

BÀI TẬP 2 – LOGIC MỆNH ĐỀ
LOGIC TOÁN
KÌ 1 2016-2017, HỆ ĐÀO TẠO TỪ XA
---oOo---

Sinh viên: Nguyễn Duy Hiếu

Câu 1: Biến đổi các câu về dạng CNF

a) $(P \rightarrow \neg R) \vee (Q \rightarrow \neg R)$

$$\alpha \equiv (P \rightarrow \neg R) \vee (Q \rightarrow \neg R)$$

$$\alpha \equiv (\neg P \vee \neg R) \vee (\neg Q \vee \neg R)$$

$$\alpha \equiv \neg P \vee \neg R \vee \neg Q \vee \neg R$$

$$\alpha \equiv \neg P \vee \neg Q \vee (\neg R \vee \neg R)$$

$$\alpha \equiv \neg P \vee \neg Q \vee \neg R$$

b) $(P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge R)$

$$\alpha \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge R)$$

$$\alpha \equiv ((P \wedge Q) \vee \neg Q) \wedge ((P \wedge Q) \vee R)$$

$$\alpha \equiv ((P \vee \neg Q) \wedge (Q \vee \neg Q)) \wedge ((P \vee R) \wedge (Q \vee R))$$

$$\alpha \equiv ((P \vee \neg Q) \wedge \text{true}) \wedge (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$$

$$\alpha \equiv (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$$

c) $(P \rightarrow Q) \rightarrow (R \rightarrow S)$

$$\alpha \equiv (\neg P \vee Q) \rightarrow (\neg R \vee S)$$

$$\alpha \equiv \neg(\neg P \vee Q) \vee (\neg R \vee S)$$

$$\alpha \equiv (\neg\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg R \vee S)$$

$$\alpha \equiv (P \wedge \neg Q) \vee (\neg R \vee S)$$

$$\alpha \equiv (\neg R \vee S) \vee (P \wedge \neg Q)$$

$$\alpha \equiv ((\neg R \vee S) \vee P) \wedge ((\neg R \vee S) \vee \neg Q)$$

$$\alpha \equiv (\neg R \vee S \vee P) \wedge (\neg R \vee S \vee \neg Q)$$

$$\mathbf{d) (P \vee Q \rightarrow R) \wedge P \rightarrow (Q \rightarrow R)}$$

$$\alpha \equiv (P \vee Q \rightarrow R) \wedge P \rightarrow (Q \rightarrow R)$$

$$\alpha \equiv (P \vee Q \rightarrow R) \wedge P \rightarrow (\neg Q \vee R)$$

$$\alpha \equiv (\neg(P \vee Q) \vee R) \wedge P \rightarrow (\neg Q \vee R)$$

$$\alpha \equiv ((\neg P \wedge \neg Q) \vee R) \wedge P \rightarrow (\neg Q \vee R)$$

$$\alpha \equiv ((\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)) \wedge P \rightarrow (\neg Q \vee R)$$

$$\alpha \equiv (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge P \rightarrow (\neg Q \vee R)$$

$$\alpha \equiv (\neg P \vee R) \wedge P \wedge (\neg Q \vee R) \rightarrow (\neg Q \vee R)$$

$$\alpha \equiv ((\neg P \wedge P) \vee (R \wedge P)) \wedge (\neg Q \vee R) \rightarrow (\neg Q \vee R)$$

$$\alpha \equiv (false \vee (R \wedge P)) \wedge (\neg Q \vee R) \rightarrow (\neg Q \vee R)$$

$$\alpha \equiv R \wedge P \wedge (\neg Q \vee R) \rightarrow (\neg Q \vee R)$$

$$\alpha \equiv R \wedge (\neg Q \vee R) \wedge P \rightarrow (\neg Q \vee R)$$

$$\alpha \equiv \neg(R \wedge (\neg Q \vee R) \wedge P) \vee (\neg Q \vee R)$$

$$\alpha \equiv \neg((R \wedge (\neg Q \vee R)) \wedge P) \vee \neg Q \vee R$$

$$\alpha \equiv (\neg(R \wedge (\neg Q \vee R)) \vee \neg P) \vee \neg Q \vee R$$

$$\alpha \equiv ((\neg R \vee \neg(\neg Q \vee R)) \vee \neg P) \vee \neg Q \vee R$$

$$\alpha \equiv \neg R \vee \neg(\neg Q \vee R) \vee \neg P \vee \neg Q \vee R$$

$$\alpha \equiv \neg R \vee \neg P \vee ((\neg Q \vee R) \vee \neg(\neg Q \vee R))$$

$$\alpha \equiv \neg R \vee \neg P \vee true$$

$$\alpha \equiv true$$

Câu 2: Kiểm tra các suy luận

a) Nếu đi biển thì An sẽ ở ngoài trời quá lâu. An sẽ bị cháy nắng nếu ở ngoài trời quá lâu.

Vậy: An sẽ bị cháy nắng nếu đi biển.

Đặt:

P: An đi biển

Q: An ở ngoài trời quá lâu

R: An bị cháy nắng

Các câu logic mệnh đề:

(1): $P \rightarrow Q$

(1): $Q \rightarrow R$

(*) : $P \rightarrow R$

Lập bảng chân trị để kiểm tra

| P | Q | R | $P \rightarrow Q$ (1) | $Q \rightarrow R$ (2) | $P \rightarrow R$ (*) |
|---|---|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Từ bảng chân trị, ta thấy mọi phép gán biến làm cho (1) và (2) cùng đúng thì cũng làm cho (*) đúng. Do đó suy luận trên là đúng.

b) Nếu An không học môn LGT thì sẽ không được tốt nghiệp. Nếu không được tốt nghiệp thì An sẽ không kiếm được việc. Nếu không kiếm được việc thì An sẽ không cưới được vợ. Mà An không cưới được vợ, vậy nên An không học môn LGT.

Đặt:

P: An học môn LGT

Q: An được tốt nghiệp

R: An kiếm được việc

S: An cưới được vợ

Các câu logic mệnh đề:

(1): $\neg P \rightarrow \neg Q$

(2): $\neg Q \rightarrow \neg R$

(3): $\neg R \rightarrow \neg S$

(4): $\neg S$

(*) : $\neg P$

Biến đổi các câu về dạng chuẩn CNF

(1): $\neg P \rightarrow \neg Q \equiv \neg \neg P \vee \neg Q \equiv P \vee \neg Q$

(2): $\neg Q \rightarrow \neg R \equiv \neg \neg Q \vee \neg R \equiv Q \vee \neg R$

(3): $\neg R \rightarrow \neg S \equiv \neg \neg R \vee \neg S \equiv R \vee \neg S$

(4): $\neg S$

$\neg(*)$: $\neg \neg P \equiv P$

Gồm lại: $K = \{P \vee \neg Q, Q \vee \neg R, R \vee \neg S, \neg S, P\}$

Hợp giải lần lượt theo các biến P, Q, R, S

Hợp giải theo biến P

$\{P \vee \neg Q, Q \vee \neg R, R \vee \neg S, \neg S, \underline{P}\}$

Được

$\{P \vee \neg Q, Q \vee \neg R, R \vee \neg S, \neg S, P\}$

Hợp giải theo biến Q

$\{\underline{P \vee \neg Q}, Q \vee \neg R, R \vee \neg S, \neg S, P\}$

Được

$\{R \vee \neg S, \neg S, P, P \vee \neg R\}$

Hợp giải theo biến R

$\{\underline{R \vee \neg S}, \neg S, P, \underline{P \vee \neg R}\}$

Được

$\{\neg S, P, P \vee \neg S\}$

Hợp giải theo biến S

$\{\underline{\neg S}, P, \underline{P \vee \neg S}\}$

Được

$$\{\neg S, P, P \vee \neg S\}$$

Không hợp giải được nữa, suy ra kết luận trên là sai.

$$\text{c) } \{P, P \rightarrow Q, \neg Q \vee R\} \models R$$

Dùng bảng chân trị để kiểm tra

| P | Q | R | $\neg Q$ | P (1) | $P \rightarrow Q$ (2) | $\neg Q \vee R$ (3) | R (*) |
|---|---|---|----------|----------|--------------------------|------------------------|----------|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Dựa vào bảng chân trị, ta thấy mọi phép gán biến làm cho (1), (2) và (3) cùng đúng thì cũng làm cho (*) đúng. Do đó suy luận trên là đúng.

d)

$$A \vee B$$

$$A \rightarrow C$$

$$B \rightarrow D$$

$$\therefore C \vee D$$

Biến đổi các câu về dạng chuẩn CNF

$$(1): A \vee B$$

$$(2): A \rightarrow C \equiv \neg A \vee C$$

$$(3): B \rightarrow D \equiv \neg B \vee D$$

$$\neg(*): \neg(C \vee D) \equiv \neg C \wedge \neg D$$

Tách thành 2 câu $\{\neg C, \neg D\}$

Gôm lại: $K = \{A \vee B, \neg A \vee C, \neg B \vee D, \neg C, \neg D\}$

Hợp giải lần lượt theo các biến A, B, C, D

Hợp giải theo biến A

$\{A \vee B, \underline{\neg A \vee C}, \neg B \vee D, \neg C, \neg D\}$

Được

$\{\neg B \vee D, \neg C, \neg D, B \vee C\}$

Hợp giải theo biến B

$\{\underline{\neg B \vee D}, \neg C, \neg D, \underline{B \vee C}\}$

Được

$\{\neg C, \neg D, D \vee C\}$

Hợp giải theo biến C

$\{\underline{\neg C}, \neg D, \underline{D \vee C}\}$

Được

$\{\neg D, D\}$

Xuất hiện mâu thuẫn $\{\neg D, D\}$, suy ra kết luận trên là đúng.

e)

$P \leftrightarrow Q$

$Q \rightarrow R$

$R \vee \neg S$

$\neg S \rightarrow Q$

$\therefore S$

Biến đổi các câu về dạng chuẩn CNF

$$(1): P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \equiv (\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg Q \vee P)$$

Tách thành 2 câu $\{\neg P \vee \neg Q, \neg Q \vee P\}$

$$(2): Q \rightarrow R \equiv \neg Q \vee R$$

$$(3): R \vee \neg S$$

$$(4): \neg S \rightarrow Q \equiv \neg \neg S \vee Q \equiv S \vee Q$$

$$\neg(*): \neg S$$

$$\text{Gôm lại: } K = \{\neg P \vee \neg Q, \neg Q \vee P, \neg Q \vee R, R \vee \neg S, S \vee Q, \neg S\}$$

Hợp giải lần lượt theo các biến P, Q, R, S

Hợp giải theo biến P

$$\{\neg P \vee \neg Q, \neg Q \vee P, \neg Q \vee R, R \vee \neg S, S \vee Q, \neg S\}$$

Hợp giải theo biến P

$$\{\underline{\neg P \vee \neg Q}, \underline{\neg Q \vee P}, \neg Q \vee R, R \vee \neg S, S \vee Q, \neg S\}$$

Được

$$\{\neg Q \vee R, R \vee \neg S, S \vee Q, \neg S, \neg Q\}$$

Hợp giải theo biến Q

$$\{\underline{\neg Q \vee R}, R \vee \neg S, \underline{S \vee Q}, \neg S, \underline{\neg Q}\}$$

Được

$$\{R \vee \neg S, S \vee R, \neg S, S\}$$

Hợp giải theo biến R

$$\{\underline{R \vee \neg S}, \underline{S \vee R}, \neg S, S\}$$

Được

$$\{R \vee \neg S, S \vee R, \neg S, S\}$$

Xuất hiện mâu thuẫn $\{\neg S, S\}$, suy ra kết luận trên là đúng

Câu 3: Dùng hợp giải để kiểm tra

a) $(A \wedge B \rightarrow C) \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$ là hằng đúng

Theo phát biểu trên thì $(A \wedge B \rightarrow C) \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$ luôn đúng với mọi phép gán biến

Suy ra: mọi phép gán biến là cho $(A \wedge B \rightarrow C) \wedge (A \rightarrow B)$ đúng cũng đều làm cho $(A \rightarrow C)$ đúng.

Hay nói cách khác: mọi phép gán biến làm cho $(A \wedge B \rightarrow C)$ và $(A \rightarrow B)$ cùng đúng thì cũng đều làm cho $(A \rightarrow C)$ đúng

Vậy ta có: $\{A \wedge B \rightarrow C, A \rightarrow B\} \models A \rightarrow C$

Để kiểm chứng điều này, chúng ta dùng phương pháp hợp giải.

Biến đổi các câu về dạng chuẩn CNF:

$$(1): A \wedge B \rightarrow C \equiv (A \wedge B) \rightarrow C \equiv \neg(A \wedge B) \vee C \equiv \neg A \vee \neg B \vee C$$

$$(2): A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$

$$\neg(*): \neg(A \rightarrow C) \equiv \neg(\neg A \vee C) \equiv \neg\neg A \wedge \neg C \equiv A \wedge \neg C$$

Tách thành 2 câu $\{A, \neg C\}$

$$\text{Gôm lại: } K = \{\neg A \vee \neg B \vee C, \neg A \vee B, A, \neg C\}$$

Hợp giải lần lượt theo các biến A, B, C

Hợp giải theo biến A

$$\{\underline{\neg A \vee \neg B \vee C}, \underline{\neg A \vee B}, \underline{A}, \neg C\}$$

Được

$$\{\neg C, \neg B \vee C, B\}$$

Hợp giải theo biến B

$$\{\neg C, \underline{\neg B \vee C}, \underline{B}\}$$

Được

$$\{\neg C, C\}$$

Xuất hiện mâu thuẫn $\{\neg C, C\}$, suy ra kết luận trên là đúng.

$$b) \{A \rightarrow B \wedge C, B \vee C \rightarrow D \wedge E, \neg D \rightarrow \neg C \wedge B, \neg C \rightarrow E\} \models (A \rightarrow \neg E)$$

Biến đổi các câu về dạng chuẩn CNF

$$(1): A \rightarrow B \wedge C \equiv A \rightarrow (B \wedge C) \equiv \neg A \vee (B \wedge C) \equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee C)$$

Tách thành 2 câu $\{\neg A \vee B, \neg A \vee C\}$

$$(2): B \vee C \rightarrow D \wedge E \equiv (B \vee C) \rightarrow (D \wedge E) \equiv \neg(B \vee C) \vee (D \wedge E) \equiv (\neg B \wedge \neg C) \vee (D \wedge E)$$

$$\equiv (\neg B \wedge \neg C) \vee (D \wedge E) \equiv ((\neg B \wedge \neg C) \vee D) \wedge ((\neg B \wedge \neg C) \vee E)$$

$$\equiv ((\neg B \vee D) \wedge (\neg C \vee D)) \wedge ((\neg B \vee E) \wedge (\neg C \vee E))$$

$$\equiv (\neg B \vee D) \wedge (\neg C \vee D) \wedge (\neg B \vee E) \wedge (\neg C \vee E)$$

Tách thành 4 câu $\{\neg B \vee D, \neg C \vee D, \neg B \vee E, \neg C \vee E\}$

$$(3): \neg D \rightarrow \neg C \wedge B \equiv \neg D \rightarrow (\neg C \wedge B) \equiv \neg \neg D \vee (\neg C \wedge B) \equiv D \vee (\neg C \wedge B)$$

$$\equiv (D \vee \neg C) \wedge (D \vee B)$$

Tách thành 2 câu $\{D \vee \neg C, D \vee B\}$

$$(4): \neg C \rightarrow E \equiv \neg \neg C \vee E \equiv C \vee E$$

$$\neg(*): \neg(A \rightarrow \neg E) \equiv \neg(\neg A \vee \neg E) \equiv \neg \neg A \wedge \neg \neg E \equiv A \wedge E$$

Tách thành 2 câu $\{A, E\}$

Gôm lại: $K = \{\neg A \vee B, \neg A \vee C, \neg B \vee D, \neg C \vee D, \neg B \vee E, \neg C \vee E, D \vee B, C \vee E, A, E\}$

Hợp giải lần lượt theo các biến A, B, C, D, E

Hợp giải theo biến A

$$\{\underline{\neg A \vee B}, \underline{\neg A \vee C}, \neg B \vee D, \neg C \vee D, \neg B \vee E, \neg C \vee E, D \vee B, C \vee E, \underline{A}, E\}$$

Được

$$\{\neg B \vee D, \neg C \vee D, \neg B \vee E, \neg C \vee E, D \vee B, C \vee E, E, B, C\}$$

Hợp giải theo biến B

$$\{\underline{\neg B \vee D}, \neg C \vee D, \underline{\neg B \vee E}, \neg C \vee E, \underline{D \vee B}, C \vee E, E, \underline{B}, C\}$$

Được

$\{\neg C \vee D, \neg C \vee E, C \vee E, E, C, D, E \vee D\}$

Hợp giải theo biến C

$\{\underline{\neg C \vee D}, \underline{\neg C \vee E}, \underline{C \vee E}, E, \underline{C}, D, E \vee D\}$

Được

$\{E, D, E \vee D\}$

Hợp giải theo biến D

$\{E, \underline{D}, \underline{E \vee D}\}$

Được

$\{E, D, E \vee D\}$

Hợp giải theo biến E

$\{\underline{E}, D, \underline{E \vee D}\}$

Được

$\{E, D, E \vee D\}$

Không hợp giải được nữa, suy ra kết luận trên là sai.

Câu 4: Kiểm tra suy luận

An, một sinh viên trong lớp này, biết lập trình JAVA. Ai biết lập trình JAVA đều kiểm được việc có thu nhập cao. Vậy: có sinh viên trong lớp này kiểm được việc có thu nhập cao.

- An, một sinh viên trong lớp này, biết lập trình JAVA. Suy ra: **An biết lập trình JAVA (1)**

Ai biết lập trình JAVA đều kiểm được việc có thu nhập cao. Đặt n là số người biết lập trình JAVA, suy ra:

- **Nếu An biết lập trình Java thì An kiểm được việc có thu nhập cao (2)**
- Nếu Người thứ 2 biết lập trình Java thì người đó kiểm được việc có thu nhập cao
- Nếu Người thứ 3 biết lập trình Java thì người đó kiểm được việc có thu nhập cao
-
- Nếu Người thứ n - 1 biết lập trình Java thì người đó kiểm được việc có thu nhập cao
- Nếu Người thứ n biết lập trình Java thì người đó kiểm được việc có thu nhập cao

- Có sinh viên trong lớp này kiểm được việc có thu nhập cao. Suy ra, chỉ cần chứng minh **An kiểm được việc có thu nhập cao (*)** là thỏa mãn

Đặt:

P: An biết lập trình JAVA

Q: An kiểm được việc có thu nhập cao

Các câu logic mệnh đề:

(1): P

(2): $P \rightarrow Q$

(*): Q

Lập bảng chân trị để kiểm tra:

| P | Q | P (1) | $P \rightarrow Q$ (2) | Q (*) |
|---|---|----------|--------------------------|----------|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Dựa vào bảng chân trị, ta thấy mọi phép gán biến làm cho (1) và (2) cùng đúng thì cũng làm cho (*) đúng. Suy ra việc An kiểm được việc có thu nhập cao là đúng.

Do đó, trong lớp có ít nhất 1 sinh viên kiểm được việc có thu nhập cao (đpcm).