Rekurzív sorozat határértéke

<u>Eddig:</u> explicit alakban definiált sorozatok
(az $n\in\mathbb{N}$-ik tag n függvényében közvetlenül számolható)

pl. $x_n = n^2\left(n-\sqrt{n^2+1}\right) \Rightarrow x_{1000} = 10^6\left(10^3-\sqrt{10^6+1}\right)$

Itt a műveleti szabályok jól alkalmazhatók, "könnyű" szétbontani ismert határértékek közti műveletekre.

<u>Probléma:</u> rekurzív módon definiált sorozat konvergenciája, h.é.-e?
(↳ tagjai a korábbi tagok és $n\in\mathbb{N}$ alapján számolhatók)

pl. $x_0 = 0$ és $\forall n\in\mathbb{N}: x_{n+1} = \frac{1}{4}+x_n^2$

$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{4}$; $x_2 = \frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5}{16}$; ... $x_{1000} = ??$

pl. $x_0 = 0$ $x_1 = 1$ és $x_{n+2} = x_{n+1}+x_n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ Fibonacci

pl. $x_{n+1} = \mu x_n(1-x_n)$ logisztikus leképezés ($\mu\in[0,4]$ param.)
és hasonló populációdinamikai modellek.

<u>Látni fogjuk:</u>
- a műveleti szabályok csak a lehetséges határértékek kiszámolásában segítenek
- a konvergenciát/divergenciát külön igazolni kell

$\boxed{\text{pl.}}$ <u>Eml.</u> Ha $(a_n):\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ sorozat monoton növő és korlátos $\Rightarrow (a_n)$ konvergens és
$$\lim(a_n) = \sup\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$$
és hasonló állítások segítségével.

<u>1.)</u> Legyen $1\le n\in\mathbb{N}$ és $a_n = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\dots}}}}$ (n db gyökvonás).

Adjuk meg (a_n)-t rekurzívan és számítsuk ki a h.é.-ét.

Megoldás: az első néhány tag:

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_2 = \sqrt{2\underbrace{\sqrt{2}}_{a_1\,(!)}}, \quad a_3 = \sqrt{2\underbrace{\sqrt{2\sqrt{2}}}_{a_2\,(!)}}$$

$$\Rightarrow a_2 = \sqrt{2a_1} \qquad a_3 = \sqrt{2a_2}$$

Ugyanúgy jutunk el a_n-ből a_{n+1}-be: $\boxed{\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{2a_n} \\ a_1 &= \sqrt{2} \end{aligned}}$ rekurzív sorozat

A konvergencia vizsgálata:

$\boxed{A}$ Mihez tarthat a sorozat, mi lehet a határértéke?

T.f.h. $\exists \lim(a_n)$, például $\lim(a_n) =: A \in \overline{\mathbb{R}}$

Mit lehet tudni A-ról? Használjuk a rekurzív összefüggést!

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \qquad (\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1)$$

Ötlet: tekintsük a jobb- és baloldalt egy-egy sorozatnak:

$$\lim(a_{n+1}) \underset{\boxed{(a_n)\text{ részsorozata}}}{=} \lim(a_n) = A$$

$$\lim\left(\sqrt{2a_n}\right) \underset{\boxed{\text{műveleti szabályok}}}{=} \sqrt{2A}$$

Mivel a két sorozat azonos, és $a_{n+1} \to A$, így utóbbinak is értelmesnek kell lennie ($\Rightarrow$ $A \geq 0$) és

$$A = \sqrt{2A} \longrightarrow \boxed{A = +\infty} \text{ lehet, } A = -\infty \text{ nem jó}$$

$$\Updownarrow (A \geq 0)$$

$$A^2 = 2A$$

$$A(A-2) = 0 \iff \boxed{A = 0} \text{ vagy } \boxed{A = 2}$$

Ö.f. a határérték, ha létezik, csak $\boxed{A=0}$, $\boxed{A=2}$, $\boxed{A=+\infty}$ lehet.

$\boxed{B}$ Konvergens-e a sorozat?

Ha monoton, akkor könnyű a ~~[illegible]~~ konvergenciát vizsgálni: (a_n) korlátos $\Rightarrow$ (a_n) konv.

(a_n) nem korl. $\Rightarrow$ $\lim(a_n) = \pm\infty$

$$a_1 = \sqrt{2}\,, \quad a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}\,, \quad a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$$

$$a_1 \overset{?}{<} a_2 : \quad \sqrt{2} \overset{?}{<} \sqrt{2\sqrt{2}} \iff 2 \overset{?}{<} 2\sqrt{2}$$

$$\iff 4 < 8 \ \checkmark$$

$$a_2 \overset{?}{<} a_3 : \quad \sqrt{2\sqrt{2}} \overset{?}{<} \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} \iff 2\sqrt{2} \overset{?}{<} 2\sqrt{2\sqrt{2}}$$

$$\iff \sqrt{2} < \sqrt{2\sqrt{2}} \ \checkmark$$

(ez épp $a_1 < a_2$ (!))

$\Rightarrow$ Indukcióval t.f.h. $a_n < a_{n+1}$ valamilyen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$-re,

és biz. be, hogy $a_{n+1} \overset{?}{<} a_{n+2}$.

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt{2a_n} \overset{?}{<} \sqrt{2a_{n+1}}$$

$$\Updownarrow$$

$$2a_n < 2a_{n+1} \ \checkmark \text{ (indukciós feltevés)}$$

Tehát $(a_n)\uparrow$, vagyis $0 < \sqrt{2} = a_1 < a_2 < a_3 < \dots$,

így $\lim(a_n) = 2$ vagy $\lim(a_n) = +\infty$

(0 nem lehet)

Sőt, ha (a_n) korlátos $\Rightarrow$ (a_n) konv. $\Rightarrow$ $\lim(a_n) = 2$

ha (a_n) nem korl. $\Rightarrow$ $\lim(a_n) = +\infty$

tehát elég azt vizsgálni, hogy 2 felső korlát-e?

pl. $a_1 = \sqrt{2} < 2 \iff 2 < 4 \ \checkmark$ ~~[illegible]~~

$a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}} < 2 \iff 2\sqrt{2} < 4 \iff \sqrt{2} < 2 \ \checkmark$

$a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} < 2 \iff 2\sqrt{2\sqrt{2}} < 4 \iff \sqrt{2\sqrt{2}} < 2 \ \checkmark$

(ez épp $a_2 < 2$ (!))

$\Rightarrow$ Indukcióval t.f.h. $a_n < 2$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$ és

biz. be: $a_{n+1} \overset{?}{<} 2$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt{2a_n} \overset{?}{<} 2$$

$$\Updownarrow$$

$$2a_n \overset{?}{<} 4 \iff a_n < 2 \checkmark \text{ (ind. felt.)}$$

Ö.f. $(a_n) \uparrow$ és korlátos, $a_n < 2$

$\Rightarrow$ (a_n) konvergens $\Rightarrow$ $\lim (a_n) = 2$ lehet csak.
$\boxed{A}$ miatt

Megjegyzések $1°$ Ha találunk explicit alakot (ált. nehéz), a korábban tanultak is alkalmazhatók.

Most: $a_1 = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$

$a_2 = \sqrt{2 \cdot \sqrt{2}} = (2 \cdot 2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{4}}$

$a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = (2 \cdot 2^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{7}{8}}$

Sejtés: $a_n = 2^{1-\frac{1}{2^n}}$

indukcióval tfh. $a_n = 2^{1-\frac{1}{2^n}}$

ekkor $a_{n+1} = (2a_n)^{\frac{1}{2}} = \left(2^1 \cdot 2^{1-\frac{1}{2^n}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{2-\frac{1}{2^n}}{2}} =$

$= 2^{1-\frac{1}{2^{n+1}}} \checkmark$

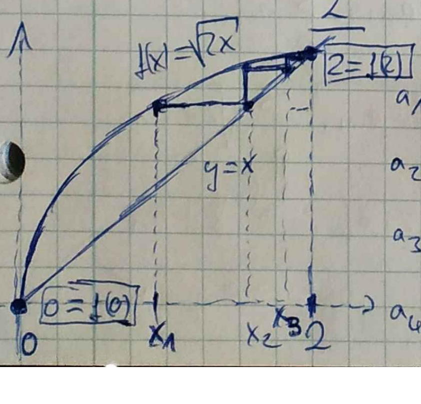
Határérték: Vigyázni! $\frac{1}{2^n} \to 0$ -ból nem következik az eddig tanultak alapján, hogy $2^{1-\frac{1}{2^n}} \to 2^{1-0} = 2 \ldots$

Viszont: $a_n = 2^{1-\frac{1}{2^n}} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2^n}} = 2\sqrt[2^n]{1/2}$

és ez $\sqrt[2^n]{1/2}$ részsorozata $\sqrt[n]{1/2} \to 1$ sorozatnak

$\Rightarrow \sqrt[2^n]{1/2} \to 1 \Rightarrow a_n \to 2 \cdot 1 = 2$

$2°$ A sorozat szemléltetése: $a_{n+1} = \sqrt{2a_n} = f(a_n)$



ahol $f(x) = \sqrt{2x}$, $(x \geq 0)$ fv.

$a_1 = \sqrt{2}$

$a_2 = f(a_1)$

$a_3 = f(a_2) = f(f(a_1))$

$a_4 = f(a_3) = f(f(f(a_1)))$

...

Azt figyeltük meg ($\boxed{A}$), hogy a h.é. csak olyan $A \in \mathbb{R}$ lehet, amire $A = f(A)$ /ú.n. fixpont/ (ez ált. nem biztos, hogy így van)

2.) Legyen $1 \le n \in \mathbb{N}$ és $a_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots}}}$ (n darab gyök)

Adjuk rekurzív összefüggést és számítsuk ki $\lim(a_n)$-et.

Megoldás $a_1 = \sqrt{2}$ $\quad a_2 = \sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2}}_{a_1}}$ $\quad a_3 = \sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2}}}_{a_2}}$

Tehát $\boxed{\begin{array}{l} a_1 = \sqrt{2} \\ a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \end{array}}$

$\boxed{A}$ T.f.h. $\exists A := \lim(a_n) \in \overline{\mathbb{R}}$, akkor

$$\left.\begin{array}{l} \lim(a_{n+1}) = \lim(a_n) = A \\ \lim\sqrt{2+a_n} = \sqrt{2+A} \\ a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \end{array}\right\} \Rightarrow A = \sqrt{2+A} \text{ kell teljesüljön}$$

és $2+A \ge 0$, és $A \ge 0$

$A^2 = 2+A$ vagy $\boxed{A = +\infty}$

($A = -\infty$ nem lehet)

$A^2 - A - 2 = 0$

$\begin{pmatrix} A=-1 \\ \text{nem mo} \end{pmatrix}$ vagy $\boxed{A=2}$

$\boxed{B}$ Monotonitás

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = \sqrt{2} > 0, \\ a_2 = \sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2}}_{>0}} > \sqrt{2+0} = a_1 \\ a_3 = \sqrt{2+a_2} > \sqrt{2+a_1} = a_2 \end{array}\right\} \text{Sejtés: } (a_n) \uparrow$$

Indukcióval t.f.h. $a_n < a_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N}, n \ge 1)$ és biz. be, hogy $a_{n+1} \overset{?}{<} a_{n+2}$

1. mo:

$a_{n+2} = \sqrt{2+a_{n+1}} \underset{\text{(ind. felt.)}}{>} \sqrt{2+a_n} = a_{n+1}$

$\Rightarrow a_{n+2} > a_{n+1}$ ✓

2. mo (mint az előző feladatban)

$a_{n+2} \overset{?}{>} a_{n+1}$

$\Updownarrow$

$\sqrt{2+a_{n+1}} \overset{?}{>} \sqrt{2+a_n}$

$\Updownarrow ?$

$2+a_{n+1} \overset{?}{>} 2+a_n$

$a_{n+1} > a_n$ ✓

Tehát $(a_n)\uparrow$, így • ha 2 felső korlát $\Rightarrow$ $\lim(a_n)=2$

• ha 2 nem f.k. $\Rightarrow$ $\lim(a_n)=+\infty$

Korlátosság

$$a_1=\sqrt{2}<2$$

$$a_2=\sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2}}_{<2}}<\sqrt{2+2}=2$$

$$a_3=\sqrt{2+\underbrace{a_2}_{<2}}<\sqrt{2+2}$$

Sejtés: $a_n<2$ $(n\in\mathbb{N}, n\geq 1)$

Indukcióval t.f.h. $a_n<2$ és biz. be $a_{n+1}\overset{?}{<}2$

1. mo

$$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}\underset{\text{ind. felt.}}{<}\sqrt{2+2}=2 \checkmark$$

2. mo

$$a_{n+1}\overset{?}{<}2$$

$$\sqrt{2+a_n}\overset{?}{<}2$$

$$2+a_n\overset{?}{<}4$$

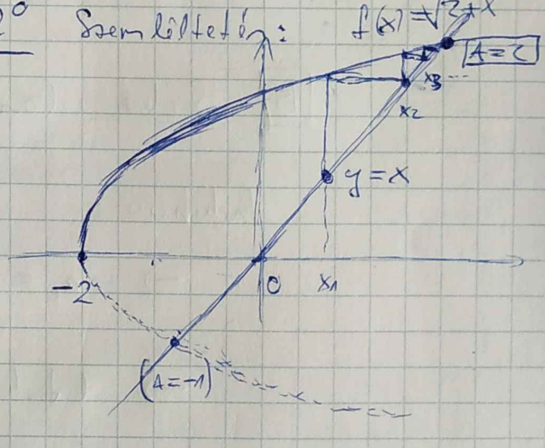
$$a_n<2 \checkmark$$

Tehát • $(a_n)\uparrow$

• (a_n) korlátos, $a_n\leq 2$ $\Rightarrow$ (a_n) konv. és $\lim(a_n)=2$ lehet csak.

Megj. 1° Explicit képlet?

2° Szemléltetés:



$\otimes$ $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$

$$a_{n+1}=2\cdot\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}a_n}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}a_{n+1}=\sqrt{\frac{1+\left(\frac{1}{2}a_n\right)}{2}}$$

$$x_{n+1}=\sqrt{\frac{1+x_n}{2}}$$

olyan, mint $\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$, $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ trig. azonosság.

$x_1=\frac{1}{2}a_1=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$ és ekkor $x_{n+1}=\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$

$\left(x_0=0=\cos\frac{\pi}{2}\right.$ lehetne$\left.\right)$ $\left(x_2=\cos\frac{\pi}{8}\right.$ + indukció$\left.\right)$

$\Rightarrow$ $a_{n+1}=2\cdot\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$

$\lim(a_n)$??

Probléma: • cos-t nem értelmeztük

• π-t nem értelmeztük

3.) $\alpha > 0$ valós paraméter mely értékeire konvergens

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= \sqrt{\alpha} \\ a_{n+1} &= \sqrt{\alpha + a_n} \end{aligned}}$$

sorozat? $\lim(a_n) = ?$

Megoldás (Az előző feladat ugyanez, $\alpha = 2$ esetre)

$\boxed{A}$ Tfh. $\exists A = \lim(a_n) \in \overline{\mathbb{R}}$, ekkor

$$a_{n+1} = \sqrt{\alpha + a_n}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$A = \sqrt{\alpha + A}$$ kell legyen, és $\frac{\alpha + A \geq 0}{A \geq 0}$

$\boxed{A = +\infty}$ vagy $A^2 = \alpha + A$

$(A \neq -\infty)$ $\quad A^2 - A - \alpha = 0$

diszkrimináns $1 + 4\alpha > 0$ ($\alpha > 0$ felt.)

$$\Rightarrow A_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\alpha}}{2}$$

$$\boxed{A = \frac{1+\sqrt{1+4\alpha}}{2}} \text{ vagy } A = \frac{1-\sqrt{1+4\alpha}}{2},$$

ez hamis gyök

mivel $1 + 4\alpha > 1$

$\Rightarrow 1 - \sqrt{1+4\alpha} < 0$

és $\frac{1-\sqrt{1+4\alpha}}{2} < 0$

$\boxed{B}$ Sejtés: $(a_n) \uparrow$

Indukció:

$\rightarrow$ $a_0 = \sqrt{\alpha} < \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha}} = a_1$ ✓

$\rightarrow$ t.f.h. $a_n < a_{n+1}$ és biz. be: $a_{n+1} \overset{?}{<} a_{n+2}$.

$$a_{n+2} = \sqrt{\alpha + \underbrace{a_{n+1}}_{}} \underset{\substack{\text{ind.}\\\text{felt.}}}{>} \sqrt{\alpha + \underbrace{a_n}_{}} = a_{n+1} \checkmark$$

Sejtés: $a_n < \frac{1+\sqrt{1+4\alpha}}{2}$

Indukció:

$\rightarrow$ $a_0 = \sqrt{\alpha} \overset{?}{<} \frac{1+\sqrt{1+4\alpha}}{2} = \frac{1+2\sqrt{\frac{1}{4}+\alpha}}{2} =$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\alpha + \frac{1}{4}} \checkmark$$

→ t.f.h. $a_n < \frac{1}{2} + \sqrt{\alpha + \frac{1}{4}}$ és biz. be $a_{n+1} < \frac{1}{2} + \sqrt{\alpha + \frac{1}{4}}$.

$$a_{n+1} = \sqrt{\alpha + a_n} \underset{\text{ind. felt.}}{<} \sqrt{\alpha + \frac{1}{2} + \sqrt{\alpha + \frac{1}{4}}} \overset{?}{\le} \frac{1}{2} + \sqrt{\alpha + \frac{1}{4}}$$

$$\Uparrow$$

$$\alpha + \frac{1}{2} + \sqrt{\alpha + \frac{1}{4}} \overset{?}{\le} \frac{1}{4} + \sqrt{\alpha + \frac{1}{4}} + \alpha + \frac{1}{4}$$

$$0 \le 0 \checkmark$$

Tehát $\left.\begin{array}{l} (a_n) \uparrow \\ (a_n) \text{ korlátos} \end{array}\right\} \Rightarrow$ $\underline{(a_n) \text{ konv.}}$ ($\forall \alpha > 0$ esetén) és $\underline{\lim(a_n) = \frac{1}{2} + \sqrt{\alpha + \frac{1}{4}}}$

4.) Milyen $\alpha \ge 0$ valós paraméterre konvergens

$$\boxed{\begin{array}{l} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = \alpha + a_n^2 \end{array}}$$

sorozat? $\lim(a_n) = ?$

Megoldás $\boxed{A}$ T.f.h. $\exists \lim(a_n) = A \in \overline{\mathbb{R}}$, ekkor

$$\begin{array}{ccccc} a_{n+1} & = & \alpha & + & a_n^2 \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ A & = & \alpha & + & A^2 \end{array}$$

kell legyen, és $A \ge 0$ (mivel $\alpha + A^2 \ge 0$)

$\boxed{A = +\infty}$ ($A \ne -\infty$) vagy $0 = A^2 - A + \alpha$

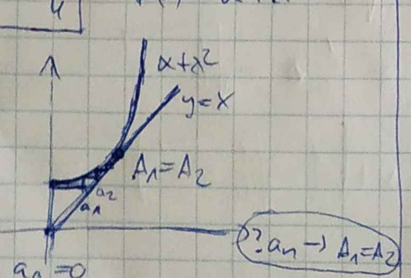
diszkrimináns: $1 - 4\alpha \ge 0$

$\Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{4} \ge \alpha \; !}$

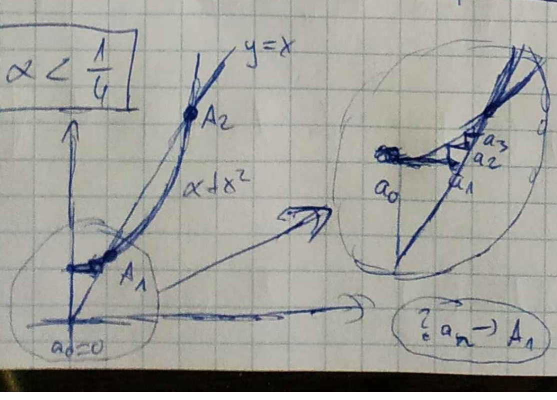
ekkor $A_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4\alpha}}{2} = \dfrac{1}{2} \pm \sqrt{\dfrac{1}{4} - \alpha}$

$\boxed{A_1 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \alpha}}$ vagy $\boxed{A_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \alpha}}$

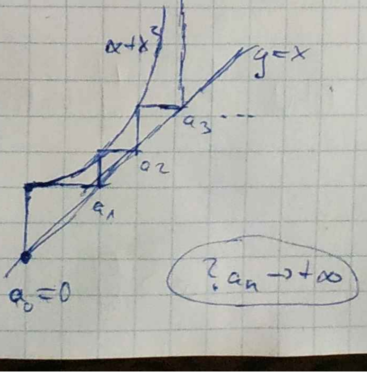
$\underline{M_1}$: $\boxed{\alpha = \frac{1}{4}}$ $f(x) = \alpha + x^2$



$\boxed{\alpha < \frac{1}{4}}$



$\boxed{\alpha > \frac{1}{4}}$



Ha $\alpha > \frac{1}{4}$ akkor $\lim(a_n) = +\infty$ lehet csak

Ha $0 \le \alpha \le \frac{1}{4}$ akkor $\lim(a_n) = +\infty$ vagy $\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \alpha}$

vagy $\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \alpha}$

B Sejtés: $(a_n) \nearrow$ ($\alpha = 0$-ra nem lesz szigorú: $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = 0$)

Indukcióval: → $a_0 = 0 \le \sqrt{\alpha} = a_1$ ✓

→ t.f.h. $a_n \le a_{n+1}$, biz. be: $a_{n+1} \le a_{n+2}$

$$a_{n+2} = \alpha + \underbrace{a_{n+1}^2}_{} \underset{\text{ind. felt.}}{\ge} \alpha + a_n^2 = a_{n+1} \quad ✓$$

~~Sejtés~~

Mivel $(a_n) \nearrow$ így $\exists \lim(a_n)$ $\forall \alpha \ge 0$ esetén.

$\alpha > \frac{1}{4}$ esetben $\lim(a_n) = +\infty$ kell legyen

Sejtés Ha $\alpha \le \frac{1}{4}$, akkor $a_n \le \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \alpha}$ teljesül.

Indukcióval → $a_0 = 0 \overset{?}{\le} \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \alpha} \iff \sqrt{\frac{1}{4} - \alpha} \overset{?}{\le} \frac{1}{2}$

$\iff \frac{1}{4} - \alpha \le \frac{1}{4}$ ✓

→ t.f.h. $a_n \le \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \alpha}$ és

biz. be: $a_{n+1} \le \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \alpha}$

$$a_{n+1} = \alpha + \underbrace{a_n^2}_{} \underset{\text{ind. felt.}}{\le} \alpha + \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \alpha}\right)^2 =$$

$$= \alpha + \frac{1}{4} - \sqrt{\frac{1}{4} - \alpha} + \left(\frac{1}{4} - \alpha\right) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \alpha} \quad ✓$$

Tehát $\boxed{\alpha \le \frac{1}{4}}$ esetén $\left.\begin{array}{l}(a_n) \nearrow \\ (a_n) \text{ korl.}\end{array}\right\} \Rightarrow$ (a_n) konv. és $\lim(a_n) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \alpha}$

$\boxed{\alpha > \frac{1}{4}}$ esetén $(a_n) \nearrow \Rightarrow \exists \lim(a_n)$ és $\lim(a_n) = +\infty$ lehet csak