

# Analysis 2 S2

Raphael Nambiar

Version: 9. Juni 2022

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$x^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$x^a$ mit $a \neq -1$	$\frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$1 + \tan^2(x)$	$\tan(x) + C$
$\cot(x)$	$-1 - \cot^2(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$	$e^x$	$e^x + C$
$e^x$	$e^x$	$a^x$	$\frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x + C$
$a^x$	$\ln(a) \cdot a^x$	$\frac{1}{x}$	$\ln( x ) + C$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{\ln(a)x}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x) + C$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$		

## Ableiten

$$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

$$f(x) = c \cdot g(x) \rightarrow f'(x) = c \cdot g'(x)$$

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{h(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

$$f(x) = g(h(x)) \rightarrow f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Logarithmen:

$$f(x) = \ln(x+a) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x+a}$$

## Integrieren

$$\frac{1}{x^5} \rightarrow -\frac{1}{4x^4} + C$$

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + C$$

## Grenzwerte

Zählergrad > Nennergrad :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{h(n)} = \text{keinen Grenzwert}$$

Zählergrad < Nennergrad :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{h(n)} = 0$$

Zählergrad = Nennergrad :

$$\lim_{n \rightarrow 8} \frac{2n^3 + 7n \dots}{5n^3 - 7n^2 \dots} = \frac{2}{5}$$

$n \rightarrow \infty$  :

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

## Wahl der Methode

Methode	Muster	Beispiel
Substitution	$\int g(f(x)) \cdot f'(x) dx$	$\int e^{\cos(x)} \cdot \sin(x) dx$
partielle Integration	$\int \overset{u}{\text{nach Ableiten einfacher}} \cdot \overset{v}{\text{nach Integration nicht komplizierter}} dx$	$\int x \cdot e^x dx$
Partialbruchzerlegung	$\frac{\text{Polynom}}{\text{Polynom}}$	$\int \frac{4x^2 + x + 17}{4x^3 + 6x + 3} dx$

## Uneigentliche Integrale

Ein *uneigentliches* Integral hat die Eigenschaft, dass der Integrationsbereich unendlich gross ist oder eine Polstelle enthält.

$$(a) \int_1^\infty \frac{1}{x^5} dx \quad (b) \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad (c) \int_3^5 2(x-3)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$(a) \int_1^t \frac{1}{x^5} dx = \left[ -\frac{1}{4} x^{-4} \right]_1^t = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{t^4} + \frac{1}{4} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$(b) \int_1^t \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[ 2x^{\frac{1}{2}} \right]_1^t = 2\sqrt{t} - 2 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty. \text{ Das Integral existiert also nicht.}$$

$$(c) \int_t^5 2(x-3)^{-\frac{1}{2}} dx = 2 \cdot \int_{t-3}^2 u^{-\frac{1}{2}} du = 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \left[ u^{\frac{3}{2}} \right]_{t-3}^2 = \frac{8}{3} \cdot \left( 2^{\frac{3}{2}} - (t-3)^{\frac{3}{2}} \right) \xrightarrow{t \rightarrow 3} \frac{8}{3} \cdot 2^{\frac{3}{2}}$$

(verwendete Substitution:  $u = x - 3$ )

## Integration durch Substitution

① Substitutionsgleichung für  $x : u = g(x)$

② Substitutionsgleichung für  $dx$  :

$$\frac{du}{dx} = g'(x) \text{ (Ableitung)} \rightarrow dx = \frac{du}{g'(x)}$$

③ Integralsubstitution: Einsetzen von  $u$  und  $dx$  aus 1. und 2 in Ursprung

④ Integration von 3.

⑤ Rücksubstitution (nur unbestimmte Integrale)

Beispiel:  $\int e^{2x}$

①  $u = 2x$

②  $dx = \frac{du}{2}$

③  $\int e^u \cdot \frac{du}{2}$

④  $\int e^u \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \cdot \int e^u du \rightarrow \frac{1}{2} e^u + C$

⑤  $\frac{1}{2} e^u + C \rightarrow \frac{1}{2} e^{2x} + C$

## Partielle Integration

$$u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

Beispiel:

$$u(x) = x; v'(x) = e^x$$

$$u'(x) = 1; v(x) = e^x$$

$$\int x \cdot e^x$$

$$\int x \cdot e^x = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C$$

## Integration durch Partialbruchzerlegung

- ① Polynomdivision (falls Funktion unecht gebrochen!): Zählergrad > Nennergrad
- ② **Nullstellen** des Nenners bestimmen (raaten, 2Klammeransatz, Horner, lösen)
- ③ Jeder Nullstelle ihren Partialbruch zuordnen:

$$x_1 \text{ ist einfache Nullstelle} \rightarrow \frac{A}{x - x_1}$$

$$x_1 \text{ ist doppelte Nullstelle} \rightarrow \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2}$$

$$x_1 \text{ ist } r\text{-fache Nullstelle} \rightarrow \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x - x_1)^r}$$

- ④ Ansatz zur Partialbruchzerlegung aufstellen  $\rightarrow f(x)$  wird mit der Summe aller Partialbrüche gleichgesetzt
- ⑤ Bestimmung der Konstanten  $A, A_1, A_2, \dots, A_r$

1. Brüche gleichnamig machen
2. Einsetzen von x-Werten (Nullstellen)  $\rightarrow$  LGS
3. LGS lösen  $\rightarrow$  man erhält die Konstanten  $A, A_1, B, \dots$

- ⑥ Integration der Partialbrüche

$$\int \frac{1}{x - x_0} dx = \ln|x - x_0| + C \quad \left| \int \dots = 2 \cdot \ln \right.$$

$$\int \frac{1}{(x - x_0)^r} dx = \frac{1}{(1 - r)(x - x_0)^{r-1}} + C$$

**Beispiel:**  $\int \frac{5x+11}{x^2+3x-10} dx$

1. ist echt gebrochen: ok
2. Nullstellen Nenner:  $(x - 2)(x + 5) \Rightarrow x_0 = 2; x_1 = -5$
3.  $\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5}$
4.  $\int \frac{5x+11}{x^2+3x-10} dx = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5}$
5. (a)  $\int \frac{5x+11}{x^2+3x-10} dx = \frac{A(x+5)+B(x-2)}{(x-2)(x+5)}$   
 (b)  $5x + 11 = A(x + 5) + B(x - 2)$   
 (c) einsetzen:  $x = 2 \rightarrow A = 3; x = -5 \rightarrow B = 2;$
6.  $\int \frac{5x+11}{x^2+3x-10} dx = \int \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+5} dx$   
 $= 3 \cdot \ln(|x - 2|) + 2 \cdot \ln(|x + 5|) + C$

## Differentialgleichungen (DGL)

### Begriffe

**Ordnung:** Ordnung = höchste Ableitung in der DGL

**Linearität:** Funktion und Ableitung sind linear  $\rightarrow x^1$

### Separierbare Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung 1. Ordnung heisst separierbar wenn:

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

How To:

$$\textcircled{1} y' = \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

$$\textcircled{2} \text{ Trennung der Variablen: } \frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx$$

- ③ Integration auf beiden Seiten der Gleichung (if possible):

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$$

- ④ Auflösen nach y (falls möglich!)

Beispiel:

③

④

$$y' = y^2 = \sin(x)$$

$$\textcircled{1} y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin(x)}{y^2}$$

$$\textcircled{2} y^2 \cdot dy = \sin(x) \cdot dx$$

## Autonome Differentialgleichungen

Definition:  $y' = f(y)$

$\Rightarrow$  Diese Differentialgleichungen sind separierbar!

Gleichung	autonom?
$y' = y^2 + 6$	Ja
$y' = x + y$	Nein
$y' = \frac{y}{x}$	Nein
$y' = y^2 \cdot \sqrt{1 - \sin(y)} - \ln(y)$	Ja

## Lineare Differentialgleichungen

$$\text{Form: } y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

$g(x) \rightarrow$  Störglied / Störfunktion

"linear"  $\rightarrow y$  und  $y'$  in der ersten Potenz

homogen  $\rightarrow$  wenn das Störglied  $g(x) = 0$

ansonsten  $\rightarrow$  inhomogen

### Variation der Konstanten für lineare Differentialgleichungen

- ① Bestimmung von  $f(x)$  und  $g(x)$  basierend auf:

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

- ② Bestimmung der Stammfunktion  $F(x)$  von  $f(x)$

- ③ Einsetzen in die Formel  $y_0 = K(x) \cdot e^{-F(x)}$

- ④  $K$  berechnen:  $K(x) = \int g(x) \cdot e^{F(x)} dx$

- ⑤  $K$  in Ansatz aus ③ einsetzen  $\rightarrow$  allgemeine Lösung

Beispiel:

$$y' = \cos(x) \cdot (1 + 2y) \Leftrightarrow y' - 2 \cdot \cos(x) \cdot y = \cos(x)$$

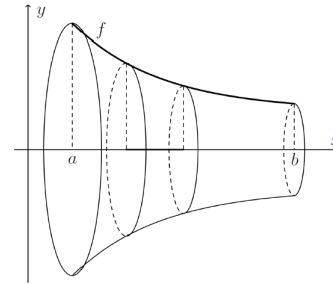
- Variation der Konstanten mit  $f(x) = -2 \cdot \cos(x)$ ,  $g(x) = \cos(x)$
- $F(x) = -2 \cdot \sin(x)$
- $y_0 = C \cdot e^{2 \sin(x)}$
- Ansatz:  $y = K(x) \cdot e^{2 \sin(x)}$
- $K(x) = \int e^{-2 \sin(x)} \cdot \cos(x) dx = \int e^{-2u} du = -\frac{1}{2} e^{-2u} + C_2 = -\frac{1}{2} e^{-2 \sin(x)} + C_2$  (Substitution  $u = \sin(x)$ )
- Einsetzen:  $y = \left(\frac{1}{2} e^{-2 \sin(x)} + C_2\right) \cdot e^{2 \sin(x)} = -\frac{1}{2} + C_2 \cdot e^{2 \sin(x)}$

### Eulerschritte

## Anwendungen der Integralrechnung

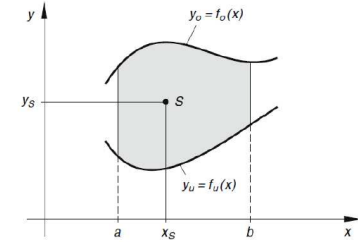
### Rotation um die x-Achse

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$$



$$x_s = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b x \cdot (f_o(x) - f_u(x)) dx$$

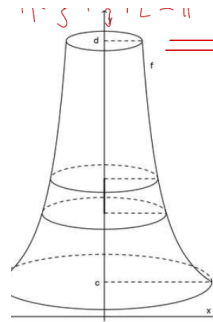
$$y_s = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^b (f_o^2(x) - f_u^2(x)) dx$$



### Schwerpunkt eines Rotationskörpers

### Rotation um die y-Achse

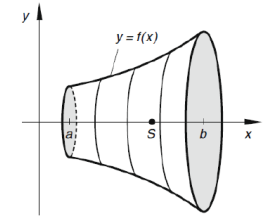
$$V = \pi \cdot \int_c^d (g(y))^2 dy$$



→  $g(y)$  die nach  $x$  aufgelöste Funktionsgleichung.

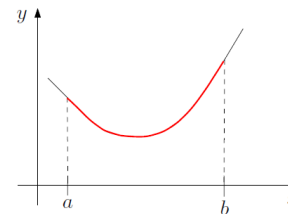
$$x_s = \frac{1}{V} \cdot \int_a^b x \cdot f^2(x) dx$$

$$y_s = 0, z_s = 0$$



### Bogenlänge einer ebenen Kurve (Graph)

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$



### Mantelfläche eines Rotationskörpers

$$M = 2\pi \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

Taylor-Reihen
<b>Definition</b>
Eine Funktion $f(x)$ entspricht einer Taylorreihe mit unendlich vielen Gliedern. Die Stelle $x_0$ ist die Entwicklungsstelle. Die Entwicklungsstelle ist die Stelle, in deren Umgebung uns das Verhalten der Funktion interessiert.
<b>Verfahren / Formel</b>

$$t_f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

0!	= 1	= 1
1!	= 1	= 1
2!	= 1 · 2	= 2
3!	= 1 · 2 · 3	= 6
4!	= 1 · 2 · 3 · 4	= 24
5!	= 1 · 2 · 3 · 4 · 5	= 120
⋮		

Grad: *anzahl* Ableitungen / Schritte

- ① Ableitungen bilden (Grad)
- ②  $x_0$  in Ableitungen einsetzen
- ③ Ableitungen in Formel einsetzen
- ④ ausrechnen/kürzen/vereinfachen

Beispiel:

die Funktion  $f(x) = (1 + e^x)^2$  vom Grad 3 um  $x_0 = 0$ .

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + e^x)^2 \Rightarrow f(0) = 4 \\ f'(x) &= 2(1 + e^x) \cdot e^x = 2e^x(1 + e^x) \Rightarrow f'(0) = 2 \cdot 2 = 4 \\ f''(x) &= 2(e^x)' \cdot (1 + e^x) + 2e^x \cdot (1 + e^x)' = 2e^x(1 + e^x) + 2e^x \cdot e^x = 2e^x + 4e^{2x} \Rightarrow f''(0) = 6 \\ f'''(x) &= 2e^x + 8e^{2x} \Rightarrow f'''(0) = 10 \end{aligned}$$

gesuchtes Taylor-Polynom:

$$p_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 = 4 + 4x + 3x^2 + \frac{5}{3}x^3$$

Konvergenzen
<b>Konvergenzradius bei Taylor</b>

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$$

$$r := \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

$r$  : Konvergenzradius

**Berechnung:**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot x^k$$

In  $r$  Formel einsetzen  $\rightarrow$  (ohne den  $x$  Teil)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{(k+1)^2}} = \frac{(k+1)^2}{k^2} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 = \left(\frac{k+1}{k}\right) \cdot \left(\frac{k+1}{k}\right)$$

$$\implies k \rightarrow \infty \implies \left(\frac{\infty+1}{\infty}\right) \cdot \left(\frac{\infty+1}{\infty}\right) = 1 \cdot 1 = 1 = r$$

**Bestimmung Intervall konvergiert:**

$\rightarrow$  Einsetzen von  $x_0$  und  $r$  in folgende Definition:

$(x_0)$  aus  $P(x)$  ablesen. Wenn nicht vorhanden: unendlichen Konvergenzradius und konvergiert für ganz  $R$

alle  $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$  zum Konvergenzbereich gehören

alle  $x \in (-\infty, x_0 - r)$  NICHT zum Konvergenzbereich gehören

**Regel von Bernoulli-Hopital**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g'(x)}{h'(x)}$$

① Zählerfunktion  $g(x)$  und Nennerfunktion  $f(x)$  getrennt voneinander ableiten

② Grenzwert von  $\frac{g'(x)}{h'(x)}$  brechnen

**BEM:** Die Regel von L'HOSPITAL kann auch mehrfach hintereinander angewendet werden. (Wenn Lösung nach 1x ableiten nicht ersichtlich)