

# Lineare Algebra S2

Raphael Nambiar

Version: 7. Juni 2022

## Vektorgeometrie

### Begriffe

**Kollinear:** Es existiert eine Gerade  $g$ , zu der beide Vektoren parallel sind.

**Komplanar:** Existiert eine Ebene  $e$ , zu der alle drei Vektoren parallel.

**Ortsvektor:** Beginnt im Ursprung. Schreibweise:  $\vec{r}(P)$

**Nullvektor:** Vektor mit Betrag 0, keine Richtung.:  $\vec{0}$

### Betrag

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

### Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$
$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \rightarrow \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

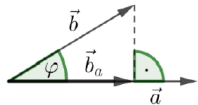
### Orthogonal

Wenn zwei Vektoren senkrecht zueinander sind.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

### Orthogonale Projektion

Projektion des Vektors  $\vec{b}$  auf den Vektor  $\vec{a}$ .



$$\vec{b}_a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}$$

$$|\vec{b}_a| = \frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}{|\vec{a}|}$$

$$|\vec{b}_a| = |\vec{a}| \cdot \cos(\varphi)$$

### Zwischenwinkel

$$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

### Einheitsvektor

$$\vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}; |\vec{e}_a| = 1$$

## Vektorprodukt / Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$$

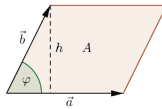
$\vec{a} \times \vec{b}$  ist orthogonal zu  $\vec{a}$  und zu  $\vec{b}$

## Kreuzprodukt in R<sup>2</sup>

Seien  $a$  und  $b$  zwei Vektoren, dann gilt für das Kreuzprodukt in  $R^2$ :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}$$
$$\vec{a} \times \vec{b} = \det(\vec{a} \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} = a_x \cdot b_y - b_x \cdot a_y$$

## Fläche / Parallelogramm



$$|\vec{a} \times \vec{b}| = A$$

Dreieck =  $\frac{1}{2} A$

## Volumen / Spatprodukt

Das Spatprodukt der drei Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$  und  $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

berechnest du mit

- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$  oder mit
- der Determinante  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$  Volumen:  $\rightarrow$  | Betrag nehmen |

## Geraden

### Parameterdarstellung

$$g: \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a}$$

P: Aufpunkt

$\vec{a} = \vec{PQ}$ ; = Richtungsvektor

### Koordinatendarstellung

$$g: ax + by + c = 0$$

### Koordinatendarstellung zu Parameterdarstellung

Zwei Punkte auf  $g$  bestimmen: 2 beliebige  $x$  Koordinaten wählen und in  $g$  einsetzen. Danach jeweils  $y$  auslesen. Dies ergibt zwei Punkte  $P, Q$ . In Parameterdarstellung bringen.

### Parameterdarstellung zu Koordinatendarstellung

$$\text{Gerade } g: \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem aufstellen und Lösen:

$$x = 7 - 2\lambda$$

$$y = 1 - 4\lambda$$

In Koordinatendarstellung bringen:  $-2x + y + 13 = 0$

### Abstand Punkt zu Geraden

$$\text{Gerade } g: \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Punkt A:  $(3, -1, 4)$

$$\vec{PA} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -14 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$l = \frac{|\vec{PA} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}$$

$\vec{a} \Rightarrow$  aus der Parameterdarstellung

## Ebene

### Normalenvektor der Ebene (orthogonal zur Ebene)

Auf der Ebene  $E$  senkrecht stehender Vektor  $\vec{n}$ .

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$$

### Parameterdarstellung

$$E: \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$$

P: Aufpunkt

$\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ ;  $\vec{b} = \overrightarrow{PR}$  = Richtungsvektoren

### Koordinatendarstellung

$$E: ax + by + cz + d = 0$$

### Parameterdarstellung zu Koordinatendarstellung

$$E: \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

② Koordinatendarstellung  $E: -14x + 6y - 4z + d = 0$

③ Aufpunkt einsetzen:  $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E: -14 \cdot 2 + 6 \cdot 4 - 4 \cdot 1 + d = 0$

④  $d$  ausrechnen:  $E: -14 \cdot 2 + 6 \cdot 4 - 4 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = 8$

⑤  $E: -14x + 6y - 4z + 8 = 0$   
 $\Rightarrow \frac{-14x + 6y - 4z + 8 = 0}{2} \Rightarrow E: -7x + 3y - 2z + 4 = 0$

### Koordinatendarstellung zu Parameterdarstellung

Wir bestimmen drei beliebige Punkte auf  $E$ , indem wir die  $x$ - und  $y$ -Koordinaten frei wählen und die zugehörigen  $z$ -Koordinaten aus der Koordinatendarstellung von  $E$  berechnen. Aus diesen drei Punkten können wir dann eine Parameterdarstellung von  $E$  gewinnen.

$$E: 2x + 7y - 4z + 1 = 0$$

$$x = 0, y = 0 \quad -4z + 1 = 0 \Rightarrow z = 1/4 \Rightarrow P = (0; 0; 1/4)$$

$$x = 1, y = 0 \quad 2 - 4z + 1 = 0 \Rightarrow z = 3/4 \Rightarrow Q = (1; 0; 3/4)$$

$$x = 0, y = 1 \quad 7 - 4z + 1 = 0 \Rightarrow z = 2 \Rightarrow R = (0; 1; 2)$$

$$\text{Eine mögliche Parameterdarstellung der Ebene } E: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

### Abstand Punkt zu Ebene

$$\text{Abstand } l = \frac{|ax_A + bx_A + cz_A + d|}{|\vec{n}|}$$

$$\text{Ebene } E: 3x - 6y - 2z + 67 = 0$$

$$\text{Punkt } A = (3, -4, 1)$$

①  $\vec{n}$  bestimmen:  $\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \sqrt{3^2 + (-6)^2 + (-2)^2} = 7$

②  $l = \frac{(3 \cdot 3) - (6 \cdot (-4)) - (2 \cdot 1)}{7} = 14$

### normierte Koordinatendarstellung der Ebene

$$E: 2x + 7y - 4z + 1 = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad |\vec{n}| = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 3^2} = \sqrt{49} = 7$$

normierte Koordinatendarstellung der Ebene

$$E: \frac{2}{7} \cdot x - \frac{6}{7} \cdot y + \frac{3}{7} \cdot z + \frac{4}{7} = 0$$

## Linearen Gleichungssysteme

### Rang

Matrix muss in Zeilenstufenform sein.

$rg(A)$  = Gesamtanzahl Zeilen - Anzahl Nullzeilen .

$$A = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} \text{rang}(A) = 2 \\ \text{rang}(A|b) = 2 \end{array}$$

A

### Lösbarkeit von LGS

$n$  = Anzahl Spalten (Variablen)

Das LGS  $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$  ist genau dann lösbar, wenn  $rg(A) = rg(A | \vec{c})$ .

Es hat genau eine Lösung, falls zusätzlich gilt:  $rg(A) = n$ .

Es hat unendlich viele Lösungen, falls zusätzlich gilt:  $rg(A) < n$ .

### Freie Variable

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

freie Variable  $\lambda_3$

Lösungsmenge:  $\lambda_3$  = kann beliebig gewählt werden,  $\infty$ -viele Lösungen.

## Matrizen

### Begriffe

**Quadratische Matrix:** gleich viele Zeilen und Spalten

**Hauptdiagonale:** Die Diagonale von links oben nach rechts unten

### Untere- und obere Dreiecksmatrix

Beispiel	(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$	(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
Beschreibung	unter der Hauptdiag. alles Null.	oben der Hauptdiag. alles Null.
Bezeichnung	Ober Dreiecksmatrix $U = \text{Upper}$	Untere Dreiecksmatrix $L = \text{Lower}$

**Symmetrische Matrix :** symmetrisch bzgl. Hauptdiagonale

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

### Multiplikation / Rechenregeln

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -9 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n} \wedge \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A + B = B + A$$

$$A + 0 = A$$

$$A - A = 0 \text{ (Nullmatrix)}$$

### Transponieren

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln:

$$(A^T)^T = A$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Gilt  $A = A^T$ , so heißt die Matrix A symmetrisch.

Gilt  $A = -A^T$ , so heißt die Matrix A antisymmetrisch.

## Inverse

Matrix muss quadratisch sein:  $n \times n \rightarrow 2 \times 2, 3 \times 3$

### 2x2

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Die  $2 \times 2$ -Matrix hat genau dann ein Inverse wenn  $ad - bc \neq 0$

### 3x3 und grösser

→ Gauss - Jordan

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} :2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xleftarrow{(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xleftarrow{(-2/3)} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & -2 & 4/3 & 1 \end{pmatrix} \cdot 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xleftarrow{(-1/3)} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xleftarrow{(-1/2)} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 7/2 & -2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

## Determinante

### 2x2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

### 3x3 Regel von Sarrus

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - g \cdot e \cdot c - h \cdot f \cdot a - i \cdot d \cdot b.$$

### Laplacescher Entwicklungssatz (>3x3)

Vorzeichen:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \\ - & + & - \end{pmatrix}$$

Entwickeln nach derjenigen Zeile oder Spalte, in der die meisten Nullen stehen (hier gelb)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow 2 \cdot \det \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & -2 \\ 6 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Wichtig: häufig sind die entwickelten identisch! → Aufwand sparen!

$$A = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Entwickeln nach 1er

$$\det(A) = +a_{00} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - a_{01} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{10} & a_{12} \\ a_{20} & a_{22} \end{bmatrix} + a_{02} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{10} & a_{11} \\ a_{20} & a_{21} \end{bmatrix}$$

$$= +a_{00}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) - a_{01}(a_{10}a_{22} - a_{12}a_{20}) + a_{02}(a_{10}a_{21} - a_{11}a_{20})$$

$$= +a_{00}a_{11}a_{22} + a_{01}a_{12}a_{20} + a_{02}a_{10}a_{21} - a_{00}a_{12}a_{21} - a_{01}a_{10}a_{22} - a_{02}a_{11}a_{20}$$

**det Dreiecksmatrix** = Produkt der Hauptdiagonale

### Rechenregeln

- (1) Für die Einheitsmatrix  $E$  gilt:  $\det(E) = 1$
- (2) Für jede  $n \times n$ -Dreiecksmatrix  $U$  gilt:  $\det(U) = u_{11} \cdot u_{22} \cdot \dots \cdot u_{nn}$
- (3) Für jede quadratische Matrix  $A$  gilt:  $\det(A^T) = \det(A)$
- (4) Für alle  $n \times n$ -Matrizen  $A$  und  $B$  gilt:  $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- (5) Für jede invertierbare Matrix  $A$  gilt:  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- (6) Für jede  $n \times n$ -Matrix  $A$  und jedes  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt:  $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$


$$2 \times 2 \rightarrow \det(5 \cdot A) = 5^2 \cdot \det(A)$$

$$3 \times 3 \rightarrow \det(5 \cdot A) = 5^3 \cdot \det(A)$$

## Geometrische Interpretation der Determinante

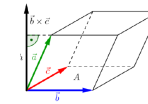
### 2x2

Fläche von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  = Betrag von  $\det \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$



### 3x3

Volumen von  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  = Betrag von  $\det \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$



## Vektorräume

### Unterräume

Eine Teilmenge  $U$  eines Vektorraums  $V$  heisst Unterraum von  $V$  wenn  $U$  selber auch ein Vektorraum ist.

### Unterraumkriterien

- (1) Für beliebige Elemente  $\vec{a}, \vec{b} \in U$  ist  $\vec{a} + \vec{b} \in U$ .
- (2) Für jeden Skalar  $\lambda \in \mathbb{R}$  und jeden Vektor  $\vec{a} \in U$  ist  $\lambda \cdot \vec{a} \in U$ .

### Unterraumkriterien überprüfen

(a) Ja, Vektorraum

$$1. \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & b_1 + b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in M_1$$

$$2. \lambda \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a & 0 \\ 0 & \lambda \cdot b \end{pmatrix} \in M_1$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \text{ Nein} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 2 \\ 2 & b_1 + b_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}.$$

### Linearkombination

Stellen Sie  $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  als Linearkombination von

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ dar.}$$

$$\text{Gesucht sind } \lambda, \mu \text{ und } \nu \text{ mit } \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

### Lineareabhängigkeit prüfen

#### Quadratische Matrix:

$\det(a) = 0 \Rightarrow$  Lineare Abhängigkeit

$\det(a) \neq 0 \Rightarrow$  Lineare Unabhängigkeit

#### Nicht Quadratische Matrix:

Vektoren nebeneinander in eine Matrix schreiben  $\rightarrow$  Gauss

Nullzeile oder -Spalte in der Matrix  $\Rightarrow$  Lineare Abhängigkeit der Vektoren

Keine Nullzeile oder -Spalte in der Matrix  $\Rightarrow$  Lineare Unabhängigkeit der Vektoren.

### Linearer Spann (Lineare Hülle)

Diese Menge besteht aus allen Vielfachen der Vektoren und deren Summen, ist also die Menge aller möglichen Linearkombinationen, die mit den gegebenen Vektoren gebildet werden können.

$\text{span}(\vec{a}, \vec{b}) =$  Ebene

$\text{span}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) =$  eine Gerade mit Aufpunkt.

### Dimension

Wir betrachten einen reellen Vektorraum  $V$ . Die Anzahl Vektoren, die eine Basis von  $V$  bilden, heisst *Dimension* von  $V$ .

Bezeichnung:  $\dim(V)$

**Beispiele:**

Vektorraum  $\{\vec{0}\} \rightarrow \dim 0$

$$\dim(\text{span}(\vec{a}, \vec{b})) = 2$$

$$\dim(R^{2 \times 2}) = 2$$

$$\dim = \text{rg}(A)$$

$$\dim(R^{3 \times 3}) = 2$$

### Erzeugendensystem

Eine Menge von Vektoren heisst Erzeugendensystem, wenn man mit ihnen alle Vektoren eines Vektorraumes durch Linearkombination erzeugen kann.

### Menge von Vektoren auf Erzeugendeneigenschaft überprüfen

$\rightarrow$  Bestimmung des Rangs  $\text{rg}(A)$

Wenn  $\text{rg}(A) < \text{Anzahl Zeilen}(m) \rightarrow$  kein Erzeugendensystem

### Basis eines Vektorraums

Eine Basis eines Vektorraumes ist ein "minimales Erzeugendensystem" des Vektorraumes. Die Vektoren einer Basis nennt man Basisvektoren.

**Überprüfung, ob eine Menge von Vektoren eine Basis ist**  
Quadratische Matrix  $\rightarrow \det(A) \neq 0$

Generell:

① Die Anzahl der Vektoren stimmt überein mit der Dimension des Vektorraumes.

② Die Vektoren sind linear unabhängig.

### Wichtige Basen

Für  $R^n$ : Basis  $S$  heisst *Standardbasis*

Für  $P_n[x]$ : Basis  $M$  heisst *Monombasis*

### Umrechnung von Basis $B$ zur Standardbasis $S$

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{b}_1 + a_2 \cdot \vec{b}_2 + a_3 \cdot \vec{b}_3 \dots + a_n \cdot \vec{b}_n$$

$$\text{Beispiel: } {}_B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$(7, -3, -1)$  von  $B$  nach  $S$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}_B = 7 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_S - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}_S + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}_S$$

### Umrechnung von Standardbasis $S$ zur Basis $B$

LGS bilden:

$$\text{Beispiel: } {}_B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$(2, -1, 3)$  von  $S$  nach  $B$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right) \downarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}_B$$

## Lineare Abbildungen

### Definition: Lineare Abbildung

Gegeben sind zwei reelle Vektorräume  $V$  und  $W$  (können auch identisch sein).

Eine Abbildung  $f: V \rightarrow W$  heisst *lineare Abbildung*, wenn für alle Vektoren  $\vec{x}, \vec{y} \in V$  und jeden Skalar  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt:

- (1)  $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$
- (2)  $f(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot f(\vec{y})$

Der Vektor  $\vec{x} \in W$ , der herauskommt, wenn  $f$  auf einen Vektor  $\vec{x}$  angewendet, heisst **Bild** von  $\vec{x}$ .

### Beispiele:

(a)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  ✓ ↙

(c)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$

(e)  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -3x_1 + 5x_3 \end{pmatrix}$

(a) Bed 1:  $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$   
 $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  o.k.

Bed 2:  $f\left(\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$   
 $\lambda \cdot f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  o.k.  $\Rightarrow f$  ist linear.

(b) Bed 1:  $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + 2 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$   
 $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + 2 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 + 2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + 4 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$   
 nicht gleich  $\Rightarrow f$  ist nicht linear

(c) Bed 1:  $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + 2(x_2 + y_2) \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$   
 $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 + 2y_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + y_1 + 2y_2 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$   
 o.k.

Bed 2:  $f\left(\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 + 2\lambda \cdot x_2 \\ \lambda \cdot x_2 \end{pmatrix}$   
 $\lambda \cdot f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot (x_1 + 2x_2) \\ \lambda \cdot x_2 \end{pmatrix}$  o.k.  $\Rightarrow f$  ist linear.

## Abbildungsmatrix

Bzgl. *Standardbasis*: Ablesen  $\rightarrow$

1. -

Gegeben ist die lineare Abbildung  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$ .

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix  $A$  von  $f$ .

2.

Wir betrachten die lineare Abbildung  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_S \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}_S$ . Dabei ist  $S$  die Standardbasis von  $\mathbb{R}^2$ . Bestimmen Sie

(a) die Abbildungsmatrix  ${}_S A_S$  von  $f$  bezüglich  $S$ .

(b) die Abbildungsmatrix  ${}_B A_B$  von  $f$  bezüglich der Basis  $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_S, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}_S \right\}$  von  $\mathbb{R}^2$ .

(a)  $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_S\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_S, f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_S\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_S, {}_S A_S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_S$

(b)  $f(\vec{b}_1) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_S\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}_S = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_S + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}_S = 2\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}_B$   
 $f(\vec{b}_2) = f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}_S\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_S = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_S = -\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}_B$   
 ${}_B A_B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}_B$

$cA_B$  Beispiel 5 (Fortsetzung) Seite 111 TBD

### Verknüpfung von linearen Abbildungen (Komposition)

$f \rightarrow$  Abbildungsmatrix  $A$ ;  $g \rightarrow$  Abbildungsmatrix  $B$






$g \circ f \rightarrow B \cdot A$

$f \circ g \rightarrow A \cdot B$

Die Matrix der Abbildung, die zuerst ausgeführt wird, steht *rechts*.

### lineare Abbildungen in der Ebene

$\rightarrow$  ! normieren nicht vergessen !  $\leftarrow$

Streckung um $\lambda_1$ in $x$ und $\lambda_2$ in $y$	orthogonale Projektion auf die Gerade $g: ax + by = 0$ mit $a^2 + b^2 = 1$	Spiegelung an der Geraden $g: ax + by = 0$ mit $a^2 + b^2 = 1$	Rotation um den Ursprung um Winkel $\varphi$	Scherung in $x$ -Richtung mit Faktor $m$
				
$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 - a^2 & -ab \\ -ab & 1 - b^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 - 2a^2 & -2ab \\ -2ab & 1 - 2b^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

## linearen Abbildungen im Raum

$\rightarrow$  ! normieren nicht vergessen !  $\leftarrow$

Bei einer zentrischen Streckung mit dem Faktor  $\lambda$  wird jeder Basisvektor mit diesem Faktor multipliziert. Somit ist die entsprechende Abbildungsmatrix gegeben durch:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

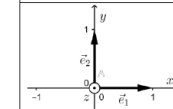
### 5.4.2 Orthogonale Projektionen und Spiegelungen

Orthogonale Projektion auf die $x/y$ -Ebene	Spiegelung an der $x/y$ -Ebene	Orthogonale Projektion auf die $x$ -Achse	Spiegelung an der $x$ -Achse
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
Orthogonale Projektion auf die $x/z$ -Ebene	Spiegelung an der $x/z$ -Ebene	Orthogonale Projektion auf die $y$ -Achse	Spiegelung an der $y$ -Achse
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
Orthogonale Projektion auf die $y/z$ -Ebene	Spiegelung an der $y/z$ -Ebene	Orthogonale Projektion auf die $z$ -Achse	Spiegelung an der $z$ -Achse
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

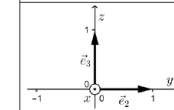
### Rotationen

#### Aufgabe: Rotationen um die Koordinatenachsen

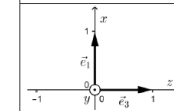
(1) Rotation um den Winkel  $\varphi$  um die  $z$ -Achse:

Blick von oben	$r_z(\vec{e}_1)$	$r_z(\vec{e}_2)$	$r_z(\vec{e}_3)$	Abbildungsmatrix
	$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) Rotation um den Winkel  $\varphi$  um die  $x$ -Achse:

Blick von vorne	$r_x(\vec{e}_1)$	$r_x(\vec{e}_2)$	$r_x(\vec{e}_3)$	Abbildungsmatrix
	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$

(3) Rotation um den Winkel  $\varphi$  um die  $y$ -Achse:

Blick von rechts	$r_y(\vec{e}_1)$	$r_y(\vec{e}_2)$	$r_y(\vec{e}_3)$	Abbildungsmatrix
	$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ 0 \\ -\sin(\varphi) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \sin(\varphi) \\ 0 \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$

Rotation um eine allgemeine Achse durch den Ursprung

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) + a_1^2(1 - \cos(\varphi)) & a_1 a_2(1 - \cos(\varphi)) - a_3 \sin(\varphi) & a_1 a_3(1 - \cos(\varphi)) + a_2 \sin(\varphi) \\ a_1 a_2(1 - \cos(\varphi)) + a_3 \sin(\varphi) & \cos(\varphi) + a_2^2(1 - \cos(\varphi)) & a_2 a_3(1 - \cos(\varphi)) - a_1 \sin(\varphi) \\ a_1 a_3(1 - \cos(\varphi)) - a_2 \sin(\varphi) & a_2 a_3(1 - \cos(\varphi)) + a_1 \sin(\varphi) & \cos(\varphi) + a_3^2(1 - \cos(\varphi)) \end{pmatrix}$$

### Kern einer Matrix

**Definition:** Der Kern  $ker(A)$  einer  $m \times n$  -Matrix  $A$  ist die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

$$\det(A) \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{Kern}(A) = \{0\} \quad \text{trivial}$$

$$\det(A) = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Kern}(A) \text{ ist nicht trivial.}$$

→ Lösen durch LGS

Beispiel:

Bestimmen Sie **Kern** und Bild der linearen Abbildung  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , die durch die folgendermassen definiert ist:

$$\begin{aligned} \text{(a) } f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} & f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} & f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \\ \text{(b) } f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x - y + z \\ -6y + 12z \\ -2x + 2y - 2z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Abbildungsmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 12 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Kern der Matrix (Lösung des LGS  $A\vec{x} = \vec{0}$ )

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 12 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} - \\ \\ \leftarrow \cdot 2 \end{array} \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 = \lambda \\ x_2 = 2\lambda \\ x_3 = \lambda \end{array}$$

$$\ker(A) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

### Bild einer Matrix

### Basiswechsel