

# Analysis 2 S2

Raphael Nambiar

Version: 6. Juni 2022

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$x^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$x^a$ mit $a \neq -1$	$\frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$1 + \tan^2(x)$	$\tan(x) + C$
$\cot(x)$	$-1 - \cot^2(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$	$e^x$	$e^x + C$
$e^x$	$e^x$	$a^x$	$\frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x + C$
$a^x$	$\ln(a) \cdot a^x$	$\frac{1}{x}$	$\ln( x ) + C$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{\ln(a)x}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x) + C$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$		

## Ableiten

$$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

$$f(x) = c \cdot g(x) \rightarrow f'(x) = c \cdot g'(x)$$

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{h(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

$$f(x) = g(h(x)) \rightarrow f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

## Integrieren

$$\frac{1}{x^5} \rightarrow -\frac{1}{4x^4} + C$$

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + C$$

## Uneigentliche Integrale

Ein *uneigentliches* Integral hat die Eigenschaft, dass der Integrationsbereich unendlich gross ist oder eine Polstelle enthält.

$$(a) \int_1^\infty \frac{1}{x^5} dx \quad (b) \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad (c) \int_3^5 2(x-3)^{-\frac{1}{4}} dx$$

$$(a) \int_1^t \frac{1}{x^5} dx = \left[ -\frac{1}{4} x^{-4} \right]_1^t = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{t^4} + \frac{1}{4} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$(b) \int_1^t \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[ 2x^{\frac{1}{2}} \right]_1^t = 2\sqrt{t} - 2 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty. \text{ Das Integral existiert also nicht.}$$

$$(c) \int_t^5 2(x-3)^{-\frac{1}{4}} dx = 2 \cdot \int_{t-3}^2 u^{-\frac{1}{4}} du = 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \left[ u^{\frac{3}{4}} \right]_{t-3}^2 = \frac{8}{3} \cdot \left( 2^{\frac{3}{4}} - (t-3)^{\frac{3}{4}} \right) \xrightarrow{t \rightarrow 3} \frac{8}{3} \cdot 2^{\frac{3}{4}}$$

(verwendete Substitution:  $u = x - 3$ )

## Integration durch Substitution

① Substitutionsgleichung für  $x : u = g(x)$

② Substitutionsgleichung für  $dx :$

$$\frac{du}{dx} = g'(x) \text{ (Ableitung)} \rightarrow dx = \frac{du}{g'(x)}$$

③ Integralsubstitution: Einsetzen von  $u$  und  $dx$  aus 1. und 2 in Ursprung

④ Integration von 3.

⑤ Rücksubstitution (nur unbestimmte Integrale)

Beispiel:  $\int e^{2x}$

①  $u = 2x$

②  $dx = \frac{du}{2}$

③  $\int e^u \cdot \frac{du}{2}$

④  $\int e^u \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \cdot \int e^u du \rightarrow \frac{1}{2} e^u + C$

⑤  $\frac{1}{2} e^u + C \rightarrow \frac{1}{2} e^{2x} + C$

## Partielle Integration

$$u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

Beispiel:

$$u(x) = x; v'(x) = e^x$$

$$u'(x) = 1; v(x) = e^x$$

$$\int x \cdot e^x$$

$$\int x \cdot e^x = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C$$

## Integration durch Partialbruchzerlegung

① Polynomdivision (falls Funktion unecht gebrochen!): Zählergrad > Nennergrad

② **Nullstellen** des Nenners bestimmen (raaten, 2Klammeransatz, Horner, lösen)

③ Jeder Nullstelle ihren Partialbruch zuordnen:

$$x_1 \text{ ist einfache Nullstelle} \rightarrow \frac{A}{x - x_1}$$

$$x_1 \text{ ist doppelte Nullstelle} \rightarrow \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2}$$

$$x_1 \text{ ist } r\text{-fache Nullstelle} \rightarrow \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x - x_1)^r}$$

④ Ansatz zur Partialbruchzerlegung aufstellen  $\rightarrow f(x)$  wird mit der Summe aller Partialbrüche gleichgesetzt

⑤ Bestimmung der Konstanten  $A, A_1, A_2, \dots, A_r$

1. Brüche gleichnamig machen

2. Einsetzen von x-Werten (Nullstellen)  $\rightarrow$  LGS

3. LGS lösen  $\rightarrow$  man erhält die Konstanten  $A, A_1, B, \dots$

⑥ Integration der Partialbrüche

$$\int \frac{1}{x - x_0} dx = \ln|x - x_0| + C \quad \int \frac{1}{(x - x_0)^2} dx = -\frac{1}{x - x_0} + C$$

$$\int \frac{1}{(x - x_0)^r} dx = \frac{1}{(1 - r)(x - x_0)^{r-1}} + C$$

Beispiel:  $\int \frac{5x+11}{x^2+3x-10} dx$

1. ist echt gebrochen: ok

2. Nullstellen Nenner:  $(x-2)(x+5) \Rightarrow x_0 = 2; x_1 = -5$

3.  $\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5}$

4.  $\int \frac{5x+11}{x^2+3x-10} dx = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5}$

5. (a)  $\int \frac{5x+11}{x^2+3x-10} dx = \frac{A(x+5) + B(x-2)}{(x-2)(x+5)}$

(b)  $5x + 11 = A(x + 5) + B(x - 2)$

(c) einsetzen:  $x = 2 \rightarrow A = 3; x = -5 \rightarrow B = 2;$

6.  $\int \frac{5x+11}{x^2+3x-10} dx = \int \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+5} dx$   
 $= 3 \cdot \ln(|x-2|) + 2 \cdot \ln(|x+5|) + C$

Differentialgleichungen (DGL)

Begriffe

**Ordnung:** Ordnung = höchste Ableitung in der DGL

**Linearität:** Funktion und Ableitung sind linear  $\rightarrow x^1$

Separierbare Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung 1. Ordnung heisst separierbar wenn:

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

- How To:
- $y' = \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$
  - Trennung der Variablen:  $\frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx$
  - Integration auf beiden Seiten der Gleichung (if possible):

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

- Auflösen nach y (falls möglich!)

Beispiel:

- 
- 

$$y' = y^2 = \sin(x)$$

- $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin(x)}{y^2}$
- $y^2 \cdot dy = \sin(x) \cdot dx$

Autonome Differentialgleichungen

Definition:  $y' = f(y)$

$\Rightarrow$  Diese Differentialgleichungen sind separierbar!

Gleichung	autonom?
$y' = y^2 + 6$	Ja
$y' = x + y$	Nein
$y' = \frac{y}{x}$	Nein
$y' = y^2 \cdot \sqrt{1 - \sin(y)} - \ln(y)$	Ja

Lineare Differentialgleichungen

Form:  $y' + f(x) \cdot y = g(x)$

$g(x) \rightarrow$  Störglied / Störfunktion

"linear"  $\rightarrow y$  und  $y'$  in der ersten Potenz

*homogen*  $\rightarrow$  wenn das Störglied  $g(x) = 0$

ansonsten  $\rightarrow$  *inhomogen*

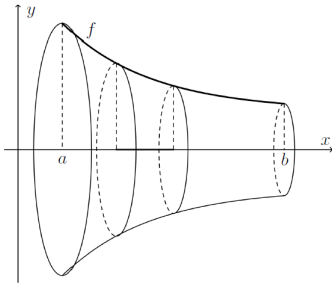
Variation der Konstanten für lineare Differentialgleichungen

- Bestimmung von  $f(x)$  und  $g(x)$  basierend auf:  $y' + f(x) \cdot y = g(x)$
  - Bestimmung der Stammfunktion  $F(x)$  von  $f(x)$
  - Einsetzen in die Formel  $y_0 = K(x) \cdot e^{-F(x)}$
  - $K$  berechnen:  $K(x) = \int g(x) \cdot e^{F(x)} dx$
  - $K$  in Ansatz aus ③ einsetzen  $\rightarrow$  allgemeine Lösung
- Beispiel:
- $y' = \cos(x) \cdot (1 + 2y) \Leftrightarrow y' - 2 \cdot \cos(x) \cdot y = \cos(x)$
- Variation der Konstanten mit  $f(x) = -2 \cdot \cos(x)$ ,  $g(x) = \cos(x)$
  - $F(x) = -2 \cdot \sin(x)$
  - $y_0 = C \cdot e^{2 \sin(x)}$
  - Ansatz:  $y = K(x) \cdot e^{2 \sin(x)}$
  - $K(x) = \int e^{-2 \sin(x)} \cdot \cos(x) \, dx = \int e^{-2u} \, du = -\frac{1}{2}e^{-2u} + C_2 = -\frac{1}{2}e^{-2 \sin(x)} + C_2$  (Substitution  $u = \sin(x)$ )
  - Einsetzen:  $y = (\frac{1}{2}e^{-2 \sin(x)} + C_2) \cdot e^{2 \sin(x)} = -\frac{1}{2} + C_2 \cdot e^{2 \sin(x)}$
- Eulerschritte

## Anwendungen der Integralrechnung

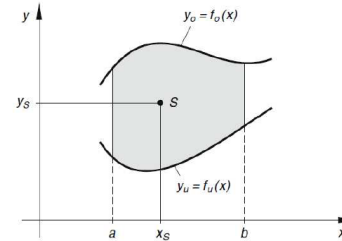
### Rotation um die x-Achse

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$$



$$x_s = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b x \cdot (f_o(x) - f_u(x)) dx$$

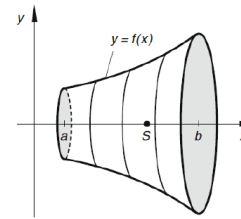
$$y_s = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^b (f_o^2(x) - f_u^2(x)) dx$$



### Schwerpunkt eines Rotationskörpers

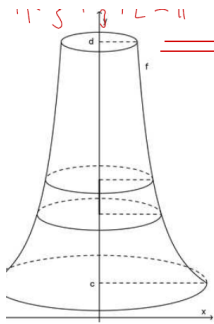
$$x_s = \frac{1}{V} \cdot \int_a^b x \cdot f^2(x) dx$$

$$y_s = 0, z_s = 0$$



### Rotation um die y-Achse

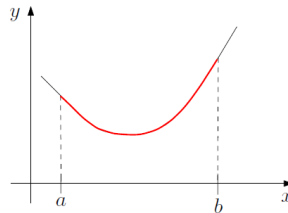
$$V = \pi \cdot \int_c^d (g(y))^2 dy$$



→  $g(y)$  die nach  $x$  aufgelöste Funktionsgleichung.

### Bogenlänge einer ebenen Kurve (Graph)

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$



### Mantelfläche eines Rotationskörpers

$$M = 2\pi \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

### Taylor-Reihen