Analysis 2 S2

Raphael Nambiar

Version: 31. Mai 2022

$f(x)$	$f'(x)$
x^α mit $\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
$\cot(x)$	$-1-\cot^2(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$
e^x	e^x
a^x	$\ln(a)\cdot a^x$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{\ln(a)x}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

$f(x)$	$F(x)$
x^a mit $a \neq -1$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$1+\tan^2(x)$	$\tan(x) + C$
e^x	$e^x + C$
a^x	$\frac{1}{\ln(a)}\cdot a^x + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert) + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x) + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$

Ableiten

$f(x) = x^n \quad \rightarrow \quad f'(x) = n\cdot x^{n-1}$

$f(x) = c\cdot g(x) \quad \rightarrow \quad f'(x) = c\cdot g'(x)$

$f(x) = g(x)\cdot h(x) \quad \rightarrow \quad f'(x) = g'(x)\cdot h(x) + g(x)\cdot h'(x)$

$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{h(x)\cdot g'(x) - g(x)\cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$

$f(x) = g(h(x)) \quad \rightarrow \quad f'(x) = g'(h(x))\cdot h'(x)$

Integrieren

$$\frac{1}{x^5} \rightarrow -\frac{1}{4x^4} + C$$

Integration durch Substitution

1. Substitutionsgleichung für $x : u = g(x)$
2. Substitutionsgleichung für dx : $\frac{du}{dx} = g'(x)_{(Ableitung)} \rightarrow dx = \frac{du}{g'(x)}$
3. Integralsubstitution: Einsetzen von u und dx aus 1. und 2 in Ursprung
4. Integration von 3.
5. Rücksubstitution (nur unbestimmte Integrale)

Beispiel: $\int e^{2x}$

1. $u = 2x$
2. $dx = \frac{du}{2}$
3. $\int e^u \cdot \frac{du}{2}$

4. $\int e^u \cdot \frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\cdot\int e^u du \rightarrow \frac{1}{2}e^u + C$
5. $\frac{1}{2}e^u + C \rightarrow \frac{1}{2}e^{2x} + C$

Partielle Integration

$$u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

Beispiel:

$u(x) = x;\ v'(x) = e^x$
$u'(x) = 1;\ v(x) = e^x$

$$\int x\cdot e^x$$

$$\int x\cdot e^x = x\cdot e^x - \int \cdot e^x dx = x\cdot e^x - e^x + C$$

Integration durch Partialbruchzerlegung

1. Polynomdivision (falls Funktion unecht gebrochen!): Zählergrad > Nennergrad
2. **Nullstellen** des Nenners bestimmen (raaten, 2Klammeransatz, Horner, lösen)
3. Jeder Nullstelle ihren Partialbruch zuordnen:

x_1 ist einfache Nullstelle $\rightarrow \frac{A}{x-x_1}$

x_1 ist doppelte Nullstelle $\rightarrow \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2}$

x_1 ist $r-$fache Nullstelle $\rightarrow \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(x-x_1)^r}$

4. Ansatz zur Partialbruchzerlegung aufstellen $\rightarrow f(x)$ wird mit der Summe aller Partialbrüche gleichgesetzt
5. Bestimmung der Konstanten $A, A_1, A_2, ..., A_r$

   1. Brüche gleichnamig machen
   2. Einsetzen von x-Werten (Nullstellen) → LGS
   3. LGS lösen → man erhält die Konstanten $A, A_1, B, ...$

6. Integration der Partialbrüche

$\int \frac{1}{x-x_0}\,dx = 1\cdot \ln|x-x_0| + C$ | $\int \frac{2}{\dots} = 2\cdot\ln\dots$

$$\int \frac{1}{(x-x_0)^r}\,dx = \frac{1}{(1-r)(x-x_0)^{r-1}} + C$$

Beispiel: $\int \frac{5x+11}{x^2+3x-10}dx$

1. ist echt gebrochen: ok
2. Nullstellen Nenner: $(x-2)(x+5) \Rightarrow x_0 = 2; x_1 = -5$
3. $\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5}$
4. $\int \frac{5x+11}{x^2+3x-10}dx = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5}$
5. (a) $\int \frac{5x+11}{x^2+3x-10}dx = \frac{A(x+5)+B(x-2)}{(x-2)+(x+5)}$
   (b) $5x+11 = A(x+5) + B(x-2)$
   (c) einsetzen: $x = 2 \rightarrow A = 3$; $x = -5 \rightarrow B = 2$;
6. $\int \frac{5x+11}{x^2+3x-10}dx = \int \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+5}dx$
   $= 3\cdot ln(|x-2|) + 2\cdot ln(|x+5|) + C$

Uneigentliche Integrale

Ein *uneigentliches* Integral hat die Eigenschaft, dass der Integrationsbereich unendlich gross ist oder eine Polstelle enthält.

(a) $\int_1^\infty \frac{1}{x^5}\,\mathrm{d}x$ (b) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ (c) $\int_3^5 2(x-3)^{-\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x$

(a) $\int_1^t \frac{1}{x^5}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{4}x^{-4}\right]_1^t = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{t^4} + \frac{1}{4} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

(b) $\int_1^t \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^t = 2\sqrt{t} - 2 \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$. Das Integral existiert also nicht.

(c) $\int_t^5 2(x-3)^{-\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x = 2\cdot\int_{t-3}^2 u^{-\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}u = 2\cdot\frac{4}{3}\cdot\left[u^{\frac{3}{4}}\right]_{t-3}^2 = \frac{8}{3}\cdot\left(2^{\frac{3}{4}} - (t-3)^{\frac{3}{4}}\right) \xrightarrow[t\to 3]{} \frac{8}{3}\cdot 2^{\frac{3}{4}}$
(verwendete Substitution: $u = x-3$)

Differentialgleichungen (DGL)

Begriffe

Ordnung: Ordnung = höchste Ableitung in der DGL

Linearität: Funktion und Ableitung sind linear → x^1

Separierbare Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung 1. Ordnung heisst separierbar wenn:

$$y' = f(x)\cdot g(x)$$

How To:

1. $y' = \frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y)$
2. Trennung der Variablen: $\frac{dy}{g(y)} = f(x)\cdot dx$
3. Integration auf beiden Seiten der Gleichung (if possible):

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

4. Auflösen nach y (falls möglich!)

Beispiel:

3
4

$$y' = y^2 = sin(x)$$

1. $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{sin(x)}{y^2}$
2. $y^2\cdot dy = sin(x)\cdot dx$

Autonome Differentialgleichungen