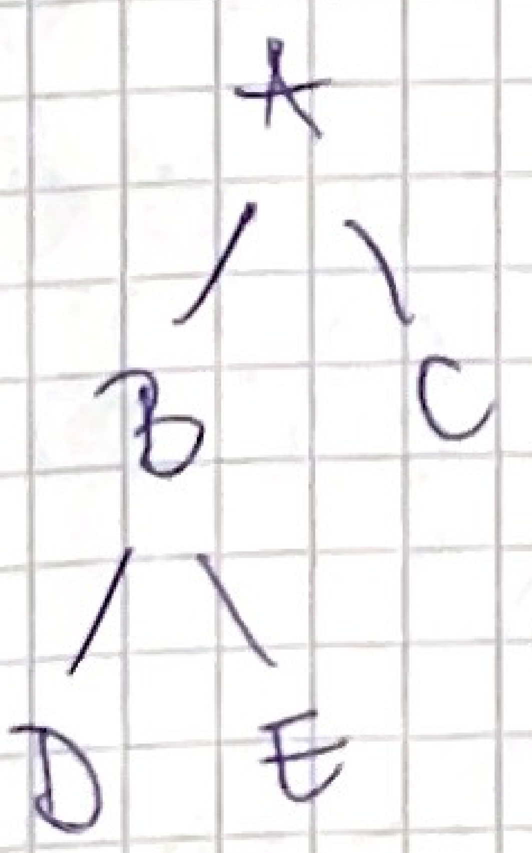
ZADAĆA 9

Zad 1

Tvrdnja 1: G je povezan, a ne sadrži cikluse
Tvrdnja 2: G je povezan i ima $n-1$ bridova

Ako je G stablo, tada je povezan i ne sadrži cikluse, jer bi u protivnom bilo moguće prolaziti kroz ciklus između dvije točke na grafu. Također, stablo s n čvorova ima $n-1$ bridova, pa je G također povezan s $n-1$ bridova

Obrnuto pretp. da su T1 i T2 istinite. Budući da je G povezan, postoji barem jedan put između bilo koja dva čvora u grafu. Također, pošto G ne sadrži cikluse, put između dva čvora nikada neće preći isti brid dvaput. Dakle, ne postoji put koji se vraća na početni čvor, osim ako se ne sastoji samo od tog jednog čvora. To znači da G nema grananje, pa je stoga G stablo



b) T1: Svaka dva vrha u G su povezana jedinstvenim putem

T2: G je povezan i ne sadrži cikluse

<u>Dokaz:</u> Ako je G stablo, tada je povezan i ne sadrži cikluse. Stoga, postoje jedinstveni putevi između svaka dva čvora u grafu. To dokazuje da je tvrdnja 1 istinita kada je i T2 istinita.

Obrnuto, pretp. da su T1 i T2 istinite. Svaka dva čvora u grafu su povezana jedinstvenim putem, što znači da ne postoji grananje u grafu. Ako bi postojalo grananje, onda bi postojalo više od 1 puta između 2 čvora. Također, pošto ne postoji grananje, graf ne sadrži cikluse. Dakle, G je stablo.

c) T1: Graf ima točno jednu povezanu komponentu

T2: Svaki put u Grafu G sadrži najmanje 1 brid

T3: Graf G je minimalno povezan

T1 implicira T2: Pretp. da graf G ima točno jednu povezanu komponentu. Ako bi se maknuo bilo koji brid iz E, graf bi se razdvojio na 2 dijela, pa po def. ne bi bio povezan

T2 implicira negaciju T1: Pretp. sad da G nije povezan. Tada postoji barem jedna povezana komponenta. Ako bi se iz E maknuo brid koji povezuje dvije razl. komponente, ta bi komponenta ostala povezana, ali bi se graf kao cjelina razdvojio

Ako graf G nije min. povezan, to znači da postoji brid koji se može maknuti, a da graf ostane povezan. Ako se takav brid makne, graf bi se pretvorio u dva manja povezana grafa, što znači da po def. ne bi bio min. povezan.

T3 impl. neg T2

Sada pretp. da je G min. povezan. Ako bi se neki brid maknuo iz E, graf bi se razdvojio na dva dijela, pa po def. nije povezan.

Negacija T2 impl. neg. T3

T1 = T2 = T3

d) T1: G je povezan i ima $|E| = |V| - 1$ bridova

T2: G je povezan i nema cikluse

Ako G ima $|E| = |V| - 1$ bridova, znači min. je povezan. Min. povezan graf s n točaka između ima n-1 bridova, G je povezan, ne postoje izolirane točke, pa ne postoji ni višak od n-1 bridova

$T1 \Rightarrow T2$

Pretp. da G nije stablo, tj. ima bar jedan ciklus. Uklonimo neki brid koji pripada ciklusu. Ostatak grafa će biti i dalje povezan jer postoji još jedan put koji spaja te dvije točke. $\Rightarrow$ G ima manje od $|V| - 1$ bridova $\lightning$ s pretp.

T2 impl. T1

e) T1: G je acikličan i ima $|E| = |V| - 1$ bridova
T2: G je stablo

Ako je G acikličan i ima $|E| = |V| - 1$ bridova, tada je minimalno povezan. Budući da je graf acikličan, nema cikluse, a budući da ima $|V| - 1$ bridova, nema vrhova. Dakle, graf je stablo što znači da vrijedi T2.

Pretp. da je G stablo, tj. ne sadrži cikluse. Budući da je graf povezan, svaki par točaka u grafu je povezan nekim putem. Ne sadrži cikluse, put mora bit jedinstven, a graf mora imati $|V| - 1$ bridova

$T2 \Rightarrow T1$

f) T1: G je acikličan
T2: Ako se u G doda bilo koji brid, graf će sadržavati ciklus

Pretp. da je G acikličan. To znači da ne postoji ciklus u G. Ako se u G doda bilo koji brid, novi brid će stvoriti novu vezu između para točaka u grafu i time će se stvoriti 1 ili više ciklusa $T1 \Rightarrow T2$

Pretp. sada da ako se u G doda bilo koji brid, graf će sadržavati ciklus. Ako u G ne postoji ciklus tada je graf stablo, što znači da postoje točno $|V| - 1$ bridova. Dodavanjem novog brida stvorila bi se veza između para točaka i graf bi imao barem jedan ciklus

↯ s pretp. $T2 \Rightarrow T1$

Zad2. Graf 4 vrha: a, b, c, d
Edges: (a, b), (b, c), (c, d), (d, a)
Weights 1, 5, 1 i 5

Neka je $V1 = \{a, d\}$ i $V_2 = \{b, c\}$
Tada je samo jedan brid povezan sa svakim od ovih, dakle stabla koja moramo uzeti za $V1$ i V_2 sadrže bridove (a, d), (b, c) sa weigtom 10. Dodajemo vrijednost 1 za brid koji spaja njih, dobivamo 11.
MST bi koristio 2 puta weight 1 bridova i samo jedan weigta 5, gdje je total 7.

Zad3

Alg. MAYBE-MST A:
- daje min. razapinjujuće stablo samo u posebnom slučaju: kada je početni graf već MST, inače ne daje optimalno rješenje
- najefikasnija implementacija koristi sortiranje bridova po težini, složenost je $O(E \log E)$
- dakle, nije optimalan, iako sortiranje bridova po težini pruža VS koja je prihvatljiva za male grafove

Alg MAYBE-MST-B:

- daje minimalno razapinjujuće stablo samo ako se bridovi umeću u odgovarajućem redoslijedu koji se osigurava pomoću testa ciklusa.
- najefikasnija implementacija koristi str. podataka kao što je UNION-FIND, složenost je $O(E\alpha(E,V))$, gdje je α funkcija Ackermannove inverzije i raste vrlo sporo
- ovaj alg. je optimalan i primjenjiv na grafove bilo koje veličine

Alg. MAYBE-MST-C:

- daje minimalno razapinjujuće stablo, budući da se uklanja brid koji je maksimalan u ciklusu, što osigurava da MST ostane nakon uklanjanja
- najefikasnija impl. koristi strukt. pod. poput UNION-FIND, složenost sr. je $O(E\alpha(E,V))$
- dakle, ovaj graf je isto optimalan i prihvatljiv tj. primjenjiv na grafove bilo koje veličine