ZADAĆA 1 – SPA 2

Zad 1

(1) ključevi: 77, 69, 39, 70, 6, 8, 40, 89, 49, 15

a) $h(k) = k \bmod m$

$h(77) = 77 \bmod 19 = 1$

$h(69) = 69 \bmod 19 = 7$

$h(39) = 39 \bmod 19 = 1$

$h(70) = 70 \bmod 19 = 13$

$h(6) = 6 \bmod 19 = 6$

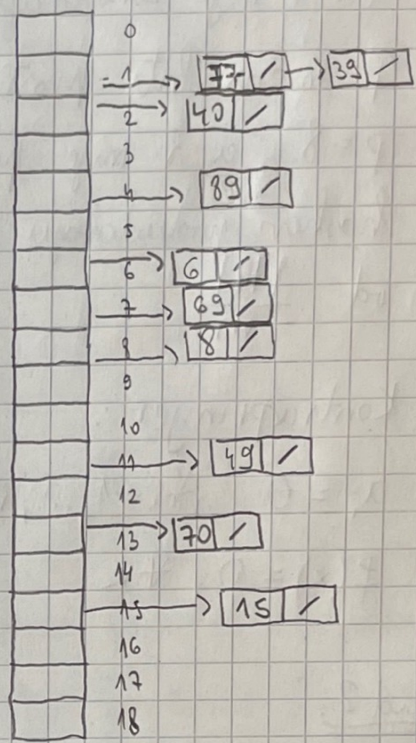
$h(8) = 8 \bmod 19 = 8$

$h(40) = 40 \bmod 19 = 2$

$h(89) = 89 \bmod 19 = 4$

$h(49) = 49 \bmod 19 = 11$

$h(15) = 15 \bmod 19 = 15$



b) Dvostruko probiranje

$i = 0, 1, 2, \ldots, m-1, \quad h(k,i) = (h_1(k) + i \cdot h_2(k)) \bmod m$

$$\underbrace{h_1(k) = k \bmod m, \quad h_2(k) = 1 + (k \bmod (m-1))}$$

$$h(k,i) = \left(k \bmod m + i \cdot (1 + (k \bmod (m-1)))\right) \bmod m$$

0		
1	77	
2	40	
3		
4		
5	39	$i=1$
6		
7		
8	8	$i=2$
9		
10		
11	89	$i=2$
12	69	
13	70	
14		
15	49	$i=3$
16		
17		
18		

- uz pomoć funkcija računamo vrijednosti za svaki ključ i provjeravamo je li mjesto slobodno, ako je ključ se postavlja na to mjesto, ako ne onda pokušavamo dalje dok ne dođemo do slobodnog mjesta

(2) n-znamenkasti decimalni broj $x_1 x_2 \dots x_n$ $(x_i \in \{0, 1, \dots, 9\})$.
Je li hash f-ja $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \pmod 8$ univerzalna?

$f(x)$ nije univerzalna f-ja, definicija kaže da p mora biti prost broj, a ovdje to nije slučaj, $p = 8$, a 8 nije prost dakle vjerojatnost da se hashevi podudaraju za $x \neq y$ će biti potencijalno veća od $\frac{|H|}{m}$

Kontraprimjer:

$a_i = 0 \quad, \forall i = 1, \dots, n$

$f(x) = 0, \forall x$

Zad 2.

n različitih ključeva
tablica T duljine m
pretp. uniformno raspršivanje

$$E\left[\{\{k, l\} : k \neq l, h(k) = h(l)\}\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(h(k) = h(l))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m} = \frac{n(n-1)}{2m}$$

Zad 3.

(1.) tablica veličine m

$n \leq m/2$

otvoreno adresiranje s probiranjem

- vjerojatnost da se ključ ubaci na neko mjesto unutar tablice je $\frac{1}{m}$, tada je vjerojatnost da se stvori kolizija $1-\frac{1}{m}$

- i-ti ključ: $P(x > i) = (1-\frac{1}{m})^{i-1}$

odnosno i-to probiranje zahtjeva strogo više od k probiranja, a to znači da su sve prve $i-1$ lokacije u tablici već zauzete, pa se novi ključ mora smjestiti u preostalih $m-i+1$ lokacija. Ako koristimo otvoreno adresiranje s probiranjem za rješavanje kolizija i pretp. unif. raspršivanje, veličina tablice raspršenja m mora biti manja od 2^k kako bismo osigurali da će svako ubacivanje ključa zahtjevati najviše k probiranja s vjerojatnošću najmanje $\frac{1}{2}$, pod uvjetom da je $n \leq m/2$

$$P(x > k) = (1-\frac{1}{m})^{k-1}$$

(2.) Pozovemo se na prethodni zadatak, $k = 2\lg n$, stoga je vjerojatnost $\leq 2^{-2\lg n} = 2^{\lg n^{-2}} = \frac{1}{n^2}$, odnosno $O(\frac{1}{n^2})$, ova vjerojatnost je mala što pokazuje da je otvoreno adresiranje s probiranjem vrlo učinkovito za hash tablicu koja sadrži manje od pola raspoloživih mjesta

③ $P_r = \{X > 2\lg n\} = O(1/n)$

$X = \max\{X_i : 1 \le i \le n\}$, odtud

$$P_r\{X > 2\lg n\} = P_r\{X_1 > 2\lg n \vee X_2 > 2\lg n \vee \dots \vee X_n > 2\lg n\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P_r\{X_i > 2\lg n\} \underset{②}{\le} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \Rightarrow O\left(\frac{1}{n}\right)$$

④ $$EX = \sum_{i=1}^{n} i \cdot P_r\{X = i\} \le P_r\{X \le 2\lg n\}\, 2\lg n + P_r\{X > 2\lg n\}\, n$$

$$\le \frac{n-1}{n} 2\lg n + \frac{1}{n} n = 2\lg n + 1 - \frac{2\lg n}{n} \in O(\lg n)$$