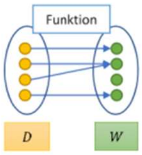
Analysis_1 HS21 Zusammenfassung

Funktionen

Definition

Jedem Element einer Menge D wird genau ein Element aus einer Menge W zuordnet.

$$f: D \to W$$
$$x \to f(x) = \cdots$$



Polynome und Polynomdivision

$$\begin{array}{ll}
(x^3 - 2x^2 - 5x - 6) : (x - 1) = x^2 - x - 6 & \mid\ x^3 : x = x^2 \\
\underline{-(x^3 - x^2)} & \\
\quad -x^2 - 5x & \mid -x^2 : x = -x \\
\quad \underline{-(x^2 - x)} & \\
\qquad -6x + 6 & \mid -6x : x = -6 \\
\qquad \underline{-(-6x + 6)} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Eine *Polynomfunktion* vom Grad n hat höchstens n reelle Nullstellen.

$$f(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$$

Quadratische Funktionen

$y = ax^2 + bx + c$

Nullstellen

- $y = a(x - x_1)(x - x_2)$
- $x_0 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Scheitelpunkt

- $y = a(x - x_0)^2 + y_0$
- $S = (-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$

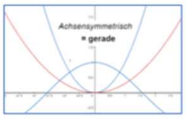
Eigenschaften von Funktionen

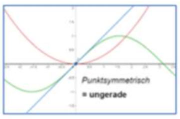
Symmetrie

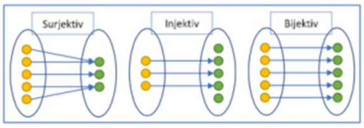
- *gerade* $f(-x) = f(x)$
- *ungerade* $f(-x) = -f(x)$

Monotonie

- *monoton wachsend* $f(x_1) \leq f(x_2)$
- *streng monoton wachsend* $f(x_1) < f(x_2)$
- *monoton fallend* $f(x_1) \geq f(x_2)$
- *streng monoton wachsend* $f(x_1) > f(x_2)$







Operationen von Funktionen

- Addition $x \to f(x) + g(x)$
- Subtraktion $x \to f(x) - g(x)$
- Multiplikation $x \to f(x) \cdot g(x)$
- Division $x \to f(x) / g(x)$

Komposition

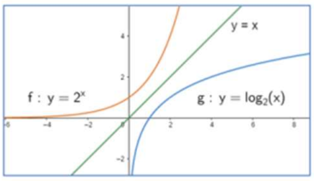
- Verkettung $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Umkehrfunktion

- Bijektive Funktion $f: D \to W$
- Umkehrunktion f^{-1} $g: W \to D$

Vorgehen $f(x) = y$

- Nach x auflösen $\to x = g(y)$
- Variablen vertauschen $\to y = g(x)$



Intervalle

- Abgeschlossen $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$
- Offen $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$
- Halboffen $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$
- Unendlich $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x\}$

Polynome

Nullstellen

> 💡 Es gilt: erste Nullstelle von bis zu 5 gradigem polynomen können wir durch einsetzen testen: {-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 }

> 💡 Eine Polynomfunktion vom Grad n hat höchstens n Nullstellen.

> 💡 $f(x) = (x-4)(x+3)^3(x-2)^2$
>
> 2 ist eine DOPPELTE-NULLSTELLE
> 3 ist eine DREIFACHE-NULLSTELLE

Zerlegungssatz

$f(x) = (x - x_0) \cdot q(x)$

x0 ist hierbei eine Nullstelle des Polynoms

Der Faktor $(x - x_0)$ heisst Linearfaktor .

$$p(x) = a \cdot (x - x_0)(x - x_0)$$

Horner-schema

$x_0 = -2$	$a_4 = 3$	$a_3 = -2$	$a_2 = 5$	$a_1 = -7$	$a_0 = -12$
		$b_3 \cdot x_0 = -6$	$b_2 \cdot x_0 = 16$	$b_1 \cdot x_0 = -42$	$b_0 \cdot x_0 = 98$
		+	+	+	+
	$b_3 = 3$	$b_2 = -8$	$b_1 = 21$	$b_0 = -49$	$f(x_0) = 86$

Beispiel:

$f(x) = 2x^5 + 4x^4 - 54x^3 - 16x^2 - 136x - 96$

Nullstelle $x_0 = 4$

$x_0=4$	2	4	-54	-16	136	96
		8	48	-24	-160	-96
	2	12	-6	-40	-24	0

Um weitere Nullstellen zu finden / beweisen:

Blau: $f(x) = (x-4)(2x^4 + 12x^3 - 6x^2 - 40x - 24)$

Nun kann man das Hornerschema erneut anwenden:

1. Nullstelle "raten" ({-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 })
2. Hornerschema durchrechnen
3. Dies wiederholt man, bis das Polynom nur noch 2en Grades ist, also eine quadratische gleichung. Mit dem `Zweiklammeransatz` oder der `Mitternachtsformel` lösen.
4. Danach besteht das Polynom nur noch aus Linearfaktoren.

$$2(x-4)(x-2)(x+6)(x+1)^2$$

Ableitung

-> Steigung der Tangente bei einem Funktionswert

Anzahl Wendepunkte + 1 = Grad der Funktion

Ableitungsregeln

Faktorregel

$(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$

Beispiel:

$(4x^3)' = 4 \cdot 3x^2 = 12x^2$

Summenregel

$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

Beispiel:

$(7x^5 - 3x^3 + 5x^2)' = (7x^5)' - (3x^3)' + (5x^2)'$

$= (7 \cdot 5x^4) - (3 \cdot 3x^2) + (5 \cdot 2x^1)$

$= 35x^4 - 9x^2 + 10x$

Produktregel

$f'(u \cdot v) = u'v + uv'$

Beispiel:

$f(x) = ((3x^3)(4x^2))$

$u = 3x^3 \qquad u' = 3 \cdot 3x^2 = 9x^2$

$v = 4x^2 \qquad v' = 2 \cdot 4x^1 = 8x$

$f'(x) = u'v + uv' = (9x^2) \cdot (4x^2) + (3x^3) \cdot (8x)$

Quitientenregel

$f'(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Beispiel:

$f(x) = \frac{3x^3}{2x^3}$

$u = 3x^3 \qquad u' = 3 \cdot 3x^2 = 9x^2$

$v = 2x^3 \qquad v' = 2 \cdot 3x^2 = 6x^2$

$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(9x^2) \cdot (2x^3) - (3x^3) \cdot (6x^2)}{(2x^3)^2}$

Kettenregel

$$(F \circ u)'(x) = F'(u) \cdot u'(x)$$

(3) $(f \circ g)'(x) = (e^{2x})' = F'(u) \cdot u'(x) = e^u \cdot 2 = 2e^{2x}$

Kettenregel mit
$F(u) = e^u$, $F'(u) = e^u$
$u(x) = 2x$, $u'(x) = 2$

- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)$
- $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$
- $(\log_a(x))' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$

Funktionsgleichung Tangente

$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

(a) Formel für Tangentengleichung: $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) = 2x_0 \cdot (x - x_0) + x_0^2$.
Einsetzen vom Punkt $(2,3)$ ergibt $3 = 2x_0(2 - x_0) + x_0^2$, resp.

$$\begin{aligned} -x_0^2 + 4x_0 - 3 &= 0 \\ x_0^2 - 4x_0 + 3 &= 0 \\ (x_0 - 1)(x_0 - 3) &= 0 \end{aligned}$$

1. Lösung: $x_0 = 1 \Rightarrow y = 2(x-1) + 1 = 2x - 1$
2. Lösung: $x_0 = 3 \Rightarrow y = 6(x-3) + 9 = 6x - 9$

geg: *Steigung*

Der Wert der Ableitung ist die Steigung: $f'(x) = Steigung$

geg: *Wagrechte Tangente*

Bedeuted die Steigung ist 0.

Damit lassen sich Gleichungen aufstellen um diverse Aufgabentypen zu lösen.

Fixpunkte bestimmen:

löse: $x = \frac{3x^2+1}{4x} \quad | \cdot 4x$

$4x^2 = 3x^2 + 1$

$\Leftrightarrow x^2 = 1$

Lösungen: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$; Stimmen mit Nullstellen überein!

Newtonverfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Anwendung: Funktione $f(x)$ gegeben, Bestimmung Menge aller Startwerte mit Newtonverfahren, bei einem Punkt (bswp $x = 2$)
1. Gleichung Aufstellen
$2 = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

2. Auflösen nach x

Wird auch **Rekursions-Formel** genannt. ←

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^4 - 2x_n^2 + 1}{4x_n^3 - 4x_n}$$

$$= x_n - \frac{(x_n^2 - 1)^2}{4x_n(x_n^2 - 1)}$$

$$= x_n - \frac{x_n^2 - 1}{4x_n}$$

$$= \underline{\underline{\frac{3x_n^2 + 1}{4x_n}}}$$

Integral

-> Fläche unter einem Kurvenstück

Unbestimmtes Integral -> Ergibt keine Zahl, sondern eine Funktion!

$$f'''(x) = 12x + 6$$
$$f''(x) = 6x^2 + 6x + c$$
$$f'(x) = 2x^3 + 3x^2 + cx + d$$
$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 + x^3 + \frac{c}{2}x^2 + dx \cdot e$$

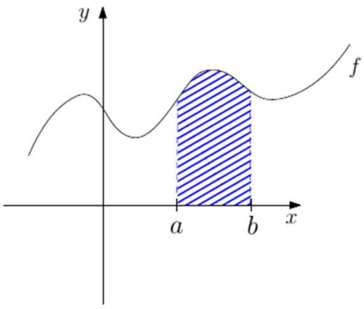
$$f(x) = x^n \to F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$$

Bsp.:

$f(x) = 2x^2 + 3x - 1$

$F(x) = 2\frac{1}{3}x^3 + 3\frac{1}{2}x^2 - x$

$= F(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x$



Unbestimmten Integrale lösen

(a) $\int 2x^5 - 4x^3 + 6x^2 - 2\,\mathrm{d}x,$ weg

$\frac{2}{6}x^6 - \frac{4}{4}x^4 + \frac{6}{3}x^3 - 2x$

$= \frac{2}{6}x^6 - x^4 + 2x^3 - 2x + C$

Stammfunktion

Ableitung rückgängig machen.

$\int$ ohne ober und untergrenze = Stammfunktion

Hauptsatz

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Potenz- und Logarithmus-Funktionen

- $\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$
- $\int \ln(x) \,\mathrm{d}x = x \cdot \ln(x) - x + C$
- $\int \log_a(x) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln(a)} \cdot (x \cdot \ln(x) - x) + C$

Trigonometrische Funktionen

- $\int \sin(x) \,\mathrm{d}x = -\cos(x) + C$
- $\int \cos(x) \,\mathrm{d}x = \sin(x) + C$
- $\int \tan(x) \,\mathrm{d}x = -\ln|\cos(x)| + C$
- $(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ resp. $\int (1 + \tan^2(x)) \,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2(x)} \,\mathrm{d}x = \tan(x) + C$
- $(\arcsin(x))' = (1 - x^2)^{-1/2}$ resp. $\int (1 - x^2)^{-1/2} \,\mathrm{d}x = \arcsin(x) + C$
- $(\arccos(x))' = -(1 - x^2)^{-1/2}$ resp. $\int -(1 - x^2)^{-1/2} \,\mathrm{d}x = \arccos(x) + C$
- $(\arctan(x))' = (1 + x^2)^{-1}$ resp. $\int (1 + x^2)^{-1} \,\mathrm{d}x = \arctan(x) + C$

Berechnungen

Fläche = Integral von f(x)

Fläche berechnen

BSP: $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ und X-Achse

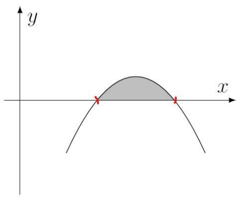
1. Integrationsgrenzen bestimmen (hier Nullstellen, ansonsten Funktionen gleichsetzen)

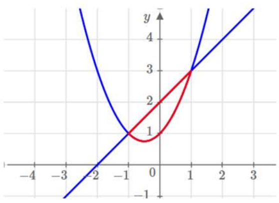
$-x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0$

2. Integral ausrechnen

$$\int_1^2 -x^2 + 3x - 2 \,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x\right]_1^2$$

$$= \left(-\frac{8}{3} + 6 - 4\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 2\right) = \frac{1}{6}$$





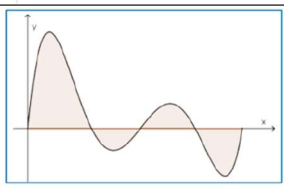
Die Formel zur Berechnung der Fläche zwischen zwei Graphen lautet:

$$\left|\int_{s_1}^{s_2} [f(x) - g(x)] \,\mathrm{d}x\right|$$

Flächeninhalt bei **wechselndem Vorzeichen** von $f(x)$

- $[a, b] = \text{Intervall}$
- $x_1, x_2, \ldots, x_n = \mathit{Nullstellen}$

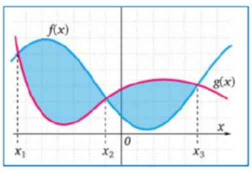
$$\left|\int_a^{x_1} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right| + \cdots + \left|\int_{x_n}^{b} f(x)\,dx\right|$$



Flächeninhalt zwischen **zwei Kurven** $f(x)$ und $g(x)$

- $[a, b] = \text{Intervall}$
- $x_1, x_2, \ldots, x_n = \mathit{Schnittpunkte}$

$$\left|\int_a^{x_1} (f(x) - g(x))\,dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x))\right| + \cdots + \left|\int_{x_n}^{b} (f(x) - g(x))\right|$$



Folgen und Reihen

d: Differenz; q: Quotient

Arithmetische Folge

-> Jede Arithmetische Reihe divergiert -> kein Grenzwert!

explizit	Implizit	Summe von n Elementen
$a_n = c + (n-1) \cdot d$	$a_1 = c$ $a_{n+1} = a_n + d$	$s_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$ d = Schritt

Arithmetische Reihe

Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder konstant:

Summe:
$S_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$

n unbekannt (Formel für n-tes Element)
$S_n = a_1 + (n-1) \cdot d$
nach n auflösen

Geometrische Folge

explizit	Implizit	Summe von n Elementen
$a_n = c \cdot a^{n-1}$	$a_1 = c$ $a_{n+1} = q \cdot a_n$	$s_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

Geometrische Reihe

der Quotient zweier aufeinanderfolgenden Glieder konstant:

Summe:
$S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

Für $|q| < 1$
$S_n = a_1 \cdot \frac{1}{1-q}$

(a) Wieviele Glieder der arithmetischen Folge $(6, 12, \ldots)$ ergeben die Summe 1800?
(b) Wieviele Glieder der geometrischen Folge $(6, 12, \ldots)$ ergeben die Summe 6138?

$6n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 6 = 1800$, $6 \cdot \frac{2^n - 1}{1} = 6 \cdot 2^n - 6.$

$\sum_{k=50}^{150} a_k = 101 \cdot \frac{a_{50} + a_{150}}{2} = 101 \frac{402 + 1202}{2} = 81'002$ (1P)

Arithmetische Summenformel

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Summe der Quadratzahlen (ohne Begründung)

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Doppelsumme:

Von innen nach aussen lösen

$$\sum_{k=1}^{3} \left(\sum_{i=1}^{2} k * i \right) \qquad \sum_{k=1}^{3} ((k*1) + (k*2) = 3k)$$

$$\sum_{k=1}^{3} ((3*1) + (3*2) + (3*3)) = 16$$

Grenzwerte

Grenzwerte von Folgen im Unendlichen

Die Folgenglieder kommen ab einem gewissen n dem Wert g (Grenzwert) beliebig nahe

- Folgen mit Grenzwert — *Konvergent* — $a_n = \frac{1}{n} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots)$
- Folgen ohne Grenzwert — *Divergent* — $a_n = (-1)^n = (-1, 1, -1, 1, -1 \ldots)$
- Beliebig gross (∞) / klein ($-\infty$) — *bestimmt divergent* — $a_n = 3 + 2n = (5, 7, 9, 11, \ldots)$

Folgen haben maximal einen Grenzwert!

Rechnen mit Grenzwerten (für n ⟶ ∞)

(1) $\lim_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n$

(2) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} (a_n) + \lim_{n\to\infty} (b_n)$, $\quad \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} (a_n) - \lim_{n\to\infty} (b_n)$

(3) $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} (a_n) \cdot \lim_{n\to\infty} (b_n)$

(4) $\lim_{n\to\infty} (\frac{a_n}{b_n}) = \frac{\lim_{n\to\infty} (a_n)}{\lim_{n\to\infty} (b_n)}$, falls $\lim_{n\to\infty} (b_n) \neq 0$ und $b_n \neq 0$ für alle n.

$$\Big| \; n \to \infty : \quad \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Polynome und Grenzwerte

Fall 1: Zählergrad < Nennergrad. Dann gilt: $\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{h(n)} = 0$ $\qquad \lim_{n \to 8} \frac{3n^2 + 7n\ldots}{n^3 - 7n^2 \ldots} = 0$

Fall 2: Zählergrad > Nennergrad. Dann gilt: $\frac{g(n)}{h(n)}$ kein Grenzwert (→ ∞ oder - ∞) $\qquad \lim_{n \to 8} \frac{3n^4 + 7n\ldots}{n^3 - 7n^2 \ldots}$

Fall 3 Zählergrad = Nennergrad. Dann gilt: $\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{h(n)} = \frac{\text{"führender Term von g"}}{\text{"führender Term von h"}}$ $\qquad \lim_{n \to 8} \frac{2n^3 + 7n\ldots}{5n^3 - 7n^2 \ldots} = \frac{2}{5}$

Rechnen mit Grenzwerten (für n ⟶ ∞)

Rechnen mit Grenzwerten (für $n \to \infty$)

Harmonische Folge	Geometrische Folge	n-te Wurzel	Eulerzahl
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$	$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$	$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

Erweitern mit $\frac{1}{n^k}$

- k = höchste Potenz

Beispiel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n+1}{5n^2+4n+2}$$

$$\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{3n^2+2n+1}{5n^2+4n+2} = \frac{\frac{3n^2}{n^2}+\frac{2n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{5n^2}{n^2}+\frac{4n}{n^2}+\frac{2}{n^2}}$$

$$\frac{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{5+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}} = \frac{3+0+0}{5+0+0}$$

Erweitern mit $\frac{1}{a^k}$

- k = höchste Potenz
- a = grösste Basis

Beispiel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}+2^n}{3^n+2}$$

$$\frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^n}} \cdot \frac{3\cdot 3^n+2^n}{3^n+2} = \frac{\frac{3\cdot 3^n}{3^n}+\frac{2^n}{3^n}}{\frac{3^n}{3^n}+\frac{2}{3^n}}$$

$$\frac{3+\frac{2^n}{3^n}}{1+\frac{2}{3^n}} = \frac{3+0}{1+0}$$

Erweitern mit $\sqrt{a(n)}+\sqrt{b(n)}$

Beispiel

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-2n} = \frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-2n}}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-2n}} \cdot \frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-2n}}{1}$$

$$\frac{\left(\sqrt{n^2+n}\right)^2-\left(\sqrt{n^2-2n}\right)^2}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-2n}} = \frac{3n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-2n}} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{3n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-2n}}$$

$$\frac{\frac{3n}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}\cdot(n^2+n)}+\sqrt{\frac{1}{n^2}\cdot(n^2-2n)}} = \frac{3}{\sqrt{\frac{n^2+n}{n^2}}+\sqrt{\frac{n^2-n}{n^2}}} = \frac{3}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{3}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{3}{2}$$

Erweitern zu $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{5n}\right)^n$

- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^a\right) = e^a$

Beispiel

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3n}\right)^{4n} = \left(\left(1+\frac{1}{\frac{3n}{2}}\right)^{\frac{3n}{2}}\right)^a = e^a = e^{\frac{8}{3}}$$

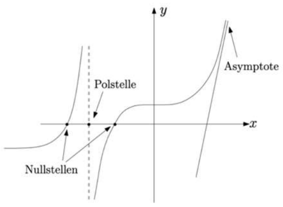
$$\boxed{4n = \frac{3n}{2}\cdot a \qquad a = \frac{4n}{\frac{3n}{2}} = \frac{8}{3}}$$

Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen

Grenzwert einer Funktion im Endlichen

$\lim_{x\to x_0} f(x) = g$

$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2+2x-15} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+5)} - \lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x+5} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$



Gebrochenrationale Funktionen

gebrochenrationale Funktion $= \frac{\text{Polynom 1}}{\text{Polynom 2}}$

Wir betrachten die gebrochenrationale Funktion $f(x) = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$

Begriff	**Wert**
Nullstellen	Nullstellen von p1(x), die nicht Nullstellen von p2(x) sind
Definitionslücken hebbare Definitionslücke Polstelle	Nullstellen von p2(x) Nullstelle von p1(x) **und** Nullstelle von p2(x) => x0 kann gestopft werden mit $\lim_{x\to x_0} f(x_0)$ Nur Nullstelle vom Nennerpolynom (nach allfälligem Kürzen) -> p_2
Vorzeichenwechsel	Graph springt an dieser Stell über die x-Achse => bei allen Nullstellen und Polstellen x0 (nach allfälligem Kürzen), bei denen (x – x0) einen ungeraden Exponenten hat.
Asymptote	Funktion lässt sich darstellen als: $f(x) = p(x) + \frac{g(x)}{h(x)}$ => Polynomdivision Nähert sich asymptotisch an p(x)

Hebbare Definitionslücken (kann man kürzen?)

$f_1(x) = \frac{(x+1)(x+3)}{x(x+3)(x-5)}$ —> $(x+3)$ ist kürzbar, diese Definitionslücke ist somit "hebbar", man kann sie also "stopfen". Dafür einfach den Wert "-3" in den gekürzten Term einsetzen:

$\frac{(-3+1)}{(-3)(-3-5)} = -\frac{1}{12}$. Somit stopfbar mit $-\frac{1}{12}$

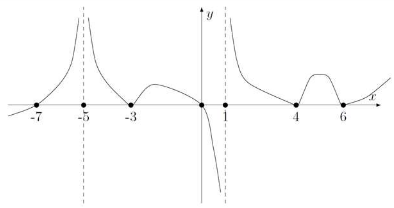
Vorzeichenwechsel

passiert bei nicht hebbaren Definitionslücken und bei Nullstellen mit ungeradem exponent.

$\frac{(x+1)^1}{x^1(x-5)^1} \to -1, -5, 0$

$$f(x) = k\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_r)}{(x-\tilde{x}_1)(x-\tilde{x}_2)\cdots(x-\tilde{x}_s)}$$

$$f(x) = \frac{x(x+7)(x+3)^2(x-4)^2(x-6)^2}{(x+5)^2(x-1)}$$



Stetigkeit & Differenzierbarkeit

- Wenn sich der Graph der Funktion ohne absetzen zeichnen lässt
- Kurve macht keine Sprünge

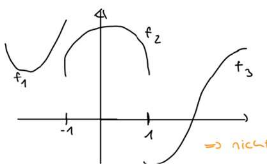
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2\cdot x-15}{x-3} & (x\neq 3) \\ y_0 & (x=3)\end{cases}$$

$y_0 = \lim_{x\to 3} g(x) = \lim_{x\to 3}\frac{x^2+2x-15}{x-3}$

Stetigkeit: Funktionswerte müssen an den Punkten gleich sein

(i) Bestimmen Sie die Parameter a und b so, dass die Funktion $f(x)$ überall stetig ist.

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2a, & x<-1 \\ -x^2+5, & -1\le x\le 1 \\ x^3-3bx, & x>1\end{cases}$$



=> nicht stetig

Ziel: Enden zusammenbringen

① $f_1(-1) = f_2(-1)$
② $f_2(1) = f_3(1)$
} stetig Bedingungen

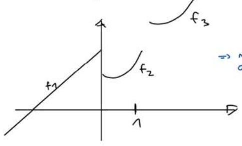
① $1 + 2a = 4$
② $4 = 1 - 3b$
} einsetzen

Auflösen gibt => $a = 1{,}5$ $b = -1$

Differenzierbarkeit: 1. Ableitung muss den gleichen Funktionswert ergeben

(ii) Bestimmen Sie die Parameter a, b, c und d so, dass die Funktion $f(x)$ überall differenzierbar ist.

$$f(x) = \begin{cases} ax+b, & x<0 \\ x^2+x+4, & 0\le x\le 1 \\ cx^2+d, & x>1\end{cases}$$



=> nicht stetig und nicht differenzierbar

ii) ① $f_1(0) = f_2(0)$
② $f_2(1) = f_3(1)$
} gleiche Funktionswert => Stetigkeit

③ $f_1'(0) = f_2'(0)$
④ $f_2'(1) = f_3'(1)$
} Ableitung muss gleich sein => Differenzierbarkeit

① $b = 4$ $f_1'(x) = a$
② $6 = c + d$ $f_2'(x) = 2x+1$
③ $a = 1$ $f_3'(x) = 2cx$
④ $3 = 2c$

Auflösen => $a = 1$ ③ $b = 4$ ①
$c = 1{,}5$ ④ $d = 6 - 1{,}5 = 4{,}5$ ②

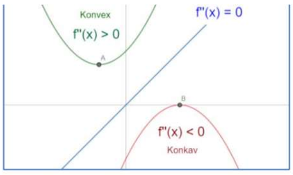
Anwendungen der Ableitung

Krümmungsverhalten

- Die 2. Ableitung beschreibt das Krümmungsverhalten des Graphen

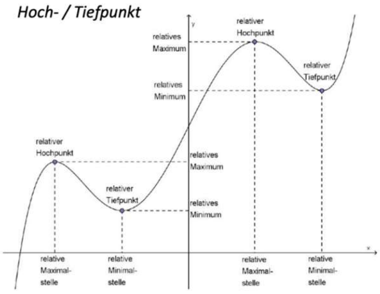
Zusammenhang zwischen 2. Ableitung und Krümmung

- $f''(x_0) > 0$ *Konvex* Nach links gekrümmt
- $f''(x_0) < 0$ *Konkav* Nach rechts gekrümmt
- $f''(x_0) = 0$ Keine eindeutige Krümmung



Relative Extrema

- *Relative Extremal-**Stelle*** x_0 *Minimal- / Maximalstelle*
- *Relatives Extremum* y_0 *Maximum / Minimum*
- *Relativer Extremal-**Punkt*** $P_0 = (x_0, y_0)$ *Hoch- / Tiefpunkt*



Berechnung

Ermittlung durch Lösen der Gleichung $f'(x) = 0$.

Bedingungen

- $f'(x_0) = 0$
- $f''(x_0) \neq 0$

Typenbestimmung

- $f''(x_0) < 0 \rightarrow$ *relatives Maximum*
- $f''(x_0) > 0 \rightarrow$ *relatives Minimum*

lokales Maximum

$f'(x_0) = 0$

$f'(x_0)$ *wechselt von* $+$ *zu* $-$

$f''(x_0) < 0$

lokales Minimum

$f'(x_0) = 0$

$f'(x_0)$ *wechselt von* $-$ *zu* $+$

$f''(x_0) > 0$

Vorgehen – Relative Extrema

$$f(x) = y$$

1. Erste Ableitung
2. Extremalstellen x_0 bestimmen
   - $f'(x) = 0 \rightarrow x_0$
3. Zweite Ableitung
4. Typenbestimmung
   - $f''(x_0) < 0 \rightarrow$ *Relatives Maximum*
   - $f''(x_0) > 0 \rightarrow$ *Relatives Minimum*
5. In Gleichung $f(x_0) = y_0$ einsetzen
   - Hochpunkt / Tiefpunkt $= P(x_0, y_0)$

Beispiel

$$f(x) = x^5 - \frac{65}{3}x^3 + 180x$$

1. $y' = 5x^4 - 65x^2 + 180$
2. $y' = 0$
   - $\rightarrow x_0 = 2 \pm \sqrt{3}$
3. $y'' = 20x^3 - 130x$
4. $f''(x_0) = 20 \cdot (2 \pm \sqrt{3})^3 - 130 \cdot (2 \pm \sqrt{3})$
   - $f''(2 - \sqrt{3}) = -34 \rightarrow$ *Maximum*
   - $f''(2 + \sqrt{3}) = 554 \rightarrow$ *Minimum*
5. Gleichung $f(x_0) = y_0$
   - Hochpunkt / Tiefpunkt $= P(x_0, y_0)$

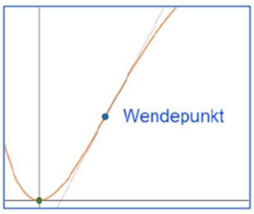
Wendepunkte und Sattelpunkte

Definition

Als Wendepunkte werden Punkte bezeichnet bei denen sich der «Drehsinn» ändert. *Wendepunkte* mit horizontaler Tangente werden als *Sattelpunkte* oder *Terrassenpunkte* bezeichnet

Wendetangente

- Tangente an einem Wendepunkt



Berechnung

Ermittlung durch Lösen der Gleichung $f''(x) = 0 \rightarrow x_0$.

Bedingungen

Sei $y = f(x)$ *dreimal differenzierbar*

- $f''(x_0) = 0$
- $f^{(3)}(x_0) \neq 0$ $\rightarrow$ Wendepunkt
- Falls zusätzlich $f'(x_0) = 0$ $\rightarrow$ Sattelpunkt

Ein **Sattelpunkt** liegt vor, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $f''(x_0) = 0$
2. $f'''(x_0) \neq 0$
3. $f'(x_0) = 0$

Vorgehen zur Bestimmung der Wendepunkte / Sattelpunkte

1. **Erste und zweite Ableitung**
2. **Wendepunkt bestimmen**
   - $f''(x_0) = 0 \rightarrow x_0$
   - $f^{(3)}(x_0) \neq 0$
3. **Sattelpunkte bestimmen**
   - $f'(x_0) = 0$
   - $f''(x_0) = 0$
   - …
   - $f^{(n)}(x_0) \neq 0$
     - **Gerade → relatives Extremum**
     - **Ungerade → Sattelpunkt**
4. **x_0 in ursprüngliche Gleichung einsetzen**

Kurvendiskussion

Vorgehen

Kurvendiskussion für eine Funktion $y = f(x)$

- Definitionsbereich
- Symmetrie
  - ➢ Gerade / Ungerade
- Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen
  - ➢ Nullstellen
  - ➢ Schnittpunkte mit Y-Achse
- Verhalten für $x \to \infty$
- Relative Extrema, inkl. Typbestimmung
- Wendepunkte, insbesondere Sattelpunkte

Skizze

Graphen skizzieren

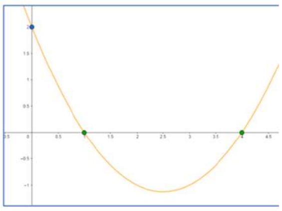
$y = 0.5 \cdot (x^2 - 5x + 4)$

Nullstellen

- $0 = 0.5 \cdot (x-1) \cdot (x-4)$ $\quad \rightarrow x_1 = 1, x_2 = 4$

Y-Achsenabschnitt

- $y = 0.5 \cdot x^2 - 2.5 \cdot x + 2$ $\quad \rightarrow y_0 = 2$

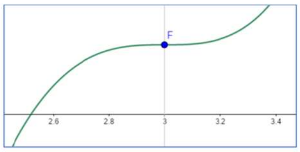


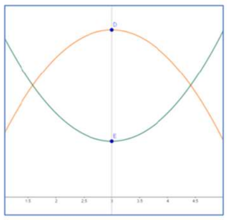
Relative Extrema $n = gerade$ $(n > 1)$

- Positiv $y = 0.5 \cdot (x-3)^n \cdot (\ldots) + 3$ $\quad \rightarrow D = Hochpunkt$
- Negativ $y = -0.5 \cdot (x-3)^n \cdot (\ldots) + 1$ $\quad \rightarrow E = Tiefpunkt$

Wechselpunkte $n = ungerade$ $(n > 2)$

- $y = 0.5 \cdot (x-3)^n \cdot (\ldots) + c$ $\quad \rightarrow F = Wechselpunkt$



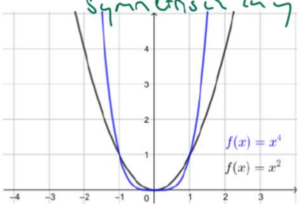


Beispiel-Funktionen

Parabel n-ter Ordnung

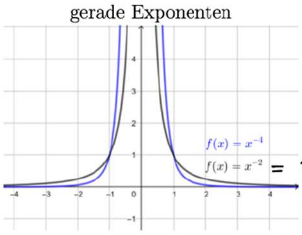
gerade Exponenten

symmetrisch zu y



Hyperbel n-ter Ordnung

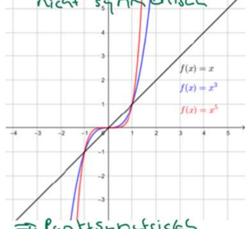
gerade Exponenten



$= \frac{1}{x^2}$

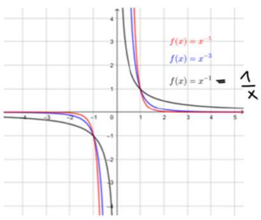
ungerade Exponenten

nicht symmetrisch



$\Rightarrow$ Punktsymmetrisch bzgl. Ursprung

ungerade Exponenten



$= \frac{1}{x}$

Extremwertprobleme

Vorgehen

1. **Zielgrösse** identifizieren
2. Unabhängige Variablen identifizieren
3. **Definitionsbereich** bestimmen
4. Zielgrösse als Funktion der unabhängigen Variablen ausdrücken; ev. eine **qualitative Skizze** (Nullstellen) des Graphen machen.
5. **Relative Maxima resp. Minima** bestimmen
6. **Analyse der Randpunkte**
   Beispiel Definitionsbereich: [0, 2] => Randpunkte bei x = 0 und x = 2
   Wenn die Funktion z.B. gegen links und rechts monoton fallend ist sind es Tiefpunkte!
7. Untersuchen, welche der relativen Extrema auch **absolute Extrema** sind (Betrachtung der Funktion in der Nähe des Randes)
   $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ für x in der Nähe des Randes => falls $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ => absolutes Extrema

Randpunkte

- (a, b): keine Randpunkte
- [a, b): Randpunkt a
- (a, b]: Randpunkt b
- [a, b]: Randpunkte a, b

Beispiel

Zielfunktion

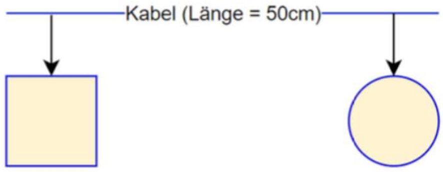
- $A_{Max} = A_{Quadrat} + A_{Kreis}$
- $A_{Quadrat} = s^2$
- $A_{Kreis} = r^2 \cdot \pi$

Nebenbedingungen

- $U_{Quadrat} = 4s \quad \to s = \frac{U_Q}{4}$
- $U_{Kreis} = 2r\pi \quad \to r = \frac{U_K}{2\pi}$
- $U_Q = 50 - U_K \quad \to r = \frac{50 - U_Q}{2\pi}$

Nebenbedingungen einsetzen

- $A_{Max}(r, s) = s^2 + r^2 \cdot \pi$
- $A_{Max}(U_Q) = \left(\frac{U_Q}{4}\right)^2 + \left(\frac{50 - U_Q}{2\pi}\right)^2 \cdot \pi$



$$U_{Quadrat} + U_{Kreis} = 50cm$$

$$A_{Quadrat} + A_{Kreis} \to Maximal$$

Erste Ableitung $f'(x) = 0$

- $A'(U_Q) = \frac{U_Q}{8} + \frac{25}{\pi} + \frac{U_Q}{2\pi}$
- $A'(U_Q) = 0 \quad \to \boldsymbol{U_Q \approx 28}$

Zweite Ableitung $f''(x)$

- $A''(U_Q) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2\pi} \quad \to relative\ Minimalstelle$