

Lineare Algebra S2

Raphael Nambiar

Version: 12. Juni 2022

Vektorgeometrie

Begriffe

Kollinear: Es existiert eine Gerade g , zu der beide Vektoren parallel sind.

Komplanar: Existiert eine Ebene e , zu der alle drei Vektoren parallel.

Ortsvektor: Beginnt im Ursprung. Schreibweise: $\vec{r}(P)$

Nullvektor: Vektor mit Betrag 0, keine Richtung.: $\vec{0}$

Betrag

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$
$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \rightarrow \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

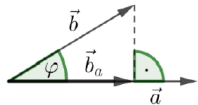
Orthogonal

Wenn zwei Vektoren senkrecht zueinander sind.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Orthogonale Projektion

Projektion des Vektors \vec{b} auf den Vektor \vec{a} .



$$\vec{b}_a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}$$

$$|\vec{b}_a| = \frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}{|\vec{a}|}$$

$$|\vec{b}_a| = |\vec{a}| \cdot \cos(\varphi)$$

Zwischenwinkel

$$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

Einheitsvektor

$$\vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}; |\vec{e}_a| = 1$$

Vektorprodukt / Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$$

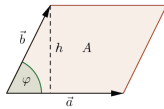
$\vec{a} \times \vec{b}$ ist orthogonal zu \vec{a} und zu \vec{b}

Kreuzprodukt in R²

Seien a und b zwei Vektoren, dann gilt für das Kreuzprodukt in R^2 :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}$$
$$\vec{a} \times \vec{b} = \det(\vec{a} \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} = a_x \cdot b_y - b_x \cdot a_y$$

Fläche / Parallelogramm



$$|\vec{a} \times \vec{b}| = A$$

Dreieck = $\frac{1}{2} A$

Volumen / Spatprodukt

Das Spatprodukt der drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

berechnest du mit

- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ oder mit
- der Determinante $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ Volumen: \rightarrow | Betrag nehmen |

Geraden

Parameterdarstellung

$$g: \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a}$$

P: Aufpunkt

$\vec{a} = \vec{PQ}$; = Richtungsvektor

Koordinatendarstellung

$$g: ax + by + c = 0$$

Koordinatendarstellung zu Parameterdarstellung

Zwei Punkte auf g bestimmen: 2 beliebige x Koordinaten wählen und in g einsetzen. Danach jeweils y auslesen. Dies ergibt zwei Punkte P, Q . In Parameterdarstellung bringen.

Parameterdarstellung zu Koordinatendarstellung

$$\text{Gerade } g: \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem aufstellen und Lösen:

$$x = 7 - 2\lambda$$

$$y = 1 - 4\lambda$$

In Koordinatendarstellung bringen: $-2x + y + 13 = 0$

Abstand Punkt zu Geraden

$$\text{Gerade } g: \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Punkt A: $(3, -1, 4)$

$$\vec{PA} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -14 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$l = \frac{|\vec{PA} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}$$

$\vec{a} \Rightarrow$ aus der Parameterdarstellung

Ebene

Normalenvektor der Ebene (orthogonal zur Ebene)

Auf der Ebene E senkrecht stehender Vektor \vec{n} .

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$$

Parameterdarstellung

$$E: \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$$

P: Aufpunkt

$\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$; $\vec{b} = \overrightarrow{PR}$ = Richtungsvektoren

Koordinatendarstellung

$$E: ax + by + cz + d = 0$$

Parameterdarstellung zu Koordinatendarstellung

$$E: \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

② Koordinatendarstellung $E: -14x + 6y - 4z + d = 0$

③ Aufpunkt einsetzen: $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E: -14 \cdot 2 + 6 \cdot 4 - 4 \cdot 1 + d = 0$

④ d ausrechnen: $E: -14 \cdot 2 + 6 \cdot 4 - 4 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = 8$

⑤ $E: -14x + 6y - 4z + 8 = 0$

$$\Rightarrow \frac{-14x + 6y - 4z + 8 = 0}{2} \Rightarrow E: -7x + 3y - 2z + 4 = 0$$

Koordinatendarstellung zu Parameterdarstellung

Wir bestimmen drei beliebige Punkte auf E , indem wir die x - und y -Koordinaten frei wählen und die zugehörigen z -Koordinaten aus der Koordinatendarstellung von E berechnen. Aus diesen drei Punkten können wir dann eine Parameterdarstellung von E gewinnen.

$$E: 2x + 7y - 4z + 1 = 0$$

$$x = 0, y = 0 \quad -4z + 1 = 0 \Rightarrow z = 1/4 \Rightarrow P = (0; 0; 1/4)$$

$$x = 1, y = 0 \quad 2 - 4z + 1 = 0 \Rightarrow z = 3/4 \Rightarrow Q = (1; 0; 3/4)$$

$$x = 0, y = 1 \quad 7 - 4z + 1 = 0 \Rightarrow z = 2 \Rightarrow R = (0; 1; 2)$$

$$\text{Eine mögliche Parameterdarstellung der Ebene } E: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7/4 \end{pmatrix}$$

Abstand Punkt zu Ebene

$$\text{Abstand } l = \frac{|ax_A + bx_A + cz_A + d|}{|\vec{n}|}$$

$$\text{Ebene } E: 3x - 6y - 2z + 67 = 0$$

$$\text{Punkt } A = (3, -4, 1)$$

① \vec{n} bestimmen: $\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \sqrt{3^2 + (-6)^2 + (-2)^2} = 7$

② $l = \frac{(3 \cdot 3) - (6 \cdot (-4)) - (2 \cdot 1) - 67}{7} = 14$

normierte Koordinatendarstellung der Ebene

$$E: 2x - 6y + 3z + 4 = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad |\vec{n}| = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 3^2} = \sqrt{49} = 7$$

normierte Koordinatendarstellung der Ebene

$$E: \frac{2}{7} \cdot x - \frac{6}{7} \cdot y + \frac{3}{7} \cdot z + \frac{4}{7} = 0$$

Lineare Gleichungssysteme

Rang

Matrix muss in Zeilenstufenform sein.

$$\text{rg}(A) = \text{Gesamtanzahl Zeilen} - \text{Anzahl Nullzeilen}$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{matrix} \text{rang}(A) = 2 \\ \text{rang}(A|b) = 2 \end{matrix}$$

Lösbarkeit von LGS

n = Anzahl Spalten (Variablen)

Das LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$ ist genau dann lösbar, wenn $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|\vec{c})$.

Es hat genau eine Lösung, falls zusätzlich gilt: $\text{rg}(A) = n$.

Es hat unendlich viele Lösungen, falls zusätzlich gilt: $\text{rg}(A) < n$.

Freie Variable

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & -2 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array} \quad \text{freie Variable } \lambda_3$$

Lösungsmenge: λ_3 kann beliebig gewählt werden, ∞ -viele Lösungen.

Matrizen

Begriffe

Quadratische Matrix: gleich viele Zeilen und Spalten

Hauptdiagonale: Die Diagonale von links oben nach rechts unten

Untere- und obere Dreiecksmatrix

Beispiel	(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$	(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
Beschreibung	unter der Hauptdiag. alles Null.	oben der Hauptdiag. alles Null.
Bezeichnung	Ober Dreiecksmatrix U = Upper	Untere Dreiecksmatrix L = Lower

Symmetrische Matrix: symmetrisch bzgl. Hauptdiagonale

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplikation / Rechenregeln

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ \hline 2 & -3 & -2 & -9 \\ 2 & 1 & 6 & -5 \end{array}$$

$A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n} \wedge \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
 $A + (B + C) = (A + B) + C$
 $A + B = B + A$
 $A + 0 = A$
 $A - A = 0$ (Nullmatrix)

Transponieren

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln:

$$(A^T)^T = A$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Gilt $A = A^T$, so heißt die Matrix A symmetrisch.

Gilt $A = -A^T$, so heißt die Matrix A antisymmetrisch.

Inverse

Matrix muss quadratisch sein: $n \times n \rightarrow 2 \times 2, 3 \times 3$

2x2

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Die 2×2 -Matrix hat genau dann ein Inverse wenn $ad - bc \neq 0$

3x3 und grösser

→ Gauss - Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) :2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \leftarrow \cdot (-3)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \leftarrow \cdot (-2/3) \quad \leftarrow \cdot (-2)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & -2 & 4/3 & 1 \end{array} \right) \cdot 3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 & 3 \end{array} \right) \leftarrow \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \quad \leftarrow \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 0 & 7/2 & -2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 & 3 \end{array} \right) \leftarrow \cdot (-1/2)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Determinante

2x2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

3x3 Regel von Sarrus

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - g \cdot e \cdot c - h \cdot f \cdot a - i \cdot d \cdot b.$$

Laplacescher Entwicklungssatz (>3x3)

Vorzeichen:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \\ - & + & - \end{vmatrix}$$

Entwickeln nach derjenigen Zeile oder Spalte, in der die meisten Nullen stehen (hier gelb)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow 2 \cdot \det \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & -2 \\ 6 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Wichtig: häufig sind die entwickelten identisch! → Aufwand sparen!

matrix multipliziert:

$$A = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Entwickeln nach 1er

$$\begin{aligned} \det(A) &= +a_{00} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - a_{01} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{10} & a_{12} \\ a_{20} & a_{22} \end{bmatrix} + a_{02} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{10} & a_{11} \\ a_{20} & a_{21} \end{bmatrix} \\ &= +a_{00}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) - a_{01}(a_{10}a_{22} - a_{12}a_{20}) + a_{02}(a_{10}a_{21} - a_{11}a_{20}) \\ &= +a_{00}a_{11}a_{22} + a_{01}a_{12}a_{20} + a_{02}a_{10}a_{21} - a_{00}a_{12}a_{21} - a_{01}a_{10}a_{22} - a_{02}a_{11}a_{20} \end{aligned}$$

det Dreiecksmatrix = Produkt der Hauptdiagonale

Rechenregeln

- (1) Für die Einheitsmatrix E gilt: $\det(E) = 1$
- (2) Für jede $n \times n$ -Dreiecksmatrix U gilt: $\det(U) = u_{11} \cdot u_{22} \cdot \dots \cdot u_{nn}$
- (3) Für jede quadratische Matrix A gilt: $\det(A^T) = \det(A)$
- (4) Für alle $n \times n$ -Matrizen A und B gilt: $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- (5) Für jede invertierbare Matrix A gilt: $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- (6) Für jede $n \times n$ -Matrix A und jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt: $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$

$$2 \times 2 \rightarrow \det(5 \cdot A) = 5^2 \cdot \det(A)$$

$$3 \times 3 \rightarrow \det(5 \cdot A) = 5^3 \cdot \det(A)$$

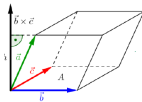
Geometrische Interpretation der Determinante

2x2

Fläche von \vec{a} und \vec{b} = Betrag von $\det \begin{vmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{vmatrix}$

3x3

Volumen von \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} = Betrag von $\det \begin{vmatrix} a1 & b1 & c1 \\ a2 & b2 & c2 \\ a3 & b3 & c3 \end{vmatrix}$



Matrizengleichungen

Grundgleichung	Lösung
$A \cdot X = B$	$X = A^{-1} \cdot B$
$X \cdot A = B$	$X = B \cdot A^{-1}$
$A \cdot X \cdot B = C$	$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$

Lösung einer Matrizengleichung:

① Wenn man eine unbekannte Matrix X ausklammert, muss X nach dem Ausklammern auf der Seite stehen, wo sie vorher stand:

$$A \cdot X + B \cdot X = (A + B) \cdot X$$

② Die Zahlen beim Ausklammern werden mit einer Einheits-

$$A \cdot X + 4X = (A + 4E) \cdot X$$

③ Man kann nicht durch eine Matrix dividieren, man kann aber mit einer inversen Matrix multiplizieren:

$$A \cdot X = B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

$$X \cdot A = B \rightarrow X = B \cdot A^{-1}$$

$$A \cdot X + 4 \cdot X = C \rightarrow (A + 4E) \cdot X = C \rightarrow X = (A + 4E)^{-1} \cdot C$$

Vektorräume

Unterräume

Eine Teilmenge U eines Vektorraums V heisst Unterraum von V wenn U selber auch ein Vektorraum ist.

Unterraumkriterien

- (1) Für beliebige Elemente $\vec{a}, \vec{b} \in U$ ist $\vec{a} + \vec{b} \in U$.
- (2) Für jeden Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ und jeden Vektor $\vec{a} \in U$ ist $\lambda \cdot \vec{a} \in U$.

Unterraumkriterien überprüfen

(a) Ja, Vektorraum

$$1. \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & b_1 + b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in M_1$$

$$2. \lambda \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a & 0 \\ 0 & \lambda \cdot b \end{pmatrix} \in M_1$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \text{ Nein} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 2 \\ 2 & b_1 + b_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}.$$

Linearkombination

Stellen Sie $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ dar.}$$

$$\text{Gesucht sind } \lambda, \mu \text{ und } \nu \text{ mit } \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lineareabhängigkeit prüfen

Quadratische Matrix:

$\det(a) = 0 \Rightarrow$ Lineare Abhängigkeit

$\det(a) \neq 0 \Rightarrow$ Lineare Unabhängigkeit

Nicht Quadratische Matrix:

Vektoren nebeneinander in eine Matrix schreiben \rightarrow Gauss

Nullzeile oder -Spalte in der Matrix \Rightarrow Lineare Abhängigkeit der Vektoren

Keine Nullzeile oder -Spalte in der Matrix \Rightarrow Lineare Unabhängigkeit der Vektoren.

Linearer Spann (Lineare Hülle)

Diese Menge besteht aus allen Vielfachen der Vektoren und deren Summen, ist also die Menge aller möglichen Linearkombinationen, die mit den gegebenen Vektoren gebildet werden können.

$$\text{span}(\vec{a}, \vec{b}) = \text{Ebene}$$

$$\text{span}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \text{eine Gerade mit Aufpunkt.}$$

Dimension

Wir betrachten einen reellen Vektorraum V . Die Anzahl Vektoren, die eine Basis von V bilden, heisst *Dimension* von V .

Bezeichnung: $\dim(V)$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{Vektorraum } \{\vec{0}\} &\rightarrow \dim 0 & \dim &= \text{rg}(A) \\ \dim(\text{span}(\vec{a}, \vec{b})) &= 2 & \dim(R^{3 \times 3}) &= 2 \\ \dim(R^{2 \times 2}) &= 2 \end{aligned}$$

Beispiel:

$$A : A^T = -A$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \\ \Rightarrow a = -a; d = -d; c = -b; b = -c \\ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \dim() = 1$$

Erzeugendensystem

Eine Menge von Vektoren heisst Erzeugendensystem, wenn man mit ihnen alle Vektoren eines Vektorraumes durch Linearkombination erzeugen kann.

Menge von Vektoren auf Erzeugendeneigenschaft überprüfen

\rightarrow Bestimmung des Rangs $\text{rg}(A)$

Wenn $\text{rg}(A) < \text{Anzahl Zeilen}(m) \rightarrow$ kein Erzeugendensystem

Basis eines Vektorraums

Eine Basis eines Vektorraumes ist ein "minimales Erzeugendensystem" des Vektorraumes. Die Vektoren einer Basis nennt man Basisvektoren.

Überprüfung, ob eine Menge von Vektoren eine Basis ist

Quadratische Matrix $\rightarrow \det(A) \neq 0$

Generell:

① Die Anzahl der Vektoren stimmt überein mit der Dimension des Vektorraumes.

② Die Vektoren sind linear unabhängig.

Wichtige Basen

Für R^n : Basis S heisst *Standardbasis*

Für $P_n[x]$: Basis M heisst *Monombasis*

Umrechnung von Basis B zur Standardbasis S

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{b}_1 + a_2 \cdot \vec{b}_2 + a_3 \cdot \vec{b}_3 \dots + a_n \cdot \vec{b}_n$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Beispiel:

$(7, -3, -1)$ von B nach S

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}_B = 7 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_S - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}_S + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}_S$$

Umrechnung von Standardbasis S zur Basis B

LGS bilden:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Beispiel:

$(2, -1, 3)$ von S nach B

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right)$$



$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}_B$$

Lineare Abbildungen

Definition: Lineare Abbildung

Gegeben sind zwei reelle Vektorräume V und W (können auch identisch sein).

Eine Abbildung $f: V \rightarrow W$ heisst *lineare Abbildung*, wenn für alle Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in V$ und jeden Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

- (1) $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$
- (2) $f(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot f(\vec{y})$

Der Vektor $\vec{x} \in W$, der herauskommt, wenn f auf einen Vektor \vec{x} angewendet, heisst **Bild** von \vec{x} .

Beispiele:

(a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ✓ ↗

(c) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$

(e) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -3x_1 + 5x_3 \end{pmatrix}$

(a) Bed 1: $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ o.k.

Bed 2: $f\left(\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $\lambda \cdot f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ o.k. $\Rightarrow f$ ist linear.

(b) Bed 1: $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + 2 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$
 $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + 2 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 + 2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + 4 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$
 nicht gleich $\Rightarrow f$ ist nicht linear

(c) Bed 1: $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + 2(x_2 + y_2) \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$
 $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 + 2y_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + y_1 + 2y_2 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$
 o.k.

Bed 2: $f\left(\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 + 2\lambda \cdot x_2 \\ \lambda \cdot x_2 \end{pmatrix}$
 $\lambda \cdot f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot (x_1 + 2x_2) \\ \lambda \cdot x_2 \end{pmatrix}$ o.k. $\Rightarrow f$ ist linear.

Abbildungsmatrix

Bzgl. *Standardbasis*: Ablesen \rightarrow

1. -

Gegeben ist die lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_1 - x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A von f .

2.

Wir betrachten die lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_S \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}_S$. Dabei ist S die Standardbasis von \mathbb{R}^2 . Bestimmen Sie

(a) die Abbildungsmatrix ${}_S A_S$ von f bezüglich S .

(b) die Abbildungsmatrix ${}_B A_B$ von f bezüglich der Basis $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_S, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}_S \right\}$ von \mathbb{R}^2 .

(a) $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_S\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_S, f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_S\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_S, {}_S A_S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_S$

(b) $f(\vec{b}_1) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_S\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_S = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_S + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}_S = 2\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}_B$
 $f(\vec{b}_2) = f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}_S\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_S = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_S = -\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}_B$
 ${}_B A_B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}_B$

cA_B Beispiel 5

Gegeben ist die lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{S_2} \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 \\ 2x_1 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}_{S_3}$ sowie

die Basen $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}_{S_2}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}_{S_2} \right\}$ von \mathbb{R}^2 und $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{S_3}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{S_3}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}_{S_3} \right\}$ von \mathbb{R}^3 .

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix ${}_C A_B$ von f sowie das Bild $f(\vec{x})$ von $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}_B$.

① Vektoren aus B in f einsetzen

1. $f(b_1) = f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}_S$; 2. $f(b_2) = f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}_S$

② dargestellt über C (LGS mit C und ①)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11 & -11 \\ 14 & 15 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$${}_C A_B = \begin{pmatrix} -11 & -11 \\ 14 & 15 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

③ Bild von $f(\vec{x})$ von $\vec{x} \dots$

$$f(b_1) = f\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}_B\right) = {}_C A_B \cdot f(b_1) = f\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}_B\right)$$

$$\begin{pmatrix} -11 & -11 \\ 14 & 15 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -13 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Verknüpfung von linearen Abbildungen (Komposition)






$f \rightarrow$ Abbildungsmatrix A ; $g \rightarrow$ Abbildungsmatrix B

Die Matrix der Abbildung, die zuerst ausgeführt wird, steht *rechts*

$f \circ g$: müssen wir zunächst g dann f ausführen, daher steht die Matrix B rechts im Matrizenprodukt: $\rightarrow A \cdot B$ $g \circ f \rightarrow B \cdot A$; $f \circ g \rightarrow A \cdot B$

lineare Abbildungen in der Ebene

\rightarrow ! normieren nicht vergessen ! \leftarrow

Streckung um λ_1 in x und λ_2 in y	orthogonale Projektion auf die Gerade $g: ax + by = 0$ mit $a^2 + b^2 = 1$	Spiegelung an der Geraden $g: ax + by = 0$ mit $a^2 + b^2 = 1$	Rotation um den Ursprung um Winkel φ	Scherung in x -Richtung mit Faktor m
				
$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1-a^2 & -ab \\ -ab & 1-b^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1-2a^2 & -2ab \\ -2ab & 1-2b^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

linearen Abbildungen im Raum

\rightarrow ! normieren nicht vergessen ! \leftarrow

Bei einer zentrischen Streckung mit dem Faktor λ wird jeder Basisvektor mit diesem Faktor multipliziert. Somit ist die entsprechende Abbildungsmatrix gegeben durch:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

5.4.2 Orthogonale Projektionen und Spiegelungen

Orthogonale Projektion auf die x/y -Ebene	Spiegelung an der x/y -Ebene	Orthogonale Projektion auf die x -Achse	Spiegelung an der x -Achse
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
Orthogonale Projektion auf die x/z -Ebene	Spiegelung an der x/z -Ebene	Orthogonale Projektion auf die y -Achse	Spiegelung an der y -Achse
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
Orthogonale Projektion auf die y/z -Ebene	Spiegelung an der y/z -Ebene	Orthogonale Projektion auf die z -Achse	Spiegelung an der z -Achse
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Übersicht

Streckung <ul style="list-style-type: none">x-Richtung λ_1y-Richtung λ_2 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$	Orthogonale Projektion <ul style="list-style-type: none">Gerade $g: ax + by = 0$Mit $a^2 + b^2 = 1$ $\begin{pmatrix} 1-a^2 & -ab \\ -ab & 1-b^2 \end{pmatrix}$	Spiegelung <ul style="list-style-type: none">Geraden $g: ax + by = 0$Mit $a^2 + b^2 = 1$ $\begin{pmatrix} 1-2a^2 & -2ab \\ -2ab & 1-2b^2 \end{pmatrix}$	Rotation <ul style="list-style-type: none">Um den UrsprungUm den Winkel φ $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$	Scherung <ul style="list-style-type: none">In x-RichtungMit Faktor m $\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
<ul style="list-style-type: none">x-Richtung 3y-Richtung -1 $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	<ul style="list-style-type: none">Gerade $g: 2x - y = 0$Normiert $g: \frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y = 0$ $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	<ul style="list-style-type: none">Geraden $g: x + 7y = 0$Normiert $g: \frac{1}{\sqrt{50}}x + \frac{7}{\sqrt{50}}y = 0$ $\frac{1}{50} \begin{pmatrix} 48 & -14 \\ -14 & -48 \end{pmatrix}$	<ul style="list-style-type: none">Um den UrsprungWinkel $\varphi = 90^\circ$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	<ul style="list-style-type: none">In x-RichtungMit Faktor 3 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Zentrische Streckung <ul style="list-style-type: none">Faktor λ $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$	Orthogonale Projektion auf die Ebene <ul style="list-style-type: none">$E: ax + by + cz = 0$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$ $P = \begin{pmatrix} 1-a^2 & -ab & -ac \\ -ab & 1-b^2 & -bc \\ -ac & -bc & 1-c^2 \end{pmatrix}$ $P = E - \vec{n} \cdot \vec{n}^T$	Spiegelung an der Ebene <ul style="list-style-type: none">$E: ax + by + cz = 0$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$ $S = \begin{pmatrix} 1-2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1-2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1-2c^2 \end{pmatrix}$ $S = E - 2\vec{n} \cdot \vec{n}^T$	Rotation um den Winkel φ <ul style="list-style-type: none">x-Achse: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$y-Achse: $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$z-Achse: $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	
Rotation um den Winkel φ um die Achse durch den Ursprung, deren Richtung durch den normierten Vektor \vec{a} festgelegt ist. $x\text{-Achse: } \begin{pmatrix} \cos(\varphi) + a_1^2(1-\cos(\varphi)) & a_1a_2(1-\cos(\varphi)) - a_3\sin(\varphi) & a_1a_3(1-\cos(\varphi)) + a_2\sin(\varphi) \\ a_1a_2(1-\cos(\varphi)) + a_3\sin(\varphi) & \cos(\varphi) + a_2^2(1-\cos(\varphi)) & a_2a_3(1-\cos(\varphi)) - a_1\sin(\varphi) \\ a_1a_3(1-\cos(\varphi)) - a_2\sin(\varphi) & a_2a_3(1-\cos(\varphi)) + a_1\sin(\varphi) & \cos(\varphi) + a_3^2(1-\cos(\varphi)) \end{pmatrix}$				
Rotation $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um φ um den Ursprung $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	Translation $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$		Rotation und Translation in einem $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & a_1 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	

Rotationen

Aufgabe: Rotationen um die Koordinatenachsen

(1) Rotation um den Winkel φ um die z-Achse:

Blick von oben	$r_x(\vec{e}_1)$	$r_x(\vec{e}_2)$	$r_x(\vec{e}_3)$	Abbildungsmatrix
	$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) Rotation um den Winkel φ um die x-Achse:

Blick von vorne	$r_x(\vec{e}_1)$	$r_x(\vec{e}_2)$	$r_x(\vec{e}_3)$	Abbildungsmatrix
	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$

(3) Rotation um den Winkel φ um die y-Achse:

Blick von rechts	$r_y(\vec{e}_1)$	$r_y(\vec{e}_2)$	$r_y(\vec{e}_3)$	Abbildungsmatrix
	$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ 0 \\ -\sin(\varphi) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \sin(\varphi) \\ 0 \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$

Rotation um eine allgemeine Achse durch den Ursprung

$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) + a_1^2(1-\cos(\varphi)) & a_1a_2(1-\cos(\varphi)) - a_3\sin(\varphi) & a_1a_3(1-\cos(\varphi)) + a_2\sin(\varphi) \\ a_1a_2(1-\cos(\varphi)) + a_3\sin(\varphi) & \cos(\varphi) + a_2^2(1-\cos(\varphi)) & a_2a_3(1-\cos(\varphi)) - a_1\sin(\varphi) \\ a_1a_3(1-\cos(\varphi)) - a_2\sin(\varphi) & a_2a_3(1-\cos(\varphi)) + a_1\sin(\varphi) & \cos(\varphi) + a_3^2(1-\cos(\varphi)) \end{pmatrix}$
--

Kern einer Matrix

Definition: Der Kern $\ker(A)$ einer $m \times n$ -Matrix A ist die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

$$\det(A) \neq 0 \rightarrow \text{Kern}(A) = \{0\} \text{ trivial}$$

$$\det(A) = 0 \rightarrow \text{Kern}(A) \text{ ist nicht trivial.}$$

→ Abbildungsmatrix → Lösen durch LGS

Beispiel 1:

Bestimmen Sie Kern und Bild der linearen Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, die durch die folgendermassen definiert ist:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} & f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} & f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \\ \text{(b)} \quad f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x - y + z \\ -6y + 12z \\ -2x + 2y - 2z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Abbildungsmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 12 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Kern der Matrix (Lösung des LGS $A\vec{x} = \vec{0}$)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 12 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(-6) \cdot 2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(-6) \cdot 2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\ker(A) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Beispiel 2:

Es ist $g(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Gauss-Elimination ergibt

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

(Jeder Schritt 0.5P; insg)

Also ist

$$\ker(g) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \lambda - \mu \\ \lambda \\ 2\mu \\ \mu \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R} \right\} \quad (1P)$$

Das Bild ist die lineare Hülle der Spalten von A . Es ist

$$\dim(\text{im}(g)) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\ker(g)) = 4 - 2 = 2 \quad (0.5P)$$

Die 1. und 3. Spalte von A sind linear unabhängig und bilden somit eine Basis des Bilds.

Bild einer Matrix

Wir multiplizieren eine Matrix A mit einem Vektor \vec{x} und erhalten den Lösungsvektor \vec{b} .

Das Bild einer Matrix gibt an, welche Menge an Vektoren als Lösungen auftreten können.

→ Die linear unabhängigen Spalten einer Matrix heißen Bild der Matrix.

- Matrix in obere Dreiecksmatrix umwandeln
- Linear unabhängige Spalten mithilfe der Köpfe bestimmen
- Lösung aufschreiben

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{①}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{②}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da sich die Köpfe in der 1. und 2. Spalte befinden, sind diese beiden Spalten der ursprünglichen (!) Matrix die linear unabhängigen Spalten.

$$\text{③ } \text{im}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Beispiel aus der Aufgabe von "Kern der Matrix"

Bild der Matrix (Linearkombination zweier linear unabhängige Spaltenvektoren von A):

$$\text{im}(A) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \mu, \nu \in \mathbb{R} \right\}$$

Basiswechsel von S nach B

$${}_B T_S = ({}_S T_B)^{-1}$$

$${}_S A_S = {}_S T_B \cdot {}_B A_B \cdot {}_B T_S$$

$${}_B A_B = {}_B T_S \cdot {}_S A_S \cdot {}_S T_B$$