Случайные процессы

4 октября 2013 г.

Содержание

I Случайные процессы **2**
1 Терминология . . . 2
2 Примеры . . . 3

1 Случайное блуждание на прямой **3**
1 Вопросы . . . 4
2 Возвращение в ноль . . . 4
3 Среднее время нахождения в нуле . . . 5
4 Свойства траекторий . . . 7

2 Ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона **7**
1 Производящие функции . . . 7
2 Вероятность вырождения процесса . . . 8

3 Конечномерные распределения случайных процесов **10**

4 Процессы с независимыми приращениями **12**

5 Гауссовские случайные процессы **13**
1 Процесс броуновского движения (винеровский процесс) . . . 14
2 Непрерывность траекторий W_t . . . 15

Введение. Историческая справка

Теория вероятностей: математический анализ случайных явлений.
Теория случайных процессов: стохастические модели и фактор времени.

Предпосылки к изучению

- 1827, Р. Броун – броуновское движение частиц в воде $\Rightarrow$ процесс броуновского движения
- 1903, Л. Башелье – колебания курсов бумаг на бирже $\Rightarrow$ процесс броуновского движения
- 1906, А.А. Марков – анализ комбинаций гласных и согласных в романе «Евгений Онегин» $\Rightarrow$ марковские цепи
- 1903, Ф. Лундберг – модель деятельности страховой компании $\Rightarrow$ пуассоновский процесс
- 1873, Ф. Гальтон, Г. Ватсон – анализ вымирания аристократических фамилий в Великобритании $\Rightarrow$ ветвящиеся процессы
- Начало XX века, А. Эрланг – изучение загрузки телефонных сетей $\Rightarrow$ теория массового обслуживания

Применения

- Физика (стохастическое исчисление, теория гиббсовских полей)
- Экономика (финансовая математика)
- Биология

Часть I

Случайные процессы

Общие определения

Определение 0.1. Пусть (Ω, F, P) – вероятностное пространство, а $(E, \mathcal{E})$ – измеримое пространство. Отображение $\xi : \Omega \to E$ называется *случайным элементом*, если оно измеримо, т.е.

$$\forall B \in \mathcal{E} \ \xi^{-1}(B) = \{\omega : \xi(\omega) \in B\} \in F$$

Определение 0.2. Пусть T – некоторое множество и на (Ω, F, P) для $\forall t \in T$ задан случайный элемент X_t. Тогда набор $X = X_t, t \in T$ называется *случайной функцией* на множестве T.

Замечание. Вообще говоря, не предполагается, что все X_t принимают значения в одном и том же пространстве.

Определение 0.3. Пусть $X = (X(t, \omega))$. При фиксированном $\omega = \omega_0$ функция

$$\tilde{X}_{\omega_0}(t) = X_t(\omega)|_{\omega=\omega_0}$$

на T называется *траекторией* (или реализацией) случайной функции $X = X_t, t \in T$.

1 Терминология

- Если $T \subset \mathbb{R}$, то случайная функция называется случайным процессом.
- Если $T = [a, b], (a, b), [a, +\infty)$ и т.д., то процесс X называется процессом с непрерывным временем.
- Если $T = \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ и т. д. то процесс X называется процессом с дискретным временем.
- Если $T \subset \mathbb{R}^d$, то процесс X называется случайным полем.

Замечание. Далее всюду будем использовать термин «случайный процесс».

2 Примеры

1. $X_t(\omega) = \xi(\omega) \cdot f(t)$, где $\xi(\omega)$ – с.в., $f(t)$ – детерминированная функция.

2. Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ – независимые случайные векторы, $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, $S_0 = 0$. Тогда процесс с дискретным временем $\{S_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ называется случайным блужданием.

   Траектория: см. рис. 1

3. Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ – норсв, $\xi_n >= 0$, $\xi_n \neq const$ п.н., $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, $S_0 = 0$. Тогда процесс

$$X_t = \sup\{n : S_n <= t\}, t >= 0$$

   называется процессом восстановления.

   Траектория: см. рис. 2

   Утверждение. *Процесс восстановления конечен почти наверное.*

   Доказательство. Пусть сначала $E\xi_i = a > 0$.

   Заметим, что $\{S_k \leqslant t\} \supset \{S_{k+1} \leqslant t\}$.

   $\{X_t = +\infty\} = \{\sup\{n : S_n \leqslant t\} = +\infty\} = \{\forall n : S_n \leqslant t\} = \bigcap\limits_n \{S_n \leqslant t\} \Rightarrow$ |по непрерывности вероятностной меры| $\Rightarrow P(X_t = +\infty) = P(\forall n S_n \leqslant t) = \lim\limits_{n\to\infty} P(S_n \leqslant t) = \lim\limits_{n\to\infty} P(S_n \leqslant t_n) \leqslant$ |для больших n| $\leqslant \lim\limits_{n\to\infty} P(\frac{S_n}{n} < \frac{a}{2})$.

   Но по УЗБЧ $S_n \to a \Rightarrow P(S_n \leqslant a/2) \to P(a \leqslant a/2) = 0$.

   В силу того, что $X_t \uparrow$ при $t \uparrow$, $P(\exists t : X_t = +\infty) = P(\exists b : x_n = +\infty) = 0$.

   Если $E\xi_i = +\infty$, то случай сводится к предыдущему: $\exists C > 0 : \tilde{\xi_n} = \min(\xi_n, C), E\tilde{\xi_n} > 0$. Тогда $P(X_t = +\infty) = P(\forall n S_n \leqslant t) \leqslant P(\tilde{S_n} \leqslant t) = 0$ (доказали в случае конечного матожидания). ☐

   Откуда может возникнуть процесс восстановления? Физическая модель – «Модель перегорания лампочки». ξ_n – случайная величина, равная времени работы лампочки, X_t – сколько раз пришлось заменить лампочку в к моменту времени t.

4. Модель страхования Крамера-Лундберга

   Пусть есть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}, \{\eta_m, m \in \mathbb{N}\}, \xi_n \stackrel{d}{=} \xi_m, \eta_n \stackrel{d}{=} \eta_m, \{\xi_n, \eta_m\}$ независимы, $\xi_n, \eta_n \geqslant 0, \xi_n$ невырождены.

   Пусть $\{X_t, t \geqslant 0\}$ – процесс восстановления, построенный по случайным величинам $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}, y_0, c > 0$. Тогда $Y_t = y_0 + c \cdot t - \sum\limits_{k=1}^{X_t} \eta_k$ – модель страхования Крамера-Лундберга.

   Смысл параметров

   - y_0 – начальный капитал
   - c – скорость поступления страховых взносов
   - $S_k = \xi_1 + \cdots + \xi_k$ – время k-й выплаты, η_k – размер этой выплаты
   - X_t – число выплат к моменту времени $t > 0$
   - $\sum\limits_{k=1}^{X_t} \eta_k$ – общий размер выплат к этому моменту времени
   - Y_t – текущий капитал компании

1 Случайное блуждание на прямой

Определение 1.1. Пусть $\xi_n, n \in \mathbb{N}$ – норсв, $P(\xi_n = 1) = p$, $P(\xi_n = -1) = q = 1 - p$. Тогда процесс $(S_n, n \in \mathbb{Z}_+), S_0 = 0, S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ называется *простейшим случайным блужанием на прямой.* Если $p = q = \frac{1}{2}$, то блуждание называется *симметричным.*

1 Вопросы

1. вероятность возвращения в ноль
2. распределение первого момента возвращения в ноль
3. среднее время в нуле
4. геометрия траектории

Замечание. Последние два вопроса – только для симметричного случая.

2 Возвращение в ноль

$P(\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ вернется в ноль) – ?

$P(s1 \neq 0, s2 \neq 0, \dots, s_{2n-1} \neq 0, s_{2n} = 0)$ – ?

Вероятность каждой траектории, приводящей в 0 в момент времени $2n$, одна и та же и равна $(pq)^n$. Каждую траекторию длины $2n$ можно сопоставить с вектором $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n}\}, \varepsilon_i \in \{-1, 1\}$.

Определение 1.2. Траектория $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n})$ длины $2n$ называется *положительной*, если $\forall k < 2n \ \sum\limits_{j=1}^{k} \varepsilon_j > 0$ и $\sum\limits_{j=1}^{2n} \varepsilon_j = 0$. Число таких траекторий обозначим через $\tilde{C_n}$.

Утверждение. *Наблюдение:* $P(S_1 \neq 0, \dots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} = 0) = 2 \cdot \tilde{C_n} \cdot (pq)^n$.

Определение 1.3. Траектория $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n})$ длины $2n$ называется *неотрицательной*, если $\forall k < 2n \ \sum\limits_{j=1}^{k} \varepsilon_j \geqslant 0$ и $\sum\limits_{j=1}^{2n} \varepsilon_j = 0$. Число таких траекторий обозначим через C_n.

Утверждение. $\tilde{C_n} = C_{n-1}$.

Доказательство. Смотри рисунок 3.

Чтобы получить из положительной траектории неотрицательную, покажем, что в начале стоит 1, в конце – -1. Чтобы получить из неотрицательной положительную, добавим в начало 1, а в конец -1. Получили биекцию между положительными траекториями длины $2n$ и неотрицательными длины $2n-2$. □

Утверждение. *Пусть* $C_0 = 1$. *Тогда* $C_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} C_k \cdot C_{n-1-k}$.

Доказательство. Смотри рисунок 4.

Пусть $2k$ – первый момент возвращения траектории в ноль. Ясно, что таких траекторий $\tilde{C_k} \cdot C_{n-k}$. Суммируя по $k = 1 \dots n$:

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} \tilde{C_k} \cdot C_{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \cdot C_{n-k-1}$$

□

Вывод: C_n – это числа Каталана. $C_n = \frac{1}{n+1} \cdot C_{2n}^n$.

Производящая функция: $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n t^n = \frac{1}{2t}(1 - \sqrt{1-4t}), |t| \leqslant \frac{1}{4}$.

Теорема 1.1 (распределение момента возвращения в ноль)**.**

$$P(S_1 \neq 0, \dots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} = 0) = \frac{1}{2n-1} C_{2n}^n (pq)^n$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}&P(S_1 \neq 0, \ldots, S_{2n-1} \neq 0, s_{2n} = 0) = \\ &2\tilde{C_n}(pq)^n = |\text{ утв.1 }| = \\ &2C_{n-1}(pq)^n = \\ &\frac{2}{n}C_{2n-2}n - 1(pq)^n = \\ &\frac{2n}{n \cdot n}C_{2n-2}^{n-1}(pq)^n = \\ &\frac{1}{2n-1}C_{2n}^{n}(pq)^n.\end{aligned}$$

□

Теорема 1.2 (вероятность возвращения в ноль)**.**

$$P(\{S_n, n \geqslant 1\} \textit{вернется в ноль}) = 1 - |p - q|$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}&P(\{S_n, n >= 1\}\text{вернется в } 0) = \\ &\sum_{n=1}^{\infty} P(S_1 \neq 0, \ldots, S_{2n} = 0) = \\ &\sum_{n=1}^{\infty} 2\tilde{C_N}(pq)^n = \\ &\sum_{n=1}^{\infty} 2C_{n-1}(pq)^n = \\ &\sum_{n=0}^{\infty} 2C_n(pq)^{n-1} = \\ &2pq \cdot f(pq) = \\ &2pq * \frac{1}{2pq}(1 - \sqrt{1 - 4pq}) = |\text{ т.к. } (p+q)^2 = 1| = \\ &1 - \sqrt{(p-q)^2} = 1 - |p - q|\end{aligned}$$

□

Следствие 1.1. *Симметричное случайное блуждание на прямой возвратно с вероятностью 1.*

3 Среднее время нахождения в нуле

Пусть $(S_n, n \in \mathbb{N})$ – простейшее симметричное случайное блуждание на прямой. Обозначим через $L_n(0)$ число нулей в последовательности $S_k, k = 0 \ldots n$. Вопрос: $EL_n(0) \sim ?$

Лемма 1.1.

$$EL_n(0) = E|S_{n+1}|$$

Доказательство. Рассмотрим $|S_{n+1}|$.

$$|S_{n+1}| = |S_n + \xi_{n+1}| = \begin{cases} S_n + \xi_{n+1}, & S_n > 0 \\ 1, & S_n = 0 \\ -(S_n + \xi_{n+1}), & S_n < 0 \end{cases}$$

$|S_{n+1}| = (S_n + \xi_{n+1})\mathrm{I}\{S_n > 0\} + \mathrm{I}\{S_n = 0\} - (S_n + \xi_{n+1})\mathrm{I}\{S_n < 0\} = \mathrm{I}\{S_n = 0\} + (S_n + \xi_{n+1}) \operatorname{sign}(S_n)$

Отсюда $|S_{n+1}| = \mathrm{I}\{S_n = 0\} + |S_n| + \xi_{n+1} \operatorname{sign}(S_n) = |\text{индукция}| = \sum\limits_{k=0}^{n}(\mathrm{I}\{S_k = 0\} + \xi_{k+1} \operatorname{sign}(S_k)) = L_n(0) + \sum\limits_{k=0}^{n} \xi_{k+1} \operatorname{sign}(S_k)$.

Берем матожидание у обеих частей равенства: $E|S_{n+1}| = EL_n(0) + \sum\limits_{k=0}^{n} E(\xi_{k+1}\operatorname{sign}(S_k)) = EL_n(0) + \sum\limits_{k=0}^{n} E\xi_{k+1} E\operatorname{sign}(S_k) = EL_n(0)$. $\square$

Согласно ЦПТ, $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \eta \sim \mathcal{N}(0,1)$.

По теореме о наследовании сходимости $\frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} |\eta| \sim |\mathcal{N}(0,1)|$.

Вопрос: верно ли данное?

$$E\frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \to E|\eta| = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} |x| e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Определение 1.4. Множество случайных величин $\{\xi_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ называется *равномерно интегрируемым*, если

$$\lim_{c\to+\infty} \sup_{\alpha\in\mathfrak{A}} E(|\xi_\alpha|\, \mathrm{I}\{|\xi_\alpha| \geqslant c\}) = 0$$

Смысл: «хвосты» распределения равномерно малы.

Теорема 1.3 (б/д)**.** *Пусть* $\{\xi_n, n\in\mathbb{N}\}$ *– с.в.,* $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$*. Тогда*

$$E\xi_n \to E\xi \Leftrightarrow \{\xi_n, n\in\mathbb{N}\} \text{ равномерно интегрируемо}$$

Замечание. Если сходимость $\xrightarrow{p}$ или $\xrightarrow{\text{п.н.}}$, то равномерная интергрируемость $\Leftrightarrow \xi_n \xrightarrow{L_1} \xi$.

Теорема 1.4 (достаточное условие равномерной интегрируемости)**.** *Пусть* $\{\xi_n, n\in\mathbb{N}\}$ *– с.в.,* $G(t) \geqslant 0$: $\frac{G(t)}{t} \to +\infty$ *при* $t\to+\infty$*. Если* $\sup\limits_n EG(|\xi_n|) < +\infty$*, то последовательность равномерно интегрируема.*

Доказательство. Положим $M = \sup\limits_n EG(|\xi_n|)$. $\forall\varepsilon>0$ положим $a = \frac{M}{\varepsilon}$. Возьмем $c>0 : \frac{G(t)}{t} > a\ \forall t>c$. Тогда $\forall t>c, \forall n\in\mathbb{N}$

$$E(|\xi_n|\mathrm{I}\{|\xi_n| \geqslant t\}) \leqslant E\left(\frac{G(|\xi_n|)}{a}\mathrm{I}\{|\xi_n| >= t\}\right) \leqslant E\frac{G(|\xi_n|)}{a} \leqslant \frac{M}{a} = \varepsilon$$

$\Leftrightarrow \{\xi_n, n\in\mathbb{N}\}$ равномерно интегрируема. $\square$

Теорема 1.5 (среднее время в нуле)**.**

$$EL_n(0) \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$$

Доказательство. Согласно лемме, $EL_n(0) = E|S_{n+1}|$. Покажем, что $\{\xi_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}\}$ равномерно интегрируема. Подберем соответствующую функцию G. Попробуем $G(t)=t^2$.

$$EG(|\xi_n|) = E\xi_n^2 = \frac{(E\xi_n^2)}{n} = \frac{DS_n}{n} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} D\xi_k}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

Согласно достаточному условию, получили, что последовательность $\frac{|S_n|}{\sqrt{n}}$ равномерно интегрируема. Тогда по теореме

$$\frac{E|S_n|}{\sqrt{n}} \to E\eta = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\eta \sim \mathcal{N}(0,1))$$

Отсюда

$$EL_n(0) = E|S_{n+1}| \sim \sqrt{\frac{2(n+1)}{\pi}} \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$$

$\square$

4 Свойства траекторий

Теорема 1.6 (закон повторного логарифма, б/д).

$$P\left(\varlimsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{\sqrt{2n\ln\ln n}}=1\right)=1$$

Следствие 1.2.

$$P\left(\varliminf_{n\to\infty}\frac{S_n}{\sqrt{2n\ln\ln n}}=-1\right)=-1$$

Доказательство. Рассмотрим $X_n=-S_n$ – симметричное случайное блуждание $\Leftrightarrow$ по ЗПЛ получаем, что

$$\text{п.н. } 1=\varlimsup_{n}\frac{X_n}{\sqrt{2n\ln\ln n}}=-\varliminf_{n}\frac{S_n}{\sqrt{2n\ln\ln n}}$$

$\square$

Смысл: — рис.5 —

ЗПЛ означает, что с вероятностью 1 траектория случайного блуждания начиная с некоторого момента лежит внутри между кривыми $\pm(1+\varepsilon)\sqrt{2n\ln\ln n}$ и в то же время бесконечно много раз выходит в обе стороны из области, ограниченной кривыми $\pm(1-\varepsilon)\sqrt{2n\ln\ln n}$.

2 Ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона

Физическая модель: — рис.6 — В каждый следующий момент времени каждая частица распадается на некоторое случайное число таких же частиц.

Мат. модель: Пусть ξ – случайная величина со значениями в $\mathbb{Z}_+$. $\{\xi_k^{(n)},k,n\in\mathbb{N}\}$ – независимые случайные величины с тем же распределением, что и ξ. Положим

$$X_0=1,X_1=\xi_1^{(1)},X_n=\sum_{k=1}^{X_{n-1}}\xi_k^{(n)}$$

Определение 2.1. $\{X_n,n\in\mathbb{Z}_+\}$ – *ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона*, построенный по с.в. ξ.

- X_n – число частиц в n-м поколении
- $\xi_k^{(n)}$ – число потомков k-й частицы в $n-1$-м поколении

Вопрос: какова вероятность вырождения процесса?

1 Производящие функции

Определение 2.2. Пусть ξ – случайная величина. Тогда ее *производящей функцией* называется

$$\varphi_\xi(z)=Ez^\xi,z\in\mathbb{R}$$

Свойства производящих функций

1. $\varphi_\xi(1)=1$
2. $\varphi'_\xi(1)=E\xi$
3. Если ξ и η независимы, то $\varphi_{\xi+\eta}(z)=\varphi_\xi(z)\varphi_\eta(z)$

Если ξ принимает значения в $\mathbb{Z}_+$, то введем $p_k=P(\xi=k),k\in\mathbb{Z}_+$.

4. $\varphi_\xi(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}z^kp_k$

5. $\varphi_\xi(0) = p_0$

6. $p_k = \frac{f_\xi^{(k)}(z)}{k!}$

7. Ряд для $\varphi_\xi(z)$ сходится абсолютно и равномерно в области $\{|z| \leqslant 1\}$

8. $\varphi_\xi(z)$ непрерывно дифференцируема бесконечное число раз в области $\{|z| < 1\}$

Пусть далее $\{X_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ – ветвящийся процесс Г.-В., построенный по ξ.

Лемма 2.1.

$$\varphi_{X_{n_1}}(z) = \varphi_{X_n}(\varphi_\xi(z))$$

Доказательство. $\varphi_{X_{n+1}}(z) = Ez^{X_{n+1}}$

$$E\left(z^{X_{n+1}}|X_n = m\right) = E\left(z^{\sum\limits_{k=1}^{X_n}\xi_k^{(n+1)}}\middle|X_n = m\right) = E\left(z^{\sum\limits_{k=1}^{m}\xi_k^{(n+1}}\middle|X_n = m\right) = Ez^{\sum\limits_{k=1}^{m}\xi_k^{(n+1)}} = (\varphi_\xi(z))^m$$

Значит,

$$\varphi_{X_{n+1}} = Ez^{X_{n+1}} = E(E(z^{X_{n+1}}|X_n)) = E(\varphi_\xi(z))^m\Big|_{m=X_n} = \varphi_{X_n}(\varphi_\xi(z))$$

□

Следствие 2.1.

1. $\varphi_{X_n}(z) = \underbrace{\varphi_\xi(\varphi_\xi(\ldots\varphi_\xi(}_{n \text{ раз}}z)\ldots))$

2. $\varphi_{X_{n+1}}(z) = \varphi_\xi(\varphi_{X_n}(z))$

Доказательство. Применяем индуктивно лемму 2.1:

$$\varphi_{X_{n+1}} = \underbrace{\varphi_\xi(\varphi_\xi(\ldots\varphi_\xi(}_{n+1 \text{ раз}}z)\ldots)) = \varphi_\xi(\varphi_{X_n}(z))$$

□

2 Вероятность вырождения процесса

Положим $q_n = P(X_n = 0)$, $q = P(\text{процесс выродился}) = P(\exists n : X_n = 0)$

Лемма 2.2.

$$q_n \leqslant q_{n+1} \text{ и } q = \lim_n q_n$$

Доказательство. $\{X_n = 0\} \subset \{X_{n+1} = 0\} \Rightarrow q_n \leqslant q_{n+1}$

Но $P(\exists n : X_n = 0) = P\left(\bigcup\limits_n \{X_n = 0\}\right) = |\text{по непрерывности вероятностной меры}| = \lim\limits_n P(X_n = 0) = \lim\limits_n q_n$. □

Лемма 2.3. *Вероятность вырождения q является решением уравнения*

$$s = \varphi_\xi(s)$$

Доказательство.

$$q \leftarrow q_n = P(X_n = 0) = \varphi_{X_n}(0) = \varphi_\xi(\varphi_{X_{n-1}}(0)) = \varphi_\xi(q_{n-1}) \to \varphi_\xi(q)$$

□

Вопрос: что делать, если на $[0, 1]$ решений несколько?

Всегда есть решение $s = 1$.

Теорема 2.1 (о вероятности вырождения). *Пусть $\xi \neq 1$ п.н. Пусть $\mu = E\xi$ (м.б. $\mu = +\infty$). Тогда*

1. *Если $\mu \leqslant 1$, то уравнение*
$$s = \varphi_\xi(s)$$
имеет только одно решение $s = 1$ на $[0, 1]$. Тогда $q = 1$.

2. *Если $\mu > 1$, то уравнение*
$$s = \varphi_\xi(s)$$
имеет единственное решение $s_0 \in [0, 1)$. В этом случае $q = s_0$.

Доказательство.

1. Рассмотрим производную $\varphi'_\xi(s) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} ks^{k-1}P(\xi = k)$ для $s \in [0, 1]$. Заметим, что эта функция строго возрастает (поскольку каждое слагаемое строго возрастает) и положительна (поскольку есть хоть одна ненулевая вероятность). Действительно, если $\varphi_\xi(s) = 0$ для $s > 0 \Rightarrow P(\xi = k) = 0\ \forall k \geqslant 1$. Но тогда $P(\xi = 0) = 1$ и $q = 1$.

   Далее считаем производную положительной.

   Для $s \in (0, 1)$:
$$1 - \varphi_\xi(s) = \varphi'_\xi(\theta)(1 - s)$$
   где $\theta = \theta(s) \in (s, 1)$ Но $\varphi'_\xi(\theta) < \varphi'_\xi(1) = \mu = 1$, т.к. производная строго возрастает.
$$\Rightarrow 1 - \varphi_\xi(s) < 1 - s \text{ при } s \in [0, 1) \Rightarrow s < \varphi_\xi(s)$$
   Решений, отличных от 1, нет.

   График в этом случае выглядит так: — рис.7 —

2. Рассмотрим
$$\varphi''_\xi(s) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)s^{k-2}P(\xi = k) \text{ для } s \in [0, 1)$$
   Функция строго возрастает и положительна на $(0, 1)$.

   Действительно, если вдруг $\varphi''_\xi(s) = 0 \Rightarrow \forall k \geqslant 2\ P(\xi = k) = 0 \Rightarrow \xi < 1$ п.н. $\Rightarrow E\xi = \mu \leqslant 1$, что противоречит условию.

   Теперь считаем, что $\varphi'_\xi(s)$ строго возрастает на $[0, 1)$.
$$\Rightarrow 1 - \varphi'_\xi(s) \text{ меняет знак на } [0, 1) \text{ не более одного раза}$$
$$1 - \varphi'_\xi(0) = 1 - P(\xi = 1) > 0$$
$$1 - \varphi'_\xi(1) = 1 - \mu < 0$$
$$\Rightarrow 1 - \varphi'_\xi(s) \text{ меняет знак ровно один раз}$$
   График выглядит так: — рис.8 —

   Пусть $\varphi'_\xi(s_1) = 1$. Что можно сказать про $s - \varphi_\xi(s)$? При $s < s_1$ возрастает, при $s > s_1$ возрастает.

   Если $\varphi_\xi(0) = P(\xi = 0) = 0$, то $s - \varphi_\xi(s)|_{s=0} = 0$ — рис.9 —, то есть ровно один корень $s = 0 \in [0, 1)$. Ясно, что в этом случае $\boxed{q = 0}$.

   Если $\varphi_\xi(0) > 0$, то $s - \varphi_\xi(s)|_{s=0} < 0 \Rightarrow \exists s_0$ – единственное решение уравнения на $[0, 1)$

   Заметим, что при $s < s_0$ $s < \varphi_\xi(s)$, а при $s > s_0$ $s > \varphi_\xi(s)$.

   Но $q_n = \varphi_\xi(q_{n-1}) \leqslant |\text{т.к. } q_n \geqslant q_{n-1}| \leqslant \varphi_\xi(q_n) \Rightarrow q_n \notin (s_0, 1)$.

   Если $q_n = 1$, то $q_{n-1} = 1$, т.к. $\varphi_\xi(s) = 1 \Leftrightarrow s = 1$. По индукции получаем, что $q_0 = 1$. Но $q_0 = 0$, т.к. в нулевой момент времени всегда есть одна частица. Значит, $q \in [0, s_0]$ как предел $q_n \Rightarrow q = s_0$.

   График: — рис 11 —

$\square$

<u>Вывод:</u> вероятность вырождения – это наименьший корень уравнения $s = \varphi_\xi(s)$ из отрезка $[0, 1]$.

<u>Интерпретация:</u> если среднее число потомков меньше 1, то процесс обречен на вымирание. Иначе есть ненулевая вероятность того, что мы будем живы до бесконечности.

3 Конечномерные распределения случайных процесов

Пусть $(X_t, t \in T)$ – случайный процесс на (Ω, F, P), и X_t принимает значения в $(S_t, \mathcal{B}_t)$.

Определение 3.1. Множество $S = \prod\limits_{t \in T} S_t$ называется *пространством траекторий случайного процесса.*

$$S = \{y = (y(t), t \in t) : \forall t \in T\ y(t) \in S_t\}$$

Определение 3.2. Для $\forall t \in T$ и $B_t \in \mathcal{B}_t$ введем *элементарный цилиндр* с основанием B_t:

$$C(t, B_t) = \{y \in S : y(t) \in B_t\}$$

<u>Смысл:</u> это все траектории, проходящие через B_t в момент времени t. — рис.12 —

Определение 3.3. Минимальная σ-алгебра $\mathcal{B}_T$, содержащая все эти элементарные цилиндры, называется *цилиндрической σ-алгеброй* на S.

$$\mathcal{B}_T = \sigma\{C(t, B_t) : t \in T, B_t \in \mathcal{B}_T\}$$

$(S, \mathcal{B}_T)$ – измеримое пространство.

Лемма 3.1. $X = (X_t, t \in T)$ *является случайным процессом* $\Leftrightarrow$ $X : \Omega \to S$ *является измеримым относительно цилиндрической σ-алгебры $\mathcal{B}_T$.*

> <u>Напоминание</u> Критерий измеримости отображения
> $X : \Omega \to E,\ \mathcal{M} \subset \mathcal{E}$ т.ч. $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{E}$. Тогда X – с.в. $\Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{M}\ X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$

Доказательство. ($\Rightarrow$) Для $\forall t X_t$ – случайный элемент со значениями в $(S_t, \mathcal{B}_t)$. Рассмотрим $\mathcal{M}$ – система элементарных цилиндров в $\mathcal{B}_T$. По определению $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{B}_T$.

$\forall C(t, B_t) \in \mathcal{M}$ получаем

$$X^{-1}(C(t, B_t)) = \{\omega : X(\omega) \in C(t, B_t)\} = \{\omega : X_t(\omega) \in B_t\} = \{X_t^{-1}(B_t) \in \mathcal{F}\}$$

т.к. X_t – случайный элемент.

($\Leftarrow$) По критерию измеримости отображения

$$\forall B \in \mathcal{B}_T\ X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$$

$\square$

Замечание. Лемма устанавливает эквивалентное определение случайного процесса как единого случайного элемента со значениями в пространстве траекторий.

Определение 3.4. *Распределением* P_X случайного процесса $X = (X_t, t \in T)$ называется вероятностная мера на $(S, \mathcal{B}_T)$ т.ч. $\forall \mathcal{B} \in \mathcal{B}_T\ P_X(B) = P(X \in B)$.

Это определение удобно только в том случае, когда «время» конечно. Для счетного (или тем более континуального) «времени» это определение очень трудно для понимания.

Определение 3.5. Пусть $X = (X_t, t \in T)$ – случайный процесс, $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall t_1, \ldots, t_n \in T$ пусть $P_{t_1,\ldots,t_n}$ обозначает распределение вектора $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$. Тогда набор вероятностных мер $\{P_{t_1,\ldots,t_n} : n \in \mathbb{N}, t_i \in T\}$ называется *набором конечномерных распределений* случайного процесса X, а сами $P_{t_1,\ldots,t_n}$ называются конечномерными распределениями X.

| Напоминание: $P_{..}$ – вер.мера на $(S_{t_1}\times\dots\times S_{t_n}, \mathcal{B}_{t_1}\otimes\dots\otimes\mathcal{B}_{t_n})$, определенная по правилу —2—.

Лемма 3.2. *Пусть X и Y – случайные процессы с одинаковым временем, имеющие одно и то же пространство траекторий. Тогда $P_X = P_Y \Leftrightarrow$ совпадают их конечномерные распределения.*

| Напоминание:
| Единственность продолжения меры
| Пусть $(E,\mathcal{E})$ – измеримое пространство, P, Q – две вероятностные меры на нем. Пусть $\mathcal{M}\subset\mathcal{E}$ – π-система и $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{E}$. Тогда
$$P|_{\mathcal{M}} = Q|_{\mathcal{M}} \Leftrightarrow P|_{\mathcal{E}} = Q|_{\mathcal{E}}$$

Доказательство. Рассмотрим цилиндры (не элементарные!) в S:

$\forall b\ \forall t_1\dots t_n\in T\ \forall B_{t_1},\dots,B_{t_n}, B_{t_i}\in\mathcal{B}_{t_i}$ определим $C(t_1,\dots,t_n,B_{t_1},\dots,B_{t_n}) = \{y\in S : y(t_i)\in B_{t_i}\forall i = 1..n\}$

Это пересечения каких-то элементарных цилиндров. Фактически, мы фиксируем значение случайного процесса в нескольких моментах времени, а не только в одном, как это делалось в случае элементарного цилиндра.

Пусть $\mathcal{M}$ – множество цилиндров. Заметим, что $\mathcal{M}$ – π-система, причем $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{B}_T$.

$(\Rightarrow)$ Пусть $t_1,\dots,t_n\in T, B_{t_1},\dots,B_{t_n}, B_{t_i}\in\mathcal{B}_{t_i}$. Тогда

$$\begin{aligned}
P^X_{t_1,\dots,t_n}(B_{t_1}\times\dots\times B_{t_n}) &= P((X_{t_1},\dots,X_{t_n})\in B_{t_1}\times\dots\times B_{t_n}) = \\
&P(X\in C(t_1,\dots,t_n,B_{t_1},\dots,B_{t_n})) = \\
&P_X(C(t_1,\dots,t_n,B_{t_1},\dots,B_{t_n})) = \\
&P_Y(C(t_1,\dots,t_n,B_{t_1},\dots,B_{t_n})) = \\
&P((Y_{t_1},\dots,Y_{t_n})\in B_{t_1}\times\dots\times B_{t_n}) = P^Y_{t_1,\dots,t_n}(B_{t_1}\times\dots\times B_{t_n})
\end{aligned}$$

Доказали, что распределения X и Y совпадают на прямоугольниках. Но $B_{t_1}\times\dots\times B_{t_n}$ – порождающая π-система для $\mathcal{B}_{t_1}\otimes\dots\otimes\mathcal{B}_{t_n}\Rightarrow$ по единственности продолжения меры $P^x_{t_1\dots t_n} = P^y_{t_1\dots t_n}$.

$(\Leftarrow)$

$$\begin{aligned}
&P_X(C(t_1,\dots,t_n,B_{t_1},\dots,B_{t_n})) = \\
&P^X_{t_1\dots t_n}(B_{t_1}\times\dots\times B_{t_n}) = \\
&P^Y_{t_1\dots t_n}(B_{t_1}\times\dots\times B_{t_n}) = \\
&P_Y(C(t_1,\dots,t_n,B_{t_1},\dots,B_{t_n}))
\end{aligned}$$

Доказали, что P_x и P_Y совпадают на $\mathcal{M}$. Но $\mathcal{M}$ – порождающая π-система для $\mathcal{B}_T\Rightarrow$ по единствености продолжения меры $P_X = P_Y$. ☐

Пусть $P_{t_1\dots t_n}, n\in\mathbb{N}, t_1\dots t_n\in T$ – конечномерное распределение $(X_t, t\in T)$.

Лемма 3.3. *Для $\{P_{t_1\dots t_n}\}$ выполнены условия симметрии (1) и согласованности (2):*

1. *$\forall n\ \forall t_1\dots t_n\in T\ \forall\sigma$ – перестановки $\{1..n\}$ выполнено*
$$P_{t_1\dots t_n}(B_{t_1}\times\dots\times B_{t_n}) = P_{t_{\sigma_1}\dots t_{\sigma_n}}(B_{t_{\sigma_1}}\times\dots\times B_{t_{\sigma_n}})$$
2. *$\forall n\ \forall t_1\dots t_n\in T$*
$$P_{t_1\dots t_n}(B_{t_1}\times\dots\times B_{t_{n-1}}\times S_{t_n}) = P_{t_1\dots t_{n-1}}(B_{t_1}\times\dots\times B_{t_{n-1}})$$

Доказательство.

1. $P_{t_1\dots t_n}(B_{t_1}\times\dots\times B_{t_n}) = P(X_{t_1}\in B_{t_1},\dots,X_{t_n}\in B_{t_n})$ – не зависит от перестановки.
2. $\{X_{t_n}\in S_{t_n}\} = \Omega$, поэтому это событие ничего не добавляет в пересечение.

Пусть теперь X – вещественный процесс, т.е. $(S_t,\mathcal{B}_t) = (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))\ \forall t\in T$.

Теорема 3.1 (Колмогорова о существовании случайного процесса, б/д)**.** *Пусть T – некоторое множество, $\forall n\in\mathbb{N}\ \forall t_1\dots t_n\in T$ задана вероятностная мера $P_{t_1\dots t_n}$ на $(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}\mathbb{R}^n)$, причем для системы $\{P_{t_1,\dots t_n}\}$ выполнены условия симметрии и согласованности. Тогда $\exists$ вероятностное пространство $(\Omega,\mathcal{F},P)$ и вещественный случайный процесс $(X_t, t\in T)$ т.ч. $\{P_{t_1\dots t_n}\}$ – это его конечномерные распределения.*

□

Теорема 3.2 (условия симметрии и согласованности для характеристических функций)**.** *Пусть T – некоторое множество, $\forall t_1, \dots, t_n \in T$ задана вер. мера $P_{t_1,\dots,t_n}$ на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ с х.ф. $\varphi_{t_1,\dots,t_n}$. Тогда $\{P_{t_1,\dots,t_n}, n \in \mathbb{N}, t_i \in T\}$ обладают условиями симм. и согл. $\Leftrightarrow$ выполнены условия симметрии и согласованности для х.ф.:*

1. $\varphi_{t_1,\dots,t_n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \varphi_{t_{\sigma_1},\dots,t_{\sigma_n}}(\lambda_{\sigma_1}, \dots, \lambda_{\sigma_n})$
2. $\varphi_{t_1,\dots,t_n}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 0) = \varphi_{t_1,\dots,t_{n-1}}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Следствие 3.1. *Пусть $T \subset \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall t_1 < \dots < t_n \in T$ задана х.ф. $\varphi_{t_1,\dots,t_n}$ в $\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$\exists(\Omega, \mathcal{F}, P) \text{ и случайный процесс } (X_t, t \in T) \text{ т.ч. } \varphi_{t_1,\dots,t_n} \text{ – х.ф. } (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall m\ \varphi_{t_1,\dots,t_n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)|_{\lambda_m=0} = \varphi_{t_1,\dots,t_{m-1},t_{m+1},\dots,t_n}(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n)$$

Доказательство.
($\Rightarrow$) Очевидно из теоремы Колмогорова и теоремы об условиях симметрии и согласованности для хар. функций

($\Leftarrow$) Пусть $s_1, \dots, s_n \in T, s_i \neq s_j$, рассмотрим $t_1 < \dots < t_n$ т.ч. $t_i = s_{\sigma_i}$ для некоторой перестановки σ.

Зададим

$$\varphi_{s_1,\dots,s_n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \varphi_{t_1,\dots,t_n}(\lambda_{\sigma_1}, \dots, \lambda_{\sigma_n})$$

Проверим условия симметрии и согласованности для таких хар. функций.

Условие симметрии дано по построению. Проверим согласованность.

$$\begin{aligned}
&\varphi_{s_1,\dots,s_n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)|_{\lambda_n=0} = \\
&|s_n = t_m \Rightarrow \lambda_n = \lambda_{\sigma_m}| = \\
&\varphi_{t_1,\dots,t_n}(\lambda_{\sigma_1}, \dots, \lambda_{\sigma_n})|_{\lambda_{\sigma_m}=0} = \\
&|\text{условие следствия}| = \\
&\varphi_{t_1,\dots,t_{m-1},t_{m+1},\dots,t_n}(\lambda_{\sigma_1}, \dots, \lambda_{\sigma_{m-1}}, \lambda_{\sigma_{m+1}}, \dots, \lambda_{\sigma_n}) = \\
&|\text{по построению}| = \\
&\varphi_{s_1,\dots,s_{n-1}}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})
\end{aligned}$$

Условия симметрии и согласованности проверяются аналогично, если есть совпадающие $s_i = s_j$. По теореме Колмогорова искомый процесс существует. □

4 Процессы с независимыми приращениями

Определение 4.1. Пусть $(X_t, t \geqslant 0)$ – действительный процесс. Он называется *процессом с независимыми приращениями*, если $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall\ 0 \leqslant t_1 < \dots < t_n$ случайные величины $X_{t_1}, X_{t_2-t_1}, \dots, X_{t_n-t_{n-1}}$ независимы в совокупности.

Теорема 4.1 (о существовании процессов с независимыми приращениями)**.** *Пусть Q_0 – вер. мера на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ с х.ф. φ_0, и $\forall s, t$ задана вер. мера $Q_{s,t}$ на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ с х.ф. $\varphi_{s,t}$. Тогда процесс с независимыми приращениями*

$$(X_t, t \geqslant 0) \text{ т.ч. } X_0 \overset{d}{=} Q_0, X_t - X_s \overset{d}{=} Q_{s,t}, s < t$$

существует тогда и только тогда, когда

$$\forall\ 0 \leqslant s < u < t\ \varphi_{s,t}(\tau) = \varphi_{s,u}(\tau)\varphi_{u,t}(\tau)$$

Доказательство.
($\Rightarrow$) $\exists X_t \Rightarrow \forall\ s < u < t X_t - X_u$ и $X_u - X_s$ независимы $\Rightarrow \varphi_{s,t}(\tau) = \varphi_{X_t-X_s}(\tau) = \varphi_{X_t-X_u+X_u-X_s}(\tau) = \varphi_{X_t-X_u}(\tau)\varphi_{X_u-X_s}(\tau) = \varphi_{u,t}(\tau)\varphi_{s,u}(\tau)$.

($\Leftarrow$) Пусть X_t существует. Тогда $\forall 0 < t_1 < \dots < t_n$ случайные величины. $(X_tn - X_tn - 1, ..., X_t1 - X_0, X_0)$ независимы. Обозначим этот вектор как ξ. □

5 Гауссовские случайные процессы

Определение 5.1. Случайный вектор $\xi = \xi_1, \dots, \xi_n$ называется гауссовским, если его х.ф. имеет вид

$$\varphi_\xi(t) = e^{i<a,t> - \frac{1}{2}<\Sigma t, t>}$$

где $a \in \mathbb{R}^n$, а $\Sigma \in Mat(n \times n)$ – симметрическая и неотрицательно определенная. В этом случае пишут $\xi \tilde{N}(a, \Sigma)$.

Теорема 5.1 (три эквивалентных определения)**.**

1. *Вектор* $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ *гауссовский*
2. $\xi = A\eta + b$ *п.н., где* $A \in Mat(n \times m)$, $b \in \mathbb{R}^n$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n$, η_i *– нез.* $N(0, 1)$
3. $\forall \tau \in \mathbb{R}^n < \tau, \xi >$ *имеет одномерное нормальное распределение.*

Свойства гаусс. векторов

1. *Смысл параметров: если* $\xi \tilde{N}(a, \Sigma)$, *то* $a = E\xi$, $\Sigma = D\xi$ *– матрица ковариаций.*
2. *Если* ξ *гауссовский, то* $A\xi$ *гауссовский для всех матриц соответствуещего размера (т.е. линейное преобразование гауссовского вектора также является гауссовским вектором).*
3. *Если* $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \tilde{N}(a, \Sigma)$, *то* $\xi_1, \dots, \xi_n$ *нез. в совокупности* $\Leftrightarrow$ Σ *диагональна* $\Leftrightarrow$ $\xi_1, \dots, \xi_n$ *некоррелированы.*

Определение 5.2. Действительный случайный процесс $(X_t, t \in T)$ называется *гауссовским*, если все его конечномерные распределения гауссовские:

$$\forall n \ \forall t_1, \dots, t_n \in T \text{ вектор } (X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \text{ гауссовский}$$

Определение 5.3. Процесс $(X_t, t \in T)$ называется L^2*-процессом*, если $\forall t \in TE|X_t^2| < +\infty$.

Функция $a(t) = EX_t$ называется *функцией среднего* процесса X_t.

Функция $R(s, t) = cov(X_s, X_t)$ называется *ковариационной функцией* процесса X_t.

Функция $K(s, t) = EX_s X_t$ называется *корреляционной функцией* процесса X_t.

Замечание. распределение гауссовского вектора однозначно определяется матожиданием и матрицей ковариаций $\Rightarrow$ конечномерные распределения гауссовского процесса определяются функцией среднего и ковариационной функцией.

Определение 5.4. Функция $f(x, y), x, y \in t$ называется *неотрицательно определенной* на $T \times T$, если

$$\forall n \ \forall t_1, \dots, t_n \in T \ \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \sum_{i,j=1}^{n} f(t_i, t_j) x_i x_j \geqslant 0$$

Лемма 5.1. *Ковариационная и корреляционная функции случайного процесса симметричны и неотрицательно определены.*

Доказательство. Пусть X_t – L^2-процесс, $K(s, t)$ – его корреляционная функция. Тогда $\forall n \ \forall t_1, \dots, t_n \in T \ \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i,j=1}^{n} f(t_i, t_j) x_i x_j \geqslant 0 = \sum_{i,j=1}^{n} (EX_{t_i} X_{t_j}) x_i x_j = E(\sum_{i,j=1}^{n} x_i X_{t_i} x_j X_{t_j}) = E(\sum_{i=1}^{n} x_i X_{t_i})^2 \geqslant 0$$

$\Rightarrow K(s, t)$ неотрицательно определена.

Теперь заметим, что $R(s, t) = cov(X_s, X_t)$ – это корреляционная функция для $Y_t = X_t - EX_t \Rightarrow$ она тоже неотрицательно определена.

Их симметричность очевидна. □

Теорема 5.2 (о существовании гауссовских процессов)**.** *Пусть T – некоторое множество, на нем задана функция $a(t)$, и $R(s,t)$ – симметричная и неотрицательно определенная функция на $T \times T$. Тогда существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и гауссовский процесс $(X_t, t \in t)$ т.ч. $a(t) = EX_t$ и $R(s,t) = cov(X_s, X_t)$.*

Доказательство. Для $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_n \in T$ рассмотрим вектор $a_{t_1}, \ldots, a_{t_n} = (a(t_1), \ldots, a(t_n))$, $\Sigma_{t_1,\ldots,t_n} = ||R(t_i, t_j)||_{i,j=1}^n$.

Тогда $\Sigma_{t_1,\ldots,t_n}$ неотрицательно определена. Рассмотрим х.ф.

$$\varphi_{t_1,\ldots,t_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = e^{i<a_{t_1,\ldots,t_n},\lambda} - \frac{1}{2} < \Sigma t_1, \ldots, t_n \lambda, \lambda >$$

Легко видеть, что такой набор х.ф. обладает свойствами симметрии и согласованности:

$$< a_{t_1,\ldots,t_n}, \lambda >= \sum_{k=1}^n a(t_k)(\lambda_k) = |\forall \sigma| = \sum_{k=1}^n a(t_{\sigma(k)})(\lambda_{\sigma(k)})$$

$$< a_{t_1,\ldots,t_n}, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) >|_{\lambda_n=0} =< a_{t_1,\ldots,t_{n-1}}, (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$$

Для R аналогично (написать!).

По теореме Колмогрова это означает, что $\exists (X_t, t \in T)$ т.ч. $\varphi_{t_1,\ldots,t_n}$ – х.ф. $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \Rightarrow X_t$ – гауссовский процесс и $EX_t = a(t)$, $cov(X_s, X_t) = R(s,t)$. □

1 Процесс броуновского движения (винеровский процесс)

Определение 5.5. Случайный процесс $(W_t, t \in 0)$ называется *винеровским*, если

1. $W_0 = 0$ п.н.
2. W_t имеет независимые приращения
3. $W_t - W_t \tilde{N}(0, t-s)$, $t \geqslant s$

Утверждение. *Винеровский процесс существует.*

Доказательство. По критерию существования процессов с независимыми приращениями достаточно проверить, что $\forall s \leqslant u \leqslant t$ (опускаем аргумент у х.ф.)

$$\varphi_{W_t W_s} = \varphi_{W_t - W_u} \varphi_{W_u - W_s}$$

Но т.к. $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$

$$\varphi_{W_t - W_s}(\tau) = e^{-\frac{1}{2}\tau^2(t-s)}$$

Очевидно, свойство выполнено и процесс существует. □

Теорема 5.3 (эквивалентное определение винеровского процесса)**.** *Процесс $(W_t, t \geqslant 0)$ является винеровским $\Leftrightarrow$*

1. *W_t гауссовский*
2. *$\forall t \geqslant 0$ $EW_t = 0$*
3. *$cov(W_s, W_t) = min(s,t)$*

Доказательство. ($\Rightarrow$) $W_t \sim N(0,t) \Rightarrow EW_t = 0$. Посчитаем ковариационную функцию:

$$cov(W_s, W_t) = |t > s| = cov(W_s, W_t - W_s + W_s) = cov(W_s, W_t - W_s) + cov(W_s, W_s) = 0 + DW_s = s = min(s,t)$$

.

Пусть $0 \geqslant t_1 \geqslant \ldots \geqslant t_n, \xi = (W_{t_1}, \ldots, W_{t_n})$. Вектор $\eta = (W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_n - W_{n-1})$ имеет независимые нормальные компоненты $\Rightarrow \eta$ – гауссовский вектор. Очевидно, $\xi = A\eta$ (выписать A!), значит, ξ также является гауссовским $\Rightarrow W_t$ – гауссовский процесс.

($\Leftarrow$) Почему такой процесс существует? По теореме достаточно проверить, что $min(s,t)$ – неотрицательно определенная функция.

Для этого можно заметить, что $min(s,t)$ – это ковариационная функция для пуассоновского процесса интенсивности 1. Значит, она неотрицательно определена.

$$EW_t = 0, DW_t = min(t,t) = t \Rightarrow DW_0 = 0, EW_0 = 0 \Rightarrow W_0 = 0 \text{ п.н.}$$

Пусть $0 \leqslant t_1 < \cdots < t_n$ фикс. Тогда $(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n})$ – гаусс. вектор $\Rightarrow \xi = (W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, \ldots, W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_1})$ – тоже гауссовский как линейное преобразование гауссовского вектора. Значит, для независимости компонент ξ достаточно проверить, что они некоррелированны.

Пусть $i > j, t_0 = 0$.

$$cov(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}, W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) =$$
$$cov(W_{t_i}, W_{t_j}) - cov(W_{t_{i-1}}, W_{t_j}) - cov(W_{\cdot} \ldots =$$
$$t_j - t_j - t_{j-1} + t_{j-1} = 0$$

$\Rightarrow W_t$ имеет независимые приращения.

$W_t - W_s \sim N(a, \sigma^2)$.

$$a = E(W_t - W_s) = 0$$
$$\sigma^2 = D(W_t - W_s) = cov(W_t - W_s, W_t - W_s) = cov(W_t, W_t) + cov(W_s, W_s) - 2cov(W_t, W_s) = |t > s| = t - 2s + s = t - s$$

□

2 Непрерывность траекторий W_t

Определение 5.6. Процесс $(Y_t, t \in T)$ называется *модификацией* процесса $(X_t, t \in T)$, если $\forall t \in T$

$$P(Y_t = X_t) = 1$$

Теорема 5.4 (Колмогорова о существании непрерывной модификации, б/д)**.** *Пусть процесс $(X_t, t \in [a,b])$ таков, что для некоторых $C, \alpha, \varepsilon > 0$ выполнено:*

$$\forall t, s \in [a,b] \; E|X_t - X_s|^\alpha \leqslant C|t-s|^{1+\varepsilon}$$

Тогда у X_t существует модификация Y_t, все траектории которой непрерывны.

Следствие 5.1. *У $W_t, t \geqslant 0$ существует непрерывная модификация.*

Доказательство. Т.к. $W_t - W_s \sim N(0, |t-s|) \Rightarrow E(W_t - W_s)^4 = 3(|t-s|)^2 \Rightarrow$ у W_t существует непрерывная модификация на любом конечном отрезке.

Пусть $W_t^{(n)}$ – непрерывная модификация W_t на отрезке $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Рассмотрим процесс

$$X_t(\omega) = \{W_t^{(n)}(\omega, t \in [n, n+1)\}$$

Разрывы траекторий X_t возможны только в целых точках времени, когда $W_{n+1}^{(n)}(\omega) \neq W_{n+1}^{(n+1)}(\omega)$. Но $W_t^{(n)}$ и $W_t^{(n+1)}$) – модификации $W_t \Rightarrow$

$$P(W_{n+1}^{(n)} = W_{n+1}) = 1 = P(W_{n+1}^{(n+1)} = W_{n+1})$$
$$\Rightarrow P(\exists n : W_{n+1}^{(n)} \neq W_{n+1}^{(n+1)}) = 0$$

Теперь рассмотрим

$$\tilde{X}_t(\omega) = X_t(\omega), \text{ если } \forall n\, W_{n+1}^{(n)}(\omega) = W_{n+1}^{(n+1)}(\omega) 0, \text{ иначе}$$

Это и будет искомая непрерывная модификация. ☐

Замечание. Условие $\varepsilon > 0$ в теореме Колмогорова существенно.

Доказательство. Пусть $(N_t, t \geqslant 0)$ – пуассоновский процесс. Тогда

$$E(N_t - N_t) = \lambda|t - s|$$

$\Rightarrow N_t$ удовлетворяет условию теоремы Колмогорова с $\varepsilon = 0$. Но траектории N_t разрывны почти наверное на всем $\mathbb{R}_+$ и разрывны с положительной вероятностью на любом конечном отрезке. ☐

Замечание. Всюду далее, где это необходимо, считаем, что нам задана непрерывная модификация винеровского процесса.

Теорема 5.5 (Пэли, Зигмунд, Винер, б/д)**.** *С вероятностью* 1 *траектория винеровского процесса не дифференцируема ни в одной точке* $\mathbb{R}_+$*.*

Теорема 5.6 (Закон повторного логарифма)**.**

$$P\left(\limsup_{t\to+\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = 1\right) = 1$$

$$\left|\limsup_{t\to+\infty} = \lim_{t\to+\infty}\sup_{s\geqslant t} f(s)\right|$$

Следствие 5.2.

$$P\left(\liminf_{t\to+\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = -1\right) = 1$$

Доказательство. Рассмотрим $Y_t = -W_t$ – тоже винеровский процесс. ☐