

Analysis 2 S2

Raphael Nambiar

Version: 20. Juni 2022

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$F(x)$
x^α mit $\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	x^a mit $a \neq -1$	$\frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$1 + \tan^2(x)$	$\tan(x) + C$
$\cot(x)$	$-1 - \cot^2(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$	e^x	$e^x + C$
e^x	e^x	a^x	$\frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x + C$
a^x	$\ln(a) \cdot a^x$	$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + C$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{\ln(a)x}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x) + C$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$		

Ableiten

$$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

$$f(x) = c \cdot g(x) \rightarrow f'(x) = c \cdot g'(x)$$

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{h(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

$$f(x) = g(h(x)) \rightarrow f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Logarithmen:

$$f(x) = \ln(x+a) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x+a}$$

$$f(x) = \ln(5x+a) \rightarrow f'(x) = \frac{5}{5x+a}$$

$$f(x) = \ln(-5x+a) \rightarrow f'(x) = \frac{-5}{-5x+a}$$

Integrieren

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$$

$$\frac{1}{x^5} \rightarrow -\frac{1}{4x^4} + C$$

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + C$$

Grenzwerte

Zählergrad > Nennergrad :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{h(n)} = \text{keinen Grenzwert}$$

Zählergrad < Nennergrad :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{h(n)} = 0$$

Zählergrad = Nennergrad :

$$\lim_{n \rightarrow 8} \frac{2n^3 + 7n \dots}{5n^3 - 7n^2 \dots} = \frac{2}{5}$$

$$n \rightarrow \infty :$$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Wahl der Methode

Methode	Muster	Beispiel
Substitution	$\int g(f(x)) \cdot f'(x) dx$	$\int e^{\cos(x)} \cdot \sin(x) dx$
partielle Integration	$\int \overset{u}{\text{nach Ableiten einfacher}} \cdot \overset{v}{\text{nach Integration nicht komplizierter}} dx$	$\int x \cdot e^x dx$
Partialbruchzerlegung	$\frac{\text{Polynom}}{\text{Polynom}}$	$\int \frac{4x^2 + x + 17}{4x^3 + 6x + 3} dx$

Uneigentliche Integrale

Ein *uneigentliches* Integral hat die Eigenschaft, dass der Integrationsbereich unendlich gross ist oder eine Polstelle enthält.

$$(a) \int_1^\infty \frac{1}{x^5} dx \quad (b) \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad (c) \int_3^5 2(x-3)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$(a) \int_1^t \frac{1}{x^5} dx = \left[-\frac{1}{4} x^{-4} \right]_1^t = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{t^4} + \frac{1}{4} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$(b) \int_1^t \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[2x^{\frac{1}{2}} \right]_1^t = 2\sqrt{t} - 2 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty. \text{ Das Integral existiert also nicht.}$$

$$(c) \int_t^5 2(x-3)^{-\frac{1}{2}} dx = 2 \cdot \int_{t-3}^2 u^{-\frac{1}{2}} du = 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \left[u^{\frac{3}{2}} \right]_{t-3}^2 = \frac{8}{3} \cdot \left(2^{\frac{3}{2}} - (t-3)^{\frac{3}{2}} \right) \xrightarrow{t \rightarrow 3} \frac{8}{3} \cdot 2^{\frac{3}{2}}$$

(verwendete Substitution: $u = x - 3$)

Integration durch Substitution

① Substitutionsgleichung für $x : u = g(x)$

② Substitutionsgleichung für $dx :$

$$\frac{du}{dx} = g'(x) \text{ (Ableitung)} \rightarrow dx = \frac{du}{g'(x)}$$

③ Integralsubstitution: Einsetzen von u und dx aus 1. und 2 in Ursprung

④ Integration von 3.

⑤ Rücksubstitution (nur unbestimmte Integrale)

$$\text{Beispiel: } \int e^{2x}$$

$$\textcircled{1} u = 2x$$

$$\textcircled{2} dx = \frac{du}{2}$$

$$\textcircled{3} \int e^u \cdot \frac{du}{2}$$

$$\textcircled{4} \int e^u \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \cdot \int e^u du \rightarrow \frac{1}{2} e^u + C$$

$$\textcircled{5} \frac{1}{2} e^u + C \rightarrow \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

Partielle Integration

$$u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

Beispiel:

$$u(x) = x; v'(x) = e^x$$

$$u'(x) = 1; v(x) = e^x$$

$$\int x \cdot e^x$$

$$\int x \cdot e^x = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C$$

Integration durch Partialbruchzerlegung

- ① Polynomdivision (falls Funktion unecht gebrochen!): Zählergrad > Nennergrad
- ② **Nullstellen** des Nenners bestimmen (raaten, 2Klammeransatz, Horner, lösen)
- ③ Jeder Nullstelle ihren Partialbruch zuordnen:

$$x_1 \text{ ist einfache Nullstelle} \rightarrow \frac{A}{x - x_1}$$

$$x_1 \text{ ist doppelte Nullstelle} \rightarrow \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2}$$

$$x_1 \text{ ist } r\text{-fache Nullstelle} \rightarrow \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x - x_1)^r}$$

- ④ Ansatz zur Partialbruchzerlegung aufstellen $\rightarrow f(x)$ wird mit der Summe aller Partialbrüche gleichgesetzt
- ⑤ Bestimmung der Konstanten A, A_1, A_2, \dots, A_r

1. Brüche gleichnamig machen
2. Einsetzen von x-Werten (Nullstellen) \rightarrow LGS
3. LGS lösen \rightarrow man erhält die Konstanten A, A_1, B, \dots

- ⑥ Integration der Partialbrüche

$$\int \frac{1}{x - x_0} dx = \ln|x - x_0| + C \quad \left| \int \frac{2}{\dots} = 2 \cdot \ln \dots \right.$$

$$\int \frac{1}{(x - x_0)^r} dx = \frac{1}{(1 - r)(x - x_0)^{r-1}} + C$$

Beispiel: $\int \frac{5x+11}{x^2+3x-10} dx$

1. ist echt gebrochen: ok
2. Nullstellen Nenner: $(x - 2)(x + 5) \Rightarrow x_0 = 2; x_1 = -5$
3. $\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5}$
4. $\int \frac{5x+11}{x^2+3x-10} dx = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5}$
5. (a) $\int \frac{5x+11}{x^2+3x-10} dx = \frac{A(x+5)+B(x-2)}{(x-2)(x+5)}$
(b) $5x + 11 = A(x + 5) + B(x - 2)$
(c) einsetzen: $x = 2 \rightarrow A = 3; x = -5 \rightarrow B = 2;$
6. $\int \frac{5x+11}{x^2+3x-10} dx = \int \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+5} dx$
 $= 3 \cdot \ln(|x - 2|) + 2 \cdot \ln(|x + 5|) + C$

Differentialgleichungen (DGL)

Begriffe

Ordnung: Ordnung = höchste Ableitung in der DGL

Linearität: Funktion und Ableitung sind linear $\rightarrow x^1$

Separierbare Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung 1. Ordnung heisst separierbar wenn:

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

How To:

① $y' = \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$

② Trennung der Variablen: $\frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx$

③ Integration auf beiden Seiten der Gleichung (if possible):

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$$

④ Auflösen nach y (falls möglich!)

Beispiel:

③

④

$$y' = y^2 = \sin(x)$$

① $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin(x)}{y^2}$

② $y^2 \cdot dy = \sin(x) \cdot dx$

Autonome Differentialgleichungen

Definition: $y' = f(y)$

\Rightarrow Diese Differentialgleichungen sind separierbar!

Gleichung	autonom?
$y' = y^2 + 6$	Ja
$y' = x + y$	Nein
$y' = \frac{y}{x}$	Nein
$y' = y^2 \cdot \sqrt{1 - \sin(y)} - \ln(y)$	Ja

Lineare Differentialgleichungen

Form: $y' + f(x) \cdot y = g(x)$

$g(x) \rightarrow$ Störglied / Störfunktion

"linear" $\rightarrow y$ und y' in der ersten Potenz

homogen \rightarrow wenn das Störglied $g(x) = 0$

ansonsten \rightarrow *inhomogen*

Variation der Konstanten für lineare Differentialgleichungen

① Bestimmung von $f(x)$ und $g(x)$ basierend auf:

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

② Bestimmung der Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$

③ Einsetzen in die Formel $y_0 = K(x) \cdot e^{-F(x)}$

④ K berechnen: $K(x) = \int g(x) \cdot e^{F(x)} dx$

⑤ K in Ansatz aus ③ einsetzen \rightarrow allgemeine Lösung

Beispiel:

$$y' = \cos(x) \cdot (1 + 2y) \Leftrightarrow y' - 2 \cdot \cos(x) \cdot y = \cos(x)$$

- Variation der Konstanten mit $f(x) = -2 \cdot \cos(x)$, $g(x) = \cos(x)$
- $F(x) = -2 \cdot \sin(x)$
- $y_0 = C \cdot e^{2 \sin(x)}$
- Ansatz: $y = K(x) \cdot e^{2 \sin(x)}$
- $K(x) = \int e^{-2 \sin(x)} \cdot \cos(x) dx = \int e^{-2u} du = -\frac{1}{2} e^{-2u} + C_2 = -\frac{1}{2} e^{-2 \sin(x)} + C_2$ (Substitution $u = \sin(x)$)
- Einsetzen: $y = \left(\frac{1}{2} e^{-2 \sin(x)} + C_2\right) \cdot e^{2 \sin(x)} = -\frac{1}{2} + C_2 \cdot e^{2 \sin(x)}$

Richtungsfelder

① DGL in die Form $y' = f(x, y)$ bringen.

② Bereich wählen, welcher zur veranschaulichung optimal ist. (Bspw: $-2 - 2$)

③ Nun setzt man in diesem Bereich x und y Werte ein und liest die resultierende *Steigung* ab. Diese Steigung wird dann am Punkt eingetragen.

Eulerschritte

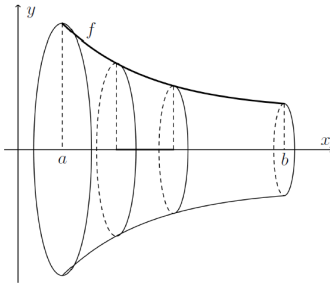
Beispiel: $y' = \underbrace{x + y}_{F(x,y)}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 1 \rightarrow$ Schrittweite.

Steigung Gerade	Berechnung	Beispiel
$g_0: m_0 = F(x_0, y_0) = x_0 + y_0$ Bsp: $0 + 1 = 1$	$x_1 = x_0 + h$ $y_1 = y_0 + h \cdot F(x_0, y_0)$	$= 0 + 1 = 1$ $= 1 + 1 \cdot (0 + 1) = 2$
$g_1: m_1 = F(x_1, y_1) = x_1 + y_1$ $1 + 2 = 3$	$x_2 = x_1 + h$ $y_2 = y_1 + h \cdot F(x_1, y_1)$	$= 2$ $= 2 + 1 \cdot (1 + 2) = 5$
$g_2: m_2 = F(x_2, y_2) = x_2 + y_2$ $2 + 5 = 7$	$x_3 = x_2 + h$ $y_3 = y_2 + h \cdot F(x_2, y_2)$	$= 2 + 1 = 3$ $= 5 + 1 \cdot (2 + 5) = 12$
etc	etc	etc

Anwendungen der Integralrechnung

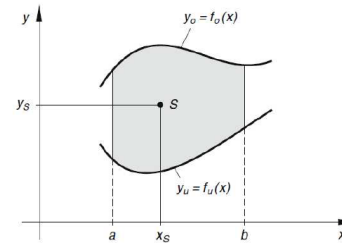
Rotation um die x-Achse

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$$



$$x_s = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b x \cdot (f_o(x) - f_u(x)) dx$$

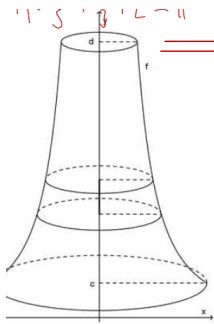
$$y_s = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^b (f_o^2(x) - f_u^2(x)) dx$$



Schwerpunkt eines Rotationskörpers

Rotation um die y-Achse

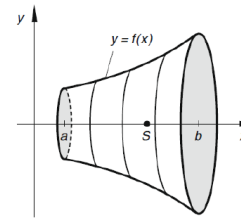
$$V = \pi \cdot \int_c^d (g(y))^2 dy$$



→ $g(y)$ die nach x aufgelöste Funktionsgleichung.

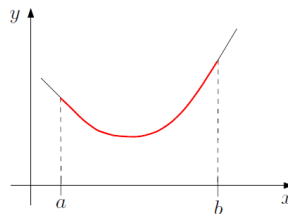
$$x_s = \frac{1}{V} \cdot \int_a^b x \cdot f^2(x) dx$$

$$y_s = 0, z_s = 0$$



Bogenlänge einer ebenen Kurve (Graph)

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$



Mantelfläche eines Rotationskörpers

$$M = 2\pi \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

Taylor-Reihen

Definition

Eine Funktion $f(x)$ entspricht einer Taylorreihe mit unendlich vielen Gliedern. Die Stelle x_0 ist die Entwicklungsstelle. Die Entwicklungsstelle ist die Stelle, in deren Umgebung uns das Verhalten der Funktion interessiert.

Verfahren / Formel

$$t_f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

$0! = 1$	$= 1$
$1! = 1$	$= 1$
$2! = 1 \cdot 2$	$= 2$
$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$	$= 6$
$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$	$= 24$
$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$	$= 120$
\vdots	

Grad: *anzahl* Ableitungen / Schritte

① Ableitungen bilden (Grad)

② x_0 in Ableitungen einsetzen

③ Ableitungen in Formel einsetzen

④ ausrechnen/kürzen/vereinfachen

Beispiel:

die Funktion $f(x) = (1 + e^x)^2$ vom Grad 3 um $x_0 = 0$.

$$f(x) = (1 + e^x)^2 \Rightarrow f(0) = 4$$

$$f'(x) = 2(1 + e^x) \cdot e^x = 2e^x(1 + e^x) \Rightarrow f'(0) = 2 \cdot 2 = 4$$

$$f''(x) = 2(e^x)' \cdot (1 + e^x) + 2e^x \cdot (1 + e^x)' = 2e^x(1 + e^x) + 2e^x \cdot e^x = 2e^x + 4e^{2x} \Rightarrow f''(0) = 6$$

$$f'''(x) = 2e^x + 8e^{2x} \Rightarrow f'''(0) = 10$$

gesuchtes Taylor-Polynom:

$$p_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 = 4 + 4x + 3x^2 + \frac{5}{3}x^3$$

Bekannte Taylorreihen

Funktion	Taylorreihe	Def.-bereich
$\sin(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	\mathbb{R}
$\cos(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	\mathbb{R}
e^x	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	\mathbb{R}
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$(-1, 1)$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^j \frac{x^{(2j+1)}}{(2j+1)!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{(2i+1)}}{(2i+1)!}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^j \frac{x^{2i}}{(2i)!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2i}}{(2i)!}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^i}{i!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

Mitternacht

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Konvergenzen

Konvergenzradius bei Taylor

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$$

$$r := \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

r : Konvergenzradius

Berechnung:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot x^k$$

In r Formel einsetzen \rightarrow (ohne den x Teil)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{(k+1)^2}} = \frac{(k+1)^2}{k^2} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 = \left(\frac{k+1}{k}\right) \cdot \left(\frac{k+1}{k}\right)$$

$$\Rightarrow k \rightarrow \infty \Rightarrow \left(\frac{\infty+1}{\infty}\right) \cdot \left(\frac{\infty+1}{\infty}\right) = 1 \cdot 1 = 1 = r$$

Bestimmung Intervall konvergiert:

\rightarrow Einsetzen von x_0 und r in folgende Definition:

(x_0) aus $P(x)$ ablesen. Wenn nicht vorhanden: unendlichen Konvergenzradius und konvergiert für ganz \mathbb{R}

alle $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ zum Konvergenzbereich gehören

alle $x \in (-\infty, x_0 - r)$ NICHT zum Konvergenzbereich gehören

Regel von Bernoulli-Hopital

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g'(x)}{h'(x)}$$

① Zählerfunktion $g(x)$ und Nennerfunktion $f(x)$ getrennt voneinander ableiten

② Grenzwert von $\frac{g'(x)}{h'(x)}$ brechnen

BEM: Die Regel von L'HOSPITAL kann auch mehrfach hintereinander angewendet werden. (Wenn Lösung nach 1x ableiten nicht ersichtlich)