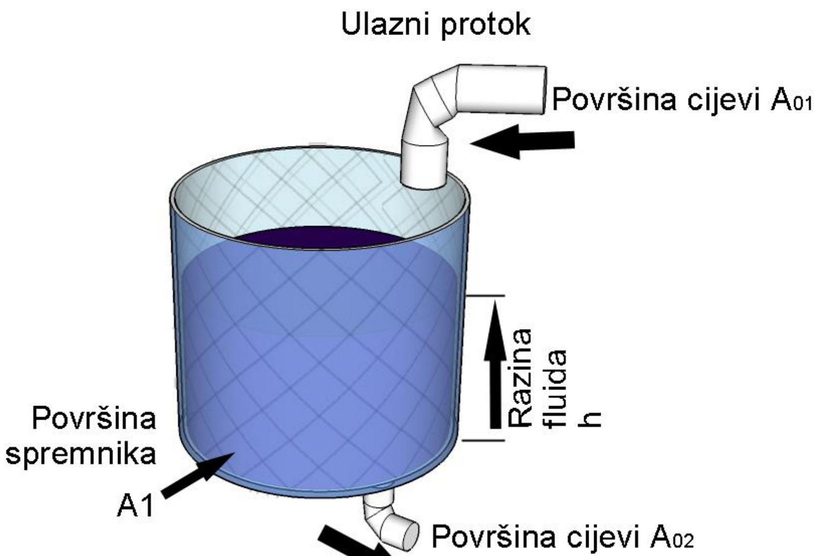
Upute za laboratorijske vježbe iz kolegija **Praktikum iz vođenja procesa**

Vježba 3

Ovaj dokument predstavlja kratke upute za treću vježbu iz kolegija Praktikum iz vođenja procesa. Zadatak vježbe je modelirati dva povezana fluidička sustava i izvršiti analizu takvog sustava.

Na slici je prikazano nekoliko primjera svakodnevnih fluidičkih sustava.

Promatramo li spremnik vode kao najjednostavniji fluidički sustav, on se ponaša kao spremnik energije (sustav 1. reda). Na donjoj slici je ilustriran jedan takav sustav sa upisanim parametrima a to su: **površina** dna spremnika $\mathbf{A_1}$, **razina** fluida u spremniku **h** i **površina** (ili presjek d) izlazne cijevi $\mathbf{A_{02}}$. Neki spremnici imaju dodatno ulazni protok, gdje tekućina ulazi u spremnik kroz cijev **površine** (presjeka) ulazne cijevi $\mathbf{A_{01}}$.



Obratite pozornost da ulazni protok može biti zadan u **m³/s** ili može biti zadana **brzina fluida**, gdje se protok računa uz poznavanje **presjeka cijevi (d)** / **površine cijevi (A01)**. Pripazite da u vašem zadatku površina A01 znači nešto drugo!

$$q_{ul} = A_{01} v_{fluid} = \left(\frac{d_{cijev}}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot v_{fluid}$$

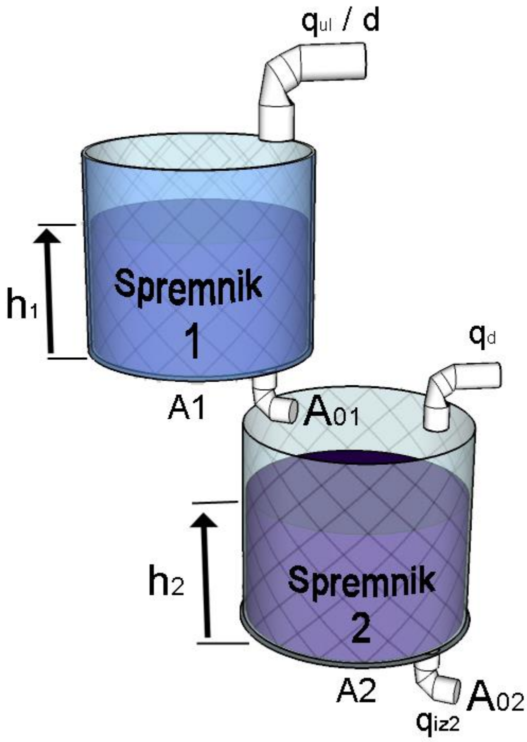
Dok je izlazni tok **q_{iz}** izražen u funkciji razine **h,** i iznosi $q_{iz} = A_{02}\sqrt{2gh}$ Primijetite da izlazni protok fluida ima izraženu nelinearnost (korijen), što će nam biti važno u nastavku ove vježbe.

Matematički se ovaj sustav opisuje pomoću diferencijalne jednadžbe, pri čemu se promatra promjena volumena fluida u vremenu, odnosno:

$$\frac{dV}{dt} = q_{ul} - q_{iz},$$

pri čemu se volumen **V** računa kao $V = A_1 \cdot h$

Zadatak sa spremnike u seriji (spremnici u slijedu):



Svaki spremnik se opisuje zasebnom diferencijalnom jednadžbom

$$A1\frac{dh_1}{dt} = (q_{ul} - q_{iz}) = q_{ul} - A_{01}\sqrt{2gh_1}$$ za prvi spremnik, odnosno

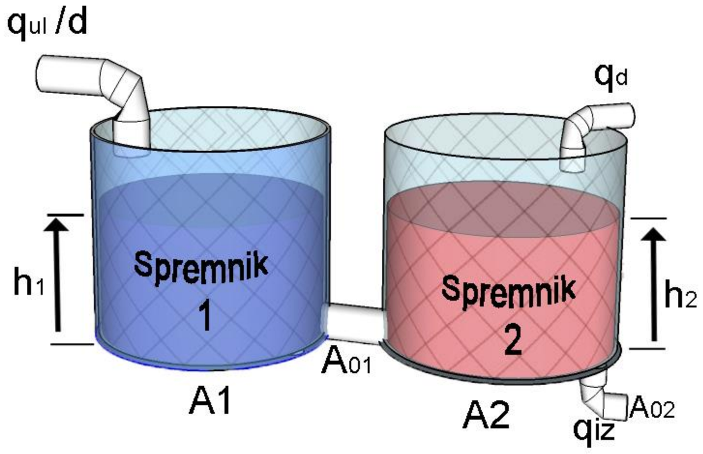
$$A2\frac{dh_2}{dt} = (q_{ul} - q_{iz}) = A_{01}\sqrt{2gh_1} - A_{02}\sqrt{2gh_2} + q_d$$ za drugi spremnik

Pri čemu su:

- A_1 i A_2 površine 1. I 2. Spremnika
- A_{01} površina izlazne cijevi 1. spremnika
- A_{02} površina izlazne cijevi 2. spremnika
- q_{ul} ulazni protok prvog spremnika (računa se iz presjeka cijevi i zadane brzine fluida)
- q_d dodatni ulazni protok drugog spremnika
- q_{iz2} izlazni protok drugog spremnika
- h_1 i h_2 visine fluida u oba spremnika

- <u>izlazni protok prvog spremnika je ulazni protok drugog spremnika</u>

Zadatak sa spremnike u paraleli (spregnuti spremnici):



Svaki spremnik se opisuje zasebnom diferencijalnom jednadžbom

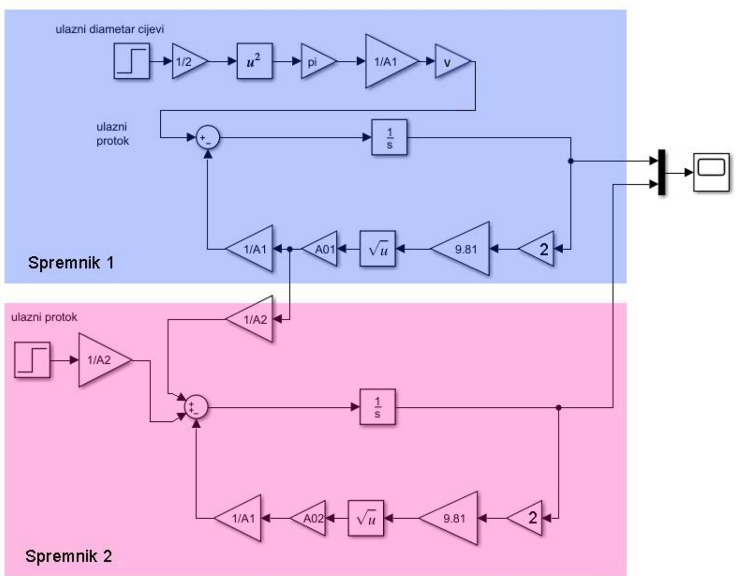
$$A1\frac{dh_1}{dt}=(q_{ul}-q_{iz})=q_{ul}-A_{01}\sqrt{2g(h_1-h_2)}$$ za prvi spremnik, odnosno

$$A2\frac{dh_2}{dt}=(q_{ul}-q_{iz})=A_{01}\sqrt{2g(h_1-h_2)}-A_{02}\sqrt{2gh_2}+q_d$$ za drugi spremnik

Pri čemu su:

- A_1 i A_2 površine 1. i 2. Spremnika
- A_{01} površina izlazne cijevi 1. spremnika
- A_{02} površina izlazne cijevi 2. spremnika
- q_{ul} ulazni protok prvog spremnika (računa se iz presjeka cijevi i zadane brzine fluida)
- q_d dodatni ulazni protok drugog spremnika
- q_{iz2} izlazni protok drugog spremnika
- h_1 i h_2 visine fluida u oba spremnika
- <u>izlazni protok prvog spremnika je ulazni protok drugog spremnika</u>

Simulink model (za spremnike u slijedu)



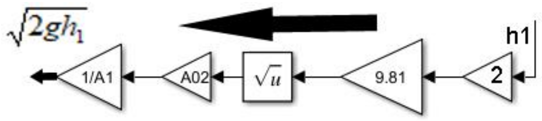
U slučaju da se u simulinku pojavi greška tipa *„Square root of a negative number in 'model/Sqrt'. Consider setting the 'Output signal type' to complex* , koja nastaje zbog prosljeđivanaj negativnog broja u korijen, potrebno je unjeti neke početne vrijednosti (primjerice 0.01 ili 0.05)

Simulink model se radi izravno iz diferencijalne jednadžbe, pri čemu je važno da **sve zadane komponente budu vidljive u modelu** (nemojte ništa množiti i djeliti, sve matematičke operacije će se „odraditi" na modelu) kao što se i vidi na prethondoj slici. Na ovaj način je olakšana promjena bilo kojeg parametra sustava (Vježba 4). Parametre (A1, A2, A01, A02...) unesite u randni prostor Matlab-a pomoću komandne linije ili napravite m-sriptu.

Kod slaganja modela pazite na redoslijed blokova, tako da se primjerice izraz (koji je u povratnoj grani)

$$q_{izl} = \frac{A02}{A1}\sqrt{2gh_1}$$

Modelira na sljedeći način



Ravnotežne točke

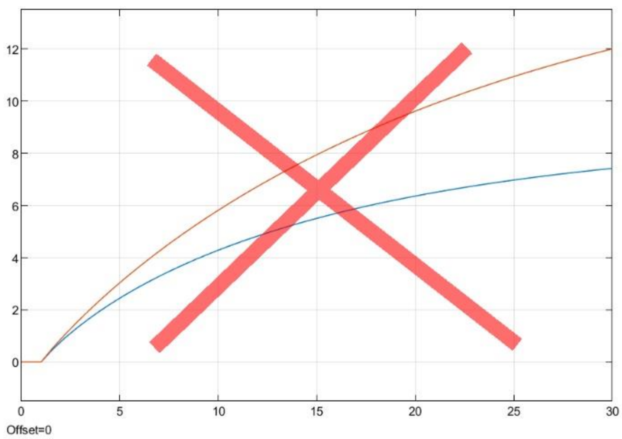
Ravnotežna točka se dobije izjednačavanjem $\frac{dh_1}{dt} = 0$ i $\frac{dh_2}{dt} = 0$, odnosno ona predstavlja razine spremnika h_1 i h_2 kada više nema oscilacija u njihovim očitanjima. Ravnotežne točke se očitavaju iz ustaljenog stanja, tada da u odzivu sustava morate obratiti pozornost da je vrijeme simulacije dovoljno dugo, tako da se ustaljeno stanje može očitati. Primijetite da na priloženoj slici sa lijeve strane duljina trajanja simulacije nije dovoljno duga, dok je sa desne strane dovoljno duga da se može očitati ustaljeno stanje. Ustaljeno stan je se može očitati i iz **simout bloka**, naredbom

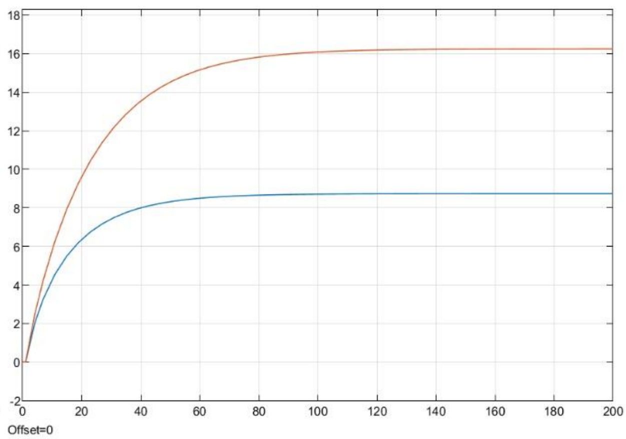
```
h1_ustaljeno=simout.Data(end)
```

odnosno

```
h2_ustaljeno=simout1.Data(end)
```

koja ispisuje posljednju vrijednost vektora (matrice) Data koja sadrži odzive sustava





Linearizacija

Linearizacija se vrši s ciljem pojednostavnjena opisa sustava oko jednog radnog područja. U većini situacija linearizacija može relativno dobro zamijeniti originalni nelinearni sustav, pri čemu su idući koraci analize i sinteze znatno jednostavniji, kako je i sam sustav opisan sa jednostavnijim setom jednadžbi (linearnih).

Primjer linearizacije:

Ispisuje se **matrica Jakobijana**, što je matrica parcijalnih izvoda prvog reda neke funkcije koja ima općeniti oblik:

$$J_F(M) = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \cdots & \frac{df_1}{dx_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{df_m}{dx_1} & \cdots & \frac{df_m}{dx_n} \end{bmatrix}$$

Gdje se umjesto $x_1 \ldots x_n$ upisuju njihove vrijednosti u ustaljenom stanju.

Primjerice, ako za dvije fiktivne diferencijalne jednadžbe

$$f_1 = 0.13u - 0.12\sqrt{h_1}$$

$$f_2 = 1.1\sqrt{h_1} + 2u - 0.6\sqrt{h_2}$$

Se vrši linearizacija oko ravnotežnih točaka (h_1=1.5 i h_2=2.5), računa se matrica Jakobijana po h_1 h_2 i u.

Primijetite redoslijed h_1 h_2 i u matrici!

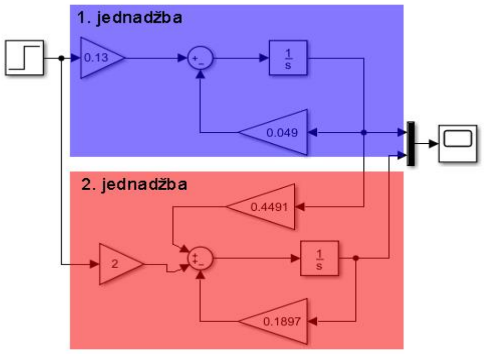
$$J = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dh_1} & \frac{df_1}{dh_2} & \frac{df_1}{du} \\ \frac{df_2}{dh_1} & \frac{df_2}{dh_2} & \frac{df_1}{du} \end{bmatrix}_{(1.5,2.5)} = \begin{bmatrix} -0.12\cdot\frac{1}{2\sqrt{h1}} & 0 & 0.13 \\ 1.1\cdot\frac{1}{2\sqrt{h1}} & -0.6\cdot\frac{1}{2\sqrt{h2}} & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0490 & 0 & 0.13 \\ 0.4491 & -0.1897 & 2 \end{bmatrix}$$

Nakon linearizacije dobivamo

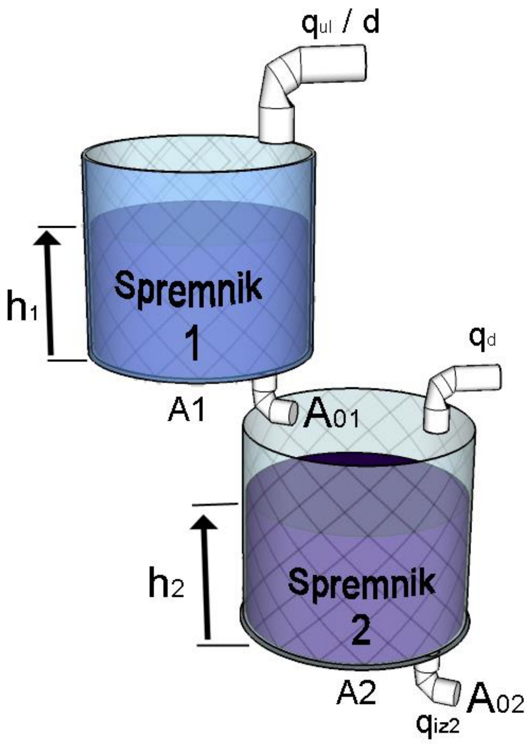
$$\frac{dh_1}{dt} = -0.0490h_1 + 0.13u$$

$$\frac{dh_2}{dt} = 0.4491h_1 - 0.1897h_2 + 2u$$

Što se u Simulinku popriličnо jednostavno modelira sljedećim modelom. Primijetite koliko je ovaj model jednostavniji od nelineranog modela.



Riješeni primjer zadatka - zadatak sa spremnike u seriji (spremnici u slijedu):



Podaci o fluidičkom sustavu:

- Otvaranjem ventila u spremnik 1 dotječe tekućina iz cijevi presjeka **d= 15 mm**, brzina ulaznog protoka je **v= 50 m/s**
- površina presjeka spremnika 1 je **A1 = 1.1 m^2 ,**
- površina presjeka spremnika 2 je **A2 = 1.2m^2** ,
- površina presjeka cijevi istjecanja **A01= 0.01 m^2 ,**
- površina presjeka cijevi istjecanja **A02** = **0.015 m^2 ,**
- otvaranjem ventila nastaje dodatni dotok fluida u spremnik 2 sa **q_d = 0.02 m^3 /s**

prvi ulazni protok se računa iz jendadžbe:

$$q_{ul} = A_{01} v_{fluid} = (\frac{d_{cijev}}{2})^2 \cdot \pi \cdot v_{fluid}$$

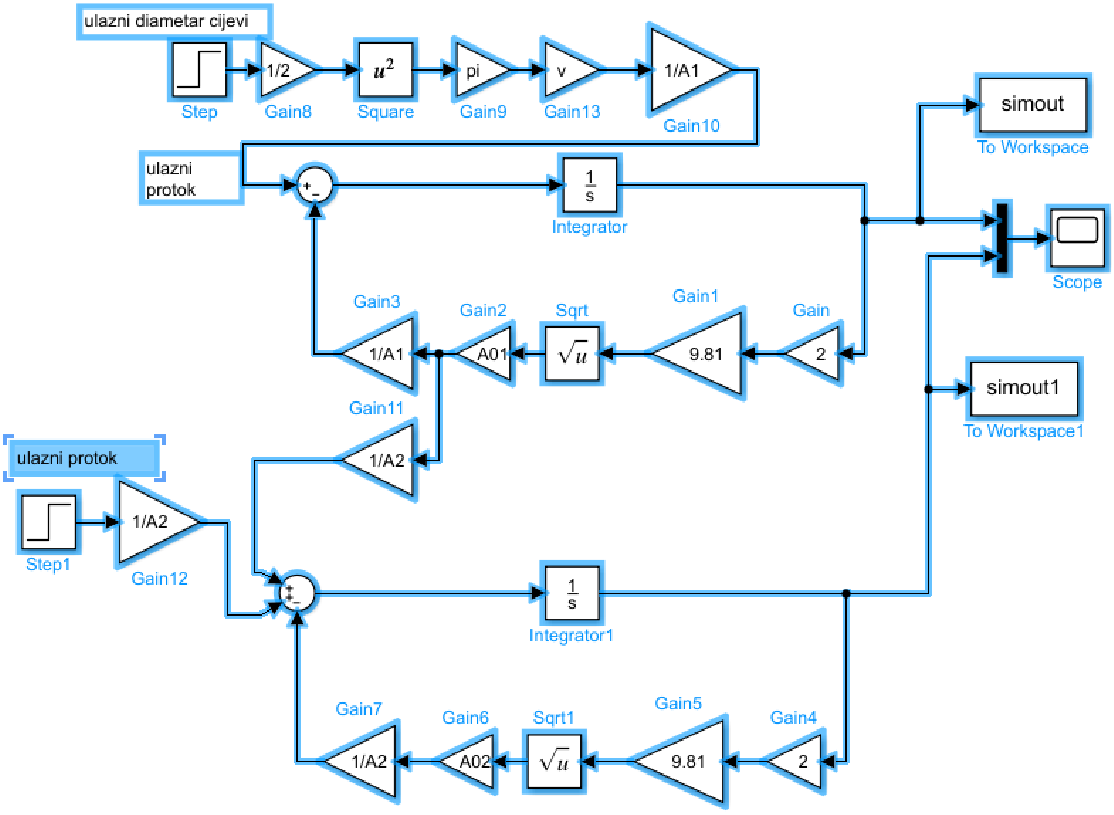
Svaki spremnik se opisuje zasebnom diferencijalnom jednadžbom

$$A1\frac{dh_1}{dt} = q_{ul} - A_{01}\sqrt{2gh_1}$$ za prvi spremnik, odnosno

$$A2\frac{dh_2}{dt} = A_{01}\sqrt{2gh_1} - A_{02}\sqrt{2gh_2} + q_d$$ za drugi spremnik

Iz čega radimo simulink model.

Napomena: ne upisujte vrijednosti izravno u pojačanja, već upisujte imena matrica (varijabli) koje pozivate iz matlab workspace-a (A1, A2, A01 itd)



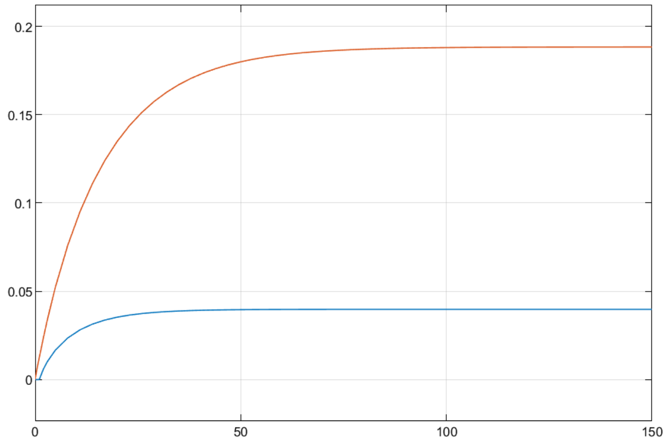
U matlabu stvaramo skriptu (m-file) sa sadržajem

```
%% skripta za vjezbu 3

d= 0.015
v= 50
A1  = 1.1
A2  = 1.2
A01= 0.01
A02  = 0.015,
qd  = 0.02
```

Napomena: Skripta se pokreće prečacem F5, a dio skripte koji je označen prečacem F9

Odziv sustava je



Do finalnih vrijednosti se dolazi naredbama

simout.Data(end)

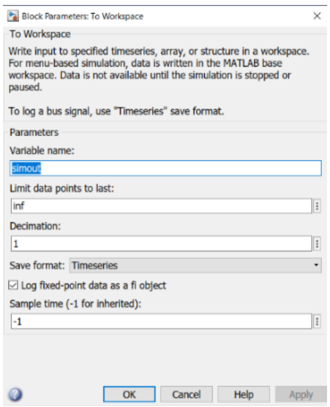
rezultat je za h1 0.0398

i

simout1.Data(end)

rezultat je za h2= 0.1883

Opcije to worsksapce neka budu kao na slici (save format je Timeseries)



Linearizacja

Počinjemo od diferencijalnih jednadžbi

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{1}{A1} q_{ul} - \frac{1}{A1} A_{01} \sqrt{2gh_1}$$ za prvi spremnik, odnosno

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{1}{A2} A_{01} \sqrt{2gh_1} - \frac{1}{A2} A_{02} \sqrt{2gh_2} + \frac{1}{A2} q_d$$ za drugi spremnik

Sredimo zapis tako da bude oblika:

f1= $$\frac{dh_1}{dt} = -\frac{1}{A1} A_{01}\sqrt{2gh_1} - 0h_2 + \frac{1}{A1} q_{ul} + 0q_d$$

f2= $$\frac{dh_2}{dt} = \frac{1}{A2} A_{01}\sqrt{2gh_1} - \frac{1}{A2} A_{02}\sqrt{2gh_2} + \frac{1}{A2} q_d$$

Primijetite da je ostavljen zapis qul (rad jednostavnije realizacije kasnije). Nakon linearizacije oko ravnotežnih točaka h_1 i h_2 **ULAZ SE NE MIJENJA** i ostaje isti kao u nelinearnom zapisu**.**

Matrica ima 4 stupca, kako se linearizacija vrši po h_1 i h_2 i po svim ulazima!

Matrica jakobijana ima oblik

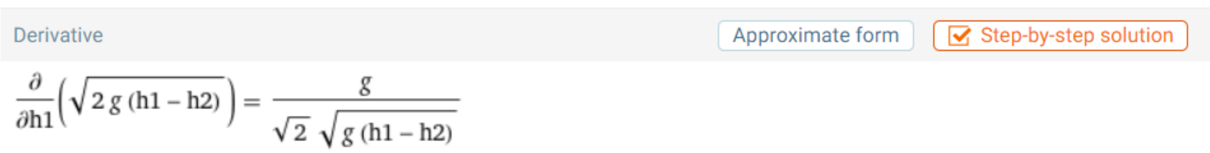
$$J = \left[\begin{array}{c|cccc} \frac{df_1}{dh_1} & \frac{df_1}{dh_2} & \frac{df_1}{dq_{ul}} & \frac{df_1}{dq_d} \\ \frac{df_2}{dh_1} & \frac{df_2}{dh_2} & \frac{df_2}{dqul} & \frac{df_2}{dq_d} \end{array}\right]_{(0.0398,0.883)} = \ldots = \begin{bmatrix} -0.1009 & 0 & 0.9091 & 0 \\ 0.0925 & -0.0638 & 0 & 0.8333 \end{bmatrix}$$

Napomena: izraz $\frac{A01}{A1}\sqrt{2gh_1}$ nakon parcijalne derivacije po h1 ima oblik $\frac{A01}{A1}\sqrt{2g}\frac{1}{2\sqrt{h_1}}$

Napomena 2: za izraz $\frac{A01}{A1}\sqrt{2g(h_1 - h_2)}$ po h1 dobivamo $\frac{A01}{A1}\sqrt{2g}\frac{1}{2\sqrt{(h_1 - h_2)}}$

Ovakve i slične upite možete riješiti pomoću online servisa https://www.wolframalpha.com

Dobije se rješenje



Koristite se Matlab-om, tako da prethodni izraz rješavate

A01/A1*sqrt(2*9.81)/2/sqrt(h1)

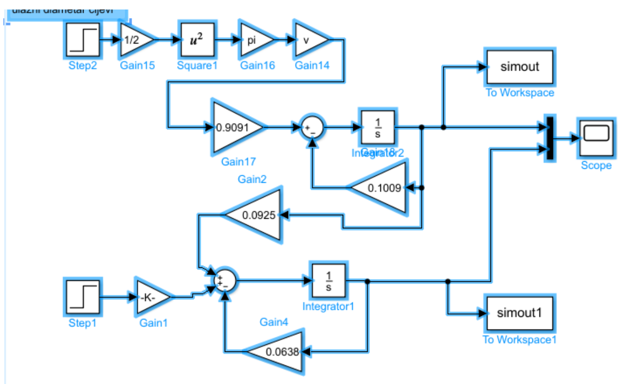
Iz matrice jakobijana $\begin{bmatrix} -0.1009 & 0 & 0.9091 & 0 \\ 0.0925 & -0.0638 & 0 & 0.8333 \end{bmatrix}$ se dobiva linearizirani izraz

$$\begin{bmatrix} -0.1009 & 0 & 0.9091 & 0 \\ 0.0925 & -0.0638 & 0 & 0.8333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h1 \\ h2 \\ qul \\ qd \end{bmatrix} = \begin{matrix} -0.1009h1 + 0h2 + 0.9091qul + 0qd \\ 0.0925h1 - 0.0638h2 + 0qul + 0.8333qd \end{matrix}$$

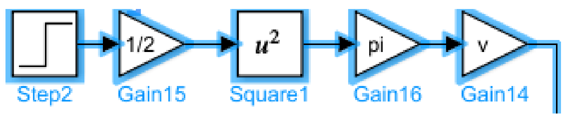
Odnosno

$$\frac{dh_1}{dt} = -0.1009h1 + 0h2 + 0.9091qul + 0qd$$
$$\frac{dh2}{dt} = 0.0925h1 - 0.0638h2 + 0qul + 0.8333qd$$

Dobiveni model izgleda kao na slici

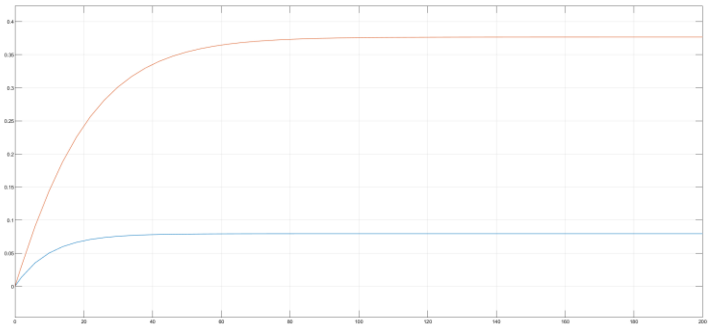


Primijetite da je qul realiziran identično kao i u nelineranom modelu



Napomena: qul smo mogli linearlizrati i po nekim drugim veličinama (primjerice brzini protoka v), ali ne i po dijametru cijevi d. Zašto?

Odziv lineariziranog modela je prikazan na slici (primijetite da su vrijednosti duplo veće nego kod nelinearnog modela)



Odvojite nelinearni i linearni model u odvojene slx datoteke, jer se u nekim slučajevima pokazalo da kada se oba modela nalaze zajedno, simulacija se (neobjašnjivo) loše ponaša (bug)

Za zajednički prikaz oba modela koristiti se skriptom (Zadatak 4)

```
%za nelinearni model
h1_nelinearan=simout.Data
h2_nelinearan=simout1.Data
time_vektor=simout.Time
plot(time_vektor,h1_nelinearan,'r')
hold on
plot(time_vektor,h2_nelinearan,'b')
% za linearni model
h1_linearan=simout2.Data
h2_linearan=simout2.Data
time_vektor=simout3.Time
plot(time_vektor,h1_linearan,'c')
plot(time_vektor,h2_linearan,'m')
```

Pri čemu su simout i simout1 blokovi **To workspace** za linearni model, dok su blokovi simout2 i simout3 blokovi **To workspace** za nelinearni model