

Lineare Algebra S2

Raphael Nambiar

Version: 30. Mai 2022

Vektorgeometrie

Begriffe

Kollinear: Es existiert eine Gerade g , zu der beide Vektoren parallel sind.

Komplanar: Existiert eine Ebene e , zu der alle drei Vektoren parallel.

Ortsvektor: Beginnt im Ursprung. Schreibweise: $\vec{r}(P)$

Nullvektor: Vektor mit Betrag 0, keine Richtung.: $\vec{0}$

Betrag

$$|\vec{a}| = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$
$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \rightarrow \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

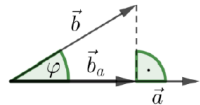
Orthogonal

Wenn zwei Vektoren senkrecht zueinander sind.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Orthogonale Projektion

Projektion des Vektors \vec{b} auf den Vektor \vec{a} .



$$\vec{b}_a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}$$

$$|\vec{b}_a| = \frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}{|\vec{a}|}$$

$$|\vec{b}_a| = |\vec{a}| \cdot \cos(\varphi)$$

Zwischenwinkel

$$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

Einheitsvektor

$$\vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}; |\vec{e}_a| = 1$$

Vektorprodukt / Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$$

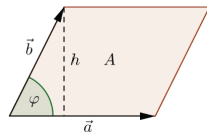
$\vec{a} \times \vec{b}$ ist orthogonal zu \vec{a} und zu \vec{b}

Kreuzprodukt in R²

Seien a und b zwei Vektoren, dann gilt für das Kreuzprodukt in R^2 :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}$$
$$\vec{a} \times \vec{b} = \det(\vec{a} \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} = a_x \cdot b_y - b_x \cdot a_y$$

Fläche / Parallelogramm



$$|\vec{a} \times \vec{b}| = A$$

Dreieck = $\frac{1}{2} A$

Volumen / Spatprodukt

Das Spatprodukt der drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

berechnest du mit

- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ oder mit
- der Determinante $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ Volumen: \rightarrow | Betrag nehmen |

Geraden

Parameterdarstellung

$$g: \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a}$$

P: Aufpunkt

$\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$; = Richtungsvektor

Koordinatendarstellung

$$g: ax + by + c = 0$$

Koordinatendarstellung zu Parameterdarstellung

Zwei Punkte auf g bestimmen: 2 beliebige x Koordinaten wählen und in g einsetzen. Danach jeweils y auslesen. Dies ergibt zwei Punkte P, Q . In Parameterdarstellung bringen.

Parameterdarstellung zu Koordinatendarstellung

$$\text{Gerade } g: \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem aufstellen und Lösen:

$$x = 7 - 2\lambda$$

$$y = 1 - 4\lambda$$

In Koordinatendarstellung bringen: $-2x + y + 13 = 0$

Abstand Punkt zu Geraden

$$\text{Gerade } g: \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Punkt A: $(3, -1, 4)$

$$\overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -14 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$l = \frac{|\overrightarrow{PA} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}$$

$\vec{a} \Rightarrow$ aus der Parameterdarstellung

Ebene

Normalenvektor der Ebene (orthogonal zur Ebene)

Auf der Ebene E senkrecht stehender Vektor \vec{n} .

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$$

Parameterdarstellung

$$E: \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$$

P: Aufpunkt

$\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$; $\vec{b} = \overrightarrow{PR}$ = Richtungsvektoren

Koordinatendarstellung

$$E: ax + by + cz + d = 0$$

Parameterdarstellung zu Koordinatendarstellung

$$E: \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{2} \text{ Koordinatendarstellung } E: -14x + 6y - 4z + d = 0$$

$$\textcircled{3} \text{ Aufpunkt einsetzen: } \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E: -14 \cdot 2 + 6 \cdot 4 - 4 \cdot 1 + d = 0$$

$$\textcircled{4} d \text{ ausrechnen: } E: -14 \cdot 2 + 6 \cdot 4 - 4 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = 8$$

$$\textcircled{5} E: -14x + 6y - 4z + 8 = 0$$
$$\Rightarrow \frac{-14x + 6y - 4z + 8 = 0}{2} \Rightarrow E: -7x + 3y - 2z + 4 = 0$$

Koordinatendarstellung zu Parameterdarstellung

Wir bestimmen drei beliebige Punkte auf E , indem wir die x - und y -Koordinaten frei wählen und die zugehörigen z -Koordinaten aus der Koordinatendarstellung von E berechnen. Aus diesen drei Punkten können wir dann eine Parameterdarstellung von E gewinnen.

$$E: 2x + 7y - 4z + 1 = 0$$

$$\begin{aligned} x=0, y=0 & \quad -4z+1=0 \Rightarrow z=1/4 \Rightarrow P=(0;0;1/4) \\ x=1, y=0 & \quad 2-4z+1=0 \Rightarrow z=3/4 \Rightarrow Q=(1;0;3/4) \\ x=0, y=1 & \quad 7-4z+1=0 \Rightarrow z=2 \Rightarrow R=(0;1;2) \end{aligned}$$

$$\text{Eine mögliche Parameterdarstellung der Ebene } E: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7/4 \end{pmatrix}$$

Abstand Punkt zu Ebene

$$\text{Abstand } l = \frac{|ax_A + bx_A + cz_A + d|}{|\vec{n}|}$$

$$\text{Ebene } E: 3x - 6y - 2z + 67 = 0$$

$$\text{Punkt } A = (3, -4, 1)$$

$$\textcircled{1} \vec{n} \text{ bestimmen: } \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \sqrt{3^2 + (-6)^2 + (-2)^2} = 7$$

$$\textcircled{2} l = \frac{(3 \cdot 3) - (6 \cdot (-4)) - (2 \cdot 1)}{7} = 14$$

Spezielle Lagen von Ebenen

TBD

normierte Koordinatendarstellung der Ebene

$$E: 2x + 7y - 4z + 1 = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad |\vec{n}| = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 3^2} = \sqrt{49} = 7$$

normierte Koordinatendarstellung der Ebene

$$E: \frac{2}{7} \cdot x - \frac{6}{7} \cdot y + \frac{3}{7} \cdot z + \frac{1}{7} = 0$$

Linearen Gleichungssysteme

Rang

Matrix muss in Zeilenstufenform sein.

$\text{rg}(A)$ = Gesamtanzahl Zeilen - Anzahl Nullzeilen.

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{matrix} \text{rang}(A) = 2 \\ \text{rang}(A|b) = 2 \end{matrix}$$

A

Lösbarkeit von LGS

n = Anzahl Spalten

Das LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$ ist genau dann lösbar, wenn $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|\vec{c})$.

Es hat genau eine Lösung, falls zusätzlich gilt: $\text{rg}(A) = n$.

Es hat unendlich viele Lösungen, falls zusätzlich gilt: $\text{rg}(A) < n$.

Matrizen

Begriffe

Quadratische Matrix: gleich viele Zeilen und Spalten

Hauptdiagonale: Die Diagonale von links oben nach rechts unten

Untere- und obere Dreiecksmatrix

Beispiel	(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$	(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
Beschreibung	unter der Hauptdiag. alles Null.	oben der Hauptdiag. alles Null.
Bezeichnung	Ober Dreiecksmatrix U = Upper	Untere Dreiecksmatrix L = Lower

Symmetrische Matrix: symmetrisch bzgl. Hauptdiagonale

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplikation / Rechenregeln

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -9 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A, B, C &\in \mathbb{R}^{m \times n} \wedge \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ A + (B + C) &= (A + B) + C \\ A + B &= B + A \\ A + 0 &= A \\ A - A &= 0 \text{ (Nullmatrix)} \end{aligned}$$

Transponieren

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln:

$$(A^T)^T = A$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Gilt $A = A^T$, so heißt die Matrix A symmetrisch.

Gilt $A = -A^T$, so heißt die Matrix A antisymmetrisch.

Inverse

Matrix muss quadratisch sein: $n \times n \rightarrow 2 \times 2, 3 \times 3$

2x2

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Die 2×2 -Matrix hat genau dann ein Inverse wenn $ad - bc \neq 0$

3x3 und grösser

→ Gauss - Jordan

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} :2 \\ \\ \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} :2 \\ \leftarrow \cdot (-3) \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot (-2/3) \\ \leftarrow \cdot (-2) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & -2 & 4/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot 3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \cdot (-1/3) \\ \leftarrow \cdot (-1/3) \\ \leftarrow \cdot (-1/2) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 7/2 & -2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \cdot (-1/2) \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Determinante

2x2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

3x3 Regel von Sarrus

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - g \cdot e \cdot c - h \cdot f \cdot a - i \cdot d \cdot b.$$

Laplacescher Entwicklungssatz (>3x3)

Vorzeichen:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \\ - & + & - \end{vmatrix}$$

Entwickeln nach derjenigen Zeile oder Spalte, in der die meisten Nullen stehen (hier gelb)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow 2 \cdot \det \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & -2 \\ 6 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Wichtig: häufig sind die entwickelten identisch! → Aufwand sparen!

$$A = \begin{bmatrix} \underline{a_{00}} & \underline{a_{01}} & \underline{a_{02}} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Entwickeln nach 1er

$$\begin{aligned} \det(A) &= +a_{00} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \underline{a_{01}} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{10} & a_{12} \\ a_{20} & a_{22} \end{bmatrix} + \underline{a_{02}} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{10} & a_{11} \\ a_{20} & a_{21} \end{bmatrix} \\ &= +a_{00}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) - a_{01}(a_{10}a_{22} - a_{12}a_{20}) + a_{02}(a_{10}a_{21} - a_{11}a_{20}) \\ &= +a_{00}a_{11}a_{22} + a_{01}a_{12}a_{20} + a_{02}a_{10}a_{21} - a_{00}a_{12}a_{21} - a_{01}a_{10}a_{22} - a_{02}a_{11}a_{20} \end{aligned}$$

det Dreiecksmatrix = Produkt der Hauptdiagonale

Rechenregeln

- (1) Für die Einheitsmatrix E gilt: $\det(E) = 1$
- (2) Für jede $n \times n$ -Dreiecksmatrix U gilt: $\det(U) = u_{11} \cdot u_{22} \cdot \dots \cdot u_{nn}$
- (3) Für jede quadratische Matrix A gilt: $\det(A^T) = \det(A)$
- (4) Für alle $n \times n$ -Matrizen A und B gilt: $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- (5) Für jede invertierbare Matrix A gilt: $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- (6) Für jede $n \times n$ -Matrix A und jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt: $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$

$$2 \times 2 \rightarrow \det(5 \cdot A) = 5^2 \cdot \det(A)$$

$$3 \times 3 \rightarrow \det(5 \cdot A) = 5^3 \cdot \det(A)$$

Geometrische Interpretation der Determinante

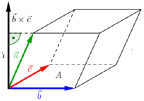
2x2

Fläche von \vec{a} und \vec{b} = Betrag von $\det \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$



3x3

Volumen von \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} = Betrag von $\det \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$



Linearen Gleichungssysteme

Rang

Matrix muss in Zeilenstufenform sein.

$\text{rg}(A)$ = Gesamtanzahl Zeilen - Anzahl Nullzeilen .

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{matrix} \text{rang}(A) = 2 \\ \text{rang}(A|b) = 2 \end{matrix}$$

A

Lösbarkeit von LGS

Das LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$ ist genau dann lösbar, wenn $\text{rg}(A) = \text{rg}(A | \vec{c})$.

Es hat genau eine Lösung, falls zusätzlich gilt: $\text{rg}(A) = n$.

Es hat unendlich viele Lösungen, falls zusätzlich gilt: $\text{rg}(A) < n$.

Freie Variable

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

freie Variable λ_3

Lösungsmenge: λ_3 = kann beliebig gewählt werden, ∞ -viele Lösungen.

Vektorräume

Unterräume

Eine Teilmenge U eines Vektorraums V heisst Unterraum von V wenn U selber auch ein Vektorraum ist.

Unterraumkriterien

- (1) Für beliebige Elemente $\vec{a}, \vec{b} \in U$ ist $\vec{a} + \vec{b} \in U$.
- (2) Für jeden Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ und jeden Vektor $\vec{a} \in U$ ist $\lambda \cdot \vec{a} \in U$.

Unterraumkriterien überprüfen

(a) Ja, Vektorraum

$$1. \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & b_1 + b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in M_1$$

$$2. \lambda \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a & 0 \\ 0 & \lambda \cdot b \end{pmatrix} \in M_1$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} \text{ Nein} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 2 \\ 2 & b_1 + b_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

Nullvektorraum