Lineare Algebra S2

Raphael Nambiar

Version: 9. April 2022

Vektorgeometrie

Begriffe

Kollinear: Es existiert eine Gerade g, zu der beide Vektoren parallel sind.
Komplanar: Existiert eine Ebene e, zu der alle drei Vektoren parallel.
Ortsvektor: Beginnt vim Ursprung. Schreibweise: $\vec{r}(P)$

Betrag

$$|\vec{a}| = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$

$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

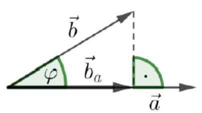
Orthogonal

Wenn zwei Vektoren senkrecht zueinander sind.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Orthogonale Projektion

Projektion des Vektores $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$.



$\vec{b}_a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}$

$|\vec{b}_a| = \frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}{|\vec{a}|}$

$|\vec{b}_a| = |\vec{a}| \cdot \cos(\varphi)$

Zwischenwinkel

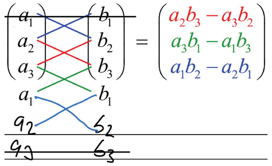
$\varphi = cos^{-1}(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|})$

Einheitsvektor

$\vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$

$|\vec{e}_a| = 1$

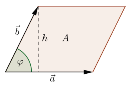
Vektorprodukt



$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$

$\vec{a} \times \vec{b}$ ist orthogonal zu $\vec{a}$ und zu $\vec{b}$



$|\vec{a} \times \vec{b}| = \text{A}$

Dreieck $= \frac{1}{2}$ A

Geraden

Normalenvektor

Parameterdarstellung

Koordinatendarstellung

Koordinatendarstellung zu Parameterdarstellung

Parameterdarstellung zu Koordinatendarstellung

Abstand Punkt zu Geraden

Lage Geraden

Identisch:
Parallel:
Schneidend:
Windschief:

Lage Bestimmen

Ebene

Normalenvektor der Ebene (orthogonal zur Ebene)

Auf der Ebene E senkrecht stehnder Vektor $\vec{n}$.

$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$

Parameterdarstellung

$E : \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$

P: Aufpunkt

$\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$; $\vec{b} = \overrightarrow{PR}$ = Richtungsvektoren

Koordinatendarstellung

$E : ax + by + cz + d = 0$

Parameterdarstellung zu Koordinatendarstellung

$$E : \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

1. $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$
2. Koordinatendarstellung $E : -14x + 6y - 4z + d = 0$
3. Aufpunkt einsetzen: $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E : -14 \cdot 2 + 6 \cdot 4 - 4 \cdot 1 + d = 0$
4. d ausrechnen: $E : -14 \cdot 2 + 6 \cdot 4 - 4 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = 8$
5. $E : -14x + 6y - 4z + 8 = 0$

$\Rightarrow \frac{-14x + 6y - 4z + 8 = 0}{2} \Rightarrow E : -7x + 3y - 2z + 4 = 0$

Koordinatendarstellung zu Parameterdarstellung

Abstand Punkt zu Geraden

Lage Geraden

Identisch:
Parallel:
Schneidend:
Windschief:

Lage Bestimmen

Linearen Gleichungssysteme

Rang

Matrix muss in Zeilenstufenform sein.

$rg(A)$ = Gesamtanzahl Zeilen - Anzahl Nullzeilen .

$$\text{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}_{\text{A}} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{rang(A) = 2} \\ \text{rang(A|b) = 2} \end{array}$$

Lösbarkeit von LGS

Das LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$ ist genau dann lösbar, wenn $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|\ \vec{c})$.
Es hat genau eine Lösung, falls **zusätzlich** gilt: $\text{rg}(A) = n$.
Es hat unendlich viele Lösungen, falls **zusätzlich** gilt: $\text{rg}(A) < n$.