Analizis 1.
11. gyakorlat

Hatványsorok

$\sum\limits_{n=0} \alpha_n (x-a)^n$: $(\alpha_n): \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ együttható sorozat
$a \in \mathbb{R}$ középpont
milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén konv.?

Cauchy-Hadamard: t.f. $\exists \lim \sqrt[n]{|\alpha_n|} =: A \in \overline{\mathbb{R}}$,

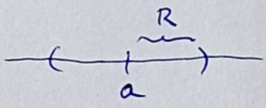
$R := \frac{1}{A}$ $\left(\frac{1}{0} := +\infty, \ \frac{1}{+\infty} := 0 \right)$ $\Rightarrow$

i, ha $0 < R < +\infty$: a hatványsor absz. konv., ha $|x-a| < R$, és div., ha $|x-a| > R$

ii, ha $R = 0$: csak $x = a$-ban konv.

iii, ha $R = +\infty$: $\forall x \in \mathbb{R}$ konv.

R: konvergencia sugár



megj.: gyök kritériumból adódik a képlet
hányados krit.: ha $\exists \lim \left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right|$, akkor ezzel is működik $R = \frac{1}{A}$

konvergencia halmaz: $KH := \{ x \in \mathbb{R} \mid \sum \alpha_n (x-a)^n \text{ konv.} \}$

megj.: $(a-R, a+R) \subset KH$
végpontok?

1. konv. sugár, konv. halmaz?

a, $\sum\limits_{n=1} \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\alpha_n} x^n \quad , \quad a = 0$

$\lim \sqrt[n]{|\alpha_n|} = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{1} = 1$

azaz ha $|x| < 1 \iff x \in (-1, 1)$: a hatv. sor abszt. konv.

ha $|x| > 1 \iff x > 1$ v. $x < -1$: div.

$x = 1$: $\sum\limits_{n=1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ div., mert $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \not\to 0$

$x = -1$: $\sum\limits_{n=1} (-1)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ div., mert $(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \not\to 0$

$\Rightarrow \quad KH = (-1, 1)$

b, $\sum\limits_{n=1} \frac{2^{n-1}}{2n-1}(3x-1)^n = \sum\limits_{n=1} \underbrace{\frac{2^{n-1} \cdot 3^n}{2n-1}}_{\alpha_n} \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right)^n \quad , \quad a = \frac{1}{3}$

$\lim \sqrt[n]{|\alpha_n|} = \lim \frac{6}{\sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{2n-1}} = 6 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{6}$

$1 \leftarrow \sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{2n-1} \leq \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n} \to 1$

azaz ha $\left|x - \frac{1}{3}\right| < \frac{1}{6} \iff x \in \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$: a hatv. sor abszt. konv.

ha $\left|x - \frac{1}{3}\right| > \frac{1}{6} \iff x < \frac{1}{6}$ v. $x > \frac{1}{2}$: div.

$x = \frac{1}{2}$: $\sum\limits_{n=1} \frac{2^{n-1}}{2n-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum\limits_{n=1} \frac{1}{2(2n-1)}$ div.

mert $\frac{1}{2(2n-1)} \geq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n} \geq 0$ és $\sum \frac{1}{n}$ div.

(összehasonlító krit.)

$x = \frac{1}{6}$: $\sum_{n=1} \frac{2^{n-1}}{2n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1} (-1)^n \underbrace{\frac{1}{2(2n-1)}}_{b_n}$

$b_n \geq 0 \ (n \in \mathbb{N}), \ (b_n) \searrow, \ b_n \to 0$

$\Rightarrow$ konv. Leibniz-sor

$\Rightarrow KH = \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$

c) $\sum_{n=0} \underbrace{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}_{\alpha_n} (x+2)^n$, $a = -2$

$$\lim \left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = \lim \left(\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2}\right) =$$

$$= \lim \left(\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}\right) = \lim \left(\frac{(1+\frac{1}{n})^2}{(2+\frac{1}{n})(2+\frac{2}{n})}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} \quad \Rightarrow R = 4$$

azaz ha $|x+2| < 4 \Leftrightarrow x \in (-6, 2)$: absz. konv.
ha $|x+2| > 4 \Leftrightarrow x < -6$ v. $x > 2$: div.

$x = 2$: $\sum_{n=0} \underbrace{\frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot 4^n}_{b_n}$

sejtés: div., mert $b_n \not\to 0$

elég belátni: $(b_n) \uparrow$ (ui. $b_0 = 1$)

$$b_n < b_{n+1} \Leftrightarrow \frac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n < \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} 4^{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2n+1)(2n+2) < 4(n+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4n^2 + 6n + 2 < 4n^2 + 8n + 4 \quad \checkmark$$

$x=-6$: $\sum\limits_{n=0} \underbrace{\frac{(n!)^2}{(2n)!}(-4)^n}_{c_n}$

div., mert $|c_n| = b_n \not\to 0$

$\Rightarrow KH = (-6, 2)$

$\sum\limits_{n=0} \alpha_n (x-a)^n$ konv., ha $|x-a|<R$

$\Rightarrow f(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x-a)^n$ összegfüggvény

pl. mértani sor: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ $(|x|<1)$

2. állítsuk elő 0 körüli hatv. sor összegeként

a, $f(x) = \frac{1-x}{1-x^2}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\})$

$f(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$

ha $|-x|<1 \iff x \in (-1, 1)$

b, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$

$f(x) = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} =$

ha $|-x^2|<1$

$\iff x \in (-1, 1)$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$, ahol $\alpha_n = \begin{cases} (-1)^k, & \text{ha } n = 2k \text{ alakú } (k \in \mathbb{N}) \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$

c, $f(x) = \dfrac{x}{x^2-5x+6} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{2,3\})$

parciális törtekre bontás:

$$f(x) = \frac{x}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

$$x = A(x-3) + B(x-2) =$$
$$= (A+B)x - 3A - 2B$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} A+B&=1 \\ -3A-2B&=0 \end{aligned}\right\} \quad B = 1-A \Rightarrow -A-2=0$$
$$A=-2 \Rightarrow B=3$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2-x} - 3\cdot\frac{1}{3-x} = \frac{2}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}} - \frac{3}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}} =$$

$$= \frac{1}{1-\frac{x}{2}} - \frac{1}{1-\frac{x}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n =$$

ha $\left|\frac{x}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |x| < 2$

és $\left|\frac{x}{3}\right| < 1 \Leftrightarrow |x| < 3$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)x^n \qquad (x \in (-2,2))$$