

Analysis 2 S2

Raphael Nambiar

Version: 6. Juni 2022

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$F(x)$
x^α mit $\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	x^a mit $a \neq -1$	$\frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$1 + \tan^2(x)$	$\tan(x) + C$
$\cot(x)$	$-1 - \cot^2(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$	e^x	$e^x + C$
e^x	e^x	a^x	$\frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x + C$
a^x	$\ln(a) \cdot a^x$	$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + C$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{\ln(a)x}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x) + C$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arctan(x) + C$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$		

Ableiten

$$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

$$f(x) = c \cdot g(x) \rightarrow f'(x) = c \cdot g'(x)$$

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{h(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

$$f(x) = g(h(x)) \rightarrow f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Integrieren

$$\frac{1}{x^5} \rightarrow -\frac{1}{4x^4} + C$$

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + C$$

Uneigentliche Integrale

Ein *uneigentliches* Integral hat die Eigenschaft, dass der Integrationsbereich unendlich gross ist oder eine Polstelle enthält.

$$(a) \int_1^\infty \frac{1}{x^5} dx \quad (b) \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad (c) \int_3^5 2(x-3)^{-\frac{1}{4}} dx$$

$$(a) \int_1^t \frac{1}{x^5} dx = \left[-\frac{1}{4} x^{-4} \right]_1^t = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{t^4} + \frac{1}{4} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$(b) \int_1^t \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[2x^{\frac{1}{2}} \right]_1^t = 2\sqrt{t} - 2 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty. \text{ Das Integral existiert also nicht.}$$

$$(c) \int_t^5 2(x-3)^{-\frac{1}{4}} dx = 2 \cdot \int_{t-3}^2 u^{-\frac{1}{4}} du = 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \left[u^{\frac{3}{4}} \right]_{t-3}^2 = \frac{8}{3} \cdot \left(2^{\frac{3}{4}} - (t-3)^{\frac{3}{4}} \right) \xrightarrow{t \rightarrow 3} \frac{8}{3} \cdot 2^{\frac{3}{4}}$$

(verwendete Substitution: $u = x - 3$)

Integration durch Substitution

① Substitutionsgleichung für $x : u = g(x)$

② Substitutionsgleichung für $dx :$

$$\frac{du}{dx} = g'(x) \text{ (Ableitung)} \rightarrow dx = \frac{du}{g'(x)}$$

③ Integralsubstitution: Einsetzen von u und dx aus 1. und 2 in Ursprung

④ Integration von 3.

⑤ Rücksubstitution (nur unbestimmte Integrale)

Beispiel: $\int e^{2x}$

① $u = 2x$

② $dx = \frac{du}{2}$

③ $\int e^u \cdot \frac{du}{2}$

④ $\int e^u \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \cdot \int e^u du \rightarrow \frac{1}{2} e^u + C$

⑤ $\frac{1}{2} e^u + C \rightarrow \frac{1}{2} e^{2x} + C$

Partielle Integration

$$u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

Beispiel:

$$u(x) = x; v'(x) = e^x$$

$$u'(x) = 1; v(x) = e^x$$

$$\int x \cdot e^x$$

$$\int x \cdot e^x = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C$$

Integration durch Partialbruchzerlegung

① Polynomdivision (falls Funktion unecht gebrochen!): Zählergrad > Nennergrad

② **Nullstellen** des Nenners bestimmen (raaten, 2Klammeransatz, Horner, lösen)

③ Jeder Nullstelle ihren Partialbruch zuordnen:

$$x_1 \text{ ist einfache Nullstelle} \rightarrow \frac{A}{x - x_1}$$

$$x_1 \text{ ist doppelte Nullstelle} \rightarrow \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2}$$

$$x_1 \text{ ist } r\text{-fache Nullstelle} \rightarrow \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x - x_1)^r}$$

④ Ansatz zur Partialbruchzerlegung aufstellen $\rightarrow f(x)$ wird mit der Summe aller Partialbrüche gleichgesetzt

⑤ Bestimmung der Konstanten A, A_1, A_2, \dots, A_r

1. Brüche gleichnamig machen

2. Einsetzen von x -Werten (Nullstellen) \rightarrow LGS

3. LGS lösen \rightarrow man erhält die Konstanten A, A_1, B, \dots

⑥ Integration der Partialbrüche

$$\int \frac{1}{x - x_0} dx = \ln|x - x_0| + C \quad \left| \int \frac{2}{\dots} = 2 \ln \right.$$

$$\int \frac{1}{(x - x_0)^r} dx = \frac{1}{(1 - r)(x - x_0)^{r-1}} + C$$

Beispiel: $\int \frac{5x+11}{x^2+3x-10} dx$

1. ist echt gebrochen: ok

2. Nullstellen Nenner: $(x-2)(x+5) \Rightarrow x_0 = 2; x_1 = -5$

3. $\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5}$

4. $\int \frac{5x+11}{x^2+3x-10} dx = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5}$

5. (a) $\int \frac{5x+11}{x^2+3x-10} dx = \frac{A(x+5)+B(x-2)}{(x-2)(x+5)}$

(b) $5x+11 = A(x+5) + B(x-2)$

(c) einsetzen: $x = 2 \rightarrow A = 3; x = -5 \rightarrow B = 2;$

6. $\int \frac{5x+11}{x^2+3x-10} dx = \int \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+5} dx$
 $= 3 \cdot \ln(|x-2|) + 2 \cdot \ln(|x+5|) + C$

Differentialgleichungen (DGL)

Begriffe

Ordnung: Ordnung = höchste Ableitung in der DGL

Linearität: Funktion und Ableitung sind linear $\rightarrow x^1$

Separierbare Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung 1. Ordnung heisst separierbar wenn:

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

How To:

- $y' = \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$
- Trennung der Variablen: $\frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx$
- Integration auf beiden Seiten der Gleichung (if possible):

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

- Auflösen nach y (falls möglich!)

Beispiel:

-
-
-
-

$$y' = y^2 = \sin(x)$$

- $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin(x)}{y^2}$
- $y^2 \cdot dy = \sin(x) \cdot dx$

Autonome Differentialgleichungen

Definition: $y' = f(y)$

\Rightarrow Diese Differentialgleichungen sind separierbar!

Gleichung	autonom?
$y' = y^2 + 6$	Ja
$y' = x + y$	Nein
$y' = \frac{y}{x}$	Nein
$y' = y^2 \cdot \sqrt{1 - \sin(y)} - \ln(y)$	Ja

Lineare Differentialgleichungen

Form: $y' + f(x) \cdot y = g(x)$

$g(x) \rightarrow$ Störglied / Störfunktion

"linear" $\rightarrow y$ und y' in der ersten Potenz

homogen \rightarrow wenn das Störglied $g(x) = 0$

ansonsten \rightarrow *inhomogen*

Variation der Konstanten für lineare Differentialgleichungen

- Bestimmung von $f(x)$ und $g(x)$ basierend auf:
 $y' + f(x) \cdot y = g(x)$
- Bestimmung der Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$
- Einsetzen in die Formel $y_0 = K(x) \cdot e^{-F(x)}$
- K berechnen: $K(x) = \int g(x) \cdot e^{F(x)} dx$
- K in Ansatz aus ③ einsetzen \rightarrow allgemeine Lösung

Beispiel:

$$y' = \cos(x) \cdot (1 + 2y) \quad \Leftrightarrow \quad y' - 2 \cdot \cos(x) \cdot y = \cos(x)$$

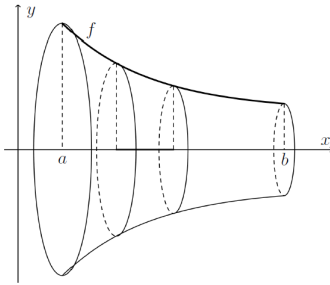
- Variation der Konstanten mit $f(x) = -2 \cdot \cos(x)$, $g(x) = \cos(x)$
- $F(x) = -2 \cdot \sin(x)$
- $y_0 = C \cdot e^{2 \sin(x)}$
- Ansatz: $y = K(x) \cdot e^{2 \sin(x)}$
- $K(x) = \int e^{-2 \sin(x)} \cdot \cos(x) \, dx = \int e^{-2u} \, du = -\frac{1}{2} e^{-2u} + C_2 = -\frac{1}{2} e^{-2 \sin(x)} + C_2$
(Substitution $u = \sin(x)$)
- Einsetzen: $y = \left(\frac{1}{2} e^{-2 \sin(x)} + C_2\right) \cdot e^{2 \sin(x)} = -\frac{1}{2} + C_2 \cdot e^{2 \sin(x)}$

Eulerschritte

Anwendungen der Integralrechnung

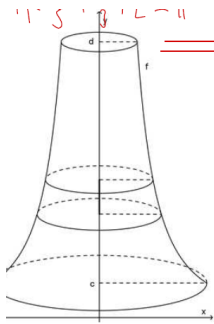
Rotation um die x-Achse

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$$



Rotation um die y-Achse

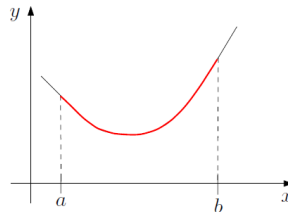
$$V = \pi \cdot \int_c^d (g(y))^2 dy$$



→ $g(y)$ die nach x aufgelöste Funktionsgleichung.

Bogenlänge einer ebenen Kurve (Graph)

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$



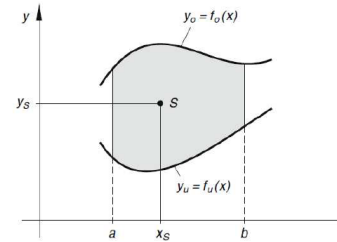
Mantelfläche eines Rotationskörpers

$$M = 2\pi \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

Schwerpunkt Fläche zwischen zwei Kurven

$$x_s = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b x \cdot (f_o(x) - f_u(x)) dx$$

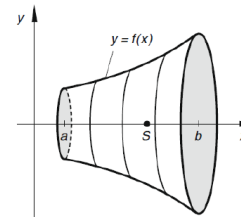
$$y_s = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^b (f_o^2(x) - f_u^2(x)) dx$$



Schwerpunkt eines Rotationskörpers

$$x_s = \frac{1}{V} \cdot \int_a^b x \cdot f^2(x) dx$$

$$y_s = 0, z_s = 0$$



Taylor-Reihen

Definition

Eine Funktion $f(x)$ entspricht einer Taylorreihe mit unendlich vielen Gliedern. Die Stelle x_0 ist die Entwicklungsstelle. Die Entwicklungsstelle ist die Stelle, in deren Umgebung uns das Verhalten der Funktion interessiert.

Verfahren / Formel

$$t_f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

0!	= 1	= 1
1!	= 1	= 1
2!	= 1 · 2	= 2
3!	= 1 · 2 · 3	= 6
4!	= 1 · 2 · 3 · 4	= 24
5!	= 1 · 2 · 3 · 4 · 5	= 120
⋮		

Grad: *anzahl* Ableitungen / Schritte

- ① Ableitungen bilden (Grad)
- ② x_0 in Ableitungen einsetzen
- ③ Ableitungen in Formel einsetzen

④ ausrechnen/kürzen/vereinfachen

Beispiel:

die Funktion $f(x) = (1 + e^x)^2$ vom Grad 3 um $x_0 = 0$.

$$f(x) = (1 + e^x)^2 \Rightarrow f(0) = 4$$

$$f'(x) = 2(1 + e^x) \cdot e^x = 2e^x(1 + e^x) \Rightarrow f'(0) = 2 \cdot 2 = 4$$

$$f''(x) = 2(e^x)' \cdot (1 + e^x) + 2e^x \cdot (1 + e^x)' = 2e^x(1 + e^x) + 2e^x \cdot e^x = 2e^x + 4e^{2x} \Rightarrow f''(0) = 6$$

$$f'''(x) = 2e^x + 8e^{2x} \Rightarrow f'''(0) = 10$$

gesuchtes Taylor-Polynom:

$$p_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 = 4 + 4x + 3x^2 + \frac{5}{3}x^3$$

Konvergenzen

Konvergenzradius bei Taylor

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$$

$$r := \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

r : Konvergenzradius

Regel von Bernoulli-Hopital

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g'(x)}{h'(x)}$$

① Zählerfunktion $g(x)$ und Nennerfunktion $f(x)$ getrennt voneinander ableiten

② Grenzwert von $\frac{g'(x)}{h'(x)}$ berechnen