Analízis 1 | 10. gyakorlat

Az előző gyakorlat során számoltunk sorösszegeket (geometriai és teleszkópikus sorok esetében). Általában sorösszeget kiszámolni nehéz, de a konvergencia eldöntése sokszor könnyebb feladat.
A későbbiekben további technikákat fogunk tanulni sorösszegek meghatározásához (hatványsorok összegfv-ei; deriválás, integrálás, Fourier sorok ...). A mai alkalommal sorok konvergenciáját fogjuk vizsgálni különböző kritériumokkal és elkezdjük a paraméteres sorok vizsgálatát is.

① Ism:

i) $\boxed{\text{Az összehasonlító kritérium}}$:

Tegyük fel, hogy a nemnegatív tagú $(a_n), (b_n)$ számsorozatokhoz $\exists N \in \mathbb{N}$ úgy, hogy: $0 \leq a_n \leq b_n$ $(\forall n \geq N$ $n \in \mathbb{N})$

(1) ha $\sum(b_n)$ sor konv $\Rightarrow \sum(a_n)$ konv

(majoráns kritérium)

(2) ha $\sum(a_n)$ sor div $\Rightarrow \sum(b_n)$ sor is div. (minoráns kritérium)

ii) Tétel (HIPERHARMONIKUS SOR)

Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$. Ekkor a

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n^\alpha}$$ hiperharmonikus sor

konv $\Leftrightarrow$ $\alpha > 1$.

iii) P) : $\alpha = 1 \Rightarrow \sum_{n=1} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$

a harmonikus sor div.

$\alpha = 2 \Rightarrow \sum_{n=1} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$

konvergens és összege $\frac{\pi^2}{6}$.

$\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ div

---

2. Konvergensek-e az alábbi sorok:

a) $\boxed{\sum_{n=1} \frac{1}{2n-1}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \dots$

A tagok nagyságrendje $\sim \frac{1}{2n}$

és tudjuk, hogy $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n}$ div. ezért alulról becsüljük a sor tagjait:

$$\frac{1}{2n-1} \geq \frac{1}{2n} > 0$$

$\forall n = 1, 2, 3, 4, \dots$

(Tehát $N := 1$-el $\forall n \geq N$-re)

és $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum\limits_{n=1} \frac{1}{n}$ div

$\Longrightarrow$ ÖK. $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{2n-1}$ div.

b) $\boxed{\sum\limits_{n=1} \frac{1}{1+n^2}}$ Itt $\frac{1}{n^2+1} \approx \frac{1}{n^2}$

nagyságrendű és $\sum \frac{1}{n^2}$ konv ezért itt felülről becsüljük:

$$0 < \underbrace{\frac{1}{1+n^2}}_{= a_n} \overset{N.R.F}{\leq} \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{= b_n} \quad (\forall n \geq 1,\ n \in \mathbb{N})$$

és $\sum_{n=1} \frac{1}{n^2}$ konv. $\Rightarrow \sum_{n=1} \frac{1}{n^2+1}$ is konv.

<u>Vigyázat</u>: A sor összegét nem kapjuk meg!

c) $\sum_{n=1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ Itt a tagok

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \simeq \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n} \text{ nagyság-rendűek}$$

és $\sum \frac{1}{n}$ div $\Rightarrow$

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{NRA} \\ \text{ha } n \geq 1}}{\geq} \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2} \cdot n} > 0 \quad (\forall\, n \geq 1 \;\; n \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow \underline{\text{ök}/2} : \sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \text{ is div.}$$

$$\boxed{d) \; \sum_{n=1} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}} \quad \text{Jt}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} \approx \frac{1}{n^{3/2}} \quad \text{és}$$

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n^{3/2}} \quad \alpha = 3/2 > 1 \Rightarrow \underline{\text{konv}}.$$

$$\Rightarrow 0 < \overbrace{\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}}^{=a_n} = \frac{1}{\sqrt{n^3+n}} \le$$

$(\forall\, 1 \le n \in \mathbb{N})$

$$\underset{1}{\le} \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \underbrace{\frac{1}{n^{3/2}}}_{b_n} \quad \underline{\text{és}}$$

ha $n \ge 1$

$\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n^{3/2}}$ konvergens mert $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ és 1/ii.

alapján $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ div.

③ Gyök és Hányados kritérium-
umok

i) Tétel: (CAUCHY-féle Gyökkritérium GYK). Tekintsük a
$\sum(a_n)$ sort és tf, hogy
$\exists A := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.
Ekkor a) Ha $A<1 \Rightarrow$ a sor abszolút
konv. azaz $\sum(|a_n|)$ konv $\Rightarrow$
$\sum(a_n)$ konvergens is
b) Ha $A>1 \Rightarrow \sum(a_n)$ divergens.
c) Ha $A=1$ akkor a GYK. nem
használható $\sum a_n$ lehet konv. is
div. is

ii) Tétel (D'Alambert-féle hányados-kritérium H.K.) Tekintsük a $\sum(a_n)$ sort és tegyük fel hogy tagjai 0-tól különbözőek. Legyen $B := \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$.

Ekkor: a) Ha $B<1 \Rightarrow \sum(a_n)$ absz konv. $\Rightarrow \sum(a_n)$ konv.

b) Ha $B>1 \Rightarrow \sum(a_n)$ div

c) Ha $B=1$ további vizsgálat szükséges.

4 Konvergensek-e az alábbi sorok?

a) $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n!}}_{=:a_n}}$ Ha megjelenik a faktoriális praktikus a HK.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n!\,(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

$\underset{(HK)}{\Longrightarrow}$ a sor (abszt) konv.

b) $\boxed{\sum_{n=1} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}}$ Itt is HK:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n \cdot n!}{n^n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{1}{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot \cancel{2^n}}{\cancel{2^n}} \cdot \frac{\cancel{n!}\,\cancel{(n+1)}}{\cancel{n!}} \cdot \frac{1}{\cancel{(n+1)}\frac{(n+1)^n}{n^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1$$

HK $\Rightarrow$ a megadott sor (abszolút) konv.

$$\boxed{c)\ \sum_{n=1}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Alkalmazzuk a GYökK kritériumot!

$$A:=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\substack{\downarrow\\ 0\ (n\to\infty)}}\right)=\frac{1}{2}<1 \overset{\text{GY.K}}{\Longrightarrow} \text{a}$$

megadott sor (absz) konv.

$$\boxed{d)\ \sum_{n=1}\frac{n^2}{2^n+3^n}}$$

1. mo: GYK-val:

$$A:=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{n^2}{2^n+3^n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{\sqrt[n]{2^n+3^n}}$$

$= \frac{1}{3}$ mi: $(\sqrt[n]{n})^2 \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 1^2 = 1$ és

$$\sqrt[n]{3^n} \le \sqrt[n]{2^n+3^n} \le \sqrt[n]{3^n+3^n} = 3\cdot\sqrt[n]{2}$$

$$\begin{array}{ccc} \sqrt[n]{3^n} = 3 \xrightarrow{(n\to\infty)} 3 & \sqrt[n]{2^n+3^n} \xrightarrow{(n\to\infty)} 3 & 3\cdot\sqrt[n]{2} \xrightarrow{n\to\infty} 3\cdot 1 = 3 \end{array}$$

(közrefogással)

Mivel $A = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow$ GYK $\Rightarrow$

$$\sum_{n=1} \frac{n^2}{2^n+3^n}$$ (abs) konv.

(nemnegatív tagú sorozatnál a két fogalom azonos).

2. Weg: HK-mal:

$$B := \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}+3^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n+3^n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{2^n+3^n}{2\cdot 2^n + 3\cdot 3^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{\cancel{n^2}} \cdot \frac{\cancel{3^n}\cdot\left[1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{\cancel{3^n}\cdot\left[3+2\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}$$

$$= 1^2 \cdot \frac{1+0}{3+0} = \frac{1}{3} < 1 \overset{HK}{\Longrightarrow}$$

wi $\left(\frac{2}{3}\right)^n = q^n \to 0 \quad n\to\infty$

weil $q = \frac{2}{3} \in (-1,1)$

$\Rightarrow$ a megadott sor konv.

$$\boxed{e) \sum_{n=1} \frac{2n+1}{(-3)^n}}$$

Gy. k. -mal

$$A := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{2n+1}{(-3)^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2n+1}{3^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2n+1}}{3} = \frac{1}{3}$$

mivel

$$1 \leq \sqrt[n]{2n+1} \leq \sqrt[n]{3n} = \sqrt[n]{3} \cdot \sqrt[n]{n}$$

$(n\to\infty)$ $\downarrow$ $\qquad \downarrow (n\to\infty) \qquad \downarrow$

$1 \qquad 1 \quad (\text{ha } n\to\infty) \; 1$

közrefogással

Mivel $A = \frac{1}{3} < 1 \Longrightarrow$ GY.k.

a megadott sor abszolút konv.

teljesül

$$\sum_{n=1} \left| \frac{2n+1}{(-3)^n} \right| = \sum_{n=1} \frac{2n+1}{3^n}$$

sor konvergens $\Longrightarrow$

Tétel (absz. konv. sor konv. $\Rightarrow$ konv. is)

$$\sum_{n=1} \frac{2n+1}{(-3)^n} = -1 + \frac{5}{9} - \frac{7}{27} + \frac{9}{81} - \ldots$$

sor konvergens

$$\boxed{f) \sum_{n=1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2+n+1}}$$

Írjuk fel a GY.K-ot:

$$A := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2+n+1}\right|} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n^2+n+1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\,1}{\cancel{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)} \cdot$$

$$\cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{e} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{e}$$

$$=$$

mi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} =: \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$

akkor $\lim(x_n) = \lim \frac{n}{n+1} = 1$

és tanultuk ha

$0 < \lim(x_n) < +\infty \Rightarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{x_n}\right) = 1$,

GY. K.

Tehát $A = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow$

$$\sum_{n=1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2+n+1}$$ sor

(absz). Konvergens.

$\boxed{6.}$ Milyen $x \geq 0$ valós szám esetén konvergens az alábbi sor és ilyenkor mi a sorösszeg?

$$\boxed{\sum_{n=0} \left(\frac{\sqrt{x}}{2}-1\right)^n \qquad (0 \leq x \in \mathbb{R}}$$

Vegyük észre, hogy ez egy

$q = \frac{\sqrt{x}}{2} - 1$ kvóciensű hányadosú mértani sor, ezért tételünk értelmében a megadott sor akk. konv

$\Longleftrightarrow$ $-1 < q < 1$ azaz:

$$-1 < \frac{\sqrt{x}}{2} - 1 < 1 \quad \Big| +1$$

$$0 < \frac{\sqrt{x}}{2} < 2 \quad \Big| \cdot 2$$

$$0 < \sqrt{x} < 4 \quad \Big| ( )^2$$

$$\Rightarrow \boxed{0 < x < 16}$$

Ha teljesül $x \in (0,16)$ akkor a sor absz. konv. $\Rightarrow$ konv. is

és összege:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - 1\right)^n$$

$$\frac{1}{1-q} \qquad\qquad \frac{1}{1 - \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - 1\right)} =$$

$$(q \in (-1,1)) \qquad\qquad (0 < x < 16)$$

$$= \frac{1}{2 - \frac{\sqrt{x}}{2}} = \frac{2}{4-\sqrt{x}}, \text{ tehát}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - 1\right)^n = \frac{2}{4-\sqrt{x}},$$

ha $x \in (0,16)$;

0

$\boxed{7}$ Az $x \in \mathbb{R}$ szám milyen értékei mellett konvergens az alábbi sor:

$$\sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n.$$

$(x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$

$1+x \neq 0!$
$x \neq -1.$

Írjuk fel a GYK.-ot:

$$\underset{\sim}{A} := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\right|} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2n-1}}\cdot\underbrace{\left|\frac{1-x}{1+x}\right|}_{n\text{-től független konstans}}\right) =$$

$$= \left|\frac{1-x}{1+x}\right|\frac{1}{\underbrace{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n-1}}_{=1}} = \underbrace{\left|\frac{1-x}{1+x}\right|}$$

<u>mi</u>

$$\sqrt[n]{2n-1} = \sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{\underbrace{2-\frac{1}{n}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 2\in(0;+\infty)}} \xrightarrow{\text{ha } (n\to\infty)} 1\cdot 1 = 1$$

$\Rightarrow$ GYK. Ha

a) $\left|\frac{1-x}{1+x}\right| < 1$ akkor $x \neq -1$ mellett

$$\overset{(\ )^2}{\iff} |1-x| < |1+x| \iff$$

$$\underbrace{|1-x|}_{\geq 0} \quad \underbrace{|1+x|}_{\geq 0}$$

$$\iff 1-2x+x^2 < 1+2x+x^2$$

$$\iff 4x > 0 \quad x > 0 \iff$$

$\boxed{x \in (0, +\infty)}$ $\Rightarrow$ a sor absz.

kmv. $\Rightarrow$ konv. is

b) Ha $\left|\frac{1-x}{1+x}\right| > 1 \iff x < 0,\ x \neq -1$

$\Rightarrow$ a megadott sor divergens

c) Ha $x=0 \Rightarrow$

$$\sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{2n-1} = \sum_{n=1} (-1)^n \cdot a_n,$$

ahol $a_n = \frac{1}{2n-1}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$

világos hogy

$$0 \le \frac{1}{2n+1} \le \frac{1}{2n-1}$$

$(\forall n \in \mathbb{N}^+)$ Tehát:

$0 \le a_{n+1} \le a_n$ $(\forall n \in \mathbb{N}^+)$

$\Rightarrow$ Lsd. e.a. $\sum_{n=1} (-1)^n \cdot a_n$ egy

úgynevezett Leibniz sor

ami konv $\Longleftrightarrow \lim(a_n)=0$

ami most $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1}=0$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1} \frac{(-1)^n}{2n-1}$ egy $\underset{\text{sor}}{\underline{\text{konv. Leibniz}}}$.

Tehát azon $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ pontok halmaza melyekre a sor konvergens:

$$KH\left(\sum_{n=1}\frac{(-1)^n}{2n-1}\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\right)=$$

$$=[0;+\infty)$$

(8) Az $x \in \mathbb{R}$ valós szám mely értékei mellett konvergens az alábbi sor:

$$(*) \quad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{4n}} \quad (x \in \mathbb{R})}$$

$\boxed{1. \text{ mo}}$ GYK-val:

$$A := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x^{2n}}{\underbrace{1+x^{4n}}_{+,0}}\right|} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt[n]{1+x^{4n}}} = \frac{x^2}{\ell} = x^2$$

ahol $\ell := \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{1+x^{4n}}\right)$

• Ha $\boxed{|x|<1} \Leftrightarrow \boxed{x\in(-1,1)} \Rightarrow$
(geom. sorozat) $\lim_{n\to\infty}(x)^{4n}=0$
(az $((x)^n)$ konv. sorozat
$\nu(n)=4n$ indexű tagjaiból álló
részsorozat)

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+x^{4n}\right)=1\in(0,+\infty)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{4n}}=l=1$$

(Ha $x_n\geq 0\ (n\in\mathbb{N})$ és
$0<\lim(x_n)<\infty \Rightarrow$
$\lim\sqrt[n]{x_n}=1$).

Ha tehát $x\in(-1,1) \Rightarrow A=x^2\in[0,1)$
$\Rightarrow A<1 \qquad \Rightarrow$ a $(*)$ sor

(ab 17) konv.

Ha $|x|>1 \iff x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

$\Rightarrow$

$$A=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{\sqrt[n]{x^{4n}\left(1+\left(\frac{1}{x^4}\right)^n\right)}}$$

$$=\frac{x^2}{x^4}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{1+\left(\frac{1}{x^4}\right)^n}}$$

itt most $\left|\frac{1}{x}\right|<1 \Rightarrow$

$\left(\frac{1}{x^4}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ és $1+\left(\frac{1}{x^4}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+\left(\frac{1}{x^4}\right)^n} = 1.$$

$$\Rightarrow \underbrace{A = \frac{1}{x^2} < 1}\quad \Big(|x|>1 \Rightarrow$$

$$\underbrace{\frac{1}{|x|}}_{+} < 1 \quad \underset{+}{\sim} \quad ()^2 \Rightarrow \frac{1}{x^2} < 1 \quad \underline{\text{Tehát}}$$

$A<1 \Rightarrow$ a $(*)$ sor abszolút konvergens. G.Y.K. $\Rightarrow$ konv. is.

- Ha $|x|=1 \Leftrightarrow x=1$ vagy $x=-1 \Rightarrow x^2=x^4=1 \Rightarrow$

$$\sum_{n=1} \frac{1}{1+1} = \sum_{n=1} \frac{1}{2} \text{ sort}$$

kapjuk, ami divergens, hiszen $\lim(a_n) = \lim\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \neq 0$ és a sorok konvergenciájának szükséges feltétele nem teljesül.

$\boxed{\text{2. megold}}$: Összehasonlító kritériummal.

Vegyük észre, hogy:

a) $\boxed{\text{Ha } |x| < 1} \Rightarrow$

$$0 \leq \frac{x^{2n}}{1+x^{4n}} \leq x^{2n} \quad (\text{csak mi}$$

$\Leftrightarrow \quad x^{2n} \leq x^{2n}(1+x^{4n}) \Leftrightarrow$

$x^{2n} \leq x^{2n} + x^{6n} \Leftrightarrow 0 \leq x^{6n}$

$(\forall x \in (-1,1))$

Továbbá $\sum\limits_{n=1} x^{2n} = \sum\limits_{n=1} (x^2)^n$

egy konv. geom sor. $x^2 \in [0,1)$;

b) $\boxed{\text{Ha} \quad |x| > 1} \Leftrightarrow \left(\left|\frac{1}{x}\right| < 1\right)$

$$0 \leq \frac{x^{2n}}{1+x^{4n}} \leq \frac{1}{x^{2n}} \quad \left(\Leftrightarrow \quad x^{4n} \leq 1 + x^{4n} \quad \checkmark \right)$$

és

$\sum\limits_{n=1} \left(\frac{1}{x^2}\right)^n$ egy konv. geom sor $-1 < \frac{1}{x^2} < 1$.

Így az ÖK. alapján (*)

konv.

c) Ha $|x| = 1 \implies$

(*) $\sum_{n=1} \frac{1}{2}$ ami div.