

Случайные процессы

18 января 2014 г.

Содержание

I	Случайные процессы	2
1	Терминология	2
2	Примеры	3
1	Случайное блуждание на прямой	3
1	Вопросы	4
2	Возвращение в ноль	4
3	Среднее время нахождения в нуле	5
4	Свойства траекторий	7
2	Ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона	7
1	Производящие функции	7
2	Вероятность вырождения процесса	8
3	Конечномерные распределения случайных процессов	10
4	Процессы с независимыми приращениями	12
5	Гауссовские случайные процессы	13
1	Процесс броуновского движения (винеровский процесс)	14
2	Непрерывность траекторий винеровского процесса	15
6	Фильтрации и марковские моменты	17

Введение. Историческая справка

Теория вероятностей: математический анализ случайных явлений.

Теория случайных процессов: стохастические модели и фактор времени.

Предпосылки к изучению

- 1827, Р. Броун – броуновское движение частиц в воде \Rightarrow процесс броуновского движения
- 1903, Л. Башелье – колебания курсов бумаг на бирже \Rightarrow процесс броуновского движения
- 1906, А.А. Марков – анализ комбинаций гласных и согласных в романе «Евгений Онегин» \Rightarrow марковские цепи
- 1903, Ф. Лундберг – модель деятельности страховой компании \Rightarrow пуассоновский процесс
- 1873, Ф. Гальтон, Г. Ватсон – анализ вымирания аристократических фамилий в Великобритании \Rightarrow ветвящиеся процессы
- Начало XX века, А. Эрланг – изучение загрузки телефонных сетей \Rightarrow теория массового обслуживания

Применения

- Физика (стохастическое исчисление, теория гиббсовских полей)
- Экономика (финансовая математика)
- Биология

Часть I

Случайные процессы

Общие определения

Определение 0.1. Пусть (Ω, F, P) – вероятностное пространство, а (E, \mathcal{E}) – измеримое пространство. Отображение $\xi : \Omega \rightarrow E$ называется *случайным элементом*, если оно измеримо, т.е.

$$\forall B \in \mathcal{E} \quad \xi^{-1}(B) = \{\omega : \xi(\omega) \in B\} \in F$$

Определение 0.2. Пусть T – некоторое множество и на (Ω, F, P) для $\forall t \in T$ задан случайный элемент X_t . Тогда набор $X = X_t, t \in T$ называется *случайной функцией* на множестве T .

Замечание. Вообще говоря, не предполагается, что все X_t принимают значения в одном и том же пространстве.

Определение 0.3. Пусть $X = (X(t, \omega))$. При фиксированном $\omega = \omega_0$ функция

$$\tilde{X}_{\omega_0}(t) = X_t(\omega)|_{\omega=\omega_0}$$

на T называется *траекторией* или *реализацией* случайной функции $X = \{X_t : t \in T\}$.

1 Терминология

- Если $T \subset \mathbb{R}$, то случайная функция называется случайным процессом.
- Если $T = [a, b], (a, b), [a, +\infty)$ и т.д., то процесс X называется процессом с непрерывным временем.
- Если $T = \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ и т.д. то процесс X называется процессом с дискретным временем.
- Если $T \subset \mathbb{R}^d$, то процесс X называется случайным полем.

Замечание. Далее всюду будем использовать термин «случайный процесс».

2 Примеры

1. $X_t(\omega) = \xi(\omega) \cdot f(t)$, где $\xi(\omega)$ – с.в., $f(t)$ – детерминированная функция.
2. Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ – независимые случайные векторы, $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, $S_0 = 0$. Тогда процесс с дискретным временем $\{S_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ называется случайным блужданием.
Траектория: см. рис. 1
3. Пусть $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ – норсв, $\xi_n \geq 0$, $\xi_n \neq \text{const}$ п.н., $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, $S_0 = 0$. Тогда процесс

$$X_t = \sup\{n : S_n \leq t\}, t \geq 0$$

называется процессом восстановления.

Траектория: см. рис. 2

Утверждение. Процесс восстановления конечен почти наверное.

Доказательство. Пусть сначала $E\xi_i = a > 0$.

Заметим, что $\{S_k \leq t\} \supset \{S_{k+1} \leq t\}$.

$\{X_t = +\infty\} = \{\sup\{n : S_n \leq t\} = +\infty\} = \{\forall n : S_n \leq t\} = \bigcap_n \{S_n \leq t\} \Rightarrow$ по непрерывности вероятностной меры $\Rightarrow P(X_t = +\infty) = P(\forall n S_n \leq t) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n \leq t) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\frac{S_n}{n} \leq \frac{t}{n}) \leq$ для больших $n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P(\frac{S_n}{n} < \frac{a}{2})$.

Но по УЗБЧ $S_n \rightarrow a \Rightarrow P(S_n \leq a/2) \rightarrow P(a \leq a/2) = 0$.

В силу того, что $X_t \uparrow$ при $t \uparrow$, $P(\exists t : X_t = +\infty) = P(\exists n : x_n = +\infty) \leq \sum_n P(x_n = \infty) = 0$.

Если $E\xi_i = +\infty$, то случай сводится к предыдущему: $\exists C > 0 : \tilde{\xi}_n = \min(\xi_n, C)$, $E\tilde{\xi}_n > 0$. Тогда $P(X_t = +\infty) = P(\forall n S_n \leq t) \leq P(\tilde{S}_n \leq t) = 0$ (доказали в случае конечного матожидания). \square

Откуда может возникнуть процесс восстановления? Физическая модель – «Модель перегорания лампочки». ξ_n – случайная величина, равная времени работы лампочки, X_t – сколько раз пришлось заменить лампочку к моменту времени t .

4. Модель страхования Крамера-Лундберга

Пусть есть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}, \{\eta_m, m \in \mathbb{N}\}, \xi_n \stackrel{d}{=} \xi_m, \eta_n \stackrel{d}{=} \eta_m, \{\xi_n, \eta_m\}$ независимы, $\xi_n, \eta_m \geq 0$, ξ_n невырождены.

Пусть $\{X_t, t \geq 0\}$ – процесс восстановления, построенный по случайным величинам $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}, y_0, c > 0$. Тогда $Y_t = y_0 + c \cdot t - \sum_{k=1}^{X_t} \eta_k$ – модель страхования Крамера-Лундберга.

Смысл параметров

- y_0 – начальный капитал
- c – скорость поступления страховых взносов
- $S_k = \xi_1 + \dots + \xi_k$ – время k -й выплаты, η_k – размер этой выплаты
- X_t – число выплат к моменту времени $t > 0$
- $\sum_{k=1}^{X_t} \eta_k$ – общий размер выплат к этому моменту времени
- Y_t – текущий капитал компании

1 Случайное блуждание на прямой

Определение 1.1. Пусть $\xi_n, n \in \mathbb{N}$ – норсв, $P(\xi_n = 1) = p$, $P(\xi_n = -1) = q = 1 - p$. Тогда процесс $(S_n, n \in \mathbb{Z}_+), S_0 = 0, S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ называется *простейшим случайным блужданием на прямой*. Если $p = q = \frac{1}{2}$, то блуждание называется *симметричным*.

1 Вопросы

1. вероятность возвращения в ноль
2. распределение первого момента возвращения в ноль
3. среднее время в нуле
4. геометрия траектории

Замечание. Последние два вопроса – только для симметричного случая.

2 Возвращение в ноль

$P(\{S_n, n \in \mathbb{N}\} \text{ вернется в ноль}) - ?$

$P(s_1 \neq 0, s_2 \neq 0, \dots, s_{2n-1} \neq 0, s_{2n} = 0) - ?$

Вероятность каждой траектории, приводящей в 0 в момент времени $2n$, одна и та же и равна $(pq)^n$. Каждую траекторию длины $2n$ можно сопоставить с вектором $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n}\}, \varepsilon_i \in \{-1, 1\}$.

Определение 1.2. Траектория $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n})$ длины $2n$ называется *положительной*, если $\forall k < 2n \sum_{j=1}^k \varepsilon_j > 0$ и $\sum_{j=1}^{2n} \varepsilon_j = 0$. Число таких траекторий обозначим через \tilde{C}_n .

Утверждение. *Наблюдение:* $P(S_1 \neq 0, \dots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} = 0) = 2 \cdot \tilde{C}_n \cdot (pq)^n$.

Определение 1.3. Траектория $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n})$ длины $2n$ называется *неотрицательной*, если $\forall k < 2n \sum_{j=1}^k \varepsilon_j \geq 0$ и $\sum_{j=1}^{2n} \varepsilon_j = 0$. Число таких траекторий обозначим через C_n .

Утверждение. $\tilde{C}_n = C_{n-1}$.

Доказательство. Смотри рисунок 3.

Чтобы получить из положительной траектории неотрицательную, покажем, что в начале стоит 1, в конце –1. Чтобы получить из неотрицательной положительную, добавим в начало 1, а в конец –1. Получили биекцию между положительными траекториями длины $2n$ и неотрицательными длины $2n-2$. \square

Утверждение. Пусть $C_0 = 1$. Тогда $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \cdot C_{n-1-k}$.

Доказательство. Смотри рисунок 4.

Пусть $2k$ – первый момент возвращения траектории в ноль. Ясно, что таких траекторий $\tilde{C}_k \cdot C_{n-k}$. Суммируя по $k = 1 \dots n$:

$$C_n = \sum_{k=1}^n \tilde{C}_k \cdot C_{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \cdot C_{n-k-1}$$

\square

Вывод: C_n – это числа Каталана. $C_n = \frac{1}{n+1} \cdot C_{2n}^n$.

Производящая функция: $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n = \frac{1}{2t}(1 - \sqrt{1-4t}), |t| \leq \frac{1}{4}$.

Теорема 1.1 (распределение момента возвращения в ноль).

$$P(S_1 \neq 0, \dots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} = 0) = \frac{1}{2n-1} C_{2n}^n (pq)^n$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
P(S_1 \neq 0, \dots, S_{2n-1} \neq 0, s_{2n} = 0) &= \\
2\tilde{C}_n(pq)^n &= | \text{утв.1} | = \\
2C_{n-1}(pq)^n &= \\
\frac{2}{n}C_{2n-2n-1}(pq)^n &= \\
\frac{2n}{n \cdot n}C_{2n-2}^{n-1}(pq)^n &= \\
\frac{1}{2n-1}C_{2n}^n(pq)^n.
\end{aligned}$$

□

Теорема 1.2 (вероятность возвращения в ноль).

$$P(\{S_n, n \geq 1\} \text{вернется в ноль}) = 1 - |p - q|$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
P(\{S_n, n \geq 1\} \text{вернется в } 0) &= \\
\sum_{n=1}^{\infty} P(S_1 \neq 0, \dots, S_{2n} = 0) &= \\
\sum_{n=1}^{\infty} 2\tilde{C}_N(pq)^n &= \\
\sum_{n=1}^{\infty} 2C_{n-1}(pq)^n &= \\
\sum_{n=0}^{\infty} 2C_n(pq)^{n-1} &= \\
2pq \cdot f(pq) &= \\
2pq * \frac{1}{2pq}(1 - \sqrt{1 - 4pq}) &= | \text{т.к. } (p + q)^2 = 1 | = \\
1 - \sqrt{(p - q)^2} &= 1 - |p - q|
\end{aligned}$$

□

Следствие 1.1. Симметричное случайное блуждание на прямой возвратно с вероятностью 1.

3 Среднее время нахождения в нуле

Пусть $(S_n, n \in \mathbb{N})$ – простейшее симметричное случайное блуждание на прямой. Обозначим через $L_n(0)$ число нулей в последовательности $S_k, k = 0 \dots n$. Вопрос: $EL_n(0) \sim ?$

Лемма 1.1.

$$EL_n(0) = E|S_{n+1}|$$

Доказательство. Рассмотрим $|S_{n+1}|$.

$$|S_{n+1}| = |S_n + \xi_{n+1}| = \begin{cases} S_n + \xi_{n+1}, & S_n > 0 \\ 1, & S_n = 0 \\ -(S_n + \xi_{n+1}), & S_n < 0 \end{cases}$$

$$|S_{n+1}| = (S_n + \xi_{n+1})I\{S_n > 0\} + I\{S_n = 0\} - (S_n + \xi_{n+1})I\{S_n < 0\} = I\{S_n = 0\} + (S_n + \xi_{n+1}) \text{sign}(S_n)$$

$$\begin{aligned}
\text{Отсюда } |S_{n+1}| &= I\{S_n = 0\} + |S_n| + \xi_{n+1} \text{sign}(S_n) = |\text{индукция}| = \sum_{k=0}^n (I\{S_k = 0\} + \xi_{k+1} \text{sign}(S_k)) = L_n(0) + \\
&\sum_{k=0}^n \xi_{k+1} \text{sign}(S_k).
\end{aligned}$$

Берем матожидание у обеих частей равенства: $E|S_{n+1}| = EL_n(0) + \sum_{k=0}^n E(\xi_{k+1} \text{sign}(S_k)) = EL_n(0) + \sum_{k=0}^n E\xi_{k+1}E \text{sign}(S_k) = EL_n(0)$. \square

Согласно ЦПТ, $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \eta \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

По теореме о наследовании сходимости $\frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} |\eta| \sim |\mathcal{N}(0, 1)|$.

Вопрос: верно ли данное?

$$E \frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \rightarrow E|\eta| = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |x| e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Определение 1.4. Множество случайных величин $\{\xi_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ называется *равномерно интегрируемым*, если

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} E(|\xi_\alpha| \mathbf{I}\{|\xi_\alpha| \geq c\}) = 0$$

Смысл: «хвосты» распределения равномерно малы.

Теорема 1.3 (б/д). Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ – с.в., $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$. Тогда

$$E\xi_n \rightarrow E\xi \Leftrightarrow \{\xi_n, n \in \mathbb{N}\} \text{ равномерно интегрируемо}$$

Замечание. Если сходимость \xrightarrow{p} или $\xrightarrow{п.н.}$, то равномерная интегрируемость $\Leftrightarrow \xi_n \xrightarrow{L_1} \xi$.

Теорема 1.4 (достаточное условие равномерной интегрируемости). Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ – с.в., $G(t) \geq 0 : \frac{G(t)}{t} \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$. Если $\sup_n EG(|\xi_n|) < +\infty$, то последовательность равномерно интегрируема.

Доказательство. Положим $M = \sup_n EG(|\xi_n|)$. $\forall \varepsilon > 0$ положим $a = \frac{M}{\varepsilon}$. Возьмем $c > 0 : \frac{G(t)}{t} > a \forall t > c$. Тогда $\forall t > c, \forall n \in \mathbb{N}$

$$E(|\xi_n| \mathbf{I}\{|\xi_n| \geq t\}) \leq E\left(\frac{G(|\xi_n|)}{a} \mathbf{I}\{|\xi_n| \geq t\}\right) \leq E\frac{G(|\xi_n|)}{a} \leq \frac{M}{a} = \varepsilon$$

$\Leftrightarrow \{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ равномерно интегрируема. \square

Теорема 1.5 (среднее время в нуле).

$$EL_n(0) \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$$

Доказательство. Согласно лемме, $EL_n(0) = E|S_{n+1}|$. Покажем, что $\{\xi_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}\}$ равномерно интегрируема. Подберем соответствующую функцию G . Попробуем $G(t) = t^2$.

$$EG(|\xi_n|) = E\xi_n^2 = \frac{(E\xi_n^2)}{n} = \frac{DS_n}{n} = \frac{\sum_{k=1}^n D\xi_k}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

Согласно достаточному условию, получили, что последовательность $\frac{|S_n|}{\sqrt{n}}$ равномерно интегрируема. Тогда по теореме

$$\frac{E|S_n|}{\sqrt{n}} \rightarrow E\eta = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\eta \sim \mathcal{N}(0, 1))$$

Отсюда

$$EL_n(0) = E|S_{n+1}| \sim \sqrt{\frac{2(n+1)}{\pi}} \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$$

\square

4 Свойства траекторий

Теорема 1.6 (закон повторного логарифма, б/д).

$$P\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n \ln \ln n}} = 1\right) = 1$$

Следствие 1.2.

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n \ln \ln n}} = -1\right) = -1$$

Доказательство. Рассмотрим $X_n = -S_n$ – симметричное случайное блуждание \Leftrightarrow по ЗПЛ получаем, что

$$\text{п.н. } 1 = \overline{\lim}_n \frac{X_n}{\sqrt{2n \ln \ln n}} = -\lim_n \frac{S_n}{\sqrt{2n \ln \ln n}}$$

□

Смысл: — рис.5 —

ЗПЛ означает, что с вероятностью 1 траектория случайного блуждания начиная с некоторого момента лежит внутри между кривыми $\pm(1 + \varepsilon)\sqrt{2n \ln \ln n}$ и в то же время бесконечно много раз выходит в обе стороны из области, ограниченной кривыми $\pm(1 - \varepsilon)\sqrt{2n \ln \ln n}$.

2 Ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона

Физическая модель: — рис.6 — В каждый следующий момент времени каждая частица распадается на некоторое случайное число таких же частиц.

Мат. модель: Пусть ξ – случайная величина со значениями в \mathbb{Z}_+ . $\{\xi_k^{(n)}, k, n \in \mathbb{N}\}$ – независимые случайные величины с тем же распределением, что и ξ . Положим

$$X_0 = 1, X_1 = \xi_1^{(1)}, X_n = \sum_{k=1}^{X_{n-1}} \xi_k^{(n)}$$

Определение 2.1. $\{X_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ – ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона, построенный по с.в. ξ .

- X_n – число частиц в n -м поколении
- $\xi_k^{(n)}$ – число потомков k -й частицы в $n - 1$ -м поколении

Вопрос: какова вероятность вырождения процесса?

1 Производящие функции

Определение 2.2. Пусть ξ – случайная величина. Тогда ее *производящей функцией* называется

$$\varphi_\xi(z) = Ez^\xi, z \in \mathbb{R}$$

Свойства производящих функций

1. $\varphi_\xi(1) = 1$
2. $\varphi'_\xi(1) = E\xi$
3. Если ξ и η независимы, то $\varphi_{\xi+\eta}(z) = \varphi_\xi(z)\varphi_\eta(z)$

Если ξ принимает значения в \mathbb{Z}_+ , то введем $p_k = P(\xi = k), k \in \mathbb{Z}_+$.

$$4. \varphi_\xi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k$$

5. $\varphi_\xi(0) = p_0$
6. Ряд для $\varphi_\xi(z)$ сходится абсолютно и равномерно в области $\{|z| \leq 1\}$
7. $\varphi_\xi(z)$ непрерывно дифференцируема бесконечное число раз в области $\{|z| < 1\}$
8. $p_k = \frac{1}{k!} \left(\frac{d^k}{dz^k} \varphi_\xi(z) \right) \Big|_{z=0}$

Пусть далее $\{X_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ – ветвящийся процесс Г.-В., построенный по ξ .

Лемма 2.1.

$$\varphi_{X_{n+1}}(z) = \varphi_{X_n}(\varphi_\xi(z))$$

Доказательство. $\varphi_{X_{n+1}}(z) = Ez^{X_{n+1}}$

$$E(z^{X_{n+1}} | X_n = m) = E\left(z^{\sum_{k=1}^{X_n} \xi_k^{(n+1)}} \Big| X_n = m\right) = E\left(z^{\sum_{k=1}^m \xi_k^{(n+1)}} \Big| X_n = m\right) = Ez^{\sum_{k=1}^m \xi_k^{(n+1)}} = (\varphi_\xi(z))^m$$

Значит,

$$\varphi_{X_{n+1}} = Ez^{X_{n+1}} = E(E(z^{X_{n+1}} | X_n)) = E(\varphi_\xi(z))^m \Big|_{m=X_n} = \varphi_{X_n}(\varphi_\xi(z))$$

□

Следствие 2.1.

$$1. \varphi_{X_n}(z) = \underbrace{\varphi_\xi(\varphi_\xi(\dots \varphi_\xi(z) \dots))}_{n \text{ раз}}$$

$$2. \varphi_{X_{n+1}}(z) = \varphi_\xi(\varphi_{X_n}(z))$$

Доказательство. Применяем индуктивно лемму 2.1:

$$\varphi_{X_{n+1}} = \underbrace{\varphi_\xi(\varphi_\xi(\dots \varphi_\xi(z) \dots))}_{n+1 \text{ раз}} = \varphi_\xi(\varphi_{X_n}(z))$$

□

2 Вероятность вырождения процесса

Положим $q_n = P(X_n = 0)$, $q = P(\text{процесс выродился}) = P(\exists n : X_n = 0)$

Лемма 2.2.

$$q_n \leq q_{n+1} \text{ и } q = \lim_n q_n$$

Доказательство. $\{X_n = 0\} \subset \{X_{n+1} = 0\} \Rightarrow q_n \leq q_{n+1}$

Но $P(\exists n : X_n = 0) = P\left(\bigcup_n \{X_n = 0\}\right) = |\text{по непрерывности вероятностной меры}| = \lim_n P(X_n = 0) = \lim_n q_n$. □

Лемма 2.3. Вероятность вырождения q является решением уравнения

$$s = \varphi_\xi(s)$$

Доказательство.

$$q \leftarrow q_n = P(X_n = 0) = \varphi_{X_n}(0) = \varphi_\xi(\varphi_{X_{n-1}}(0)) = \varphi_\xi(q_{n-1}) \rightarrow \varphi_\xi(q)$$

□

Вопрос: что делать, если на $[0, 1]$ решений несколько?

Всегда есть решение $s = 1$.

Теорема 2.1 (о вероятности вырождения). Пусть $\xi \neq 1$ п.н. Пусть $\mu = E\xi$ (м.б. $\mu = +\infty$). Тогда

1. Если $\mu \leq 1$, то уравнение

$$s = \varphi_\xi(s)$$

имеет только одно решение $s = 1$ на $[0, 1]$. Тогда $q = 1$.

2. Если $\mu > 1$, то уравнение

$$s = \varphi_\xi(s)$$

имеет единственное решение $s_0 \in [0, 1)$. В этом случае $q = s_0$.

Доказательство.

1. Рассмотрим производную $\varphi'_\xi(s) = \sum_{k=1}^{\infty} ks^{k-1}P(\xi = k)$ для $s \in [0, 1]$. Заметим, что эта функция строго возрастает (поскольку каждое слагаемое строго возрастает) и положительна (поскольку есть хотя одна ненулевая вероятность). Действительно, если $\varphi_\xi(s) = 0$ для $s > 0 \Rightarrow P(\xi = k) = 0 \forall k \geq 1$. Но тогда $P(\xi = 0) = 1$ и $q = 1$.

Далее считаем производную положительной.

Для $s \in (0, 1)$:

$$1 - \varphi_\xi(s) = \varphi'_\xi(\theta)(1 - s)$$

где $\theta = \theta(s) \in (s, 1)$ Но $\varphi'_\xi(\theta) < \varphi'_\xi(1) = \mu = 1$, т.к. производная строго возрастает.

$$\Rightarrow 1 - \varphi_\xi(s) < 1 - s \text{ при } s \in [0, 1) \Rightarrow s < \varphi_\xi(s)$$

Решений, отличных от 1, нет.

График в этом случае выглядит так: — рис.7 —

2. Рассмотрим

$$\varphi''_\xi(s) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)s^{k-2}P(\xi = k) \text{ для } s \in [0, 1)$$

Функция строго возрастает и положительна на $(0, 1)$.

Действительно, если вдруг $\varphi''_\xi(s) = 0 \Rightarrow \forall k \geq 2 P(\xi = k) = 0 \Rightarrow \xi < 1$ п.н. $\Rightarrow E\xi = \mu \leq 1$, что противоречит условию.

Теперь считаем, что $\varphi'_\xi(s)$ строго возрастает на $[0, 1)$.

$$\Rightarrow 1 - \varphi'_\xi(s) \text{ меняет знак на } [0, 1) \text{ не более одного раза}$$

$$1 - \varphi'_\xi(0) = 1 - P(\xi = 1) > 0$$

$$1 - \varphi'_\xi(1) = 1 - \mu < 0$$

$$\Rightarrow 1 - \varphi'_\xi(s) \text{ меняет знак ровно один раз}$$

График выглядит так: — рис.8 —

Пусть $\varphi'_\xi(s_1) = 1$. Что можно сказать про $s - \varphi_\xi(s)$? При $s < s_1$ возрастает, при $s > s_1$ возрастает.

Если $\varphi_\xi(0) = P(\xi = 0) = 0$, то $s - \varphi_\xi(s)|_{s=0} = 0$ — рис.9 —, то есть ровно один корень $s = 0 \in [0, 1)$.

Ясно, что в этом случае $\boxed{q = 0}$.

Если $\varphi_\xi(0) > 0$, то $s - \varphi_\xi(s)|_{s=0} < 0 \Rightarrow \exists s_0$ — единственное решение уравнения на $[0, 1)$

Заметим, что при $s < s_0$ $s < \varphi_\xi(s)$, а при $s > s_0$ $s > \varphi_\xi(s)$.

Но $q_n = \varphi_\xi(q_{n-1}) \leq |\text{т.к. } q_n \geq q_{n-1}| \leq \varphi_\xi(q_n) \Rightarrow q_n \notin (s_0, 1)$.

Если $q_n = 1$, то $q_{n-1} = 1$, т.к. $\varphi_\xi(s) = 1 \Leftrightarrow s = 1$. По индукции получаем, что $q_0 = 1$. Но $q_0 = 0$, т.к. в нулевой момент времени всегда есть одна частица. Значит, $q \in [0, s_0]$ как предел $q_n \Rightarrow q = s_0$.

График: — рис 11 —

□

Вывод: вероятность вырождения – это наименьший корень уравнения $s = \varphi_\xi(s)$ из отрезка $[0, 1]$.

Интерпретация: если среднее число потомков меньше 1, то процесс обречен на вымирание. Иначе есть ненулевая вероятность того, что мы будем живы до бесконечности.

3 Конечномерные распределения случайных процессов

Пусть $(X_t, t \in T)$ – случайный процесс на (Ω, F, P) , и X_t принимает значения в (S_t, \mathcal{B}_t) .

Определение 3.1. Множество $S = \prod_{t \in T} S_t$ называется *пространством траекторий случайного процесса*.

$$S = \{y = (y(t), t \in T) : \forall t \in T y(t) \in S_t\}$$

Определение 3.2. Для $\forall t \in T$ и $B_t \in \mathcal{B}_t$ введем *элементарный цилиндр* с основанием B_t :

$$C(t, B_t) = \{y \in S : y(t) \in B_t\}$$

Смысл: это все траектории, проходящие через B_t в момент времени t . — рис.12 —

Определение 3.3. Минимальная σ -алгебра \mathcal{B}_T , содержащая все эти элементарные цилиндры, называется *цилиндрической σ -алгеброй* на S .

$$\mathcal{B}_T = \sigma\{C(t, B_t) : t \in T, B_t \in \mathcal{B}_t\}$$

(S, \mathcal{B}_T) – измеримое пространство.

Лемма 3.1. $X = (X_t, t \in T)$ является случайным процессом $\Leftrightarrow X : \Omega \rightarrow S$ является измеримым относительно цилиндрической σ -алгебры \mathcal{B}_T .

$$\left| \begin{array}{l} \text{Напоминание} \text{ Критерий измеримости отображения} \\ X : \Omega \rightarrow E, \mathcal{M} \subset \mathcal{E} \text{ т.ч. } \sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{E}. \text{ Тогда } X - \text{с.в.} \Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{M} X^{-1}(B) \in \mathcal{F} \end{array} \right|$$

Доказательство. (\Rightarrow) Для $\forall t X_t$ – случайный элемент со значениями в (S_t, \mathcal{B}_t) . Рассмотрим \mathcal{M} – система элементарных цилиндров в \mathcal{B}_T . По определению $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{B}_T$.

$\forall C(t, B_t) \in \mathcal{M}$ получаем

$$X^{-1}(C(t, B_t)) = \{\omega : X(\omega) \in C(t, B_t)\} = \{\omega : X_t(\omega) \in B_t\} = X_t^{-1}(B_t) \in \mathcal{F}$$

т.к. X_t – случайный элемент.

(\Leftarrow) По критерию измеримости отображения

$$\forall B \in \mathcal{B}_T X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$$

□

Замечание. Лемма устанавливает эквивалентное определение случайного процесса как единого случайного элемента со значениями в пространстве траекторий.

Определение 3.4. *Распределением* P_X случайного процесса $X = (X_t, t \in T)$ называется вероятностная мера на (S, \mathcal{B}_T) т.ч. $\forall B \in \mathcal{B}_T P_X(B) = P(X \in B)$.

Это определение удобно только в том случае, когда «время» конечно. Для счетного (или тем более континуального) «времени» это определение очень трудно для понимания.

Определение 3.5. Пусть $X = (X_t, t \in T)$ – случайный процесс, $\forall n \in \mathbb{N} \forall t_1, \dots, t_n \in T$ пусть P_{t_1, \dots, t_n} обозначает распределение вектора $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$. Тогда набор вероятностных мер $\{P_{t_1, \dots, t_n} : n \in \mathbb{N}, t_i \in T\}$ называется *набором конечномерных распределений* случайного процесса X , а сами P_{t_1, \dots, t_n} называются конечномерными распределениями X .

| Напоминание: $P_{..}$ – вер.мера на $(S_{t_1} \times \dots \times S_{t_n}, \mathcal{B}_{t_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{B}_{t_n})$, определенная по правилу –2–.

Лемма 3.2. Пусть X и Y – случайные процессы с одинаковым временем, имеющие одно и то же пространство траекторий. Тогда $P_X = P_Y \Leftrightarrow$ совпадают их конечномерные распределения.

Напоминание:

Единственность продолжения меры

Пусть (E, \mathcal{E}) – измеримое пространство, P, Q – две вероятностные меры на нем. Пусть $\mathcal{M} \subset \mathcal{E}$ – π -система и $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{E}$. Тогда

$$P|_{\mathcal{M}} = Q|_{\mathcal{M}} \Leftrightarrow P|_{\mathcal{E}} = Q|_{\mathcal{E}}$$

Доказательство. Рассмотрим цилиндры (не элементарные!) в S :

$\forall b \forall t_1 \dots t_n \in T \forall B_{t_1}, \dots, B_{t_n}, B_{t_i} \in \mathcal{B}_{t_i}$ определим $C(t_1, \dots, t_n, B_{t_1}, \dots, B_{t_n}) = \{y \in S : y(t_i) \in B_{t_i} \forall i = 1..n\}$

Это пересечения каких-то элементарных цилиндров. Фактически, мы фиксируем значение случайного процесса в нескольких моментах времени, а не только в одном, как это делалось в случае элементарного цилиндра.

Пусть \mathcal{M} – множество цилиндров. Заметим, что \mathcal{M} – π -система, причем $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{B}_T$.

(\Rightarrow) Пусть $t_1, \dots, t_n \in T, B_{t_1}, \dots, B_{t_n}, B_{t_i} \in \mathcal{B}_{t_i}$. Тогда

$$\begin{aligned} P_{t_1, \dots, t_n}^X(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}) &= P((X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}) = \\ &= P(X \in C(t_1, \dots, t_n, B_{t_1}, \dots, B_{t_n})) = \\ &= P_X(C(t_1, \dots, t_n, B_{t_1}, \dots, B_{t_n})) = \\ &= P_Y(C(t_1, \dots, t_n, B_{t_1}, \dots, B_{t_n})) = \\ &= P((Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}) \in B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}) = P_{t_1, \dots, t_n}^Y(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}) \end{aligned}$$

Доказали, что распределения X и Y совпадают на прямоугольниках. Но $B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}$ – порождающая π -система для $\mathcal{B}_{t_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{B}_{t_n} \Rightarrow$ по единственности продолжения меры $P_{t_1 \dots t_n}^x = P_{t_1 \dots t_n}^y$.

(\Leftarrow)

$$\begin{aligned} P_X(C(t_1, \dots, t_n, B_{t_1}, \dots, B_{t_n})) &= \\ P_{t_1 \dots t_n}^X(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}) &= \\ P_{t_1 \dots t_n}^Y(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}) &= \\ P_Y(C(t_1, \dots, t_n, B_{t_1}, \dots, B_{t_n})) & \end{aligned}$$

Доказали, что P_x и P_Y совпадают на \mathcal{M} . Но \mathcal{M} – порождающая π -система для $\mathcal{B}_T \Rightarrow$ по единственности продолжения меры $P_X = P_Y$. \square

Пусть $P_{t_1 \dots t_n}, n \in \mathbb{N}, t_1 \dots t_n \in T$ – конечномерное распределение $(X_t, t \in T)$.

Лемма 3.3. Для $\{P_{t_1 \dots t_n}\}$ выполнены условия симметрии (1) и согласованности (2):

1. $\forall n \forall t_1 \dots t_n \in T \forall \sigma$ – перестановки $\{1..n\}$ выполнено

$$P_{t_1 \dots t_n}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}) = P_{t_{\sigma_1} \dots t_{\sigma_n}}(B_{t_{\sigma_1}} \times \dots \times B_{t_{\sigma_n}})$$

2. $\forall n \forall t_1 \dots t_n \in T$

$$P_{t_1 \dots t_n}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_{n-1}} \times S_{t_n}) = P_{t_1 \dots t_{n-1}}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_{n-1}})$$

Доказательство.

1. $P_{t_1 \dots t_n}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}) = P(X_{t_1} \in B_{t_1}, \dots, X_{t_n} \in B_{t_n})$ – не зависит от перестановки.

2. $\{X_{t_n} \in S_{t_n}\} = \Omega$, поэтому это событие ничего не добавляет в пересечение.

Пусть теперь X – вещественный процесс, т.е. $(S_t, \mathcal{B}_t) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \forall t \in T$.

Теорема 3.1 (Колмогорова о существовании случайного процесса, б/д). Пусть T – некоторое множество, $\forall n \in \mathbb{N} \forall t_1 \dots t_n \in T$ задана вероятностная мера $P_{t_1 \dots t_n}$ на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, причем для системы $\{P_{t_1 \dots t_n}\}$ выполнены условия симметрии и согласованности. Тогда \exists вероятностное пространство (Ω, \mathcal{F}, P) и вещественный случайный процесс $(X_t, t \in T)$ т.ч. $\{P_{t_1 \dots t_n}\}$ – это его конечномерные распределения.

□

Теорема 3.2 (условия симметрии и согласованности для характеристических функций). Пусть T – некоторое множество, $\forall t_1, \dots, t_n \in T$ задана вер. мера P_{t_1, \dots, t_n} на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ с х.ф. $\varphi_{t_1, \dots, t_n}$. Тогда $\{P_{t_1, \dots, t_n}, n \in \mathbb{N}, t_i \in T\}$ обладают условиями симм. и согл. \Leftrightarrow выполнены условия симметрии и согласованности для х.ф.:

1. $\varphi_{t_1, \dots, t_n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \varphi_{t_{\sigma_1}, \dots, t_{\sigma_n}}(\lambda_{\sigma_1}, \dots, \lambda_{\sigma_n})$
2. $\varphi_{t_1, \dots, t_n}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 0) = \varphi_{t_1, \dots, t_{n-1}}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$

Следствие 3.1. Пусть $T \subset \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N} \forall t_1 < \dots < t_n \in T$ задана х.ф. $\varphi_{t_1, \dots, t_n}$ в \mathbb{R}^n . Тогда

$$\exists(\Omega, \mathcal{F}, P) \text{ и случайный процесс } (X_t, t \in T) \text{ т.ч. } \varphi_{t_1, \dots, t_n} - \text{х.ф. } (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall m \varphi_{t_1, \dots, t_n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)|_{\lambda_m=0} = \varphi_{t_1, \dots, t_{m-1}, t_{m+1}, \dots, t_n}(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n)$$

Доказательство.

(\Rightarrow) Очевидно из теоремы Колмогорова и теоремы об условиях симметрии и согласованности для хар. функций

(\Leftarrow) Пусть $s_1, \dots, s_n \in T, s_i \neq s_j$, рассмотрим $t_1 < \dots < t_n$ т.ч. $t_i = s_{\sigma_i}$ для некоторой перестановки σ .

Зададим

$$\varphi_{s_1, \dots, s_n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \varphi_{t_1, \dots, t_n}(\lambda_{\sigma_1}, \dots, \lambda_{\sigma_n})$$

Проверим условия симметрии и согласованности для таких хар. функций.

Условие симметрии дано по построению. Проверим согласованность.

$$\begin{aligned} & \varphi_{s_1, \dots, s_n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)|_{\lambda_n=0} = \\ & |s_n = t_m \Rightarrow \lambda_n = \lambda_{\sigma_m}| = \\ & \varphi_{t_1, \dots, t_n}(\lambda_{\sigma_1}, \dots, \lambda_{\sigma_n})|_{\lambda_{\sigma_m}=0} = \\ & |\text{условие следствия}| = \\ & \varphi_{t_1, \dots, t_{m-1}, t_{m+1}, \dots, t_n}(\lambda_{\sigma_1}, \dots, \lambda_{\sigma_{m-1}}, \lambda_{\sigma_{m+1}}, \dots, \lambda_{\sigma_n}) = \\ & |\text{по построению}| = \\ & \varphi_{s_1, \dots, s_{n-1}}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \end{aligned}$$

Условия симметрии и согласованности проверяются аналогично, если есть совпадающие $s_i = s_j$. По теореме Колмогорова искомый процесс существует. □

4 Процессы с независимыми приращениями

Определение 4.1. Пусть $(X_t, t \geq 0)$ – действительный процесс. Он называется *процессом с независимыми приращениями*, если $\forall n \in \mathbb{N} \forall 0 \leq t_1 < \dots < t_n$ случайные величины $X_{t_1}, X_{t_2-t_1}, \dots, X_{t_n-t_{n-1}}$ независимы в совокупности.

Теорема 4.1 (о существовании процессов с независимыми приращениями). Пусть Q_0 – вер. мера на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ с х.ф. φ_0 , и $\forall s, t$ задана вер. мера $Q_{s,t}$ на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ с х.ф. $\varphi_{s,t}$. Тогда процесс с независимыми приращениями

$$(X_t, t \geq 0) \text{ т.ч. } X_0 \stackrel{d}{=} Q_0, X_t - X_s \stackrel{d}{=} Q_{s,t}, s < t$$

существует тогда и только тогда, когда

$$\forall 0 \leq s < u < t \varphi_{s,t}(\tau) = \varphi_{s,u}(\tau) \varphi_{u,t}(\tau)$$

Доказательство.

(\Rightarrow) $\exists X_t \Rightarrow \forall s < u < t X_t - X_u$ и $X_u - X_s$ независимы $\Rightarrow \varphi_{s,t}(\tau) = \varphi_{X_t - X_s}(\tau) = \varphi_{X_t - X_u + X_u - X_s}(\tau) = \varphi_{X_t - X_u}(\tau) \varphi_{X_u - X_s}(\tau) = \varphi_{u,t}(\tau) \varphi_{s,u}(\tau)$.

(\Leftarrow) Пусть X_t существует. Тогда $\forall 0 < t_1 < \dots < t_n$ случайные величины. Компоненты вектора $(X_{t_n} - X_{t_{n-1}}, \dots, X_{t_1} - X_0, X_0)$ независимы. Обозначим этот вектор как ξ .

$$\varphi_{\xi}(\lambda_n, \dots, \lambda_0) = \varphi_{X_{t_n} - X_{t_{n-1}}}(\lambda_n) \cdot \dots \cdot \varphi_{X_0}(\lambda_0) = \varphi_{t_n, t_{n-1}}(\dots)$$

Рассмотрим $\eta = (X_{t_n}, \dots, X_0)^t$. Ясно, что $\eta = A\xi$, где

$A = \text{—матр.1—}$

$\Rightarrow \varphi_{\eta}(\lambda vector) = E e^{i \langle \eta, \lambda v \rangle} =$ записи на бумажке

Теперь забудем про то, что процесс существует. $\forall n \forall t_1 < \dots t_n$ зададим $\varphi_{t_1 \dots t_n}$ по формуле (*). *TODO* \square

5 Гауссовские случайные процессы

Определение 5.1. Случайный вектор $\xi = \xi_1, \dots, \xi_n$ называется гауссовским, если его х.ф. имеет вид

$$\varphi_{\xi}(t) = e^{i \langle a, t \rangle - \frac{1}{2} \langle \Sigma t, t \rangle}$$

где $a \in \mathbb{R}^n$, а $\Sigma \in Mat(n \times n)$ – симметрическая и неотрицательно определенная. В этом случае пишут $\xi \sim N(a, \Sigma)$.

Теорема 5.1 (три эквивалентных определения).

1. Вектор (ξ_1, \dots, ξ_n) гауссовский
2. $\xi = A\eta + b$ п.н., где $A \in Mat(n \times m)$, $b \in \mathbb{R}^n$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m)$, η_i – нез. $N(0, 1)$
3. $\forall \tau \in \mathbb{R}^n \langle \tau, \xi \rangle$ имеет одномерное нормальное распределение.

Свойства гаусс. векторов

1. Смысл параметров: если $\xi \sim N(a, \Sigma)$, то $a = E\xi$, $\Sigma = D\xi$ – матрица ковариаций.
2. Если ξ гауссовский, то $A\xi$ гауссовский для всех матриц соответствующего размера (т.е. линейное преобразование гауссовского вектора также является гауссовским вектором).
3. Если $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \sim N(a, \Sigma)$, то ξ_1, \dots, ξ_n нез. в совокупности $\Leftrightarrow \Sigma$ диагональна $\Leftrightarrow \xi_1, \dots, \xi_n$ некоррелированы.

Определение 5.2. Действительный случайный процесс $(X_t, t \in T)$ называется гауссовским, если все его конечномерные распределения гауссовские:

$$\forall n \forall t_1, \dots, t_n \in T \text{ вектор } (X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \text{ гауссовский}$$

Определение 5.3. Процесс $(X_t, t \in T)$ называется L^2 -процессом, если $\forall t \in T E|X_t^2| < +\infty$.

Функция $a(t) = EX_t$ называется функцией среднего процесса X_t .

Функция $R(s, t) = cov(X_s, X_t)$ называется ковариационной функцией процесса X_t .

Функция $K(s, t) = EX_s X_t$ называется корреляционной функцией процесса X_t .

Замечание. распределение гауссовского вектора однозначно определяется матожиданием и матрицей ковариаций \Rightarrow конечномерные распределения гауссовского процесса определяются функцией среднего и ковариационной функцией.

Определение 5.4. Функция $f(x, y), x, y \in t$ называется неотрицательно определенной на $T \times T$, если

$$\forall n \forall t_1, \dots, t_n \in T \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \sum_{i,j=1}^n f(t_i, t_j) x_i x_j \geq 0$$

Лемма 5.1. Ковариационная и корреляционная функции случайного процесса симметричны и неотрицательно определены.

Доказательство. Пусть X_t – L^2 -процесс, $K(s, t)$ – его корреляционная функция. Тогда $\forall n \forall t_1, \dots, t_n \in T \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i,j=1}^n f(t_i, t_j) x_i x_j = \sum_{i,j=1}^n (EX_{t_i} X_{t_j}) x_i x_j = E \left(\sum_{i,j=1}^n (x_i X_{t_i})(x_j X_{t_j}) \right) = E \left(\sum_{i=1}^n x_i X_{t_i} \right)^2 \geq 0$$

$\Rightarrow K(s, t)$ неотрицательно определена.

Теперь заметим, что $R(s, t) = \text{cov}(X_s, X_t)$ – это корреляционная функция для $Y_t = X_t - EX_t \Rightarrow$ она тоже неотрицательно определена.

Их симметричность очевидна. \square

Теорема 5.2 (о существовании гауссовских процессов). Пусть T – некоторое множество, на нем задана функция $a(t)$, и $R(s, t)$ – симметричная и неотрицательно определенная функция на $T \times T$. Тогда существует вероятностное пространство (Ω, \mathcal{F}, P) и гауссовский процесс $(X_t, t \in T)$ т.ч. $a(t) = EX_t$ и $R(s, t) = \text{cov}(X_s, X_t)$.

Доказательство. Для $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_n \in T$ рассмотрим вектор $a_{t_1, \dots, t_n} = (a(t_1), \dots, a(t_n))$, $\Sigma_{t_1, \dots, t_n} = \|R(t_i, t_j)\|_{i,j=1}^n$.

Тогда Σ_{t_1, \dots, t_n} неотрицательно определена. Рассмотрим х.ф.

$$\varphi_{t_1, \dots, t_n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = e^{i\langle a_{t_1, \dots, t_n}, \lambda \rangle - \frac{1}{2} \langle \Sigma_{t_1, \dots, t_n} \lambda, \lambda \rangle}$$

Легко видеть, что такой набор х.ф. обладает свойствами симметрии и согласованности:

$$\langle a_{t_1, \dots, t_n}, \lambda \rangle = \sum_{k=1}^n a(t_k)(\lambda_k) = |\forall \sigma| = \sum_{k=1}^n a(t_{\sigma(k)})(\lambda_{\sigma(k)})$$

$$\langle a_{t_1, \dots, t_n}, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \rangle_{\lambda_n=0} = \langle a_{t_1, \dots, t_{n-1}}, (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \rangle$$

Можно проверить, что для ковариационной функции также выполняются подобные равенства.

По теореме Колмогорова это означает, что $\exists (X_t, t \in T)$ т.ч. $\varphi_{t_1, \dots, t_n}$ – х.ф. $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \Rightarrow X_t$ – гауссовский процесс и $EX_t = a(t)$, $\text{cov}(X_s, X_t) = R(s, t)$. \square

1 Процесс броуновского движения (винеровский процесс)

Определение 5.5. Случайный процесс $(W_t, t \in 0)$ называется *винеровским*, если

1. $W_0 = 0$ п.н.
2. W_t имеет независимые приращения
3. $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$, $t \geq s$

Утверждение. Винеровский процесс существует.

Доказательство. По критерию существования процессов с независимыми приращениями достаточно проверить, что $\forall s \leq u \leq t$ (опускаем аргумент у х.ф.)

$$\varphi_{W_t W_s} = \varphi_{W_t - W_u} \varphi_{W_u - W_s}$$

Но т.к. $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$

$$\varphi_{W_t - W_s}(\tau) = e^{-\frac{1}{2} \tau^2 (t-s)}$$

Очевидно, свойство выполнено и процесс существует. \square

Теорема 5.3 (эквивалентное определение винеровского процесса). Процесс $(W_t, t \geq 0)$ является винеровским \Leftrightarrow

1. W_t гауссовский

$$2. \forall t \geq 0 \quad EW_t = 0$$

$$3. \operatorname{cov}(W_s, W_t) = \min(s, t)$$

Доказательство.

$(\Rightarrow) W_t \sim N(0, t) \Rightarrow EW_t = 0$. Посчитаем ковариационную функцию:

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(W_s, W_t) &= |t > s| = \operatorname{cov}(W_s, W_t - W_s + W_s) = \\ &= \operatorname{cov}(W_s, W_t - W_s) + \operatorname{cov}(W_s, W_s) = 0 + DW_s = s = \min(s, t) \end{aligned}$$

Пусть $0 \geq t_1 \geq \dots \geq t_n$, $\xi = (W_{t_1}, \dots, W_{t_n})$. Вектор $\eta = (W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_n - W_{n-1})$ имеет независимые нормальные компоненты $\Rightarrow \eta$ – гауссовский вектор. Очевидно, $\xi = A\eta$ (выписать A !), значит, ξ также является гауссовским $\Rightarrow W_t$ – гауссовский процесс.

(\Leftarrow) Почему такой процесс существует? По теореме достаточно проверить, что $\min(s, t)$ – неотрицательно определенная функция. Для этого можно заметить, что $\min(s, t)$ – это ковариационная функция для пуассоновского процесса интенсивности 1. Значит, она неотрицательно определена.

$$EW_t = 0, DW_t = \min(t, t) = t \Rightarrow DW_0 = 0, EW_0 = 0 \Rightarrow W_0 = 0 \text{ п.н.}$$

Пусть $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ фиксированы. Тогда $(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})$ – гаусс. вектор $\Rightarrow \xi = (W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, \dots, W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_1})$ – тоже гауссовский как линейное преобразование гауссовского вектора. Значит, для независимости компонент ξ достаточно проверить, что они некоррелированы.

Пусть $i > j$, $t_0 = 0$.

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}, W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) &= \\ \operatorname{cov}(W_{t_i}, W_{t_j}) - \operatorname{cov}(W_{t_{i-1}}, W_{t_j}) - \operatorname{cov}(W_{t_i}, W_{t_{j-1}}) + \operatorname{cov}(W_{t_{i-1}}, W_{t_{j-1}}) &= \\ t_j - t_j - t_{j-1} + t_{j-1} &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow W_t$ имеет независимые приращения.

$$W_t - W_s \sim N(a, \sigma^2).$$

$$a = E(W_t - W_s) = 0$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= D(W_t - W_s) = \operatorname{cov}(W_t - W_s, W_t - W_s) = \\ &= \operatorname{cov}(W_t, W_t) + \operatorname{cov}(W_s, W_s) - 2\operatorname{cov}(W_t, W_s) = |t > s| = \\ &= t - 2s + s = t - s \end{aligned}$$

□

2 Непрерывность траекторий винеровского процесса

Определение 5.6. Процесс $(Y_t, t \in T)$ называется *модификацией* процесса $(X_t, t \in T)$, если $\forall t \in T$

$$P(Y_t = X_t) = 1$$

Теорема 5.4 (Колмогорова о существовании непрерывной модификации, б/д). Пусть процесс $(X_t, t \in [a, b])$ таков, что для некоторых $C, \alpha, \varepsilon > 0$ выполнено:

$$\forall t, s \in [a, b] \quad E|X_t - X_s|^\alpha \leq C|t - s|^{1+\varepsilon}$$

Тогда у X_t существует модификация Y_t , все траектории которой непрерывны.

Следствие 5.1. У $W_t, t \geq 0$ существует непрерывная модификация.

Доказательство.

$$W_t - W_s \sim N(0, |t - s|) \Rightarrow E(W_t - W_s)^4 = 3(|t - s|)^2$$

Значит, у W_t существует непрерывная модификация на любом конечном отрезке.

Пусть $W_t^{(n)}$ – непрерывная модификация W_t на отрезке $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Рассмотрим процесс

$$X_t(\omega) = \{W_t^{(n)}(\omega), t \in [n, n+1)\}$$

Разрывы траекторий X_t возможны только в целых точках времени, когда $W_{n+1}^{(n)}(\omega) \neq W_{n+1}^{(n+1)}(\omega)$. Но $W_t^{(n)}$ и $W_t^{(n+1)}$ – модификации W_t , значит,

$$P(W_{n+1}^{(n)} = W_{n+1}) = 1 = P(W_{n+1}^{(n+1)} = W_{n+1}) \Rightarrow P(\exists n : W_{n+1}^{(n)} \neq W_{n+1}^{(n+1)}) = 0$$

Теперь рассмотрим

$$\tilde{X}_t(\omega) = \begin{cases} X_t(\omega), & \text{если } \forall n \ W_{n+1}^{(n)}(\omega) = W_{n+1}^{(n+1)}(\omega) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Это и будет искомая непрерывная модификация. □

Замечание. Условие $\varepsilon > 0$ в теореме Колмогорова существенно.

Доказательство. Пусть $(N_t, t \geq 0)$ – пуассоновский процесс. Тогда

$$E(N_t - N_s) = \lambda|t - s|$$

Значит, N_t удовлетворяет условию теоремы Колмогорова с $\varepsilon = 0$. Но траектории N_t разрывны почти наверное на всем \mathbb{R}_+ и разрывны с положительной вероятностью на любом конечном отрезке. □

Замечание. Всюду далее, где это необходимо, считаем, что нам задана непрерывная модификация винеровского процесса.

Теорема 5.5 (Пэли, Зигмунд, Винер, б/д). *С вероятностью 1 траектория винеровского процесса не дифференцируема ни в одной точке \mathbb{R}_+ .*

Теорема 5.6 (Закон повторного логарифма).

$$P\left(\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1\right) = 1$$

$$\left| \limsup_{t \rightarrow +\infty} f(t) := \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{s \geq t} f(s) \right|$$

Следствие 5.2.

$$P\left(\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = -1\right) = 1$$

Доказательство. Рассмотрим $Y_t = -W_t$ – тоже винеровский процесс. □

ЗПЛ означает, что с вероятностью 1, начиная с некоторого момента $t_0 = t_0(\varepsilon, \omega)$ траектория W_t находится внутри области, ограниченной кривыми $\pm(1 + \varepsilon)\sqrt{2t \ln \ln t}$. В то же время $\forall \varepsilon > 0$ траектория бесконечно много раз в обе стороны выходит из области, ограниченной кривыми $\pm(1 - \varepsilon)\sqrt{2t \ln \ln t}$, после момента времени T .

Следствие 5.3 (локальный ЗПЛ).

$$\limsup_{t \rightarrow +0} f(t) = \lim_{t \rightarrow +0} \sup_{s \leq t} f(s)$$

$$P\left(\limsup_{t \rightarrow +0} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln \frac{1}{t}}} = 1\right) = 1$$

$$P\left(\liminf_{t \rightarrow +0} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln \frac{1}{t}}} = -1\right) = 1$$

Доказательство. Рассмотрим процесс $B_t = t \cdot W_{\frac{1}{t}} \mathbb{I}\{t > 0\}$. Покажем, что B_t – винеровский.

1. $\forall t_1, \dots, t_n \geq 0$ имеем $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ – линейное преобразование вектора $(W_{\frac{1}{t_1}}, \dots, W_{\frac{1}{t_n}})$, значит, это гауссовский вектор. Тогда B_t – гауссовский процесс.
2. $EB_t = 0 \forall t \geq 0$.
3. $cov(B_t, B_s) = tcov(W_{\frac{1}{t}}, W_{\frac{1}{s}}) = \frac{ts}{\max(t, s)} = \min(t, s)$.

Значит, по теореме об эквивалентном определении B_t – винеровский процесс. Тогда

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow +0} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \frac{1}{t}}} &= |s = \frac{1}{t}| = \\ \limsup_{s \rightarrow +\infty} \frac{W_{\frac{1}{s}}}{\sqrt{2\frac{1}{s} \ln \ln s}} &= \\ \limsup_{s \rightarrow +\infty} \frac{s W_{\frac{1}{s}}}{\sqrt{2s \ln \ln s}} &= \\ \limsup_{s \rightarrow +\infty} \frac{B_s}{\sqrt{2s \ln \ln s}} &= 1 \text{ п.н. по ЗПЛ.} \end{aligned}$$

□

Теорема 5.7 (марковское свойство W_t). Пусть $(W_t, t \geq 0)$ – винеровский процесс. Тогда $\forall a > 0$ процесс $X_t = W_{t+a} - W_a$ тоже винеровский.

Вопрос: можно ли заметить a на случайное время?

6 Фильтрации и марковские моменты

В этой главе считаем, что $T \subset \mathbb{R}$.

Определение 6.1. Пусть (Ω, \mathcal{F}, P) – вероятностное пространство. Множество σ -алгебр $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t, t \in T)$ называется *фильтрацией*, или *потоком σ -алгебр* на (Ω, \mathcal{F}, P) , если $\forall s < t, s, t \in T$

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$$

Определение 6.2. Процесс $(X_t, t \in T)$ называется согласованным с $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t, t \in T)$, если $\forall t \in T$ X_t является \mathcal{F}_t -измеримым, то есть

$$\sigma(X_t) = \mathcal{F}_{X_t} \subset \mathcal{F}_t$$

$$\left| \begin{array}{l} \xi - \text{случайная величина. } \mathcal{F}_\xi - \sigma\text{-алгебра, порожденная } \xi: \\ \mathcal{F}_\xi = \{ \{ \xi \in B \} : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \} \end{array} \right.$$

Определение 6.3 (обозначения). $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ – множество с.в., $\sigma(\xi_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A})$ – σ -алгебра, порожденная всеми ξ_α – это

$$\Xi = \sigma(\xi_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}) := \sigma \left(\bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{F}_{\xi_\alpha} \right)$$

минимальная σ -алгебра, содержащая все \mathcal{F}_{ξ_α} .

Определение 6.4. Пусть $(X_t, t \in T)$ – случайный процесс. Его *естественной фильтрацией* называется $\mathcal{F}^x = (\mathcal{F}_t^x, t \in T)$, где $\mathcal{F}_t^x = \sigma(X_s, s \leq t, s \in T)$.

Замечание (наблюдение). Любой процесс согласован со своей естественной фильтрацией.

Определение 6.5. Отображение $\tau : \Omega \rightarrow T \cup \{+\infty\}$ называется *марковским моментом* относительно фильтрации $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t, t \in T)$ на (Ω, \mathcal{F}, P) , если $\forall t \in T$ выполнено

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

τ называется *моментом остановки*, если τ конечен п.н.

Пример 1. $(X_n, n \in \mathbb{N})$ – действительный процесс. $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\tau_B = \min\{n : X_n \in B\}$$

Тогда τ_B – марковский момент отн. \mathcal{F}^X .

Доказательство.

$$\{\tau_B \leq n\} = \bigcup_{k=1}^n \{X_k \in B\} \in \mathcal{F}_n^x$$

□

Неформальный смысл: τ – марковский момент, момент наступления события в процессе, если $\forall t$ можно однозначно сказать, что τ наступило к моменту времени t или еще нет, только по наблюдениям процесса X_s до момента времени t включительно.

Теорема 6.1 (марковское свойство W_t , усиленный вариант). Пусть $(W_t, t \geq 0)$ – винеровский процесс. Тогда $\forall a > 0$ процесс $X_t = W_{t+a} - W_a$ является винеровским и не зависит от $\mathcal{F}_a^W = \sigma(W_s, s \leq a)$.

Определение 6.6. Пусть τ – марковский момент отн. на . Тогда сиг-алгеброй эф-тау называется

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : \forall t \in T \{\tau \leq t\} \cap A \in \mathcal{F}_t\}$$

1. \mathcal{F}_τ – действительно сиг-алг
2. тау изм отн ф тау
3. если $\tau = t = \text{const}$, то $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_t$

Теорема 6.2 (строго марковское свойство W_t). Пусть $(W_t, t \geq 0)$ – винеровский процесс, а τ – момент остановки относительно \mathcal{F}^W . Тогда процесс $X_t = W_{t+\tau} - W_\tau$ является винеровским и не зависит от \mathcal{F}_τ .

Лемма 6.1. 1. Пусть ξ, η – случайные векторы. Тогда $\xi \stackrel{d}{=} \eta \Leftrightarrow \forall f$ – непр., огр.

$$Ef(\xi) = Ef(\eta)$$

2. Пусть x_i – случайный вектор. Тогда ξ независимо с некоторым событием $A \Leftrightarrow \forall f$ – непр огр

$$E(f(\xi)I_A) = Ef(\xi)P(A)$$

Доказательство. 1. (\Rightarrow) очевидно. (\Leftarrow) $f(x) = \cos(\langle t, x \rangle)$ или $\sin(\langle t, x \rangle)$ – огр. непр. функции \Rightarrow хф ξ и η совпадают $\Rightarrow \xi \stackrel{d}{=} \eta$

2. (\Rightarrow) очевидно. (\Leftarrow) x_i – нез. с $A \Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \{\xi \in B\}$ нез. с $A \Leftrightarrow \{\xi \in B\}$ нез. с A и B замкнуто. $\{\xi \in B\}, B$ замкнуто – π -система и σ от нее – это $\{\{\xi \in B\} : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$

Для замкнутого B рассмотрим $f(x) = \left(1 - \frac{\rho(x, B)}{2}\right)$. $f_\varepsilon(x)$ – нормирует расстояние, так что если оно 0, то значение 1, если меньше ε то линейно, а при $\geq \varepsilon - 0$

□

СМС. 1. Проверим, что W_τ – случайная величина. Рассмотрим $\forall n \in \mathbb{N}$

□

Теорема 6.3 (принцип отражения, б/д). Пусть W_t – винеровский процесс, τ – момент остановки относительно \mathcal{F}^W . Тогда процесс $Z_t = \{W_t, t < \tau; 2W_\tau - W_t, t \geq \tau\}$ также является винеровским.

Далее будем изучать $\tau_x = \inf\{t : W_t = x\}$ – первый момент достижения уровня x .

Лемма 6.2. τ_x – момент остановки относительно \mathcal{F}^W .

Доказательство. Считаем, что нам задана непрерывная модификация W_t . Кроме того, $x > 0$ (иначе аналогично).

$\{\tau_x > t\} = | \text{непрерывность тракторий} | = \{\forall s \leq t W_s < x\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{s \leq t : W_s \leq x - \frac{1}{k}\} = | \text{непр. траект.} | = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{s \leq t, s \in \mathbb{Q}} \{W_s \leq x - 1/k\} \in \mathcal{F}_t^W$. Значит, τ_x — действительно марковский момент.

Из ЗПЛ известно, что $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1$ п.н., то есть трактория п.н. растет неограниченно вверх. Тогда в силу непрерывности $\exists t : W_t = x \Rightarrow P(\tau_x < +\infty) = 1$. \square

Вывод: для τ_x выполнены строго марковское свойство и принцип отражения.

Следствие 6.1. $M_t = \max_{0 \leq s \leq t} W_s$ является с.в. \mathcal{F}_t^W -измеримой, причем $\{\tau_x \leq t\} = \{M_t \geq x\}, x \geq 0$.

Теорема 6.4. $\forall x, y \geq 0$

$$P(W_t < y - x, M_t \geq y) = P(W_t > y + x)$$

Доказательство. Если $y = 0$, то утверждение тривиально. Если же $y > 0$, то рассмотрим τ_y . Это момент остановки, значит, к нему применим принцип отражения.

$Z_t = \{W_t, t \leq \tau_y; 2W_\tau - W_t, t \geq \tau_y\}$ является винеровским.

Обозначим через σ_y первый момент достижения y у Z_t . Тогда $(W_t, \tau_y) \stackrel{d}{=} (Z_t, \sigma_y) \Rightarrow P(W_t < y - x, M_t \geq y) = P(W_t < y - x, \tau_y \leq t) = P(Z_t < y - x, \sigma_y \leq t) = |\sigma_y = \tau_y| = P(Z_t < y - x, \tau_y \leq t) = | \text{по опр. } Z_t | = P(W_\tau - W_t \leq y - x, \tau_y \leq t) = P(2y - W_t \leq y - x, \tau_y \leq t) = P(W_t \geq y + x, \tau_y \leq t) = P(W_t > y + x)$. \square

Следствие 6.2 (теорема Башелье).

$$M_t \stackrel{d}{=} |W_t|$$

Доказательство. $P(M_t \geq y) = P(M_t \geq y, W_t < y) + P(M_t \geq y, W_t \geq y) = P(W_t > y) + P(M_t \geq y, W_t \geq y) = P(W_t > y) + P(W_t \geq y) = 2P(W_t \geq y) = P(|W_t| \geq y)$. \square