Analysis 2 S2

Raphael Nambiar

Version: 20. Juni 2022

$f(x)$	$f'(x)$
x^α mit $\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
$\cot(x)$	$-1-\cot^2(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$
e^x	e^x
a^x	$\ln(a) \cdot a^x$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{\ln(a)x}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

$f(x)$	$F(x)$
x^a mit $a \neq -1$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$1+\tan^2(x)$	$\tan(x) + C$
e^x	$e^x + C$
a^x	$\frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x \rvert) + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x) + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$

Ableiten

$f(x) = x^n \quad \rightarrow \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

$f(x) = c \cdot g(x) \quad \rightarrow \quad f'(x) = c \cdot g'(x)$

$f(x) = g(x) \cdot h(x) \quad \rightarrow \quad f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$

$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{h(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$

$f(x) = g(h(x)) \quad \rightarrow \quad f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$

Logarithmen:

$f(x) = \ln(x+a) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x+a}$

$f(x) = \ln(5x+a) \rightarrow f'(x) = \frac{5}{5x+a}$

$f(x) = \ln(-5x+a) \rightarrow f'(x) = \frac{-5}{-5x+a}$

Integrieren

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$$

$$\frac{1}{x^5} \rightarrow -\frac{1}{4x^4} + C$$

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}+C}$

Grenzwerte

Zählergrad > Nennergrad :

$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{h(n)} =$ keinen Grenzwert

Zählergrad < Nennergrad :

$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{h(n)} = 0$

Zählergrad = Nennergrad :

$\lim_{n\to 8} \frac{2n^3+7n...}{5n^3-7n^2...} = \frac{2}{5}$

$n \to \infty$:

$\frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$

Wahl der Methode

Methode	Muster	Beispiel
Substitution	$\int g(f'(x)) \cdot f(x)\, \mathrm{d}x$	$\int e^{\cos(x)} \cdot \sin(x)$
partielle Integration	$\int \underset{\text{nach Ableiten einfacher}}{\underset{\uparrow}{u}} \cdot \underset{\text{nach Integration nicht komplizierter}}{\underset{\uparrow}{v}}$	$\int x \cdot e^x \,\mathrm{d}x$
Partialbruchzerlegung	$\frac{\text{Polynom}}{\text{Polynom}}$	$\int \frac{4x^2+x+17}{4x^3+6x+3}\,\mathrm{d}x$

Uneigentliche Integrale

Ein *uneigentliches* Integral hat die Eigenschaft, dass der Integrationsbereich unendlich gross ist oder eine Polstelle enthält.

(a) $\int_1^\infty \frac{1}{x^5}\,\mathrm{d}x$ (b) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ (c) $\int_3^5 2(x-3)^{-\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x$

(a) $\int_1^t \frac{1}{x^5}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{4}x^{-4}\right]_1^t = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{t^4} + \frac{1}{4} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

(b) $\int_1^t \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^t = 2\sqrt{t} - 2 \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$. Das Integral existiert also nicht.

(c) $\int_t^5 2(x-3)^{-\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \int_{t-3}^2 u^{-\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}u = 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \left[u^{\frac{3}{4}}\right]_{t-3}^2 = \frac{8}{3} \cdot \left(2^{\frac{3}{4}} - (t-3)^{\frac{3}{4}}\right) \xrightarrow[t\to 3]{} \frac{8}{3} \cdot 2^{\frac{3}{4}}$

(verwendete Substitution: $u = x-3$)

Integration durch Substitution

1. Substitutionsgleichung für x : $u = g(x)$
2. Substitutionsgleichung für dx : $\frac{du}{dx} = g'(x)_{(Ableitung)} \rightarrow dx = \frac{du}{g'(x)}$
3. Integralsubstitution: Einsetzen von u und dx aus 1. und 2 in Ursprung
4. Integration von 3.
5. Rücksubstitution (nur unbestimmte Integrale)

Beispiel: $\int e^{2x}$

1. $u = 2x$
2. $dx = \frac{du}{2}$
3. $\int e^u \cdot \frac{du}{2}$
4. $\int e^u \cdot \frac{1}{2}du = \frac{1}{2} \cdot \int e^u du \rightarrow \frac{1}{2}e^u + C$
5. $\frac{1}{2}e^u + C \rightarrow \frac{1}{2}e^{2x} + C$

Partielle Integration

$$u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx$$

Beispiel:

$$\int x \cdot e^x$$

$u(x) = x;\ v'(x) = e^x$

$u'(x) = 1;\ v(x) = e^x$

$$\int x \cdot e^x = x \cdot e^x - \int \cdot e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C$$

Integration durch Partialbruchzerlegung

① Polynomdivision (falls Funktion unecht gebrochen!): Zählergrad > Nennergrad

② **Nullstellen** des Nenners bestimmen (raaten, 2Klammeransatz, Horner, lösen)

③ Jeder Nullstelle ihren Partialbruch zuordnen:

$$x_1 \text{ ist einfache Nullstelle} \quad \rightarrow \quad \frac{A}{x-x_1}$$

$$x_1 \text{ ist doppelte Nullstelle} \quad \rightarrow \quad \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2}$$

$$x_1 \text{ ist } r-\text{fache Nullstelle} \quad \rightarrow \quad \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(x-x_1)^r}$$

④ Ansatz zur Partialbruchzerlegung aufstellen $\rightarrow$ $f(x)$ wird mit der Summe aller Partialbrüche gleichgesetzt

⑤ Bestimmung der Konstanten $A, A_1, A_2, ..., A_r$

1. Brüche gleichnamig machen
2. Einsetzen von x-Werten (Nullstellen) → LGS
3. LGS lösen → man erhält die Konstanten $A, A_1, B, ...$

⑥ Integration der Partialbrüche

$$\int \frac{1}{x-x_0}\,\mathrm{d}x = 1 \cdot \ln|x-x_0| + C$$

$\int \frac{2}{\dots} = 2 \cdot \ln \dots$

$$\int \frac{1}{(x-x_0)^r}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(1-r)(x-x_0)^{r-1}} + C$$

Beispiel: $\int \frac{5x+11}{x^2+3x-10} dx$

1. ist echt gebrochen: ok
2. Nullstellen Nenner: $(x-2)(x+5) \Rightarrow x_0 = 2; x_1 = -5$
3. $\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5}$
4. $\int \frac{5x+11}{x^2+3x-10} dx = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5}$
5. (a) $\int \frac{5x+11}{x^2+3x-10} dx = \frac{A(x+5)+B(x-2)}{(x-2)+(x+5)}$
   (b) $5x + 11 = A(x+5) + B(x-2)$
   (c) einsetzen: $x = 2 \rightarrow A = 3$; $x = -5 \rightarrow B = 2$;
6. $\int \frac{5x+11}{x^2+3x-10} dx = \int \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+5} dx$
   $= 3 \cdot ln(|x-2|) + 2 \cdot ln(|x+5|) + C$

Differentialgleichungen (DGL)

Begriffe

Ordnung: Ordnung = höchste Ableitung in der DGL

Linearität: Funktion und Ableitung sind linear → x^1

Separierbare Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung 1. Ordnung heisst separierbar wenn:

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

How To:

1 $y' = \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$

2 Trennung der Variablen: $\frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx$

3 Integration auf beiden Seiten der Gleichung (if possible):

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$$

4 Auflösen nach y (falls möglich!)

Beispiel: 3 4

$$y' = y^2 = sin(x)$$

1 $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{sin(x)}{y^2}$

2 $y^2 \cdot dy = sin(x) \cdot dx$

Autonome Differentialgleichungen

Definition: $y' = f(y)$

⇒ Diese Differentialgleichungen sind separierbar!

Gleichung	autonom?
$y' = y^2 + 6$	Ja
$y' = x + y$	Nein
$y' = \frac{y}{x}$	Nein
$y' = y^2 \cdot \sqrt{1 - \sin(y)} - \ln(y)$	Ja

Lineare Differentialgleichungen

Form: $y' + f(x) \cdot y = g(x)$

$g(x)$ → Störglied / Störfunktion

"linear"→ y und y' in der ersten Potenz

homogen → wenn das Störglied $g(x) = 0$

ansonsten → *inhomogen*

Variation der Konstanten für lineare Differentialgleichungen

1 Bestimmung von $f(x)$ und $g(x)$ basierend auf:
$y' + f(x) \cdot y = g(x)$

2 Bestimmung der Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$

3 Einsetzen in die Formel $y_0 = K(x) \cdot e^{-F(x)}$

4 K berechnen: $K(x) = \int g(x) \cdot e^{F(x)} dx$

5 K in Ansatz aus 3 einsetzten → allgemeine Lösung

Beispiel:

$y' = \cos(x) \cdot (1 + 2y) \quad \Leftrightarrow \quad y' - 2 \cdot \cos(x) \cdot y = \cos(x)$

- Variation der Konstanten mit $f(x) = -2 \cdot \cos(x)$, $g(x) = \cos(x)$
- $F(x) = -2 \cdot \sin(x)$
- $y_0 = C \cdot e^{2\sin(x)}$
- Ansatz: $y = K(x) \cdot e^{2\sin(x)}$
- $K(x) = \int e^{-2\sin(x)} \cdot \cos(x)\, dx = \int e^{-2u}\, du = -\frac{1}{2}e^{-2u} + C_2 = -\frac{1}{2}e^{-2\sin(x)} + C_2$ (Substitution $u = \sin(x)$)
- Einsetzen: $y = (\frac{1}{2}e^{-2\sin(x)} + C_2) \cdot e^{2\sin(x)} = -\frac{1}{2} + C_2 \cdot e^{2\sin(x)}$

Richtungsfelder

1 DGL in die Form $y' = f(x, y)$ bringen.

2 Bereich wählen, welcher zur veranschaulichung optimal ist. (Bspw: −2 - 2)

2 Nun setzt man in diesem Bereich x und y Werte ein und Liest die resultierende *Steigung* ab. Diese Steigung wird dann am Punkt eingetragen.

Eulerschritte

$y(0) = -1; \rightarrow x = 0; y = -1$

Beispiel: $y' = \underbrace{x + y}_{F(x,y)}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 1$ → Schrittweite.

Steigung Gerade	Berechnung	Beispiel
g_0: $m_0 = F(x_0, y_0) = x_0 + y_0$ Bsp: $0 + 1 = 1$	$x_1 = x_0 + h$ $y_1 = y_0 + h \cdot F(x_0, y_0)$	$= 0 + 1 = 1$ $= 1 + 1 \cdot (0+1) = 2$
g_1: $m_1 = F(x_1, y_1) = x_1 + y_1$ $1 + 2 = 3$	$x_2 = x_1 + h$ $y_2 = y_1 + h \cdot F(x_1, y_1)$	$= 2$ $= 2 + 1 \cdot (1+2) = 5$
g_2: $m_2 = F(x_2, y_2) = x_2 + y_2$ $2 + 5 = 7$	$x_3 = x_2 + h$ $y_3 = y_2 + h \cdot F(x_2, y_2)$	$= 2 + 1 = 3$ $= 5 + 1 \cdot (2+5) = 12$
etc	etc	etc

Die allgemeine Lösung ist somit gegeben durch

$$y = \pm\sqrt{x^2 - 2x + C}$$

b) Wir verwenden

$$y(0) = 5 \iff \sqrt{C} = 5 \implies C = 25$$

und erhalten die Lösung des Anfangswertproblems

$$y = \sqrt{x^2 - 2x + 25}$$

mit $y(2) = \sqrt{25} = 5$.

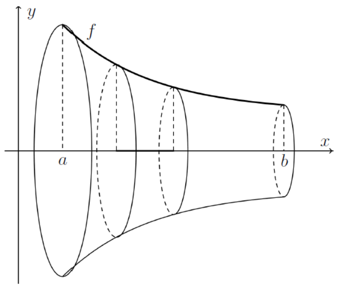
c) Aus der Schrittweite $h = 1$ folgt $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$. Das Eule somit

$$y_0 = 5$$
$$y_1 = y_0 + h \cdot \frac{x_0 - 1}{y_0} = 5 + 1 \cdot \frac{-1}{5} = \frac{24}{5}$$
$$y_2 = y_1 + h \cdot \frac{x_1 - 1}{y_1} = \frac{24}{5}$$

Anwendungen der Intergralrechnung

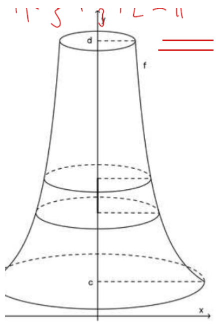
Rotation um die x-Achse

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$$



Rotation um die y-Achse

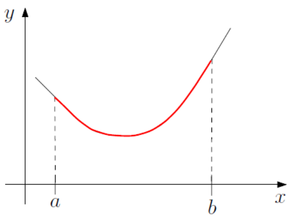
$$V = \pi \cdot \int_c^d (g(y))^2 dy$$



$\rightarrow$ $g(y)$ die nach x aufgelöste Funktionsgleichung.

Bogenlänge einer ebenen Kurve (Graph)

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$



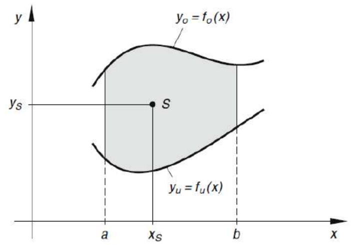
Mantelfläche eines Rotationskörpers

$$M = 2\pi \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

Schwerpunkt Fläche zwischen zwei Kurven

$$x_s = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b x \cdot (f_o(x) - f_u(x)) dx$$

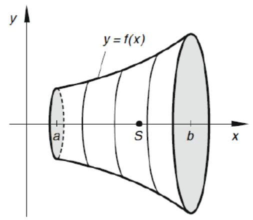
$$y_s = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^b (f_o^2(x) - f_u^2(x)) dx$$



Schwerpunkt eines Rotationskörpers

$$x_s = \frac{1}{V} \cdot \int_a^b x \cdot f^2(x) dx$$

$$y_s = 0, z_s = 0$$



Taylor-Reihen

Definition

Eine Funktion $f(x)$ entspricht einer Taylorreihe mit unendlich vielen Gliedern. Die Stelle x_0 ist die Entwicklungsstelle. Die Entwicklungsstelle ist die Stelle, in deren Umgebung uns das Verhalten der Funktion interessiert.

Verfahren / Formel

$$t_f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

$$\begin{array}{lll} 0! & = 1 & = 1 \\ 1! & = 1 & = 1 \\ 2! & = 1 \cdot 2 & = 2 \\ 3! & = 1 \cdot 2 \cdot 3 & = 6 \\ 4! & = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 & = 24 \\ 5! & = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 & = 120 \\ & \vdots & \end{array}$$

Grad: *anzahl* Ableitungen / Schritte

1. Ableitungen bilden (Grad)
2. x_0 in Ableitungen einsetzen
3. Ableitungen in Formel einsetzen
4. ausrechnen/kürzen/vereinfachen

Beispiel:

die Funktion $f(x) = (1 + e^x)^2$ vom Grad 3 um $x_0 = 0$.

$f(x) = (1 + e^x)^2 \;\Rightarrow\; f(0) = 4$
$f'(x) = 2(1 + e^x) \cdot e^x = 2e^x(1 + e^x) \;\Rightarrow\; f'(0) = 2 \cdot 2 = 4$
$f''(x) = 2(e^x)' \cdot (1 + e^x) + 2e^x \cdot (1 + e^x)' = 2e^x(1 + e^x) + 2e^x \cdot e^x = 2e^x + 4e^{2x} \;\Rightarrow\; f''(0) = 6$
$f'''(x) = 2e^x + 8e^{2x} \;\Rightarrow\; f'''(0) = 10$

gesuchtes Taylor-Polynom:

$$p_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 = 4 + 4x + 3x^2 + \frac{5}{3}x^3$$

Bekannte Taylorreihen

Funktion	Taylorreihe	Def.-bereich
$\sin(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$\mathbb{R}$
e^x	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$(-1,1)$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots + (-1)^i \frac{x^{(2i+1)}}{(2i+1)!} + - \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{(2i+1)}}{(2i+1)!}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + .. + (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} + - \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + . + \frac{x^i}{i!} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

Mitternacht

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Konvergenzen

Konvergenzradius bei Taylor

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$$

$$r := \lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

r : Konvergenzradius

Berechnung:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot x^k$$

In r Formel einsetzen $\rightarrow$ (ohne den x Teil)

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{(k+1)^2}} = \frac{(k+1)^2}{k^2} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 = \left(\frac{k+1}{k}\right) \cdot \left(\frac{k+1}{k}\right)$$

$$\Longrightarrow k \to \infty \Longrightarrow \left(\frac{\infty + 1}{\infty}\right) \cdot \left(\frac{\infty + 1}{\infty}\right) = 1 \cdot 1 = 1 = r$$

Bestimmung Intervall konvergiert:

$\rightarrow$ Einsetzen von x_0 und r in folgende Definition:
(x_0) aus $P(x)$ ablesen. Wenn nicht vorhanden: unendlichen Konvergenzradius und konvergiert für ganz R
alle $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$zum Konvergenzbereich gehören
alle $x \in (-\infty, x_0 - r)$ NICHT zum Konvergenzbereich gehören

Regel von Bernoulli-Hopital

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{g'(x)}{h'(x)}$$

1. Zählerfunktion $g(x)$ und Nennerfunktion $f(x)$ getrennt voneinander ableiten
2. Grenzewert von $\frac{g'(x)}{h'(x)}$ brechnen

BEM: Die Regel von L'HOSPITAL kann auch mehrfach hintereinander angewendet werden. (Wenn Lösung nacht 1x ableiten nicht ersichtlich)