

# Lineare Algebra S2

Raphael Nambiar

Version: 30. Mai 2022

## Vektorgeometrie

### Begriffe

**Kollinear:** Es existiert eine Gerade  $g$ , zu der beide Vektoren parallel sind.

**Komplanar:** Existiert eine Ebene  $e$ , zu der alle drei Vektoren parallel.

**Ortsvektor:** Beginnt im Ursprung. Schreibweise:  $\vec{r}(P)$

**Nullvektor:** Vektor mit Betrag 0, keine Richtung.:  $\vec{0}$

### Betrag

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

### Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$
$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \rightarrow \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

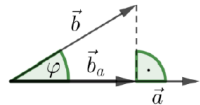
### Orthogonal

Wenn zwei Vektoren senkrecht zueinander sind.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

### Orthogonale Projektion

Projektion des Vektors  $\vec{b}$  auf den Vektor  $\vec{a}$ .



$$\vec{b}_a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}$$

$$|\vec{b}_a| = \frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}{|\vec{a}|}$$

$$|\vec{b}_a| = |\vec{a}| \cdot \cos(\varphi)$$

### Zwischenwinkel

$$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

### Einheitsvektor

$$\vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}; |\vec{e}_a| = 1$$

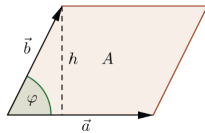
## Vektorprodukt / Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$$

$\vec{a} \times \vec{b}$  ist orthogonal zu  $\vec{a}$  und zu  $\vec{b}$

## Fläche / Parallelogramm



$$|\vec{a} \times \vec{b}| = A$$

Dreieck =  $\frac{1}{2} A$

## Kreuzprodukt in R^2

Seien  $a$  und  $b$  zwei Vektoren, dann gilt für das Kreuzprodukt in  $R^2$ :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}$$
$$\vec{a} \times \vec{b} = \det(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} = a_x \cdot b_y - b_x \cdot a_y$$

## Geraden

### Parameterdarstellung

$$g: \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a}$$

P: Aufpunkt

$\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ ; = Richtungsvektor

### Koordinatendarstellung

$$g: ax + by + c = 0$$

### Koordinatendarstellung zu Parameterdarstellung

Zwei Punkte auf  $g$  bestimmen: 2 beliebige  $x$  Koordinaten wählen und in  $g$  einsetzen. Danach jeweils  $y$  auslesen. Dies ergibt zwei Punkte  $P, Q$ . In Parameterdarstellung bringen.

### Parameterdarstellung zu Koordinatendarstellung

$$\text{Gerade } g: \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem aufstellen und Lösen:

$$x = 7 - 2\lambda$$

$$y = 1 - 4\lambda$$

In Koordinatendarstellung bringen:  $-2x + y + 13 = 0$

## Abstand Punkt zu Geraden

$$\text{Gerade } g: \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Punkt A:  $(3, -1, 4)$

$$\overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -14 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$l = \frac{|\overrightarrow{PA} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}$$

$\vec{a} \Rightarrow$  aus der Parameterdarstellung

## Ebene

### Normalenvektor der Ebene (orthogonal zur Ebene)

Auf der Ebene  $E$  senkrecht stehender Vektor  $\vec{n}$ .

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$$

### Parameterdarstellung

$$E: \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$$

P: Aufpunkt

$\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ ;  $\vec{b} = \overrightarrow{PR}$  = Richtungsvektoren

### Koordinatendarstellung

$$E: ax + by + cz + d = 0$$

### Parameterdarstellung zu Koordinatendarstellung

$$E: \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{2} \text{ Koordinatendarstellung } E: -14x + 6y - 4z + d = 0$$

$$\textcircled{3} \text{ Aufpunkt einsetzen: } \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E: -14 \cdot 2 + 6 \cdot 4 - 4 \cdot 1 + d = 0$$

$$\textcircled{4} d \text{ ausrechnen: } E: -14 \cdot 2 + 6 \cdot 4 - 4 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = 8$$

$$\textcircled{5} E: -14x + 6y - 4z + 8 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-14x + 6y - 4z + 8 = 0}{2} \Rightarrow E: -7x + 3y - 2z + 4 = 0$$

### Koordinatendarstellung zu Parameterdarstellung

Wir bestimmen drei beliebige Punkte auf  $E$ , indem wir die  $x$ - und  $y$ -Koordinaten frei wählen und die zugehörigen  $z$ -Koordinaten aus der Koordinatendarstellung von  $E$  berechnen. Aus diesen drei Punkten können wir dann eine Parameterdarstellung von  $E$  gewinnen.

$$E: 2x + 7y - 4z + 1 = 0$$

$$\begin{aligned} x=0, y=0 & \quad -4z+1=0 \Rightarrow z=1/4 \Rightarrow P=(0;0;1/4) \\ x=1, y=0 & \quad 2-4z+1=0 \Rightarrow z=3/4 \Rightarrow Q=(1;0;3/4) \\ x=0, y=1 & \quad 7-4z+1=0 \Rightarrow z=2 \Rightarrow R=(0;1;2) \end{aligned}$$

Eine mögliche Parameterdarstellung der Ebene E:  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7/4 \end{pmatrix}$

### Abstand Punkt zu Ebene

$$\text{Abstand } l = \frac{|ax_A + bx_A + cz_A + d|}{|\vec{n}|}$$

$$\text{Ebene } E: 3x - 6y - 2z + 67 = 0$$

$$\text{Punkt } A = (3, -4, 1)$$

$$\textcircled{1} \vec{n} \text{ bestimmen: } \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \sqrt{3^2 + (-6)^2 + (-2)^2} = 7$$

$$\textcircled{2} l = \frac{(3 \cdot 3) - (6 \cdot (-4)) - (2 \cdot 1)}{7} = 14$$

### Spezielle Lagen von Ebenen

TBD

### normierte Koordinatendarstellung der Ebene

$$E: 2x + 7y - 4z + 1 = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad |\vec{n}| = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 3^2} = \sqrt{49} = 7$$

normierte Koordinatendarstellung der Ebene

$$E: \frac{2}{7} \cdot x - \frac{6}{7} \cdot y + \frac{3}{7} \cdot z + \frac{1}{7} = 0$$

### Linearen Gleichungssysteme

#### Rang

Matrix muss in Zeilenstufenform sein.

$$\text{rg}(A) = \text{Gesamtanzahl Zeilen} - \text{Anzahl Nullzeilen}$$

$$A = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{matrix} \text{rang}(A) = 2 \\ \text{rang}(A|b) = 2 \end{matrix}$$

A

### Lösbarkeit von LGS

$n$  = Anzahl Spalten

Das LGS  $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$  ist genau dann lösbar, wenn  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A | \vec{c})$ .

Es hat genau eine Lösung, falls zusätzlich gilt:  $\text{rg}(A) = n$ .

Es hat unendlich viele Lösungen, falls zusätzlich gilt:  $\text{rg}(A) < n$ .

### Matrizen

#### Begriffe

**Quadratische Matrix:** gleich viele Zeilen und Spalten

**Hauptdiagonale:** Die Diagonale von links oben nach rechts unten

### Untere- und obere Dreiecksmatrix

| Beispiel     | (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ | (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ |
|--------------|---|---|
| Beschreibung | unter der Hauptdiag.<br>alles Null.                                     | oben der Hauptdiag.<br>alles Null.                                      |
| Bezeichnung  | Ober Dreiecksmatrix<br>U = Upper  | Untere Dreiecksmatrix<br>L = Lower                                      |

### Symmetrische Matrix : symmetrisch bzgl. Hauptdiagonale

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

### Multiplikation / Rechenregeln

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{array}{c|cc} & 2 & -3 \\ \hline 2 & -3 & \\ 2 & 1 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} A, B, C &\in \mathbb{R}^{m \times n} \wedge \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ A + (B + C) &= (A + B) + C \\ A + B &= B + A \\ A + 0 &= A \\ A - A &= 0 \text{ (Nullmatrix)} \end{aligned}$$

### Transponieren

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln:

$$(A^T)^T = A$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Gilt  $A = A^T$ , so heißt die Matrix A symmetrisch.

Gilt  $A = -A^T$ , so heißt die Matrix A antisymmetrisch.

### Inverse

Matrix muss quadratisch sein:  $n \times n \rightarrow 2 \times 2, 3 \times 3$

#### 2x2

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Die  $2 \times 2$ -Matrix hat genau dann ein Inverse wenn  $ad - bc \neq 0$

### 3x3 und grösser

→ Gauss - Jordan

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} :2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xleftarrow{+} \cdot (-3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (-2/3) \xleftarrow{+} \cdot (-2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & -2 & 4/3 & 1 \end{pmatrix} \cdot 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xleftarrow{+} \cdot (-1/3) \xleftarrow{+} \cdot (-1/2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 7/2 & -2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xleftarrow{+} \cdot (-1/2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

### Determinante

#### 2x2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

### 3x3 Regel von Sarrus

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - g \cdot e \cdot c - h \cdot f \cdot a - i \cdot d \cdot b$$

### Laplacescher Entwicklungssatz (>3x3)

Vorzeichen:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \\ - & + & - \end{vmatrix}$$

Entwickeln nach derjenigen Zeile oder Spalte, in der die meisten Nullen stehen (hier gelb)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow 2 \cdot \det \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & -2 \\ 6 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Wichtig: häufig sind die entwickelten identisch! → Aufwand sparen!

$$A = \begin{bmatrix} \underline{a_{00}} & \underline{a_{01}} & \underline{a_{02}} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Entwickeln nach 1er

$$\det(A) = +a_{00} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - a_{01} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{10} & a_{12} \\ a_{20} & a_{22} \end{bmatrix} + a_{02} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{10} & a_{11} \\ a_{20} & a_{21} \end{bmatrix}$$

$$= +a_{00}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) - a_{01}(a_{10}a_{22} - a_{12}a_{20}) + a_{02}(a_{10}a_{21} - a_{11}a_{20})$$

$$= +a_{00}a_{11}a_{22} + a_{01}a_{12}a_{20} + a_{02}a_{10}a_{21} - a_{00}a_{12}a_{21} - a_{01}a_{10}a_{22} - a_{02}a_{11}a_{20}$$

**det Dreiecksmatrix** = Produkt der Hauptdiagonale

## Rechenregeln

- (1) Für die Einheitsmatrix  $E$  gilt:  $\det(E) = 1$
- (2) Für jede  $n \times n$ -Dreiecksmatrix  $U$  gilt:  $\det(U) = u_{11} \cdot u_{22} \cdot \dots \cdot u_{nn}$
- (3) Für jede quadratische Matrix  $A$  gilt:  $\det(A^T) = \det(A)$
- (4) Für alle  $n \times n$ -Matrizen  $A$  und  $B$  gilt:  $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- (5) Für jede invertierbare Matrix  $A$  gilt:  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- (6) Für jede  $n \times n$ -Matrix  $A$  und jedes  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt:  $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$


$$2 \times 2 \rightarrow \det(5 \cdot A) = 5^2 \cdot \det(A)$$

$$3 \times 3 \rightarrow \det(5 \cdot A) = 5^3 \cdot \det(A)$$

## Geometrische Interpretation der Determinante

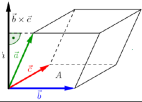
### 2x2

Fläche von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  = Betrag von  $\det \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$



### 3x3

Volumen von  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  = Betrag von  $\det \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$



## Linearen Gleichungssysteme

### Rang

Matrix muss in Zeilenstufenform sein.

$rg(A)$  = Gesamtanzahl Zeilen - Anzahl Nullzeilen .

$$A = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} \text{rang}(A) = 2 \\ \text{rang}(A|b) = 2 \end{array}$$

A

### Lösbarkeit von LGS

Das LGS  $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$  ist genau dann lösbar, wenn  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A | \vec{c})$ .

Es hat genau eine Lösung, falls zusätzlich gilt:  $\text{rg}(A) = n$ .

Es hat unendlich viele Lösungen, falls zusätzlich gilt:  $\text{rg}(A) < n$ .

### Freie Variable

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

freie Variable  $\lambda_3$

Lösungsmenge:  $\lambda_3$  = kann beliebig gewählt werden,  
 $\infty$ -viele Lösungen.

## Vektorräume

### Unterräume

Eine Teilmenge  $U$  eines Vektorraums  $V$  heisst Unterraum von  $V$  wenn  $U$  selber auch ein Vektorraum ist.

Unterraumkriterien

- (1) Für beliebige Elemente  $\vec{a}, \vec{b} \in U$  ist  $\vec{a} + \vec{b} \in U$ .
- (2) Für jeden Skalar  $\lambda \in \mathbb{R}$  und jeden Vektor  $\vec{a} \in U$  ist  $\lambda \cdot \vec{a} \in U$ .

### Nullvektorraum