UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE

CENTRO DE TECNOLOGIA

DEP. DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO E AUTOMAÇÃO

ANÁLISE DE SINAIS E SISTEMAS

PROF. DR. PAULO SERGIO DA MOTTA PIRES

Componente:

Jaime Cristalino Jales Dantas

Matrícula: 2011008771

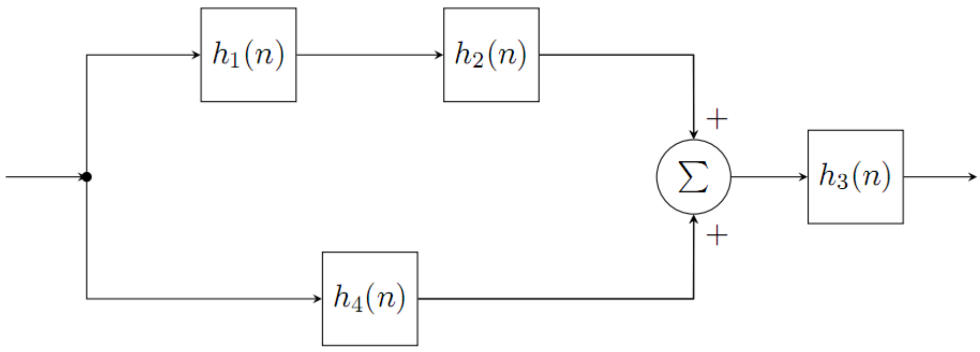
LISTA 12

01 de junho de 2013

Natal, RN

Sumário

1) Considere o sistema



Com resposta ao impulso dadas por:

$$h_1(n) = h_2(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

$$h_3(n) = u(n)$$

$$h_4(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

A) Calcule a resposta ao impulso do sistema equivalente

Solução:
Usando as propriedades, temos:

$$h(n) = \left(\left(h_1(n) * h_2(n)\right) + h_4(n)\right) * h_3(n)$$

$$h(n) = \left(\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) * \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)\right) * u(n)$$

$$h(n) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k u(k) * \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} u(n-k) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n (n+1)$$

$$h(n) = \left((n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)\right) * u(n) = (n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^n * u(n) + \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) * u(n)$$

$$h(n) = \sum_{K=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k (k+1)u(n-k) + \sum_{K=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k u(k)u(u-k)$$

$$h(n) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k (k+1) + \sum_{K=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{4}3^{-n}(-2n + 3^{n+2} - 5) + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$h(n) = \frac{1}{4}3^{-n}(-2n + 3^{n+2} - 5) + 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$h(n) = \frac{1}{4}3^{-n}(-2n + 3^{n+2} - 5) + 2 - 2^{-n}$$

B) Calcule a resposta a degrau do sistema equivalente

$$h(n) * u(n) = \left(\frac{1}{4}3^{-n}(-2n + 3^{n+2} - 5)\right) * u(n)$$

Usando o Wolfram, temos que:

$$h(n) * u(n) = \sum_{K=0}^{n}\left(\frac{1}{4}3^{-k}(-2k + 3^{k+2} - 5)\right) = 2^{-n-2}3^{-n}(2^n n + 17(6^n n) + 4(3^n) + 2^{n+2}$$

Como a entrada do sistema é a degrau, a resposta ao impulso será:

$$y(n) = h(n) * u(n) = 2^{-n-2}3^{-n}(2^n n + 17(6^n n) + 4(3^n) + 2^{n+2}$$

2) Repita o problema anterior considerando

$$h_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$
$$h_2(n) = \delta(n)$$
$$h_3(n) = h_4(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

A) Calcule a resposta ao impulso do sistema equivalente

Solução:

$$h(n) = ((h_1(n) \ * \ h_2(n)) + h_4 \ (n)) * h_3(n)$$

$$h(n) = \left(\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \ * \ \delta(n)\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)\right) * \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

$$h(n) = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \ + \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)\right) * \left(\frac{1}{3}\right) u(n)$$

$$h(n) = \left(\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n * \ \delta(n)\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) * (1/3)^n$$

$$h(n) = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) * \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n * \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + \left(\left(\frac{1}{3}\right)^n * \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

Aplicando o somatório em $h(n)$, temos:

$$h(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{2}\right)^k + \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

‘

$$h(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{\left(-\frac{1}{2}\right)}\right) + (n+1) * \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$h(n) = -3^{-n}\, 2\left(1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right) + (n+1)3^{-n}$$

$$h(n) = -3^{-n} * 2 + 3^{-n}\, 2\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^n + (n+1)3^{-n}$$

$$h(n) = -3^{-n} * 2 + 3^{-n}2\left(\frac{3}{2}\right)3^n 2^{-n} + (n+1)3^{-n}$$

$$h(n) = 2^{-n}3 + (n-1)3^{-n}$$

B) Calcule a resposta a degrau do sistema equivalente

Solução:

$$h(n) * u(n) = (2^{-n}3 + (n-1)3^{-n}) * u(n)$$

$$h(n) * u(n) = \sum_{k=0}^{n} (2^{-k}3 + (k-1)3^{-k})$$

$$h(n) * u(n) = 3\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{j} + \sum_{k=0}^{n} (k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k}$$

$$h(n) * u(n) = 3\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{j} + \sum_{k=0}^{n} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k} - \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^{k}$$

Pelo Wolfram, podemos calcular $\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^{k} k = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n} (-2n + 3^{n+1} - 3)$

$$h(n) * u(n) = 3\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n} (-2n + 3^{n+1} - 3) - \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)}$$

$$h(n) * u(n) = 6 - 2^{-n}3 + \frac{1}{4}3^{-n}(-2n + 3^{n+1} - 3) - \frac{1-(1/3)^{n+1}}{2/3}$$

$$h(n) * u(n) = -\frac{1}{2}3^{-n}n - 2^{-n}3 - \frac{1}{4}3^{-n} + \frac{21}{4}$$

3) Calcule a convolução $y(n) = x(n) * h(n)$ considerando

A) $x(n) = \left\{1;\ -\frac{1}{2};\frac{1}{4};\ -\frac{1}{8};\frac{1}{16}\right\}$ e $h(n) = \{1;\ -1;\ 1;\ -1\}$

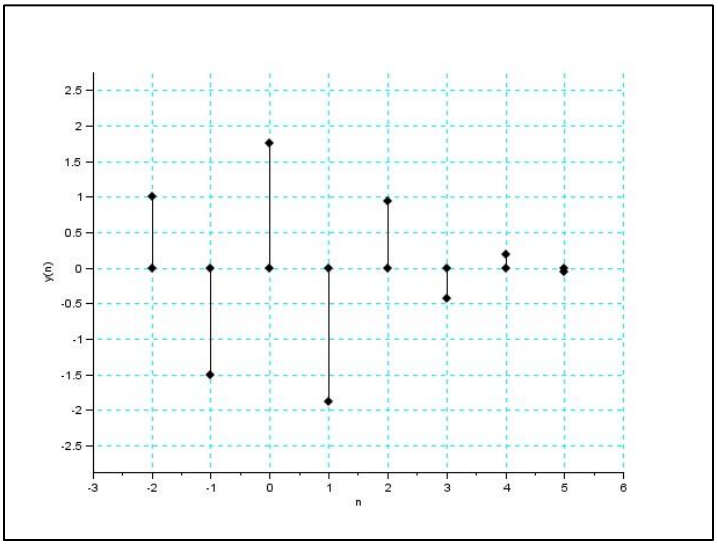
Solução em Scilab:

$$y(n) = \{1;\ -1.5;\ 1.75;\ -1.875;\ 0.9375;\ -0.4375;\ 0.1875;\ -0.0625\}$$

Código do algoritmo utilizado na solução:

```
//questao 3 Letra A
//funcao de comvolucao discreta
function [y, ny]=convolucao(x, nx, h, nh)
   ny_inicial = nx(1) + nh(1);//soma as primeiras possicoes de x e h
   ny_final = nx(length(x)) + nh(length(h));//soma com a ultima possicao de x e h
   ny = [ny_inicial:1:ny_final];//define as posicoes do y
   y = conv(x,h);//funcao do scilab para convolucao discreta
endfunction
//entrada de dados:
x = [1; -1/2; 1/4; -1/8; 1/16];//entrada do SLIT
nx = [-2:1:2];//posicoes do vetor de entrada
h = [1; -1; 1; -1];//resposta do SLIT
nh = [0:1:3];//posicoes do vetor de resposta
//y eh x convolucao h
[y, ny] = convolucao(x, nx, h, nh);//saida do SLIT
//grafico
n=[ny(1):1:ny(length(y))];//intervado discreto de y
//variáveis auxiliares para o grafico
x_min = ny(1)-1;
x_max= ny(length(y)) + 1;
y_min = min(y)-1;
y_max = max(y)+1;
plot2d3(n,y, style = -4, rect = [x_min,y_min,x_max,y_max]);//grafico discreto de y(n) em funcao de n
xtitle("",["n"],["y(n)"],  boxed = 0);//titulo dos eixos
xgrid(4);
```

Gráfico de $y(n)$



B) $x(n) = \{1;\ 2;\ 3;\ 0;\ -1\}$ e $h(n) = \{2;\ -1;\ 3;\ 1;\ -2\}$

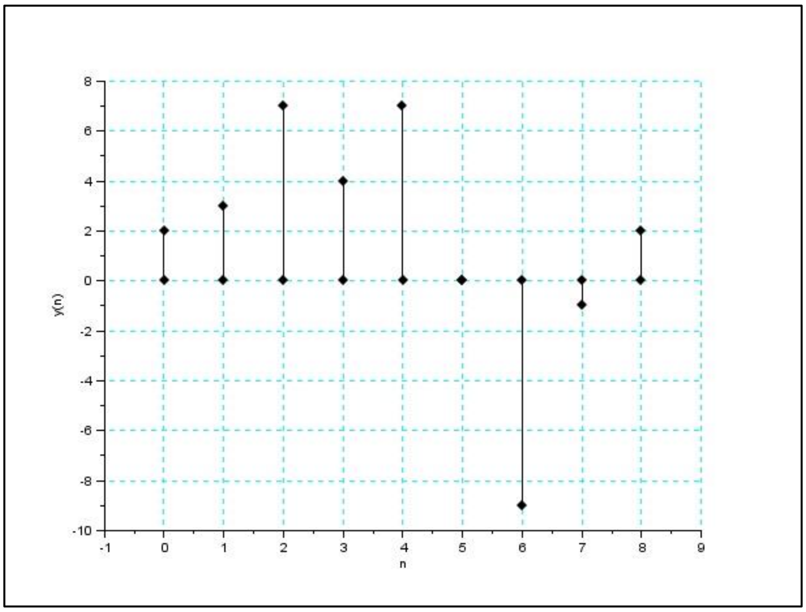
Solução em Scilab:

$$y(n) = \{2;\ 3;\ 7;\ 4;\ 7;\ 0;\ -9;\ -1;\ 2\}$$

Código do algoritmo utilizado na solução:

```
//questao 3 Letra B
//funcao de comvolucao discreta
function [y, ny]=convolucao(x, nx, h, nh)
   ny_inicial = nx(1) + nh(1);//soma as primeiras possicoes de x e h
   ny_final = nx(length(x)) + nh(length(h));//soma com a ultima possicao de x e h
   ny = [ny_inicial:1:ny_final];//define as posicoes do y
   y = conv(x,h);//funcao do scilab para convolucao discreta
endfunction
//entrada de dados:
x = [1; 2; 3; 0; -1];//entrada do SLIT
nx = [0:1:5];//posicoes do vetor de entrada
h = [2; -1; 3; 1; -2];//resposta do SLIT
nh = [0:1:5];//posicoes do vetor de resposta
//y eh x convolucao h
[y, ny] = convolucao(x, nx, h, nh);//saida do SLIT
//grafico
n=[ny(1):1:ny(length(y))];//intervado discreto de y
//variáveis auxiliares para o grafico
x_min = ny(1)-1;
x_max= ny(length(y)) + 1;
y_min = min(y)-1;
y_max = max(y)+1;
plot2d3(n,y, style = -4, rect = [x_min,y_min,x_max,y_max]);//grafico discreto de
y(n) em funcao de n
xtitle("",["n"],["y(n)"],  boxed = 0);//titulo dos eixos
xgrid(4);
```

Gráfico de $y(n)$



C) $x(n) = \left\{3; \frac{1}{2}; -\frac{1}{4}; 1; 4\right\}$ e $h(n) = \{2; -1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\}$

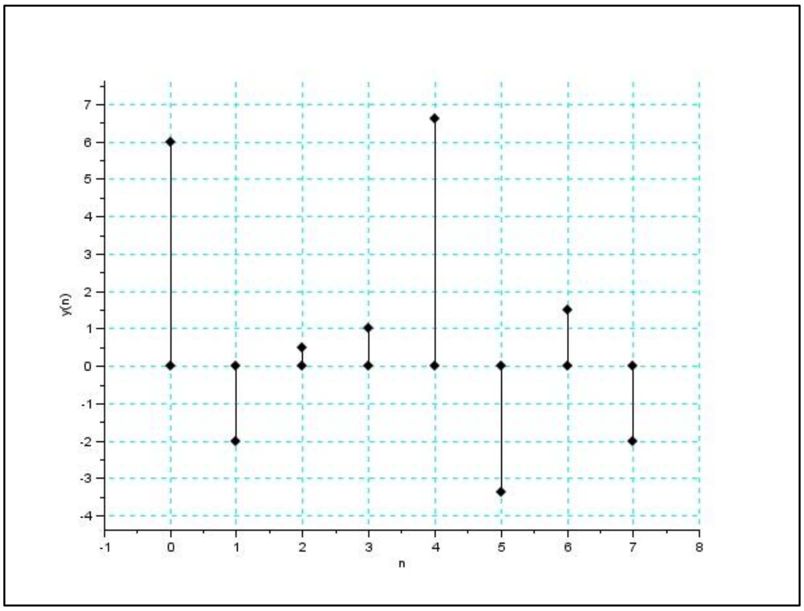
Solução em Scilab:

$$y(n) = \{6;\ -2;\ 0.5;\ 1;\ 6.625;\ -3.375;\ 1.5;\ -2\}$$

Código do algoritmo utilizado na solução:

```
//questao 3 Letra C
//funcao de comvolucao discreta
function [y, ny]=convolucao(x, nx, h, nh)
   ny_inicial = nx(1) + nh(1);//soma as primeiras possicoes de x e h
   ny_final = nx(length(x)) + nh(length(h));//soma com a ultima possicao de x e h
   ny = [ny_inicial:1:ny_final];//define as posicoes do y
   y = conv(x,h);//funcao do scilab para convolucao discreta
endfunction
//entrada de dados:
x = [3; 1/2; -1/4; 1; 4];//entrada do SLIT
nx = [0:1:5];//posicoes do vetor de entrada
h = [2; -1; 1/2; -1/2];//resposta do SLIT
nh = [0:1:4];//posicoes do vetor de resposta
//y eh x convolucao h
[y, ny] = convolucao(x, nx, h, nh);//saida do SLIT
//grafico
n=[ny(1):1:ny(length(y))];//intervado discreto de y
//variáveis auxiliares para o grafico
x_min = ny(1)-1;
x_max= ny(length(y)) + 1;
y_min = min(y)-1;
y_max = max(y)+1;
plot2d3(n,y, style = -4, rect = [x_min,y_min,x_max,y_max]);//grafico discreto de
y(n) em funcao de n
xtitle("",["n"],["y(n)"],  boxed = 0);//titulo dos eixos
xgrid(4);
```

Gráfico de $y(n)$



D) $x(n) = \left\{-1; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; -\frac{1}{5}; 1\right\}$ e $h(n) = \{1; 1; 1; 1\}$

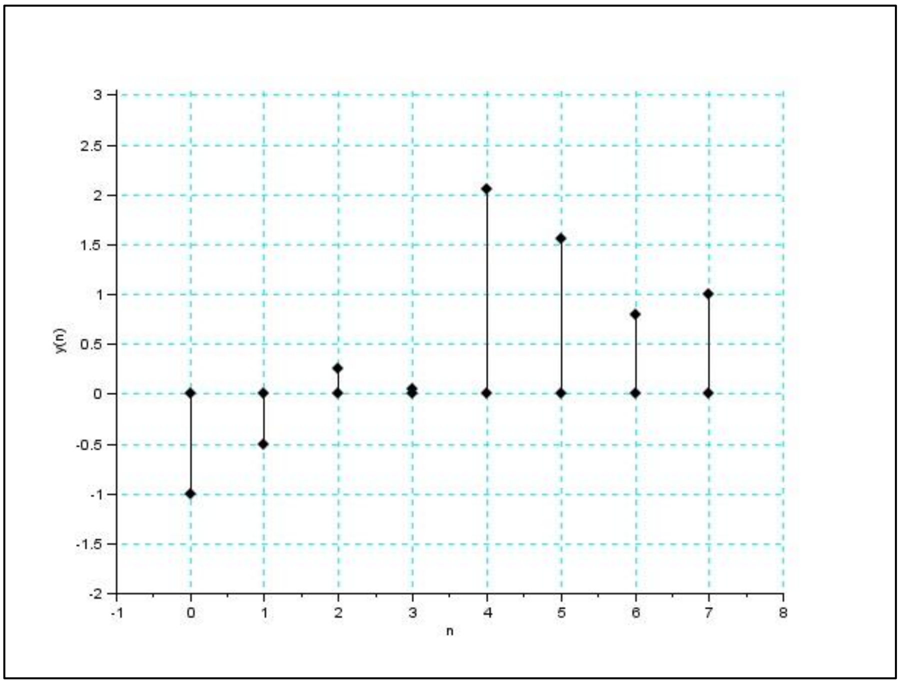
Solução em Scilab:

$$y(n) = \{-1; -0.5; 0.25; 0.05; 2.05; 1.55; 0.8; 1\}$$

Código do algoritmo utilizado na solução:

```
//questao 3 Letra D
//funcao de comvolucao discreta
function [y, ny]=convolucao(x, nx, h, nh)
   ny_inicial = nx(1) + nh(1);//soma as primeiras possicoes de x e h
   ny_final = nx(length(x)) + nh(length(h));//soma com a ultima possicao de x e h
   ny = [ny_inicial:1:ny_final];//define as posicoes do y
   y = conv(x,h);//funcao do scilab para convolucao discreta
endfunction
//entrada de dados:
x = [-1; 1/2; 3/4; -1/5; 1];//entrada do SLIT
nx = [0:1:5];//posicoes do vetor de entrada
h = [1; 1; 1; 1];//resposta do SLIT
nh = [0:1:4];//posicoes do vetor de resposta
//y eh x convolucao h
[y, ny] = convolucao(x, nx, h, nh);//saida do SLIT
//grafico
n=[ny(1):1:ny(length(y))];//intervado discreto de y
//variáveis auxiliares para o grafico
x_min = ny(1)-1;
x_max= ny(length(y)) + 1;
y_min = min(y)-1;
y_max = max(y)+1;
plot2d3(n,y, style = -4, rect = [x_min,y_min,x_max,y_max]);//grafico discreto de
y(n) em funcao de n
xtitle("",["n"],["y(n)"],  boxed = 0);//titulo dos eixos
xgrid(4);
```

Gráfico de $y(n)$



E) $x(n) = \begin{cases} -1, & -1 \le n \le -1 \\ 1, & 0 \le n \le 4 \end{cases}$ e $h(n) = 2u(n)$

Solução:

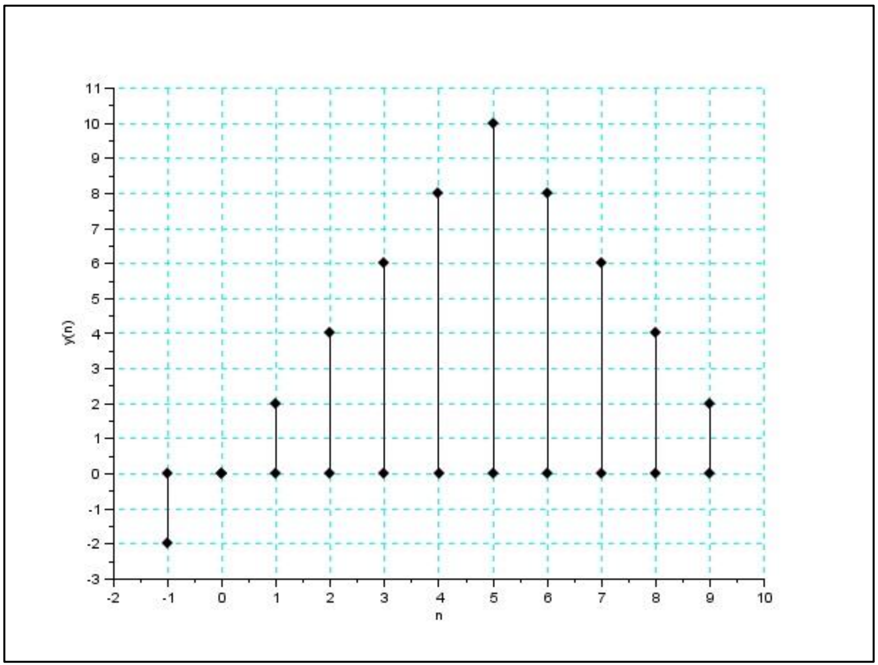
$$y(n) = \{-2;\ 0;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10;\ 8;\ 6;\ 4;\ 2\}$$

Código do algoritmo utilizado na solução:

```
//questao 3 Letra E
//funcao degrau discreta
function [h, nh]=degrau(n0, n1, n2)
   nh = [n1:1:n2];
   h = [(nh-n0) >= 0];
endfunction
function [y, ny]=convolucao(x, nx, h, nh)//funcao de comvolucao discreta
   ny_inicial = nx(1) + nh(1);//soma as primeiras possicoes de x e h
   ny_final = nx(length(x)) + nh(length(h));//soma com a ultima possicao de x e h
   ny = [ny_inicial:1:ny_final];//define as posicoes do y
   y = conv(x,h);//funcao do scilab para convolucao discreta
endfunction
//entrada de dados:
x = [-1,1,1,1,1,1];//entrada do SLIT
nx = [-1:1:4];//posicoes do vetor de entrada
[h_aux, nh] = degrau(0,0,5);//auxiliar
h = h_aux*2;//resposta do SLIT
//y eh x convolucao y
[y, ny] = convolucao(x, nx, h, nh);//saida do SLIT

//grafico
n=[ny(1):1:ny(length(y))];//intervado discreto de y
//variáveis auxiliares para o grafico
x_min = ny(1)-1;
x_max= ny(length(y)) + 1;
y_min = min(y)-1;
y_max = max(y)+1;
plot2d3(n,y, style = -4, rect = [x_min,y_min,x_max,y_max]);//grafico discreto de
y(n) em funcao de n
xtitle("",["n"],["y(n)"],  boxed = 0);//titulo dos eixos
xgrid(4);
```

Gráfico de $y(n)$



F) $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$ e $h(n) = \delta(n) + \delta(n+1) + \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$

Solução:
Como $x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$ temos:

$$x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\delta(k) + \delta(k-1) + \left(\frac{1}{3}\right)^k u(k)\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-j} u(n-j)$$

$$x(n) * h(n) = \sum_{k=0}^{0} \delta(k)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} + \sum_{j=k}^{1} \delta(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

$$x(n) * h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^n 2^k = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

$$x(n) * h(n) = 2^{-n} + (2^{-n} * 2) + 2^{-n} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$x(n) * h(n) = (2^{-n} * 3) + 2^{-n} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}}$$

$$x(n) * h(n) = (2^{-n} * 3) + 2^{-n} \left(3 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = (2^{-n} * 3) + 2^{-n} \left(3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right)$$

$$x(n) * h(n) = 2^{-n} \left(6 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) u(n)$$

Como em um SLIT $y(n) = x(n) * h(n)$ temos:

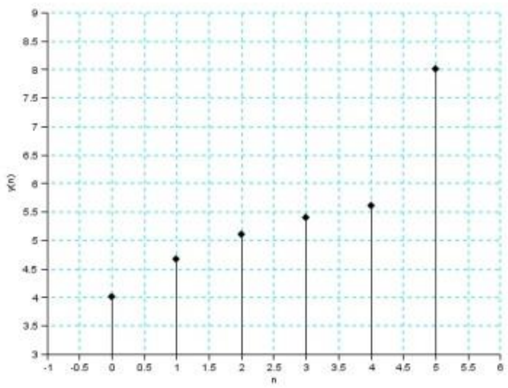
$$y(n) = 2^{-n} \left(6 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) u(n)$$

Usando o Scilab para plotar a solução com 5 interações, temos:

```
//questao 3 f
//funcao degrau discreta
function [h, nh]=degrau(n0, n1, n2)
   nh = [n1:1:n2];
   h = [(nh-n0) >= 0];
endfunction
//funcao de comvolucao discreta
//entrada de dados
n=[0:1:5];
y_aux2 = (6-2*(2/3)^n);
[y_aux1, ny] = degrau(0,0,5);
for i=1:5
   y(i) =  y_aux2(i) * y_aux1(i);//saida do SLIT
end
y(1) =  y_aux2(1) * y_aux1(1);//saida do SLIT

//grafico
n=[ny(1):1:ny(length(y))];//intervado discreto de y
//variáveis auxiliares para o grafico
x_min = ny(1)-1;
x_max= ny(length(y)) + 1;
y_min = min(y)-1;
y_max = max(y)+1;
plot2d3(n,y, style = -4, rect = [x_min,y_min,x_max,y_max]);//grafico
discreto de y(n) em funcao de n
xtitle("",["n"],["y(n)"],  boxed = 0);//titulo dos eixos
xgrid(4);
```

Gráfico de $y(n)$



4) Usando iteração, resolva as seguintes equações de diferenças:

A) $y(n) + y(n-1) + \frac{1}{4}y(n-2) = u(n), \quad n \geq 0$

Condições iniciais: $y(-1) = 0$ e $y(-2) = 1$

Solução em Scilab com 5 interações:

$$y(n) = \{0;\ 0.75;\ 0.25;\ 0.5625; 0.375\}$$

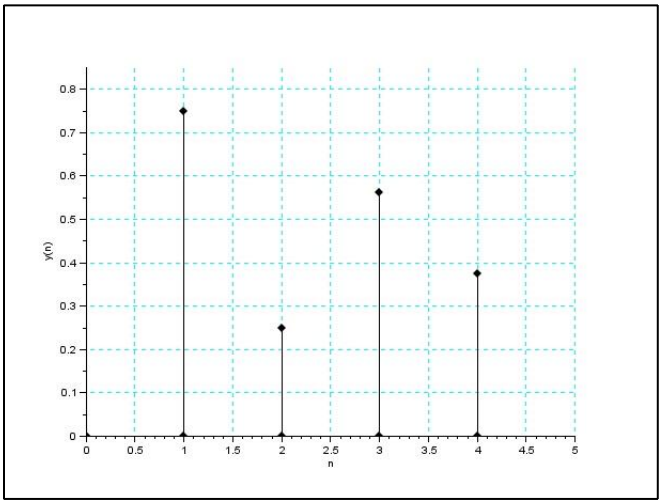
Código do algoritmo utilizado na solução:

```
//questao 04 letra A
//condicoes iniciais
n_c = 2;//numero de condicoes iniciais
n_i = 5;//numero de interacoes
y(2) = 1;//y(-1)
y(1) = 0;//y(-2)

//laco de interacao
for i = 3:(n_i + n_c)
   y(i) = 1- y(i-1) -(1/4)*y(i-2);
end

//deslocamento do vetor y para a possicao 1
for i = 1:(n_i)
   aux(i) = y(i+n_c);
end
f = aux'//transposta do vetor resposta
//agora o vetor aux eh o vetor y(i) ordemado corretamente a partir da posicao y(1)
//f = aux';
//grafico
//vetor de n discreto
n=[1:1:n_i];
//variáveis auxiliares para o grafico
x_min = n(1)-1;
x_max= n(length(n));
y_min = min(f);
y_max = max(f)+0.1;
plot2d3(n-1,f, style = -4, rect = [x_min,y_min,x_max,y_max]);//grafico discreto de
y(n) em funcao de n
xtitle("",["n"],["y(n)"],  boxed = 0);//titulo dos eixos
xgrid(4);
```

Gráfico de $y(n)$:



B) $y(n)+\frac{3}{4}y(n-1)+\frac{1}{8}y(n-2)=\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n), \quad n\geq 0$

Condições iniciais: $y(-1)=1$ e $y(-2)=0$

Solução em Scilab com 5 interações:

$$y(n)=\{0.25;\ 0.0208333;\ 0.0642361;\ -0.0137442;\ 0.0146243\}$$

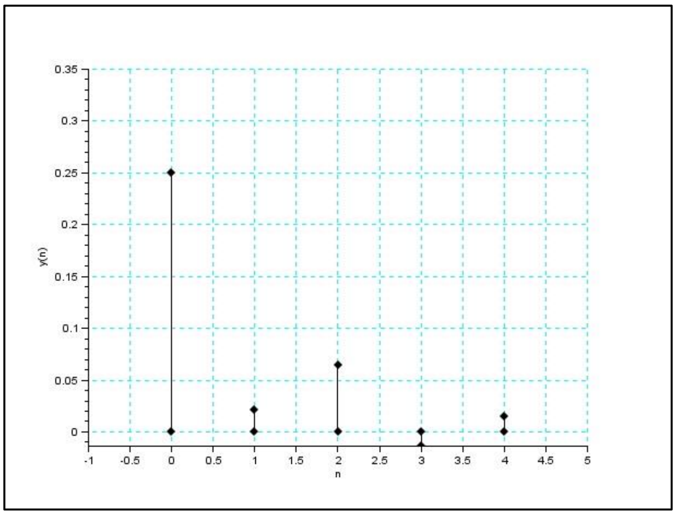
Código do algoritmo utilizado na solução:

```
//questao 04 letra B
//condicoes iniciais
n_c = 2;//numero de condicoes iniciais
n_i = 5;//numero de interacoes
y(2) = 1;//y(-1)
y(1) = 0;//y(-2)

//laco de interacao
for i = 3:(n_i + n_c)
   y(i) = -(3/4)*y(i-1) -(1/8)*y(i-2) +(1/3)^(i-3);
end

//deslocamento do vetor y para a possicao 1
for i = 1:(n_i)
   aux(i) = y(i+n_c);
end
f = aux'//transposta do vetor resposta
//agora o vetor aux eh o vetor y(i) ordemado corretamente a partir da posicao y(1)
//f = aux';
//grafico
//vetor de n discreto
n=[1:1:n_i];
//variáveis auxiliares para o grafico
x_min = n(1)-2;
x_max= n(length(n));
y_min = min(f);
y_max = max(f)+0.1;
plot2d3(n-1,f, style = -4, rect = [x_min,y_min,x_max,y_max]);//grafico discreto de y(n) em funcao de n
xtitle("",["n"],["y(n)"], boxed = 0);//titulo dos eixos
xgrid(4);
```

Gráfico de $y(n)$:



C) $y(n) + \frac{3}{4}y(n-1) + \frac{1}{8}y(n-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n), \quad n \geq 0$

Condições iniciais: $y(-1) = 0$ e $y(-2) = 0$

Solução em Scilab com 5 interações:

$$y(n) = \{1;\ -0.25;\ 0.3125;\ -0.078125;\ 0.0820312\}$$

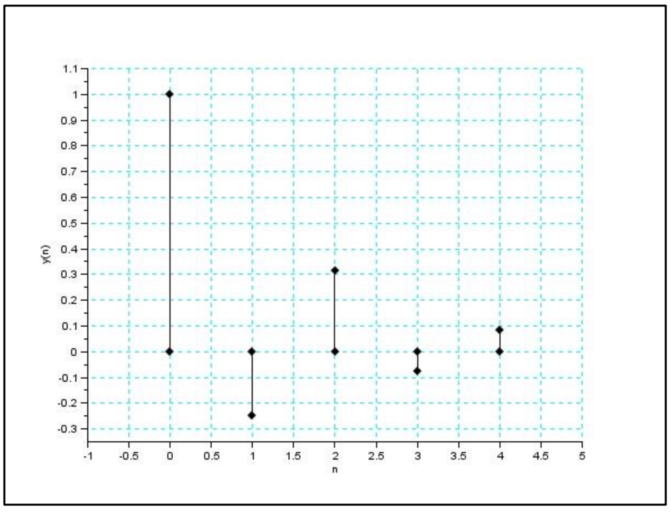
Código do algoritmo utilizado na solução:

```
//questao 04 letra C
//condicoes iniciais
n_c = 2;//numero de condicoes iniciais
n_i = 5;//numero de interacoes
y(2) = 0;//y(-1)
y(1) = 0;//y(-2)

//laco de interacao
for i = 3:(n_i + n_c)
    y(i) = -(3/4)*y(i-1) -(1/8)*y(i-2) +(1/2)^(i-3);
end

//deslocamento do vetor y para a possicao 1
for i = 1:(n_i)
    aux(i) = y(i+n_c);
end
f = aux'//transposta do vetor resposta
//agora o vetor aux eh o vetor y(i) ordemado corretamente a partir da posicao y(1)
//f = aux';
//grafico
//vetor de n discreto
n=[1:1:n_i];
//variáveis auxiliares para o grafico
x_min = n(1)-2;
x_max= n(length(n));
y_min = min(f)-0.1;
y_max = max(f)+0.1;
plot2d3(n-1,f, style = -4, rect = [x_min,y_min,x_max,y_max]);//grafico discreto de y(n) em funcao de n
xtitle("",["n"],["y(n)"],  boxed = 0);//titulo dos eixos
xgrid(4);
```

Gráfico de $y(n)$:



5) Determine a solução total para a equação de diferenças

$$y(n)+\frac{1}{6}y(n-1)-\frac{1}{6}y(n-2)=x(n)+\frac{1}{2}x(n-1), \qquad n\geq 0$$

Com condições iniciais $y(-1)=1$ e $y(-2)=0$ considerando

$$x(n)=\cos\frac{3n\pi}{4}$$

Solução:

Solução da homogenia:

$$y(n)+\frac{1}{6}y(n-1)-\frac{1}{6}y(n-2)=0$$

Sabemos que a equação homogenia é escrita na forma $a_0+a_1\alpha^{-1}+\ a_2\alpha^{-2}=0$

$$1+\frac{1}{6}\alpha^{-1}-\frac{1}{6}\alpha^{-2}=\ 0$$

$$\alpha^2+\frac{1}{6}\alpha-\frac{1}{6}=\ 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau acima, encontraremos as seguintes raízes:

$$\alpha_1=\frac{1}{3};\ \alpha_2=\ -\frac{1}{2}$$

Solução homogenia:

$$y_h(n)=A_1\left(\frac{1}{3}\right)^n+\ A_2\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

Solução particular:

$$y_p(n)=A\sin\frac{3\pi n}{4}+B\cos\frac{3\pi n}{4}$$

$$y_p(n-1)=A\sin\frac{3\pi(n-1)}{4}+B\cos\frac{3\pi(n-1)}{4}$$

$$y_p(n-1)=\frac{\sqrt{2}}{2}(B-A)\sin\frac{3\pi n}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}(B+A)\cos\frac{3\pi n}{4}$$

$$y_p(n-2)=-B\sin\frac{3\pi n}{4}+A)\cos\frac{3\pi n}{4}$$

Substituindo na equação de diferencia os $y_p(n-1)$, $y_p(n-2)$, $x(n)$ e o $x(n-1)$ temos:

$$y(n)+\frac{1}{6}y(n-1)-\frac{1}{6}y(n-2)=x(n)+\frac{1}{2}x(n-1)$$

$$A\sin\frac{3\pi n}{4}+B\cos\frac{3\pi n}{4}+\frac{1}{6}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(B-A)\sin\frac{3\pi n}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}(B+A)\cos\frac{3\pi n}{4}\right)$$
$$-\frac{1}{6}\left(-B\sin\frac{3\pi n}{4}+A)\cos\frac{3\pi n}{4}\right)=2\cos\frac{3n\pi}{4}+\frac{1}{2}\left(2\cos\frac{3\pi(n-1)}{4}\right)$$

$$\left(A-\frac{\sqrt{2}}{12}A+\frac{\sqrt{2}}{12}B+\frac{1}{6}B\right)\sin\frac{3\pi n}{4}+\ \left(B-\frac{\sqrt{2}}{12}B-\frac{\sqrt{2}}{12}A-\frac{1}{6}A\right)\cos\frac{3\pi n}{4}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{3\pi}{4}+\ \left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cos\frac{3\pi n}{4}$$

Por igualdade de polinômios, temos:

$$A - \frac{\sqrt{2}}{12}A + \frac{\sqrt{2}}{12}B + \frac{1}{6}B = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$B - \frac{\sqrt{2}}{12}B - \frac{\sqrt{2}}{12}A - \frac{1}{6}A = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{12 - \sqrt{2}}{12}A + \dfrac{\sqrt{2}+2}{12}B = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{12 - \sqrt{2}}{12}B + \dfrac{-\sqrt{2}-2}{12}A = 2 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \cong \begin{cases} 0.8821A + 0.2845B = 0.7071 \\ -0.2845A + 0.8821B = 1.2928 \end{cases}$$

Utilizando o Scilab para resolver o sistema acima pelo método de Gauss, temos:

```
//questao 5
//METODO DE GAUSS COM PIVOTAMENTO PARCIAL
e = [0.8821,0.2845;-0.2845, 0.8821];
f = [0.7071;1.2928];
function u=gauss(a, b)
  [l,c] = size(a);//sabe as linhas e colunas de a
  //concatena
  u = [a b];
  //percorrer o pivo
  for j=1:c//coluna
    pivo = u(j, j);
    //pivotamento parcial
    for k = j:l
        if abs(pivo)<abs(u(k, j)) then
            aux2 = u(j, :);
            pivo = u(k,j);
            u(j,:)=u(k, :);
            u(k,:)=aux2;
        end
    end
    while pivo == 0
        aux = u(j, :);
        u(j, :) = u(j+1 , :);
        u(j+1, :) = aux;
        pivo = u(j,j);
    end
    for i=j+1:l//percorre a linha abaixo do pivo
      fator=u(i,j)/pivo;
      //calculo
      u(i, :) = u(i, :) - fator*u(j, :);
    end
  end
endfunction
[r] = gauss( e, f)
```

Obtemos como Resposta $B = 1.5616$ e $A = 0.2978$

Solução Geral:

$$y_g(n) = A_1\left(\frac{1}{3}\right)^n + A_2\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 0.2978\sin\frac{3\pi n}{4} + 1.5616\cos\frac{3\pi n}{4}$$

Aplicando as condições inicias, temos:

$$y_g(-1) = A_1\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + A_2\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} + 0.2978\sin\frac{-3\pi}{4} + 1.5616\cos\frac{-3\pi}{4} = 1$$
$$I \rightarrow \ 3A_1 - 2A_2 = 2.3147$$
$$y_g(-2) = A_1\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + A_2\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} + 0.2978\sin\frac{-6\pi}{4} + 1.5616\cos\frac{-6\pi}{4} = 0$$
$$II \rightarrow \ 9A_1 + 4A_2 = -0.2977$$

Resolvendo o sistema acima no Scilab com o código já mostrado anteriormente, temos:

$$A_1 = 0.2887;\ A_2 = 0.7241$$

Portanto, a solução geral da equação de diferenças é:

$$y_g(n) = 0.2887\left(\frac{1}{3}\right)^{n} + 0.7241\left(-\frac{1}{2}\right)^{n} + 0.2978\sin\frac{3\pi n}{4} + 1.5616\cos\frac{3\pi n}{4}$$

6) Encontre as equações de estado para o sistema descrito pela equação de diferenças

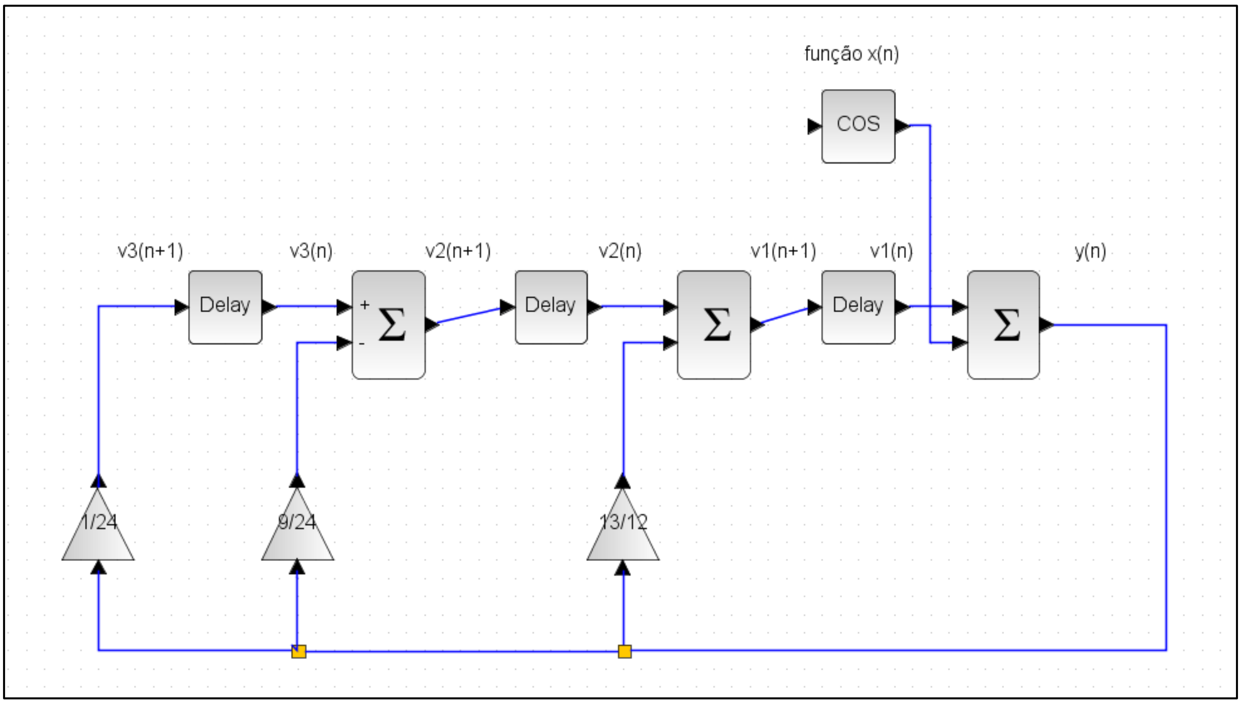
$$y(n) - \frac{13}{12}y(n-1) + \frac{9}{14}y(n-2) - \frac{1}{24}y(n-3) = x(n)$$

Solução:

$$y(n) = \frac{13}{12}y \ - \frac{9}{14}y(n-2) + \frac{1}{24}y(n-3) + x(n) \rightarrow$$

$$y(n) = \frac{13}{12}Dy(n) - \frac{9}{24}D^2y(n) + \frac{1}{24}D^3y(n) + x(n)$$

Diagrama de estados feito no Xcos:



- $v_1(n+1) = v_2(n) + \frac{13}{12}y(n) = v_2(n) + \frac{13}{12}v_1(n) + \frac{13}{12}x(n)$
- $v_2(n+1) = v_3(n) - \frac{9}{24}y(n) = v_3(n) - \frac{9}{24}v_1(n) - \frac{9}{24}x(n)$
- $v_3(n+1) = \frac{1}{24}y(n) = \frac{1}{24}v_1(n) + \frac{1}{24}x(n)$

Equações de estado:

$$v(n+1) = \begin{bmatrix} \frac{13}{12} & 1 & 0 \\ -\frac{9}{24} & 0 & 1 \\ \frac{1}{24} & 0 & 0 \end{bmatrix} v(n) + \begin{bmatrix} \frac{13}{12} \\ -\frac{9}{24} \\ \frac{1}{24} \end{bmatrix} x(n)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} v(n) + x(n)$$

$$v(n+1) = \begin{bmatrix} v_1(n+1) \\ v_2(n+1) \\ v_3(n+1) \end{bmatrix} \ e \ v(n) = \begin{bmatrix} v_1(n) \\ v_2(n) \\ v_3(n) \end{bmatrix}$$

7) Utilizando Cayley-Hamilton, calcule A^n para o problema anterior.
Solução:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{13}{12} & 1 & 0 \\ -\frac{9}{24} & 0 & 1 \\ \frac{1}{24} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $\det(A - \lambda I) = 0$ encontraremos os autovalores da matriz A

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \frac{13}{12} - \lambda & 1 & 0 \\ -\frac{9}{24} & -\lambda & 1 \\ \frac{1}{24} & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda^3 + \frac{13}{12}\lambda^2 - \frac{9}{24}\lambda + \frac{1}{24} = 0$$

Resolvendo a equação do terceiro grau acima, encontraremos as seguintes raízes:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \ ; \ \lambda_2 = \frac{1}{3} \ ; \ \lambda_3 = \frac{1}{4}$$

A partir dos autovalores encontrados, podemos substitui-los no seguinte sistema:

$$\begin{cases} \lambda_1^n = \gamma_0(n)\lambda_1^0 + \gamma_1(n)\lambda_1^1 + \gamma_2(n)\lambda_1^2 \\ \lambda_2^n = \gamma_0(n)\lambda_2^0 + \gamma_1(n)\lambda_2^1 + \gamma_2(n)\lambda_2^2 \\ \lambda_1^n = \gamma_0(n)\lambda_3^0 + \gamma_1(n)\lambda_3^1 + \gamma_2(n)\lambda_3^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \gamma_0(n) + \frac{1}{2}\gamma_1(n) + \frac{1}{4}\gamma_2(n) \\ \left(\frac{1}{3}\right)^n = \gamma_0(n) + \frac{1}{3}\gamma_1(n) + \frac{1}{9}\gamma_2(n) \\ \left(\frac{1}{4}\right)^n = \gamma_0(n) + \frac{1}{4}\gamma_1(n) + \frac{1}{16}\gamma_2(n) \end{cases}$$

Podemos montar a seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{bmatrix}$$

Usando o Scilab, podemos encontrar a inversa da matriz acima.

```
//Questao 7
K = [1,1/2,1/4; 1, 1/3, 1/9; 1,1/4, 1/16];
inversa = K^(-1);//inversa de K
```

$$K^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -9 & 8 \\ -14 & 54 & -40 \\ 24 & -72 & 48 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -9 & 8 \\ -14 & 54 & -40 \\ 24 & -72 & 48 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \gamma_0(n) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 9\left(\frac{1}{3}\right)^n + 8\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ \gamma_1(n) = -14\left(\frac{1}{2}\right)^n + 54\left(\frac{1}{3}\right)^n - 40\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ \gamma_2(n) = 24\left(\frac{1}{2}\right)^n - 72\left(\frac{1}{3}\right)^n + 48\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{cases}$$

Como $A^n = \sum_{i=0}^{N-1} \gamma_i(n) A^i$, temos:

$$A^n = \gamma_0(n)A^0 + \gamma_1(n)A^1 + \gamma_2(n)A^2$$

$$onde\ A = \begin{bmatrix} \frac{13}{12} & 1 & 0 \\ -\frac{9}{24} & 0 & 1 \\ \frac{1}{24} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculando A^2 no Scilab, temos:

```
//questao 7
A = [13/12, 1 ,0; -9/24, 0, 1; 1/24, 0 ,0];
B = A^2;quadrado de A
```

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0.7986 & 1.0833 & 1 \\ -0.3645 & -0.375 & 0 \\ 0.0451 & 0.0416 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \gamma_0(n) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \gamma_1(n) \begin{bmatrix} \frac{13}{12} & 1 & 0 \\ -\frac{9}{24} & 0 & 1 \\ \frac{1}{24} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma_2(n) \begin{bmatrix} 0.7986 & 1.0833 & 1 \\ -0.3645 & -0.375 & 0 \\ 0.0451 & 0.0416 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} \gamma_0(n) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_0(n) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_0(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{13}{12}\gamma_1(n) & \gamma_1(n) & 0 \\ -\frac{9}{24}\gamma_1(n) & 0 & \gamma_1(n) \\ \frac{1}{24}\gamma_1(n) & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.7986\gamma_2(n) & 1.0833\gamma_2(n) & \gamma_2(n) \\ -0.3645\gamma_2(n) & -0.375\gamma_2(n) & 0 \\ 0.0451\gamma_2(n) & 0.0416\gamma_2(n) & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} \gamma_0(n) + \frac{13}{12}\gamma_1(n) + 0.7986\gamma_2(n) & \gamma_1(n) + 1.0833\gamma_2(n) & \gamma_2(n) \\ -\frac{9}{24}\gamma_1(n) - 0.3645\gamma_2(n) & \gamma_0(n) - 0.375\gamma_2(n) & \gamma_1(n) \\ \frac{1}{24}\gamma_1(n) + 0.0451\gamma_2(n) & 0.0416\gamma_2(n) & \gamma_0(n) \end{bmatrix}$$

Substituindo os γ_i na matriz A^n acima temos:

$$A^n = \begin{bmatrix} 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 9\left(\frac{1}{3}\right)^n + 8\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{13}{12}\left(-14\left(\frac{1}{2}\right)^n + 54\left(\frac{1}{3}\right)^n - 40\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) + 0.7986\left(24\left(\frac{1}{2}\right)^n - 72\left(\frac{1}{3}\right)^n + 48\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) & \left(-14\left(\frac{1}{2}\right)^n + 54\left(\frac{1}{3}\right)^n - 40\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) + 1.0833\left(24\left(\frac{1}{2}\right)^n - 72\left(\frac{1}{3}\right)^n + 48\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) & \left(24\left(\frac{1}{2}\right)^n - 72\left(\frac{1}{3}\right)^n + 48\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \\ -\frac{9}{24}\left(-14\left(\frac{1}{2}\right)^n + 54\left(\frac{1}{3}\right)^n - 40\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) - 0.3645\left(24\left(\frac{1}{2}\right)^n - 72\left(\frac{1}{3}\right)^n + 48\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) & \left(2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 9\left(\frac{1}{3}\right)^n + 8\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) - 0.375\left(24\left(\frac{1}{2}\right)^n - 72\left(\frac{1}{3}\right)^n + 48\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) & \left(-14\left(\frac{1}{2}\right)^n + 54\left(\frac{1}{3}\right)^n - 40\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \\ \frac{1}{24}\left(-14\left(\frac{1}{2}\right)^n + 54\left(\frac{1}{3}\right)^n - 40\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + 0.0451\left(24\left(\frac{1}{2}\right)^n - 72\left(\frac{1}{3}\right)^n + 48\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) & 0.0416\left(24\left(\frac{1}{2}\right)^n - 72\left(\frac{1}{3}\right)^n + 48\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) & \left(2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 9\left(\frac{1}{3}\right)^n + 8\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \end{bmatrix}$$

Simplificando a matriz A^n temos:

$$A^n \cong \begin{bmatrix} 6\left(\frac{1}{2}\right)^n - 8\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\left(\frac{1}{4}\right)^n & 12\left(\frac{1}{2}\right)^n - 24\left(\frac{1}{3}\right)^n + 12\left(\frac{1}{4}\right)^n & 24\left(\frac{1}{2}\right)^n - 72\left(\frac{1}{3}\right)^n + 48\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ -3.5\left(\frac{1}{2}\right)^n + 6\left(\frac{1}{3}\right)^n - 2.5\left(\frac{1}{4}\right)^n & -7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 18\left(\frac{1}{3}\right)^n - 10\left(\frac{1}{4}\right)^n & -14\left(\frac{1}{2}\right)^n + 54\left(\frac{1}{3}\right)^n - 40\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 0.5\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n + 0.5\left(\frac{1}{4}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 9\left(\frac{1}{3}\right)^n + 8\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{bmatrix}$$

Referências:

- http://help.scilab.org/docs/5.4.1/pt_BR/index.html
- http://www.wolframalpha.com/
- Lathi, B. P. Sinais e Sistemas Lineares, - 2 ª ed. – Porto Alegre: Bookman, 2007.
- Mello, Carlos Alexandre. Processamento Digital de Sinais, Centro de Informática – UFPE 2013. Disponível em http://www.cin.ufpe.br/~cabm/pds/PDS.pdf