

# Случайные процессы

17 января 2014 г.

## Содержание

<b>I</b>	<b>Случайные процессы</b>	<b>2</b>
1	Терминология . . . . .	2
2	Примеры . . . . .	3
<b>1</b>	<b>Случайное блуждание на прямой</b>	<b>3</b>
1	Вопросы . . . . .	4
2	Возвращение в ноль . . . . .	4
3	Среднее время нахождения в нуле . . . . .	5
4	Свойства траекторий . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона</b>	<b>7</b>
1	Производящие функции . . . . .	7
2	Вероятность вырождения процесса . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Конечномерные распределения случайных процессов</b>	<b>10</b>
<b>4</b>	<b>Процессы с независимыми приращениями</b>	<b>12</b>
<b>5</b>	<b>Гауссовские случайные процессы</b>	<b>13</b>
1	Процесс броуновского движения (винеровский процесс) . . . . .	14
2	Непрерывность траекторий винеровского процесса . . . . .	15
<b>6</b>	<b>Фильтрации и марковские моменты</b>	<b>17</b>

# Введение. Историческая справка

Теория вероятностей: математический анализ случайных явлений.

Теория случайных процессов: стохастические модели и фактор времени.

## Предпосылки к изучению

- 1827, Р. Броун – броуновское движение частиц в воде  $\Rightarrow$  процесс броуновского движения
- 1903, Л. Башелье – колебания курсов бумаг на бирже  $\Rightarrow$  процесс броуновского движения
- 1906, А.А. Марков – анализ комбинаций гласных и согласных в романе «Евгений Онегин»  $\Rightarrow$  марковские цепи
- 1903, Ф. Лундберг – модель деятельности страховой компании  $\Rightarrow$  пуассоновский процесс
- 1873, Ф. Гальтон, Г. Ватсон – анализ вымирания аристократических фамилий в Великобритании  $\Rightarrow$  ветвящиеся процессы
- Начало XX века, А. Эрланг – изучение загрузки телефонных сетей  $\Rightarrow$  теория массового обслуживания

## Применения

- Физика (стохастическое исчисление, теория гиббсовских полей)
- Экономика (финансовая математика)
- Биология

## Часть I

# Случайные процессы

## Общие определения

**Определение 0.1.** Пусть  $(\Omega, F, P)$  – вероятностное пространство, а  $(E, \mathcal{E})$  – измеримое пространство. Отображение  $\xi : \Omega \rightarrow E$  называется *случайным элементом*, если оно измеримо, т.е.

$$\forall B \in \mathcal{E} \quad \xi^{-1}(B) = \{\omega : \xi(\omega) \in B\} \in F$$

**Определение 0.2.** Пусть  $T$  – некоторое множество и на  $(\Omega, F, P)$  для  $\forall t \in T$  задан случайный элемент  $X_t$ . Тогда набор  $X = X_t, t \in T$  называется *случайной функцией* на множестве  $T$ .

*Замечание.* Вообще говоря, не предполагается, что все  $X_t$  принимают значения в одном и том же пространстве.

**Определение 0.3.** Пусть  $X = (X(t, \omega))$ . При фиксированном  $\omega = \omega_0$  функция

$$\tilde{X}_{\omega_0}(t) = X_t(\omega)|_{\omega=\omega_0}$$

на  $T$  называется *траекторией* (или реализацией) случайной функции  $X = X_t, t \in T$ .

## 1 Терминология

- Если  $T \subset \mathbb{R}$ , то случайная функция называется случайным процессом.
- Если  $T = [a, b], (a, b), [a, +\infty)$  и т.д., то процесс  $X$  называется процессом с непрерывным временем.
- Если  $T = \mathbb{N}, \mathbb{Z}$  и т.д. то процесс  $X$  называется процессом с дискретным временем.
- Если  $T \subset \mathbb{R}^d$ , то процесс  $X$  называется случайным полем.

*Замечание.* Далее всюду будем использовать термин «случайный процесс».

## 2 Примеры

1.  $X_t(\omega) = \xi(\omega) \cdot f(t)$ , где  $\xi(\omega)$  – с.в.,  $f(t)$  – детерминированная функция.
2. Пусть  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  – независимые случайные векторы,  $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ ,  $S_0 = 0$ . Тогда процесс с дискретным временем  $\{S_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$  называется случайным блужданием.  
Траектория: см. рис. 1
3. Пусть  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  – норсв,  $\xi_n \geq 0$ ,  $\xi_n \neq \text{const}$  п.н.,  $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ ,  $S_0 = 0$ . Тогда процесс

$$X_t = \sup\{n : S_n \leq t\}, t \geq 0$$

называется процессом восстановления.

Траектория: см. рис. 2

**Утверждение.** *Процесс восстановления конечен почти наверное.*

*Доказательство.* Пусть сначала  $E\xi_i = a > 0$ .

Заметим, что  $\{S_k \leq t\} \supset \{S_{k+1} \leq t\}$ .

$\{X_t = +\infty\} = \{\sup\{n : S_n \leq t\} = +\infty\} = \{\forall n : S_n \leq t\} = \bigcap_n \{S_n \leq t\} \Rightarrow$  по непрерывности вероятностной меры  $\Rightarrow P(X_t = +\infty) = P(\forall n S_n \leq t) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n \leq t) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\frac{S_n}{n} \leq \frac{t}{n}) \leq$  для больших  $n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P(\frac{S_n}{n} < \frac{a}{2})$ .

Но по УЗБЧ  $S_n \rightarrow a \Rightarrow P(S_n \leq a/2) \rightarrow P(a \leq a/2) = 0$ .

В силу того, что  $X_t \uparrow$  при  $t \uparrow$ ,  $P(\exists t : X_t = +\infty) = P(\exists n : x_n = +\infty) \leq \sum_n P(x_n = \infty) = 0$ .

Если  $E\xi_i = +\infty$ , то случай сводится к предыдущему:  $\exists C > 0 : \tilde{\xi}_n = \min(\xi_n, C), E\tilde{\xi}_n > 0$ . Тогда  $P(X_t = +\infty) = P(\forall n S_n \leq t) \leq P(\tilde{S}_n \leq t) = 0$  (доказали в случае конечного матожидания).  $\square$

Откуда может возникнуть процесс восстановления? Физическая модель – «Модель перегорания лампочки».  $\xi_n$  – случайная величина, равная времени работы лампочки,  $X_t$  – сколько раз пришлось заменить лампочку к моменту времени  $t$ .

4. Модель страхования Крамера-Лундберга

Пусть есть  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}, \{\eta_m, m \in \mathbb{N}\}, \xi_n \stackrel{d}{=} \xi_m, \eta_n \stackrel{d}{=} \eta_m, \{\xi_n, \eta_m\}$  независимы,  $\xi_n, \eta_m \geq 0, \xi_n$  невырождены.

Пусть  $\{X_t, t \geq 0\}$  – процесс восстановления, построенный по случайным величинам  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}, y_0, c > 0$ . Тогда  $Y_t = y_0 + c \cdot t - \sum_{k=1}^{X_t} \eta_k$  – модель страхования Крамера-Лундберга.

### Смысл параметров

- $y_0$  – начальный капитал
- $c$  – скорость поступления страховых взносов
- $S_k = \xi_1 + \dots + \xi_k$  – время  $k$ -й выплаты,  $\eta_k$  – размер этой выплаты
- $X_t$  – число выплат к моменту времени  $t > 0$
- $\sum_{k=1}^{X_t} \eta_k$  – общий размер выплат к этому моменту времени
- $Y_t$  – текущий капитал компании

## 1 Случайное блуждание на прямой

**Определение 1.1.** Пусть  $\xi_n, n \in \mathbb{N}$  – норсв,  $P(\xi_n = 1) = p, P(\xi_n = -1) = q = 1 - p$ . Тогда процесс  $(S_n, n \in \mathbb{Z}_+), S_0 = 0, S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$  называется *простейшим случайным блужданием на прямой*. Если  $p = q = \frac{1}{2}$ , то блуждание называется *симметричным*.

## 1 Вопросы

1. вероятность возвращения в ноль
2. распределение первого момента возвращения в ноль
3. среднее время в нуле
4. геометрия траектории

*Замечание.* Последние два вопроса – только для симметричного случая.

## 2 Возвращение в ноль

$P(\{S_n, n \in \mathbb{N}\} \text{ вернется в ноль}) - ?$

$P(s_1 \neq 0, s_2 \neq 0, \dots, s_{2n-1} \neq 0, s_{2n} = 0) - ?$

Вероятность каждой траектории, приводящей в 0 в момент времени  $2n$ , одна и та же и равна  $(pq)^n$ . Каждую траекторию длины  $2n$  можно сопоставить с вектором  $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n}\}, \varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ .

**Определение 1.2.** Траектория  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n})$  длины  $2n$  называется *положительной*, если  $\forall k < 2n \sum_{j=1}^k \varepsilon_j > 0$  и  $\sum_{j=1}^{2n} \varepsilon_j = 0$ . Число таких траекторий обозначим через  $\tilde{C}_n$ .

**Утверждение.** *Наблюдение:*  $P(S_1 \neq 0, \dots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} = 0) = 2 \cdot \tilde{C}_n \cdot (pq)^n$ .

**Определение 1.3.** Траектория  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n})$  длины  $2n$  называется *неотрицательной*, если  $\forall k < 2n \sum_{j=1}^k \varepsilon_j \geq 0$  и  $\sum_{j=1}^{2n} \varepsilon_j = 0$ . Число таких траекторий обозначим через  $C_n$ .

**Утверждение.**  $\tilde{C}_n = C_{n-1}$ .

*Доказательство.* См. рисунок 3.

Чтобы получить из положительной траектории неотрицательную, покажем, что в начале стоит 1, в конце  $-1$ . Чтобы получить из неотрицательной положительную, добавим в начало 1, а в конец  $-1$ . Получили биекцию между положительными траекториями длины  $2n$  и неотрицательными длины  $2n - 2$ .  $\square$

**Утверждение.** Пусть  $C_0 = 1$ . Тогда  $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \cdot C_{n-1-k}$ .

*Доказательство.* См. рисунок 4.

Пусть  $2k$  – первый момент возвращения траектории в ноль. Ясно, что таких траекторий  $\tilde{C}_k \cdot C_{n-k}$ . Суммируя по  $k = 1 \dots n$ :

$$C_n = \sum_{k=1}^n \tilde{C}_k \cdot C_{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \cdot C_{n-k-1}$$

$\square$

Вывод:  $C_n$  – это числа Каталана.  $C_n = \frac{1}{n+1} \cdot C_{2n}^n$ .

Производящая функция:  $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n = \frac{1}{2t}(1 - \sqrt{1 - 4t}), |t| \leq \frac{1}{4}$ .

**Теорема 1.1** (распределение момента возвращения в ноль).

$$P(S_1 \neq 0, \dots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} = 0) = \frac{1}{2n-1} C_{2n}^n (pq)^n$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}
P(S_1 \neq 0, \dots, S_{2n-1} \neq 0, s_{2n} = 0) &= \\
2\tilde{C}_n(pq)^n &= | \text{ утв.1 } | = \\
2C_{n-1}(pq)^n &= \\
\frac{2}{n}C_{2n-2n-1}(pq)^n &= \\
\frac{2n}{n \cdot n}C_{2n-2}^{n-1}(pq)^n &= \\
\frac{1}{2n-1}C_{2n}^n(pq)^n.
\end{aligned}$$

□

**Теорема 1.2** (вероятность возвращения в ноль).

$$P(\{S_n, n \geq 1\} \text{вернется в ноль}) = 1 - |p - q|$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}
P(\{S_n, n \geq 1\} \text{вернется в } 0) &= \\
\sum_{n=1}^{\infty} P(S_1 \neq 0, \dots, S_{2n} = 0) &= \\
\sum_{n=1}^{\infty} 2\tilde{C}_N(pq)^n &= \\
\sum_{n=1}^{\infty} 2C_{n-1}(pq)^n &= \\
\sum_{n=0}^{\infty} 2C_n(pq)^{n-1} &= \\
2pq \cdot f(pq) &= \\
2pq * \frac{1}{2pq}(1 - \sqrt{1 - 4pq}) &= | \text{ т.к. } (p + q)^2 = 1 | = \\
1 - \sqrt{(p - q)^2} &= 1 - |p - q|
\end{aligned}$$

□

**Следствие 1.1.** Симметричное случайное блуждание на прямой возвратно с вероятностью 1.

### 3 Среднее время нахождения в нуле

Пусть  $(S_n, n \in \mathbb{N})$  – простейшее симметричное случайное блуждание на прямой. Обозначим через  $L_n(0)$  число нулей в последовательности  $S_k, k = 0 \dots n$ . Вопрос:  $EL_n(0) \sim ?$

**Лемма 1.1.**

$$EL_n(0) = E|S_{n+1}|$$

*Доказательство.* Рассмотрим  $|S_{n+1}|$ .

$$|S_{n+1}| = |S_n + \xi_{n+1}| = \begin{cases} S_n + \xi_{n+1}, & S_n > 0 \\ 1, & S_n = 0 \\ -(S_n + \xi_{n+1}), & S_n < 0 \end{cases}$$

$$|S_{n+1}| = (S_n + \xi_{n+1})I\{S_n > 0\} + I\{S_n = 0\} - (S_n + \xi_{n+1})I\{S_n < 0\} = I\{S_n = 0\} + (S_n + \xi_{n+1}) \text{sign}(S_n)$$

$$\begin{aligned}
\text{Отсюда } |S_{n+1}| &= I\{S_n = 0\} + |S_n| + \xi_{n+1} \text{sign}(S_n) = | \text{индукция} | = \sum_{k=0}^n (I\{S_k = 0\} + \xi_{k+1} \text{sign}(S_k)) = L_n(0) + \\
&\sum_{k=0}^n \xi_{k+1} \text{sign}(S_k).
\end{aligned}$$

Берем матожидание у обеих частей равенства:  $E|S_{n+1}| = EL_n(0) + \sum_{k=0}^n E(\xi_{k+1} \text{sign}(S_k)) = EL_n(0) + \sum_{k=0}^n E\xi_{k+1}E \text{sign}(S_k) = EL_n(0)$ .  $\square$

Согласно ЦПТ,  $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \eta \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

По теореме о наследовании сходимости  $\frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} |\eta| \sim |\mathcal{N}(0, 1)|$ .

Вопрос: верно ли данное?

$$E \frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \rightarrow E|\eta| = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |x| e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

**Определение 1.4.** Множество случайных величин  $\{\xi_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$  называется *равномерно интегрируемым*, если

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} E(|\xi_\alpha| \mathbf{I}\{|\xi_\alpha| \geq c\}) = 0$$

Смысл: «хвосты» распределения равномерно малы.

**Теорема 1.3** (б/д). Пусть  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  – с.в.,  $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ . Тогда

$$E\xi_n \rightarrow E\xi \Leftrightarrow \{\xi_n, n \in \mathbb{N}\} \text{ равномерно интегрируемо}$$

*Замечание.* Если сходимость  $\xrightarrow{p}$  или  $\xrightarrow{п.н.}$ , то равномерная интегрируемость  $\Leftrightarrow \xi_n \xrightarrow{L_1} \xi$ .

**Теорема 1.4** (достаточное условие равномерной интегрируемости). Пусть  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  – с.в.,  $G(t) \geq 0 : \frac{G(t)}{t} \rightarrow +\infty$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Если  $\sup_n EG(|\xi_n|) < +\infty$ , то последовательность равномерно интегрируема.

*Доказательство.* Положим  $M = \sup_n EG(|\xi_n|)$ .  $\forall \varepsilon > 0$  положим  $a = \frac{M}{\varepsilon}$ . Возьмем  $c > 0 : \frac{G(t)}{t} > a \forall t > c$ . Тогда  $\forall t > c, \forall n \in \mathbb{N}$

$$E(|\xi_n| \mathbf{I}\{|\xi_n| \geq t\}) \leq E\left(\frac{G(|\xi_n|)}{a} \mathbf{I}\{|\xi_n| \geq t\}\right) \leq E\frac{G(|\xi_n|)}{a} \leq \frac{M}{a} = \varepsilon$$

$\Leftrightarrow \{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$  равномерно интегрируема.  $\square$

**Теорема 1.5** (среднее время в нуле).

$$EL_n(0) \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$$

*Доказательство.* Согласно лемме,  $EL_n(0) = E|S_{n+1}|$ . Покажем, что  $\{\xi_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}\}$  равномерно интегрируема. Подберем соответствующую функцию  $G$ . Попробуем  $G(t) = t^2$ .

$$EG(|\xi_n|) = E\xi_n^2 = \frac{(E\xi_n^2)}{n} = \frac{DS_n}{n} = \frac{\sum_{k=1}^n D\xi_k}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

Согласно достаточному условию, получили, что последовательность  $\frac{|S_n|}{\sqrt{n}}$  равномерно интегрируема. Тогда по теореме

$$\frac{E|S_n|}{\sqrt{n}} \rightarrow E\eta = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\eta \sim \mathcal{N}(0, 1))$$

Отсюда

$$EL_n(0) = E|S_{n+1}| \sim \sqrt{\frac{2(n+1)}{\pi}} \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$$

$\square$

## 4 Свойства траекторий

**Теорема 1.6** (закон повторного логарифма, б/д).

$$P\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n \ln \ln n}} = 1\right) = 1$$

**Следствие 1.2.**

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n \ln \ln n}} = -1\right) = -1$$

*Доказательство.* Рассмотрим  $X_n = -S_n$  — симметричное случайное блуждание  $\Leftrightarrow$  по ЗПЛ получаем, что

$$\text{п.н. } 1 = \overline{\lim}_n \frac{X_n}{\sqrt{2n \ln \ln n}} = -\lim_n \frac{S_n}{\sqrt{2n \ln \ln n}}$$

□

Смысл: — рис.5 —

ЗПЛ означает, что с вероятностью 1 траектория случайного блуждания начиная с некоторого момента лежит внутри между кривыми  $\pm(1 + \varepsilon)\sqrt{2n \ln \ln n}$  и в то же время бесконечно много раз выходит в обе стороны из области, ограниченной кривыми  $\pm(1 - \varepsilon)\sqrt{2n \ln \ln n}$ .

## 2 Ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона

Физическая модель: — рис.6 — В каждый следующий момент времени каждая частица распадается на некоторое случайное число таких же частиц.

Мат. модель: Пусть  $\xi$  — случайная величина со значениями в  $\mathbb{Z}_+$ .  $\{\xi_k^{(n)}, k, n \in \mathbb{N}\}$  — независимые случайные величины с тем же распределением, что и  $\xi$ . Положим

$$X_0 = 1, X_1 = \xi_1^{(1)}, X_n = \sum_{k=1}^{X_{n-1}} \xi_k^{(n)}$$

**Определение 2.1.**  $\{X_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$  — *ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона*, построенный по с.в.  $\xi$ .

- $X_n$  — число частиц в  $n$ -м поколении
- $\xi_k^{(n)}$  — число потомков  $k$ -й частицы в  $n - 1$ -м поколении

Вопрос: какова вероятность вырождения процесса?

## 1 Производящие функции

**Определение 2.2.** Пусть  $\xi$  — случайная величина. Тогда ее *производящей функцией* называется

$$\varphi_\xi(z) = Ez^\xi, z \in \mathbb{R}$$

**Свойства производящих функций**

1.  $\varphi_\xi(1) = 1$
2.  $\varphi'_\xi(1) = E\xi$
3. Если  $\xi$  и  $\eta$  независимы, то  $\varphi_{\xi+\eta}(z) = \varphi_\xi(z)\varphi_\eta(z)$

Если  $\xi$  принимает значения в  $\mathbb{Z}_+$ , то введем  $p_k = P(\xi = k), k \in \mathbb{Z}_+$ .

$$4. \varphi_\xi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k$$

5.  $\varphi_\xi(0) = p_0$

6.  $p_k = \frac{f_\xi^{(k)}(0)}{k!}$

7. Ряд для  $\varphi_\xi(z)$  сходится абсолютно и равномерно в области  $\{|z| \leq 1\}$

8.  $\varphi_\xi(z)$  непрерывно дифференцируема бесконечное число раз в области  $\{|z| < 1\}$

Пусть далее  $\{X_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$  – ветвящийся процесс Г.-В., построенный по  $\xi$ .

**Лемма 2.1.**

$$\varphi_{X_{n+1}}(z) = \varphi_{X_n}(\varphi_\xi(z))$$

*Доказательство.*  $\varphi_{X_{n+1}}(z) = Ez^{X_{n+1}}$

$$E(z^{X_{n+1}} | X_n = m) = E\left(z^{\sum_{k=1}^{X_n} \xi_k^{(n+1)}} \middle| X_n = m\right) = E\left(z^{\sum_{k=1}^m \xi_k^{(n+1)}} \middle| X_n = m\right) = Ez^{\sum_{k=1}^m \xi_k^{(n+1)}} = (\varphi_\xi(z))^m$$

Значит,

$$\varphi_{X_{n+1}} = Ez^{X_{n+1}} = E(E(z^{X_{n+1}} | X_n)) = E(\varphi_\xi(z))^m \big|_{m=X_n} = \varphi_{X_n}(\varphi_\xi(z))$$

□

**Следствие 2.1.**

1.  $\varphi_{X_n}(z) = \underbrace{\varphi_\xi(\varphi_\xi(\dots \varphi_\xi(z) \dots))}_{n \text{ раз}}$

2.  $\varphi_{X_{n+1}}(z) = \varphi_\xi(\varphi_{X_n}(z))$

*Доказательство.* Применяем индуктивно лемму 2.1:

$$\varphi_{X_{n+1}} = \underbrace{\varphi_\xi(\varphi_\xi(\dots \varphi_\xi(z) \dots))}_{n+1 \text{ раз}} = \varphi_\xi(\varphi_{X_n}(z))$$

□

## 2 Вероятность вырождения процесса

Положим  $q_n = P(X_n = 0)$ ,  $q = P(\text{процесс выродился}) = P(\exists n : X_n = 0)$

**Лемма 2.2.**

$$q_n \leq q_{n+1} \text{ и } q = \lim_n q_n$$

*Доказательство.*  $\{X_n = 0\} \subset \{X_{n+1} = 0\} \Rightarrow q_n \leq q_{n+1}$

Но  $P(\exists n : X_n = 0) = P\left(\bigcup_n \{X_n = 0\}\right) = |\text{по непрерывности вероятностной меры}| = \lim_n P(X_n = 0) = \lim_n q_n$ . □

**Лемма 2.3.** Вероятность вырождения  $q$  является решением уравнения

$$s = \varphi_\xi(s)$$

*Доказательство.*

$$q \leftarrow q_n = P(X_n = 0) = \varphi_{X_n}(0) = \varphi_\xi(\varphi_{X_{n-1}}(0)) = \varphi_\xi(q_{n-1}) \rightarrow \varphi_\xi(q)$$

□



Вопрос: что делать, если на  $[0, 1]$  решений несколько?

Всегда есть решение  $s = 1$ .

**Теорема 2.1** (о вероятности вырождения). Пусть  $\xi \neq 1$  п.н. Пусть  $\mu = E\xi$  (м.б.  $\mu = +\infty$ ). Тогда

1. Если  $\mu \leq 1$ , то уравнение

$$s = \varphi_\xi(s)$$

имеет только одно решение  $s = 1$  на  $[0, 1]$ . Тогда  $q = 1$ .

2. Если  $\mu > 1$ , то уравнение

$$s = \varphi_\xi(s)$$

имеет единственное решение  $s_0 \in [0, 1)$ . В этом случае  $q = s_0$ .

*Доказательство.*

1. Рассмотрим производную  $\varphi'_\xi(s) = \sum_{k=1}^{\infty} ks^{k-1}P(\xi = k)$  для  $s \in [0, 1]$ . Заметим, что эта функция строго возрастает (поскольку каждое слагаемое строго возрастает) и положительна (поскольку есть хоть одна ненулевая вероятность). Действительно, если  $\varphi_\xi(s) = 0$  для  $s > 0 \Rightarrow P(\xi = k) = 0 \forall k \geq 1$ . Но тогда  $P(\xi = 0) = 1$  и  $q = 1$ .

Далее считаем производную положительной.

Для  $s \in (0, 1)$ :

$$1 - \varphi_\xi(s) = \varphi'_\xi(\theta)(1 - s)$$

где  $\theta = \theta(s) \in (s, 1)$  Но  $\varphi'_\xi(\theta) < \varphi'_\xi(1) = \mu = 1$ , т.к. производная строго возрастает.

$$\Rightarrow 1 - \varphi_\xi(s) < 1 - s \text{ при } s \in [0, 1) \Rightarrow s < \varphi_\xi(s)$$

Решений, отличных от 1, нет.

График в этом случае выглядит так: — рис.7 —

2. Рассмотрим

$$\varphi''_\xi(s) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)s^{k-2}P(\xi = k) \text{ для } s \in [0, 1)$$

Функция строго возрастает и положительна на  $(0, 1)$ .

Действительно, если вдруг  $\varphi''_\xi(s) = 0 \Rightarrow \forall k \geq 2 P(\xi = k) = 0 \Rightarrow \xi < 1$  п.н.  $\Rightarrow E\xi = \mu \leq 1$ , что противоречит условию.

Теперь считаем, что  $\varphi'_\xi(s)$  строго возрастает на  $[0, 1)$ .

$$\Rightarrow 1 - \varphi'_\xi(s) \text{ меняет знак на } [0, 1) \text{ не более одного раза}$$

$$1 - \varphi'_\xi(0) = 1 - P(\xi = 1) > 0$$

$$1 - \varphi'_\xi(1) = 1 - \mu < 0$$

$$\Rightarrow 1 - \varphi'_\xi(s) \text{ меняет знак ровно один раз}$$

График выглядит так: — рис.8 —

Пусть  $\varphi'_\xi(s_1) = 1$ . Что можно сказать про  $s - \varphi_\xi(s)$ ? При  $s < s_1$  возрастает, при  $s > s_1$  возрастает.

Если  $\varphi_\xi(0) = P(\xi = 0) = 0$ , то  $s - \varphi_\xi(s)|_{s=0} = 0$  — рис.9 —, то есть ровно один корень  $s = 0 \in [0, 1)$ .

Ясно, что в этом случае  $\boxed{q = 0}$ .

Если  $\varphi_\xi(0) > 0$ , то  $s - \varphi_\xi(s)|_{s=0} < 0 \Rightarrow \exists s_0$  — единственное решение уравнения на  $[0, 1)$

Заметим, что при  $s < s_0$   $s < \varphi_\xi(s)$ , а при  $s > s_0$   $s > \varphi_\xi(s)$ .

Но  $q_n = \varphi_\xi(q_{n-1}) \leq |\text{т.к. } q_n \geq q_{n-1}| \leq \varphi_\xi(q_n) \Rightarrow q_n \notin (s_0, 1)$ .

Если  $q_n = 1$ , то  $q_{n-1} = 1$ , т.к.  $\varphi_\xi(s) = 1 \Leftrightarrow s = 1$ . По индукции получаем, что  $q_0 = 1$ . Но  $q_0 = 0$ , т.к. в нулевой момент времени всегда есть одна частица. Значит,  $q \in [0, s_0]$  как предел  $q_n \Rightarrow q = s_0$ .

График: — рис 11 —

□

Вывод: вероятность вырождения – это наименьший корень уравнения  $s = \varphi_\xi(s)$  из отрезка  $[0, 1]$ .

Интерпретация: если среднее число потомков меньше 1, то процесс обречен на вымирание. Иначе есть ненулевая вероятность того, что мы будем живы до бесконечности.

### 3 Конечномерные распределения случайных процессов

Пусть  $(X_t, t \in T)$  – случайный процесс на  $(\Omega, F, P)$ , и  $X_t$  принимает значения в  $(S_t, \mathcal{B}_t)$ .

**Определение 3.1.** Множество  $S = \prod_{t \in T} S_t$  называется *пространством траекторий случайного процесса*.

$$S = \{y = (y(t), t \in T) : \forall t \in T y(t) \in S_t\}$$

**Определение 3.2.** Для  $\forall t \in T$  и  $B_t \in \mathcal{B}_t$  введем *элементарный цилиндр* с основанием  $B_t$ :

$$C(t, B_t) = \{y \in S : y(t) \in B_t\}$$

Смысл: это все траектории, проходящие через  $B_t$  в момент времени  $t$ . — рис.12 —

**Определение 3.3.** Минимальная  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{B}_T$ , содержащая все эти элементарные цилиндры, называется *цилиндрической  $\sigma$ -алгеброй* на  $S$ .

$$\mathcal{B}_T = \sigma\{C(t, B_t) : t \in T, B_t \in \mathcal{B}_t\}$$

$(S, \mathcal{B}_T)$  – измеримое пространство.

**Лемма 3.1.**  $X = (X_t, t \in T)$  является случайным процессом  $\Leftrightarrow X : \Omega \rightarrow S$  является измеримым относительно цилиндрической  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{B}_T$ .

$$\left| \begin{array}{l} \text{Напоминание} \text{ Критерий измеримости отображения} \\ X : \Omega \rightarrow E, \mathcal{M} \subset \mathcal{E} \text{ т.ч. } \sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{E}. \text{ Тогда } X - \text{с.в.} \Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{M} X^{-1}(B) \in \mathcal{F} \end{array} \right|$$

*Доказательство.* ( $\Rightarrow$ ) Для  $\forall t X_t$  – случайный элемент со значениями в  $(S_t, \mathcal{B}_t)$ . Рассмотрим  $\mathcal{M}$  – система элементарных цилиндров в  $\mathcal{B}_T$ . По определению  $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{B}_T$ .

$\forall C(t, B_t) \in \mathcal{M}$  получаем

$$X^{-1}(C(t, B_t)) = \{\omega : X(\omega) \in C(t, B_t)\} = \{\omega : X_t(\omega) \in B_t\} = X_t^{-1}(B_t) \in \mathcal{F}$$

т.к.  $X_t$  – случайный элемент.

( $\Leftarrow$ ) По критерию измеримости отображения

$$\forall B \in \mathcal{B}_T X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$$

□

*Замечание.* Лемма устанавливает эквивалентное определение случайного процесса как единого случайного элемента со значениями в пространстве траекторий.

**Определение 3.4.** *Распределением*  $P_X$  случайного процесса  $X = (X_t, t \in T)$  называется вероятностная мера на  $(S, \mathcal{B}_T)$  т.ч.  $\forall B \in \mathcal{B}_T P_X(B) = P(X \in B)$ .

Это определение удобно только в том случае, когда «время» конечно. Для счетного (или тем более континуального) «времени» это определение очень трудно для понимания.

**Определение 3.5.** Пусть  $X = (X_t, t \in T)$  – случайный процесс,  $\forall n \in \mathbb{N} \forall t_1, \dots, t_n \in T$  пусть  $P_{t_1, \dots, t_n}$  обозначает распределение вектора  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ . Тогда набор вероятностных мер  $\{P_{t_1, \dots, t_n} : n \in \mathbb{N}, t_i \in T\}$  называется *набором конечномерных распределений* случайного процесса  $X$ , а сами  $P_{t_1, \dots, t_n}$  называются конечномерными распределениями  $X$ .

| Напоминание:  $P_{..}$  – вер. мера на  $(S_{t_1} \times \dots \times S_{t_n}, \mathcal{B}_{t_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{B}_{t_n})$ , определенная по правилу —2—.

**Лемма 3.2.** Пусть  $X$  и  $Y$  – случайные процессы с одинаковым временем, имеющие одно и то же пространство траекторий. Тогда  $P_X = P_Y \Leftrightarrow$  совпадают их конечномерные распределения.

Напоминание:

Единственность продолжения меры

Пусть  $(E, \mathcal{E})$  – измеримое пространство,  $P, Q$  – две вероятностные меры на нем. Пусть  $\mathcal{M} \subset \mathcal{E}$  –  $\pi$ -система и  $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{E}$ . Тогда

$$P|_{\mathcal{M}} = Q|_{\mathcal{M}} \Leftrightarrow P|_{\mathcal{E}} = Q|_{\mathcal{E}}$$

*Доказательство.* Рассмотрим цилиндры (не элементарные!) в  $S$ :

$\forall b \forall t_1 \dots t_n \in T \forall B_{t_1}, \dots, B_{t_n}, B_{t_i} \in \mathcal{B}_{t_i}$  определим  $C(t_1, \dots, t_n, B_{t_1}, \dots, B_{t_n}) = \{y \in S : y(t_i) \in B_{t_i} \forall i = 1..n\}$

Это пересечения каких-то элементарных цилиндров. Фактически, мы фиксируем значение случайного процесса в нескольких моментах времени, а не только в одном, как это делалось в случае элементарного цилиндра.

Пусть  $\mathcal{M}$  – множество цилиндров. Заметим, что  $\mathcal{M}$  –  $\pi$ -система, причем  $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{B}_T$ .

( $\Rightarrow$ ) Пусть  $t_1, \dots, t_n \in T, B_{t_1}, \dots, B_{t_n}, B_{t_i} \in \mathcal{B}_{t_i}$ . Тогда

$$\begin{aligned} P_{t_1, \dots, t_n}^X(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}) &= P((X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}) = \\ &= P(X \in C(t_1, \dots, t_n, B_{t_1}, \dots, B_{t_n})) = \\ &= P_X(C(t_1, \dots, t_n, B_{t_1}, \dots, B_{t_n})) = \\ &= P_Y(C(t_1, \dots, t_n, B_{t_1}, \dots, B_{t_n})) = \\ &= P((Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}) \in B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}) = P_{t_1, \dots, t_n}^Y(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}) \end{aligned}$$

Доказали, что распределения  $X$  и  $Y$  совпадают на прямоугольниках. Но  $B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}$  – порождающая  $\pi$ -система для  $\mathcal{B}_{t_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{B}_{t_n} \Rightarrow$  по единственности продолжения меры  $P_{t_1 \dots t_n}^x = P_{t_1 \dots t_n}^y$ .

( $\Leftarrow$ )

$$\begin{aligned} P_X(C(t_1, \dots, t_n, B_{t_1}, \dots, B_{t_n})) &= \\ P_{t_1 \dots t_n}^X(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}) &= \\ P_{t_1 \dots t_n}^Y(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}) &= \\ P_Y(C(t_1, \dots, t_n, B_{t_1}, \dots, B_{t_n})) & \end{aligned}$$

Доказали, что  $P_x$  и  $P_Y$  совпадают на  $\mathcal{M}$ . Но  $\mathcal{M}$  – порождающая  $\pi$ -система для  $\mathcal{B}_T \Rightarrow$  по единственности продолжения меры  $P_X = P_Y$ .  $\square$

Пусть  $P_{t_1 \dots t_n}, n \in \mathbb{N}, t_1 \dots t_n \in T$  – конечномерное распределение  $(X_t, t \in T)$ .

**Лемма 3.3.** Для  $\{P_{t_1 \dots t_n}\}$  выполнены условия симметрии (1) и согласованности (2):

1.  $\forall n \forall t_1 \dots t_n \in T \forall \sigma$  – перестановки  $\{1..n\}$  выполнено

$$P_{t_1 \dots t_n}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}) = P_{t_{\sigma_1} \dots t_{\sigma_n}}(B_{t_{\sigma_1}} \times \dots \times B_{t_{\sigma_n}})$$

2.  $\forall n \forall t_1 \dots t_n \in T$

$$P_{t_1 \dots t_n}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_{n-1}} \times S_{t_n}) = P_{t_1 \dots t_{n-1}}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_{n-1}})$$

*Доказательство.*

1.  $P_{t_1 \dots t_n}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}) = P(X_{t_1} \in B_{t_1}, \dots, X_{t_n} \in B_{t_n})$  – не зависит от перестановки.

2.  $\{X_{t_n} \in S_{t_n}\} = \Omega$ , поэтому это событие ничего не добавляет в пересечение.

Пусть теперь  $X$  – вещественный процесс, т.е.  $(S_t, \mathcal{B}_t) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \forall t \in T$ .

**Теорема 3.1** (Колмогорова о существовании случайного процесса, б/д). Пусть  $T$  – некоторое множество,  $\forall n \in \mathbb{N} \forall t_1 \dots t_n \in T$  задана вероятностная мера  $P_{t_1 \dots t_n}$  на  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ , причем для системы  $\{P_{t_1 \dots t_n}\}$  выполнены условия симметрии и согласованности. Тогда  $\exists$  вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  и вещественный случайный процесс  $(X_t, t \in T)$  т.ч.  $\{P_{t_1 \dots t_n}\}$  – это его конечномерные распределения.

□

**Теорема 3.2** (условия симметрии и согласованности для характеристических функций). Пусть  $T$  – некоторое множество,  $\forall t_1, \dots, t_n \in T$  задана вер. мера  $P_{t_1, \dots, t_n}$  на  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$  с х.ф.  $\varphi_{t_1, \dots, t_n}$ . Тогда  $\{P_{t_1, \dots, t_n}, n \in \mathbb{N}, t_i \in T\}$  обладают условиями симм. и согл.  $\Leftrightarrow$  выполнены условия симметрии и согласованности для х.ф.:

1.  $\varphi_{t_1, \dots, t_n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \varphi_{t_{\sigma_1}, \dots, t_{\sigma_n}}(\lambda_{\sigma_1}, \dots, \lambda_{\sigma_n})$
2.  $\varphi_{t_1, \dots, t_n}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 0) = \varphi_{t_1, \dots, t_{n-1}}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$

**Следствие 3.1.** Пусть  $T \subset \mathbb{R}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N} \forall t_1 < \dots < t_n \in T$  задана х.ф.  $\varphi_{t_1, \dots, t_n}$  в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда

$$\exists(\Omega, \mathcal{F}, P) \text{ и случайный процесс } (X_t, t \in T) \text{ т.ч. } \varphi_{t_1, \dots, t_n} - \text{х.ф. } (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall m \varphi_{t_1, \dots, t_n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)|_{\lambda_m=0} = \varphi_{t_1, \dots, t_{m-1}, t_{m+1}, \dots, t_n}(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n)$$

*Доказательство.*

( $\Rightarrow$ ) Очевидно из теоремы Колмогорова и теоремы об условиях симметрии и согласованности для хар. функций

( $\Leftarrow$ ) Пусть  $s_1, \dots, s_n \in T, s_i \neq s_j$ , рассмотрим  $t_1 < \dots < t_n$  т.ч.  $t_i = s_{\sigma_i}$  для некоторой перестановки  $\sigma$ .

Зададим

$$\varphi_{s_1, \dots, s_n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \varphi_{t_1, \dots, t_n}(\lambda_{\sigma_1}, \dots, \lambda_{\sigma_n})$$

Проверим условия симметрии и согласованности для таких хар. функций.

Условие симметрии дано по построению. Проверим согласованность.

$$\begin{aligned} & \varphi_{s_1, \dots, s_n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)|_{\lambda_n=0} = \\ & |s_n = t_m \Rightarrow \lambda_n = \lambda_{\sigma_m}| = \\ & \varphi_{t_1, \dots, t_n}(\lambda_{\sigma_1}, \dots, \lambda_{\sigma_n})|_{\lambda_{\sigma_m}=0} = \\ & |\text{условие следствия}| = \\ & \varphi_{t_1, \dots, t_{m-1}, t_{m+1}, \dots, t_n}(\lambda_{\sigma_1}, \dots, \lambda_{\sigma_{m-1}}, \lambda_{\sigma_{m+1}}, \dots, \lambda_{\sigma_n}) = \\ & |\text{по построению}| = \\ & \varphi_{s_1, \dots, s_{n-1}}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \end{aligned}$$

Условия симметрии и согласованности проверяются аналогично, если есть совпадающие  $s_i = s_j$ . По теореме Колмогорова искомый процесс существует. □

## 4 Процессы с независимыми приращениями

**Определение 4.1.** Пусть  $(X_t, t \geq 0)$  – действительный процесс. Он называется *процессом с независимыми приращениями*, если  $\forall n \in \mathbb{N} \forall 0 \leq t_1 < \dots < t_n$  случайные величины  $X_{t_1}, X_{t_2-t_1}, \dots, X_{t_n-t_{n-1}}$  независимы в совокупности.

**Теорема 4.1** (о существовании процессов с независимыми приращениями). Пусть  $Q_0$  – вер. мера на  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  с х.ф.  $\varphi_0$ , и  $\forall s, t$  задана вер. мера  $Q_{s,t}$  на  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  с х.ф.  $\varphi_{s,t}$ . Тогда процесс с независимыми приращениями

$$(X_t, t \geq 0) \text{ т.ч. } X_0 \stackrel{d}{=} Q_0, X_t - X_s \stackrel{d}{=} Q_{s,t}, s < t$$

существует тогда и только тогда, когда

$$\forall 0 \leq s < u < t \varphi_{s,t}(\tau) = \varphi_{s,u}(\tau) \varphi_{u,t}(\tau)$$

*Доказательство.*

( $\Rightarrow$ )  $\exists X_t \Rightarrow \forall s < u < t X_t - X_u$  и  $X_u - X_s$  независимы  $\Rightarrow \varphi_{s,t}(\tau) = \varphi_{X_t - X_s}(\tau) = \varphi_{X_t - X_u + X_u - X_s}(\tau) = \varphi_{X_t - X_u}(\tau) \varphi_{X_u - X_s}(\tau) = \varphi_{u,t}(\tau) \varphi_{s,u}(\tau)$ .

( $\Leftarrow$ ) Пусть  $X_t$  существует. Тогда  $\forall 0 < t_1 < \dots < t_n$  случайные величины. Компоненты вектора  $(X_{t_n} - X_{t_{n-1}}, \dots, X_{t_1} - X_0, X_0)$  независимы. Обозначим этот вектор как  $\xi$ .

$$\varphi_{\xi}(\lambda_n, \dots, \lambda_0) = \varphi_{X_{t_n} - X_{t_{n-1}}}(\lambda_n) \cdot \dots \cdot \varphi_{X_0}(\lambda_0) = \varphi_{t_n, t_{n-1}}(\dots)$$

Рассмотрим  $\eta = (X_{t_n}, \dots, X_0)^t$ . Ясно, что  $\eta = A\xi$ , где

$A = \text{—матр.1—}$

$\Rightarrow \varphi_{\eta}(\lambda \text{vector}) = E e^{i \langle \eta, \lambda v \rangle} =$  записи на бумажке

Теперь забудем про то, что процесс существует.  $\forall n \forall t_1 < \dots < t_n$  зададим  $\varphi_{t_1 \dots t_n}$  по формуле (\*).  $\square$

## 5 Гауссовские случайные процессы

**Определение 5.1.** Случайный вектор  $\xi = \xi_1, \dots, \xi_n$  называется гауссовским, если его х.ф. имеет вид

$$\varphi_{\xi}(t) = e^{i \langle a, t \rangle - \frac{1}{2} \langle \Sigma t, t \rangle}$$

где  $a \in \mathbb{R}^n$ , а  $\Sigma \in \text{Mat}(n \times n)$  — симметрическая и неотрицательно определенная. В этом случае пишут  $\xi \sim N(a, \Sigma)$ .

**Теорема 5.1** (три эквивалентных определения).

1. Вектор  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  гауссовский
2.  $\xi = A\eta + b$  п.н., где  $A \in \text{Mat}(n \times m)$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ ,  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ ,  $\eta_i$  — нез.  $N(0, 1)$
3.  $\forall \tau \in \mathbb{R}^n \langle \tau, \xi \rangle$  имеет одномерное нормальное распределение.

**Свойства гаусс. векторов**

1. Смысл параметров: если  $\xi \sim N(a, \Sigma)$ , то  $a = E\xi$ ,  $\Sigma = D\xi$  — матрица ковариаций.
2. Если  $\xi$  гауссовский, то  $A\xi$  гауссовский для всех матриц соответствующего размера (т.е. линейное преобразование гауссовского вектора также является гауссовским вектором).
3. Если  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \sim N(a, \Sigma)$ , то  $\xi_1, \dots, \xi_n$  нез. в совокупности  $\Leftrightarrow \Sigma$  диагональна  $\Leftrightarrow \xi_1, \dots, \xi_n$  некоррелированы.

**Определение 5.2.** Действительный случайный процесс  $(X_t, t \in T)$  называется гауссовским, если все его конечномерные распределения гауссовские:

$$\forall n \forall t_1, \dots, t_n \in T \text{ вектор } (X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \text{ гауссовский}$$

**Определение 5.3.** Процесс  $(X_t, t \in T)$  называется  $L^2$ -процессом, если  $\forall t \in T E|X_t^2| < +\infty$ .

Функция  $a(t) = EX_t$  называется функцией среднего процесса  $X_t$ .

Функция  $R(s, t) = \text{cov}(X_s, X_t)$  называется ковариационной функцией процесса  $X_t$ .

Функция  $K(s, t) = EX_s X_t$  называется корреляционной функцией процесса  $X_t$ .

*Замечание.* распределение гауссовского вектора однозначно определяется матожиданием и матрицей ковариаций  $\Rightarrow$  конечномерные распределения гауссовского процесса определяются функцией среднего и ковариационной функцией.

**Определение 5.4.** Функция  $f(x, y), x, y \in t$  называется неотрицательно определенной на  $T \times T$ , если

$$\forall n \forall t_1, \dots, t_n \in T \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \sum_{i,j=1}^n f(t_i, t_j) x_i x_j \geq 0$$

**Лемма 5.1.** Ковариационная и корреляционная функции случайного процесса симметричны и неотрицательно определены.

*Доказательство.* Пусть  $X_t$  —  $L^2$ -процесс,  $K(s, t)$  — его корреляционная функция. Тогда  $\forall n \forall t_1, \dots, t_n \in T \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i,j=1}^n f(t_i, t_j) x_i x_j \geq 0 = \sum_{i,j=1}^n (EX_{t_i} X_{t_j}) x_i x_j = E \left( \sum_{i,j=1}^n (x_i X_{t_i})(x_j X_{t_j}) \right) = E \left( \sum_{i=1}^n x_i X_{t_i} \right)^2 \geq 0$$

$\Rightarrow K(s, t)$  неотрицательно определена.

Теперь заметим, что  $R(s, t) = \text{cov}(X_s, X_t)$  — это корреляционная функция для  $Y_t = X_t - EX_t \Rightarrow$  она тоже неотрицательно определена.

Их симметричность очевидна.  $\square$

**Теорема 5.2** (о существовании гауссовских процессов). Пусть  $T$  — некоторое множество, на нем задана функция  $a(t)$ , и  $R(s, t)$  — симметричная и неотрицательно определенная функция на  $T \times T$ . Тогда существует вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  и гауссовский процесс  $(X_t, t \in T)$  т.ч.  $a(t) = EX_t$  и  $R(s, t) = \text{cov}(X_s, X_t)$ .

*Доказательство.* Для  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t_1, \dots, t_n \in T$  рассмотрим вектор  $a_{t_1, \dots, t_n} = (a(t_1), \dots, a(t_n))$ ,  $\Sigma_{t_1, \dots, t_n} = \|R(t_i, t_j)\|_{i,j=1}^n$ .

Тогда  $\Sigma_{t_1, \dots, t_n}$  неотрицательно определена. Рассмотрим х.ф.

$$\varphi_{t_1, \dots, t_n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = e^{i\langle a_{t_1, \dots, t_n}, \lambda \rangle - \frac{1}{2} \langle \Sigma_{t_1, \dots, t_n} \lambda, \lambda \rangle}$$

Легко видеть, что такой набор х.ф. обладает свойствами симметрии и согласованности:

$$\langle a_{t_1, \dots, t_n}, \lambda \rangle = \sum_{k=1}^n a(t_k)(\lambda_k) = |\forall \sigma| = \sum_{k=1}^n a(t_{\sigma(k)})(\lambda_{\sigma(k)})$$

$$\langle a_{t_1, \dots, t_n}, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \rangle|_{\lambda_n=0} = \langle a_{t_1, \dots, t_{n-1}}, (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \rangle$$

Можно проверить, что для ковариационной функции также выполняются подобные равенства.

По теореме Колмогорова это означает, что  $\exists (X_t, t \in T)$  т.ч.  $\varphi_{t_1, \dots, t_n}$  — х.ф.  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \Rightarrow X_t$  — гауссовский процесс и  $EX_t = a(t)$ ,  $\text{cov}(X_s, X_t) = R(s, t)$ .  $\square$

## 1 Процесс броуновского движения (винеровский процесс)

**Определение 5.5.** Случайный процесс  $(W_t, t \in 0)$  называется *винеровским*, если

1.  $W_0 = 0$  п.н.
2.  $W_t$  имеет независимые приращения
3.  $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$ ,  $t \geq s$

**Утверждение.** Винеровский процесс существует.

*Доказательство.* По критерию существования процессов с независимыми приращениями достаточно проверить, что  $\forall s \leq u \leq t$  (опускаем аргумент у х.ф.)

$$\varphi_{W_t W_s} = \varphi_{W_t - W_u} \varphi_{W_u - W_s}$$

Но т.к.  $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$

$$\varphi_{W_t - W_s}(\tau) = e^{-\frac{1}{2} \tau^2 (t-s)}$$

Очевидно, свойство выполнено и процесс существует.  $\square$

**Теорема 5.3** (эквивалентное определение винеровского процесса). Процесс  $(W_t, t \geq 0)$  является *винеровским*  $\Leftrightarrow$

1.  $W_t$  гауссовский

$$2. \forall t \geq 0 EW_t = 0$$

$$3. cov(W_s, W_t) = \min(s, t)$$

*Доказательство.*

( $\Rightarrow$ )  $W_t \sim N(0, t) \Rightarrow EW_t = 0$ . Посчитаем ковариационную функцию:

$$\begin{aligned} cov(W_s, W_t) &= |t > s| = cov(W_s, W_t - W_s + W_s) = \\ &= cov(W_s, W_t - W_s) + cov(W_s, W_s) = 0 + DW_s = s = \min(s, t) \end{aligned}$$

Пусть  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ ,  $\xi = (W_{t_1}, \dots, W_{t_n})$ . Вектор  $\eta = (W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_n - W_{n-1})$  имеет независимые нормальные компоненты  $\Rightarrow \eta$  – гауссовский вектор. Очевидно,  $\xi = A\eta$  (выписать  $A$ !), значит,  $\xi$  также является гауссовским  $\Rightarrow W_t$  – гауссовский процесс.

( $\Leftarrow$ ) Почему такой процесс существует? По теореме достаточно проверить, что  $\min(s, t)$  – неотрицательно определенная функция. Для этого можно заметить, что  $\min(s, t)$  – это ковариационная функция для пуассоновского процесса интенсивности 1. Значит, она неотрицательно определена.

$$EW_t = 0, DW_t = \min(t, t) = t \Rightarrow DW_0 = 0, EW_0 = 0 \Rightarrow W_0 = 0 \text{ п.н.}$$

Пусть  $0 \leq t_1 < \dots < t_n$  фиксированы. Тогда  $(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})$  – гаусс. вектор  $\Rightarrow \xi = (W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, \dots, W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_1})$  – тоже гауссовский как линейное преобразование гауссовского вектора. Значит, для независимости компонент  $\xi$  достаточно проверить, что они некоррелированы.

Пусть  $i > j$ ,  $t_0 = 0$ .

$$\begin{aligned} cov(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}, W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) &= \\ cov(W_{t_i}, W_{t_j}) - cov(W_{t_{i-1}}, W_{t_j}) - cov(W_{t_i}, W_{t_{j-1}}) + cov(W_{t_{i-1}}, W_{t_{j-1}}) &= \\ t_j - t_j - t_{j-1} + t_{j-1} &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow W_t$  имеет независимые приращения.

$$W_t - W_s \sim N(a, \sigma^2).$$

$$a = E(W_t - W_s) = 0$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= D(W_t - W_s) = cov(W_t - W_s, W_t - W_s) = \\ &= cov(W_t, W_t) + cov(W_s, W_s) - 2cov(W_t, W_s) = |t > s| = \\ &= t - 2s + s = t - s \end{aligned}$$

□

## 2 Непрерывность траекторий винеровского процесса

**Определение 5.6.** Процесс  $(Y_t, t \in T)$  называется *модификацией* процесса  $(X_t, t \in T)$ , если  $\forall t \in T$

$$P(Y_t = X_t) = 1$$

**Теорема 5.4** (Колмогорова о существовании непрерывной модификации, б/д). Пусть процесс  $(X_t, t \in [a, b])$  таков, что для некоторых  $C, \alpha, \varepsilon > 0$  выполнено:

$$\forall t, s \in [a, b] E|X_t - X_s|^\alpha \leq C|t - s|^{1+\varepsilon}$$

Тогда у  $X_t$  существует модификация  $Y_t$ , все траектории которой непрерывны.

**Следствие 5.1.** У  $W_t, t \geq 0$  существует непрерывная модификация.

*Доказательство.*

$$W_t - W_s \sim N(0, |t - s|) \Rightarrow E(W_t - W_s)^4 = 3(|t - s|)^2$$

Значит, у  $W_t$  существует непрерывная модификация на любом конечном отрезке.

Пусть  $W_t^{(n)}$  – непрерывная модификация  $W_t$  на отрезке  $[n, n+1]$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Рассмотрим процесс

$$X_t(\omega) = \{W_t^{(n)}(\omega), t \in [n, n+1)\}$$

Разрывы траекторий  $X_t$  возможны только в целых точках времени, когда  $W_{n+1}^{(n)}(\omega) \neq W_{n+1}^{(n+1)}(\omega)$ . Но  $W_t^{(n)}$  и  $W_t^{(n+1)}$  – модификации  $W_t$ , значит,

$$P(W_{n+1}^{(n)} = W_{n+1}) = 1 = P(W_{n+1}^{(n+1)} = W_{n+1}) \Rightarrow P(\exists n : W_{n+1}^{(n)} \neq W_{n+1}^{(n+1)}) = 0$$

Теперь рассмотрим

$$\tilde{X}_t(\omega) = \begin{cases} X_t(\omega), & \text{если } \forall n \ W_{n+1}^{(n)}(\omega) = W_{n+1}^{(n+1)}(\omega) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Это и будет искомая непрерывная модификация. □

*Замечание.* Условие  $\varepsilon > 0$  в теореме Колмогорова существенно.

*Доказательство.* Пусть  $(N_t, t \geq 0)$  – пуассоновский процесс. Тогда

$$E(N_t - N_s) = \lambda|t - s|$$

Значит,  $N_t$  удовлетворяет условию теоремы Колмогорова с  $\varepsilon = 0$ . Но траектории  $N_t$  разрывны почти наверное на всем  $\mathbb{R}_+$  и разрывны с положительной вероятностью на любом конечном отрезке. □

*Замечание.* Всюду далее, где это необходимо, считаем, что нам задана непрерывная модификация винеровского процесса.

**Теорема 5.5** (Пэли, Зигмунд, Винер, б/д). *С вероятностью 1 траектория винеровского процесса не дифференцируема ни в одной точке  $\mathbb{R}_+$ .*

**Теорема 5.6** (Закон повторного логарифма).

$$P\left(\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1\right) = 1$$

$$\left| \limsup_{t \rightarrow +\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{s \geq t} f(s) \right|$$

**Следствие 5.2.**

$$P\left(\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = -1\right) = 1$$

*Доказательство.* Рассмотрим  $Y_t = -W_t$  – тоже винеровский процесс. □

ЗПЛ означает, что с вероятностью 1, начиная с некоторого момента  $t_0 = t_0(\varepsilon, \omega)$  траектория  $W_t$  находится внутри области, ограниченной кривыми  $\pm(1 + \varepsilon)\sqrt{2t \ln \ln t}$ . В то же время  $\forall > 0$  траектория бесконечно много раз в обе стороны выходит из области, ограниченной кривыми  $\pm(1 - \varepsilon)\sqrt{2t \ln \ln t}$ , после момента времени  $T$ .

**Следствие 5.3** (локальный ЗПЛ).

$$\limsup_{t \rightarrow +0} f(t) = \lim_{t \rightarrow +0} \sup_{s \leq t} f(s)$$

$$P\left(\limsup_{t \rightarrow +0} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln \frac{1}{t}}} = 1\right) = 1$$

$$P\left(\liminf_{t \rightarrow +0} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln \frac{1}{t}}} = -1\right) = 1$$

*Доказательство.* Рассмотрим процесс  $B_t = t * W_{\frac{1}{t}} \mathbf{I}\{t > 0\}$ . Покажем, что  $B_t$  – винеровский.



1.  $\forall t_1, \dots, t_n \geq 0$  имеем  $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$  – линейное преобразование вектора  $(W_{\frac{1}{t_1}}, \dots, W_{\frac{1}{t_n}})$ , значит, это гауссовский вектор. Тогда  $B_t$  – гауссовский процесс.
2.  $EB_t = 0 \forall t \geq 0$ .
3.  $cov(B_t, B_s) = tcov(W_{\frac{1}{t}}, W_{\frac{1}{s}}) = \frac{ts}{\max(t, s)} = \min(t, s)$ .

Значит, по теореме об эквивалентном определении  $B_t$  – винеровский процесс. Тогда

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow +0} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln \frac{1}{t}}} &= |s = \frac{1}{t}| = \\ \limsup_{s \rightarrow +\infty} \frac{W_{\frac{1}{s}}}{\sqrt{2\frac{1}{s} \ln \ln s}} &= \\ \limsup_{s \rightarrow +\infty} \frac{s W_{\frac{1}{s}}}{\sqrt{2s \ln \ln s}} &= \\ \limsup_{s \rightarrow +\infty} \frac{B_s}{\sqrt{2s \ln \ln s}} &= 1 \text{ п.н. по ЗПЛ.} \end{aligned}$$

□

**Теорема 5.7** (марковское свойство  $W_t$ ). Пусть  $(W_t, t \geq 0)$  – винеровский процесс. Тогда  $\forall a > 0$  процесс  $X_t = W_{t+a} - W_a$  тоже винеровский.

Вопрос: можно ли заметить  $a$  на случайное время?

## 6 Фильтрации и марковские моменты

В этой главе считаем, что  $T \subset \mathbb{R}$ .

**Определение 6.1.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  – вероятностное пространство. Множество  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t, t \in T)$  называется *фильтрацией*, или *поток*  $\sigma$ -алгебр на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , если  $\forall s < t, s, t \in T$

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$$

**Определение 6.2.** Процесс  $(X_t, t \in T)$  называется согласованным с  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t, t \in T)$ , если  $\forall t \in T$   $X_t$  является  $\mathcal{F}_t$ -измеримым, то есть

$$\sigma(X_t) = \mathcal{F}_{X_t} \subset \mathcal{F}_t$$

ξ – случайная величина.  $\mathcal{F}_\xi$  –  $\sigma$ -алгебра, порожденная ξ:

$$\mathcal{F}_\xi = \{ \{ \xi \in B \} : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \}$$

**Определение 6.3** (обозначения).  $\{ \xi_\alpha \}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$  – множество с.в.,  $\sigma(\xi_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A})$  –  $\sigma$ -алгебра, порожденная всеми  $\xi_\alpha$  – это

*formule*

минимальная сиг-алгебра, содержащая все  $\mathcal{F}_{\xi_\alpha}$ .

**Определение 6.4.** Пусть  $(X_t, t \in T)$  – случайный процесс. Его *естественной фильтрацией* называется  $\mathcal{F}^X = (\mathcal{F}_t^X, t \in T)$ , где  $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, s \leq t, s \in T)$ .

*Замечание* (наблюдение). Любой процесс согласован со своей естественной фильтрацией.

**Определение 6.5.** Отображение  $\tau : \Omega \rightarrow T \cup \{+\infty\}$  называется *марковским моментом* относительно фильтрации  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t, t \in T)$  на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , если  $\forall t \in T$  выполнено

$$\{ \tau \leq t \} \in \mathcal{F}_t$$

$\tau$  называется *моментом остановки*, если  $\tau$  конечен п.н.

**Пример 1.**  $(X_n, n \in \mathbb{N})$  – действительный процесс.  $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\tau_B = \min\{n : X_n \in B\}$$

Тогда  $\tau_B$  – марковский момент отн.  $\mathcal{F}^X$ .

*Доказательство.*

$$\{\tau_B \leq n\} = \bigcup_{k=1}^n \{X_k \in B\} \in \mathcal{F}_n^x$$

□

Неформальный смысл.  $\tau$  – марковский момент, момент наступления события в процессе, если  $\forall t$  можно однозначно сказать, что  $\tau$  наступило к моменту времени  $t$  или еще нет, только по наблюдениям процесса  $X_s$  до момента времени  $t$  включительно.

**Теорема 6.1** (марковское свойство  $W_t$ , усиленный вариант). Пусть  $(W_t, t \geq 0)$  – винеровский процесс. Тогда  $\forall a > 0$  процесс  $X_t = W_{t+a} - W_a$  является винеровским и не зависит от  $\mathcal{F}_a^W = \sigma(W_s, s \leq a)$ .

**Определение 6.6.** Пусть  $\tau$  – марковский момент отн. на . Тогда сиг-алгеброй эф-тау называется

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : \forall t \in T \{\tau \leq t\} \cap A \in \mathcal{F}_t\}$$

1.  $\mathcal{F}_\tau$  – действительно сиг-алг
2. тау изм отн ф тау
3. если  $\tau = t = \text{const}$ , то  $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_t$

**Теорема 6.2** (строгое марковское свойство  $W_t$ ). Пусть  $(W_t, t \geq 0)$  – винеровский процесс, а  $\tau$  – момент остановки относительно  $\mathcal{F}^W$ . Тогда процесс  $X_t = W_{t+\tau} - W_\tau$  является винеровским и не зависит от  $\mathcal{F}_\tau$ .

**Лемма 6.1.** 1. Пусть  $\xi, \eta$  – случайные векторы. Тогда  $\xi \stackrel{d}{=} \eta \Leftrightarrow \forall f$  – непр., огр.

$$Ef(\xi)Ef(\eta)$$

2. Пусть  $x_i$  – случайный вектор. Тогда  $\xi$  независимо с некоторым событием  $A \Leftrightarrow \forall f$  – непр огр

$$E(f(\xi)I_A) = Ef(\xi)P(A)$$

*Доказательство.* 1.  $(\Rightarrow)$  очевидно.  $(\Leftarrow)$   $f(x) = \cos(\langle t, x \rangle)$  или  $\sin(\langle t, x \rangle)$  – огр. непр. функции  $\Rightarrow$  хф  $\xi$  и  $\eta$  совпадают  $\Rightarrow \xi \stackrel{d}{=} \eta$

2.  $(\Rightarrow)$  очевидно.  $(\Leftarrow)$   $x_i$  – нез. с  $A \Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \{\xi \in B\}$  нез. с  $A \Leftrightarrow \{\xi \in B\}$  нез. с  $A$  и  $B$  замкнуто.  $\{\xi \in B\}, B$  замкнуто –  $\pi$ -система и  $\sigma$  от нее – это  $\{\{\xi \in B\} : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$   
Для замкнутого  $B$  рассмотрим (записи на бумажке)

□

*СМС.* 1. Проверим, что  $W_\tau$  – случайная величина. Рассмотрим  $\forall n \in \mathbb{N}$

□

**Теорема 6.3** (принцип отражения, б/д). Пусть  $W_t$  – винеровский процесс,  $\tau$  – момент остановки относительно  $\mathcal{F}^W$ . Тогда процесс  $Z_t = \{W_t, t < \tau; 2W_\tau - W_t, t \geq \tau\}$  также является винеровским.

Далее будем изучать  $\tau_x = \inf\{t : W_t = x\}$  – первый момент достижения уровня  $x$ .

**Лемма 6.2.**  $\tau_x$  – момент остановки относительно  $\mathcal{F}^W$ .

*Доказательство.* Считаем, что нам задана непрерывная модификация  $W_t$ . Кроме того,  $x > 0$  (иначе аналогично).

$\{\tau_x > t\} = |\text{непрерывность тракторий}| = \{\forall s \leq t W_s < x\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{s \leq t : W_s \leq x - \frac{1}{k}\} = |\text{непр. траект.}| = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{s \leq t, s \in \mathbb{Q}} \{W_s \leq x - 1/k\} \in \mathcal{F}_t^W$ . Значит,  $\tau_x$  – действительно марковский момент.

Из ЗПЛ известно, что  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1$  п.н., то есть трактория п.н. растет неограниченно вверх. Тогда в силу непрерывности  $\exists t : W_t = x \Rightarrow P(\tau_x < +\infty) = 1$ . □

Вывод: для  $\tau_x$  выполнены строго марковское свойство и принцип отражения.

**Следствие 6.1.**  $M_t = \max_{0 \leq s \leq t} W_s$  является с.в.  $\mathcal{F}_t^W$ -измеримой, причем  $\{\tau_x \leq t\} = \{M_t \geq x\}, x \geq 0$ .

**Теорема 6.4.**  $\forall x, y \geq 0$

$$P(W_t < y - x, M_t \geq y) = P(W_t > y + x)$$

*Доказательство.* Если  $y = 0$ , то утверждение тривиально. Если же  $y > 0$ , то рассмотрим  $\tau_y$ . Это момент остановки, значит, к нему применим принцип отражения.

$Z_t = \{W_t, t \leq \tau_y; 2W_\tau - W_t, t \geq \tau_y\}$  является винеровским.

Обозначим через  $\sigma_y$  первый момент достижения  $y$  у  $Z_t$ . Тогда  $(W_t, \tau_y) \stackrel{d}{=} (Z_t, \sigma_y) \Rightarrow P(W_t < y - x, M_t \geq y) = P(W_t < y - x, \tau_y \leq t) = P(Z_t < y - x, \sigma_y \leq t) = |\sigma_y = \tau_y| = P(Z_t < y - x, \tau_y \leq t) = | \text{по опр. } Z_t | = P(W_\tau - W_t \leq y - x, \tau_y \leq t) = P(2y - W_t \leq y - x, \tau_y \leq t) = P(W_t \geq y + x, \tau_y \leq t) = P(W_t > y + x). \quad \square$

**Следствие 6.2** (теорема Башелье).

$$M_t \stackrel{d}{=} |W_t|$$

*Доказательство.*  $P(M_t \geq y) = P(M_t \geq y, W_t < y) + P(M_t \geq y, W_t \geq y) = P(W_t > y) + P(M_t \geq y, W_t \geq y) = P(W_t > y) + P(W_t \geq y) = 2P(W_t \geq y) = P(|W_t| \geq y). \quad \square$