Upute za laboratorijske vježbe iz kolegija **Praktikum iz vođenja procesa**

Vježba 7

Optimalan izbor parametara viševeličinskog sustava

U ovoj vjažbi će se za zadani viševeličinski sustav odrediti optimalni parametri, tako da zadana ograničenja budu zadovoljena. Sama optimizacija **maksimizira zadanu funkciju cilja x_0**, i kao rezultat daje **optimalne ulazne pobude** $u_1=f(\alpha)$ i $u_2=f(\beta)$ koje ostvaruju zadanu funkciju cilja. Izlazi ustaljenog stanja ovise isključivo o amplitudama ulaznih signala, gdje su ulazi oblika su odskočne funkcije ($u_1=f(\alpha)$ i $u_2=f(\beta)$), pri čemu α i β predstavljaju pojačanje step pobude.

Za primjer sustava koji je opisan **prijenosnom matricom** promatramo ustaljena stanja (ne i tranzitni dio)

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \lim_{s\to 0} \begin{bmatrix} \frac{2}{s+3} & \frac{4}{s+5} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{3}{s+7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

gdje je zadano da se maksimizira funkcija cilja **$x_0=0.7\ \alpha + 0.8\ \beta$**, uz zadana ograničenja **$y_1 \leq 6$, $y_2 \leq 4$** za vrijednosti izlaza. Ukratko izlazi moraju biti manji od zadanih ograničenja, što je redovito ograničenje i realnih sustava (zasićenje). U nastavku su zadana i ograničenja pojačanja ulaza **$-7 \leq \alpha \leq 10$, $-2 \leq \beta \leq 8$** što također predstavlja ograničenje realnih sustava.

Podsjetimo se kako se određuje ustaljeno stanje, u beskonačnosti (u ustaljenom stanju) t teži prema ∞, odnosno s teži prema 0, tako da se prijenosna matrica može modificirati tako da opisuju ustaljena stanja na način:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}_{ustaljeno} = \lim_{s\to 0} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Ovaj sustav se rastavlja se u dvije jednadžbe (podsjetimo se početnih ograničenja ustaljenog stanja $y_1 \leq 6$ i $y_2 \leq 4$)

$$y_1 = \frac{2}{3}\alpha + \frac{4}{5}\beta \leq 6$$

$$y_2 = \frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{7}\beta \leq 4$$

Ostala ograničenja pojačanja ulaza ($-7 \leq \alpha \leq 10$, $-2 \leq \beta \leq 8$) se rastavljaju na 4 nejednadžbe sa ograničenjima tipa **≤ .**

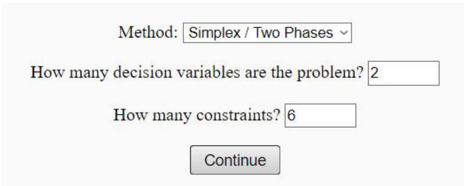
Primjer ograničenje tipa -7≤ α se konvertira u ograničenje -α ≤ 7 (α i β moraju biti sa lijeve strane nejednakosti). Slijedom navedenoga, dobiju se četiri nejednadžbe:

$$\alpha \leq 10$$
$$-\alpha \leq 7$$
$$\beta \leq 8$$
$$-\beta \leq 2$$

Optimalan rezultat se dobiva online alatom http://www.phpsimplex.com/simplex/simplex.htm?l=en (ili bilo kojim drugim alatom koji rješava simpleks)

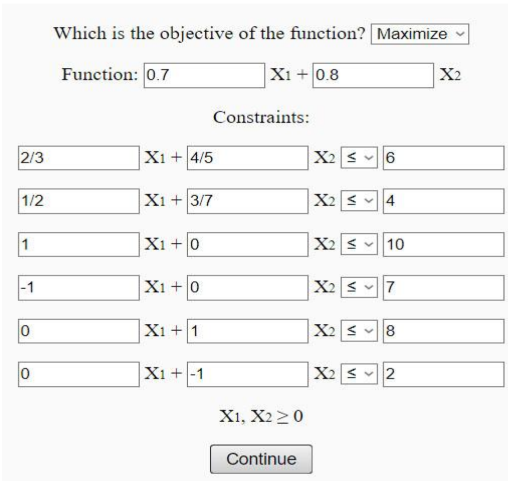
U alat se unose sljedeći parametri: 2 decizijske varijable i 6 ograničenja (slika)

- Method: Simplex / Two phases
- How many decison variables are the problem : 2 (α i β)
- How many constraints : 6 (dobiveno iz 6 nejednadžbi)



U idućoj stranici se unose ograničenja (Constraints) i funkcija cilja (Function), cilj optimizacije (Maximize). Funkcija cilja je **x_0=0.7 α + 0.8 β** što se unosi u Fucntion red

Obratite pozornost da se ograničenja tipa $-\beta \leq 2$ pišu kao $0 \cdot \alpha - 1 \cdot \beta \leq 2$, te se u alat unosi 0 za X1 varijablu, -1 za X2 varijablu i 2 za ≤ ograničenje (posljednji red unosa)



Što je izvedeno iz zadanih 6 nejednadžbi

$$\frac{2}{3}\alpha + \frac{4}{5}\beta \leq 6$$
$$\frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{7}\beta \leq 4$$
$$\alpha \leq 10$$
$$-\alpha \leq 7$$
$$\beta \leq 8$$
$$-\beta \leq 2$$

U sljedećih nekoliko koraka se dolazi do rješenja, za ovaj konkretan slučaj u 3 koraka.

Korak1

Tableau 1			0.7	0.8	0	0	0	0	0	0
Base	**C_b**	**P_0**	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**P_4**	**P_5**	**P_6**	**P_7**	**P_8**
P_3	0	6	0.66666666666667	0.8	1	0	0	0	0	0
P_4	0	4	0.5	0.42857142857143	0	1	0	0	0	0
P_5	0	10	1	0	0	0	1	0	0	0
P_6	0	7	-1	0	0	0	0	1	0	0
P_7	0	8	0	1	0	0	0	0	1	0
P_8	0	2	0	-1	0	0	0	0	0	1
Z		0	-0.7	-0.8	0	0	0	0	0	0

Korak 2

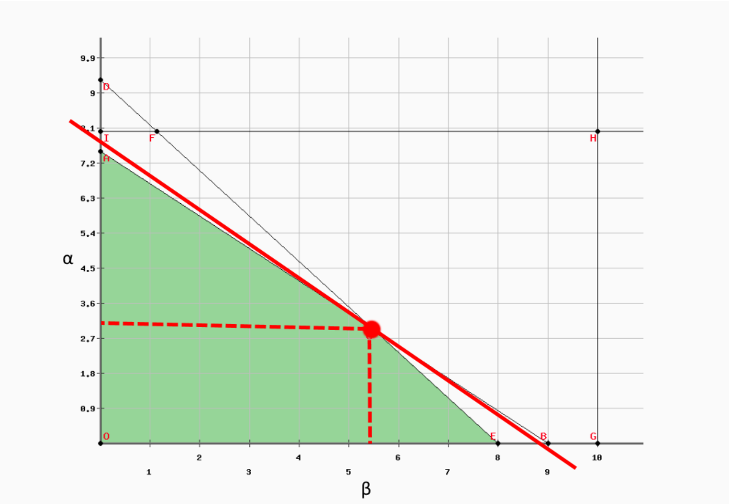
Tableau 2			0.7	0.8	0	0	0	0	0	0
Base	**C_b**	**P_0**	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**P_4**	**P_5**	**P_6**	**P_7**	**P_8**
P_2	0.8	7.5	0.83333333333333	1	1.25	0	0	0	0	0
P_4	0	0.78571428571429	0.14285714285714	0	-0.53571428571429	1	0	0	0	0
P_5	0	10	1	0	0	0	1	0	0	0
P_6	0	7	-1	0	0	0	0	1	0	0
P_7	0	0.5	-0.83333333333333	0	-1.25	0	0	0	1	0
P_8	0	9.5	0.83333333333333	0	1.25	0	0	0	0	1
Z		6	-0.033333333333333	0	1	0	0	0	0	0

Korak 3

Tableau 3			0.7	0.8	0	0	0	0	0	0
Base	**C_b**	**P_0**	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**P_4**	**P_5**	**P_6**	**P_7**	**P_8**
P_2	0.8	2.91666666666667 β	0	1	4.375	-5.8333333333333	0	0	0	0
P_1	0.7	5.5 α	1	0	-3.75	7	0	0	0	0
P_5	0	4.5	0	0	3.75	-7	1	0	0	0
P_6	0	12.5	0	0	-3.75	7	0	1	0	0
P_7	0	5.0833333333333	0	0	-4.375	5.8333333333333	0	0	1	0
P_8	0	4.9166666666667	0	0	4.375	-5.8333333333333	0	0	0	1
Z		6.1833333333333 x_0	0	0	0.875	0.23333333333333	0	0	0	0

Optimalno rješenje je za **α β=5.5** i **β =2.91,** što u konačnici daje i optimalan **x_0=6.183**

Klikom na **Solve using graphical method** se crta prostor rješenja ovog sustava.



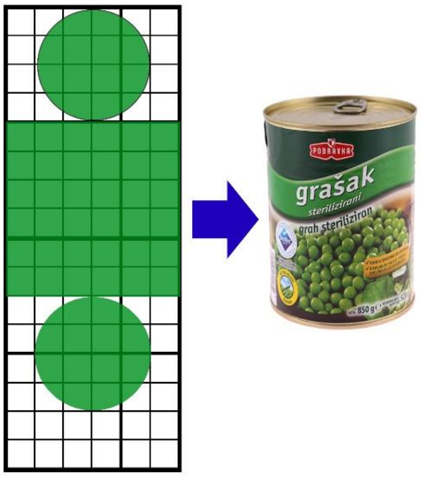
Područje pod ograničenjima je zatamnjeno (zeleno). Funkcija cilja je podebljani crveni pravac, a crvena točka predstavlja **optimalno** rješenje. Isprekidana linija određuje optimalne vrijednosti **α** (x os) i **β** (y os).

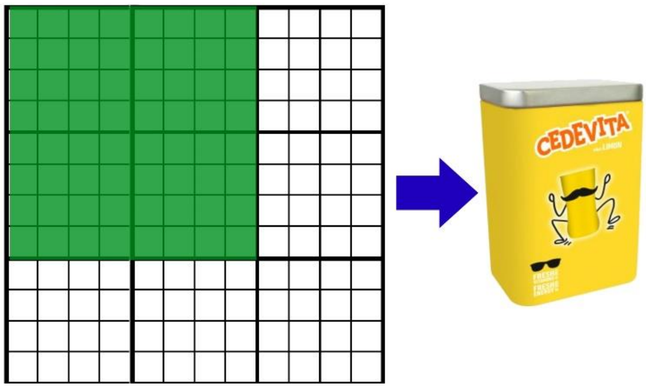
Primijetite kako se funkcija cilja maksimizira, da se točka u kojoj je ostvaren maksimum nalazi na rubu zatamnjenog / zelenog područja. Rješenje se nalazi u prvom kvadrantu, kako se očekuje da su α i β pozitivni.

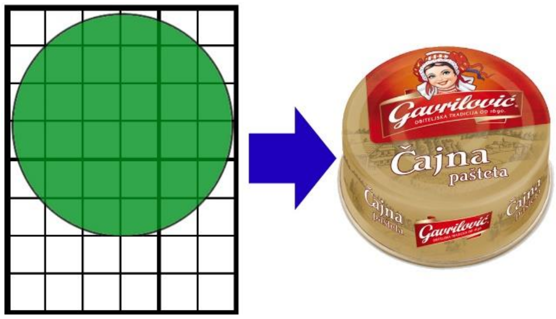
Optimalno rezanje materijala

U nastavku će se metodom dualnog simpleksa odrediti optimalan odabir rezanih oblika, s ciljem da se ostvari optimum uz zadana ograničenja. Jedan primjer iz stvarnog života bi bio rezanje lima iz limenih listova poznatih dimenzija s ciljem izrade posuda različitih dimenzija:

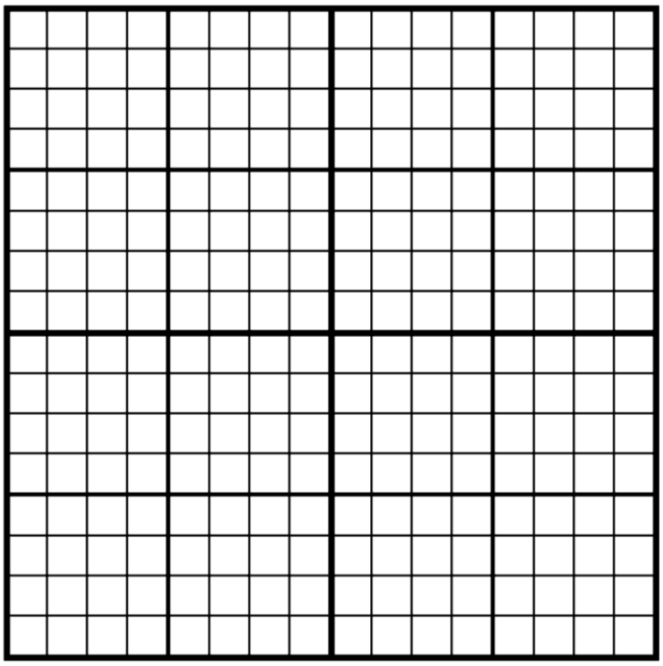
- **Oblik A** Konzerva za grašak, dimenzija kvadrat 6 x 6 + 2 kruga radijusa 2 , **površina 61.13**
- **Oblik B** limenka napitka, kvadrat dimenzija 8 x 8, **površina 64**
- **Oblik C** limenka paštete, krug radijusa 3, **površina 28.27**







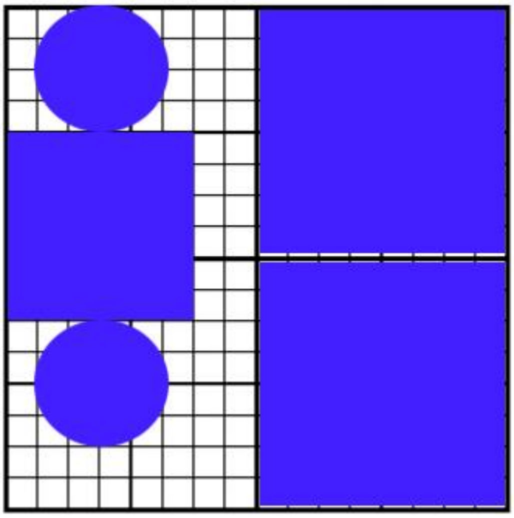
Dostupan je neograničen broj limova dimenzija 16 x 16



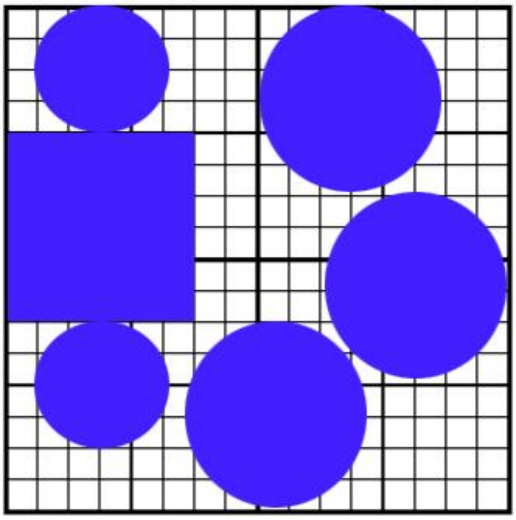
Prvi zadatak je pripremiti nekoliko planova rezanja lima (**najmanje 4 koja ucrtavate u predložak dobiven sa laboratorijskom vježbom**) tako da se svi traženi oblici upotrijebe bar na jednom od planova rezanja. Prihvatljivo je i optimalno rješenje ako neki plan rezanja uopće ne treba rezati (što znači da je taj plan rezanja bio beskoristan).

Ako je zadano da se mora napraviti najmanje **4 oblika A**, **5 oblika B** i **7 oblika C**, moramo pripremiti nekoliko planova rezanja i izračunati površinu neupotrjebljenog materijala od svakog plana rezanja.

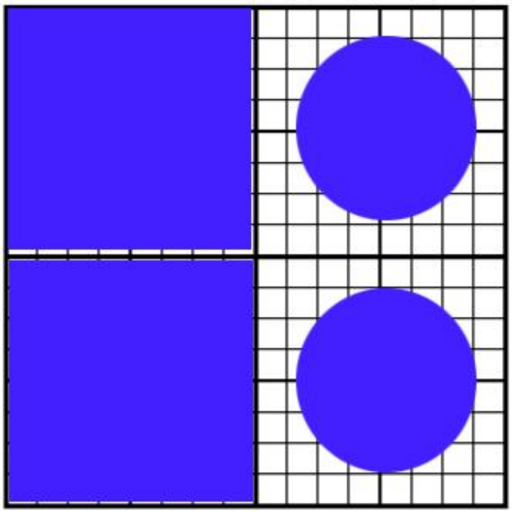
Plan rezanja 1, 1 oblik A i 2 oblika B , iskorištena površina 189.13, ostatak 66.86



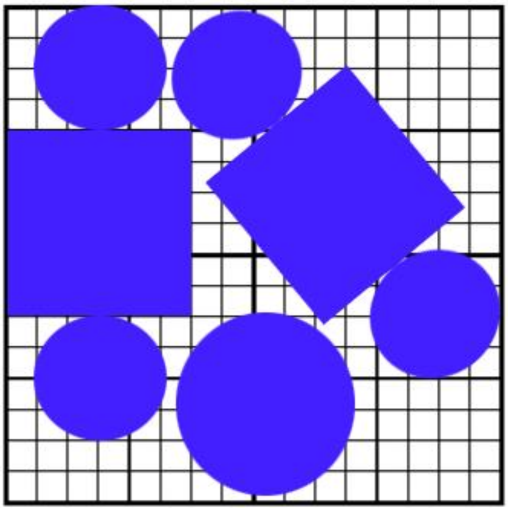
Plan rezanja 2, 1 oblik A i 3 oblika C , iskorištena površina 145.95, ostatak 110.04



Plan rezanja 3, 2 oblika B i 2 oblika C, iskorištena površina 184.54 ostatak 71.45



Plan rezanja 4, 2 oblika A i 1 oblik C, iskorištena površina 150.53 ostatak 105.46



Planovi rezanja se unose u tablicu koji sadrže broj oblika na planu rezanja, iskorištenu površinu i ostatak svakog plana rezanja.

	Površina	Plan 1 X1	Plan 2 X2	Plan3 X3	Plan4 X4
Oblik 1	61.13	1	1	0	2
Oblik 2	64	2	0	2	0
Oblik 3	28.27	0	3	2	1
Ostatak		**66.86**	**110.04**	**71.45**	**105.46**

Možemo sastaviti funkciju izračuna ostatka (škarta) prema posljednjem redu tablice.

X_0=66.86x_1 + 110.04x_2 + 71.45x_3 + 105.46x_4

U ovom zadatku se minimizira količina ostatka, tako da je cilj optimizacije minimizirati funkciju cilja uz zadana minimalna ograničenja koliko kojih oblika se mora ostvariti.

Uz zadana ograničenja **4 oblika A**, **5 oblika B** i **7 oblika C** možemo pisati

$$1x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 2x_4 \le 4$$
$$2x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 0x_4 \le 5$$
$$0x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 1x_4 \le 7$$

Na temelju prethodnih jednadžbi gradi se simpleks tablica sa zadanim uvjetima.

Prvo se unose zadana ograničenja koliko kojih oblika se mora ostvariti

$$g_0 = 4y_1 + 5y_2 + 7y_3$$

A potom ostala ograničenja koja se dobivaju iz vertikala prethodne tablice, za svaki od planova rezanja:

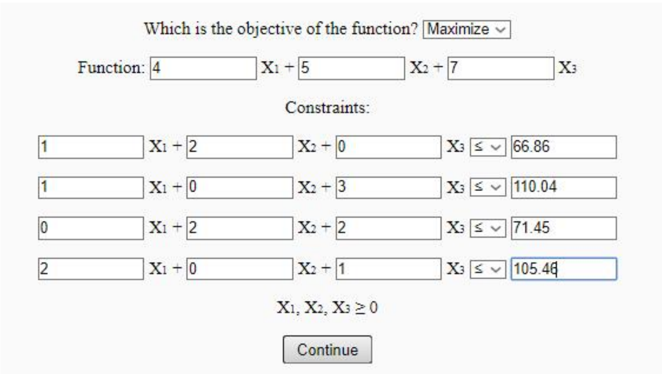
$$y_1 + 2y_2 \le 66.86$$
$$1y_1 + 3y_3 \le 110.04$$
$$2y_2 + 2y_3 \le 71.45$$
$$2y_1 + 1y_3 \le 105.46$$

Simpleks tablica sada ima oblik:

	g_0	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3	s_4	Rješenje:
g_0	1	-4	-5	-7	0	0	0	0	0
s_1	0	1	2	0	1	0	0	0	66.86
s_2	0	1	0	3	0	1	0	0	110.04
s_3	0	0	2	2	0	0	1	0	71.45
s_4	0	2	0	1	0	0	0	1	105.46

Broj ograničenja je 4, broj decizijskih varijabli je 3

U program koji smo koristili na početku vježbe unosimo funkciju $\mathbf{f=4x_1+5x_2+7x_3}$, potom unosimo sva ostala ograničenja



Pritiskom na **Continue** dolazim do rješenja (u 4 koraka). Promatraju se vrijednosti u posljednjem redu tablice u stupcima P4 P5 P6 i P7, zaokruženo u slici.

Tableau 4			4	5	7	0	0	0	0
Base	**C_b**	**P_0**	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**P_4**	**P_5**	**P_6**	**P_7**
P_2	5	12.799	0	1	0	0.2	-0.2	0.3	0
P_1	4	41.262	1	0	0	0.6	0.4	-0.6	0
P_3	7	22.926	0	0	1	-0.2	0.2	0.2	0
P_7	0	0.0099999999999909	0	0	0	-1	-1	1	1
Z		389.525	0	0	0	2	2	0.5	0

Što znači da je optimalno rješenje upotreba **2 x plana rezanja 1**, **2 x plana rezanja 2** i **0.5x plana rezanja 3**. Primijetite da plan rezanja 4 nije upotrjebljen. U konačnici na ovaj način dobivamo ukupno 4 oblika A, 5 oblika B i 7 oblika C što je u zadatku i traženo!

Ukupno bi za izradu traženih oblika bilo utrošeno 4.5 (5) ploča, ukupni škart iznosi 389.52 jedinca, što je ako se uračuna 4.5 ploča površine 1152 iznosi 33.81 %.

U konačnici broj ostvarenih oblika može biti i veći nego što je zadano, **ali ne i manji od minimalno zadanih.** Sa funkcijom cilja možemo birati kako će se kidanje optimizirati. U ovom slučaju je to bilo minimiziranje škarta, dok u drugim slučajevima to može biti i maksimiziranje dobiti (ako svaki oblik ima svoju cijenu) ili kao dodatni parametar možemo uvesti vrijeme upotrebe stroja za kidanje koje treba minimizirati.