

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP 2 – LOGIC MỆNH ĐỀ
LOGIC TOÁN
KÌ 1 2016-2017, HỆ ĐÀO TẠO TỪ XA
(VŨ QUỐC HOÀNG – vqhoang@fit.hcmus.edu.vn)
---oOo---

1. Biến đổi các câu sau về dạng CNF:

- a. $(P \rightarrow \neg R) \vee (Q \rightarrow \neg R)$
- b. $(P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge R)$
- c. $(P \rightarrow Q) \rightarrow (R \rightarrow S)$
- d. $(P \vee Q \rightarrow R) \wedge P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

Hướng dẫn:

- a. $(P \rightarrow \neg R) \vee (Q \rightarrow \neg R)$
 $\equiv (\neg P \vee \neg R) \vee (\neg Q \vee \neg R)$
 $\equiv \neg P \vee \neg Q \vee (\neg R \vee \neg R)$
 $\equiv \neg P \vee \neg Q \vee \neg R$
- b. $(P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge R)$
 $\equiv (P \vee (\neg Q \wedge R)) \wedge (Q \vee (\neg Q \wedge R))$
 $\equiv ((P \vee \neg Q) \wedge (P \vee R)) \wedge ((Q \vee \neg Q) \wedge (Q \vee R))$
 $\equiv (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee R) \wedge \text{true} \wedge (Q \vee R)$
 $\equiv (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$
- c. $(P \rightarrow Q) \rightarrow (R \rightarrow S)$
 $\equiv (\neg P \vee Q) \rightarrow (\neg R \vee S)$
 $\equiv \neg(\neg P \vee Q) \vee (\neg R \vee S)$
 $\equiv (P \wedge \neg Q) \vee (\neg R \vee S)$
 $\equiv (P \vee (\neg R \vee S)) \wedge (\neg Q \vee (\neg R \vee S))$
 $\equiv (P \vee \neg R \vee S) \wedge (\neg Q \vee \neg R \vee S)$
- d. $(P \vee Q \rightarrow R) \wedge P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
 $\equiv (\neg(P \vee Q) \vee R) \wedge P \rightarrow (\neg Q \vee R)$
 $\equiv \neg((\neg(P \vee Q) \vee R) \wedge P) \vee (\neg Q \vee R)$

$$\begin{aligned}
&\equiv (\neg(\neg(P \vee Q) \vee R) \vee \neg P) \vee (\neg Q \vee R) \\
&\equiv (((P \vee Q) \wedge \neg R) \vee \neg P) \vee (\neg Q \vee R) \\
&\equiv ((P \vee Q) \wedge \neg R) \vee (\neg P \vee \neg Q \vee R) \\
&\equiv ((P \vee Q) \vee (\neg P \vee \neg Q \vee R)) \wedge (\neg R \vee (\neg P \vee \neg Q \vee R)) \\
&\equiv (P \vee Q \vee \neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg R \vee \neg P \vee \neg Q \vee R) \\
&\equiv ((P \vee \neg P) \vee (Q \vee \neg Q) \vee R) \wedge ((\neg R \vee R) \vee \neg P \vee \neg Q) \\
&\equiv (\text{true} \vee \text{true} \vee R) \wedge (\text{true} \vee \neg P \vee \neg Q) \\
&\equiv \text{true} \wedge \text{true} \\
&\equiv \text{true} \text{ (hằng đúng, coi như dạng CNF, hoặc } \equiv P \vee \neg P)
\end{aligned}$$

2. Kiểm tra xem các suy luận sau là đúng hay sai:

a. Nếu đi biển thì An sẽ ở ngoài trời quá lâu. An sẽ bị cháy nắng nếu ở ngoài trời quá lâu.

Vậy: An sẽ bị cháy nắng nếu đi biển.

b. Nếu An không học môn LGT thì sẽ không được tốt nghiệp. Nếu không được tốt nghiệp thì An sẽ không kiếm được việc. Nếu không kiếm được việc thì An sẽ không cưới được vợ. Mà An không cưới được vợ, vậy nên An không học môn LGT.

c. $\{P, P \rightarrow Q, \neg Q \vee R\} \models R$

d.

$$A \vee B$$

$$A \rightarrow C$$

$$B \rightarrow D$$

$$\therefore C \vee D$$

e.

$$P \leftrightarrow Q$$

$$Q \rightarrow R$$

$$R \vee \neg S$$

$$\neg S \rightarrow Q$$

$$\therefore S$$

Hướng dẫn:

a. Đặt các biến mệnh đề cho các mệnh đề đơn:

P : “An đi biển”

Q : “An ở ngoài trời quá lâu”

R : “An bị cháy nắng”

Kiểm tra suy luận $\{P \rightarrow Q, Q \rightarrow R\} \models (P \rightarrow R)$.

Có:

- $P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$ (1)
- $Q \rightarrow R \equiv \neg Q \vee R$ (2)
- $P \rightarrow R \equiv \neg P \vee R$ (*)

Dùng luật hợp giải cho (1), (2) được (*) (đpcm). Vậy suy luận trên là đúng.

b. Đặt các biến mệnh đề cho các mệnh đề đơn:

P : “An học môn LGT”

Q : “An được tốt nghiệp”

R : “An kiếm được việc”

S : “An cưới được vợ”

Kiểm tra suy luận $\{\neg P \rightarrow \neg Q, \neg Q \rightarrow \neg R, \neg R \rightarrow \neg S, \neg S\} \models \neg P$.

Suy luận này sai. Có thể dùng hợp giải để kiểm tra, tuy nhiên dễ thấy phản ví dụ: $\{P = 1, Q = 1, R = 1, S = 0\}$ (phép gán biến này làm cho tất cả các câu tiền đề đúng nhưng câu kết luận lại sai).

c. Suy luận đúng:

- Tam đoạn luận P với $P \rightarrow Q$ được Q .
- Hợp giải Q với $\neg Q \vee R$ được R (đpcm).

d. Suy luận trên là đúng. Ta chứng minh theo trường hợp:

Trường hợp A đúng:

- Tam đoạn luận A với $A \rightarrow C$ được C .
- Theo luật giới thiệu hoặc: từ C có $C \vee D$.

Trường hợp A sai:

- Có $\neg A$.
- Hợp giải $\neg A$ với $A \vee B$ được B .
- Tam đoạn luận B với $B \rightarrow D$ được D .
- Theo luật giới thiệu hoặc: từ D có $C \vee D$.

Trong cả hai trường hợp ta đều có $C \vee D$. Vậy có $C \vee D$ (đpcm).

e. Suy luận này sai. Có thể dùng hợp giải để kiểm tra, tuy nhiên dễ thấy phản ví dụ: $\{P = 1, Q = 1, R = 1, S = 0\}$.

3. Dùng hợp giải để kiểm tra các khẳng định sau là đúng hay sai:

a. $(A \wedge B \rightarrow C) \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$ là hằng đúng.

b. $\{A \rightarrow B \wedge C, B \vee C \rightarrow D \wedge E, \neg D \rightarrow \neg C \wedge B, \neg C \rightarrow E\} \models (A \rightarrow \neg E)$

Hướng dẫn:

a. Ta có $(A \wedge B \rightarrow C) \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$ là hằng đúng khi và chỉ khi $\{A \wedge B \rightarrow C, A \rightarrow B\} \models (A \rightarrow C)$

Chúng ta dùng hợp giải để kiểm tra khẳng định này.

Đưa về CNF:

$$- A \wedge B \rightarrow C \equiv \neg(A \wedge B) \vee C \equiv \neg A \vee \neg B \vee C$$

$$- A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$

Phủ định kết luận: $\neg(A \rightarrow C) \equiv \neg(\neg A \vee C) \equiv A \wedge \neg C \equiv \{A, \neg C\}$ đưa vào cơ sở tri thức:

$$\{\neg A \vee \neg B \vee C, \neg A \vee B, \underline{A}, \neg C\}$$

Hợp giải theo A được:

$$\{\neg B \vee C, \underline{B}, \neg C\}$$

Hợp giải theo B được:

$$\{C, \neg C\}$$

Xuất hiện mâu thuẫn (C với $\neg C$). Kết luận: khẳng định (a) là đúng.

b. Đưa về CNF:

$$- A \rightarrow B \wedge C \equiv \neg A \vee (B \wedge C) \equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \equiv \{\neg A \vee B, \neg A \vee C\}$$

$$\begin{aligned} - B \vee C \rightarrow D \wedge E &\equiv \neg(B \vee C) \vee (D \wedge E) \equiv (\neg B \wedge \neg C) \vee (D \wedge E) \equiv ((\neg B \wedge \neg C) \vee D) \wedge ((\neg B \wedge \neg C) \vee E) \\ &\equiv (\neg B \vee D) \wedge (\neg C \vee D) \wedge (\neg B \vee E) \wedge (\neg C \vee E) \\ &\equiv \{\neg B \vee D, \neg C \vee D, \neg B \vee E, \neg C \vee E\} \end{aligned}$$

$$- \neg D \rightarrow \neg C \wedge B \equiv D \vee (\neg C \wedge B) \equiv (D \vee \neg C) \wedge (D \vee B) \equiv \{D \vee \neg C, D \vee B\}$$

$$- \neg C \rightarrow E \equiv C \vee E$$

Phủ định kết luận: $\neg(A \rightarrow \neg E) \equiv \neg(\neg A \vee \neg E) \equiv A \wedge E \equiv \{A, E\}$ đưa vào cơ sở tri thức có:

$$\{\neg A \vee B, \neg A \vee C, \neg B \vee D, \neg C \vee D, \neg B \vee E, \neg C \vee E, D \vee \neg C, D \vee B, C \vee E, \underline{A}, E\}$$

Chọn hợp giải theo A được:

$\{\underline{B}, C, \underline{\neg B \vee D}, \neg C \vee D, \underline{\neg B \vee E}, \neg C \vee E, D \vee \neg C, \underline{D \vee B}, C \vee E, E\}$

Chọn hợp giải theo B được:

$\{D, E, D \vee D, E \vee D, C, \neg C \vee D, \neg C \vee E, D \vee \neg C, C \vee E, E\}$

Vì $D \vee D \equiv D$ và $\neg C \vee D \equiv D \vee \neg C$ nên được:

$\{D, E, E \vee D, \underline{C}, \underline{\neg C \vee D}, \underline{\neg C \vee E}, \underline{C \vee E}\}$

Chọn hợp giải theo C được:

$\{D, E, E \vee D, D, E, E \vee D, E \vee E\}$

Tức là được:

$\{D, E, E \vee D\}$

Không hợp giải được nữa. Kết luận: khẳng định (b) là sai.

4. Kiểm tra xem suy luận sau là đúng hay sai: An, một sinh viên trong lớp này, biết lập trình JAVA. Ai biết lập trình JAVA đều kiểm được việc có thu nhập cao. Vậy: có sinh viên trong lớp này kiểm được việc có thu nhập cao.

Hướng dẫn:

Đặt các biến mệnh đề cho các mệnh đề đơn:

P : “An là một sinh viên trong lớp này”

Q : “An biết lập trình JAVA”

R : “Ai biết lập trình JAVA đều kiểm được việc có thu nhập cao”

S : “Có sinh viên trong lớp này kiểm được việc có thu nhập cao”

Nếu để như vậy đi kiểm tra suy luận $\{P \wedge Q, R\} \models S$ thì suy luận này là sai (chẳng hạn, phản ví dụ $\{P = 1, Q = 1, R = 1, S = 0\}$). Tuy nhiên “khá dễ thấy” suy luận trên là đúng. Lí do là logic mệnh đề chưa đủ mạnh (chưa đủ tinh vi) để “thấy” được suy luận trên là đúng☺

Để chứng minh được suy luận trên, chúng ta phải dùng công cụ logic mạnh hơn là logic vị từ (bài kế) hoặc chúng ta tự thêm các tiền đề dễ thấy sau:

- “Ai biết lập trình JAVA đều kiểm được việc có thu nhập cao” thì suy ra “Nếu An biết lập trình JAVA thì An kiểm được việc có thu nhập cao”.
- “An là sinh viên lớp này mà An kiểm được việc có thu nhập cao” thì “có sinh viên trong lớp này kiểm được việc có thu nhập cao”.

Đặt:

T : “An kiểm được việc có thu nhập cao”

Từ các tiền đề nêu rõ trong suy luận cùng với các tiền đề ngầm định nói trên, chúng ta có suy luận: $\{P \wedge Q, R, R \rightarrow (Q \rightarrow T), P \wedge T \rightarrow S\} \models S$. Ta thấy suy luận này là đúng bằng hệ suy diễn tự nhiên như sau:

<i>STT</i>	<i>Câu</i>	<i>Lý do</i>
1	$P \wedge Q$	Tiền đề
2	R	Tiền đề
3	$R \rightarrow (Q \rightarrow T)$	Tiền đề (ngầm định)
4	$P \wedge T \rightarrow S$	Tiền đề (ngầm định)
5	$Q \rightarrow T$	MP 2, 3
6	Q	And-Elim 1
7	T	MP 5, 6
8	P	And-Elim 1
9	$P \wedge T$	And-Intro 7, 8
8	S (đpcm)	MP 9, 4

--- (Bài giải có thể có sai sót) ---