Lineare Algebra S2

Raphael Nambiar

Version: 29. Mai 2022

Vektorgeometrie

Begriffe

Kollinear: Es existiert eine Gerade g, zu der beide Vektoren parallel sind.

Komplanar: Existiert eine Ebene e, zu der alle drei Vektoren parallel.
Ortsvektor: Beginnt vim Ursprung. Schreibweise: $\vec{r}(P)$
Nullvektor: Vektor mit Betrag 0,keine Richtung.: $\vec{0}$

Betrag

$$|\vec{a}| = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$
$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

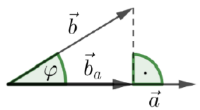
Orthogonal

Wenn zwei Vektoren senkrecht zueinander sind.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Orthogonale Projektion

Projektion des Vektores $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$.



$\vec{b}_a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}$
$|\vec{b}_a| = \frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}{|\vec{a}|}$
$|\vec{b}_a| = |\vec{a}| \cdot \cos(\varphi)$

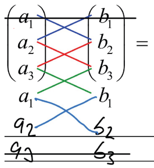
Zwischenwinkel

$\varphi = cos^{-1}(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|})$

Einheitsvektor

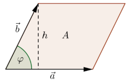
$\vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$;$|\vec{e}_a| = 1$

Vektorprodukt



$$= \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$
$\vec{a} \times \vec{b}$ ist orthogonal zu $\vec{a}$ und zu $\vec{b}$



$|\vec{a} \times \vec{b}| = \text{A}$
Dreieck $= \frac{1}{2}$ A

Geraden

Parameterdarstellung

$g : \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a}$
P: Aufpunkt
$\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$; = Richtungsvektor

Koordinatendarstellung

$g : ax + by + c = 0$

Koordinatendarstellung zu Parameterdarstellung

Zwei Punkte auf g bestimmen: 2 beliebige x Koordinaten wählen und in g einsetzen. Danach jeweils y auslesen. Dies ergibt zwei Punkte P, Q. In Parameterdarstellung bringen.

Parameterdarstellung zu Koordinatendarstellung

Gerade $g : \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Gleichungssystem aufstellen und Lösen:

$$x = 7 - 2\lambda$$
$$y = 1 - 4\lambda$$

In Koordinatendarstellung bringen: $-2x + y + 13 = 0$

Abstand Punkt zu Geraden

Gerade g: $\begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

Punkt A: $(3, -1, 4)$

$$\overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -14 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$l = \frac{|\overrightarrow{PA} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}$

Ebene

Normalenvektor der Ebene (orthogonal zur Ebene)

Auf der Ebene E senkrecht stehnder Vektor $\vec{n}$.
$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$

Parameterdarstellung

$E : \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$
P: Aufpunkt
$\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$; $\vec{b} = \overrightarrow{PR}$ = Richtungsvektoren

Koordinatendarstellung

$E : ax + by + cz + d = 0$

Parameterdarstellung zu Koordinatendarstellung

$$E : \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

2 Koordinatendarstellung $E : -14x + 6y - 4z + d = 0$

3 Aufpunkt einsetzen: $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E : -14 \cdot 2 + 6 \cdot 4 - 4 \cdot 1 + d = 0$

4 d ausrechnen: $E : -14 \cdot 2 + 6 \cdot 4 - 4 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = 8$
5 $E : -14x + 6y - 4z + 8 = 0$
$\Rightarrow \frac{-14x + 6y - 4z + 8 = 0}{2} \Rightarrow E : -7x + 3y - 2z + 4 = 0$

Koordinatendarstellung zu Parameterdarstellung

Wir bestimmen drei beliebige Punkte auf E, indem wir die x- und y-Koordinaten frei wählen und die zugehörigen z-Koordinaten aus der Koordinatendarstellung von E berechnen. Aus diesen drei Punkten können wir dann eine Parameterdarstellung von E gewinnen.

Abstand Punkt zu Ebene

Abstand $l = \frac{|ax_A + bx_A + cz_A + d|}{|\vec{n}|}$

Ebene $E : 7x + 4y + -4z + 3 = 0$
Punkt $A = (2, -3, -1)$
1 $\vec{n}$ bestimmen: $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 9$
2 A in E einsetzten → in Formel einsetzten:
$l = \frac{7 \cdot 2 + 4 \cdot -3 - 4 \cdot -1}{9} = 1$

Spezielle Lagen von Ebenen

TBD

Linearen Gleichungssysteme

Rang

Matrix muss in Zeilenstufenform sein.

$rg(A)$ = Gesamtanzahl Zeilen - Anzahl Nullzeilen .

$$\text{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} \text{rang(A) = 2} \\ \text{rang(A|b) = 2} \end{array}$$

$\underbrace{\hphantom{1\ 2}}_{\text{A}}$

Lösbarkeit von LGS

n = Anzahl Spalten

Das LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$ ist genau dann lösbar, wenn $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|\ \vec{c})$.
Es hat genau eine Lösung, falls **zusätzlich** gilt: $\text{rg}(A) = n$.
Es hat unendlich viele Lösungen, falls **zusätzlich** gilt: $\text{rg}(A) < n$.

Matrizen

Begriffe

Quadratische Matrix: gleich viele Zeilen und Spalten

Hauptdiagonale: Die Diagonale von links oben nach rechts unten

Untere- und obere Dreiecksmatrix

Beispiel	(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$	(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
Beschreibung	unter der Hauptdiag. alles Null.	oben der Hauptdiag. alles Null.
Bezeichnung	Obere Dreiecksmatrix U = Upper	Untere Dreiecksmatrix L = Lower

Symmetrische Matrix : symmetrisch bzgl. Hauptdiagonale

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplikation / Rechenregeln

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{array}{cc|cc} & & 2 & -3 \\ & & 2 & 1 \\ \hline 2 & -3 & -2 & -9 \\ 2 & 1 & 6 & -5 \end{array}$$

$A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n} \wedge \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
$A + (B + C) = (A + B) + C$
$A + B = B + A$
$A + 0 = A$
$A - A = 0$ (Nullmatrix)

Transponieren

$$\text{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln:

$(A^T)^T = A$
$(A + B)^T = A^T + B^T$
$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
Gilt $A = A^T$, so heißt die Matrix A symmetrisch.
Gilt $A = -A^T$, so heißt die Matrix A antisymmetrisch.

Inverse

Matrix muss quadratisch sein: $n \times n \rightarrow 2 \times 2, 3 \times 3$

2x2

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Die 2×2-Matrix hat genau dann ein Invese wenn $ad - bc \neq 0$

3x3 und grösser

$\rightarrow$ Gauss - Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) :2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) |\cdot(-3)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot(-2/3) \quad |\cdot(-2)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & -2 & 4/3 & 1 \end{array}\right) \cdot 3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 & 3 \end{array}\right) |\cdot(-\tfrac{1}{3}) \quad |\cdot(-\tfrac{1}{2})$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 0 & 7/2 & -2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 & 3 \end{array}\right) |\cdot(-1/2)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Determinante

2x2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

3x3 Regel von Sarrus

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - g \cdot e \cdot c - h \cdot f \cdot a - i \cdot d \cdot b.$$

Laplacescher Entwicklungssatz (>3x3)

Vorzeichen:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$$

Entwickeln nach derjenigen Zeile oder Spalte, in der die meisten Nullen stehen (hier gelb)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow 2 \cdot det \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & -2 \\ 6 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Entwicklen nach 1er

$$\begin{aligned} \det(A) &= +a_{00} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - a_{01} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{10} & a_{12} \\ a_{20} & a_{22} \end{bmatrix} + a_{02} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{10} & a_{11} \\ a_{20} & a_{21} \end{bmatrix} \\ &= +a_{00}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) - a_{01}(a_{10}a_{22} - a_{12}a_{20}) + a_{02}(a_{10}a_{21} - a_{11}a_{20}) \\ &= +a_{00}a_{11}a_{22} + a_{01}a_{12}a_{20} + a_{02}a_{10}a_{21} - a_{00}a_{12}a_{21} - a_{01}a_{10}a_{22} - a_{02}a_{11}a_{20} \end{aligned}$$

det **Dreiecksmatrix** = Produkt der Hauptdiagonale

Rechenregeln

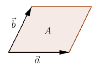
(1) Für die Einheitsmatrix E gilt: $\det(E) = 1$
(2) Für jede $n \times n$ -Dreiecksmatrix U gilt: $\det(U) = u_{11} \cdot u_{22} \cdot ... \cdot u_{nn}$
(3) Für jede quadratische Matrix A gilt: $\det(A^T) = \det(A)$
(4) Für alle $n \times n$ -Matrizen A und B gilt: $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
(5) Für jede invertierbare Matrix A gilt: $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
(6) Für jede $n \times n$ -Matrix A und jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt: $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$

$2 \times 2 \rightarrow det(5 \cdot A) = 5^2 \cdot det(A)$
$3 \times 3 \rightarrow det(5 \cdot A) = 5^3 \cdot det(A)$

Geometrische Interpretation der Determinante

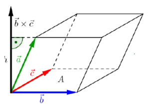
2x2

Fläche von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ = Betrag von $det \begin{vmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{vmatrix}$



3x3

Volumen von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ = Betrag von $det \begin{vmatrix} a1 & b1 & c1 \\ a2 & b2 & c2 \\ a3 & b3 & c3 \end{vmatrix}$



Linearen Gleichungssysteme

Rang

Matrix muss in Zeilenstufenform sein.

$rg(A) =$ Gesamtanzahl Zeilen - Anzahl Nullzeilen .

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ \underbrace{0 \quad 0}_{A} & & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} \text{rang(A) = 2} \\ \text{rang(A|b) = 2} \end{array}$$

Lösbarkeit von LGS

Das LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$ ist genau dann lösbar, wenn $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|\ \vec{c})$.
Es hat genau eine Lösung, falls **zusätzlich** gilt: $\text{rg}(A) = n$.
Es hat unendlich viele Lösungen, falls **zusätzlich** gilt: $\text{rg}(A) < n$.

Freie Variable

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

freie Variable λ_3

Lösungsmenge: $\lambda_3 =$ kann beliebig gewählt werden,
∞-viele Lösungen.

Vektorräume

Unterräume

Eine Teilmenge U eines Vektorraums V heisst Unterraum von V wenn U selber auch ein Vektorraum ist.

Unterraumkriterien

(1) Für beliebige Elemente $\vec{a}, \vec{b} \in U$ ist $\vec{a} + \vec{b} \in U$.
(2) Für jeden Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ und jeden Vektor $\vec{a} \in U$ ist $\lambda \cdot \vec{a} \in U$.

Nullvektorraum