev. prin care la a i-a aruncare am obținut suma 5} \\ B_i \text{ - ——— suma 7} \end{cases}$

$A = \{$ suma 5 apare înaintea sumei 7 $\}$

$= \bigcup_{i=1}^{\infty} \boxed{\quad} E_i$

E_1 - apare suma 5 la prima aruncare

E_2 - apare suma 5 la a 2-a aruncare iar la prima nu a apărut nici 5 nici 7

E_n - în primele n-1 aruncări nu apare nici 5 nici 7 iar la a n-a aruncare apare 5

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \qquad E_i \cap E_j = \emptyset, \ i \neq j$$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n)$$

$\mathbb{P}(E_n) = ?$

$$E_n = (A_1^c \cap B_1^c) \cap (A_2^c \cap B_2^c) \cap \dots \cap (A_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \cap A_n$$

← la a (n-1) aruncare nu am obținut nici 5 nici 7

$$\mathbb{P}(E_n) \overset{\text{indep}}{=} \mathbb{P}(A_1^c \cap B_1^c) \times \mathbb{P}(A_2^c \cap B_2^c) \times \dots \times \mathbb{P}(A_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \times \mathbb{P}(A_n)$$

$$\mathbb{P}(A_1^c \cap B_1^c) = \mathbb{P}(A_2^c \cap B_2^c) = \dots = \mathbb{P}(A_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c)$$

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A_1) = 4/36$$

$\underline{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)} \to 5$

$$\mathbb{P}(A_1^c \cap B_1^c) = \frac{26}{36}$$

$\underline{(1,6),(6,1),(3,4),(4,3),(2,5),(5,2)} \to 7.$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n\geq 1}^{\infty} \left(\frac{26}{36}\right)^{n-1} \frac{4}{36} = \frac{4}{36} \sum_{n\geq 1}^{\infty} \left(\frac{26}{36}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{9} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{13}{18}\right)^{n-1} = \frac{1}{9} \frac{1}{1-\frac{13}{18}} = \frac{2}{5}.$$

$A_1^c \cap B_1^c$ — nu am nici suma 5 nici suma 7.

$$\Omega = \{(i,j) \mid 1 \leq i,j \leq 6\} = \{1,2,\dots,6\}^2$$

suma 5 : 4

suma 7 : 6

$$\mathbb{P}(A_1^c \cap B_1^c) = \frac{36-10}{36} = \frac{26}{36}$$