# Analysis 2 S2

Raphael Nambiar

Version: 28. Mai 2022

## Integrieren

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $x^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ |
| $\sin(x)$ | $\cos(x)$ |
| $\cos(x)$ | $-\sin(x)$ |
| $\tan(x)$ | $1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ |
| $\cot(x)$ | $-1-\cot^2(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $a^x$ | $\ln(a)\cdot a^x$ |
| $\ln(x)$ | $\frac{1}{x}$ |
| $\log_a(x)$ | $\frac{1}{\ln(a)x}$ |
| $\arcsin(x)$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arccos(x)$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arctan(x)$ | $\frac{1}{1+x^2}$ |

| $f(x)$ | $F(x)$ |
|---|---|
| $x^a$ mit $a \neq -1$ | $\frac{1}{a+1}x^{a+1}+C$ |
| $\sin(x)$ | $-\cos(x)+C$ |
| $\cos(x)$ | $\sin(x)+C$ |
| $1+\tan^2(x)$ | $\tan(x)+C$ |
| $e^x$ | $e^x+C$ |
| $a^x$ | $\frac{1}{\ln(a)}\cdot a^x+C$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\ln(\lvert x\rvert)+C$ |
| $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arcsin(x)+C$ |
| $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arccos(x)+C$ |
| $\frac{1}{1+x^2}$ | $\arctan(x)+C$ |

### Integration durch Substitution

1 Substitutionsgleichung für $x : u = g(x)$

2 Substitutionsgleichung für $dx$ :
$\frac{du}{dx} = g'(x)_{(Ableitung)} \rightarrow dx = \frac{du}{g'(x)}$

3 Integralsubstitution: Einsetzen von $u$ und $dx$ aus 1. und 2 in Ursprung

4 Integration von 3.

5 Rücksubstitution (nur unbestimmte Integrale)

Beispiel:

1 $u = 2x$
2 $dx = \frac{du}{2}$
3 $\int e^u \cdot \frac{du}{2}$

4 $\int e^u \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2}\cdot \int e^u du \rightarrow \frac{1}{2}e^u + C$

5 $\frac{1}{2}e^u + C \rightarrow \frac{1}{2}e^{2x} + C$

### Partielle Integration

$$u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

Beispiel:

$$\int x \cdot e^x$$

$u(x) = x;\ v'(x) = e^x$
$u'(x) = 1;\ v(x) = e^x$

$$\int x\cdot e^x = x\cdot e^x - \int \cdot e^x dx = x\cdot e^x - e^x + C$$

### Integration durch Partialbruchzerlegung

1 Polynomdivision (falls Funktion unecht gebrochen!): Zählergrad > Nennergrad

2 **Nullstellen** des Nenners bestimmen (raaten, 2Klammeransatz, Horner, lösen)

3 Jeder Nullstelle ihren Partialbruch zuordnen:

$$x_1 \text{ ist einfache Nullstelle} \quad\rightarrow\quad \frac{A}{x-x_1}$$

$$x_1 \text{ ist doppelte Nullstelle} \quad\rightarrow\quad \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2}$$

$$x_1 \text{ ist } r-\text{fache Nullstelle} \quad\rightarrow\quad \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(x-x_1)^r}$$

4 Ansatz zur Partialbruchzerlegung aufstellen $\rightarrow f(x)$ wird mit der Summe aller Partialbrüche gleichgesetzt

5 Bestimmung der Konstanten $A, A_1, A_2, ..., A_r$

1. Brüche gleichnamig machen
2. Einsetzen von x-Werten (Nullstellen) → LGS
3. LGS lösen → man erhält die Konstanten $A, A_1, B, ...$

6 Integration der Partialbrüche

$$\int \frac{1}{x-x_0}\,\mathrm{d}x = \overset{1}{\ln}|x-x_0| + C$$

$\int \frac{2}{...} = 2\cdot\ln..$

$$\int \frac{1}{(x-x_0)^r}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(1-r)(x-x_0)^{r-1}} + C$$

**Beispiel**: $\int \frac{5x+11}{x^2+3x-10}dx$

1. ist echt gebrochen: ok
2. Nullstellen Nenner: $(x-2)(x+5) \Rightarrow x_0 = 2; x_1 = -5$
3. $\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5}$
4. $\int \frac{5x+11}{x^2+3x-10}dx = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5}$
5. (a) $\int \frac{5x+11}{x^2+3x-10}dx = \frac{A(x+5)+B(x-2)}{(x-2)+(x+5)}$
   (b) $5x + 11 = A(x+5) + B(x-2)$
   (c) einsetzen: $x = 2 \rightarrow A = 3;\ x = -5 \rightarrow B = 2;$
6. $\int \frac{5x+11}{x^2+3x-10}dx = \int \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+5}dx$
   $= 3\cdot ln(|x-2|) + 2\cdot ln(|x+5|) + C$

## Differentialgleichungen (DGL)

### Begriffe

**Ordnung:** Ordnung = höchste Ableitung in der DGL

**Linearität:** Funktion und Ableitung sind linear $\rightarrow x^1$

### Separierbare Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung 1. Ordnung heisst separierbar wenn:

$$y' = f(x)\cdot g(x)$$

How To:
TBD $y' = \frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y)$
2 Trennung der Variablen: $\frac{dy}{g(y)} = f(x)\cdot dx$
3 Integration auf beiden Seiten der Gleichung (if possible):

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

4 Auflösen nach y (falls möglich!)

Beispiel:

3
4

$$y' = y^2 = sin(x)$$

1 $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{sin(x)}{y^2}$
2 $y^2\cdot dy = sin(x)\cdot dx$

### Autonome Differentialgleichungen