Lineare Algebra S2

Raphael Nambiar

Version: 3. Juni 2022

Vektorgeometrie

Begriffe

Kollinear: Es existiert eine Gerade g, zu der beide Vektoren parallel sind.

Komplanar: Existiert eine Ebene e, zu der alle drei Vektoren parallel.
Ortsvektor: Beginnt vim Ursprung. Schreibweise: $\vec{r}(P)$
Nullvektor: Vektor mit Betrag 0,keine Richtung.: $\vec{0}$

Betrag

$$|\vec{a}| = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

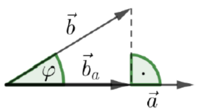
$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$
$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \rightarrow \arccos(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|})$

Orthogonal

Wenn zwei Vektoren senkrecht zueinander sind.
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Orthogonale Projektion

Projektion des Vektores $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$.



$\vec{b}_a = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}$

$|\vec{b}_a| = \frac{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$

$|\vec{b}_a| = |\vec{a}| \cdot \cos(\varphi)$

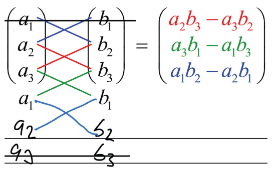
Zwischenwinkel

$\varphi = cos^{-1}(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|})$

Einheitsvektor

$\vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$;$|\vec{e}_a| = 1$

Vektorprodukt / Kreuzprodukt



$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$
$\vec{a} \times \vec{b}$ ist orthogonal zu $\vec{a}$ und zu $\vec{b}$

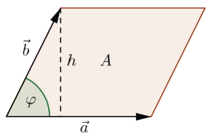
Kreuzprodukt in R²

Seien a und b zwei Vektoren, dann gilt für das Kreuzprodukt in R^2:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \det(\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{b}_x \\ \mathbf{a}_y & \mathbf{b}_y \end{vmatrix} = \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{b}_y - \mathbf{b}_x \cdot \mathbf{a}_y$$

Fläche / Parallelogramm



$|\vec{a} \times \vec{b}| = $ A
Dreieck $= \frac{1}{2}$ A

Volumen / Spatprodukt

Das Spatprodukt der drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

berechnest du mit

- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ oder mit
- der Determinante $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$. Volumen: -> | Betrag nehmen |

Geraden

Parameterdarstellung

$g : \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a}$

P: Aufpunkt
$\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$; = Richtungsvektor

Koordinatendarstellung

$g : ax + by + c = 0$

Koordinatendarstellung zu Parameterdarstellung

Zwei Punkte auf g bestimmen: 2 beliebige x Koordinaten wählen und in g einsetzen. Danach jeweils y auslesen. Dies ergibt zwei Punkte P, Q. In Parameterdarstellung bringen.

Parameterdarstellung zu Koordinatendarstellung

Gerade $g : \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Gleichungssystem aufstellen und Lösen:

$$x = 7 - 2\lambda$$
$$y = 1 - 4\lambda$$

In Koordinatendarstellung bringen: $-2x + y + 13 = 0$

Abstand Punkt zu Geraden

Gerade g: $\begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

Punkt A: $(3, -1, 4)$

$$\overline{PA} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -14 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$l = \frac{|\overrightarrow{PA} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}$
$\vec{a} \Rightarrow$ aus der Parameterdarstellung

Ebene

Normalenvektor der Ebene (orthogonal zur Ebene)

Auf der Ebene E senkrecht stehnder Vektor $\vec{n}$.
$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$

Parameterdarstellung

$E : \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$

P: Aufpunkt
$\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$; $\vec{b} = \overrightarrow{PR} =$ Richtungsvektoren

Koordinatendarstellung

$E : ax + by + cz + d = 0$

Parameterdarstellung zu Koordinatendarstellung

$$E : \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

2 Koordinatendarstellung $E : -14x + 6y - 4z + d = 0$

3 Aufpunkt einsetzen: $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E : -14 \cdot 2 + 6 \cdot 4 - 4 \cdot 1 + d = 0$

4 d ausrechnen: $E : -14 \cdot 2 + 6 \cdot 4 - 4 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = 8$
5 $E : -14x + 6y - 4z + 8 = 0$
$\Rightarrow \frac{-14x + 6y - 4z + 8 = 0}{2} \Rightarrow E : -7x + 3y - 2z + 4 = 0$

Koordinatendarstellung zu Parameterdarstellung

Wir bestimmen drei beliebige Punkte auf E, indem wir die x- und y-Koordinaten frei wählen und die zugehörigen z-Koordinaten aus der Koordinatendarstellung von E berechnen. Aus diesen drei Punkten können wir dann eine Parameterdarstellung von E gewinnen.

$E: 2x + 7y - 4z + 1 = 0$

$x = 0, y = 0 \quad -4z + 1 = 0 \Rightarrow z = 1/4 \Rightarrow P = (0; 0; 1/4)$
$x = 1, y = 0 \quad 2 - 4z + 1 = 0 \Rightarrow z = 3/4 \Rightarrow Q = (1; 0; 3/4)$
$x = 0, y = 1 \quad 7 - 4z + 1 = 0 \Rightarrow z = 2 \Rightarrow R = (0; 1; 2)$

Eine mögliche Parameterdarstellung der Ebene E: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix}$

Abstand Punkt zu Ebene

Abstand $l = \frac{|ax_A + bx_A + cz_A + d|}{|\vec{n}|}$

Ebene $E: 3x - 6y - 2z + 67 = 0$
Punkt $A = (3, -4, 1)$

1 $\vec{n}$ bestimmen: $\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\sqrt{3^2 + -6^2 + -2^2} = 7$

2 $l = \frac{(3 \cdot 3) - (6 \cdot (-4)) - (2 \cdot 1)}{7} = 14$

Spezielle Lagen von Ebenen

TBD

normierte Koordinatendarstellung der Ebene

$E: 2x + 7y - 4z + 1 = 0$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad |\vec{n}| = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 3^2} = \sqrt{49} = 7$

normierte Koordinatendarstellung der Ebene

$E: \frac{2}{7} \cdot x - \frac{6}{7} \cdot y + \frac{3}{7} \cdot z + \frac{4}{7} = 0$

Linearen Gleichungssysteme

Rang

Matrix muss in Zeilenstufenform sein.

$rg(A)$ = Gesamtanzahl Zeilen - Anzahl Nullzeilen .

$$\text{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} \text{rang(A) = 2} \\ \text{rang(A|b) = 2} \end{array}$$

A

Lösbarkeit von LGS

n = Anzahl Spalten

Das LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$ ist genau dann lösbar, wenn rg(A) = rg$(A|\ \vec{c})$.
Es hat genau eine Lösung, falls **zusätzlich** gilt: rg$(A) = n$.
Es hat unendlich viele Lösungen, falls **zusätzlich** gilt: rg$(A) < n$.

Matrizen

Begriffe

Quadratische Matrix: gleich viele Zeilen und Spalten

Hauptdiagonale: Die Diagonale von links oben nach rechts unten

Untere- und obere Dreiecksmatrix

Beispiel	(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$	(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
Beschreibung	unter der Hauptdiag. alles Null.	oben der Hauptdiag. alles Null.
Bezeichnung	Obere Dreiecksmatrix U = Upper	Untere Dreiecksmatrix L = Lower

Symmetrische Matrix : symmetrisch bzgl. Hauptdiagonale

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplikation / Rechenregeln

$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{array}{cc|cc} & & 2 & -3 \\ & & 2 & 1 \\ \hline 2 & -3 & -2 & -9 \\ 2 & 1 & 6 & -5 \end{array}$$

$A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n} \wedge \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
$A + (B + C) = (A + B) + C$
$A + B = B + A$
$A + 0 = A$
$A - A = 0$ (Nullmatrix)

Transponieren

$\text{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

Rechenregeln:
$(A^T)^T = A$
$(A + B)^T = A^T + B^T$
$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
Gilt $A = A^T$, so heißt die Matrix A symmetrisch.
Gilt $A = -A^T$, so heißt die Matrix A antisymmetrisch.

Inverse

Matrix muss quadratisch sein: $n \times n \rightarrow 2 \times 2, 3 \times 3$

2x2

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Die 2×2-Matrix hat genau dann ein Invese wenn $ad - bc \neq 0$

3x3 und grösser

$\rightarrow$ Gauss - Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) :2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) |\cdot(-3)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot(-2/3) \ |\cdot(-2)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & -2 & 4/3 & 1 \end{array}\right) \cdot 3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 & 3 \end{array}\right) |\cdot(-\tfrac{1}{3}) \ |\cdot(-\tfrac{1}{2})$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 0 & 7/2 & -2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 & 3 \end{array}\right) |\cdot(-1/2)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 & 3 \end{array}\right) \qquad \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Determinante

2x2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

3x3 Regel von Sarrus

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - g \cdot e \cdot c - h \cdot f \cdot a - i \cdot d \cdot b.$$

Laplacescher Entwicklungssatz (>3x3)

Vorzeichen: $\begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{matrix}$

Entwickeln nach derjenigen Zeile oder Spalte, in der die meisten Nullen stehen (hier gelb)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow 2 \cdot det \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & -2 \\ 6 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Wichtig: häufig sind die entwickelten identisch! $\rightarrow$ Aufwand sparen!

$$A = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$ Entwickeln nach 1er

$$\begin{aligned}\det(A) &= +a_{00}\cdot\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} - a_{01}\cdot\det\begin{bmatrix} a_{10} & a_{12} \\ a_{20} & a_{22}\end{bmatrix} + a_{02}\cdot\det\begin{bmatrix} a_{10} & a_{11} \\ a_{20} & a_{21}\end{bmatrix} \\ &= +a_{00}(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}) - a_{01}(a_{10}a_{22}-a_{12}a_{20}) + a_{02}(a_{10}a_{21}-a_{11}a_{20}) \\ &= +a_{00}a_{11}a_{22} + a_{01}a_{12}a_{20} + a_{02}a_{10}a_{21} - a_{00}a_{12}a_{21} - a_{01}a_{10}a_{22} - a_{02}a_{11}a_{20}\end{aligned}$$

det **Dreiecksmatrix** = Produkt der Hauptdiagonale

Rechenregeln

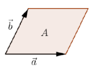
(1) Für die Einheitsmatrix E gilt: $\det(E) = 1$
(2) Für jede $n\times n$ -Dreiecksmatrix U gilt: $\det(U) = u_{11}\cdot u_{22}\cdot\ldots\cdot u_{nn}$
(3) Für jede quadratische Matrix A gilt: $\det(A^T) = \det(A)$
(4) Für alle $n\times n$ -Matrizen A und B gilt: $\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$
(5) Für jede invertierbare Matrix A gilt: $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
(6) Für jede $n\times n$ -Matrix A und jedes $\lambda\in\mathbb{R}$ gilt: $\det(\lambda\cdot A) = \lambda^n\cdot\det(A)$

$2\times 2 \to det(5\cdot A) = 5^2\cdot det(A)$
$3\times 3 \to det(5\cdot A) = 5^3\cdot det(A)$

Geometrische Interpretation der Determinante

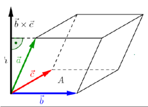
2x2

Fläche von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ = Betrag von $det\begin{vmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2\end{vmatrix}$



3x3

Volumen von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ = Betrag von $det\begin{vmatrix} a1 & b1 & c1 \\ a2 & b2 & c2 \\ a3 & b3 & c3\end{vmatrix}$



Linearen Gleichungssysteme

Rang

Matrix muss in Zeilenstufenform sein.

$rg(A)$ = Gesamtanzahl Zeilen - Anzahl Nullzeilen .

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0\end{array}\right) \Rightarrow$$ rang(A) = 2
rang(A|b) = 2

A

Lösbarkeit von LGS

Das LGS $A\cdot\vec{x} = \vec{c}$ ist genau dann lösbar, wenn $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|\ \vec{c})$.
Es hat genau eine Lösung, falls **zusätzlich** gilt: $\text{rg}(A) = n$.
Es hat unendlich viele Lösungen, falls **zusätzlich** gilt: $\text{rg}(A) < n$.

Freie Variable

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$ freie Variable λ_3

Lösungsmenge: λ_3 = kann beliebig gewählt werden,
∞-viele Lösungen.

Vektorräume

Unterräume

Eine Teilmenge U eines Vektorraums V heisst Unterraum von V wenn U selber auch ein Vektorraum ist.

Unterraumkriterien

(1) Für beliebige Elemente $\vec{a}, \vec{b}\in U$ ist $\vec{a}+\vec{b}\in U$.
(2) Für jeden Skalar $\lambda\in\mathbb{R}$ und jeden Vektor $\vec{a}\in U$ ist $\lambda\cdot\vec{a}\in U$.

Unterraumkriterien überprüfen

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b\end{pmatrix}$ (a) Ja, Vektorraum

1. $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & 0 \\ 0 & b_1+b_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b\end{pmatrix}\in M_1$
2. $\lambda\cdot\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\cdot a & 0 \\ 0 & \lambda\cdot b\end{pmatrix}\in M_1$

$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b\end{pmatrix}$ Nein $\to \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & b_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & b_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & 2 \\ 2 & b_1+b_2\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b\end{pmatrix}$.

Nullvektorraum

Linearkombination

Stellen Sie $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3\end{pmatrix}$ als Linearkombination von

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0\end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1\end{pmatrix}$ dar.

Gesucht sind λ, μ und ν mit $\lambda\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0\end{pmatrix} + \nu\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3\end{pmatrix}$

Lineareabhängigkeit prüfen

Quadratische Matrix:

$det(a) = 0 \Rightarrow$ Lineare Abhängigkeit
$det(a) \neq 0 \Rightarrow$ Lineare Unabhängigkeit

Nicht Quadratische Matrix:

Vektoren nebeneinander in eine Matrix schreiben $\to$ Gauss
Nullzeile oder -Spalte in der Matrix $\Longrightarrow$ Lineare Abhängigkeit der Vektoren
Keine Nullzeile oder-Spalte in der Matrix $\Longrightarrow$ Lineare Unabhängigkeit der Vektoren.

Linearer Spann (Lineare Hülle)

$span(\vec{a}, \vec{b})$ = Ebene
$span(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ = eine Gerade mit Aufpunkt.

Dimension

Wir betrachten einen reellen Vektorraum V. Die Anzahl Vektoren, die eine Basis von V bilden, heisst $Dimension$ von V.

Bezeichnung: $dim(V)$
Beispiele:

Vektorraum $\{\vec{0}\}\to$ dim 0
$dim(span(\vec{a}, \vec{b})) = 2$
$dim(R^{2\times 2}) = 2$
dim $= rg(A)$
$dim(R^{3\times 3}) = 2$

Erzeugendensystem

Eine Menge von Vektoren heißt Erzeugendensystem, wenn man mit ihnen alle Vektoren eines Vektorraumes durch Linearkombination erzeugen kann.

Menge von Vektoren auf Erzeugendeneigenschaft überprüfen

Eine Menge von Vektoren, bspw.

$$A = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0\end{pmatrix}\right\}$$

soll darauf überprüft werden, ob sie den $\mathbb{R}^3$ erzeugen/aufspannen können. Allgemein kann das mithilfe des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1\end{pmatrix}$$

bzw.

$$\begin{aligned} x_1 &= 1a + 4b + 1c \\ x_2 &= \phantom{1a +{}} 2b + 1c \\ x_3 &= 1a \phantom{{}+ 4b} + 1c\end{aligned}$$

überprüft werden. Untersucht wird, ob das Lösungsverhalten des Gleichungssystems eindeutig ist, denn nur dann können die Vektoren einen beliebigen Vektor erzeugen. Falls keine Lösung besteht, können die Vektoren auch kein Erzeugendensystem sein.

Basis eines Vektorraums

Eine Basis eines Vektorraumes ist ein "minimales Erzeugendensystem"des Vektorraumes. Die Vektoren einer Basis nennt man Basisvektoren.

Überprüfung, ob eine Menge von Vektoren eine Basis ist

1 Die Anzahl der Vektoren stimmt überein mit der Dimension des Vektorraumes.
2 Die Vektoren sind linear unabhängig.

Stuff mit Basen B, S