

Lineare Algebra S2

Raphael Nambiar

Version: 4. April 2022

Vektorgeometrie

Begriffe

Kollinear: Es existiert eine Gerade g , zu der beide Vektoren parallel sind.

Koplanar: Existiert eine Ebene e , zu der alle drei Vektoren parallel.

Ortsvektor: Beginnt im Ursprung. Schreibweise: $\vec{r}(P)$

Betrag

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Orthogonal

Wenn zwei Vektoren senkrecht zueinander sind.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

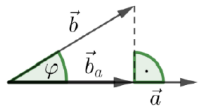
Orthogonale Projektion

Projektion des Vektors \vec{b} auf den Vektor \vec{a} .

$$\vec{b}_a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}$$

$$|\vec{b}_a| = \frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}{|\vec{a}|}$$

$$|\vec{b}_a| = |\vec{a}| \cdot \cos(\varphi)$$



Zwischenwinkel

$$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

Einheitsvektor

$$\vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$$

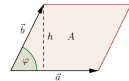
$$|\vec{e}_a| = 1$$

Vektorprodukt

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$$

$\vec{a} \times \vec{b}$ ist orthogonal zu \vec{a} und zu \vec{b}



$$|\vec{a} \times \vec{b}| = A$$

$$\text{Dreieck} = \frac{1}{2} A$$

Geraden

Normalenvektor

Parameterdarstellung

Koordinatendarstellung

Koordinatendarstellung zu Parameterdarstellung

Parameterdarstellung zu Koordinatendarstellung

Abstand Punkt zu Geraden

Lage Geraden

Identisch:

Parallel:

Schneidend:

Windschief:

Lage Bestimmen

Ebene

Normalenvektor der Ebene

Auf der Ebene E senkrecht stehender Vektor \vec{n} .

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$$

Parameterdarstellung

$$E: \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$$

P: Aufpunkt

$\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$; $\vec{b} = \overrightarrow{PR}$ = Richtungsvektoren

Koordinatendarstellung

$$E: ax + by + cz + d = 0$$

Parameterdarstellung zu Koordinatendarstellung

$$E: \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{1} \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{2} \text{Koordinatendarstellung } E: -14x + 6y - 4z + d = 0$$

$$\textcircled{3} \text{Aufpunkt einsetzen: } \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E: -14 \cdot 2 + 6 \cdot 4 - 4 \cdot 1 + d = 0$$

$$\textcircled{4} d \text{ ausrechnen: } E: -14 \cdot 2 + 6 \cdot 4 - 4 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = 8$$

$$\textcircled{5} E: -14x + 6y - 4z + 8 = 0$$
$$\Rightarrow \frac{-14x + 6y - 4z + 8 = 0}{2} \Rightarrow E: -7x + 3y - 2z + 4 = 0$$

Koordinatendarstellung zu Parameterdarstellung

Abstand Punkt zu Geraden

Lage Geraden

Identisch:

Parallel:

Schneidend:

Windschief:

Lage Bestimmen

Linearen Gleichungssysteme

Rang

Matrix muss in Zeilenstufenform sein.

$$\text{rg}(A) = \text{Gesamtanzahl Zeilen} - \text{Anzahl Nullzeilen}$$

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{matrix} \text{rang}(A) = 2 \\ \text{rang}(A|b) = 2 \end{matrix}$$

A

Lösbarkeit von LGS

Das LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$ ist genau dann lösbar, wenn $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|\vec{c})$.

Es hat genau eine Lösung, falls zusätzlich gilt: $\text{rg}(A) = n$.

Es hat unendlich viele Lösungen, falls zusätzlich gilt: $\text{rg}(A) < n$.