# Lineare Algebra S2

Raphael Nambiar

Version: 19. Mai 2022

## Vektorgeometrie

### Begriffe

**Kollinear:** Es existiert eine Gerade $g$, zu der beide Vektoren parallel sind.
**Komplanar:** Existiert eine Ebene $e$, zu der alle drei Vektoren parallel.
**Ortsvektor:** Beginnt vim Ursprung. Schreibweise: $\vec{r}(P)$

### Betrag

$$|\ \vec{a}\ | = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

### Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\ \vec{a}\ | \cdot |\ \vec{b}\ | \cdot \cos(\varphi)$

$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

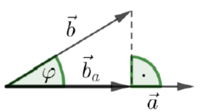
### Orthogonal

Wenn zwei Vektoren senkrecht zueinander sind.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

### Orthogonale Projektion

Projektion des Vektores $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$.



$\vec{b}_a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}$

$|\ \vec{b}_a\ | = \frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}{|\vec{a}|}$

$|\ \vec{b}_a\ | = |\ \vec{a}\ | \cdot \cos(\varphi)$

### Zwischenwinkel

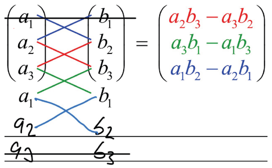
$\varphi = cos^{-1}(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|})$

### Einheitsvektor

$\vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$

$|\ \vec{e}_a\ | = 1$

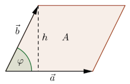
### Vektorprodukt



$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$|\ \vec{a} \times \vec{b}\ | = |\ \vec{a}\ | \cdot |\ \vec{b}\ | \cdot \cos(\alpha)$

$\vec{a} \times \vec{b}$ ist orthogonal zu $\vec{a}$ und zu $\vec{b}$



$|\ \vec{a} \times \vec{b}\ | =$ A

Dreieck $= \frac{1}{2}$ A

## Geraden

### Normalenvektor

T

BD

### Parameterdarstellung

$g : \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a}$

P: Aufpunkt

$\vec{a} = \overrightarrow{PQ};$ = Richtungsvektor

### Koordinatendarstellung

$E : ax + by + c = 0$

### Koordinatendarstellung zu Parameterdarstellung

### Parameterdarstellung zu Koordinatendarstellung

### Abstand Punkt zu Geraden

Gerade g: $\begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

Punkt A: $(3, -1, 4)$

$$\overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -14 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$l = \frac{|\overrightarrow{PA} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}$

### Lage Geraden

**Identisch:**
**Parallel:**
**Schneidend:**
**Windschief:**

### Lage Bestimmen

## Ebene

### Normalenvektor der Ebene (orthogonal zur Ebene)

Auf der Ebene $E$ senkrecht stehnder Vektor $\vec{n}$.

$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$

### Parameterdarstellung

$E : \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$

P: Aufpunkt

$\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$; $\vec{b} = \overrightarrow{PR}$ = Richtungsvektoren

### Koordinatendarstellung

$E : ax + by + cz + d = 0$

### Parameterdarstellung zu Koordinatendarstellung

$$E : \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

① $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$

② Koordinatendarstellung $E : -14x + 6y - 4z + d = 0$

③ Aufpunkt einsetzen: $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E : -14 \cdot 2 + 6 \cdot 4 - 4 \cdot 1 + d = 0$

④ $d$ ausrechnen: $E : -14 \cdot 2 + 6 \cdot 4 - 4 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = 8$

⑤ $E : -14x + 6y - 4z + 8 = 0$

$\Rightarrow \frac{-14x + 6y - 4z + 8 = 0}{2} \Rightarrow E : -7x + 3y - 2z + 4 = 0$

### Koordinatendarstellung zu Parameterdarstellung

### Abstand Punkt zu Geraden

### Lage Geraden

**Identisch:**
**Parallel:**
**Schneidend:**
**Windschief:**

### Lage Bestimmen

## Linearen Gleichungssysteme

### Rang

Matrix muss in Zeilenstufenform sein.

$rg(A) =$ Gesamtanzahl Zeilen - Anzahl Nullzeilen .

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}_{A} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{rang(A) = 2} \\ \text{rang(A|b) = 2} \end{array}$$

## Lösbarkeit von LGS

Das LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$ ist genau dann lösbar, wenn $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|\ \vec{c})$.
Es hat genau eine Lösung, falls **zusätzlich** gilt: $\mathrm{rg}(A) = n$.
Es hat unendlich viele Lösungen, falls **zusätzlich** gilt: $\mathrm{rg}(A) < n$.

# Matrizen

## Begriffe

**Quadratische Matrix:** gleich viele Zeilen und Spalten
**Hauptdiagonale:** Die Diagonale von links oben nach rechts unten

**Untere- und obere Dreiecksmatrix**

| | | |
|---|---|---|
| **Beispiel** | (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ | (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ |
| **Beschreibung** | unter der Hauptdiag. alles Null. | oben der Hauptdiag. alles Null. |
| **Bezeichnung** | Obere Dreiecksmatrix U = Upper | Untere Dreiecksmatrix L = Lower |

**Symmetrische Matrix :** symmetrisch bzgl. Hauptdiagonale

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

## Multiplikation / Rechenregeln

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{array}{cc|cc} & & 2 & -3 \\ & & 2 & 1 \\ \hline 2 & -3 & -2 & -9 \\ 2 & 1 & 6 & -5 \end{array}$$

$A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n} \wedge \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
$A + (B + C) = (A + B) + C$
$A + B = B + A$
$A + 0 = A$
$A - A = 0$ (Nullmatrix)

## Transponieren

TBD

## Inverse

Matrix muss quadratisch sein: $n \times n \rightarrow 2 \times 2, 3 \times 3$

### 2x2

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Die $2 \times 2$-Matrix hat genau dann ein Invese wenn $ad - bc \neq 0$

### 3x3 und grösser

$\rightarrow$ Gauss - Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) :2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) |\cdot(-3)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot(-2/3) \quad |\cdot(-2)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & -2 & 4/3 & 1 \end{array}\right) \cdot 3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 & 3 \end{array}\right) |\cdot(-\tfrac{1}{3}) \quad |\cdot(-\tfrac{1}{2})$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 0 & 7/2 & -2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 & 3 \end{array}\right) |\cdot(-1/2)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 & 3 \end{array}\right) \qquad \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

## Determinante

### 2x2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

### 3x3 Regel von Sarrus

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - g \cdot e \cdot c - h \cdot f \cdot a - i \cdot d \cdot b.$$

### Laplacescher Entwicklungssatz (>3x3)

Vorzeichen:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$$

Entwickeln nach derjenigen Zeile oder Spalte, in der die meisten Nullen stehen (hier gelb)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow 2 \cdot det \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & -2 \\ 6 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Entwicklen nach 1er

$$\begin{aligned} \det(A) &= +a_{00} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - a_{01} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{10} & a_{12} \\ a_{20} & a_{22} \end{bmatrix} + a_{02} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{10} & a_{11} \\ a_{20} & a_{21} \end{bmatrix} \\ &= +a_{00}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) - a_{01}(a_{10}a_{22} - a_{12}a_{20}) + a_{02}(a_{10}a_{21} - a_{11}a_{20}) \\ &= +a_{00}a_{11}a_{22} + a_{01}a_{12}a_{20} + a_{02}a_{10}a_{21} - a_{00}a_{12}a_{21} - a_{01}a_{10}a_{22} - a_{02}a_{11}a_{20} \end{aligned}$$

$det$ **Dreiecksmatrix** $=$ Produkt der Hauptdiagonale

**Rechenregeln**

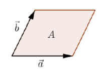
(1) Für die Einheitsmatrix $E$ gilt: $\det(E) = 1$
(2) Für jede $n \times n$ -Dreiecksmatrix $U$ gilt: $\det(U) = u_{11} \cdot u_{22} \cdot \ldots \cdot u_{nn}$
(3) Für jede quadratische Matrix $A$ gilt: $\det(A^T) = \det(A)$
(4) Für alle $n \times n$ -Matrizen $A$ und $B$ gilt: $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
(5) Für jede invertierbare Matrix $A$ gilt: $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
(6) Für jede $n \times n$ -Matrix $A$ und jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt: $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$

$2 \times 2 \rightarrow det(5 \cdot A) = 5^2 \cdot det(A)$
$3 \times 3 \rightarrow det(5 \cdot A) = 5^3 \cdot det(A)$

## Geometrische Interpretation der Determinante

### 2x2

Fläche von $\vec{a}$ und $\vec{b} =$ Betrag von $det \begin{vmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{vmatrix}$



### 3x3

Volumen von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ $=$ Betrag von $det \begin{vmatrix} a1 & b1 & c1 \\ a2 & b2 & c2 \\ a3 & b3 & c3 \end{vmatrix}$