HƯỚNG GIẪN GIẢI BÀI TẬP 3 – LOGIC VỊ TỪ
LOGIC TOÁN
KÌ 1 2016-2017, HỆ ĐÀO TẠO TỪ XA
(VŨ QUỐC HOÀNG – vqhoang@fit.hcmus.edu.vn)
---oOo---

Câu 1. Với miền phát biểu là tập các số nguyên. Cho các vị từ với diễn giải tương ứng:

$P(x) : x + 9 > 3x$.

$Q(x)$: $x^2 \leq 30$.

Cho biết chân trị của các câu logic vị từ sau và giải thích:

a. $P(4)$.
b. $P(6) \vee Q(6)$.
c. $\exists x, P(x)$.
d. $\forall x, \neg Q(x)$.
e. $\exists x, P(x) \wedge Q(x)$.
f. $\forall x, P(x) \vee Q(x)$.
g. $\forall x, P(x) \rightarrow Q(x)$.
h. $\forall x, \neg Q(x) \rightarrow \neg P(x)$.

Hướng dẫn:

a. Đúng. Vì $P(4) = 4 + 9 > 3.4 \Leftrightarrow 13 > 12$.
b. Sai. Vì $P(6)$ sai (do $6 + 9 = 15$ không lớn hơn $3.6 = 18$) và $Q(6)$ sai (do $6^2 = 36$ lớn hơn 30).
c. Đúng. Chẳng hạn với $x = 4$ có $P(4)$ đúng.
d. Sai. Có $Q(1)$ đúng (do $1^2 = 1 \leq 30$) nên $\neg Q(1)$ sai nên $\forall x, \neg Q(x)$ sai.
e. Đúng. Có $P(4)$ đúng và $Q(4)$ cũng đúng ($4^2 = 16 \leq 30$).
f. Sai. Vì $P(6) \vee Q(6)$ sai nên $\forall x, P(x) \vee Q(x)$ sai.
g. Sai. Vì $P(-6)$ đúng nhưng $Q(-6)$ sai nên $P(-6) \rightarrow Q(-6)$ sai nên $\forall x, P(x) \rightarrow Q(x)$ sai. Lưu ý: câu này đúng nếu miền phát biểu là tập các số tự nhiên.
h. Sai. Vì $P(-6)$ đúng nên $\neg P(-6)$ sai; vì $Q(-6)$ sai nên $\neg Q(-6)$ đúng; do đó $\neg Q(-6) \rightarrow \neg P(-6)$ sai nên $\forall x, \neg Q(x) \rightarrow \neg P(x)$ sai. Lưu ý: câu (h) tương đương với câu (g) (luật phản đảo).

Câu 2. Với miền phát biểu là tập tất cả các sinh viên trong lớp, cho các vị từ với diễn giải:

$P(x)$: x biết tiếng Anh.

$Q(x)$: x biết lập trình C.

Hãy viết lại các câu logic vị từ sau theo ngôn ngữ tự nhiên (tiếng Việt):

a. $P(\text{Bình})$.

b. $P(\text{Chương}) \wedge \neg Q(\text{Chương})$.

c. $\exists x, P(x)$.

d. $\forall x, \neg Q(x)$.

e. $\forall x, P(x) \rightarrow Q(x)$.

f. $\exists x, P(x) \wedge Q(x)$.

g. $\forall x, P(x) \wedge Q(x)$.

h. $\neg(\exists x, \neg P(x) \wedge \neg Q(x))$.

Hướng dẫn:

a. Bình biết tiếng Anh.

b. Chương biết tiếng Anh nhưng không biết lập trình C.

c. Có sinh viên trong lớp biết tiếng Anh.

d. Mọi sinh viên trong lớp đều không biết lập trình C.

e. Mọi sinh viên trong lớp biết tiếng Anh đều biết lập trình C.

f. Có sinh viên trong lớp vừa biết tiếng Anh vừa biết lập trình C.

g. Mọi sinh viên trong lớp đều biết tiếng Anh và biết lập trình C.

h. $\neg(\exists x, \neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \equiv \forall x, \neg(\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \equiv \forall x, P(x) \vee Q(x)$.

Mọi sinh viên trong lớp đều biết tiếng Anh hoặc biết lập trình C.

Câu 3. Đặt $S(x)$: "x là sinh viên"; $G(x)$: "x là giáo viên"; $H(x, y)$: "x hỏi bài y". Với miền phát biểu là tập mọi người, hãy viết lại các câu sau bằng logic vị từ, dùng các vị từ đã cho.

a. An hỏi bài Bình.

b. An hỏi bài cô Dung.

c. Có sinh viên hỏi bài cô Dung.

d. Tất cả sinh viên đều hỏi bài nhau.

e. Có giáo viên hỏi bài sinh viên.

f. Có một số sinh viên chưa bao giờ hỏi bài giáo viên nào cả.

Hướng dẫn:

a. $H(\text{An, Bình})$.

b. $G(\text{Dung}) \wedge H(\text{An, Dung})$.

c. $G(\text{Dung}) \wedge (\exists x, S(\text{x}) \wedge H(x, \text{Dung}))$.

d. $\forall xy, S(x) \wedge S(y) \rightarrow H(x, y) \wedge H(y, x)$.

e. $\exists xy, G(x) \wedge S(y) \wedge H(x, y)$.

f. $\exists x, S(x) \wedge \neg(\exists y, G(y) \wedge H(x, y))$.

Câu 4. Đưa ra phủ định của các phát biểu sau:

a. Có sinh viên trong lớp giải được mọi câu trong bài tập này.

b. Không có sinh viên nào trong lớp giải được thậm chí một câu trong bài tập này.

Gợi ý: Viết lại các câu bằng logic vị từ, dùng qui tắc DeMorgan để phủ định rồi viết lại câu phủ định bằng ngôn ngữ tự nhiên.

Hướng dẫn:

Chúng ta chọn một diễn giải phù hợp để viết lại các câu trên bằng logic vị từ. Chẳng hạn:

- miền phát biểu là tập tất cả mọi thứ.
- $S(x)$: x là một sinh viên trong lớp.
- $B(x)$: x là một câu trong bài tập này.
- $G(x, y)$: x giải được y.

a. Viết lại bằng logic vị từ: $\exists x, S(x) \wedge (\forall y, B(y) \rightarrow G(x, y))$

Phủ định: $\neg(\exists x, S(x) \wedge (\forall y, B(y) \rightarrow G(x, y)))$

$\equiv \forall x, \neg S(x) \vee \neg(\forall y, B(y) \rightarrow G(x, y))$

$\equiv \forall x, \neg S(x) \vee \neg(\forall y, \neg B(y) \vee G(x, y))$

$\equiv \forall x, \neg S(x) \vee (\exists y, B(y) \wedge \neg G(x, y))$

$\equiv \forall x, S(x) \rightarrow (\exists y, B(y) \wedge \neg G(x, y))$

Viết lại câu trên bằng ngôn ngữ tự nhiên: Mọi sinh viên trong lớp đều không giải được một câu nào đó trong bài tập này.

b. Viết lại bằng logic vị từ: $\neg(\exists x, S(x) \wedge (\exists y, B(y) \wedge G(x, y)))$

Phủ định: $\neg\neg(\exists x, S(x) \wedge (\exists y, B(y) \wedge G(x, y)))$

$\equiv \exists x, S(x) \wedge (\exists y, B(y) \wedge G(x, y))$

Viết lại câu trên bằng ngôn ngữ tự nhiên: Có sinh viên trong lớp giải được ít nhất một câu trong bài tập này.

Lưu ý là (a) không phải là phủ định của (b) và ngược lại.

Câu 5. Dùng logic vị từ kiểm tra suy luận sau là đúng hay sai: An, một sinh viên trong lớp này, biết lập trình JAVA. Ai biết lập trình JAVA đều kiếm được việc có thu nhập cao. Vậy: có sinh viên trong lớp này kiếm được việc có thu nhập cao.

Hướng dẫn:

Chúng ta chọn một diễn giải phù hợp để viết lại các câu trên bằng logic vị từ. Chẳng hạn:

- miền phát biểu là tập tất cả mọi người.
- $S(x)$: x là một sinh viên trong lớp này.
- $L(x)$: x biết lập trình JAVA.
- $K(x)$: x kiếm được việc có thu nhập cao.

Viết lại các câu trên bằng logic vị từ:

(1) = $S(\text{An}) \wedge L(\text{An})$.

(2) = $\forall x, L(\text{x}) \to K(\text{x})$.

(*) = $\exists \text{x}, S(x) \wedge K(x)$.

Bài toán là kiểm tra suy luận {(1), (2)} |= (*) đúng hay sai.

Chúng ta dùng hệ suy diễn tự nhiên để kiểm tra:

STT	Câu	Lí do có
1	$S(\text{An}) \wedge L(\text{An})$	Tiền đề
2	$\forall x, L(\text{x}) \to K(\text{x})$	Tiền đề
3	$L(\text{An})$	Khử và (1)
4	$L(\text{An}) \to K(\text{An})$	Đặc biệt hóa với mọi (2) với x = An
5	$K(\text{An})$	Tam đoạn luận (3), (4)
6	$S(\text{An})$	Khử-và (1)
7	$S(\text{An}) \wedge K(\text{An})$	Giới-thiệu-và (5), (6)
(*)	$\exists \text{x}, S(x) \wedge K(x)$ (đpcm)	Tổng quát hóa tồn tại (7)

Vậy suy luận trên là đúng.

Câu 6. Tìm một mô hình có miền phát biểu gồm ít nhất 5 phần tử cho cơ sở tri thức gồm các câu sau:

(1) $\forall X, \text{g}(\text{z}, X) = \text{z}$.

(2) $\forall X, P(z, X) \wedge P(X, X)$.

(3) $\forall XY, g(X, Y) = g(Y, X) \wedge P(g(X, Y), X)$.

Cho thấy rằng đó thực sự là mô hình của cơ sở tri thức đã cho.

Hướng dẫn:

Mô hình là một diễn giải làm cho tất cả các câu trong cơ sở tri thức đúng.

Vì đã biết (1), (2), (3) là các câu nên phải có: z là hằng; g/2 là tên hàm; *P*/2 là vị từ.

Xét diễn giải *I* có miền phát biểu là tập tất cả các các số nguyên dương, $|I| = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

- Hằng z biểu diễn cho số 1.
- Vị từ *P* biểu diễn cho quan hệ là-ước. Chẳng hạn *P*(2, 4) đúng (2 là ước của 4) nhưng *P*(2, 5) sai (2 không là ước của 5).
- Tên hàm g biểu diễn cho hàm ước chung lớn nhất. Chẳng hạn g(15, 10) = 5 vì 5 là ước chung lớn nhất của 15 và 10.

Khi đó ngữ nghĩa của các câu là:

(1) Ước chung lớn nhất của 1 với mọi số đều là 1.

(2) Mọi số đều có ước là 1 và chính nó.

(3) Ước chung lớn nhất của hai số không phụ thuộc vào thứ tự và ước chung lớn nhất cũng là ước.

Rõ ràng cả 3 câu đều đúng theo diễn giải *I* nên *I* là một mô hình của cơ sở tri thức đã cho.

Lưu ý là còn nhiều mô hình khác cho cơ sở tri thức này. Chẳng hạn xét diễn giải:

- Miền phát biểu là tập tất cả các tập con của một tập nào đó.
- Hằng z biểu diễn cho tập rỗng $\varnothing$.
- Vị từ *P* biểu diễn cho quan hệ là-tập-con $\subset$.
- Tên hàm g biểu diễn cho hàm giao hai tập hợp $\cap$.

Khi đó diễn giải này cũng là một mô hình của cơ sở tri thức đã cho. (Sinh viên tự kiểm tra lại)

--- (*Bài giải có thể có sai sót*) ---