Analízis 1 | 9. gyakorlot

Végtelen sorok

I. Sorösszeg-számolás

1° Jsm: a) Legyen $(a_n): \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ valós számsorozat. Ekkor az (a_n) által generált végtelen sor:

$$\sum (a_n) := \sum_{n\geq 0} a_n := \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) := (s_n), \text{ ahol}$$

tehát $s_n := a_0 + a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ $(n \in \mathbb{N})$ az ún. részletösszeg sorozat.

b) A $\sum(a_n)$ sor konvergens, ha az (s_n) részletösszeg sorozat konvergens és a $\lim_{n\to\infty}(s_n) = S \in \mathbb{R}$ szám

$\boxed{\text{a sor összege}}$: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty}(s_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) = S.$

2° Igazoljuk, hogy az alábbi sorok konvergensek és adjuk meg az összegüket:

a) $\boxed{\sum_{n=1} \frac{1}{4n^2-1}}$. A def.-val:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1}\right)$$

, ahol tehát: $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ (*)

Parciális törtekre bontással:

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{A}{2k-1} + \frac{B}{2k+1}$$

$$1 = A(2k+1) + B(2k-1)$$

$$1 = (2A+2B)k + A - B$$

Mindkét oldal k-nak polinomja, így a megfelelő fokszámú tagok együtthatói meg kell egyezzenek:

k együtthatói: $\quad 0 = 2A + 2B$

k^0 — $\|$ — : $\quad 1 = A - B$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = 1 \end{cases}$$

$\oplus \Rightarrow 2A = 1 \quad \boxed{A = \frac{1}{2}} \; ; \; \boxed{B = -\frac{1}{2}}$

Tehát:
$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{2k-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{2k+1} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right).$$

Ezt beírva $(*)$-ba $\Rightarrow$

$$S_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}} + \cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{7}} + \dots + \cancel{\frac{1}{2n-1}} - \frac{1}{2n+1} \right) =$$

„Teleszkópikus összeg"

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2} \to \frac{1}{2}, \text{ ha } n \to \infty.$$

Tehát (S_n) konvergens és $\lim(S_n) = \frac{1}{2} \overset{\text{def}}{\Longrightarrow}$

a $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{4n^2-1}$ sor konvergens és összege:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}}$$

$\boxed{b)}$ $\boxed{\sum\limits_{n=1} \frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\sqrt{(n+1)\cdot n}}}$ (konv. és összeg = ?)

Mo: $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})\cdot\sqrt{k(k+1)}} = \lim\limits_{n\to\infty}(S_n)$,

ahol $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})\cdot(\sqrt{k\cdot(k+1)}} =$

gyöktelenítjük

= (keressük „teleszkópikus" alakot) =

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} +$$

$$+ \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}} +$$

$$+ \cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{4}}} +$$

$$+ \dots +$$

$$+ \cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to \boxed{1}, \text{ ha } n\to\infty$$

$\Rightarrow$ (S_n) konvergens és $\lim(S_n) = 1 \overset{def}{\Longrightarrow}$

a megadott sor konv. és összege $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}} = \boxed{1}$.

3°. <u>Jsm</u>: $\boxed{a)}$ A $\sum (a_n)$ sor divergens, ha nem konvergens, azaz a részletösszeg-sorozat (s_n) divergens.

$\boxed{b)}$ $\boxed{\text{Geometriai sor}}$ Legyen $q \in \mathbb{R}$ és tekintsük a $\sum\limits_{n=0} q^n = 1+q+q^2+q^3+\dots+q^n+\dots$ ún. mértani sort. q a sor <u>kvóciense</u>.

<u>Tétel</u>: $\sum (q^n)$ (abszolút) <u>konvergens</u> $\Longleftrightarrow$ $|q|<1 \Longleftrightarrow q \in (-1,1)$ <u>és</u> ilyenkor a sor <u>összege</u>:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad (q \in (-1,1))}.$$

$\boxed{c)}$ Ha a fenti sorban az összegzés nem 0-tól, hanem valamilyen $m \in \mathbb{N}^+$ számtól „indul"

$$\Rightarrow \sum_{n=m}^{+\infty} q^n = q^m + q^{m+1} + \dots = q^m \cdot (1+q+q^2+\dots) =$$

$$= q^m \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \boxed{\frac{q^m}{1-q} \quad (q \in (-1,1))}.$$

4°. Igazoljuk, hogy az alábbi <u>geometriai sorok</u> <u>konvergensek</u> és számítsuk ki a <u>sorösszeget</u>.

a) $\sum\limits_{n=1} \frac{(-1)^n}{2^n} = \sum\limits_{n=1} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, tehát $q = -\frac{1}{2} \in (-1,1)$

$\Rightarrow$ Konvergens geometriai sor, összege pedig =

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \underset{\substack{\uparrow\\ 3^0/c\\ m=1}}{=} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \underline{\underline{-\frac{1}{3}}};$$

o

$\boxed{\text{Jsm}}$: 3^0 / $\boxed{d)}$ Ha $\sum(a_n)$, $\sum(b_n)$ konvergens sorok és összegük: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = A$ és $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = B \Longrightarrow$

$\sum_{n=0}(a_n+b_n)$ sor konvergens és sor-összege

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = A+B}$$

„összeg-sor"

3^0 / $\boxed{e)}$ Tf., hogy $\lambda\in\mathbb{R}$ és $\sum(a_n)$ sor konvergens és összege A. $\Longrightarrow$ $\sum(\lambda\cdot a_n)$ sor is konvergens és összege: $\lambda\cdot A$, tehát

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda\cdot a_n) = \lambda\cdot\sum_{n=0} a_n = \lambda\cdot A}$$

o

$\boxed{4^0/b)}$ $\boxed{\sum_{n=5}^{+\infty}\frac{\left((-1)^n+2^n\right)^2}{5^{n+2}} = ?}$ $= \sum_{n=5}^{+\infty}\frac{1+2\cdot(-2)^n+4^n}{5^{n+2}}$

$$=\sum_{n=5}^{+\infty}\left[\frac{1}{25}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n+\frac{2}{25}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)^n+\frac{1}{25}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^n\right] =$$

$$=(3^\circ/d) = \sum_{n=5}^{+\infty} \frac{1}{25}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n + \sum_{n=5}^{+\infty} \frac{2}{25}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)^n + \sum_{n=5}^{+\infty} \frac{1}{25}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^n =$$

$$=(3^\circ/e) = \frac{1}{25}\cdot \underbrace{\sum_{n=5}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n}_{\substack{q=\frac{1}{5}\in(-1,1)\\ \text{konv. geom. sor.}}} + \frac{2}{25}\cdot \underbrace{\sum_{n=5}^{+\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n}_{\substack{q=-\frac{2}{5}\in(-1,1)\\ \text{konv. geom. sor}}} + \frac{1}{25}\cdot \underbrace{\sum_{n=5}^{+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n}_{\substack{q=\frac{4}{5}\in(-1,1)\\ \text{konv. geom. sor}}} =$$

$$= \frac{1}{25}\cdot\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^5}{1-\frac{1}{5}} + \frac{2}{25}\cdot\frac{\left(-\frac{2}{5}\right)^5}{1-\left(-\frac{2}{5}\right)} + \frac{1}{25}\cdot\frac{\left(\frac{4}{5}\right)^5}{1-\frac{4}{5}} =$$

$$=\left(\frac{1}{5}\right)^7\cdot\left[\frac{5}{4} - 64\cdot\frac{5}{7} + 4^5\cdot 5\right] = \left(\frac{1}{5}\right)^6\cdot\left[\frac{1}{4}-\frac{64}{7}+4^5\right]$$

$$=\underline{\left(\frac{1}{5}\right)^6\cdot\left[4^5-\frac{249}{28}\right]; <+\infty}.$$

5° Legyen $q\in\mathbb{R}$ és $|q|<1$ $(\Longleftrightarrow q\in(-1,1))$.

$\boxed{\text{Számítsuk ki a } \sum_{n=1}^{+\infty} n\cdot q^n \text{ sorösszeget.}}$

Megoldás: Tekintsük a részletösszeg-sorozatot:

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} k q^k \quad (n\in\mathbb{N}), \text{ ezért:}$$

$$(1)\quad S_n = q + 2q^2 + 3q^3 + \dots + n\cdot q^n \quad \Big|\cdot q$$

$$\Rightarrow (2)\; q\cdot S_n = \quad q^2 + 2q^3 + \dots + (n-1)q^n + nq^{n+1}$$

Képezzük az (1)-(2) különbséget:

$$S_n - q\cdot S_n = q + q^2 + q^3 + \dots + q^n - n\cdot q^{n+1}$$

$$(1-q)\cdot S_n = q\cdot \underbrace{(1+q+\dots+q^{n-1})}_{\substack{\text{geom. sorozat első} \\ n \text{ tagjának összege} \\ 1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}}} - n\cdot q^{n+1}$$

$q\in(-1,1) \Rightarrow q\neq 1$, $q^n \to 0$ $(n\to\infty)$

$$\Rightarrow S_n = \frac{q}{(1-q)^2}\cdot(1-q^n) - \frac{q}{q-1}\cdot(n\cdot q^n)$$

Itt $\lim(q^n)=0$ és $\lim(n\cdot q^n) = 0 \underset{\substack{\uparrow \\ k=1,\ q\in(-1,1)}}{=} \lim(n^k q^n)$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{q}{(1-q)^2}\cdot(1-0) - \frac{q}{q-1}\cdot 0 =$$

$= \frac{q}{(1-q)^2} \in \mathbb{R}$. __Tehát__ (S_n) konvergens

így a $\sum_{n=1}(n\cdot q^n)$ sor is konvergens és __összege__:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} n\cdot q^n = \frac{q}{(1-q)^2} \quad q\in(-1,1)}$$

__Megj.__: i) Ezt a sorösszeget két másik úton is ki fogjuk később számolni: sor Σ „szorzásával" és hatványsorok deriválásával.

ii) Pl $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \underset{\uparrow}{=} \frac{\frac{1}{3}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} =$

$q = \frac{1}{3} \in (-1,1)$

$= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4} = \boxed{\frac{3}{4}}$;

— o —

$\boxed{II}$ $\boxed{\text{A konvergencia eldöntése / vizsgálata}}$

(60)

Tsz: a) Sorok konvergenciájához szükséges feltétele:

$\boxed{\text{Ha } \sum(a_n) \text{ sor konvergens} \Rightarrow \lim(a_n) = 0.}$

b) Fordítva nem igaz: pl $\lim\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ de

$\not\Leftarrow$ $\sum_{n=1} \frac{1}{n}$ harmonikus sor divergens.

— o —

(70) Konvergencia szempontjából vizsgáljuk meg a következő sorokat:

(a) $\sum_{n=1} \sqrt[n]{0{,}1}$ mivel $\lim\left(\sqrt[n]{0{,}1}\right) \underset{\uparrow}{=} 1 \neq 0$

$\Rightarrow \sum_{n=1} \sqrt[n]{0{,}1}$ sor divergens.

$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt[n]{a} \to 1 \quad n \to \infty \\ \qquad \text{ha } a > 0 \\ \text{most } a = 0{,}1 \end{array} \right.$

(b) $\sum_{n=1} \frac{n}{2n-1}$; divergens sor mi $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$

c) $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ sor div., mert $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) = \frac{1}{1} = 1 \neq 0$

$\left(\sqrt[n]{2} \to 1 \quad (n\to\infty)\right)$

d) $\sum\limits_{n=1} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+2}$ sor divergens, mert itt

és $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2} =$

$= \frac{1}{e} \cdot 1^2 = \frac{1}{e} \neq 0.$

Megj.: a fenti a)–d) feladatok mindegyikében „sérült" a szükséges feltétel.

Tehát, ha $\lim(a_n) \neq 0 \Rightarrow \sum(a_n)$ divergens.