Случайные процессы

17 января 2014 г.

Содержание

Введение. Историческая справка

Теория вероятностей: математический анализ случайных явлений.
Теория случайных процессов: стохастические модели и фактор времени.

Предпосылки к изучению

- 1827, Р. Броун – броуновское движение частиц в воде $\Rightarrow$ процесс броуновского движения
- 1903, Л. Башелье – колебания курсов бумаг на бирже $\Rightarrow$ процесс броуновского движения
- 1906, А.А. Марков – анализ комбинаций гласных и согласных в романе «Евгений Онегин» $\Rightarrow$ марковские цепи
- 1903, Ф. Лундберг – модель деятельности страховой компании $\Rightarrow$ пуассоновский процесс
- 1873, Ф. Гальтон, Г. Ватсон – анализ вымирания аристократических фамилий в Великобритании $\Rightarrow$ ветвящиеся процессы
- Начало XX века, А. Эрланг – изучение загрузки телефонных сетей $\Rightarrow$ теория массового обслуживания

Применения

- Физика (стохастическое исчисление, теория гиббсовских полей)
- Экономика (финансовая математика)
- Биология

Часть I

Случайные процессы

Общие определения

Определение 0.1. Пусть (Ω, F, P) – вероятностное пространство, а $(E, \mathcal{E})$ – измеримое пространство. Отображение $\xi : \Omega \to E$ называется *случайным элементом*, если оно измеримо, т.е.

$$\forall B \in \mathcal{E} \ \xi^{-1}(B) = \{\omega : \xi(\omega) \in B\} \in F$$

Определение 0.2. Пусть T – некоторое множество и на (Ω, F, P) для $\forall t \in T$ задан случайный элемент X_t. Тогда набор $X = X_t, t \in T$ называется *случайной функцией* на множестве T.

Замечание. Вообще говоря, не предполагается, что все X_t принимают значения в одном и том же пространстве.

Определение 0.3. Пусть $X = (X(t, \omega))$. При фиксированном $\omega = \omega_0$ функция

$$\tilde{X}_{\omega_0}(t) = X_t(\omega)|_{\omega=\omega_0}$$

на T называется *траекторией* или *реализацией* случайной функции $X = \{X_t : t \in T\}$.

1 Терминология

- Если $T \subset \mathbb{R}$, то случайная функция называется случайным процессом.
- Если $T = [a, b], (a, b), [a, +\infty)$ и т.д., то процесс X называется процессом с непрерывным временем.
- Если $T = \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ и т. д. то процесс X называется процессом с дискретным временем.
- Если $T \subset \mathbb{R}^d$, то процесс X называется случайным полем.

Замечание. Далее всюду будем использовать термин «случайный процесс».

2 Примеры

1. $X_t(\omega) = \xi(\omega) \cdot f(t)$, где $\xi(\omega)$ – с.в., $f(t)$ – детерминированная функция.

2. Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ – независимые случайные векторы, $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, $S_0 = 0$. Тогда процесс с дискретным временем $\{S_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ называется случайным блужданием.

   Траектория: см. рис. 1

3. Пусть $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ – норсв, $\xi_n >= 0$, $\xi_n \neq const$ п.н., $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, $S_0 = 0$. Тогда процесс

$$X_t = \sup\{n : S_n <= t\}, t >= 0$$

   называется процессом восстановления.

   Траектория: см. рис. 2

   Утверждение. *Процесс восстановления конечен почти наверное.*

   Доказательство. Пусть сначала $E\xi_i = a > 0$.
   Заметим, что $\{S_k \leqslant t\} \supset \{S_{k+1} \leqslant t\}$.
   $\{X_t = +\infty\} = \{\sup\{n : S_n \leqslant t\} = +\infty\} = \{\forall n : S_n \leqslant t\} = \bigcap\limits_n \{S_n \leqslant t\} \Rightarrow |$по непрерывности вероятностной меры$| \Rightarrow P(X_t = +\infty) = P(\forall n S_n \leqslant t) = \lim\limits_{n\to\infty} P(S_n \leqslant t) = \lim\limits_{n\to\infty} P(\frac{S_n}{n} \leqslant \frac{t}{n}) \leqslant |$для больших n$| \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} P(\frac{S_n}{n} < \frac{a}{2})$.
   Но по УЗБЧ $S_n \to a \Rightarrow P(S_n \leqslant a/2) \to P(a \leqslant a/2) = 0$.
   В силу того, что $X_t \uparrow$ при $t \uparrow$, $P(\exists t : X_t = +\infty) = P(\exists n : x_n = +\infty) \leqslant \sum\limits_n P(x_n = \infty) = 0$.

   Если $E\xi_i = +\infty$, то случай сводится к предыдущему: $\exists C > 0 : \tilde{\xi_n} = \min(\xi_n, C), E\tilde{\xi_n} > 0$. Тогда $P(X_t = +\infty) = P(\forall n S_n \leqslant t) \leqslant P(\tilde{S_n} \leqslant t) = 0$ (доказали в случае конечного матожидания). □

   Откуда может возникнуть процесс восстановления? Физическая модель – «Модель перегорания лампочки». ξ_n – случайная величина, равная времени работы лампочки, X_t – сколько раз пришлось заменить лампочку в к моменту времени t.

4. Модель страхования Крамера-Лундберга

   Пусть есть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}, \{\eta_m, m \in \mathbb{N}\}, \xi_n \stackrel{d}{=} \xi_m, \eta_n \stackrel{d}{=} \eta_m, \{\xi_n, \eta_m\}$ независимы, $\xi_n, \eta_n \geqslant 0, \xi_n$ невырождены.

   Пусть $\{X_t, t \geqslant 0\}$ – процесс восстановления, построенный по случайным величинам $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}, y_0, c > 0$. Тогда $Y_t = y_0 + c \cdot t - \sum\limits_{k=1}^{X_t} \eta_k$ – модель страхования Крамера-Лундберга.

   Смысл параметров

   - y_0 – начальный капитал
   - c – скорость поступления страховых взносов
   - $S_k = \xi_1 + \dots + \xi_k$ – время k-й выплаты, η_k – размер этой выплаты
   - X_t – число выплат к моменту времени $t > 0$
   - $\sum\limits_{k=1}^{X_t} \eta_k$ – общий размер выплат к этому моменту времени
   - Y_t – текущий капитал компании

1 Случайное блуждание на прямой

Определение 1.1. Пусть $\xi_n, n \in \mathbb{N}$ – норсв, $P(\xi_n = 1) = p$, $P(\xi_n = -1) = q = 1 - p$. Тогда процесс $(S_n, n \in \mathbb{Z}_+), S_0 = 0, S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ называется *простейшим случайным блужанием на прямой.* Если $p = q = \frac{1}{2}$, то блуждание называется *симметричным.*

1 Вопросы

1. вероятность возвращения в ноль
2. распределение первого момента возвращения в ноль
3. среднее время в нуле
4. геометрия траектории

Замечание. Последние два вопроса – только для симметричного случая.

2 Возвращение в ноль

$P(\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ вернется в ноль) – ?

$P(s1 \neq 0, s2 \neq 0, \dots, s_{2n-1} \neq 0, s_{2n} = 0)$ – ?

Вероятность каждой траектории, приводящей в 0 в момент времени $2n$, одна и та же и равна $(pq)^n$. Каждую траекторию длины $2n$ можно сопоставить с вектором $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n}\}, \varepsilon_i \in \{-1, 1\}$.

Определение 1.2. Траектория $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n})$ длины $2n$ называется *положительной*, если $\forall k < 2n \ \sum\limits_{j=1}^{k} \varepsilon_j > 0$ и $\sum\limits_{j=1}^{2n} \varepsilon_j = 0$. Число таких траекторий обозначим через $\tilde{C_n}$.

Утверждение. *Наблюдение:* $P(S_1 \neq 0, \dots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} = 0) = 2 \cdot \tilde{C_n} \cdot (pq)^n$.

Определение 1.3. Траектория $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n})$ длины $2n$ называется *неотрицательной*, если $\forall k < 2n \ \sum\limits_{j=1}^{k} \varepsilon_j \geqslant 0$ и $\sum\limits_{j=1}^{2n} \varepsilon_j = 0$. Число таких траекторий обозначим через C_n.

Утверждение. $\tilde{C_n} = C_{n-1}$.

Доказательство. Смотри рисунок 3.

Чтобы получить из положительной траектории неотрицательную, покажем, что в начале стоит 1, в конце – -1. Чтобы получить из неотрицательной положительную, добавим в начало 1, а в конец -1. Получили биекцию между положительными траекториями длины $2n$ и неотрицательными длины $2n-2$. □

Утверждение. *Пусть* $C_0 = 1$. *Тогда* $C_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} C_k \cdot C_{n-1-k}$.

Доказательство. Смотри рисунок 4.

Пусть $2k$ – первый момент возвращения траектории в ноль. Ясно, что таких траекторий $\tilde{C_k} \cdot C_{n-k}$. Суммируя по $k = 1 \dots n$:

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} \tilde{C_k} \cdot C_{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \cdot C_{n-k-1}$$

□

Вывод: C_n – это числа Каталана. $C_n = \frac{1}{n+1} \cdot C_{2n}^n$.

Производящая функция: $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n t^n = \frac{1}{2t}(1 - \sqrt{1-4t}), |t| \leqslant \frac{1}{4}$.

Теорема 1.1 (распределение момента возвращения в ноль)**.**

$$P(S_1 \neq 0, \dots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} = 0) = \frac{1}{2n-1} C_{2n}^n (pq)^n$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&P(S_1 \neq 0, \dots, S_{2n-1} \neq 0, s_{2n} = 0) = \\
&2\tilde{C_n}(pq)^n = |\text{ утв.1 }| = \\
&2C_{n-1}(pq)^n = \\
&\frac{2}{n}C_{2n-2}n - 1(pq)^n = \\
&\frac{2n}{n \cdot n}C_{2n-2}^{n-1}(pq)^n = \\
&\frac{1}{2n-1}C_{2n}^{n}(pq)^n.
\end{aligned}$$

□

Теорема 1.2 (вероятность возвращения в ноль)**.**

$$P(\{S_n, n \geqslant 1\} \textit{вернется в ноль}) = 1 - |p - q|$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&P(\{S_n, n \geqslant 1\}\text{вернется в } 0) = \\
&\sum_{n=1}^{\infty} P(S_1 \neq 0, \dots, S_{2n} = 0) = \\
&\sum_{n=1}^{\infty} 2\tilde{C_N}(pq)^n = \\
&\sum_{n=1}^{\infty} 2C_{n-1}(pq)^n = \\
&\sum_{n=0}^{\infty} 2C_n(pq)^{n-1} = \\
&2pq \cdot f(pq) = \\
&2pq * \frac{1}{2pq}(1 - \sqrt{1 - 4pq}) = |\text{ т.к. } (p+q)^2 = 1| = \\
&1 - \sqrt{(p-q)^2} = 1 - |p - q|
\end{aligned}$$

□

Следствие 1.1. *Симметричное случайное блуждание на прямой возвратно с вероятностью 1.*

3 Среднее время нахождения в нуле

Пусть $(S_n, n \in \mathbb{N})$ – простейшее симметричное случайное блуждание на прямой. Обозначим через $L_n(0)$ число нулей в последовательности $S_k, k = 0 \dots n$. Вопрос: $EL_n(0) \sim ?$

Лемма 1.1.

$$EL_n(0) = E|S_{n+1}|$$

Доказательство. Рассмотрим $|S_{n+1}|$.

$$|S_{n+1}| = |S_n + \xi_{n+1}| = \begin{cases} S_n + \xi_{n+1}, & S_n > 0 \\ 1, & S_n = 0 \\ -(S_n + \xi_{n+1}), & S_n < 0 \end{cases}$$

$|S_{n+1}| = (S_n + \xi_{n+1})\mathrm{I}\{S_n > 0\} + \mathrm{I}\{S_n = 0\} - (S_n + \xi_{n+1})\mathrm{I}\{S_n < 0\} = \mathrm{I}\{S_n = 0\} + (S_n + \xi_{n+1})\operatorname{sign}(S_n)$

Отсюда $|S_{n+1}| = \mathrm{I}\{S_n = 0\} + |S_n| + \xi_{n+1}\operatorname{sign}(S_n) = |\text{индукция}| = \sum\limits_{k=0}^{n}(\mathrm{I}\{S_k = 0\} + \xi_{k+1}\operatorname{sign}(S_k)) = L_n(0) + \sum\limits_{k=0}^{n}\xi_{k+1}\operatorname{sign}(S_k)$.

Берем матожидание у обеих частей равенства: $E|S_{n+1}| = EL_n(0) + \sum\limits_{k=0}^{n} E(\xi_{k+1}\operatorname{sign}(S_k)) = EL_n(0) + \sum\limits_{k=0}^{n} E\xi_{k+1}E\operatorname{sign}(S_k) = EL_n(0)$. □

Согласно ЦПТ, $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \eta \sim \mathcal{N}(0,1)$.

По теореме о наследовании сходимости $\frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} |\eta| \sim |\mathcal{N}(0,1)|$.

Вопрос: верно ли данное?

$$E\frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \to E|\eta| = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}|x|e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Определение 1.4. Множество случайных величин $\{\xi_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ называется *равномерно интегрируемым*, если

$$\lim_{c\to+\infty}\sup_{\alpha\in\mathfrak{A}} E(|\xi_\alpha|\,\mathrm{I}\{|\xi_\alpha| \geqslant c\}) = 0$$

Смысл: «хвосты» распределения равномерно малы.

Теорема 1.3 (б/д)**.** *Пусть* $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *– с.в.,* $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$. *Тогда*

$$E\xi_n \to E\xi \Leftrightarrow \{\xi_n, n \in \mathbb{N}\} \text{ *равномерно интегрируемо*}$$

Замечание. Если сходимость $\xrightarrow{p}$ или $\xrightarrow{\text{п.н.}}$, то равномерная интергрируемость $\Leftrightarrow \xi_n \xrightarrow{L_1} \xi$.

Теорема 1.4 (достаточное условие равномерной интегрируемости)**.** *Пусть* $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *– с.в.,* $G(t) \geqslant 0 :$ $\frac{G(t)}{t} \to +\infty$ *при* $t \to +\infty$. *Если* $\sup\limits_n EG(|\xi_n|) < +\infty$, *то последовательность равномерно интегрируема.*

Доказательство. Положим $M = \sup\limits_n EG(|\xi_n|)$. $\forall\varepsilon > 0$ положим $a = \frac{M}{\varepsilon}$. Возьмем $c > 0 : \frac{G(t)}{t} > a\ \forall t > c$. Тогда $\forall t > c, \forall n \in \mathbb{N}$

$$E(|\xi_n|\mathrm{I}\{|\xi_n| \geqslant t\}) \leqslant E\left(\frac{G(|\xi_n|)}{a}\mathrm{I}\{|\xi_n| \geqslant t\}\right) \leqslant E\frac{G(|\xi_n|)}{a} \leqslant \frac{M}{a} = \varepsilon$$

$\Leftrightarrow \{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ равномерно интегрируема. □

Теорема 1.5 (среднее время в нуле)**.**

$$EL_n(0) \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$$

Доказательство. Согласно лемме, $EL_n(0) = E|S_{n+1}|$. Покажем, что $\{\xi_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}\}$ равномерно интегрируема. Подберем соответствующую функцию G. Попробуем $G(t) = t^2$.

$$EG(|\xi_n|) = E\xi_n^2 = \frac{(E\xi_n^2)}{n} = \frac{DS_n}{n} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} D\xi_k}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

Согласно достаточному условию, получили, что последовательность $\frac{|S_n|}{\sqrt{n}}$ равномерно интегрируема. Тогда по теореме

$$\frac{E|S_n|}{\sqrt{n}} \to E\eta = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(\eta \sim \mathcal{N}(0,1))$$

Отсюда

$$EL_n(0) = E|S_{n+1}| \sim \sqrt{\frac{2(n+1)}{\pi}} \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$$

□

4 Свойства траекторий

Теорема 1.6 (закон повторного логарифма, б/д)**.**

$$P\left(\varlimsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{\sqrt{2n\ln\ln n}}=1\right)=1$$

Следствие 1.2.

$$P\left(\varliminf_{n\to\infty}\frac{S_n}{\sqrt{2n\ln\ln n}}=-1\right)=-1$$

Доказательство. Рассмотрим $X_n=-S_n$ – симметричное случайное блуждание $\Leftrightarrow$ по ЗПЛ получаем, что

$$\text{п.н. } 1=\varlimsup_{n}\frac{X_n}{\sqrt{2n\ln\ln n}}=-\varliminf_{n}\frac{S_n}{\sqrt{2n\ln\ln n}}$$

□

Смысл: — рис.5 —

ЗПЛ означает, что с вероятностью 1 траектория случайного блуждания начиная с некоторого момента лежит внутри между кривыми $\pm(1+\varepsilon)\sqrt{2n\ln\ln n}$ и в то же время бесконечно много раз выходит в обе стороны из области, ограниченной кривыми $\pm(1-\varepsilon)\sqrt{2n\ln\ln n}$.

2 Ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона

Физическая модель: — рис.6 — В каждый следующий момент времени каждая частица распадается на некоторое случайное число таких же частиц.

Мат. модель: Пусть ξ – случайная величина со значениями в $\mathbb{Z}_+$. $\{\xi_k^{(n)},k,n\in\mathbb{N}\}$ – независимые случайные величины с тем же распределением, что и ξ. Положим

$$X_0=1,X_1=\xi_1^{(1)},X_n=\sum_{k=1}^{X_{n-1}}\xi_k^{(n)}$$

Определение 2.1. $\{X_n,n\in\mathbb{Z}_+\}$ – *ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона*, построенный по с.в. ξ.

- X_n – число частиц в n-м поколении
- $\xi_k^{(n)}$ – число потомков k-й частицы в $n-1$-м поколении

Вопрос: какова вероятность вырождения процесса?

1 Производящие функции

Определение 2.2. Пусть ξ – случайная величина. Тогда ее *производящей функцией* называется

$$\varphi_\xi(z)=Ez^\xi,z\in\mathbb{R}$$

Свойства производящих функций

1. $\varphi_\xi(1)=1$
2. $\varphi_\xi'(1)=E\xi$
3. Если ξ и η независимы, то $\varphi_{\xi+\eta}(z)=\varphi_\xi(z)\varphi_\eta(z)$

Если ξ принимает значения в $\mathbb{Z}_+$, то введем $p_k=P(\xi=k),k\in\mathbb{Z}_+$.

4. $\varphi_\xi(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}z^kp_k$

5. $\varphi_\xi(0) = p_0$

6. $p_k = \frac{f_\xi^{(k)}(0)}{k!}$

7. Ряд для $\varphi_\xi(z)$ сходится абсолютно и равномерно в области $\{|z| \leqslant 1\}$

8. $\varphi_\xi(z)$ непрерывно дифференцируема бесконечное число раз в области $\{|z| < 1\}$

Пусть далее $\{X_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ – ветвящийся процесс Г.-В., построенный по ξ.

Лемма 2.1.

$$\varphi_{X_{n_1}}(z) = \varphi_{X_n}(\varphi_\xi(z))$$

Доказательство. $\varphi_{X_{n+1}}(z) = Ez^{X_{n+1}}$

$$E\left(z^{X_{n+1}}|X_n = m\right) = E\left(z^{\sum\limits_{k=1}^{X_n}\xi_k^{(n+1)}}\middle|X_n = m\right) = E\left(z^{\sum\limits_{k=1}^{m}\xi_k^{(n+1)}}\middle|X_n = m\right) = Ez^{\sum\limits_{k=1}^{m}\xi_k^{(n+1)}} = (\varphi_\xi(z))^m$$

Значит,

$$\varphi_{X_{n+1}} = Ez^{X_{n+1}} = E(E(z^{X_{n+1}}|X_n)) = E(\varphi_\xi(z))^m\Big|_{m=X_n} = \varphi_{X_n}(\varphi_\xi(z))$$

□

Следствие 2.1.

1. $\varphi_{X_n}(z) = \underbrace{\varphi_\xi(\varphi_\xi(\ldots\varphi_\xi(}_{n\ \text{раз}}z)\ldots))$

2. $\varphi_{X_{n+1}}(z) = \varphi_\xi(\varphi_{X_n}(z))$

   Доказательство. Применяем индуктивно лемму 2.1:

$$\varphi_{X_{n+1}} = \underbrace{\varphi_\xi(\varphi_\xi(\ldots\varphi_\xi(}_{n+1\ \text{раз}}z)\ldots)) = \varphi_\xi(\varphi_{X_n}(z))$$

□

2 Вероятность вырождения процесса

Положим $q_n = P(X_n = 0)$, $q = P(\text{процесс выродился}) = P(\exists n : X_n = 0)$

Лемма 2.2.

$$q_n \leqslant q_{n+1} \text{ и } q = \lim_n q_n$$

Доказательство. $\{X_n = 0\} \subset \{X_{n+1} = 0\} \Rightarrow q_n \leqslant q_{n+1}$

Но $P(\exists n : X_n = 0) = P\left(\bigcup\limits_n \{X_n = 0\}\right) = |\text{по непрерывности вероятностной меры}| = \lim\limits_n P(X_n = 0) = \lim\limits_n q_n$. □

Лемма 2.3. *Вероятность вырождения q является решением уравнения*

$$s = \varphi_\xi(s)$$

Доказательство.

$$q \leftarrow q_n = P(X_n = 0) = \varphi_{X_n}(0) = \varphi_\xi(\varphi_{X_{n-1}}(0)) = \varphi_\xi(q_{n-1}) \to \varphi_\xi(q)$$

□

Вопрос: что делать, если на $[0,1]$ решений несколько?

Всегда есть решение $s=1$.

Теорема 2.1 (о вероятности вырождения). *Пусть $\xi \neq 1$ п.н. Пусть $\mu = E\xi$ (м.б. $\mu = +\infty$). Тогда*

1. *Если $\mu \leqslant 1$, то уравнение*
$$s = \varphi_\xi(s)$$
имеет только одно решение $s=1$ на $[0,1]$. Тогда $q=1$.

2. *Если $\mu > 1$, то уравнение*
$$s = \varphi_\xi(s)$$
имеет единственное решение $s_0 \in [0,1)$. В этом случае $q = s_0$.

Доказательство.

1. Рассмотрим производную $\varphi'_\xi(s) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} ks^{k-1}P(\xi = k)$ для $s \in [0,1]$. Заметим, что эта функция строго возрастает (поскольку каждое слагаемое строго возрастает) и положительна (поскольку есть хоть одна ненулевая вероятность). Действительно, если $\varphi_\xi(s) = 0$ для $s > 0 \Rightarrow P(\xi = k) = 0 \ \forall k \geqslant 1$. Но тогда $P(\xi = 0) = 1$ и $q = 1$.

   Далее считаем производную положительной.

   Для $s \in (0,1)$:
$$1 - \varphi_\xi(s) = \varphi'_\xi(\theta)(1-s)$$
   где $\theta = \theta(s) \in (s,1)$ Но $\varphi'_\xi(\theta) < \varphi'_\xi(1) = \mu = 1$, т.к. производная строго возрастает.
$$\Rightarrow 1 - \varphi_\xi(s) < 1 - s \text{ при } s \in [0,1) \Rightarrow s < \varphi_\xi(s)$$
   Решений, отличных от 1, нет.

   График в этом случае выглядит так: — рис.7 —

2. Рассмотрим
$$\varphi''_\xi(s) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)s^{k-2}P(\xi = k) \text{ для } s \in [0,1)$$
   Функция строго возрастает и положительна на $(0,1)$.

   Действительно, если вдруг $\varphi''_\xi(s) = 0 \Rightarrow \forall k \geqslant 2 \ P(\xi = k) = 0 \Rightarrow \xi < 1$ п.н. $\Rightarrow E\xi = \mu \leqslant 1$, что противоречит условию.

   Теперь считаем, что $\varphi'_\xi(s)$ строго возрастает на $[0,1)$.
$$\Rightarrow 1 - \varphi'_\xi(s) \text{ меняет знак на } [0,1) \text{ не более одного раза}$$
$$1 - \varphi'_\xi(0) = 1 - P(\xi = 1) > 0$$
$$1 - \varphi'_\xi(1) = 1 - \mu < 0$$
$$\Rightarrow 1 - \varphi'_\xi(s) \text{ меняет знак ровно один раз}$$
   График выглядит так: — рис.8 —

   Пусть $\varphi'_\xi(s_1) = 1$. Что можно сказать про $s - \varphi_\xi(s)$? При $s < s_1$ возрастает, при $s > s_1$ возрастает.

   Если $\varphi_\xi(0) = P(\xi = 0) = 0$, то $s - \varphi_\xi(s)|_{s=0} = 0$ — рис.9 —, то есть ровно один корень $s = 0 \in [0,1)$. Ясно, что в этом случае $\boxed{q = 0}$.

   Если $\varphi_\xi(0) > 0$, то $s - \varphi_\xi(s)|_{s=0} < 0 \Rightarrow \exists s_0$ – единственное решение уравнения на $[0,1)$

   Заметим, что при $s < s_0$ $s < \varphi_\xi(s)$, а при $s > s_0$ $s > \varphi_\xi(s)$.

   Но $q_n = \varphi_\xi(q_{n-1}) \leqslant |\text{т.к. } q_n \geqslant q_{n-1}| \leqslant \varphi_\xi(q_n) \Rightarrow q_n \notin (s_0, 1)$.

   Если $q_n = 1$, то $q_{n-1} = 1$, т.к. $\varphi_\xi(s) = 1 \Leftrightarrow s = 1$. По индукции получаем, что $q_0 = 1$. Но $q_0 = 0$, т.к. в нулевой момент времени всегда есть одна частица. Значит, $q \in [0, s_0]$ как предел $q_n \Rightarrow q = s_0$.

   График: — рис 11 —

$\square$

<u>Вывод:</u> вероятность вырождения – это наименьший корень уравнения $s = \varphi_\xi(s)$ из отрезка $[0, 1]$.

<u>Интерпретация:</u> если среднее число потомков меньше 1, то процесс обречен на вымирание. Иначе есть ненулевая вероятность того, что мы будем живы до бесконечности.

3 Конечномерные распределения случайных процесов

Пусть $(X_t, t \in T)$ – случайный процесс на (Ω, F, P), и X_t принимает значения в $(S_t, \mathcal{B}_t)$.

Определение 3.1. Множество $S = \prod\limits_{t \in T} S_t$ называется *пространством траекторий случайного процесса.*

$$S = \{y = (y(t), t \in t) : \forall t \in T \; y(t) \in S_t\}$$

Определение 3.2. Для $\forall t \in T$ и $B_t \in \mathcal{B}_t$ введем *элементарный цилиндр* с основанием B_t:

$$C(t, B_t) = \{y \in S : y(t) \in B_t\}$$

<u>Смысл:</u> это все траектории, проходящие через B_t в момент времени t. — рис.12 —

Определение 3.3. Минимальная σ-алгебра $\mathcal{B}_T$, содержащая все эти элементарные цилиндры, называется *цилиндрической σ-алгеброй* на S.

$$\mathcal{B}_T = \sigma\{C(t, B_t) : t \in T, B_t \in \mathcal{B}_t\}$$

$(S, \mathcal{B}_T)$ – измеримое пространство.

Лемма 3.1. $X = (X_t, t \in T)$ *является случайным процессом* $\Leftrightarrow$ $X : \Omega \to S$ *является измеримым относительно цилиндрической σ-алгебры* $\mathcal{B}_T$.

> <u>Напоминание</u> Критерий измеримости отображения
> $X : \Omega \to E, \; \mathcal{M} \subset \mathcal{E}$ т.ч. $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{E}$. Тогда X – с.в. $\Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{M} \; X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$

Доказательство. ($\Rightarrow$) Для $\forall t X_t$ – случайный элемент со значениями в $(S_t, \mathcal{B}_t)$. Рассмотрим $\mathcal{M}$ – система элементарных цилиндров в $\mathcal{B}_T$. По определению $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{B}_T$.

$\forall C(t, B_t) \in \mathcal{M}$ получаем

$$X^{-1}(C(t, B_t)) = \{\omega : X(\omega) \in C(t, B_t)\} = \{\omega : X_t(\omega) \in B_t\} = X_t^{-1}(B_t) \in \mathcal{F}$$

т.к. X_t – случайный элемент.

($\Leftarrow$) По критерию измеримости отображения

$$\forall B \in \mathcal{B}_T \; X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$$

$\square$

Замечание. Лемма устанавливает эквивалентное определение случайного процесса как единого случайного элемента со значениями в пространстве траекторий.

Определение 3.4. *Распределением* P_X случайного процесса $X = (X_t, t \in T)$ называется вероятностная мера на $(S, \mathcal{B}_T)$ т.ч. $\forall B \in \mathcal{B}_T \; P_X(B) = P(X \in B)$.

Это определение удобно только в том случае, когда «время» конечно. Для счетного (или тем более континуального) «времени» это определение очень трудно для понимания.

Определение 3.5. Пусть $X = (X_t, t \in T)$ – случайный процесс, $\forall n \in \mathbb{N} \; \forall t_1, \ldots, t_n \in T$ пусть $P_{t_1,\ldots,t_n}$ обозначает распределение вектора $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$. Тогда набор вероятностных мер $\{P_{t_1,\ldots,t_n} : n \in \mathbb{N}, t_i \in T\}$ называется *набором конечномерных распределений* случайного процесса X, а сами $P_{t_1,\ldots,t_n}$ называются конечномерными распределениями X.

| Напоминание: $P_{..}$ – вер.мера на $(S_{t_1} \times \dots \times S_{t_n}, \mathcal{B}_{t_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{B}_{t_n})$, определенная по правилу —2—.

Лемма 3.2. *Пусть X и Y – случайные процессы с одинаковым временем, имеющие одно и то же пространство траекторий. Тогда $P_X = P_Y \Leftrightarrow$ совпадают их конечномерные распределения.*

| Напоминание:
| Единственность продолжения меры
| Пусть $(E, \mathcal{E})$ – измеримое пространство, P, Q – две вероятностные меры на нем. Пусть $\mathcal{M} \subset \mathcal{E}$ – π-система и $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{E}$. Тогда

$$P|_{\mathcal{M}} = Q|_{\mathcal{M}} \Leftrightarrow P|_{\mathcal{E}} = Q|_{\mathcal{E}}$$

Доказательство. Рассмотрим цилиндры (не элементарные!) в S:

$\forall b \ \forall t_1 \dots t_n \in T \ \forall B_{t_1}, \dots, B_{t_n}, B_{t_i} \in \mathcal{B}_{t_i}$ определим $C(t_1, \dots, t_n, B_{t_1}, \dots, B_{t_n}) = \{y \in S : y(t_i) \in B_{t_i} \forall i = 1..n\}$

Это пересечения каких-то элементарных цилиндров. Фактически, мы фиксируем значение случайного процесса в нескольких моментах времени, а не только в одном, как это делалось в случае элементарного цилиндра.

Пусть $\mathcal{M}$ – множество цилиндров. Заметим, что $\mathcal{M}$ – π-система, причем $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{B}_T$.

($\Rightarrow$) Пусть $t_1, \dots, t_n \in T, B_{t_1}, \dots, B_{t_n}, B_{t_i} \in \mathcal{B}_{t_i}$. Тогда

$$\begin{aligned} P^X_{t_1,\dots,t_n}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}) \quad = \quad & P((X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}) = \\ & P(X \in C(t_1, \dots, t_n, B_{t_1}, \dots, B_{t_n})) = \\ & P_X(C(t_1, \dots, t_n, B_{t_1}, \dots, B_{t_n})) = \\ & P_Y(C(t_1, \dots, t_n, B_{t_1}, \dots, B_{t_n})) = \\ & P((Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}) \in B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}) = P^Y_{t_1,\dots,t_n}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}) \end{aligned}$$

Доказали, что распределения X и Y совпадают на прямоугольниках. Но $B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}$ – порождающая π-система для $\mathcal{B}_{t_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{B}_{t_n} \Rightarrow$ по единственности продолжения меры $P^x_{t_1 \dots t_n} = P^y_{t_1 \dots t_n}$.

($\Leftarrow$)

$$\begin{aligned} & P_X(C(t_1, \dots, t_n, B_{t_1}, \dots, B_{t_n})) = \\ & P^X_{t_1 \dots t_n}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}) = \\ & P^Y_{t_1 \dots t_n}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}) = \\ & P_Y(C(t_1, \dots, t_n, B_{t_1}, \dots, B_{t_n})) \end{aligned}$$

Доказали, что P_x и P_Y совпадают на $\mathcal{M}$. Но $\mathcal{M}$ – порождающая π-система для $\mathcal{B}_T \Rightarrow$ по единствености продолжения меры $P_X = P_Y$. ☐

Пусть $P_{t_1 \dots t_n}, n \in \mathbb{N}, t_1 \dots t_n \in T$ – конечномерное распределение $(X_t, t \in T)$.

Лемма 3.3. *Для $\{P_{t_1 \dots t_n}\}$ выполнены условия симметрии (1) и согласованности (2):*

1. $\forall n \ \forall t_1 \dots t_n \in T \ \forall \sigma$ *– перестановки $\{1..n\}$ выполнено*

$$P_{t_1 \dots t_n}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}) = P_{t_{\sigma_1} \dots t_{\sigma_n}}(B_{t_{\sigma_1}} \times \dots \times B_{t_{\sigma_n}})$$

2. $\forall n \ \forall t_1 \dots t_n \in T$

$$P_{t_1 \dots t_n}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_{n-1}} \times S_{t_n}) = P_{t_1 \dots t_{n-1}}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_{n-1}})$$

Доказательство.

1. $P_{t_1 \dots t_n}(B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}) = P(X_{t_1} \in B_{t_1}, \dots, X_{t_n} \in B_{t_n})$ – не зависит от перестановки.
2. $\{X_{t_n} \in S_{t_n}\} = \Omega$, поэтому это событие ничего не добавляет в пересечение.

Пусть теперь X – вещественный процесс, т.е. $(S_t, \mathcal{B}_t) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \ \forall t \in T$.

Теорема 3.1 (Колмогорова о существовании случайного процесса, б/д)**.** *Пусть T – некоторое множество, $\forall n \in \mathbb{N} \ \forall t_1 \dots t_n \in T$ задана вероятностная мера $P_{t_1 \dots t_n}$ на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, причем для системы $\{P_{t_1,\dots t_n}\}$ выполнены условия симметрии и согласованности. Тогда $\exists$ вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и вещественный случайный процесс $(X_t, t \in T)$ т.ч. $\{P_{t_1 \dots t_n}\}$ – это его конечномерные распределения.*

$\square$

Теорема 3.2 (условия симметрии и согласованности для характеристических функций)**.** *Пусть T – некоторое множество, $\forall t_1,\ldots,t_n \in T$ задана вер. мера $P_{t_1,\ldots,t_n}$ на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ с х.ф. $\varphi_{t_1,\ldots,t_n}$. Тогда $\{P_{t_1,\ldots,t_n}, n \in \mathbb{N}, t_i \in T\}$ обладают условиями симм. и согл. $\Leftrightarrow$ выполнены условия симметрии и согласованности для х.ф.:*

1. $\varphi_{t_1,\ldots,t_n}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = \varphi_{t_{\sigma_1},\ldots,t_{\sigma_n}}(\lambda_{\sigma_1},\ldots,\lambda_{\sigma_n})$
2. $\varphi_{t_1,\ldots,t_n}(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1},0) = \varphi_{t_1,\ldots,t_{n-1}}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$

Следствие 3.1. *Пусть $T \subset \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall t_1 < \cdots < t_n \in T$ задана х.ф. $\varphi_{t_1,\ldots,t_n}$ в $\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$\exists(\Omega,\mathcal{F},P) \text{ и случайный процесс } (X_t, t\in T) \text{ т.ч. } \varphi_{t_1,\ldots,t_n} \text{ – х.ф. } (X_{t_1},\ldots,X_{t_n})$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\forall m\ \varphi_{t_1,\ldots,t_n}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\big|_{\lambda_m=0} = \varphi_{t_1,\ldots,t_{m-1},t_{m+1},\ldots,t_n}(\lambda_1,\ldots,\lambda_{m-1},\lambda_{m+1},\ldots,\lambda_n)$$

Доказательство.
($\Rightarrow$) Очевидно из теоремы Колмогорова и теоремы об условиях симметрии и согласованности для хар. функций

($\Leftarrow$) Пусть $s_1,\ldots,s_n \in T, s_i \neq s_j$, рассмотрим $t_1 < \cdots < t_n$ т.ч. $t_i = s_{\sigma_i}$ для некоторой перестановки σ.

Зададим
$$\varphi_{s_1,\ldots,s_n}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) := \varphi_{t_1,\ldots,t_n}(\lambda_{\sigma_1},\ldots,\lambda_{\sigma_n})$$

Проверим условия симметрии и согласованности для таких хар. функций.

Условие симметрии дано по построению. Проверим согласованность.

$$\begin{aligned}
&\varphi_{s_1,\ldots,s_n}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\big|_{\lambda_n=0} = \\
&|s_n = t_m \Rightarrow \lambda_n = \lambda_{\sigma_m}| = \\
&\varphi_{t_1,\ldots,t_n}(\lambda_{\sigma_1},\ldots,\lambda_{\sigma_n})\big|_{\lambda_{\sigma_m}=0} = \\
&|\text{условие следствия}| = \\
&\varphi_{t_1,\ldots,t_{m-1},t_{m+1},\ldots,t_n}(\lambda_{\sigma_1},\ldots,\lambda_{\sigma_{m-1}},\lambda_{\sigma_{m+1}},\ldots,\lambda_{\sigma_n}) = \\
&|\text{по построению}| = \\
&\varphi_{s_1,\ldots,s_{n-1}}(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1})
\end{aligned}$$

Условия симметрии и согласованности проверяются аналогично, если есть совпадающие $s_i = s_j$. По теореме Колмогорова искомый процесс существует. $\square$

4 Процессы с независимыми приращениями

Определение 4.1. Пусть $(X_t, t \geqslant 0)$ – действительный процесс. Он называется *процессом с независимыми приращениями*, если $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall\ 0 \leqslant t_1 < \cdots < t_n$ случайные величины $X_{t_1}, X_{t_2-t_1},\ldots,X_{t_n-t_{n-1}}$ независимы в совокупности.

Теорема 4.1 (о существовании процессов с независимыми приращениями)**.** *Пусть Q_0 – вер. мера на $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ с х.ф. φ_0, и $\forall s,t$ задана вер. мера $Q_{s,t}$ на $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ с х.ф. $\varphi_{s,t}$. Тогда процесс с независимыми приращениями*

$$(X_t, t \geqslant 0) \text{ т.ч. } X_0 \overset{d}{=} Q_0, X_t - X_s \overset{d}{=} Q_{s,t}, s<t$$

существует тогда и только тогда, когда

$$\forall\ 0 \leqslant s < u < t\ \varphi_{s,t}(\tau) = \varphi_{s,u}(\tau)\varphi_{u,t}(\tau)$$

Доказательство.
($\Rightarrow$) $\exists X_t \Rightarrow \forall\ s < u < t X_t - X_u$ и $X_u - X_s$ независимы $\Rightarrow \varphi_{s,t}(\tau) = \varphi_{X_t-X_s}(\tau) = \varphi_{X_t-X_u+X_u-X_s}(\tau) = \varphi_{X_t-X_u}(\tau)\varphi_{X_u-X_s}(\tau) = \varphi_{u,t}(\tau)\varphi_{s,u}(\tau)$.

($\Leftarrow$) Пусть X_t существует. Тогда $\forall 0 < t_1 < \cdots < t_n$ случайные величины. Компоненты вектора $(X_{t_n} - X_{t_{n-1}},\ldots,X_{t_1} - X_0, X_0)$ независимы. Обозначим этот вектор как ξ.

$$\varphi_\xi(\lambda_n, \dots, \lambda_0) = \varphi_{X_{t_n} - X_{t_{n-1}}}(\lambda_n) \cdot \dots \cdot \varphi_{X_0}(\lambda_0) = \varphi_{t_n, t_{n-1}}(...)$$

Рассмотрим $\eta = (X_t n, ..., X_0)^t$. Ясно, что $\eta = A\xi$, где

$A =$ —матр.1—

$\Rightarrow \varphi_\eta(\lambda vector) = Ee^{i<\eta, \lambda v>} =$ записи на бумажке

Теперь забудем про то, что процесс существует. $\forall n \forall t_1 < ...t_n$ зададим $\varphi_t 1..tn$ по формуле $(*TODO*)$. $\square$

5 Гауссовские случайные процессы

Определение 5.1. Случайный вектор $\xi = \xi_1, \dots, \xi_n$ называется гауссовским, если его х.ф. имеет вид

$$\varphi_\xi(t) = e^{i\langle a,t\rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma t, t\rangle}$$

где $a \in \mathbb{R}^n$, а $\Sigma \in Mat(n \times n)$ – симметрическая и неотрицательно определенная. В этом случае пишут $\xi \sim N(a, \Sigma)$.

Теорема 5.1 (три эквивалентных определения)**.**

1. *Вектор $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ гауссовский*
2. *$\xi = A\eta + b$ п.н., где $A \in Mat(n \times m)$, $b \in \mathbb{R}^n$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, η_i – нез. $N(0, 1)$*
3. *$\forall \tau \in \mathbb{R}^n \langle \tau, \xi\rangle$ имеет одномерное нормальное распределение.*

Свойства гаусс. векторов

1. *Смысл параметров: если $\xi \sim N(a, \Sigma)$, то $a = E\xi$, $\Sigma = D\xi$ – матрица ковариаций.*
2. *Если ξ гауссовский, то $A\xi$ гауссовский для всех матриц соответствуещего размера (т.е. линейное преобразование гауссовского вектора также является гауссовским вектором).*
3. *Если $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \sim N(a, \Sigma)$, то $\xi_1, \dots, \xi_n$ нез. в совокупности $\Leftrightarrow$ Σ диагональна $\Leftrightarrow$ $\xi_1, \dots, \xi_n$ некоррелированы.*

Определение 5.2. Действительный случайный процесс $(X_t, t \in T)$ называется *гауссовским*, если все его конечномерные распределения гауссовские:

$$\forall n\ \forall t_1, \dots, t_n \in T \text{ вектор } (X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \text{ гауссовский}$$

Определение 5.3. Процесс $(X_t, t \in T)$ называется *L^2-процессом*, если $\forall t \in T E|X_t^2| < +\infty$.

Функция $a(t) = EX_t$ называется *функцией среднего* процесса X_t.

Функция $R(s, t) = cov(X_s, X_t)$ называется *ковариационной функцией* процесса X_t.

Функция $K(s, t) = EX_sX_t$ называется *корреляционной функцией* процесса X_t.

Замечание. распределение гауссовского вектора однозначно определяется матожиданием и матрицей ковариаций $\Rightarrow$ конечномерные распределения гауссовского процесса определяются функцией среднего и ковариационной функцией.

Определение 5.4. Функция $f(x, y), x, y \in t$ называется *неотрицательно определенной* на $T \times T$, если

$$\forall n\ \forall t_1, \dots, t_n \in T\ \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \sum_{i,j=1}^n f(t_i, t_j)x_i x_j \geqslant 0$$

Лемма 5.1. *Ковариационная и корреляционная функции случайного процесса симметричны и неотрицательно определены.*

Доказательство. Пусть X_t – L^2-процесс, $K(s, t)$ – его корреляционная функция. Тогда $\forall n\ \forall t_1, \dots, t_n \in T\ \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i,j=1}^{n} f(t_i,t_j)x_ix_j \geqslant 0 = \sum_{i,j=1}^{n}(EX_{t_i}X_{t_j})x_ix_j = E\left(\sum_{i,j=1}^{n}(x_iX_{t_i})(x_jX_{t_j})\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} x_iX_{t_i}\right)^2 \geqslant 0$$

$\Rightarrow K(s,t)$ неотрицательно определена.

Теперь заметим, что $R(s,t) = cov(X_s, X_t)$ – это корреляционная функция для $Y_t = X_t - EX_t \Rightarrow$ она тоже неотрицательно определена.

Их симметричность очевидна. □

Теорема 5.2 (о существовании гауссовских процессов)**.** *Пусть T – некоторое множество, на нем задана функция $a(t)$, и $R(s,t)$ – симметричная и неотрицательно определенная функция на $T \times T$. Тогда существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и гауссовский процесс $(X_t, t \in t)$ т.ч. $a(t) = EX_t$ и $R(s,t) = cov(X_s, X_t)$.*

Доказательство. Для $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_n \in T$ рассмотрим вектор $a_{t_1,\ldots,t_n} = (a(t_1), \ldots, a(t_n))$, $\Sigma_{t_1,\ldots,t_n} = \|R(t_i,t_j)\|_{i,j=1}^{n}$.

Тогда $\Sigma_{t_1,\ldots,t_n}$ неотрицательно определена. Рассмотрим х.ф.

$$\varphi_{t_1,\ldots,t_n}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = e^{i\langle a_{t_1,\ldots,t_n},\lambda\rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma t_1,\ldots,t_n\lambda,\lambda\rangle}$$

Легко видеть, что такой набор х.ф. обладает свойствами симметрии и согласованности:

$$\langle a_{t_1,\ldots,t_n}, \lambda\rangle = \sum_{k=1}^{n} a(t_k)(\lambda_k) = |\forall\sigma| = \sum_{k=1}^{n} a(t_{\sigma(k)})(\lambda_{\sigma(k)})$$

$$\langle a_{t_1,\ldots,t_n}, (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\rangle|_{\lambda_n=0} = \langle a_{t_1,\ldots,t_{n-1}}, (\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1})\rangle$$

Можно проверить, что для ковариационной функции также выполняются подобные равенства.

По теореме Колмогрова это означает, что $\exists(X_t, t \in T)$ т.ч. $\varphi_{t_1,\ldots,t_n}$ – х.ф. $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \Rightarrow X_t$ – гауссовский процесс и $EX_t = a(t)$, $cov(X_s, X_t) = R(s,t)$. □

1 Процесс броуновского движения (винеровский процесс)

Определение 5.5. Случайный процесс $(W_t, t \in 0)$ называется *винеровским*, если

1. $W_0 = 0$ п.н.
2. W_t имеет независимые приращения
3. $W_t - W_t \sim N(0, t-s)$, $t \geqslant s$

Утверждение. *Винеровский процесс существует.*

Доказательство. По критерию существования процессов с независимыми приращениями достаточно проверить, что $\forall s \leqslant u \leqslant t$ (опускаем аргумент у х.ф.)

$$\varphi_{W_tW_s} = \varphi_{W_t-W_u}\varphi_{W_u-W_s}$$

Но т.к. $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$

$$\varphi_{W_t-W_s}(\tau) = e^{-\frac{1}{2}\tau^2(t-s)}$$

Очевидно, свойство выполнено и процесс существует. □

Теорема 5.3 (эквивалентное определение винеровского процесса)**.** *Процесс $(W_t, t \geqslant 0)$ является винеровским $\Leftrightarrow$*

1. *W_t гауссовский*

2. $\forall t \geqslant 0\ EW_t = 0$

3. $cov(W_s, W_t) = min(s,t)$

Доказательство.
($\Rightarrow$) $W_t \sim N(0,t) \Rightarrow EW_t = 0$. Посчитаем ковариационную функцию:

$$cov(W_s, W_t) = |t > s| = cov(W_s, W_t - W_s + W_s) =$$
$$cov(W_s, W_t - W_s) + cov(W_s, W_s) = 0 + DW_s = s = min(s,t)$$

Пусть $0 \geqslant t_1 \geqslant \ldots \geqslant t_n, \xi = (W_{t_1}, \ldots, W_{t_n})$. Вектор $\eta = (W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_n - W_{n-1})$ имеет независимые нормальные компоненты $\Rightarrow \eta$ – гауссовский вектор. Очевидно, $\xi = A\eta$ (выписать A!), значит, ξ также является гауссовским $\Rightarrow W_t$ – гауссовский процесс.

($\Leftarrow$) Почему такой процесс существует? По теореме достаточно проверить, что $min(s,t)$ – неотрицательно определенная функция. Для этого можно заметить, что $min(s,t)$ – это ковариационная функция для пуассоновского процесса интенсивности 1. Значит, она неотрицательно определена.

$$EW_t = 0, DW_t = min(t,t) = t \Rightarrow DW_0 = 0, EW_0 = 0 \Rightarrow W_0 = 0 \text{ п.н.}$$

Пусть $0 \leqslant t_1 < \cdots < t_n$ фиксированы. Тогда $(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n})$ – гаусс. вектор $\Rightarrow \xi = (W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, \ldots, W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_1})$ – тоже гауссовский как линейное преобразование гауссовского вектора. Значит, для независимости компонент ξ достаточно проверить, что они некоррелированны.

Пусть $i > j, t_0 = 0$.

$$cov(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}, W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) =$$
$$cov(W_{t_i}, W_{t_j}) - cov(W_{t_{i-1}}, W_{t_j}) - cov(W_{\cdots} =$$
$$t_j - t_j - t_{j-1} + t_{j-1} = 0$$

$\Rightarrow W_t$ имеет независимые приращения.

$W_t - W_s \sim N(a, \sigma^2)$.

$$a = E(W_t - W_s) = 0$$

$$\sigma^2 = D(W_t - W_s) = cov(W_t - W_s, W_t - W_s) =$$
$$cov(W_t, W_t) + cov(W_s, W_s) - 2cov(W_t, W_s) = |t > s| =$$
$$t - 2s + s = t - s$$

□

2 Непрерывность траекторий винеровского процесса

Определение 5.6. Процесс $(Y_t, t \in T)$ называется *модификацией* процесса $(X_t, t \in T)$, если $\forall t \in T$

$$P(Y_t = X_t) = 1$$

Теорема 5.4 (Колмогорова о существании непрерывной модификации, б/д)**.** *Пусть процесс $(X_t, t \in [a,b])$ таков, что для некоторых $C, \alpha, \varepsilon > 0$ выполнено:*

$$\forall t, s \in [a,b]\ E|X_t - X_s|^\alpha \leqslant C|t-s|^{1+\varepsilon}$$

Тогда у X_t существует модификация Y_t, все траектории которой непрерывны.

Следствие 5.1. *У $W_t, t \geqslant 0$ существует непрерывная модификация.*

Доказательство.
$$W_t - W_s \sim N(0, |t-s|) \Rightarrow E(W_t - W_s)^4 = 3(|t-s|)^2$$

Значит, у W_t существует непрерывная модификация на любом конечном отрезке.

Пусть $W_t^{(n)}$ – непрерывная модификация W_t на отрезке $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Рассмотрим процесс

$$X_t(\omega) = \{W_t^{(n)}(\omega), t \in [n, n+1)\}$$

Разрывы траекторий X_t возможны только в целых точках времени, когда $W_{n+1}^{(n)}(\omega) \neq W_{n+1}^{(n+1)}(\omega)$. Но $W_t^{(n)}$ и $W_t^{(n+1)}$ – модификации W_t, значит,

$$P(W_{n+1}^{(n)} = W_{n+1}) = 1 = P(W_{n+1}^{(n+1)} = W_{n+1}) \Rightarrow P(\exists n : W_{n+1}^{(n)} \neq W_{n+1}^{(n+1)}) = 0$$

Теперь рассмотрим

$$\tilde{X}_t(\omega) = \begin{cases} X_t(\omega), \text{ если } \forall n \ W_{n+1}^{(n)}(\omega) = W_{n+1}^{(n+1)}(\omega) \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

Это и будет искомая непрерывная модификация. □

Замечание. Условие $\varepsilon > 0$ в теореме Колмогорова существенно.

Доказательство. Пусть $(N_t, t \geqslant 0)$ – пуассоновский процесс. Тогда

$$E(N_t - N_t) = \lambda|t - s|$$

Значит, N_t удовлетворяет условию теоремы Колмогорова с $\varepsilon = 0$. Но траектории N_t разрывны почти наверное на всем $\mathbb{R}_+$ и разрывны с положительной вероятностью на любом конечном отрезке. □

Замечание. Всюду далее, где это необходимо, считаем, что нам задана непрерывная модификация винеровского процесса.

Теорема 5.5 (Пэли, Зигмунд, Винер, б/д)**.** *С вероятностью* 1 *траектория винеровского процесса не дифференцируема ни в одной точке* $\mathbb{R}_+$*.*

Теорема 5.6 (Закон повторного логарифма)**.**

$$P\left(\limsup_{t \to +\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1\right) = 1$$

$$\left|\limsup_{t \to +\infty} = \lim_{t \to +\infty} \sup_{s \geqslant t} f(s)\right|$$

Следствие 5.2.

$$P\left(\liminf_{t \to +\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = -1\right) = 1$$

Доказательство. Рассмотрим $Y_t = -W_t$ – тоже винеровский процесс. □

ЗПЛ означает, что с вероятностью 1, начиная с некоторого момента $t_0 = t_0(\varepsilon, \omega)$ траектория W_t находится внутри области, ограниченной кривыми $\pm(1+\varepsilon)\sqrt{2t \ln \ln t}$. В то же время $\forall > 0$ траектория бесконечно много раз в обе стороны выходит из области, ограниченной кривыми $\pm(1-\varepsilon)\sqrt{2t \ln \ln t}$, после момента времени T.

Следствие 5.3 (локальный ЗПЛ)**.**

$$\limsup t \to +0 f(t) = \lim_{t \to +0} \sup_{s \leqslant t} f(s)$$

$$P\left(\limsup_{t \to +0} \frac{W_t}{\sqrt{2}t \ln \ln \frac{1}{t}} = 1\right) = 1$$

$$P\left(\liminf_{t \to +0} \frac{W_t}{\sqrt{2}t \ln \ln \frac{1}{t}} = -1\right) = 1$$

Доказательство. Рассмотрим процесс $B_t = t * W_{\frac{1}{t}} \mathrm{I}\{t > 0\}$. Покажем, что B_t – винеровский.

1. $\forall t_1, \dots, t_n \geqslant 0$ имеем $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ – линейное преобразование вектора $(W_{\frac{1}{t_1}}, \dots, W_{\frac{1}{t_n}})$, значит, это гауссовский вектор. Тогда B_t – гауссовский процесс.
2. $EB_t = 0 \forall t \geqslant 0$.
3. $cov(B_t, B_s) = tscov(W_{\frac{1}{t}}, W_{\frac{1}{s}}) = \frac{ts}{max(t,s)} = min(t, s)$.

Значит, по теореме об эквивалентном определении B_t – винеровский процесс. Тогда

$$\limsup_{t\to+0} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln\frac{1}{t}}} = |s = \tfrac{1}{t}| =$$
$$\limsup_{s\to+\infty} \frac{W_{\frac{1}{s}}}{\sqrt{2\frac{1}{s}\ln\ln s}} =$$
$$\limsup_{s\to+\infty} \frac{sW_{\frac{1}{s}}}{\sqrt{2s\ln\ln s}} =$$
$$\limsup_{s\to+\infty} \frac{B_s}{\sqrt{2s\ln\ln s}} = 1 \text{ п.н. по ЗПЛ.}$$

$\square$

Теорема 5.7 (марковское свойство W_t)**.** *Пусть $(W_t, t \geqslant 0)$ – винеровский процесс. Тогда $\forall a > 0$ процесс $X_t = W_{t+a} - W_a$ тоже винеровский.*

Вопрос: *можно ли заметить a на случайное время?*

6 Фильтрации и марковские моменты

В этой главе считаем, что $T \subset R$.

Определение 6.1. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство. Множество σ-алгебр $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t, t \in T)$ называется *фильтрацией*, или *потоком σ-алгебр* на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, если $\forall s < t, s, t \in t$

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$$

Определение 6.2. Процесс $(X_t, t \in T)$ называется согласованным с $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t, t \in T)$, если $\forall t \in T$ X_t является $\mathcal{F}_t$-измеримым, то есть

$$\sigma(X_t) = \mathcal{F}_{X_t} \subset \mathcal{F}_t$$

> ξ – случайная величина. $\mathcal{F}_\xi$ – σ-алгебра, порожденная ξ:
>
> $$\mathcal{F}_\xi = \{\{\xi \in B\} : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

Определение 6.3 (обозначения)**.** $\{\xi_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ – множество с.в., $\sigma(\xi_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A})$ – σ-алгебра, порожденная всеми $\xi_a lpha$ - это

$$formule$$

минимальная сиг-алгебра, содержащая все $\mathcal{F}_{\xi_a lpha}$.

Определение 6.4. Пусть $(X_t, t \in T)$ – случайный процесс. Его *естественной фильтрацией* называется $\mathcal{F}^x = (\mathcal{F}_t^X, t \in T)$, где $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, s \leqslant t, s \in T)$.

Замечание (наблюдение)*.* Любой процесс согласован со своей естественной фильтрацией.

Определение 6.5. Отображение $\tau : \Omega \to T \cup \{+\infty\}$ называется *марковским моментом* относительно фильтрации $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t, t \in T)$ на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, если $\forall t \in T$ выполнено

$$\{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$$

τ называется *моментом остановки*, если τ конечен п.н.

Пример 1. $(X_n, n \in \mathbb{N})$ – действительный процесс. $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\tau_B = min\{n : X_n \in B\}$$

Тогда τ_B – марковский момент отн. $\mathcal{F}^X$.

Доказательство.

$$\{\tau_B \leqslant n\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{X_k \in B\} \in \mathcal{F}_n^x$$

□

Неформальный смысл: τ – марковский момент, момент наступления события в процессе, если $\forall t$ можно однозначно сказать, что τ наступило к моменту времени t или еще нет, только по наблюдениям процеса X_s до момента времени t включительно.

Теорема 6.1 (марковское свойство W_t, усиленный вариант)**.** *Пусть $(W_t, t \geqslant 0)$ – винеровский процесс. Тогда $\forall a > 0$ процесс X_t $W_{t+a} - W_a$ является винеровским и не зависит от $\mathcal{F}_a^W = \sigma(W_s, s \leqslant a)$.*

Определение 6.6. Пусть τ – марковский момент отн. на . Тогда сиг-алгеброй эф-тау называется

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : \forall t \in T\{\tau \leqslant t\} \cap \in \mathcal{F}_t\}$$

1. $\mathcal{F}_\tau$ – действительно сиг-алг
2. тау изм отн ф тау
3. если $\tau = t = const$, то $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_t$

Теорема 6.2 (строго марковское свойство W_t)**.** *Пусть $(W_t, t \geqslant 0)$ – винеровский процесс, а τ – момент остановки относительно $\mathcal{F}^W$. Тогда процесс $X_t = W_{t_\tau} - W_\tau$ является винеровским и не зависит от $\mathcal{F}_\tau$.*

Лемма 6.1. *1. Пусть ξ, η – случайные векторы. Тогда $\xi \overset{d}{=} \eta \Leftrightarrow \forall f$ – непр., огр.*

$$Ef(\xi)Ef(\eta)$$

2. Пусть xi – случайный вектор. Тогда ξ независимо с некоторым событием $A \Leftrightarrow \forall f$ – непр огр

$$E(f(\xi)I_a) = Ef(\xi)P(a)$$

Доказательство. 1. ($\Rightarrow$) очевидно. ($\Leftarrow$) $f(x) = cos(< t, x >)$ или $sin(< t, x >)$ - огр. непр. функции $=>$ хф ξ и η совпадают $=>$ $\xi \overset{d}{=} \eta$

2. ($\Rightarrow$) очевидно. ($\Leftarrow$) xi – нез. с $A \Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\{\xi \in B\}$ нез. с $A \Leftrightarrow \{\xi \in B\}$ нез. с A и B замкнуто.
   $\{\xi \in B\}, B$ замкнуто – π-система и σ от нее – это $\{\{\xi \in B\} : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$
   Для замкнутого B рассмотрим (записи на бумажке)

□

СМС. 1. Проверим, что W_τ – случайная величина. Рассмотрим $\forall n \in N$

□

Теорема 6.3 (принцип отражения, б/д)**.** *Пусть W_t – винеровский процесс, τ – момент остановки относительно $\mathcal{F}^W$. Тогда процесс $Z_t = \{W_t, t < \tau; 2W_\tau - W_t, t \geqslant \tau\}$ также является винеровским.*

Далее будем изучать $\tau_x = \inf\{t : W_t = x\}$ – первый момент достижения уровня x.

Лемма 6.2. *τ_x – момент остановки относительно $\mathcal{F}^W$.*

Доказательство. Считаем, что нам задана непрерывная модификация W_t. Кроме того, $x > 0$ (иначе аналогично).

$\{\tau_x > t\} = |$ непрерывность тракторий $| = \{\forall s \leqslant tW_s < x\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{s \leqslant t : W_s \leqslant x - \frac{1}{k}\} = |$ непр. траект. $| = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{s \leqslant t, s \in \mathbb{Q}} \{W_s \leqslant x - 1/k\} \in \mathcal{F}_t^W$. Значит, τ_x – действительно марковский момент.

Из ЗПЛ известно, что $\limsup_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1$ п.н., то есть трактория п.н. растет неограниченно вверх. Тогда в силу непрерывности $\exists t : W_t = x \Rightarrow P(\tau_x < +\infty) = 1$. □

Вывод: для τ_x выполнены строго марковское свойство и принцип отражения.

Следствие 6.1. *$M_t = max_{0 \leqslant s \leqslant t} W_s$ является с.в. $\mathcal{F}_t^W$-измеримой, причем $\{\tau_x \leqslant t\} = \{M_t \geqslant x\}, x \geqslant 0$.*

Теорема 6.4. $\forall x, y \geqslant 0$

$$P(W_t < y - x, M_t \geqslant y) = P(W_t > y + x)$$

Доказательство. Если $y = 0$, то утверждение тривиально. Если же $y > 0$, то рассмотрим τ_y. Это момент остановки, значит, к нему применим принцип отражения.

$Z_t = \{W_t, t \leqslant \tau_y; 2W_\tau - W_t, t \geqslant \tau_y\}$ является винеровским.

Обозначим через σ_y первый момент достижения y у Z_t. Тогда $(W_t, \tau_y) \stackrel{d}{=} (Z_t, \sigma_y) \Rightarrow P(W_t < y - x, M_t \geqslant y) = P(W_t < y - x, \tau_y \leqslant t) = P(Z_t < y - x, \sigma_y \leqslant t) = |\sigma_y = \tau_y| = P(Z_t < y - x, \tau_y \leqslant t) = |$ по опр. $Z_t| = P(W_\tau - W_t \leqslant y - x, \tau_y \leqslant t) = P(2y - W_t \leqslant y - x, \tau_y \leqslant t) = P(W_t \geqslant y + x, \tau_y \leqslant t) = P(W_t > y + x)$. ☐

Следствие 6.2 (теорема Башелье)**.**

$$M_t \stackrel{d}{=} |W_t|$$

Доказательство. $P(M_t \geqslant y) = P(M_t \geqslant y, W_t < y) + P(M_t \geqslant y, W_t \geqslant y) = P(W_t > y) + P(M_t \geqslant y, W_t \geqslant y) = P(W_t > y) + P(W_t \geqslant y) = 2P(W_t \geqslant y) = P(|W_t \geqslant y|)$. ☐