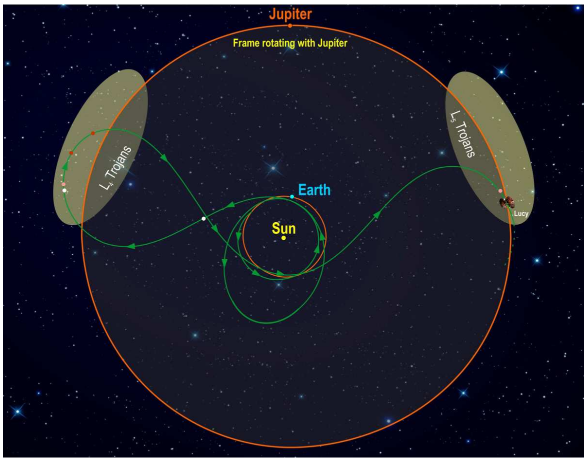
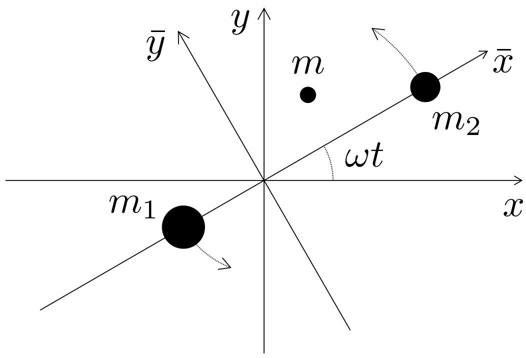
Příklad z teoretické mechaniky č. 2 (2021)

Před dvěma týdny 16. října 2021 vypustila NASA z Mysu Canaveral kosmickou sondu Lucy, která má vůbec poprvé zblízka prozkoumat 6 asteroidů ze skupiny tzv. Trojánů. Ty se nacházejí v blízkosti Lagrangeových bodů L_4 a L_5 v soustavě Slunce–Jupiter: obíhají po stejné dráze jako Jupiter, ale přesně 60° před ním a za ním. Kromě toho existují ještě tři další rovnovážné polohy ležící na spojnici Slunce a Jupitera L_1, L_2 a L_3.



Cílem úlohy je najít tyto Lagrangeovy body, tedy korotující rovnovážné polohy v tzv. omezeném rovinném kruhovém problému tří těles. V této aproximaci Slunce a Jupiter o hmotnostech m_1 a m_2 vykonávají keplerovský kruhový pohyb kolem těžiště Sluneční soustavy. V rovině jejich vzájemného oběhu se pohybuje asteroid mnohem menší hmotnosti m, takže pohyb Slunce ani Jupitera nijak neovlivňuje.



Označíme-li celkovou hmotnost soustavy Slunce a Jupitera $M = m_1 + m_2$ a relativní hmotnost Jupitera $\alpha = m_2/M$, můžeme napsat Lagrangeovu funkci pro asteroid v težišťové soustavě

$$L = \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + GmM\left[\frac{1-\alpha}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1(t)|} + \frac{\alpha}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2(t)|}\right], \tag{1}$$

kde kartézská poloha asteroidu je $\mathbf{r} = (x, y)$. Polohy Slunce a Jupitera závisí na čase, konkrétně pro kruhové orbity je $\mathbf{r}_1(t) = -a\,\alpha\,(\cos\omega t,\, \sin\omega t)$ a $\mathbf{r}_2(t) = a\,(1-\alpha)\,(\cos\omega t,\, \sin\omega t)$, kde a je vzdálenost Jupitera od Slunce a ω je úhlová rychlost jejich vzájemného oběhu.

1. Ukažte, že transformací $(x, y) = (\bar{x}\cos\omega t - \bar{y}\sin\omega t,\ \bar{x}\sin\omega t + \bar{y}\cos\omega t)$ do soustavy $(\bar{x}, \bar{y})$ korotující spolu s m_1 a m_2 budou obě tělesa ležet na ose $\bar{x}$ a že Lagrangeova funkce je

$$L = \tfrac{1}{2}m\Big[(\dot{\bar{x}}-\omega\,\bar{y})^2+(\dot{\bar{y}}+\omega\,\bar{x})^2\Big]+GmM\left[\frac{1-\alpha}{\sqrt{(\bar{x}+\alpha\,a)^2+\bar{y}^2}}+\frac{\alpha}{\sqrt{(\bar{x}-(1-\alpha)\,a)^2+\bar{y}^2}}\right]. \quad (2)$$

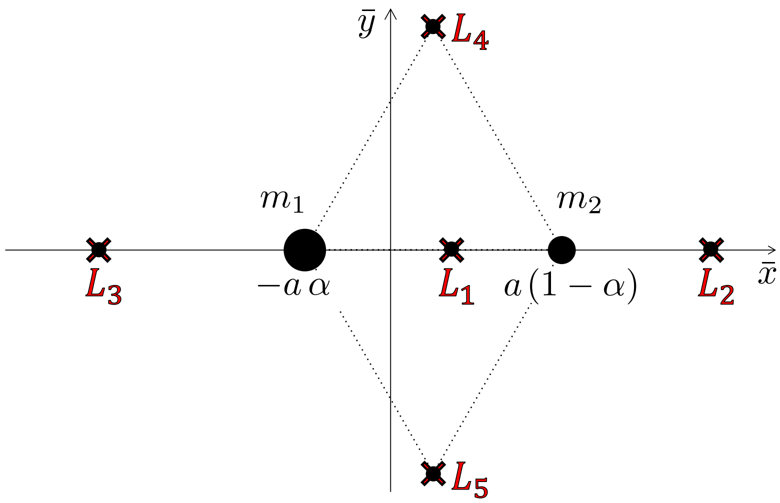
2. Přechodem do neinerciální soustavy se v Lagrangeově funkci nově započetla odstředivá a Coriolisova síla. Přesvědčte se o tom následovně: Lagrangeovy pohybové rovnice bez vlivu gravitace (položením $G = 0$) by měly odpovídat působení síly $\mathbf{F} = m\,\omega^2\,\bar{\mathbf{r}} - 2\,m\,\boldsymbol{\omega}\times\dot{\bar{\mathbf{r}}}$, kde $\bar{\mathbf{r}} = (\bar{x}, \bar{y})$ a vektor úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$ je orientován v kladném směru osy z.

3. Lagrangeova funkce (2) nezávisí na čase, takže zobecněná energie h je integrálem pohybu. Explicitně odvoďte tuto veličinu a ukažte, že zachovávající se energii h v rotující soustavě nelze získat pouhou změnou znaménka v (2). Důvodem je, že člen $\frac{1}{2}m\,\omega^2(\bar{x}^2+\bar{y}^2)$ odpovídající odstředivé síle se sice chová jako potenciál (mění znaménko), ale člen lineární v rychlostech odpovídající Coriolisově síle v energii nevystupuje, protože tato síla působí kolmo na rychlost a nekoná tudíž práci.

4. Napište Lagrangeovy rovnice odpovídající (2).

5. Z nich pak odvoďte rovnice pro stacionární polohu tělesa m v soustavě $(\bar{x}, \bar{y})$ tím, že položíte časové derivace všech poloh i rychlostí rovné nule. Použijte vyjádření úhlové rychlosti $\omega^2 = GM/a^3$ oběhu Jupitera a Slunce ze 3. Keplerova zákona.

6. V případě $\bar{y} \neq 0$ ověřte, že existují dvě řešení, a to přesně ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka, $\bar{x} = (\frac{1}{2}-\alpha)\,a$, $\bar{y} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\,a$, což jsou hledané Lagrangeovy body L_4 a L_5.



Řešením rovnic získaných v 5. bodě lze najít další tři Lagrangeovy body ležící na $\bar{y} = 0$. V tomto případě platí pro polohy bodů v bezrozměrné souřadnici $\xi = \bar{x}/a$ rovnice

$$\xi - (1-\alpha)\,\frac{\xi+\alpha}{|\,\xi+\alpha|^3} - \alpha\,\frac{\xi-(1-\alpha)}{|\,\xi-(1-\alpha)|^3} = 0\,. \quad (3)$$

Tu je nutno řešit numericky. Má vždy tři reálné kořeny, tzv. kolineární Lagrangeovy body: L_1 mezi Sluncem a Jupiterem, L_2 vpravo od Jupitera a L_3 vlevo od Slunce.

J. Podolský, ÚTF, 3. 11. 2021