Analysis 2 S2

Raphael Nambiar

Version: 15. Mai 2022

Integrieren

$f(x)$	$f'(x)$
x^α mit $\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
$\cot(x)$	$-1-\cot^2(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$
e^x	e^x
a^x	$\ln(a)\cdot a^x$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{\ln(a)x}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

$f(x)$	$F(x)$
x^a mit $a \neq -1$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}+C$
$\sin(x)$	$-\cos(x)+C$
$\cos(x)$	$\sin(x)+C$
$1+\tan^2(x)$	$\tan(x)+C$
e^x	e^x+C
a^x	$\frac{1}{\ln(a)}\cdot a^x+C$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\|x\|)+C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)+C$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)+C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)+C$

Integration durch Substitution

1 Substitutionsgleichung für $x : u = g(x)$

2 Substitutionsgleichung für dx :

$\frac{du}{dx} = g'(x)_{(Ableitung)} \rightarrow dx = \frac{du}{g'(x)}$

3 Integralsubstitution: Einsetzen von u und dx aus 1. und 2 in Ursprung

4 Integration von 3.

5 Rücksubstitution (nur unbestimmte Integrale)

Beispiel:

1 $u = 2x$
2 $dx = \frac{du}{2}$
3 $\int e^u \cdot \frac{du}{2}$

4 $\int e^u \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2}\cdot\int e^u du \rightarrow \frac{1}{2}e^u + C$

5 $\frac{1}{2}e^u + C \rightarrow \frac{1}{2}e^{2x} + C$

Partielle Integration

$$u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

Beispiel:

$u(x) = x;\ v'(x) = e^x$
$u'(x) = 1;\ v(x) = e^x$

$$\int x\cdot e^x$$

$$\int x\cdot e^x = x\cdot e^x - \int \cdot e^x dx = x\cdot e^x - e^x + C$$

Integration durch Partialbruchzerlegung

TBD

Differentialgleichungen (DGL)

Begriffe

Ordnung: Ordnung = höchste Ableitung in der DGL

Linearität: Funktion und Ableitung sind linear $\rightarrow x^1$

Separierbare Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung 1. Ordnung heisst separierbar wenn:

$$y' = f(x)\cdot g(x)$$

How To:

1 $y' = \frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y)$

2 Trennung der Variablen: $\frac{dy}{g(y)} = f(x)\cdot dx$

3 Integration auf beiden Seiten der Gleichung (if possible):

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

4 Auflösen nach y (falls möglich!)

Beispiel:

3
4

$$y' = y^2 = sin(x)$$

1 $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{sin(x)}{y^2}$

2 $y^2 \cdot dy = sin(x)\cdot dx$

Autonome Differentialgleichungen