

# Lineare Algebra S2

Raphael Nambiar

Version: 27. Mai 2022

## Vektorgeometrie

### Begriffe

**Kollinear:** Es existiert eine Gerade  $g$ , zu der beide Vektoren parallel sind.

**Komplanar:** Existiert eine Ebene  $e$ , zu der alle drei Vektoren parallel.

**Ortsvektor:** Beginnt im Ursprung. Schreibweise:  $\vec{r}(P)$

**Nullvektor:** Vektor mit Betrag 0, keine Richtung.:  $\vec{0}$

### Betrag

$$|\vec{a}| = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

### Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

### Orthogonal

Wenn zwei Vektoren senkrecht zueinander sind.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

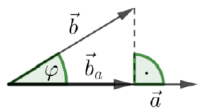
### Orthogonale Projektion

Projektion des Vektors  $\vec{b}$  auf den Vektor  $\vec{a}$ .

$$\vec{b}_a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}$$

$$|\vec{b}_a| = \frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}{|\vec{a}|}$$

$$|\vec{b}_a| = |\vec{a}| \cdot \cos(\varphi)$$



### Zwischenwinkel

$$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

### Einheitsvektor

$$\vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}; |\vec{e}_a| = 1$$

## Vektorprodukt

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$$

$\vec{a} \times \vec{b}$  ist orthogonal zu  $\vec{a}$  und zu  $\vec{b}$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = A$$

Dreieck =  $\frac{1}{2} A$

## Geraden

### Parameterdarstellung

$$g: \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a}$$

P: Aufpunkt

$\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ ; = Richtungsvektor

### Koordinatendarstellung

$$g: ax + by + c = 0$$

### Koordinatendarstellung zu Parameterdarstellung

Zwei Punkte auf  $g$  bestimmen: 2 beliebige  $x$  Koordinaten wählen und in  $g$  einsetzen. Danach jeweils  $y$  auslesen. Dies ergibt zwei Punkte  $P, Q$ . In Parameterdarstellung bringen.

### Parameterdarstellung zu Koordinatendarstellung

$$\text{Gerade } g: \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem aufstellen und Lösen:

$$x = 7 - 2\lambda$$

$$y = 1 - 4\lambda$$

In Koordinatendarstellung bringen:  $-2x + y + 13 = 0$

### Abstand Punkt zu Geraden

$$\text{Gerade } g: \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Punkt A:  $(3, -1, 4)$

$$\overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -14 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$l = \frac{|\overrightarrow{PA} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}$$

## Ebene

### Normalenvektor der Ebene (orthogonal zur Ebene)

Auf der Ebene  $E$  senkrecht stehender Vektor  $\vec{n}$ .

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$$

### Parameterdarstellung

$$E: \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$$

P: Aufpunkt

$\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ ;  $\vec{b} = \overrightarrow{PR}$  = Richtungsvektoren

### Koordinatendarstellung

$$E: ax + by + cz + d = 0$$

### Parameterdarstellung zu Koordinatendarstellung

$$E: \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{2} \text{ Koordinatendarstellung } E: -14x + 6y - 4z + d = 0$$

$$\textcircled{3} \text{ Aufpunkt einsetzen: } \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E: -14 \cdot 2 + 6 \cdot 4 - 4 \cdot 1 + d = 0$$

$$\textcircled{4} d \text{ ausrechnen: } E: -14 \cdot 2 + 6 \cdot 4 - 4 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = 8$$

$$\textcircled{5} E: -14x + 6y - 4z + 8 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-14x + 6y - 4z + 8 = 0}{2} \Rightarrow E: -7x + 3y - 2z + 4 = 0$$

### Koordinatendarstellung zu Parameterdarstellung

Wir bestimmen drei beliebige Punkte auf  $E$ , indem wir die  $x$ - und  $y$ -Koordinaten frei wählen und die zugehörigen  $z$ -Koordinaten aus der Koordinatendarstellung von  $E$  berechnen. Aus diesen drei Punkten können wir dann eine Parameterdarstellung von  $E$  gewinnen.

### Abstand Punkt zu Ebene

$$\text{Abstand } l = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{|\vec{n}|}$$

$$\text{Ebene } E: 7x + 4y - 4z + 3 = 0$$

$$\text{Punkt } A = (2, -3, -1)$$

$$\textcircled{1} \vec{n} \text{ bestimmen: } \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 9$$

$$\textcircled{2} A \text{ in } E \text{ einsetzen} \rightarrow \text{in Formel einsetzen:}$$

$$l = \frac{7 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) - 4 \cdot (-1) + 3}{9} = 1$$

### Spezielle Lagen von Ebenen

TBD

### Linearen Gleichungssysteme

### Rang

Matrix muss in Zeilenstufenform sein.

$rg(A)$  = Gesamtanzahl Zeilen - Anzahl Nullzeilen .

$$A = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} \text{rang}(A) = 2 \\ \text{rang}(A|b) = 2 \end{array}$$

A

## Lösbarkeit von LGS

$n$  = Anzahl Spalten

Das LGS  $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$  ist genau dann lösbar, wenn  $rg(A) = rg(A|\vec{c})$ .

Es hat genau eine Lösung, falls zusätzlich gilt:  $rg(A) = n$ .

Es hat unendlich viele Lösungen, falls zusätzlich gilt:  $rg(A) < n$ .

## Matrizen

### Begriffe

**Quadratische Matrix:** gleich viele Zeilen und Spalten

**Hauptdiagonale:** Die Diagonale von links oben nach rechts unten

**Untere- und obere Dreiecksmatrix**

Beispiel	(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$	(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
Beschreibung	unter der Hauptdiag. alles Null.	oben der Hauptdiag. alles Null.
Bezeichnung	Ober Dreiecksmatrix $U = \text{Upper}$	Untere Dreiecksmatrix $L = \text{Lower}$

**Symmetrische Matrix :** symmetrisch bzgl. Hauptdiagonale

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

### Multiplikation / Rechenregeln

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{array}{c|cc} & 2 & -3 \\ \hline 2 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n} \wedge \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ A + (B + C) = (A + B) + C \\ A + B = B + A \\ A + 0 = A \\ A - A = 0 \text{ (Nullmatrix)} \end{array}$$

## Transponieren

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln:

$$(A^T)^T = A$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Gilt  $A = A^T$ , so heißt die Matrix A symmetrisch.

Gilt  $A = -A^T$ , so heißt die Matrix A antisymmetrisch.

## Inverse

Matrix muss quadratisch sein:  $n \times n \rightarrow 2 \times 2, 3 \times 3$

**2x2**

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Die  $2 \times 2$ -Matrix hat genau dann ein Inverse wenn  $ad - bc \neq 0$

**3x3 und grösser**

→ Gauss - Jordan

$$\begin{array}{l} \left( \begin{array}{cccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) :2 \quad \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xleftarrow{(-3)} \cdot (-3) \\ \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \cdot (-2/3) \xleftarrow{(-2)} \cdot (-2) \\ \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & -2 & 4/3 & 1 \end{array} \right) \cdot 3 \\ \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 & 3 \end{array} \right) \xleftarrow{(-1/3)} \cdot (-1/3) \xleftarrow{(-1/2)} \cdot (-1/2) \\ \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 0 & 7/2 & -2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 & 3 \end{array} \right) \xleftarrow{(-1/2)} \cdot (-1/2) \\ \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -6 & 4 & 3 \end{array} \right) \end{array}$$

## Determinante

**2x2**

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

**3x3 Regel von Sarrus**

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - g \cdot e \cdot c - h \cdot f \cdot a - i \cdot d \cdot b.$$

**Laplacescher Entwicklungssatz (>3x3)**

Vorzeichen:

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \\ - & + & - \end{bmatrix}$$

Entwickeln nach derjenigen Zeile oder Spalte, in der die meisten Nullen stehen (hier gelb)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow 2 \cdot \det \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & -2 \\ 6 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Entwickeln nach 1er

$$\begin{aligned} \det(A) &= +a_{00} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - a_{01} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{10} & a_{12} \\ a_{20} & a_{22} \end{bmatrix} + a_{02} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{10} & a_{11} \\ a_{20} & a_{21} \end{bmatrix} \\ &= +a_{00}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) - a_{01}(a_{10}a_{22} - a_{12}a_{20}) + a_{02}(a_{10}a_{21} - a_{11}a_{20}) \\ &= +a_{00}a_{11}a_{22} + a_{01}a_{12}a_{20} + a_{02}a_{10}a_{21} - a_{00}a_{12}a_{21} - a_{01}a_{10}a_{22} - a_{02}a_{11}a_{20} \end{aligned}$$

**det Dreiecksmatrix** = Produkt der Hauptdiagonale

## Rechenregeln

- (1) Für die Einheitsmatrix  $E$  gilt:  $\det(E) = 1$
- (2) Für jede  $n \times n$ -Dreiecksmatrix  $U$  gilt:  $\det(U) = u_{11} \cdot u_{22} \cdot \dots \cdot u_{nn}$
- (3) Für jede quadratische Matrix  $A$  gilt:  $\det(A^T) = \det(A)$
- (4) Für alle  $n \times n$ -Matrizen  $A$  und  $B$  gilt:  $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- (5) Für jede invertierbare Matrix  $A$  gilt:  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- (6) Für jede  $n \times n$ -Matrix  $A$  und jedes  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt:  $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$

$$2 \times 2 \rightarrow \det(5 \cdot A) = 5^2 \cdot \det(A)$$

$$3 \times 3 \rightarrow \det(5 \cdot A) = 5^3 \cdot \det(A)$$

## Geometrische Interpretation der Determinante

**2x2**

Fläche von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  = Betrag von  $\det \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

**3x3**

Volumen von  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  = Betrag von  $\det \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

