HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP 1 – LOGIC MỆNH ĐỀ
LOGIC TOÁN
KÌ 1 2016-2017, HỆ ĐÀO TẠO TỪ XA
(VŨ QUỐC HOÀNG – vqhoang@fit.hcmus.edu.vn)

---oOo---

1. Giả sử các biến mệnh đề P, Q, R, S biểu diễn cho các mệnh đề đơn tương ứng như sau:

   P: An làm mọi bài tập được giao

   Q: An thi tốt

   R: An được điểm cao

   S: An qua được môn học

   Hãy viết các câu sau thành các câu logic mệnh đề sử dụng các biến mệnh đề đã cho và các toán tử logic phù hợp:

   a. Nếu An làm mọi bài tập được giao thì sẽ qua được môn học.
   b. An không thi tốt nhưng vẫn qua được môn học.
   c. An làm mọi bài tập được giao, thi tốt và được điểm cao.
   d. An không thi tốt cũng không được điểm cao, tuy nhiên An qua được môn học.
   e. Thi tốt là chưa đủ để An được điểm cao nhưng đủ để qua được môn học.
   f. Để qua được môn học, An cần phải làm mọi bài tập được giao; hơn nữa, nếu cũng thi tốt thì An sẽ được điểm cao.

   Hãy đưa ra câu phủ định của các câu (a), (b), (c), (d). *Gợi ý*: Dùng qui tắc DeMorgan cho câu logic mệnh đề (và đơn giản nếu cần) rồi viết ra câu tiếng Việt tương ứng.

   Hướng dẫn:

   a. $P \to S$
   b. $\neg Q \wedge S$
   c. $P \wedge Q \wedge R$
   d. $\neg Q \wedge \neg R \wedge S$
   e. $\neg(Q \to R) \wedge (Q \to S)$

      Thật ra một ý thông thường khác của câu e là:

      $((Q \to R) \vee (Q \to \neg R)) \wedge (Q \to S)$

      $\equiv (\neg Q \vee R \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (Q \to S)$

$\equiv (\neg Q \vee \text{true}) \wedge (Q \to S)$

$\equiv (Q \to S)$

Nghĩa là: "thi tốt là đủ để An được điểm cao" thì phát biểu thành $Q \to R$, còn "thi tốt là chưa đủ để An được điểm cao" thì không cần phát biểu gì hết!

f. Câu này phát biểu rõ hơn: "Nếu muốn qua được môn học thì An phải làm mọi bài tập được giao; và nếu làm mọi bài tập được giao và thi tốt thì An sẽ được điểm cao.

$(S \to P) \wedge (P \wedge Q \to R)$

Lưu ý: $\alpha \to \beta$ có thể được phát biểu là "nếu α thì β" hoặc "α là điều kiện đủ của β" hoặc "β là điều kiện cần của α".

Để đưa ra phát biểu phủ định của một phát biểu chúng ta có thể chuyển phát biểu ban đầu về dạng logic phù hợp (chẳng hạn logic mệnh đề), thực hiện phủ định (bằng các qui tắc như DeMorgan) rồi phát biểu lại.

a. $\neg(P \to S) \equiv \neg(\neg P \vee S) \equiv P \wedge \neg S$

"Dù đã làm mọi bài tập được giao nhưng An vẫn không qua được môn học".

b. $\neg(\neg Q \wedge S) \equiv Q \vee \neg S$

"An thi tốt hoặc An không qua được môn học".

c. $\neg(P \wedge Q \wedge R) \equiv \neg P \vee \neg Q \vee \neg R$

"An không làm mọi bài tập được giao hoặc không thi tốt hoặc không được điểm cao".

d. $\neg(\neg Q \wedge \neg R \wedge S) \equiv (Q \vee R \vee \neg S)$

"An thi tốt hoặc được điểm cao hoặc An không qua được môn học".

2. Cho biết các khẳng định sau là đúng hay sai? Tại sao?

a. $(P \to Q) \wedge (Q \to P) \equiv P \leftrightarrow Q$

b. $(P \to Q) \to R \Leftrightarrow P \to (Q \to R)$

c. $(P \vee Q) \wedge (P \to R) \wedge (Q \to R) \to R$ là chân lý

d. $(P \to Q \wedge R) \wedge P \wedge \neg R$ là mâu thuẫn

e. $P \vee Q \to P \wedge \neg R$ là thỏa mãn được

f. $\{P \to Q, Q \to R\} \models (P \to R)$

Hướng dẫn:

a. Đúng. Ta lập bảng chân trị:

P	Q	$P \to Q$	$Q \to P$	$(P \to Q) \wedge (Q \to P)$	$P \leftrightarrow Q$

0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Vì “hai cột tương ứng giống nhau” nên $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \equiv P \leftrightarrow Q$

b. Sai. Với phép gán biến $\{P = 0, Q = 0, R = 0\}$ thì $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$ sai nhưng $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ đúng.

c. Đúng. Ta thử tìm phép gán biến φ làm cho $(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \rightarrow R$ sai; muốn vậy $(R = 0) \in \varphi$, và $(P \rightarrow R)$, $(Q \rightarrow R)$ đúng trong φ; khi đó $(Q = 0) \in \varphi$ và $(P = 0) \in \varphi$; tức là $\varphi = \{P = 0, Q = 0, R = 0\}$; khi đó $(P \vee Q)$ lại sai trong φ. Vậy không có phép gán biến nào làm cho $(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \rightarrow R$ sai nên nó là chân lý.

d. Đúng. Ta biến đổi tương đương:

$(P \rightarrow Q \wedge R) \wedge P \wedge \neg R$

$\equiv (\neg P \vee (Q \wedge R)) \wedge P \wedge \neg R$

$\equiv ((\neg P \wedge P) \vee (P \wedge Q \wedge R)) \wedge \neg R$

$\equiv (\text{false} \vee (P \wedge Q \wedge R)) \wedge \neg R$

$\equiv P \wedge Q \wedge (R \wedge \neg R)$

$\equiv P \wedge Q \wedge (\text{false})$

$\equiv \text{false}$

e. Đúng. Với phép gán biến $\{P = 0, Q = 0\}$ thì $P \vee Q \rightarrow P \wedge \neg R$ đúng.

f. Đúng. Ta lập bảng chân trị:

P	Q	R	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow R$	$P \rightarrow R$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Vì hễ $(P \rightarrow Q)$ đúng và $(Q \rightarrow R)$ đúng thì $(P \rightarrow R)$ cũng đúng.

3. Đơn giản câu logic mệnh đề sau:

$$P \wedge Q \wedge (R \vee P \wedge R) \vee \neg Q \wedge P \wedge R \wedge (R \to Q) \vee \neg Q \to S$$

<u>Hướng dẫn</u>:

Ta biến đổi tương đương:

$\neg Q \wedge P \wedge R \wedge (R \to Q)$

$\equiv \neg Q \wedge P \wedge R \wedge (\neg R \vee Q)$

$\equiv (\neg Q \wedge P \wedge R \wedge \neg R) \vee (\neg Q \wedge P \wedge R \wedge Q)$

$\equiv (\neg Q \wedge P \wedge (R \wedge \neg R)) \vee ((\neg Q \wedge Q) \wedge P \wedge R)$

$\equiv (\neg Q \wedge P \wedge \text{false}) \vee (\text{false} \wedge P \wedge R)$

$\equiv \text{false} \vee \text{false}$

$\equiv \text{false}$

$P \wedge Q \wedge (R \vee P \wedge R)$

$\equiv (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge P \wedge R)$

$\equiv (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$

$\equiv (P \wedge Q \wedge R)$

Vậy:

$P \wedge Q \wedge (R \vee P \wedge R) \vee \neg Q \wedge P \wedge R \wedge (R \to Q) \vee \neg Q \to S$

$\equiv (P \wedge Q \wedge R) \vee \text{false} \vee \neg Q \to S$

$\equiv (P \wedge Q \wedge R) \vee \neg Q \to S$

$\equiv ((P \wedge R) \vee \neg Q) \wedge (Q \vee \neg Q) \to S$

$\equiv ((P \wedge R) \vee \neg Q) \wedge \text{true} \to S$

$\equiv (P \wedge R) \vee \neg Q \to S$

4. Kiểm tra xem các suy luận sau là đúng hay sai:
   a. Nếu Minh giải được bài toán thứ tư thì em đã nộp bài trước giờ qui định. Mà Minh đã nộp bài trước giờ qui định. Vậy: Minh giải được bài toán thứ tư.
   b. Nếu An làm mọi bài tập được giao và thi tốt thì An sẽ được điểm cao. Nếu An không qua được môn học thì An không thể được điểm cao. An làm mọi bài tập được giao. An thi tốt. Vậy: An qua được môn học.
   c.

$\neg P \vee Q \to R$

$R \to S \vee T$

$\neg S \wedge \neg U$

$\neg U \to \neg T$

$\therefore P$

Hướng dẫn:

a. Đặt các biến mệnh đề cho các mệnh đề đơn:

P : "Minh giải được bài toán thứ tư"

Q : "Minh nộp bài trước giờ qui định"

Kiểm tra suy luận $\{P \to Q, Q\} \models P$. Suy luận này là sai vì với phép gán biến $\varphi = \{P = 0, Q = 1\}$ thì $P \to Q$ và Q đều đúng nhưng P lại sai. *Lưu ý*: φ còn được gọi là phản ví dụ của suy luận này.

b. Với các biến mệnh đề tương ứng với các mệnh đề đơn trong Câu 1. Kiểm tra suy luận:

$$\{P \wedge Q \to R, \neg S \to \neg R, P, Q\} \models S$$

Ta dùng hệ suy diễn tự nhiên:

STT	*Câu*	*Lý do có*
1	$P \wedge Q \to R$	Tiền đề
2	$\neg S \to \neg R$	Tiền đề
3	P	Tiền đề
4	Q	Tiền đề
5	$P \wedge Q$	And-Intro (3), (4)
6	R	MP (5), (1)
7	S (đpcm)	MT (6), (2)

Vậy suy luận trên là đúng.

c. Ta dùng hệ suy diễn tự nhiên:

STT	*Câu*	*Lý do có*
1	$\neg P \vee Q \to R$	Tiền đề
2	$R \to S \vee T$	Tiền đề
3	$\neg S \wedge \neg U$	Tiền đề
4	$\neg U \to \neg T$	Tiền đề
5	$\neg U$	And-Eli (3)
6	$\neg T$	MP (5), (4)
7	$\neg S$	And-Eli (3)

8	$\neg S \wedge \neg T$	And-Intro (7), (6)
9	$\neg(S \vee T)$	DeMorgan (8)
10	$\neg R$	MT (9), (2)
11	$\neg(\neg P \vee Q)$	MT (10), (1)
12	$P \wedge \neg Q$	DeMorgan (11)
13	P (đpcm)	And-Eli (12)

Vậy suy luận trên là đúng.

--- (*Bài giải có thể có sai sót*) ---