Lineare Algebra S2

Raphael Nambiar

Version: 13. April 2022

Vektorgeometrie

Begriffe

Kollinear: Es existiert eine Gerade g, zu der beide Vektoren parallel sind.
Komplanar: Existiert eine Ebene e, zu der alle drei Vektoren parallel.
Ortsvektor: Beginnt vim Ursprung. Schreibweise: $\vec{r}(P)$

Betrag

$$|\vec{a}| = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$

$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

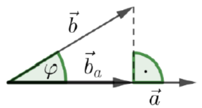
Orthogonal

Wenn zwei Vektoren senkrecht zueinander sind.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Orthogonale Projektion

Projektion des Vektores $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$.



$\vec{b}_a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}$

$|\vec{b}_a| = \frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}{|\vec{a}|}$

$|\vec{b}_a| = |\vec{a}| \cdot \cos(\varphi)$

Zwischenwinkel

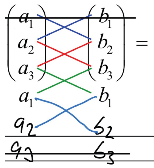
$\varphi = cos^{-1}(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|})$

Einheitsvektor

$\vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$

$|\vec{e}_a| = 1$

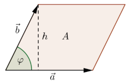
Vektorprodukt



$$= \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$

$\vec{a} \times \vec{b}$ ist orthogonal zu $\vec{a}$ und zu $\vec{b}$



$|\vec{a} \times \vec{b}| =$ A

Dreieck $= \frac{1}{2}$ A

Geraden

Normalenvektor

Parameterdarstellung

Koordinatendarstellung

Koordinatendarstellung zu Parameterdarstellung

Parameterdarstellung zu Koordinatendarstellung

Abstand Punkt zu Geraden

Lage Geraden

Identisch:
Parallel:
Schneidend:
Windschief:

Lage Bestimmen

Ebene

Normalenvektor der Ebene (orthogonal zur Ebene)

Auf der Ebene E senkrecht stehnder Vektor $\vec{n}$.

$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$

Parameterdarstellung

$$E : \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$$

P: Aufpunkt
$\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$; $\vec{b} = \overrightarrow{PR}$ = Richtungsvektoren

Koordinatendarstellung

$E : ax + by + cz + d = 0$

Parameterdarstellung zu Koordinatendarstellung

$$E : \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

1. $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$
2. Koordinatendarstellung $E : -14x + 6y - 4z + d = 0$
3. Aufpunkt einsetzen: $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E : -14 \cdot 2 + 6 \cdot 4 - 4 \cdot 1 + d = 0$
4. d ausrechnen: $E : -14 \cdot 2 + 6 \cdot 4 - 4 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = 8$
5. $E : -14x + 6y - 4z + 8 = 0$

$\Rightarrow \frac{-14x + 6y - 4z + 8 = 0}{2} \Rightarrow E : -7x + 3y - 2z + 4 = 0$

Koordinatendarstellung zu Parameterdarstellung

Abstand Punkt zu Geraden

Lage Geraden

Identisch:
Parallel:
Schneidend:
Windschief:

Lage Bestimmen

Linearen Gleichungssysteme

Rang

Matrix muss in Zeilenstufenform sein.

$rg(A)$ = Gesamtanzahl Zeilen - Anzahl Nullzeilen .

$$\text{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

with the first two columns of the second matrix marked A.

rang(A) = 2
rang(A|b) = 2

Lösbarkeit von LGS

Das LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$ ist genau dann lösbar, wenn $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|\ \vec{c})$.
Es hat genau eine Lösung, falls **zusätzlich** gilt: $\text{rg}(A) = n$.
Es hat unendlich viele Lösungen, falls **zusätzlich** gilt: $\text{rg}(A) < n$.

Matrizen

Begriffe

Quadratische Matrix: gleich viele Zeilen und Spalten
Hauptdiagonale: Die Diagonale von links oben nach rechts unten

Untere- und obere Dreiecksmatrix

Beispiel	(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$	(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
Beschreibung	unter der Hauptdiag. alles Null.	oben der Hauptdiag. alles Null.
Bezeichnung	Obere Dreiecksmatrix U = Upper	Untere Dreiecksmatrix L = Lower

Symmetrische Matrix : symmetrisch bzgl. Hauptdiagonale

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplikation / Rechenregeln

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{array}{cc|cc} & & 2 & -3 \\ & & 2 & 1 \\ \hline 2 & -3 & -2 & -9 \\ 2 & 1 & 6 & -5 \end{array}$$

$A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n} \wedge \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$A + (B + C) = (A + B) + C$

$A + B = B + A$

$A + 0 = A$

$A - A = 0$ (Nullmatrix)

Transponieren

TBD

Inverse

Matrix muss quadratisch sein: $n \times n \rightarrow 2 \times 2, 3 \times 3$

2x2

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Die 2×2-Matrix hat genau dann ein Invese wenn $ad - bc \neq 0$

3x3 und grösser

$\rightarrow$ Gauss - Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) :2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) |\cdot(-3)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot(-2/3) \quad |\cdot(-2)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & -2 & 4/3 & 1 \end{array}\right) \cdot 3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 & 3 \end{array}\right) |\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) \quad |\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 0 & 7/2 & -2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 & 3 \end{array}\right) |\cdot(-1/2)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$