Analysis 2 S2

Raphael Nambiar

Version: 3. Juni 2022

$f(x)$	$f'(x)$
x^α mit $\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
$\cot(x)$	$-1-\cot^2(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$
e^x	e^x
a^x	$\ln(a)\cdot a^x$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{\ln(a)x}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

$f(x)$	$F(x)$
x^a mit $a \neq -1$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}+C$
$\sin(x)$	$-\cos(x)+C$
$\cos(x)$	$\sin(x)+C$
$1+\tan^2(x)$	$\tan(x)+C$
e^x	e^x+C
a^x	$\frac{1}{\ln(a)}\cdot a^x+C$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)+C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)+C$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)+C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)+C$

Ableiten

$f(x) = x^n \quad \rightarrow \quad f'(x) = n\cdot x^{n-1}$

$f(x) = c\cdot g(x) \quad \rightarrow \quad f'(x) = c\cdot g'(x)$

$f(x) = g(x)\cdot h(x) \quad \rightarrow \quad f'(x) = g'(x)\cdot h(x) + g(x)\cdot h'(x)$

$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{h(x)\cdot g'(x) - g(x)\cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$

$f(x) = g(h(x)) \quad \rightarrow \quad f'(x) = g'(h(x))\cdot h'(x)$

Integrieren

$\frac{1}{x^5} \rightarrow -\frac{1}{4x^4}+C$

Integration durch Substitution

① Substitutionsgleichung für $x: u = g(x)$

② Substitutionsgleichung für dx:
$\frac{du}{dx} = g'(x)_{(Ableitung)} \rightarrow dx = \frac{du}{g'(x)}$

③ Integralsubstitution: Einsetzen von u und dx aus 1. und 2 in Ursprung

④ Integration von 3.

⑤ Rücksubstitution (nur unbestimmte Integrale)

Beispiel: $\int e^{2x}$

① $u = 2x$
② $dx = \frac{du}{2}$
③ $\int e^u \cdot \frac{du}{2}$

④ $\int e^u\cdot\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\cdot\int e^u du \rightarrow \frac{1}{2}e^u + C$
⑤ $\frac{1}{2}e^u + C \rightarrow \frac{1}{2}e^{2x}+C$

Partielle Integration

$$u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

Beispiel:

$u(x) = x;\ v'(x) = e^x$
$u'(x) = 1;\ v(x) = e^x$

$$\int x\cdot e^x$$

$$\int x\cdot e^x = x\cdot e^x - \int \cdot e^x dx = x\cdot e^x - e^x + C$$

Integration durch Partialbruchzerlegung

① Polynomdivision (falls Funktion unecht gebrochen!): Zählergrad > Nennergrad

② **Nullstellen** des Nenners bestimmen (raaten, 2Klammeransatz, Horner, lösen)

③ Jeder Nullstelle ihren Partialbruch zuordnen:

x_1 ist einfache Nullstelle $\rightarrow \frac{A}{x-x_1}$

x_1 ist doppelte Nullstelle $\rightarrow \frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}$

x_1 ist $r-$fache Nullstelle $\rightarrow \frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\cdots+\frac{A_r}{(x-x_1)^r}$

④ Ansatz zur Partialbruchzerlegung aufstellen $\rightarrow f(x)$ wird mit der Summe aller Partialbrüche gleichgesetzt

⑤ Bestimmung der Konstanten $A, A_1, A_2, ..., A_r$

1. Brüche gleichnamig machen
2. Einsetzen von x-Werten (Nullstellen) → LGS
3. LGS lösen → man erhält die Konstanten $A, A_1, B, ...$

⑥ Integration der Partialbrüche

$$\int \frac{1}{x-x_0}\,dx = 1\cdot\ln|x-x_0|+C \quad \Big|\ \int\frac{2}{\cdots} = 2\cdot\ln..$$

$$\int \frac{1}{(x-x_0)^r}\,dx = \frac{1}{(1-r)(x-x_0)^{r-1}}+C$$

Beispiel: $\int\frac{5x+11}{x^2+3x-10}dx$

1. ist echt gebrochen: ok
2. Nullstellen Nenner: $(x-2)(x+5) \Rightarrow x_0 = 2; x_1 = -5$
3. $\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+5}$
4. $\int\frac{5x+11}{x^2+3x-10}dx = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+5}$
5. (a) $\int\frac{5x+11}{x^2+3x-10}dx = \frac{A(x+5)+B(x-2)}{(x-2)+(x+5)}$
   (b) $5x+11 = A(x+5)+B(x-2)$
   (c) einsetzen: $x = 2 \rightarrow A = 3;\ x = -5 \rightarrow B = 2;$
6. $\int\frac{5x+11}{x^2+3x-10}dx = \int\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x+5}dx$
   $= 3\cdot ln(|x-2|)+2\cdot ln(|x+5|)+C$

Uneigentliche Integrale

Ein *uneigentliches* Integral hat die Eigenschaft, dass der Integrationsbereich unendlich gross ist oder eine Polstelle enthält.

(a) $\int_1^\infty \frac{1}{x^5}\,dx$ (b) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ (c) $\int_3^5 2(x-3)^{-\frac{1}{4}}\,dx$

(a) $\int_1^t \frac{1}{x^5}\,dx = \left[-\frac{1}{4}x^{-4}\right]_1^t = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{t^4}+\frac{1}{4} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0+\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

(b) $\int_1^t \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^t = 2\sqrt{t}-2 \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$. Das Integral existiert also nicht.

(c) $\int_t^5 2(x-3)^{-\frac{1}{4}}\,dx = 2\cdot\int_{t-3}^2 u^{-\frac{1}{4}}\,du = 2\cdot\frac{4}{3}\cdot\left[u^{\frac{3}{4}}\right]_{t-3}^2 = \frac{8}{3}\cdot\left(2^{\frac{3}{4}}-(t-3)^{\frac{3}{4}}\right) \xrightarrow[t\to3]{} \frac{8}{3}\cdot 2^{\frac{3}{4}}$
(verwendete Substitution: $u = x-3$)

Differentialgleichungen (DGL)

Begriffe

Ordnung: Ordnung = höchste Ableitung in der DGL

Linearität: Funktion und Ableitung sind linear → x^1

Separierbare Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung 1. Ordnung heisst separierbar wenn:

$$y' = f(x)\cdot g(y)$$

How To:
①$y' = \frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y)$
② Trennung der Variablen: $\frac{dy}{g(y)} = f(x)\cdot dx$
③ Integration auf beiden Seiten der Gleichung (if possible):

$$\int\frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

④ Auflösen nach y (falls möglich!)

Beispiel:

③
④

$$y' = y^2 = sin(x)$$

① $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{sin(x)}{y^2}$
② $y^2\cdot dy = sin(x)\cdot dx$

Autonome Differentialgleichungen

Definition: $y' = f(y)$

$\Rightarrow$ Diese Differentialgleichungen sind separierbar!

Gleichung	autonom?
$y' = y^2 + 6$	Ja
$y' = x + y$	Nein
$y' = \frac{y}{x}$	Nein
$y' = y^2 \cdot \sqrt{1 - \sin(y)} - \ln(y)$	Ja

Lineare Differentialgleichungen

Form: $y' + f(x) \cdot y = g(x)$

$g(x) \rightarrow$ Störglied / Störfunktion

"linear"$\rightarrow$ y und y' in der ersten Potenz

$homogen$ $\rightarrow$ wenn das Störglied $g(x) = 0$

ansonsten $\rightarrow$ $inhomogen$

Variation der Konstanten für lineare Differentialgleichungen

1 Bestimmung von $f(x)$ und $g(x)$ basierend auf:

$y' + f(x) \cdot y = g(x)$

2 Bestimmung der Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$

3 Einsetzen in die Formel $y_0 = K(x) \cdot e^{-F(x)}$

4 K berechnen: $K(x) = \int g(x) \cdot e^{F(x)} dx$

5 K in Ansatz aus 3 einsetzten $\rightarrow$ allgemeine Lösung

Beispiel:

$y' = \cos(x) \cdot (1 + 2y) \quad \Leftrightarrow \quad y' - 2 \cdot \cos(x) \cdot y = \cos(x)$

- Variation der Konstanten mit $f(x) = -2 \cdot \cos(x)$, $g(x) = \cos(x)$
- $F(x) = -2 \cdot \sin(x)$
- $y_0 = C \cdot e^{2\sin(x)}$
- Ansatz: $y = K(x) \cdot e^{2\sin(x)}$
- $K(x) = \int e^{-2\sin(x)} \cdot \cos(x)\, \mathrm{d}x = \int e^{-2u}\, \mathrm{d}u = -\frac{1}{2}e^{-2u} + C_2 = -\frac{1}{2}e^{-2\sin(x)} + C_2$ (Substitution $u = \sin(x)$)
- Einsetzen: $y = \left(\frac{1}{2}e^{-2\sin(x)} + C_2\right) \cdot e^{2\sin(x)} = -\frac{1}{2} + C_2 \cdot e^{2\sin(x)}$

Eulerschritte