Algoritmi avansaţi

Seminar 3 (săpt. 5 şi 6)

1. *Daţi exemplu de mulţime* $\mathcal{M} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ *din* $\mathbb{R}^2$ *astfel ca diagrama Voronoi asociată lui* $\mathcal{M}$ *să conţină exact patru semidrepte, iar diagrama Voronoi asociată lui* $\mathcal{M} \setminus \{A_1\}$ *să conţină exact cinci semidrepte. Justificaţi alegerea făcută.*

2. *a) Fie o mulţime cu n situri necoliniare. Atunci, pentru diagrama Voronoi asociată au loc inegalităţile*

$$n_v \leq 2n - 5, \qquad n_m \leq 3n - 6,$$

unde n_v *este numărul de vârfuri ale diagramei şi* n_m *este numărul de muchii al acesteia.*

b) Câte vârfuri poate avea diagrama Voronoi $\mathcal{D}$ *asociată unei mulţimi cu cinci puncte din* $\mathbb{R}^2$ *ştiind că* $\mathcal{D}$ *are exact cinci semidrepte? Analizaţi toate cazurile. Este atins numărul maxim de vârfuri posibile* ($n_v = 2n - 5$)*? Justificaţi!*

3. *Fie punctele* $O = (0, 0)$, $A = (\alpha, 0)$, $B = (1, 1)$, $C = (2, 0)$, $D = (1, -1)$, *unde* $\alpha \in \mathbb{R}$ *este un parametru. Discutaţi, în funcţie de* α, *numărul de muchii de tip semidreaptă ale diagramei Voronoi asociate mulţimii* $\{O, A, B, C, D\}$.

4. *(i) Fie punctul* $A = (1, 2)$. *Alegeţi două drepte distincte* d, g *care trec prin* A, *determinaţi dualele* A^*, d^*, g^* *şi verificaţi că* A^* *este dreapta determinată de punctele* d^* *şi* g^*.

(ii) Determinaţi duala următoarei configuraţii: Fie patru drepte care trec printr-un acelaşi punct M. Se aleg două dintre ele; pe fiecare din aceste două drepte se consideră câte un punct diferit de M şi se consideră dreapta determinată de cele două puncte. *Desenaţi ambele configuraţii. Completaţi configuraţia iniţială (adăugând puncte/drepte) astfel încât să obţineţi o configuraţie autoduală (i.e. configuraţia duală să aibă aceleaşi elemente geometrice şi aceleaşi incidenţe ca cea iniţială).*

5. *a) Fie semiplanele* $H : x + y - 3 \leq 0$ *şi* $H' : -2x + y + 1 \leq 0$. *Daţi exemplu de semiplan* H'' *astfel ca intersecţia* $H \cap H' \cap H''$ *să fie un triunghi dreptunghic.*

b) Fie semiplanele H_1, H_2, H_3, H_4 *date de inecuaţiile*

$$H_1 : -y + 1 \leq 0; \qquad H_2 : y - 5 \leq 0; \qquad H_3 : -x \leq 0; \qquad H_4 : x - y + a \leq 0,$$

unde $a \in \mathbb{R}$ *este un parametru. Discutaţi, în funcţie de parametrul* a, *natura intersecţiei* $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4$.

6. *Scrieţi inecuaţiile semiplanelor corespunzătoare şi studiaţi intersecţia acestora, dacă normalele exterioare ale feţelor standard sunt coliniare cu vectorii*

$$(0, 1, -1),\ (0, 1, 0),\ (0, 0, -1),\ (0, -1, 0),\ (0, -1, -1).$$

7. ***(Suplimentar)*** *Demonstraţi că arborele parţial de cost minim al lui $\mathcal{P}$ este un subgraf al triangulării Delaunay.*